Learning Journal about Spring-Mass-Damper-System

세종대학교 지능기전공학부 21011969 유지원

***Index Terms*—Spring-Mass-Damper-System**

I. INTRODUCTION

이 세상의 모든 것은 시간이 흐르면서 변화한다. 따라서 우리는 주변의 것들을 수학적으로 다루고 싶을 때 그것들이 시간에 따라 어떻게 변화하는 지에 대한 식, 즉 미분방정식 (differential equation) 형태로 표현식을 찾는 것이 자연스럽다. 시간에 따른 변화량에 대해 표현한 미분방정식을 해결함으로써 결국 우리가 알고 싶어하는 시스템 자체를 알아낼 수 있고 이는 곧 시스템의 예측과 조작 또한 가능하다는 것을 의미하므로 미분방정식은 굉장히 유용하다.

미분방정식은 시간에 따라 변화하는 모든 시스템을 다루기 때문에 일상생활에서 미분방정식의 응용을 쉽게 찾아볼 수 있다. 그 중 가장 일상적으로 경험하는 뉴턴 역학 시스템에 대한 모델링(modeling)이 대표적이다.

뉴턴의 운동법칙으로 알 수 있듯이 힘을 가해준 물체는 움직임의 상태가 변하는데 이때 힘을 받은 물체들의 움직임에 따라 크게 3가지로 구분된다. (1) 물체의 mass가 매우 큰 rigid body라서 움직이지 않는다. (2) 물체가 어떤 것에 제한되지 않아서 힘을 가해준 대로 움직인다. (3) 힘을 받은 물체가 mass가 매우 큰 물체에 flexible하게 연결되어 있어 제한을 받고 진동한다. (1)의 경우는 변화량이 없으므로 예측이 필요하지 않기 때문에 그에 대한 논의 역시 필요하지 않다. 반면에 무인이동체의 움직임으로 나타나는 (2)의 경우와 통신, 회로에서의 움직임으로 나타나는 (3)의 경우는 시스템을 예측하고 조작하기 위해서 깊은 논의가 이어진다.

(2), (3)의 경우 물체는 가해진 힘, 마찰력, 제한이 되는 힘(즉, 탄성력)에 영향을 받아 움직인다. 이때 마찰력은 움직임에 대해 반발하는 힘이므로 속도에 비례하고 탄성력은 위치(이동거리)에 비례한다. 이런 시스템을 일반화하여 Spring-Mass-Damper System이라고 부르며 이 시스템의 미분방정식을 아래와 같이 모델링할 수 있다.

$$F - cy' - ky = my''$$

$$(c : damping - constant, k : spring - constant, m : mass)$$

Spring-Mass-Damper System을 모델링하고 그래프로 나타내는 과정을 통해 spring-mass-damper 시스템을 이해하고 어떻게 응용할 수 있는지 알아보자.

II. MAIN SUBJECT

A. *역행렬과 eigenvalue의 관계*

1) 행렬: 많은 양의 데이터에 대한 계산이 필요할 때에도 행렬을 이용하면 편리하게 표현이 가능하다. 행렬은 일반적인 숫자의 연산처럼 쉽게 연산하는 것이 가능하므로 특히 컴퓨터를 이용한 계산에 유용하게 쓰인다.

행렬이란 수나 식을 직사각형 모양으로 배열한 것이다.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

a_{11}과 같은 각각의 수를 성분(entry) 또는 원소(element)라고 부르며 행렬은 가로 줄인 행(row)과 세로 줄인 열(column)로 구성된다. 위의 행렬은 m개의 행과 n개의 열로 이루어진 $m \times n$ 행렬(m by n matrix)이며 사각행렬(rectangular matrix)이다. 이때 m=n이면, $n \times n$ 정방행렬(square matrix)이고 정방행렬의 대각선을 주대각선(main diagonal)이라고 한다. 벡터는 한 개의 행 또는 열로 구성된 행렬을 나타내며 각각 행벡터(row vector) 열벡터(column vector)라고 한다.

2) 역행렬(inverse matrix): $n \times n$ 정방행렬 $\mathbf{A} = [a_{jk}]$의 역행렬은 $\mathbf{A^{-1}}$로 표기하고 $\mathbf{AA^{-1}} = \mathbf{A^{-1}A} = \mathbf{I}$을 만족하는 행렬로 정의한다. 여기서 $\mathbf{I}$는 주대각선상의 성분이 모두 1인 행렬인 단위행렬(unit matrix)이다.

