

# MATEMATICKÉ KYVADLO

J. PÚČEK, L. KOŠÁRKOVÁ, M. FUKSA

ABSTRACT. Zkoumáme řešení rovnici matematického kyvadla pomocí explicitní Eulerovy metody, Runge-Kuttovy metody a

## CONTENTS

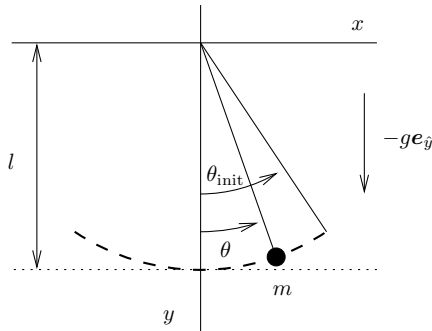
1. Úvod	1	4. Numerický výpočet	3
2. Fyzikální kontext	1	4.1. Explicitní Eulerova metoda	3
3. Perioda kmitů	2	4.2. Rungeova-Kuttova metoda	6
3.1. Přímý výpočet pomocí aproximace eliptického integrálu	2		

## 1. ÚVOD

V tomto dokumentu budeme zkoumat pohyb matematického kyvadla. Jehož dynamický systém je ukázkovým příkladem systému s periodickým pohybem. Hlavním předmětem zkoumání je, jak se mění chování numerického řešení vůči aproximaci analytického řešení za použití různých numerických metod.

## 2. FYZIKÁLNÍ KONTEXT

Kyvadlo o kterém budeme pojednávat je definováno jako na obrázku. Délka závěsu kyvadla je  $l$  a kyvadlo se hýbe v homogenním gravitačním poli s gravitačním zrychlením  $g$ .



Matematické kyvadlo.

Rovnice pro popis pohybu kyvadla vypadá následovně:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0. \quad (1)$$

Problém s rovnicí (1) je, že se jedná o rovnici *nelineární*. Pro nelineární rovnice je velmi obtížné najít explicitní řešení, vyjádřené pomocí elementárních funkcí.

Ve speciálním případě malých kmitů, když  $\theta$  je dostatečně malá ve všech časech, můžeme použít následující aproximaci pro malé úhly  $\sin \theta \approx \theta$  a převést naši nelineární rovnici (1) na rovnici lineární:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta = 0. \quad (2)$$

Hlavní otázkou je, zdali *dynamika* zlinearizovaného systému je vůbec podobná dynamice nelineárního systému. Ukazuje se, že určité porozumění dynamice plynoucí z rovnice (1) lze získat studováním aproximace (2) či studováním lepších aproximací stejného typu.

## 3. PERIODA KMITŮ

Jelikož neznáme explicitní vyjádření řešení diferenciální rovnice, tak to vypadá, že nelze nalázt funkci periody oscilace  $T$ . Ukazuje se ovšem, že nemusíme vyřešit rovnici, abychom našli periodu oscilací. Perioda oscilace pro linearizovaný systém (2) je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (3)$$

Díky linearizaci se dá předpokládat, že perioda oscilace kyvadla vypuštěného s nulovou rychlostí z počáteční pozice danou počátečním úhlem  $\theta_0$  je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} (1 + a\theta_0^2 + b\theta_0^4 + \dots), \quad (4)$$

kde  $a, b \in \mathbb{R}$  jsou reálné konstanty a navíc díky symetrii problému řada nemá liché členy.

**3.1. Přímý výpočet pomocí aproximace eliptického integrálu.** Vynásobením rovnice (1) členem  $\frac{d\theta}{dt}$  a následnou úpravou dostáváme

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \frac{g}{l} \cos \theta \right) = 0. \quad (5)$$

Rovnice (5) navíc implikuje

$$\left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{2g}{l} \cos \theta + C, \quad (6)$$

kde  $C$  je integrační konstanta, která je pevně dána počáteční podmínkou. Když  $\theta = \theta_0$ , tak chceme aby kyvadlo mělo nulovou úhlovou rychlost  $\frac{d\theta}{dt}|_{\theta=\theta_0} = 0$  a tím dostáváme

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l}} \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}. \quad (7)$$

