

# MATEMATICKÉ KYVADLO

J. PÚČEK, L. KOŠÁRKOVÁ, M. FUKSA

ABSTRAKT. Zkoumáme řešení rovnici matematického kyvadla pomocí explicitní Eulerovy metody, Runge-Kuttovy metody a metody korektor-prediktor.

## OBSAH

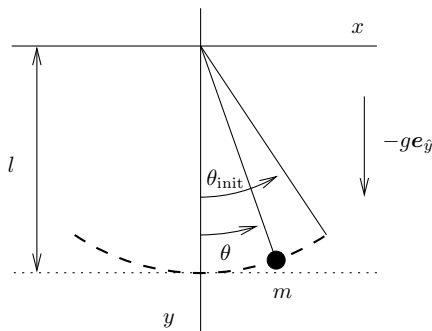
1. Úvod	1	4.1. Explicitní Eulerova metoda	4
2. Fyzikální kontext	1	4.2. Rungeova-Kuttova metoda	7
3. Perioda kmitů	2	4.3. Metoda korektor-prediktor	8
3.1. Přímý výpočet přes eliptický integrál	2	5. Závěr	9
4. Numerický výpočet	4		

## 1. ÚVOD

V tomto dokukmentu budeme zkoumat pohyb matematického kyvadla, jehož dynamický systém je ukázkovým příkladem systému s periodickým pohybem. Hlavním předmětem zkoumání je, jak se mění chování numerického řešení vůči aproximaci analytického řešení za použití různých numerických metod.

## 2. FYZIKÁLNÍ KONTEXT

Kyvadlo o kterém budeme pojednávat je definováno jako na obrázku. Délka závěsu kyvadla je  $l$  a kyvadlo se hýbe v homogenním gravitačním poli s gravitačním zrychlením  $g$ .



Obrázek 1. Matematické kyvadlo.

Rovnice pro popis pohybu kyvadla vypadá následovně:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0. \quad (1)$$

Problém s rovnicí (1) je, že se jedná o rovnici *nelineární*. Pro nelineární rovnice je velmi obtížné najít explicitní řešení, vyjádřené pomocí elementárních funkcí. Ve speciálním případě malých kmitů, když  $\theta$  je dostatečně malá ve všech časech, můžeme použít následující aproximaci pro malé úhly  $\sin \theta \approx \theta$  a převést naši nelineární rovnici (1) na rovnici lineární:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta = 0. \quad (2)$$

Hlavní otázkou je, zdali *dynamika* zlinearizovaného systému je vůbec podobná dynamice nelineárního systému. Ukazuje se, že určité porozumění dynamice plynoucí z rovnice (1) lze získat studováním aproximace (2) či studováním lepších aproximací stejného typu.

## 3. PERIODA KMITŮ

Jelikož neznáme explicitní vyjádření řešení diferenciální rovnice, tak to vypadá, že nelze nalázt funkci periody oscilace  $T$ . Ukazuje se ovšem, že nemusíme vyřešit rovnici, abychom našli periodu oscilací. Perioda oscilace pro linearizovaný systém (2) je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (3)$$

Díky linearizaci se dá předpokládat, že perioda oscilace kyvadla vypuštěného s nulovou rychlostí z počáteční pozice danou počátečním úhlem  $\theta_0$  je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} (1 + a\theta_0^2 + b\theta_0^4 + \dots), \quad (4)$$

kde  $a, b \in \mathbb{R}$  jsou reálné konstanty a navíc díky symetrii problému řada nemá liché členy.

**3.1. Přímý výpočet přes eliptický integrál.** Vynásobením rovnice (1) členem  $\frac{d\theta}{dt}$  a následnou úpravou dostáváme

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \frac{g}{l} \cos \theta \right) = 0. \quad (5)$$

Rovnice (5) navíc implikuje

$$\left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{2g}{l} \cos \theta + C, \quad (6)$$

kde  $C$  je integrační konstanta, která je pevně dána počáteční podmínkou. Když  $\theta = \theta_0$ , tak chceme aby kyvadlo mělo nulovou úhlovou rychlost  $\frac{d\theta}{dt}|_{\theta=\theta_0} = 0$  a tím dostáváme

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l}} \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0} \quad (7)$$

(předpokládejme, že  $\frac{d\theta}{dt} \geq 0$ ). Všimněme si, že (7) implikuje, že rychlost  $\frac{d\theta}{dt}$  zůstává omezená po celou dobu. Nyní využijme větu o derivaci inverzní funkce a tím získáváme

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2g}{l}} \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}. \quad (8)$$

To jest diferenciální rovnice pro čas vyjádřený jako funkce úhlu. Tuto rovnici řešíme separací proměnných.

$$dt = \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{l}} \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}. \quad (9)$$

Pokud zintegrujeme rovnici od  $\theta = 0$  do  $\theta = \theta_0$ , tak na levé straně dostáváme  $\frac{T}{4}$ . Potom vzorec pro periodu oscilace je ve tvaru

$$\frac{T}{4} = \int_{\theta=0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{l}} \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}. \quad (10)$$

Integrál na pravé straně nelze analyticky vypočítat, ale získat její aproximaci možné je. Přepišme si nejdřív integrál do uchopitelnější formy, kde využijeme, že platí známá rovnost  $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$ .

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\theta=0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}}. \quad (11)$$

Integrand je nyní typu  $\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$  a dobrá substituce pro  $\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$  je  $y = \sin \varphi$ . Toho nyní využijme.

