IA525/EG425 - Otimização Inteira e Combinatória

Atividade 06: Fluxo Mínimo | Prof. Matheus Souza

Instruções Gerais

- Esta atividade deve ser resolvida **individualmente**.
- Os itens teóricos devem resolvidos de forma organizada, clara e formal.
- A solução encontrada deve ser submetida, em um único arquivo PDF, no `moodle`. Certifique-se de que todas as resoluções digitalizadas estão legíveis antes de submetê-las.
- Entregas após o prazo estabelecido no `moodle` serão desconsideradas.
- É permitida a consulta a livros e outros materiais, mas a atividade apenas pode ser discutida com a equipe de ensino.
- Os algoritmos desenvolvidos nos itens práticos devem ser organizados e comentados. Todos os códigos utilizados devem ser submetidos como anexos no `moodle`.
- Qualquer tentativa de fraude, se detectada, implicará na reprovação (com nota final 0.0) de todos os envolvidos, além das penalidades disciplinares previstas no Regimento Geral da Unicamp (Arts. 226 – 237).

Apresentação

O problema de *fluxo mínimo* é um "parente próximo" do problema de fluxo máximo e também apresenta aplicações interessantes. Neste tipo de problema, temos uma rede de fluxo $G = (V, E)$, em que o nó $i = 1$ é a fonte e o nó $i = m = |V|$ é o dreno. Cada arco $(i, j) \in E$ está associado a uma capacidade inferior, ℓ_{ij}, e uma superior, u_{ij}, de forma que o fluxo em (i, j) deve verificar a restrição

$$0 \leqslant \ell_{ij} \leqslant x_{ij} \leqslant u_{ij} \qquad \forall (i, j) \in E.$$

Além desta restrição, os fluxos devem respeitar as tradicionais equações de balanço de fluxo em cada nó. O objetivo neste problema é determinar o *menor* fluxo f a ser introduzido como oferta em $i = 1$ e consumido como demanda em $i = m$ que verifica todas as restrições da rede, como ilustrado na Figura 1.

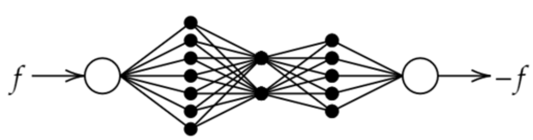

Figura 1: Rede de fluxo.

Questões

► **Questão 1:** Modele este problema como um problema de otimização linear. Discuta a relação deste problema com o problema de fluxo de custo mínimo com capacidades nos arcos. Isto é, mostre que o problema de fluxo mínimo pode ser formulado como um problema de fluxo de custo mínimo para uma escolha particular de custos. Dica: introduza o arco de retorno.

► **Questão 2:** Mostre como o problema de fluxo mínimo pode ser resolvido por meio da resolução de dois problemas de fluxo máximo (e, portanto, de forma eficiente!). Os problemas de fluxo máximo envolvidos devem ser da forma padrão: maximizar o fluxo de um nó fonte para um nó dreno sujeito a fluxos entre 0 e a capacidade máxima de cada arco. Dica: primeiramente formule um problema de fluxo máximo que construa um fluxo factível; em seguida, formule um problema que converta esse fluxo factível em um fluxo mínimo).

▶ **Questão 3:** Seja $(X, \bar{X})$ um corte sobre a rede tal que $1 \in X$ e $m \in \bar{X}$. Defina o *fluxo líquido* sobre $(X, \bar{X})$ como

$$\phi(X, \bar{X}) = \sum_{(i,j)\in(X,\bar{X})} x_{ij} - \sum_{(i,j)\in(\bar{X},X)} x_{ij}$$

e a *capacidade líquida* do corte como

$$L(X, \bar{X}) = \sum_{(i,j)\in(X,\bar{X})} \ell_{ij} - \sum_{(i,j)\in(\bar{X},X)} u_{ij}.$$

Mostre que,

$$f = \phi(X, \bar{X}) \geqslant L(X, \bar{X}).$$

Conjecture um teorema semelhante ao *max-flow/min-cut* para este problema.

▶ **Questão 4:** Implemente um modelo no `cvx/cvxpy` (ou em outro *parser* de otimização) que formule e resolva este problema, dada uma matriz de incidência que represente a rede, e um conjunto de limitantes ℓ_{ij} e u_{ij}. Teste com uma rede simples e verifique a resposta por inspeção.

▶ **Questão 5:** Em um dado dia, um centro de eventos deve acomodar oito reuniões conforme a agenda da Tabela 1. Cada reunião deve ser realizada em uma sala desse centro de eventos e uma sala deve ser preparada antes de cada reunião a ser realizada. Assim, antes que possam ser utilizadas, as salas atribuídas às reuniões com identificadores pares precisam de 1h de preparação e as salas atribuídas às reuniões com identificadores ímpares precisam de 30 minutos de preparação. O centro de eventos deseja saber qual é o número mínimo de salas que devem ser reservadas para acomodar as reuniões. Formule este problema como um problema de fluxo mínimo e resolva-o com o código desenvolvido no item anterior.

Reunião	**Início**	**Término**
1	13:00	13:30
2	18:00	20:00
3	10:00	11:00
4	16:00	17:00
5	16:00	19:00
6	12:00	13:00
7	14:00	17:00
8	11:00	12:00

Tabela 1: Horários de início e término das atividades no dia.