3) 역행렬과 eigenvalue의 관계:

$$\mathbf{A}\mathrm{x} = \lambda \mathrm{x} \ (\mathrm{x} \neq 0)$$

위 식이 성립하도록 하는 스칼라 λ를 eigenvalue라고 하고 λ에 대해 위 식을 만족시키는 벡터 x를 eigenvector라고 한다. $y_1 = \mathbf{A}\mathrm{x},\ y_2 = \lambda\mathrm{x}$라고 하자. x가 $\mathbf{A}$에 의해 y_1로 변했는데 $y_1 = y_2$이므로 y_1이 x에 스칼라 배를 한 y_2와 같다는 것은 λ와 x가 굉장히 특이한 값이라는 것을 나타낸다. 두 값은 각각 $\mathbf{A}$의 크기와 방향 성질을 어느정도 대변한다는 점에서 $\mathbf{A}$의 eigenvalue와 eigenvector라고 불린다.

$\mathbf{A}\mathrm{x} = \lambda\mathrm{x}$을 풀면 $\mathbf{A}$의 eigenvalue를 구할 수 있다. 우변을 좌변으로 이항하면 $\mathbf{A}\mathrm{x} - \lambda\mathrm{x} = 0$이고 공통으로 곱해진 x로 묶으면 $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathrm{x} = 0$이다. $\mathbf{I}$를 곱해주는 이유는 행렬과 스칼라의 연산은 불가능하기 때문에 행렬로 맞춰줘야 하기 때문이다. 만약 $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$이 역행렬을 가진다면 $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathrm{x} = \mathbf{I}\mathrm{x} = 0$이 되므로 $\mathrm{x} = 0$이라는 모순이 생긴다. 따라서 $det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$을 만족시켜 $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$이 역행렬을 가지지 않도록 해야 $\mathbf{A}$의 chracteristic equation을 얻고 그에 대한 eigenvalue 값을 얻을 수 있다.

B. *spring-mass-damper system의 모델링*

우선 m=1, k=2, c=3인 경우의 spring-mass-damper system 에 대해 생각해보자. 이는 $y'' + 3y' + 2y = 0$으로 모델링할 수 있다.(입력 없는 homogeneous ODE로 가정한다.) 먼저 이 방정식을 연립방정식으로 나타내기 위하여 변수를 대응시켜 두 개의 상태 변수(state variable)를 설정한다.

$$\begin{pmatrix} y = y_1 \\ y' = y_2 \end{pmatrix}$$

이 식을 아래와 같이 정리하면 y_1'과 y_2'을 y_1과 y_2에 대한 식으로 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} y_1' = y' = y_2 \\ y_2' = y'' = -3y' - 2y = -2y_1 - 3y_2 \end{bmatrix}$$

$$y' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}y$$

이렇게 행렬을 이용한 선형시스템으로 변환을 하면 determinant를 통해 characteristic equation을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -3-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (-\lambda)(-3-\lambda) - (-2) \\ &= \lambda^2 + 3\lambda + 2 \\ &= (\lambda+1)(\lambda+2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

인수분해를 통해 위의 characteristic equation을 풀면 2개의 eigenvalue $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$을 구할 수 있다. 이 eigenvalue를 $\mathbf{A}\mathrm{x} = \lambda\mathrm{x}$에 대입하면 각각의 eigenvector를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -2, \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \end{bmatrix}, \\ \mathrm{x}_2 &= -2\mathrm{x}_1, \\ eigenvector & \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -1, \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \end{bmatrix}, \\ \mathrm{x}_2 &= -\mathrm{x}_1, \\ eigenvector & \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

예측하고 있던 해의 형식 $y = C_1\mathrm{x}_1 e^{\lambda_1} + C_2\mathrm{x}_2 e^{\lambda_2}$에 위에서 구한 값을 대입하면 일반해(general solution)와 두 성분의 해를 구할 수 있다. 일반해는

$$y = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-2t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t}$$

이다. $y_1 = C_1e^{-2t} + C_2e^{-t}$이고 $y_2 = y_1' = -2C_1e^{-2t} + -C_2e^{-t}$이다.

이제 위의 미분방정식에서 mass 값을 m으로, spring constant 값을 k로, damping comstant 값을 c로 일반화한 $my'' + cy' + ky = 0$ 미분방정식의 eigenvalue를 구해보자.

$$\begin{pmatrix} y = y_1 \\ y' = y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1' = y_2 \\ y_2' = -\frac{k}{m}y_1 - \frac{c}{m}y_2 \end{bmatrix}$$

$$y' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}y$$

$$\begin{aligned} det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} - \lambda \end{bmatrix} \\ &= \lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{c}{2m} + \frac{\sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \\ \lambda_2 &= -\frac{c}{2m} - \frac{\sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \end{aligned}$$

위의 과정으로 eigenvalue를 구하는 식인 $\lambda = -\frac{c}{2m} \pm \frac{\sqrt{c^2-4mk}}{2m}$을 얻었다. 이 식을 통해 m, c, k 값에 의해 eigenvalue의 값이 변하며 특히 $c^2 - 4mk$의 부호에 따라 eigenvalue의 특성이 결정된다는 것을 알 수 있다. 이 값이 양수일 경우 eigenvalue는 두 실근을 갖고 0일 경우 중근을 가지며 음수일 경우 두 허근을 갖는다. 이 세 경우에 출력이 어떻게 나오는지 그래프를 통해 살펴보자.