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\theta=0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} = \left| \begin{array}{l} \sin \varphi = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta_0}{2}} \\ \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta_0}{2}} d\theta \\ \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta_0}{2}}} d\varphi = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}}}{\sin \frac{\theta_0}{2}} d\theta \\ \sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}} d\varphi = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta_0}{2}} \sin^2 \frac{\varphi}{2} d\theta \end{array} \right| = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (12)$$

Kde jsme definovali  $k =_{\text{def}} \sin \frac{\theta_0}{2}$ . Integrál je nyní ve tvaru *eliptického integrálu*, který je definovaný pro všechny  $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$  a tedy dostáváme

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (13a)$$

kde

$$k =_{\text{def}} \sin \frac{\theta_0}{2}. \quad (13b)$$

Na integrant (13a) použijeme nyní jen Taylorův rozvoj a dostáváme

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \approx 1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \varphi \approx 1 + \frac{1}{8} \theta_0^2 \sin^2 \varphi, \quad (14)$$

a následnou integrací a využitím vztahů (14) a (13a) dostáváme

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \approx 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \left( 1 + \frac{1}{8} \theta_0^2 \sin^2 \varphi \right) d\varphi = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right). \quad (15)$$

Případně můžeme využít na výpočet řady software (například *Wolfram Mathematica* nebo jiné). Konkrétně pro *Wolfram Mathematica* můžeme využít příkaz

```
k=Sin[\[Theta]/2]
Series[1/(Sqrt[1-k^2*(Sin[x])^2]),{\[Theta],0,4}]
Integrate[4*Sqrt[l/g]*Series[1/(Sqrt[1-k^2*(Sin[x])^2]),{\[Theta],0,n}],{x,0,Pi/2}]
```

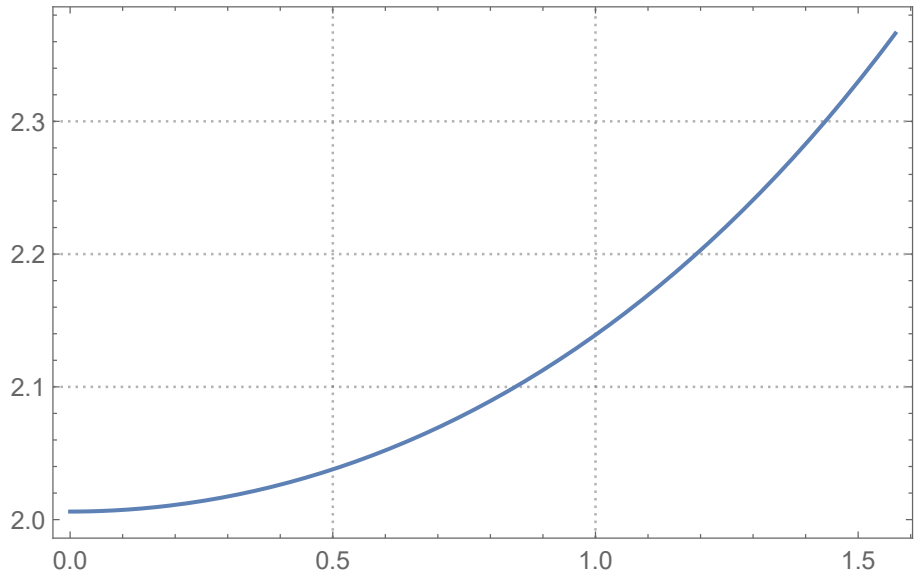
Kde za  $n$  volíme, do jakého řádu chceme aproximovat. Například pro  $n = 10$  dostáváme

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \frac{1}{16} \theta_0^2 + \frac{11}{3072} \theta_0^4 + \frac{173}{737280} \theta_0^6 + \frac{22931}{1321205760} \theta_0^8 + \frac{1319183}{951268147200} \theta_0^{10} \right) \quad (16)$$

Do inetgrálu také můžeme dosadit konkrétní hodnoty a dostat dosti přesnou hodnotu periody v závislosti na čase. Výsledkem jsou diskrétní hodnoty periody, viz. tabulka (1), které jsme následně proložili polynomem (metoda nejmenších čtverců), viz. graf (1).

$\theta_0$	T
0.001	2.00607
0.101	2.00735
0.201	2.01114
0.301	2.01749
0.401	2.02642
0.501	2.038
0.601	2.05231
0.701	2.06947
0.801	2.08959
0.901	2.11284
1.001	2.13938
1.101	2.16945
1.201	2.20327
1.301	2.24115
1.401	2.28339
1.501	2.33039

Tabulka 1.



Graf 1.

Navíc z fyzikální představy víme, že pro  $\theta_0 = \pi$  se kyvadlo nachází ve stabilní poloze vratké, ve které by se mělo nacházet s periodou oscilace rovnu nekonečno za předpokladu, že na kyvadlo nepůsobí žádné vnější síly, což je systém popsáný právě (1). Dalo by se tedy předpokládat, že pro  $\theta_0 \rightarrow \pi$  se dá očekávat  $T \rightarrow \infty$ . Daný předpoklad pojďme nyní ověřit. V programu *Wolfram Mathematica* použijeme příkaz

```
NDSolve[{(g*Sin[y[t]])/l+(y'[Prime]\[Prime])[t]==0,
Derivative[1][y][0]==0,y[0]==x,WhenEvent[y[t]==0,{Print[t],
"StopIntegration"}]},y,{t,0,50}],
```

kde dosadíme za  $g = 9.81, l = 1, m = 1$  a za  $x$  dosazujeme  $\pi$  s námi určenou přesností (v tabulce značení  $10^{-n}$  znamená přesná hodnota  $\pi$  na  $n$  desetinných míst). Z tabulky vidíme, že námi numerická aproximace i přes stále menší rozdíl hodnot počáteční podmínky nezabrání periodě oscilace, aby dál rostla.

$\theta_0$	T
$10^{-1}$	6.71732
$10^{-2}$	10.9112
$10^{-3}$	12.1454
$10^{-4}$	14.5137
$10^{-5}$	4.76179
$10^{-6}$	19.0471
$10^{-7}$	23.9971
$10^{-8}$	27.3763
$10^{-9}$	27.6991
$10^{-10}$	31.1190

Tabulka 2.

