El libro de FAA

Jesús García Gutiérrez

Capítulo 1

Relación de recurrencia

1.1. Ejercicio del 02/04/2025

Hallar la eficiencia de un algoritmo dado. Supongamos que ya nos dan la función a trozos del T(n).

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n \leq 1 \\ T(\frac{n}{2}) + 2 & n > 1 \end{cases}$$

Primero aislamos la relación de recurrencia. Las relaciones de recurrencia tienen en la parte derecha de la igualdad una o más T, a diferencia de los casos base, que no tienen ninguna T en dicha parte.

$$T(n) = T(\frac{n}{2}) + 2 \tag{1.1}$$

En este caso, podemos aplicar tanto el método de expansión de recurrencia como el teorema maestro. Esto es así porque solo hay una T en la parte derecha de la igualdad. Si hubiera más de una T en dicha parte, no podríamos aplicar ninguno de estos métodos.

1.1.1. Método de expansión de recurrencia

El método de expansión de recurrencia consiste en hallar el tiempo para problemas cada vez más pequeños, y calcular el T(n) utilizando cada uno de estos hallazgos.

Si nos fijamos en la ecuación 1.1, vemos $T(\frac{n}{2})$. ¡Vamos a hallarlo usando T(n)!

$$T(\frac{n}{2}) = T(\frac{(\frac{n}{2})}{2}) + 2$$
$$T(\frac{n}{2}) = T(\frac{n}{4}) + 2$$

Listo, hemos desarrollado $T(\frac{n}{2})$. Ahora podemos sustituir la expresión que hemos hallado en la ecuación 1.1.

$$T(n) = (T(\frac{n}{4}) + 2) + 2$$

$$T(n) = T(\frac{n}{4}) + 4 \tag{1.2}$$

Perfecto, la ecuación 1.2 es una nueva fórmula para el T(n).

Ahora solo tenemos que seguir el mismo procedimiento que antes, hasta que veamos un patrón claro y podamos escribirlo en una ecuación. ¡Vamos con el $T(\frac{n}{4})$ que aparece en la ecuación 1.2!

$$T(\frac{n}{4}) = T(\frac{(\frac{n}{4})}{2}) + 2$$

$$T(\frac{n}{4}) = T(\frac{n}{8}) + 2$$

Listo, sustituimos en la ecuación 1.2.

$$T(n) = (T(\frac{n}{8}) + 2) + 4$$

$$T(n) = T(\frac{n}{8}) + 6 \tag{1.3}$$

Ya lo vas pillando, ¡a por el $T(\frac{n}{8})$!

$$T(\frac{n}{8}) = T(\frac{(\frac{n}{8})}{2}) + 2$$

$$T(\frac{n}{8}) = T(\frac{n}{16}) + 2$$

Sustituimos $T(\frac{n}{8})$ en la ecuación 1.3.

$$T(n) = (T(\frac{n}{16}) + 2) + 6$$

$$T(n) = T(\frac{n}{16}) + 8 \tag{1.4}$$

Ya hemos hallado el T(n) utilizando varios subproblemas. Si nos fijamos en las ecuaciones 1.1, 1.2, 1.3 y 1.4, ¿veis el patrón? Vamos a escribirlo utilizando una variable llamada i.

$$T(n) = T(\frac{n}{2^i}) + 2 \cdot i \tag{1.5}$$

Estupendo, la ecuación 1.5 es muy bonita y parece que ya somos informáticos teóricos cum laude, pero ocurre una desgracia: no está solo en función de n, también está en función de i. Tenemos que transformar i en n de algún modo.

En la ecuación 1.5 fijémonos en la expresión $T(\frac{n}{2^i})$. Solo tenemos que igualar el paréntesis al valor de n que sea caso base. Si volvemos a la función a trozos, vemos que el caso base tiene $n = 1$, y por tanto podemos escribir lo siguiente.

$$\frac{n}{2^i} = 1$$

Podríamos pensar que $n = 0$ es también un caso base, pero no trabajaremos nunca con problemas de tamaño igual a cero. Por eso ponemos 1 y no 0 en la igualdad. Seguimos desarrollando y aplicando la idea de logaritmo.

$$n = 2^i$$

$$\log_2(n) = i$$

$$i = \log_2(n)$$

Listo, tenemos i en función de n. Sustituimos la i en la ecuación 1.5.

$$T(n) = T(\frac{n}{2^{\log_2(\mathrm{n})}}) + 2 \cdot \log_2(n)$$

El denominador se puede seguir simplificando matemáticamente.

$$2^{\log_2(\mathrm{n})} = n^{\log_2(2)}$$

$$2^{\log_2(\mathrm{n})} = n^1$$

Maravilloso, ahora el denominador es simplemente n. Volvemos a donde estábamos antes.

$$T(n) = T(\frac{n}{n}) + 2 \cdot \log_2(n)$$

$$T(n) = T(1) + 2 \cdot \log_2(n)$$

Sustituimos T(1), sabiendo por la función a trozos que $T(1) = 1$

$$T(n) = 1 + 2 \cdot \log_2(n)$$

$$T(n) = 2 \cdot \log_2(n) + 1 \tag{1.6}$$

Listo, qué bonita nos ha quedado la fórmula 1.6. Esta nos da el número de operaciones elementales dada una n, y no tenemos que hacer tiempos de otros subproblemas como ocurría con la relación de recurrencia originalmente.

También podemos hablar ya del orden de complejidad. Podemos ver que...

$$T(n) \in O(\log_2(n))$$