(předpokládejme, že  $\frac{d\theta}{dt} \geq 0$ .) Všimněme si, že (7) implikuje, že rychlost  $\frac{d\theta}{dt}$  zůstává omezená po celou dobu. Nyní využijme větu o derivaci inverzní funkce a tím získáváme

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2g}{l}} \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}. \quad (8)$$

To jest diferenciální rovnice pro čas vyjádřený jako funkce úhlu. Tuto rovnici řešíme separací proměnných.

$$dt = \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{l}} \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}. \quad (9)$$

Pokud zintegrujeme rovnici od  $\theta = 0$  do  $\theta = \theta_0$ , tak na levé straně dostáváme  $\frac{T}{4}$ . Potom vzorec pro periodu oscilace je ve tvaru

$$\frac{T}{4} = \int_{\theta=0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{l}} \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}. \quad (10)$$

Integrál na pravé straně nelze analyticky vypočítat, ale získat její aproximaci možné je. Přepíšeme si nejdřív integrál do uchopitelnější formy, kde využijeme, že platí známá rovnost  $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$ .

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\theta=0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}}. \quad (11)$$

Integrand je nyní typu  $\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$  a dobrá substituce pro  $\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$  je  $y = \sin \varphi$ . Toho nyní využijme.

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\theta=0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} = \left| \begin{array}{l} \sin \varphi = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta_0}{2}} \\ \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta_0}{2}} d\theta \\ \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta_0}{2}}} d\varphi = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}}}{\sin \frac{\theta_0}{2}} d\theta \\ \sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}} d\varphi = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta_0}{2}} \sin^2 \frac{\varphi}{2} d\theta \end{array} \right| = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (12)$$

Kde jsme definovali  $k =_{\text{def}} \sin \frac{\theta_0}{2}$ . Integrál je nyní ve tvaru *eliptického integrálu*, který je definovaný pro všechny  $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$  a tedy dostáváme

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (13a)$$

kde

$$k =_{\text{def}} \sin \frac{\theta_0}{2}. \quad (13b)$$

Na integrant (13a) použijeme nyní jen Taylorův rozvoj a dostáváme

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \approx 1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \varphi \approx 1 + \frac{1}{8} \theta_0^2 \sin^2 \varphi, \quad (14)$$

a následnou integrací a využití vztahů (14) a (13a) dostáváme

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \approx 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \left( 1 + \frac{1}{8} \theta_0^2 \sin^2 \varphi \right) d\varphi = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right). \quad (15)$$

Případně můžeme využít na výpočet řady software (například *WolframMathematica* nebo jiné). Konkrétně pro *WolframMathematica* můžeme využít příkaz

```
k=Sin[\[Theta]/2]
Series[1/(Sqrt[1-k^2*(Sin[x])^2]),{\[Theta],0,4}]
Integrate[4*Sqrt[l/g]*Series[1/(Sqrt[1-k^2*(Sin[x])^2]),{\[Theta],0,n}],{x,0,Pi/2}]
```

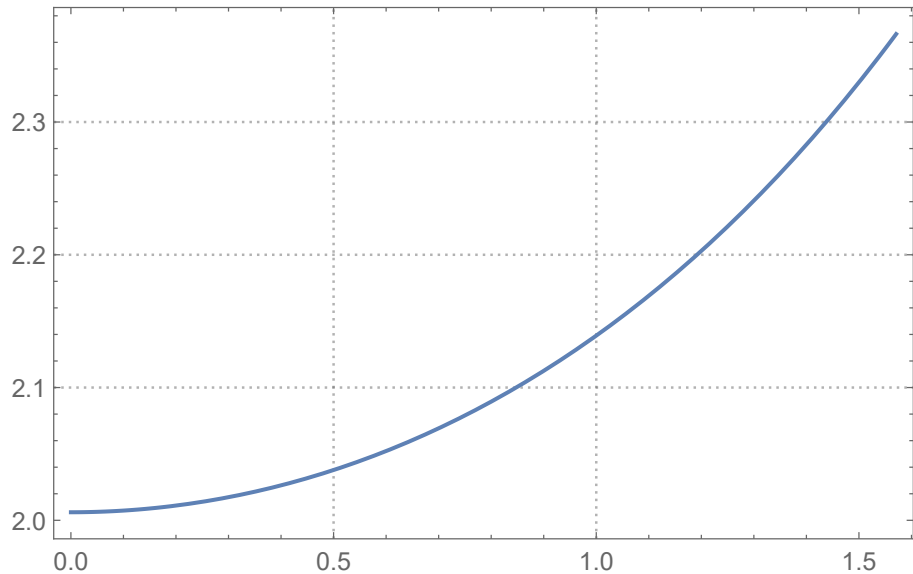
Kde za  $n$  volíme, do jakého řádu chceme aproximovat. Například pro  $n = 10$  dostáváme