C. *spring-mass-damper system에서 k와 c가 변할 때*

매트랩(matlab) 프로그램을 이용하여 스텝(step) 입력과 임펄스(impulse) 입력이 들어갔을 때 시스템이 어떻게 출력되는지 각각 살펴보고 damping constant c와 spring constant k가 변할 때 시스템이 어떻게 반응하는지 알아보자.

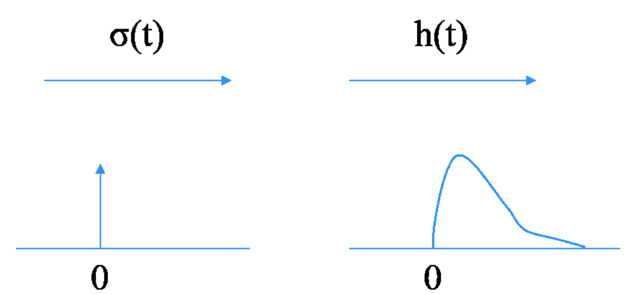

Fig. 1. impulse response

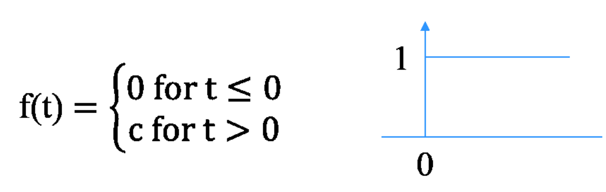

Fig. 2. step response

impulse response는 매우 짧은 시간에 걸쳐 순간적으로 힘이 작용하는 것으로 Fig.1과 같은 형태의 그래프로 나타난다. [2] 대표적인 예로는 손벽을 치거나 어떤 것을 타격하는 등 충돌할 때 발생한다. step response는 Fig.2처럼 일정한 상태를 유지하는 입력을 말하며 대표적인 예로는 기기의 전원을 공급하는 상황이 있다. [3]

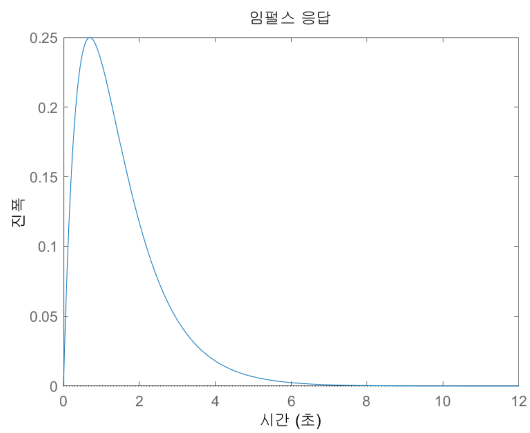

Fig. 3. impulse response

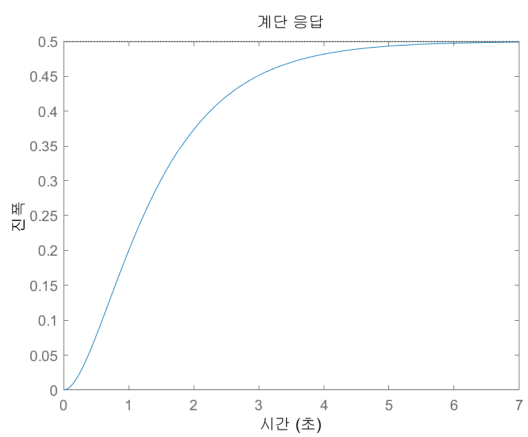

Fig. 4. step response

먼저 위에서 사용한 미분방정식에 r(t)라는 입력을 준 $y'' + 3y' + 2y = r(t)$의 impulse 입력과 step response에 대한 반응을 그래프를 통해 살펴보자.

Fig.3을 통해 실제로 impulse 입력이 순간적인 반응을 보인다는 것을 알 수 있고 Fig.4를 통해 step 입력이 일정한 반응을 보인다는 것을 확인했다. 또한 두 시스템 모두 damping이 너무 커서 진동하지 않으며 spring이 0이 아니므로 수렴한다는 것도 확인했다.

위의 과정을 통해서 m, k, c값을 고정한 상태에서 두 입력에 대한 모델의 반응이 어떻게 나오는지 대략적으로 살펴보았다. 이제 m=1일 때 k와 c의 값에 변화를 줄 때 $y'' + cy' + ky = r(t)$의 $D = c^2 - 4mk$ 값과 eigenvalue 값을 구해보고 시스템이 각각의 입력에 어떻게 반응하는지 그래프를 통해 살펴보자.