## 4. NUMERICKÝ VÝPOČET

Jak již bylo řečeno, je nemožné najít explicitní řešení rovnice (1) ve tvaru elementárních funkcí. Programy, jako například *Wolfram Mathematica*, který zde budeme využívat, ovšem umožňují rychlé nalezení numerického řešení a to hned pomocí několika numerických metod s nastavitelnými parametry.

Stěžejní příkaz pro výpočet numerického řešení naší diferenciální rovnice (1) v softwaru *Wolfram Mathematica* bude:

```
NDSolve[{θ''[t] + (g/l)*Sin[θ[t]] == 0, θ[0] == θ₀, θ'[0] == 0}, θ, {t, 0, n}]
```

Přičemž po celý dokument budeme ve výpočtech uvažovat délku kyvadla  $l = 1$ ,  $m = 1$  a gravitační zrychlení  $g = 9.81$ .

Hlavním cílem bude příkazem *NDSolve* numericky určit periodu kmitů systému popsaného rovnicí (1), zjistit numerické řešení rovnice (1), prozkoumat její zachovávání/nezachovávání celkové mechanické energie během děje a všechny tyto body porovnat s reálným chováním matematického kyvadla. Výpočty budeme provádět postupně pomocí: explicitní Eulerovy metody, Rungeovy-Kuttovy metody a metody korektor-prediktor.

**4.1. Explicitní Eulerova metoda.** Explicitní Eulerova metoda je jedna z nejjednodušších a také nejméně spolehlivých.

**4.1.1. Princip explicitní Eulerovy metody.** Mějme diferenciální rovnici  $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$  s počátečními podmínkami v čase  $t_0 = 0$ :  $\theta(t_0) = \theta_0$ ,  $\frac{d\theta}{dt}(t_0) = 0$ . Pak řešení v čase  $t_i = i\Delta t$ ,  $i = 1, \dots, n$  (zde ve vysvětlení principu předpokládáme pro zjednodušení rovnoměrné dělení a tedy  $\Delta t$  je časový krok metody) získáme ze soustavy rovnic:

$$\theta_{i+1} = \theta_i + v_i \Delta t \quad (17)$$

$$v_{i+1} = v_i - \frac{g}{l} \sin \theta_i \Delta t \quad (18)$$

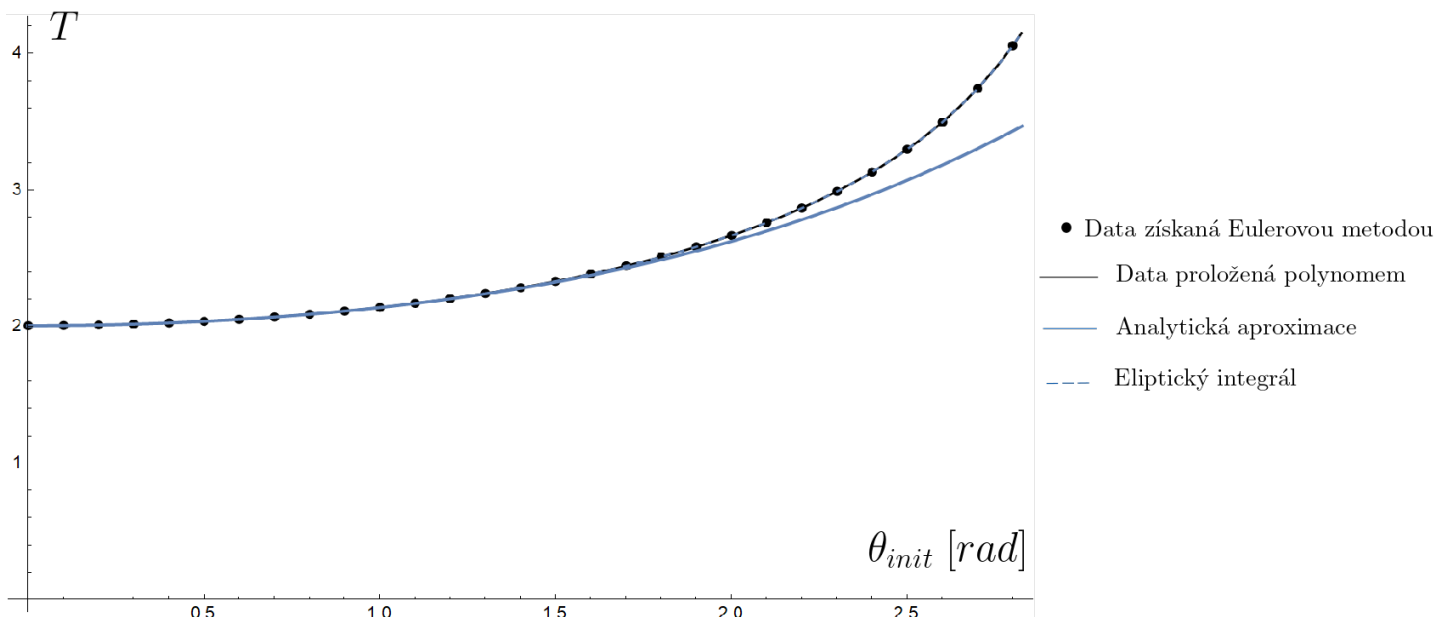
, kde  $v_i = \frac{d\theta_i}{dt}$ ,  $\theta_i = \theta(t_i)$ ,  $\theta_{i+1} = \theta(t_{i+1})$ ,  $v_i = v(t_i)$ ,  $v_{i+1} = v(t_{i+1})$

**4.1.2. Aproximace periody.** Nejdříve zkoumejme periodu  $T$ , kterou získáme jako 4krát dobu, za kterou se dostane kyvadlo z úhlu  $\theta_0$  (počáteční výchylky) do úhlu  $\theta = 0$ .