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \frac{1}{16} \theta_0^2 + \frac{11}{3072} \theta_0^4 + \frac{173}{737280} \theta_0^6 + \frac{22931}{1321205760} \theta_0^8 + \frac{1319183}{951268147200} \theta_0^{10} \right)$$

Do inetgrálu také můžeme dosadit konkrétní hodnoty a dostat dosti přesnou hodnotu periody v závislosti na čase. Výsledkem jsou diskrétní hodnoty periody, viz. tabulka (1), které jsme následně proložily polynomem (metoda nejmenších čtverců), viz. graf (2).

$\theta_0$	T
0.001	2.00607
0.101	2.00735
0.201	2.01114
0.301	2.01749
0.401	2.02642
0.501	2.038
0.601	2.05231
0.701	2.06947
0.801	2.08959
0.901	2.11284
1.001	2.13938
1.101	2.16945
1.201	2.20327
1.301	2.24115
1.401	2.28339
1.501	2.33039

(1)



(2)

#### 4. NUMERICKÝ VÝPOČET

Jak již bylo řečeno, je obtížné najít explicitní řešení rovnice (1) ve tvaru elementárních funkcí. Proto se nyní budeme zabývat numerickým řešením v programu *Wolfram Mathematica* (příkaz *NDSolve*), kde existuje několik numerických metod na výpočet řešení diferenciálních rovnic.

**4.1. Explicitní Eulerova metoda.** Explicitní Eulerova metoda je jedna z jednodušších, avšak také jedna z nejméně spolehlivých.

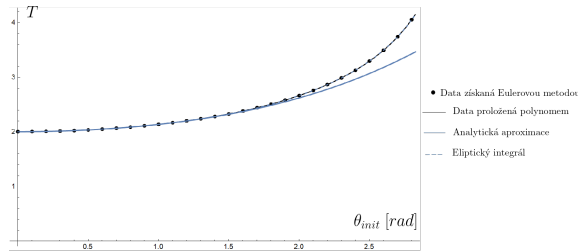
*Princip explicitní Eulerovy metody:* Mějme diferenciální rovnici  $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$  s počátečními podmínkami v čase  $t_0 = 0$ :  $\theta(t_0) = \theta_0$ ,  $\frac{d\theta}{dt}(t_0) = 0$ . Pak řešení v čase  $t_i = i\Delta t$ ,  $i = 1, \dots, n$  (zde ve vysvětlení principu pro zjednodušení předpokládejme rovnoměrné dělení a tedy  $\Delta t$  je časový krok metody) získáme ze soustavy rovnic:

$$\theta_{i+1} = \theta_i + v_i \Delta t \quad (16)$$

$$v_{i+1} = v_i - \frac{g}{l} \sin \theta_i \Delta t \quad (17)$$

, kde  $v_i = \frac{d\theta_i}{dt}$ ,  $\theta_i = \theta(t_i)$ ,  $\theta_{i+1} = \theta(t_{i+1})$ ,  $v_i = v(t_i)$ ,  $v_{i+1} = v(t_{i+1})$

