# El libro de FAA

Jesús García Gutiérrez

# Capítulo 1

# Operación elemental

**Una operación elemental es una operación que tarda $t$ unidades de tiempo. Siempre tarda $t$, sin importar cuándo la hagamos.**

**Si consideramos la suma como una operación elemental, el ordenador tardará $t$ unidades de tiempo en hacer una. Hacer dos sumas le tomaría $2 \cdot t$ unidades de tiempo. Hacer n sumas le tomaría $n \cdot t$ unidades de tiempo.**

**Así, tenemos una manera sencilla de calcular el tiempo que tardará el ordenador en hacer $n$ sumas. Realmente, el ordenador no tarda un tiempo exacto $t$ en hacer una suma (puede variar por circunstancias), pero esta simplificación nos hace posible analizar los algoritmos sin preocuparnos de detalles de software o de hardware.**

**Si también definimos la multiplicación como una operación elemental, esto significa que el ordenador también tardará $t$ unidades de tiempo en hacer una multiplicación. Podemos decir entonces lo siguiente.**

$$t_{\text{suma}} = t_{\text{multiplicacion}} = t \tag{1.1}$$

**No solo consideraremos la suma y la multiplicación como operaciones elementales. Consideraremos como operaciones elementales todas las operaciones de la siguiente tabla.**

## 1.1. Listado de operaciones elementales

| |
|---|
| Suma |
| Resta |
| Multiplicación |
| División |
| Módulo |
| AND |
| OR |
| Asignación |
| Llamada a una función |
| Acceso a un elemento del array |

**El ordenador tarda $t$ unidades de tiempo en realizar cualquiera de estas operaciones.**

# Capítulo 2

# Relación de recurrencia

## 2.1. Ejercicio del 02/04/2025

**Hallar la eficiencia de un algoritmo dado. Supongamos que ya nos dan la función a trozos del T(n).**

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n \leq 1 \\ T(\frac{n}{2}) + 2 & n > 1 \end{cases}$$

**Primero aislamos la relación de recurrencia. Las relaciones de recurrencia tienen en la parte derecha de la igualdad una o más T, a diferencia de los casos base, que no tienen ninguna T en dicha parte.**

$$T(n) = T(\frac{n}{2}) + 2 \tag{2.1}$$

**En este caso, podemos aplicar tanto el método de expansión de recurrencia como el teorema maestro. Esto es así porque solo hay una T en la parte derecha de la igualdad. Si hubiera más de una T en dicha parte, no podríamos aplicar ninguno de estos métodos.**

### 2.1.1. Método de expansión de recurrencia

**El método de expansión de recurrencia consiste en hallar el tiempo para problemas cada vez más pequeños, y calcular el T(n) utilizando cada uno de estos hallazgos.**

**Si nos fijamos en la ecuación 1, vemos $T(\frac{n}{2})$. ¡Vamos a hallarlo usando T(n)!**

$$T(\frac{n}{2}) = T(\frac{(\frac{n}{2})}{2}) + 2$$
$$T(\frac{n}{2}) = T(\frac{n}{4}) + 2$$

**Listo, hemos desarrollado $T(\frac{n}{2})$. Ahora podemos sustituir la expresión que hemos hallado en la ecuación 1.**

$$T(n) = (T(\frac{n}{4}) + 2) + 2$$

$$T(n) = T(\frac{n}{4}) + 4 \tag{2.2}$$

**Perfecto, la ecuación 2 es una nueva fórmula para el T(n).**

**Ahora solo tenemos que seguir el mismo procedimiento que antes, hasta que veamos un patrón claro y podamos escribirlo en una ecuación. ¡Vamos con el $T(\frac{n}{4})$ que aparece en la ecuación 2!**

$$T(\frac{n}{4}) = T(\frac{(\frac{n}{4})}{2}) + 2$$

$$T(\frac{n}{4}) = T(\frac{n}{8}) + 2$$

**Listo, sustituimos en la ecuación 2.**

$$T(n) = (T(\frac{n}{8}) + 2) + 4$$

$$T(n) = T(\frac{n}{8}) + 6 \tag{2.3}$$

**Ya lo vas pillando, ¡a por el $T(\frac{n}{8})$!**

$$T(\frac{n}{8}) = T(\frac{(\frac{n}{8})}{2}) + 2$$

$$T(\frac{n}{8}) = T(\frac{n}{16}) + 2$$

**Sustituimos $T(\frac{n}{8})$ en la ecuación 3.**

$$T(n) = (T(\frac{n}{16}) + 2) + 6$$

$$T(n) = T(\frac{n}{16}) + 8 \tag{2.4}$$

**Ya hemos hallado el T(n) utilizando varios subproblemas. Si nos fijamos en las ecuaciones 1, 2, 3 y 4, ¿veis el patrón? Vamos a escribirlo utilizando una variable llamada i.**

$$T(n) = T(\frac{n}{2^i}) + 2 \cdot i \tag{2.5}$$

**Estupendo, la ecuación 5 es muy bonita y parece que ya somos informáticos teóricos cum laude, pero ocurre una desgracia: no está solo en función de n, también está en función de i. Tenemos que transformar i en n de algún modo.**

**En la ecuación 5 fijémonos en la expresión $T(\frac{n}{2^i})$. Solo tenemos que igualar el paréntesis al valor de n que sea caso base. Si volvemos a la función a trozos, vemos que el caso base tiene $n = 1$, y por tanto podemos escribir lo siguiente.**

$$\frac{n}{2^i} = 1$$

**Podríamos pensar que $n = 0$ es también un caso base, pero no trabajaremos nunca con problemas de tamaño igual a cero. Por eso ponemos 1 y no 0 en la igualdad. Seguimos desarrollando y aplicando la idea de logaritmo.**

$$n = 2^i$$

$$\log_2(n) = i$$

$$i = \log_2(n)$$

**Listo, tenemos i en función de n. Sustituimos la i en la ecuación 5.**

$$T(n) = T(\frac{n}{2^{\log_2(\mathrm{n})}}) + 2 \cdot \log_2(n)$$

**El denominador se puede seguir simplificando matemáticamente.**

$$2^{\log_2(\mathrm{n})} = n^{\log_2(2)}$$

$$2^{\log_2(\mathrm{n})} = n^1$$

**Maravilloso, ahora el denominador es simplemente n. Volvemos a donde estábamos antes.**

$$T(n) = T(\frac{n}{n}) + 2 \cdot \log_2(n)$$

$$T(n) = T(1) + 2 \cdot \log_2(n)$$

**Sustituimos T(1), sabiendo por la función a trozos que $T(1) = 1$**

$$T(n) = 1 + 2 \cdot \log_2(n)$$

$$T(n) = 2 \cdot \log_2(n) + 1 \tag{2.6}$$

**Listo, qué bonita nos ha quedado la fórmula 6. Esta nos da el número de operaciones elementales dada una n, y no tenemos que hacer tiempos de otros subproblemas como ocurría con la relación de recurrencia originalmente.**

**También podemos hablar ya del orden de complejidad. Podemos ver que...**

$$T(n) \in O(\log_2(n))$$