

MATEMATICKÉ KYVADLO

J. PÚČEK, L. KOŠÁRKOVÁ, M. FUKSA

ABSTRACT.

CONTENTS

1. Úvod	1	4. Numerický výpočet	4
2. Fyzikální kontext	1	4.1. Explicitní Eulerova metoda	4
3. Perioda kmitů	2	4.2. Rungeova-Kuttova metoda	6
3.1. Direct computation via approximation of elliptic integral	2		

1. ÚVOD

V tomto dokumentu budeme zkoumat pohyb matematického kyvadla. Jehož dynamický systém je ukázkovým příkladem systému s periodickým pohybem. Z matematického hlediska, je cílem tohoto tutoriálu:

- prohloubit vaše znalosti o dynamice plynoucí z obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu,
- ukázat, že lze získat určitou kvantitativní informaci o dynamice systému, bez toho aniž by jsme explicitně řešily jeho diferenciální rovnici.

2. FYZIKÁLNÍ KONTEXT

Kyvadlo o kterém budeme pojednávat je definováno obrázkem 1. Délka závěsu kyvadla je l a kyvadlo se hýbe v homogenním gravitačním poli s gravitačním zrychlením g .

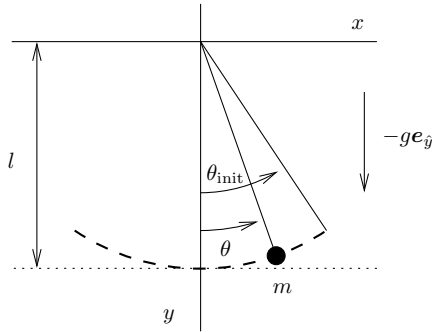


Figure 1. Matematické kyvadlo.

Existuje několik způsobů jak si diferenciální rovnici pro pohyb kyvadla odvodit, ale tím se zde zabývat nebudeme. Rovnice pro popis pohybu kyvadla zní následovně:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0. \quad (1)$$

Problém s rovnicí (1) je, že se jedná o rovnici *nelineární*. Pro nelineární rovnice je velmi obtížné najít explicitní řešení, vyjádřené pomocí elementárních funkcí.

Ve speciálním případě malých kmitů, když θ je dostatečně malá ve všech časech, můžeme použít následující aproximaci pro malé úhly $\sin \theta \approx \theta$ a převést naši nelineární rovnici (1) na rovnici lineární:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta = 0. \quad (2)$$

Hlavní otázkou je, zdali *dynamika* zlinearizovaného systému je vůbec podobná dynamice nelineárního systému. Ukazuje se, že určité porozumění dynamice plynoucí z rovnice (1) lze získat studováním aproximace (2) či studováním lepších aproximací stejného typu.

3. PERIODA KMITŮ

Since we do not have an explicit formula for the solution, it seems that it is impossible to find a formula for the period of oscillations T . It however turns out that the period of oscillations can be found without solving the governing equations. The period of oscillations as predicted by the linearised governing equation (2) is

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (3)$$

Regarding the pendulum governed by the nonlinear equation (1), we can conjecture that the period of oscillations of the pendulum that is released with zero velocity from the initial position given by the angle θ_{init} is

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + a\theta_{\text{init}}^2 + b\theta_{\text{init}}^4 + \dots\right), \quad (4)$$

where $a, b \in \mathbb{R}$ are real constants. (In virtue of the symmetry of the problem we know that there are no odd terms in the expansion.) We now derive an exact formula for the period of oscillations, and we find the value of the coefficient a in the expansion (4).

3.1. Direct computation via approximation of elliptic integral. The multiplication of (1) by $\frac{d\theta}{dt}$ yields

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \frac{g}{l} \cos \theta \right) = 0. \quad (5)$$

(This equation is the conservation of energy.) Equation (5) implies that

$$\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{2g}{l} \cos \theta + C, \quad (6)$$

where C is an integration constant. The value of the constant is fixed by the initial condition. If $\theta = \theta_{\text{init}}$ we want the pendulum to have the zero angular velocity $\frac{d\theta}{dt}|_{\theta=\theta_{\text{init}}} = 0$, hence we get

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l}} \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_{\text{init}}}. \quad (7)$$

(Let us assume that we investigate the motion of the pendulum in the time interval where $\frac{d\theta}{dt} \geq 0$.) Note that (7) or for that matter even (6) imply that the velocity $\frac{d\theta}{dt}$ remains bounded for all times! This is an important qualitative feature and we will exploit it later.