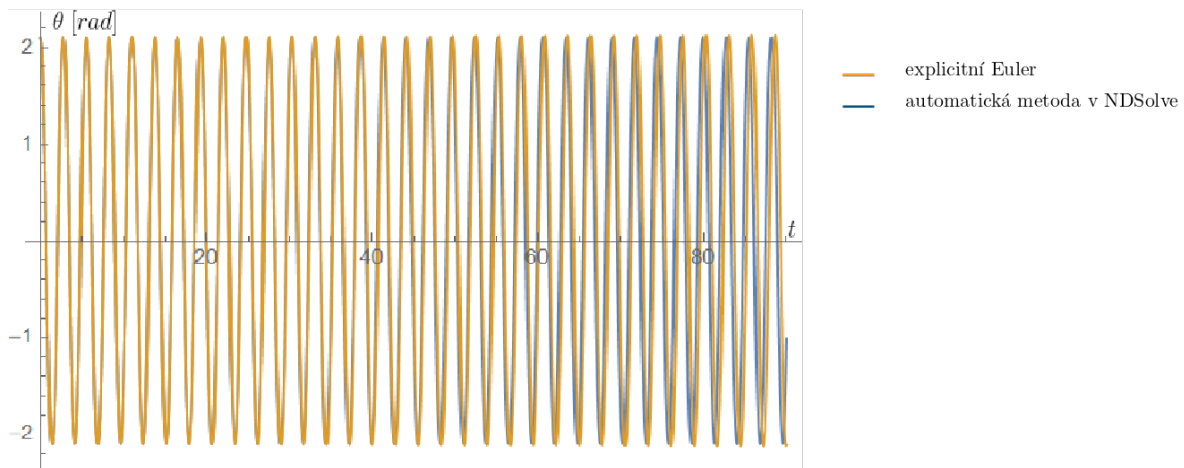
*Výpočet periody:* Nejdříve zkoumejme periodu  $T$ , kterou získáme jako dobu, za kterou se dostane kyvadlo z úhlu  $\theta_0$  (počáteční výchylky) do úhlu  $\theta = 0$ . Vykresleme si graf, který ukazuje závislost periody na počáteční výchylce pro různé metody výpočtu.



Závislost  $T$  na  $\theta_0$

V tomto případě jsou data získaná explicitní Eulerovou metodou velmi podobná jako výsledky řešení periody pomocí eliptického integrálu. To je dáno tím, že numerické řešení pomocí explicitní Eulerovy metody se s přesnými řešením rozbíhá až pro vyšší časy. Výsledky analytické aproximace z rovnice (15) už se ale velmi liší.

Na následujícím grafu je vykreslené řešení pomocí explicitní Eulerovy metody, které se zvyšujícím se časem začíná předbíhat řešení pomocí automatické metody příkazu `NDSolve`. Lze také vidět, že u řešení explicitní Eulerovou metodou se zvětšuje výchylka, což je příčinou toho, že tato metoda nezachovává celkovou energii systému.



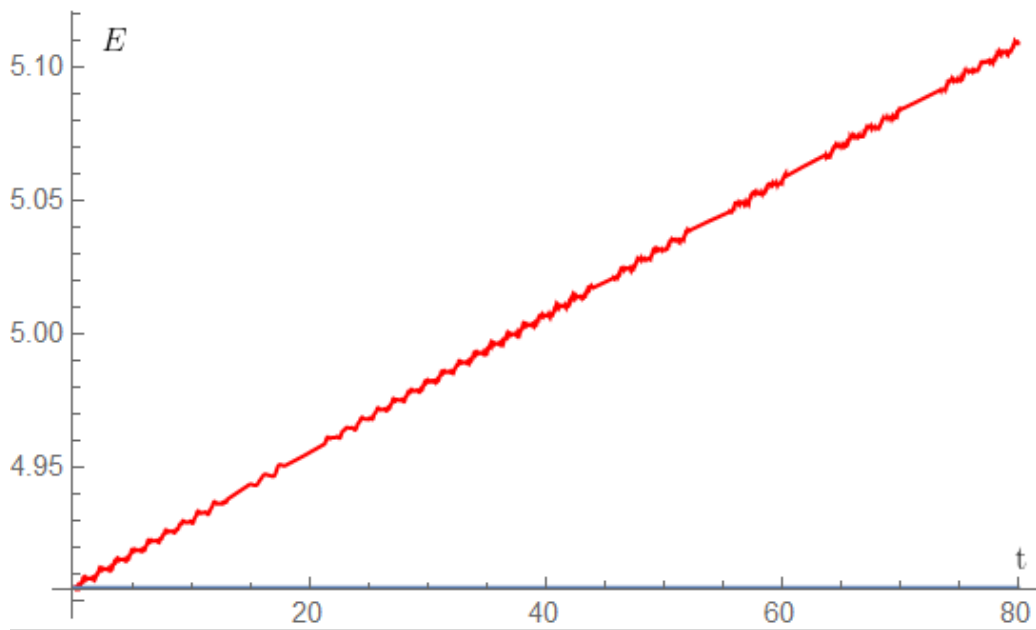
explicitní Euler vs automatická metoda v `NDSolve`