O takovýto výstup můžeme požádat *Mathematicu* příkazem

```
NDSolve[{θ''[t] + g/l*Sin[θ[t]] == 0, θ[0] == θ₀, θ'[0] == 0, WhenEvent[θ[t] == 0, {Print[t*4], "StopIntegration"}]}, θ, {t, 0, n}, Method -> "ExplicitEuler"]
```

Důležitou vlastností matematického kyvadla je závislost periody  $T$  na počáteční výchylce  $\theta_0$ , tuto závislost ukazuje graf (2).



Graf 2. Závislost  $T$  na  $\theta_0$  pro různé metody výpočtu.

Body, které jsme proložily polynomem, znázorňují hodnotu periody získané pomocí Eulerovy metody. Tyto data jsme porovnali s analytickou aproximací pomocí rovnice (20) do 4. řádu a s výpočtem periody přes eliptický integrál, který by měl dávat přesné hodnoty. V tomto případě se zdá být explicitní Eulerova metoda velmi přesná. To je dáno tím, že numerické řešení pomocí explicitní Eulerovy metody se s přesných řešením rozbíhá až pro vyšší časy. Zatímco výsledky analytické aproximace jsou pro větší počáteční výchylky už i v malých časech poměrně nedostatečné.

4.1.3. *Řešení rovnice (1).* Na grafu (3) je znázorněno řešení pohybu kyvadla vychýleného z počáteční výchylky  $\theta_0 = 2\pi/3$ . Modré řešení je výpočet pomocí Eulerovy metody:

```
euler = NDSolve[{\[Theta]''[t] + g/l*Sin\[Theta][t] == 0, \[Theta][0] == \[Theta]_{0},
\[Theta]'[0] == 0, \[Theta], {t, 0, n,}}, Method -> "ExplicitEuler"]
```

zároveň je zde oranžově vykresleno i řešení pomocí příkazu NDSolve, kde ale *Mathematica* vybere takovou numerickou metodu, aby bylo řešení co nejpřesnější a pro nás tedy teď bude dostatečně dobrou aproximací přesných kmitů kyvadla v závislosti na čase.

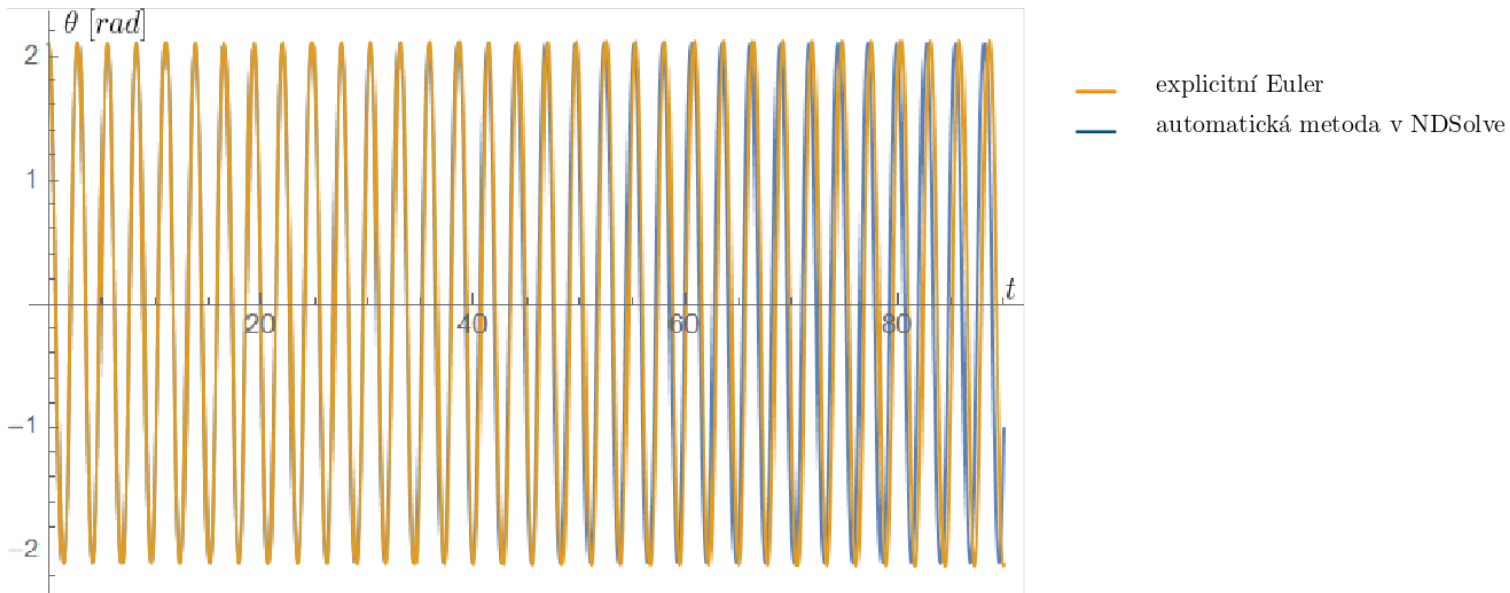
Příkaz kterým toho dosáhneme zní:

```
auto = NDSolve[{\[Theta]''[t] + g/l*Sin\[Theta][t] == 0, \[Theta][0] == \[Theta]_{0},
\[Theta]'[0] == 0, \[Theta], {t, 0, n,}}]
```

Abychom tyto metody mohli porovnat, dáme je do jednoho grafu příkazem:

```
Plot[Evaluate[{\[Theta][t] /. euler, \[Theta][t] /. auto}], {t, 0, 100}, PlotRange -> All]
```

Z grafu je patrné, že Eulerova metoda pro zvyšující se  $t$  začíná předbíhat druhé řešení a zároveň se u této metody zvyšuje amplituda. Důvodem je v tomto případě neschopnost Eulerovy metody zachovávat celkovou mechanickou energii systému, což si ukážeme ještě lépe za chvíli.