Now we use the theorem on the derivative of inverse functions, and we arrive at

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2g}{l}} \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_{\text{init}}}}. \quad (8)$$

This is a differential equation for the time expressed as a function of the angle. We solve this equation by separation of variables,

$$dt = \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{l}} \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_{\text{init}}}}. \quad (9)$$

If we integrate the equation from $\theta = 0$ to $\theta = \theta_{\text{init}}$, then on the left-hand side we get $\frac{T}{4}$. (One quarter of period is necessary to move from the vertical position $\theta = 0$ to the extreme position $\theta = \theta_{\text{init}}$.) Consequently, the formula for the period of oscillation reads

$$\frac{T}{4} = \int_{\theta=0}^{\theta_{\text{init}}} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{l}} \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_{\text{init}}}}. \quad (10)$$

The integral on the right-hand side is difficult to evaluate in the sense that we have no simple explicit formula for the integral. However, if our objective is to derive an asymptotic expansion for the period of oscillations, we can try to approximate the integral as well.

Before we manipulate the integral we rewrite it in a more convenient form. One of the objectives is to eliminate the annoying singularity in the integrand. We recall the trigonometric identity $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$, and we use it in the integrand

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\theta=0}^{\theta_{\text{init}}} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_{\text{init}}}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}}. \quad (11)$$

The integrand has now the structure $\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$, and we know that if we want to calculate $\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$, then the good substitution is $y = \sin \varphi$. Motivated by this observation we manipulate the integral as follows

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\theta=0}^{\theta_{\text{init}}} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_{\text{init}}}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} = \left| \begin{array}{l} \sin \varphi = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta_{\text{init}}}{2}} \\ \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta_{\text{init}}}{2}} d\theta \\ \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta_{\text{init}}}{2}}} d\varphi = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}}}{\sin \frac{\theta_{\text{init}}}{2}} d\theta \\ \sqrt{\sin^2 \frac{\theta_{\text{init}}}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}} d\varphi = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta_{\text{init}}}{2}} \sin^2 \frac{\varphi}{2} d\theta \end{array} \right| = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (12)$$

where we have denoted $k =_{\text{def}} \sin \frac{\theta_{\text{init}}}{2}$. The integral on the right-hand side looks much better than the original integral. In particular the integrand is now well defined for all $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Let us summarise our findings so far. The formula for the period of oscillations is

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (13a)$$

where

$$k =_{\text{def}} \sin \frac{\theta_{\text{init}}}{2}. \quad (13b)$$

The integral in (13a) is referred to as the *elliptic integral*. The elliptic integral can be completely evaluated for all k using a series expansion, see, for example. We however need something less complicated. Using the Taylor expansion for small θ_{init} , and consequently for small k , we see that

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \approx 1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \varphi \approx 1 + \frac{1}{8} \theta_{\text{init}}^2 \sin^2 \varphi, \quad (14)$$

where we have used the fact that $\sin \alpha \approx \alpha$ and $\frac{1}{\sqrt{1-y}} \approx 1 + \frac{1}{2}y$. Making use of the expansion (14) in (13a) we arrive at

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \approx 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{8} \theta_{\text{init}}^2 \sin^2 \varphi \right) d\varphi = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\theta_{\text{init}}^2}{16} \right). \quad (15)$$

Nebo si integrál můžeme přepsat do programu *Mathematica*, který vnímá eliptický integrál jako speciální funkci a může ho bezpracně rozvinout až do libovolného členu:

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{16} \theta_{\text{init}}^2 + \frac{11}{3072} \theta_{\text{init}}^4 + \frac{173}{737280} \theta_{\text{init}}^6 + \frac{22931}{1321205760} \theta_{\text{init}}^8 + \frac{1319183}{951268147200} \theta_{\text{init}}^{10} \right)$$

Do inetrálu také můžeme dosadit konkrétní hodnoty a dostat dosti přesnou hodnotu periody v závislosti na čase. Výsledkem jsou diskrétní hodnoty periody, viz. tabulka (1), které jsme následně proložily polynomem (metoda nejmenších čtverců), viz. graf (2).