První integrál rovnice (1) je ve tvaru

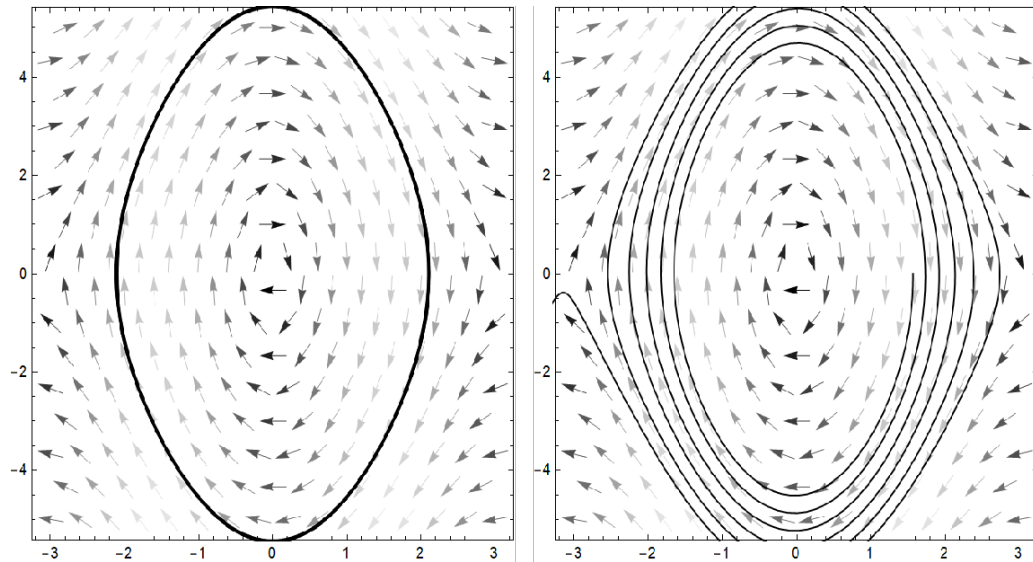
$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \frac{g}{l} \cos \theta = E. \quad (18)$$

Neboli podél řešení rovnice (1) musí být první integrál roven konstantě  $E$ , což je celková mechanická energie systému. Pro explicitní Eulerovu metodu to ovšem neplatí. Například pro  $\theta_0 = 2\pi/3$  by mělo být podél celého řešení  $E = 4.905$ , ale Eulerova metoda dává pro zvyšující se čas větší hodnoty  $E$ :

Nezachovávání energie explicitní Eulerovou metodou si můžeme znázornit i trajektorií ve vektorovém poli  $\{\theta[t], \frac{d\theta}{dt}[t]\}$ . Na levém obrázku je výpočet pro  $\theta_0 = \pi/2$ , kde se v Eulerově metodě automaticky používá minimální velikost počátečního kroku. Během každé periody (což odpovídá jednomu oběhu na obrázku) se energie pomalu zvyšuje a na obrázku se tak po několika periodách křivka zhušťuje. Abychom to viděli zřetelněji, volme Eulerovu metodu opět s  $\theta_0 = \pi/2$ , ale nyní s námi zvolenou hodnotou počátečního kroku např. `StartingStepSize` →  $1/99$ , tím se zvýší nepřesnost, systém začne nabírat energii rychleji a výchylka se začne patrně zvětšovat (pravý obrázek).