**Graf 3.** Explicitní Euler vs automatická metoda v NDSolve.

4.1.4. *Energie systému.* První integrál rovnice (1) je ve tvaru

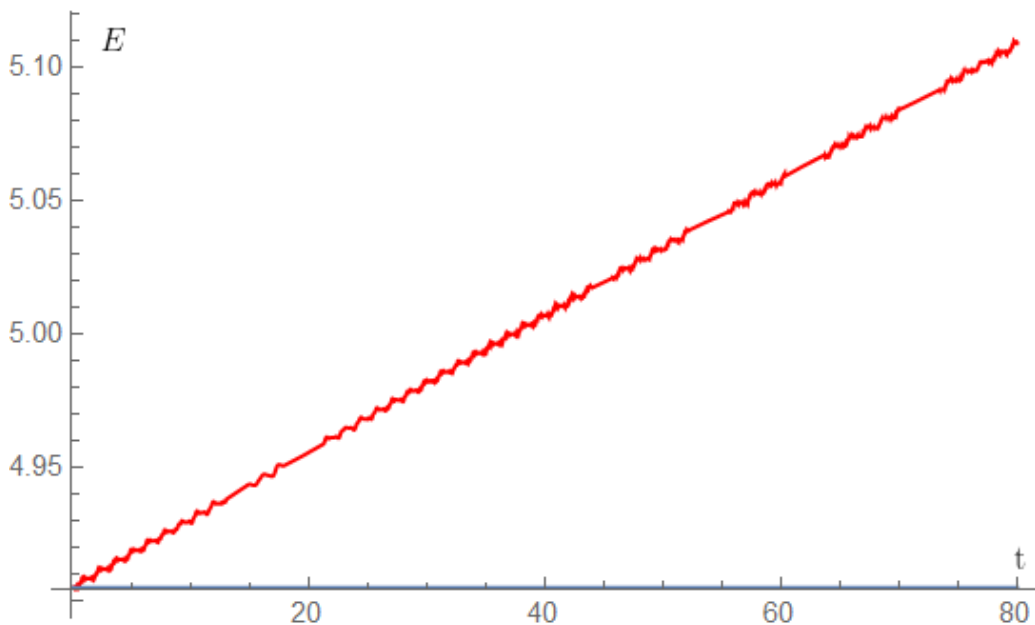
$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \frac{g}{l} \cos \theta = E. \quad (19)$$

Což říká, že podél řešení je první integrál roven konstantě  $E$ , neboli součtu kinetické a potenciální energie, tedy dohromady celkové mechanické energii systému.

Pro explicitní Eulerovu metodu tato rovnost ovšem neplatí. Volme například  $\theta_0 = 2\pi/3$ . Pro tuto počáteční výchylku by se měla zachovávat podél celého řešení celková energie  $E = 4.905$ . Eulerova metoda ale konstantní hodnotu  $E$  nezachovává, naopak s rostoucím časem energii čím dál víc zvyšuje.

Graf se dá vykreslit serií příkazů:

```
p1 = Plot[Evaluate[{((\[Theta]'[t])^2)/2 - (g/l) Cos\[Theta][t]} /. euler], {t,0,80},
PlotStyle -> Red, PlotRange -> All];
p2 = Plot[Evaluate[-g/l *Cos\[Theta]_{0}], {t,0,80}, PlotRange -> All];
Show[p1, p2, PlotRange -> All]
```



**Graf 4.** Energie v závislosti na čase pro Eulerovu metodu.

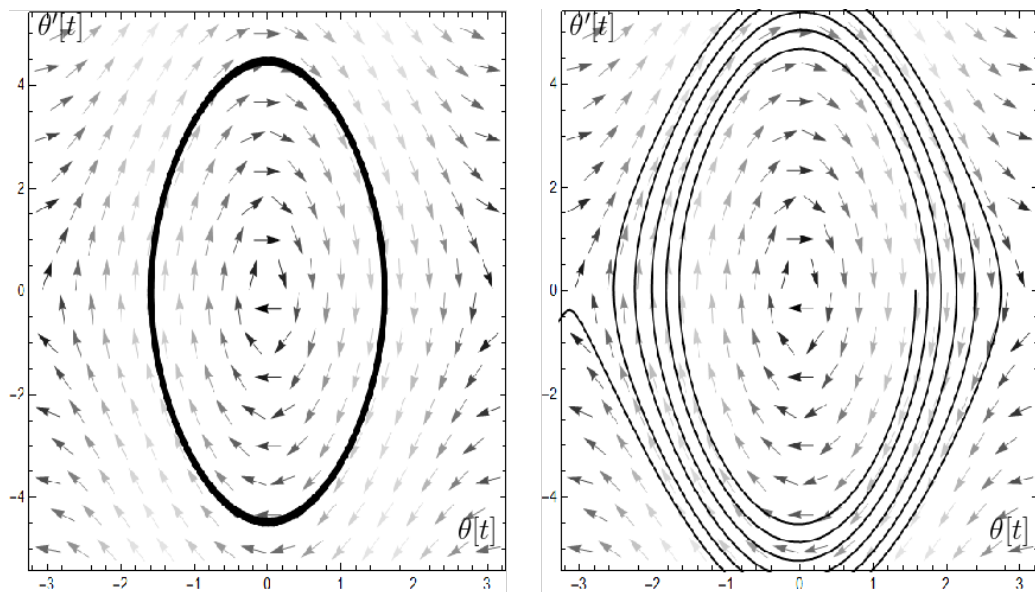
Jak moc Eulerova metoda nezachovává celkovou energii systému lze vidět i z trajektorie ve fázovém prostoru.