θ_{init}	T
0.001	2.00607
0.101	2.00735
0.201	2.01114
0.301	2.01749
0.401	2.02642
0.501	2.038
0.601	2.05231
0.701	2.06947
0.801	2.08959
0.901	2.11284
1.001	2.13938
1.101	2.16945
1.201	2.20327
1.301	2.24115
1.401	2.28339
1.501	2.33039

Table 1

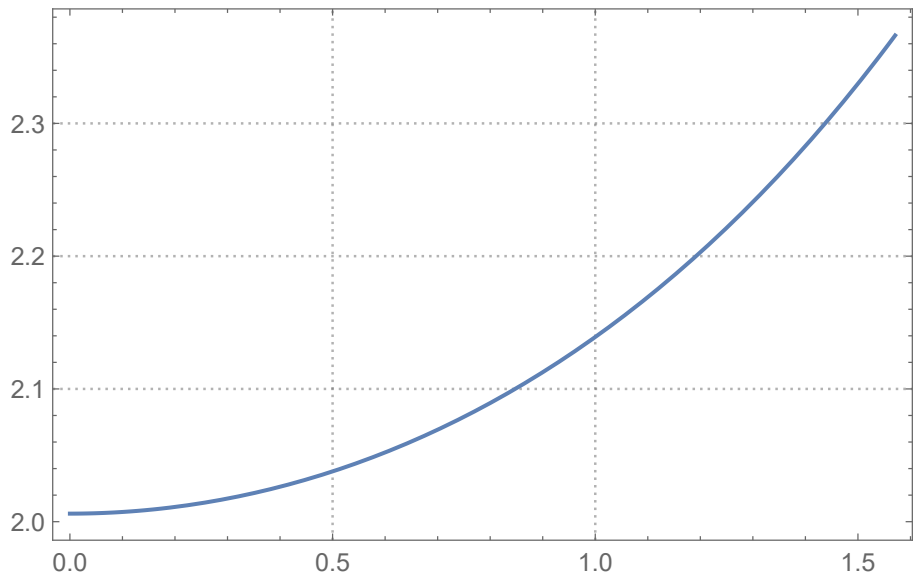


Figure 2

4. NUMERICKÝ VÝPOČET

Jak již bylo řečeno, je obtížné najít explicitní řešení rovnice (1) ve tvaru elementárních funkcí. Proto se nyní budeme zabývat numerickým řešením v programu Wolfram Mathematica (příkaz NDSolve), kde existuje několik numerických metod na výpočet řešení diferenciálních rovnic.

4.1. Explicitní Eulerova metoda. Explicitní Eulerova metoda je jedna z jednodušších, avšak také jedna z nejméně spolehlivých.

Princip explicitní Eulerovy metody: Mějme diferenciální rovnici $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$ s počátečními podmínkami v čase $t_0 = 0$: $\theta(t_0) = \theta_{\text{init}}$, $\frac{d\theta}{dt}(t_0) = 0$. Pak řešení v čase $t_i = i\Delta t$, $i = 1, \dots, n$ (zde ve vysvětlení principu pro zjednodušení předpokládejme rovnoměrné dělení a tedy Δt je časový krok metody) získáme ze soustavy rovnic:

$$\theta_{i+1} = \theta_i + v_i \Delta t \quad (16)$$

$$v_{i+1} = v_i - \frac{g}{l} \sin \theta_i \Delta t \quad (17)$$

, kde $v_i = \frac{d\theta_i}{dt}$, $\theta_i = \theta(t_i)$, $\theta_{i+1} = \theta(t_{i+1})$, $v_i = v(t_i)$, $v_{i+1} = v(t_{i+1})$

Výpočet periody: Nejdříve zkoumejme periodu T , kterou získáme jako dobu, za kterou se dostane kyvadlo z úhlu θ_{init} (počáteční výchylky) do úhlu $\theta = 0$. Vykresleme si graf, který ukazuje závislost periody na počáteční výchylce pro různé metody výpočtu.