Eulerova metoda a energie



*Nalevo:* automaticky zabudovaná Eulerova metoda

*Napravo:* Eulerova metoda s  $StartingStepSize \rightarrow 1/99$

**4.2. Rungeova-Kuttova metoda.** Rungeova-Kuttova metoda je jednokroková metoda pro numerické řešení obyčejných diferenciálních rovnic. Pro rovnici ve tvaru  $y' = f(t, y)$  s okrajovou podmínkou  $y(t_0) = y_0$ , vhodně zvolený krok  $h > 0$  a  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , je  $n + 1$  krok metody definován následovně.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$t_{n+1} = t_n + h$$

$$k_1 = hf(t_n, y_n)$$

$$k_2 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = hf(t_n + h, y_n + k_3)$$

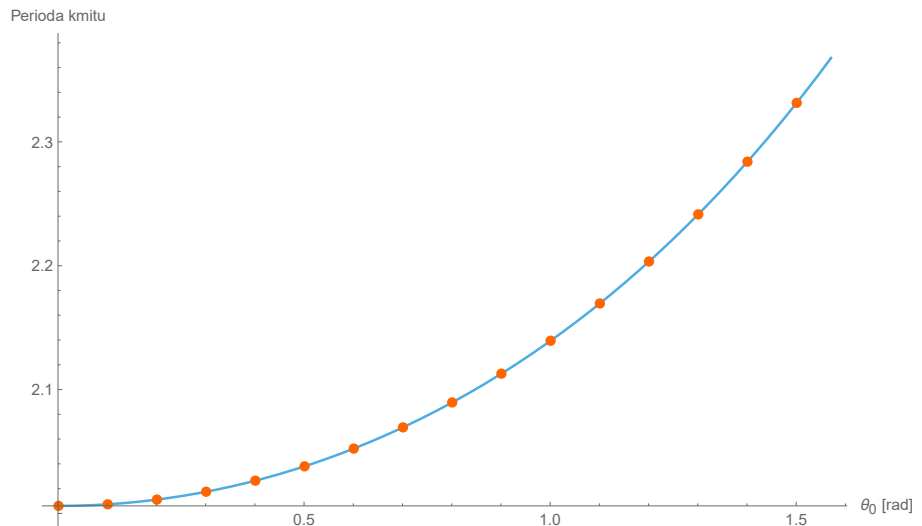
4.2.1. *Aproximace periody.* V následujícím jsme použily program *Mathematica* k nalezení numerické aproximace periody kyvadla v závislosti na počáteční podmínce. V první části kódu jsme si zadefinovaly funkci:

```
Period[\[Theta]_0_] := (time := 0;
NDSolve[{\[Theta]''[t] + g/l Sin[\[Theta][t]] == 0, \[Theta][0] == \[Theta]_0, \[Theta]'[0] == 0,
  WhenEvent[\[Theta][t] == 0, {time = t, "StopIntegration"}]}, \[Theta], {t, 0, 3 },
  Method -> "ExplicitRungeKutta"];
4*time)
```

Která na vstupu přijímá počáteční výchylku kyvadla a obratem nám vrací periodu kmitu. Pro naše potřeby jsme uvažovali tyto hodnoty konstant:  $g = 9.81, l = 1$ .

Poté si stačilo nechat příkazem `Table[]` s použitím naší funkce vytvořit tabulku hodnot (1). Následně jsme hodnoty metodou nejmenšího čtverce proložili polynomem a ten, společně s diskretními hodnotami, vykreslili do grafu (2).

$\theta_0$	T
0.001	2.00607
0.101	2.00735
0.201	2.01114
0.301	2.01749
0.401	2.02642
0.501	2.038
0.601	2.05231
0.701	2.06947
0.801	2.0896
0.901	2.11285
1.001	2.13942
1.101	2.16953
1.201	2.20344
1.301	2.24148
1.401	2.28401
1.501	2.33149



