Spektrálne kolokačné metódy a vlastnéčísla Laplaceovho operátora

Veronika Bozděchová, Jiří Púček, Marek Mikloš

Charles University, Czech Republic

Úvod

'Najprimitívnejší model pre vychýlenie dosiek je daný rovnicou'

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - K^2 \Delta u = 0, \tag{1}$$

"kde u je vychýlenie dané ako zobrazenie $u : (t, \vec{x}) \in \ \times \ ^2 \mapsto$ ""Pre stojaté vlnenie má riešenie 1 tvar:"

$$-\Delta \widehat{u} = \frac{\omega^2}{K^2} \widehat{u} \tag{2}$$

"Ak označíme $L =_{def} -\Delta$ a $\lambda =_{def} \frac{\omega^2}{K^2}$ z 2 dostaneme:"

$$-L\widehat{u} = \lambda \widehat{u} \tag{3}$$

"Z čoho dostaneme po dosadení vhodných okrajových podmienok úlohu pre nájdenie vlastných vektorov lineárneho operátora."

"Chceme nájsť vlastné vektory a vlastné čísla Laplaceovho operátora v $\Omega \subset {}^2$ s nulovou Dirichletovou podmienkou. Chceme teda riešiť:"

$$-\Delta\widehat{u} = \lambda\widehat{u} \tag{4}$$

$$\widehat{u}|_{\partial\Omega} = 0 \tag{5}$$

Hodnoty $\widehat{u} v interpolačných [x_i, y_k]$ bodoch označíme ako $\widehat{u}_{i,k}$, dostávame:

$$\widehat{u}_{i,k} =_{def} (\widehat{u}_x)_{i,k} =_{def} \widehat{u}(x_i, y_k). \tag{6}$$

Aproximácie parciálnych derivácií podľa x a y budú označené ako $(\widehat{u}_x)_{i,k}$ a $(\widehat{u}_y)_{i,k}$. Teda

$$(\widehat{u}_x)_{i,k} =_{def} \frac{\partial\widehat{u}}{\partial x}(x, y)\ |_{x=x_i, y=y_k} \tag{7a}$$

$$(\widehat{u}_y)_{i,k} =_{def} \frac{\partial\widehat{u}}{\partial y}(x, y)\ |_{x=x_i, y=y_k} \tag{7b}$$

Matlab kód

Zadefinujeme jednotlivé konstanty a vektory, se kterými pracujeme (speciálně pro jeden pevný konec máme $a_4 = \frac{F}{EIzz} = \frac{g\rho d a^2}{EIzz}$).

```
g=9.81;rho=650;d=10;x=[-d/2,d/2];a=0.25;a1=0;a2=0;a3=0;a4=0;
E=10^5;Izz=1;n=20;
```

Dále si vybereme funkci $f(x)$, která nám udává hustotu působící síly na jednotku délky. Tato funkce nám dává pravou stranu naší obyčejné diferenciální rovnice.

```
f=@(x)␣-g*rho*a^2*1.^(x);
L=E*Izz*diffmat([n␣n+4],4,x);
```

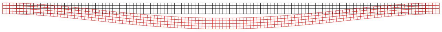
Pro případ dvou případně jednoho pevného konce volíme dané okrajové podmínky. V textu níže můžeme vidět příslušné rovnice příslušné okrajovým podmínkám pro jeden pevný konec (pro případ dvou pevných konců $T_1 = T_3, T_2 = T_4$ s tím, že hranice je nyní $+\frac{d}{2}$ místo $-\frac{d}{2}$).

```
T1=diffrow(n+4,0,-d/2,x);T3=diffrow(n+4,1,-d/2,x);T2=diffrow(n+4,2,d/2,x);T4=diffrow(n+4,3,d/2,x);
```

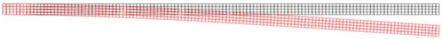
Sestavíme naši maticovou soustavu a vyřešíme ji.

```
A=[L;T1;T2;T3;T4];
rhs=[gridsample(f,n);a1;a2;a3;a4];
u=A\rhs;
```

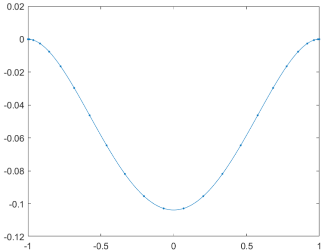
Porovnání Mathematica x Matlab



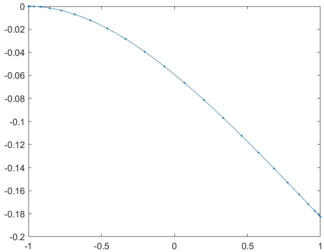
Obrázek 1. Mathematica (pevné konce)



Obrázek 2. Mathematica (pevný konec)



Obrázek 3. Matlab (pevné konce)



Obrázek 4. Matlab (pevný konec)