Na levém obrázku je výpočet s počáteční výchylkou  $\theta_0 = \pi/2$ , kde *Mathematica* přikážeme počítat Eulerovou metodou, ale nenastavíme žádné další upřesňující details. *Mathematica* tedy sice bude počítat s obecně málo přesnou Eulerovou metodou, ale automaticky si nastaví takové parametry, aby byl výpočet co nejpřesnější.

Během každé periody (což odpovídá jednomu oběhu ve fázovém prostoru) se energie pomalu zvyšuje a křivka se tak v průběhu oběhu zvětšuje. Tím pádem se ale v bodě  $\{\pi/2, 0\}$  neuzavře a postupně po několika periodách vykreslí spirálu a protože se pro tento systém energie v průběhu děje zvyšuje, bude spirála pokračovat směrem ven (výchylka kmitů se bude zvyšovat).

Jelikož ale toto řešení není až tak nedostatečně nepřesné, vidíme místo spirály zhušťující se křivku.

Na pravém obrázku *Mathematica* přikážeme, aby Eulerovu metodu počítala s počátečním krokem  $1/99$  (za metodu v příkazu *NDSolve* přidáme: *StartingStepSize*  $\rightarrow 1/99$ ). Tím se zvýší nepřesnost výpočtu a systém začne nabírat energii zřetelně rychleji.



Nalevo: **Obrázek 2.** Automaticky zabudovaná Eulerova metoda.

Napravo: **Obrázek 3.** Eulerova metoda s *StartingStepSize*  $\rightarrow 1/99$ .

**4.2. Rungeova-Kuttova metoda.** Rungeova-Kuttova metoda je jednokroková metoda pro numerické řešení obyčejných diferenciálních rovnic. Pro rovnici ve tvaru  $y' = f(t, y)$  s okrajovou podmínkou  $y(t_0) = y_0$ , vhodně zvolený krok  $h > 0$  a  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , je  $n + 1$  krok metody definován následovně.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (20)$$

$$t_{n+1} = t_n + h \quad (21)$$

$$k_1 = hf(t_n, y_n) \quad (22)$$

$$k_2 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \quad (23)$$

$$k_3 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \quad (24)$$

$$k_4 = hf(t_n + h, y_n + k_3) \quad (25)$$

**4.2.1. Aproximace periody.** V následujícím jsme použily program *Mathematica* k nalezení numerické aproximace periody kyvadla v závislosti na počáteční podmínce. V první části kódu jsme si zadefinovaly funkci:

```
Period[\[Theta]init_] := (time := 0;
NDSolve[{\[Theta]''[t] + g/l Sin\[Theta][t] == 0, \[Theta][0] == \[Theta]init, \[Theta]'[0] == 0,
WhenEvent[\[Theta][t] == 0, {time = t, "StopIntegration"}]}, \[Theta], {t, 0, 3 },
Method -> "ExplicitRungeKutta"];4*time)
```

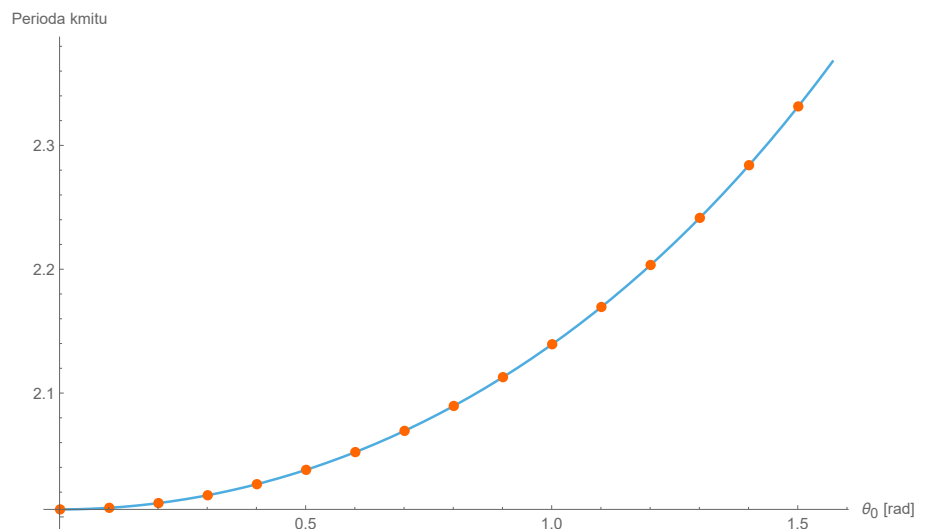
Která na vstupu přijímá počáteční výchylku kyvadla a obratem nám vrací periodu kmitu. Následně jsme použily příkaz:

```
Tabulka = Table[{\[Theta]init, Period[\[Theta]init]}, {\[Theta]init, 1/1000, Pi/2, 0.1 }]
```

Který do naší funkce vkládá určité hodnoty z intervalu  $(0, \pi)$  a zaznamenává její výstup. Data poté vypíše ve formátu, který lze lehce zpracovat do tabulky (3). Tato diskrétní data si můžeme metodou nejmenšího čtverce převést na polynom, s tím nám pomůže tento příkaz: `fit1 = Fit[ Tabulka, {1, x^2, x^4, x^6}, x]`. Nakonec si pomocí příkazů `Plot[]` a `Show[]` můžeme diskrétní body a polynom vykreslit do jednoho grafu (5).

$\theta_0$	T
0.001	2.00607
0.101	2.00735
0.201	2.01114
0.301	2.01749
0.401	2.02642
0.501	2.038
0.601	2.05231
0.701	2.06947
0.801	2.0896
0.901	2.11285
1.001	2.13942
1.101	2.16953
1.201	2.20344
1.301	2.24148
1.401	2.28401
1.501	2.33149

Tabulka 3.