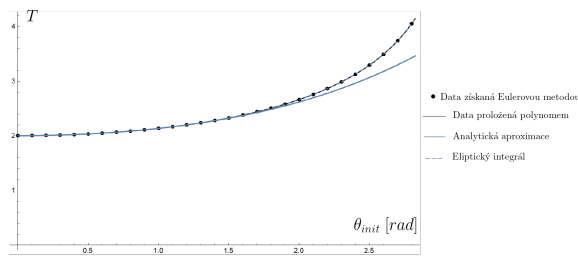


Figure 3. Závislost T na θ_{init}

V tomto případě jsou data získaná explicitní Eulerovou metodou velmi podobná jako výsledky řešení periody pomocí eliptického integrálu. To je dáno tím, že numerické řešení pomocí explicitní Eulerovy metody se s přesných řešením rozbíhá až pro vyšší časy. Výsledky analytické aproximace z rovnice (15) už se ale velmi liší.

Na následujícím grafu je vykreslené řešení pomocí explicitní Eulerovy metody, které se zvyšujícím se časem začíná předbíhat řešení pomocí automatické metody příkazu NDSolve. Lze také vidět, že u řešení explicitní Eulerovou metodou se zvětšuje výchylka, což je příčinou toho, že tato metoda nezachovává celkovou energii systému.

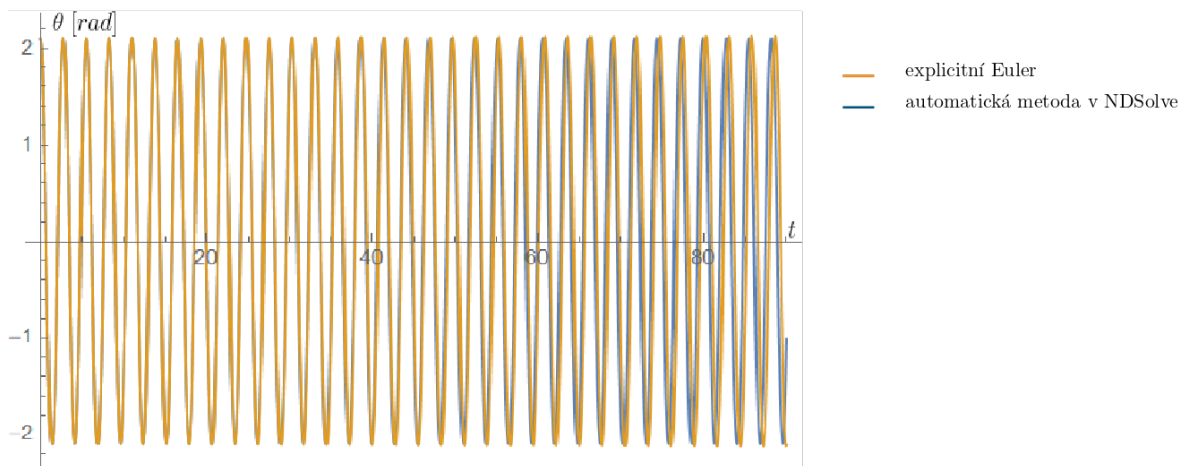


Figure 4. explicitní Euler vs automatická metoda v NDSolve

První integrál rovnice (1) je ve tvaru

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \frac{g}{l} \cos \theta = E. \quad (18)$$

Neboli podél řešení rovnice (1) musí být první integrál roven konstantě E , což je celková mechanická energie systému. Pro explicitní Eulerovu metodu to ovšem neplatí. Například pro $\theta_{\text{init}} = 2\pi/3$ by mělo být podél celého řešení $E = 4.905$, ale Eulerova metoda dává pro zvyšující se čas větší hodnoty E :