Fig.5.는 c를 0.5로 고정하고 k에 0.5, 1.0 1.5를 넣은 그래프이다. impulse와 step 모두 k값이 커질 수록 진동의 진폭이 커진다는 것을 알 수 있다.

Fig.6.은 k를 3으로 고정하고 c에 0.5, 2.88, 4.0을 넣은 그래프이다. impulse 응답 그래프로 살펴보자. (1) $c = 0.5$인 경우는 D=-7.7500¡0이고 eigenvalue는 두 허근을 갖는다. 이렇게 c가 매우 작아서 $c^2 < 4mk$인 경우에는 underdamping system이 나타나며 진동이 발생한다. (2) $c = 2.88$인 경우는 $D = 0.2944 \approx 0$이며 eigenvalue는 실수인 중근을 갖는다. 이렇게 $c^2 = 4mk$인 underdamping과 overdamping의 중간에서는 critical damping이 나타나며 진동이 발생하지 않는다. (3) $c = 4.0$인 경우는 $D = 8 > 0$이며 eigenvalue는 두 실근을 갖는다. 이렇게 c가 매우 커서 $c^2 > 4mk$인 경우에는 overdamping system이 나타나며 진동이 발생하지 않는다. step 응답 그래프에서도 steady-state의 값이 0이 아니라는 점만 제외하면 같은 반응이 나타난다.

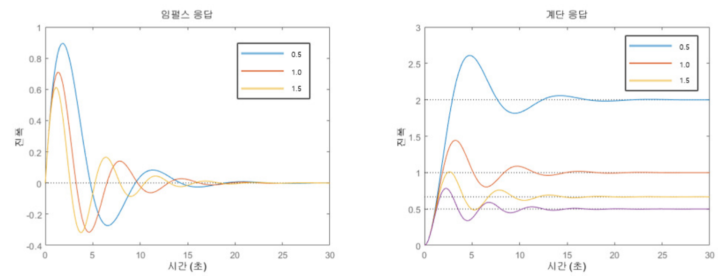

Fig. 5. change spring

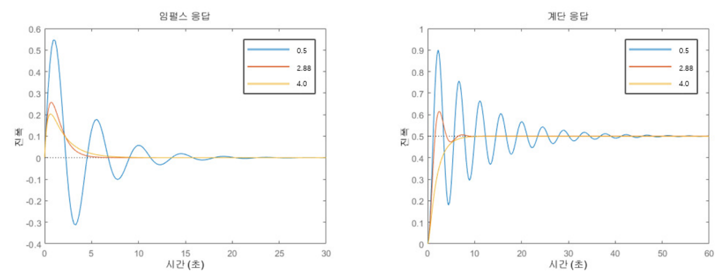

Fig. 6. change damping

III. Conclusion

위 결과를 통해 spring constant k 값과 damping constant c 값에 따라 spring-mass-damper 시스템이 overdamping, critical, underdamping으로 나타난다는 것을 알 수 있다. 또한 판별식 D의 값을 통해 실제로 모델링 해보지 않고도 시스템의 반응을 예측할 수 있다는 알 수 있다. 시스템의 어떤 값을 조작해야 원하는 출력을 얻어낼 수 있는지 아는 것은 여러가지 분야의 기술을 개발할 때 유용하게 사용할 수 있다. 실제로 제어 분야에서는 damper를 줄여 엔진에서 변속기로 전달되는 진동을 줄이는 기술을 개발한다.[1]

spring-mass-damper system에 대한 learning journal을 작성하면서 시스템의 조건값을 조작하고 그 결과를 그래프로 확인하며 시스템의 출력이 유리하게 나오도록 조작하는 것을 알게되었다. 그러면서 공업수학 과목의 유용성과 배우는 의의를 느꼈고 앞으로 졸업하더라도 필수적으로 사용할 툴이라는 것을 체감했다. 그동안 수업만으로는 추상적으로 느껴졌던 개념들을 좀 더 구체적으로 느낄 수 있었다. 특히 matlab을 이용하여 더욱 쉽고 재미있게 진행할 수 있었다. 또한 overleaf 프로그램을 사용해보며 학문적 글쓰기에 좀 더 친밀해지는 기회가 되었다.

References

[1] Steven L. Clark. “Spring-mass damper system for vehicle transmission”. In: ().

[2] University of Massachusetts Lowell. “structural dynamics, acoustic systems laboratory”. In: second-order impulse response ().

[3] University of Massachusetts Lowell. “structural dynamics, acoustic systems laboratory”. In: second-order step response ().