Graf 5.

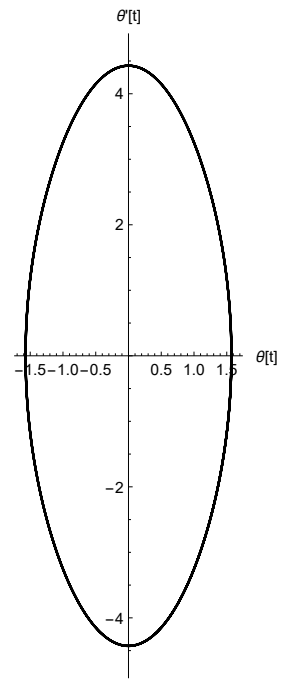
**4.2.2. Energie systému.** V této sekci zkoumáme jak dobře explicitní Rungeova-Kuttova metoda zachovává celkovou energii systému. Konkrétně se budeme zabývat počáteční podmínkou:  $\theta_0 = \pi/2$ . První z vizualizací bude tzv. fázový diagram, což je parametrický graf vývoje celkové energie v čase. Na grafech tohoto typu lze velmi přímočaře identifikovat co se s energií děje. Pokud graf vypadá jako spirála, která se v čase vyvíjí směrem dovnitř/ven tak celková energie systému klesá/stoupá, ale pokud se jedná o uzavřenou křivku, tak je celková energie konstantní.

Pro vykreslení diagramu bylo potřeba si rovnici (2) převést na systém rovnic prvního řádu a následně ho numericky vyřešit pro funkce  $x[t]$  a  $y[t]$ . Kde funkce  $x$  reprezentuje funkci  $\theta[t]$  a funkce  $y$  její první derivaci (rychlost)  $\theta'[t]$ . Příslušný kód v Mathematice vypadá následovně:

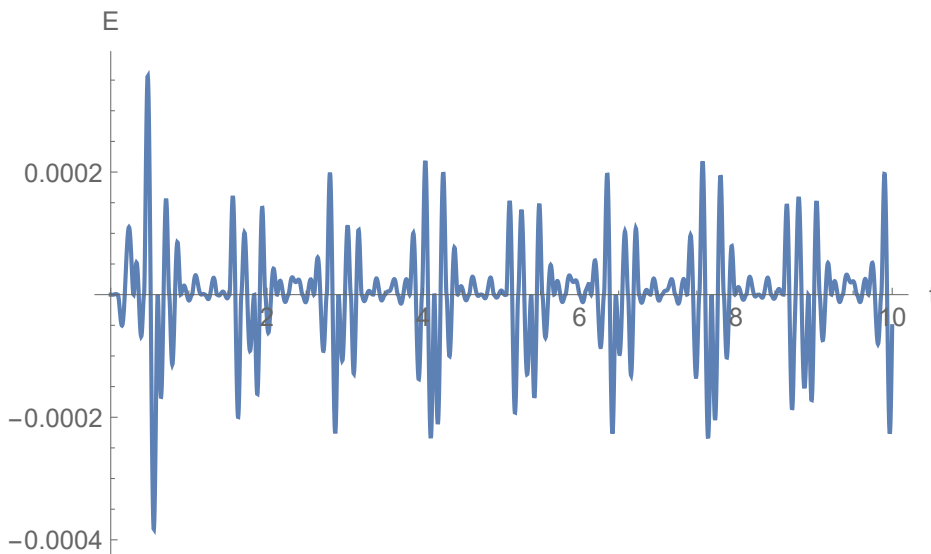
```
system := NDSolve[{x'[t] == y[t], y'[t] == -g/l Sin[x[t]], x[0] == Pi/2,
y[0] == 0}, {x[t], y[t]}, {t, 0, 10}, Method -> "ExplicitRungeKutta"]
```

Plod naší snahy můžete nahlédnout na obrázku (4), kde nám vyšel fázový diagram uzavřený, což znamená, že na první pohled je Rungeova-Kuttova metoda dobrá v zachovávání celkové energie.

K tomu jak moc dobrá v tomto metoda je, nám pomůže druhá vizualizace, kterou bude graf hodnoty celkové energie v čase. Celkovou energii získáme sečtením energie kinetické a potenciální, což v našem případě konkrétně vypadá následovně:  $E = \frac{1}{2}(\theta')^2 - \frac{g}{l}\cos\theta$ . Takže stačí Rungeovo-Kuttovu metodou získat funkci  $\theta[t]$ , tu dosadit do výrazu pro  $E[t]$  a funkci energie si nechat vykreslit v čase. Pro náš případ je výsledkem graf (6), z kterého jde vidět, že celková energie je skoro konstantní až na výkyvy v řádu  $\pm 0.0004$ .