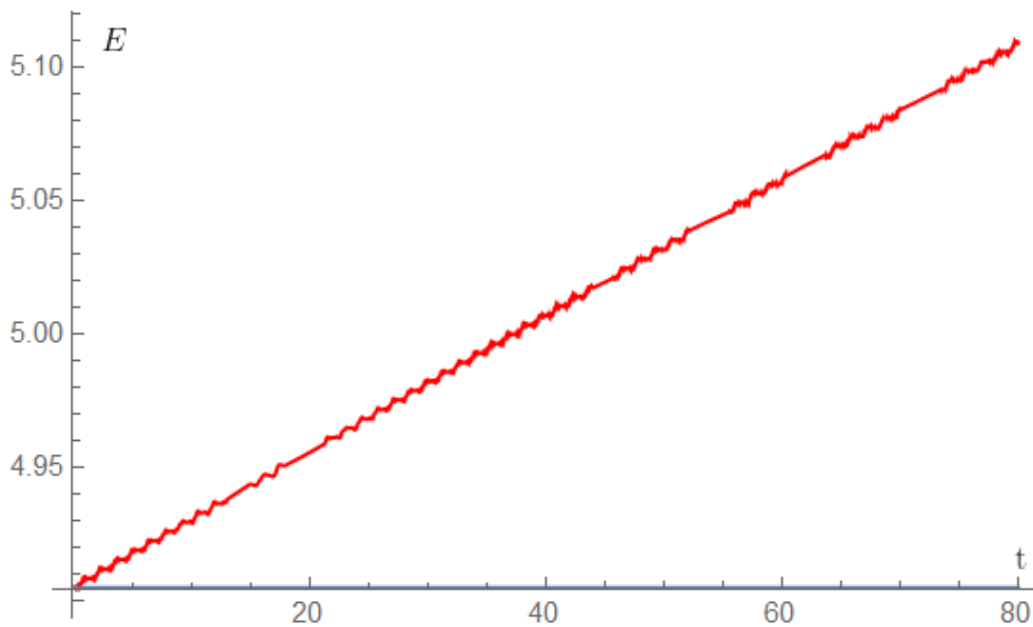


Figure 5. Eulerova metoda a energie

Nezachovávání energie explicitní Eulerovou metodou si můžeme znázornit i trajektorií ve vektorovém poli $\{\theta[t], \frac{d\theta}{dt}[t]\}$. Na levém obrázku je výpočet pro $\theta_{\text{init}} = \pi/2$, kde se v Eulerově metodě automaticky používá minimální velikost počátečního kroku. Během každé periody (což odpovídá jednomu oběhu na obrázku) se energie pomalu zvyšuje a na obrázku se tak po několika periodách křivka zhušťuje. Abychom to viděli zřetelněji, volme Eulerovu metodu opět s $\theta_{\text{init}} = \pi/2$, ale nyní s námi zvolenou hodnotou počátečního kroku např. `StartingStepSize- > 1/99`, tím se zvýší nepřesnost, systém začne nabírat energii rychleji a výchylka se začne patrně zvětšovat (pravý obrázek).

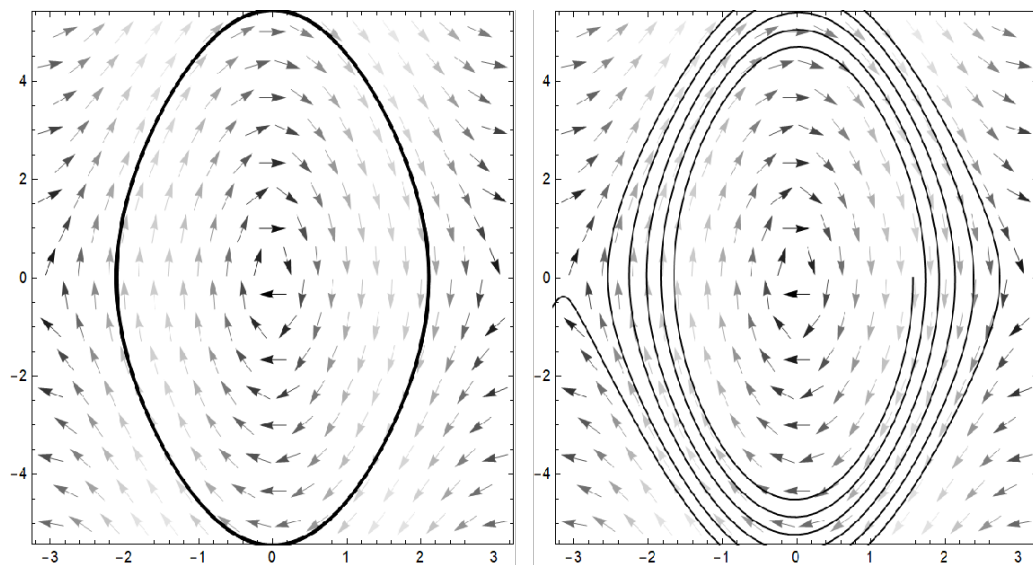


Figure 6. *Nalevo:* automaticky zabudovaná Eulerova metoda
Napravo: Eulerova metoda s `StartingStepSize- > 1/99`