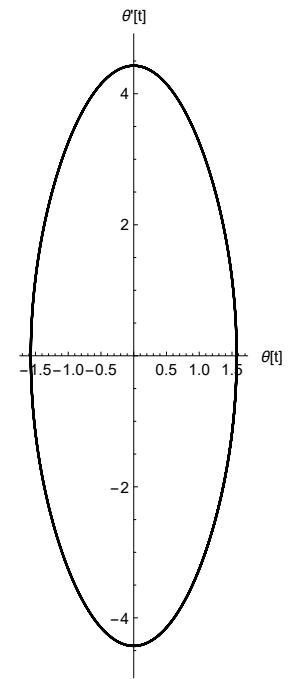
4.2.2. *Energie systému.* V této sekci zkoumáme jak dobře explicitní Rungeova-Kuttova metoda zachovává celkovou energii systému. Konkrétně se budeme zabývat počáteční podmínkou:  $\theta_0 = \pi/2$ . První z vizualizací bude tzv. fázový diagram, což je parametrický graf vývoje celkové energie v čase. Na grafech tohoto typu lze velmi přímočaře identifikovat co se s energií děje. Pokud graf vypadá jako spirála, která se v čase vyvíjí směrem dovnitř/ven tak celková energie systému klesá/stoupá, ale pokud se jedná o uzavřenou křivku, tak je celková energie konstantní.

Pro vykreslení diagramu bylo potřeba si rovnici (2) převést na systém rovnic prvního řádu a následně ho numericky vyřešit pro funkce  $x[t]$  a  $y[t]$ . Kde funkce  $x$  reprezentuje funkci  $\theta[t]$  a funkce  $y$  její první derivaci (rychlost)  $\theta'[t]$ . Příslušný kód v Mathematice vypadá následovně:

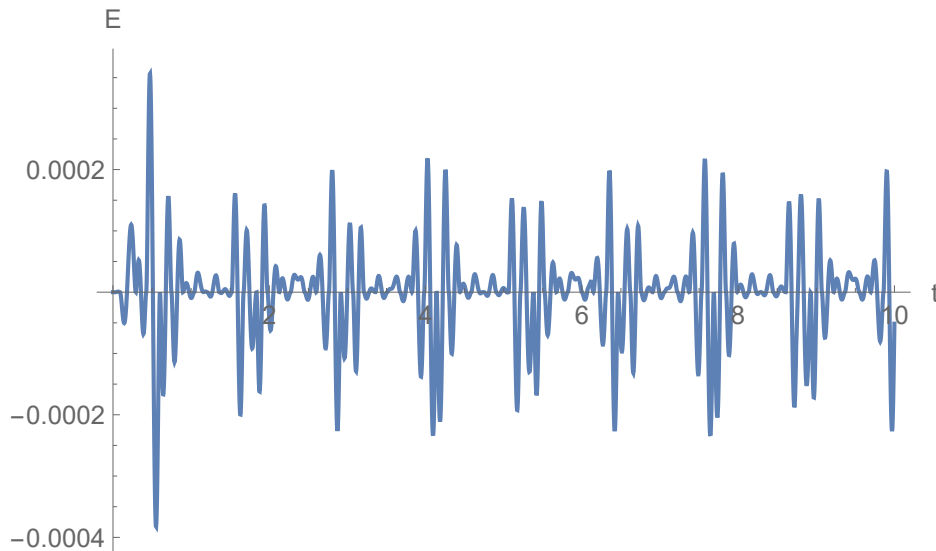
```
system := NDSolve[{x'[t] == y[t], y'[t] == -g/l Sin[x[t]], x[0] == Pi/2,
  y[0] == 0}, {x[t], y[t]}, {t, 0, 10}, Method -> "ExplicitRungeKutta"]
```

Plod naší snahy můžete nahlédnout na obrázku (3), kde nám vyšel fázový diagram uzavřený. Což znamená, že na první pohled je Rungeova-Kuttova metoda dobrá v zachovávání celkové energie.

K tomu jak moc dobrá v tomto metoda je, nám pomůže druhá vizualizace, kterou bude graf hodnoty celkové energie v čase. Celkovou energii získáme sečtením energie kinetické a potenciální, což v našem případě konkrétně vypadá následovně:  $E = \frac{1}{2}(\theta')^2 - \frac{g}{l}\cos\theta$ . Takže stačí Rungeovo-Kuttovou metodou získat funkci  $\theta[t]$ , tu dosadit do výrazu pro  $E[t]$  a funkci energie si nechat vykreslit v čase. Pro náš případ je výsledkem graf (4), z kterého jde vidět, že celková energie je skoro konstantní až na výkyvy v řádu  $\pm 0.0004$ .



Fázový diagram.



Celková energie v čase