**Obrázek 4.** Fázový diagram.



**Graf 6.** Celková energie v čase

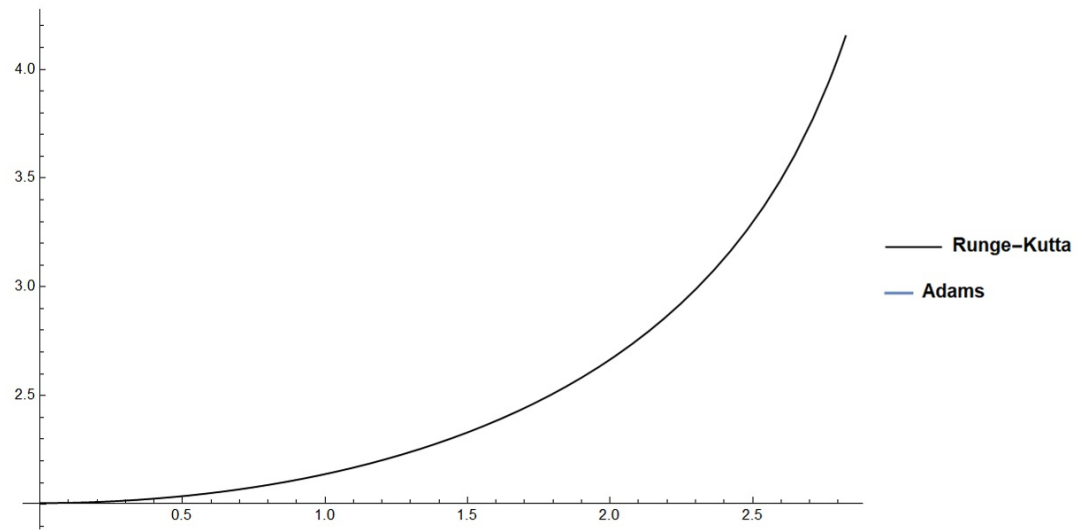
**4.3. Metoda korektor-prediktor.** Korektor-prediktor je jedna z mnohokrokové metod. Pracuje se vždy s dvojicí metod přičemž máme jednu explicitní metodu a druhou implicitní. V prvním kroku se využije vybrané explicitní metody "prediktoru" a získáme prvotní odhad nového řešení. Námi získaný odhad se použije jako start iteračního procesu, který řeší námi zvolená implicitní metoda "korektor". Postupným iterováním získáváme přesnější odhad. Nutno ještě podotknout, že metodu korektor-prediktor, kterou budeme využívat pro *WolframMathematica*, se jmenuje Adamsova.

**4.3.1. Aproximace periody.** Postupujeme identicky jako v předešlých případech přepsáním již použitých metod na "Adams", ovšem očekáváme ještě přesnější výsledky než u Runge-Kuttovy metody, kde jsme mohli vidět z grafu (6), že chyba byla řádově  $10^{-4}$ . Veliká přesnost je dána tím, že se jedná o více-krokovou metodu narození od předcházejících.



$\theta_0$	T
0.001	2.00605
0.101	2.00735
0.201	2.01114
0.301	2.01749
0.401	2.02642
0.501	2.038
0.601	2.05231
0.701	2.06947
0.801	2.0896
0.901	2.11285
1.001	2.13942
1.101	2.16953
1.201	2.20344
1.301	2.24148
1.401	2.28401
1.501	2.33149

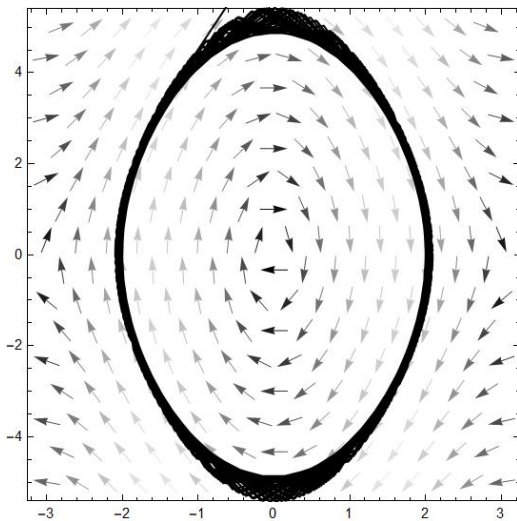
Tabulka 4.



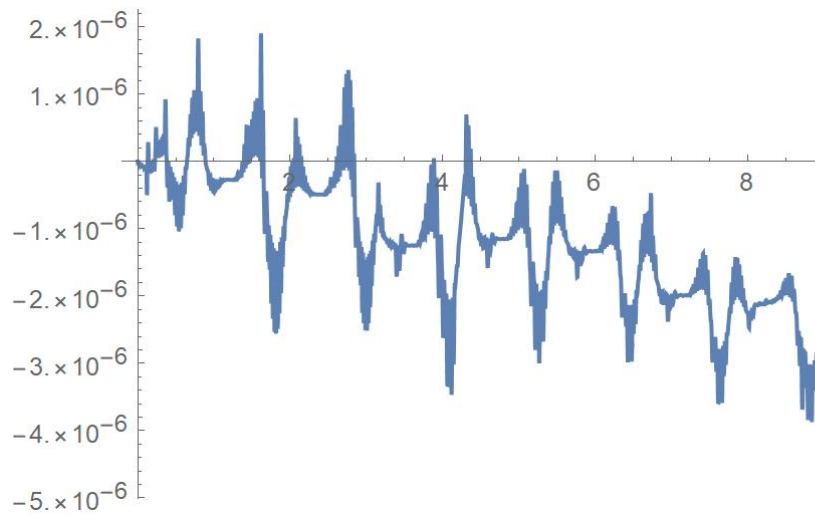
Graf 7.

Jak můžeme vidět z grafu (7), rozdíl mezi Runge-Kuttou a Adamsem je okem nerozpoznatelný a rozdíl mezi tabulkami je jen v prvním členu.

4.3.2. *Energie systému.* Jak jsme již naznačili, naše očekávání je, že korektor-prediktor bude přesnější, než předchozí metody. Vskutku, když se podíváme na graf (8), vidíme, že metoda má tendenci snižovat energii systému, ovšem je nutno podotknout, že na takový odchyl bylo potřeba zvolit  $t = 1000$  čili značně vysoké.



Graf 8.



Obrázek 5.

Z obrázku (5) pět rovněž můžeme vidět, jak moc je metoda přesná a to s odchylkou  $\pm 3 \cdot 10^{-6}$ , čím nám potvrzuje naše předešlá tvrzení týkající se přesnosti metody.

## 5. ZÁVĚR

Závěrem bych chtěli našim váženým čtenářům (tedy panu doktoru Tůmovi a panu doktoru Průšovi), aby tento náš "prvotvor" brali převážně s velkou rezervou, případně s jedním okem přivřeným (nebo možná dvěma).