4.2. Rungeova-Kuttova metoda. Rungeova-Kuttova metoda je jednokroková metoda pro numerické řešení obyčejných diferenciálních rovnic. Pro rovnici ve tvaru $y' = f(t, y)$ s okrajovou podmínkou $y(t_0) = y_0$, vhodně zvolený krok $h > 0$ a $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, je $n + 1$ krok metody definován následovně.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$t_{n+1} = t_n + h$$

$$k_1 = hf(t_n, y_n)$$

$$k_2 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = hf(t_n + h, y_n + k_3)$$

4.2.1. *Aproximace periody.* V následujícím jsme použili program *Mathematica* k nalezení numerické aproximace periody kyvadla v závislosti na počáteční podmínce. V první části kódu jsme si zadefinovaly funkci:

```
Period[\[Theta]init_] := (time := 0;
NDSolve[{\[Theta]''[t] + g/l Sin[\[Theta][t]] == 0, \[Theta][0] == \[Theta]init, \[Theta]'[0] == 0,
  WhenEvent[\[Theta][t] == 0, {time = t, "StopIntegration"}]}, \[Theta], {t, 0, 3 },
  Method -> "ExplicitRungeKutta"];
4*time)
```

Která na vstupu přijímá počáteční výchylku kyvadla a obratem nám vrací periodu kmitu. Pro naše potřeby jsme uvažovali tyto hodnoty konstant: $g = 9.81, l = 1$.

Poté si stačilo nechat příkazem `Table[]` s použitím naší funkce vytvořit tabulku hodnot (1). Následně jsme hodnoty metodou nejmenšího čtverce proložili polynomem a ten, společně s diskretními hodnotami, vykreslili do grafu (2).

θ_{init}	T
0.001	2.00607
0.101	2.00735
0.201	2.01114
0.301	2.01749
0.401	2.02642
0.501	2.038
0.601	2.05231
0.701	2.06947
0.801	2.0896
0.901	2.11285
1.001	2.13942
1.101	2.16953
1.201	2.20344
1.301	2.24148
1.401	2.28401
1.501	2.33149

Table 2

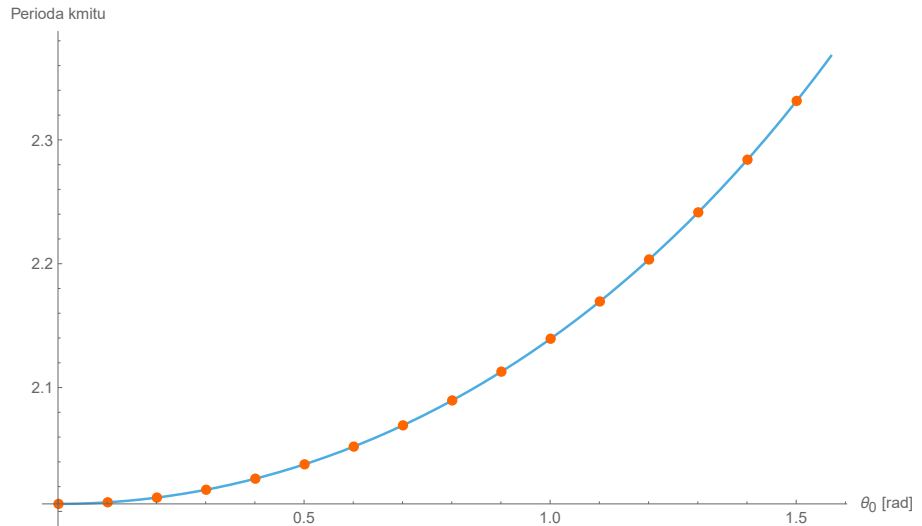


Figure 7

4.2.2. *Energie systému.* V této sekci zkoumáme jak dobře explicitní Rungeova-Kuttova metoda zachovává celkovou energii systému. Konkrétně se budeme zabývat počáteční podmínkou: $\theta_{init} = \pi/2$. První z vizualizací bude tzv. fázový diagram, což je parametrický graf vývoje celkové energie v čase. Na grafech tohoto typu lze velmi přímočaře identifikovat co se s energií děje. Pokud graf vypadá jako spirála, která se v čase vyvíjí směrem dovnitř/ven tak celková energie systému klesá/stoupá, ale pokud se jedná o uzavřenou křivku, tak je celková energie konstantní.

Pro vykreslení diagramu bylo potřeba si rovnici (2) převést na systém rovnic prvního řádu a následně ho numericky vyřešit pro funkce $x[t]$ a $y[t]$. Kde funkce x reprezentuje funkci $\theta[t]$ a funkce y její první derivaci (rychlost) $\theta'[t]$. Příslušný kód v Mathematice vypadá následovně:

```
system := NDSolve[{x'[t] == y[t], y'[t] == -g/l Sin[x[t]], x[0] == Pi/2,
  y[0] == 0}, {x[t], y[t]}, {t, 0, 10}, Method -> "ExplicitRungeKutta"]
```

Plod naší snahy můžete nahlédnout na obrázku (3), kde nám vyšel fázový diagram uzavřený. Což znamená, že na první pohled je Rungeova-Kuttova metoda dobrá v zachovávání celkové energie.

K tomu jak moc dobrá v tomto metoda je, nám pomůže druhá vizualizace, kterou bude graf hodnoty celkové energie v čase. Celkovou energii získáme sečtením energie kinetické a potenciální, což v našem případě konkrétně vypadá následovně: $E = \frac{1}{2}(\theta')^2 - \frac{g}{l}\cos\theta$. Takže stačí Rungeovo-Kuttovou metodou získat funkci $\theta[t]$, tu dosadit do výrazu pro $E[t]$ a funkci energie si nechat vykreslit v čase. Pro náš případ je výsledkem graf (4), z kterého jde vidět, že celková energie je skoro konstantní až na výkyvy v řádu ± 0.0004 .

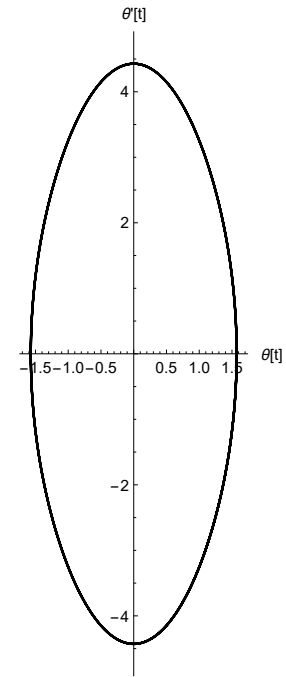


Figure 8. Fázový diagram.

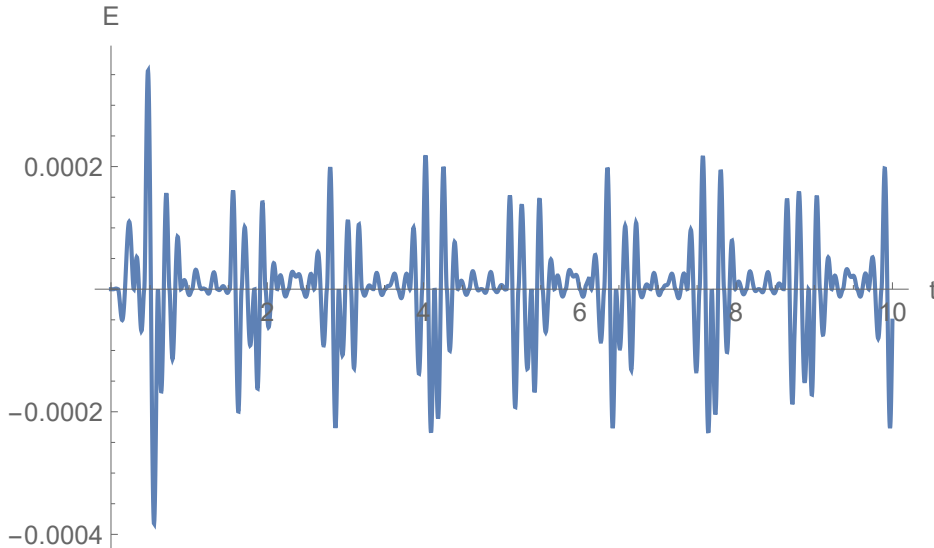


Figure 9. Celková energie v čase