算法设计与分析 (2017 年秋季学期)

第三次作业

作业提交截止时间：2017 年 12 月 4 日

1 最小生成树问题 (20 分)

给定一个无向连通图 $G = (V, E)$，其中每条边的权值只可为 1 或 2。请设计一个时间复杂度为 $O(|V| + |E|)$ 的算法来求 G 的一棵最小生成树，并验证其时间复杂度。（注：你可以提出一个新算法或修改课堂上讲过的算法。）

2 最小生成树性质的证明 (20 分)

令 $G = (V, E)$ 为一个带权无向连通图，且其每条边的权值都不相同。请证明：G 的任何一棵最小生成树都会包含权值最小的那条边。[注：必须从头开始证明，即是说，证明过程中不可使用 MST 引理，即关于"安全边 (*Saft Edge*)"的引理，且证明不可建立在 $Kruskal$ 算法或 $Prim$ 算法成立的基础上。]

3 最短路问题 (20 分)

请给出一个边权可以为负的有向图实例，使得 $Dijkstra$ 算法在该图上无法得到正确的结果。并解释允许边权为负的情况下 $Dijkstra$ 算法不再正确的原因。(注：给出的实例应保证该有向图不存在权值和为负的环。)

4 二分图判定问题 (20 分)

二分图是指一个无向图 $G = (V, E)$, 它的所有顶点可被分成两个子集，且同一个子集中任何两顶点间都没有边相连。（换言之，G 为二分图，当且仅当存在两个集合 V_1, V_2 满足 $V_1 \cup V_2 = V, V_1 \cap V_2 = \emptyset$，$E$ 中每条边都连接了 V_1 中某个点与 V_2 中某个点。）

1. 请证明：二分图中不存在长度为奇数的环。
2. 请设计一个基于广度优先搜索 (BFS) 的算法来判断无向图 G 是否为二分图，并分析算法的正确性及时间复杂度。

5 瓶颈值问题 (20 分)

令 $G = (V, E)$ 为一个带权无向图 (每条边 (u, v) 的权值为 $w(u, v)$)，且所有权值非负。对一条路径 $(u_0, u_1), (u_1, u_2), \ldots, (u_{n-2}, u_{n-1}), (u_{n-1}, u_n)$，该路径的**瓶颈值** (*Bottleneck Value*) 定义为 $min_{1 \leq i \leq n} w(u_{i-1}, u_i)$。

直观上来说，可以把图中的边看作水管，边的权值看作水管中每秒水的流量。在一秒内能流过一条路径的最大流量就是该路径上所有边权的最小值，也就是该路径的瓶颈值。

现给定两点 s, t，请设计一个算法找出一条从 s 到 t 的路径，它包含了 s 到 t 之间所有路径中最大的瓶颈值。(如果有多条这样的路径，仅需找出任意一条。) 请分析其正确性及时间复杂度。

提示：这个问题有多种解法。其中一种需要用到最大堆。最大堆和最小堆很像，唯一的区别是它每次都弹出最大的元素而不是最小的元素。它们的实现方法相似且运行时间相同。如果你的算法需要用到最大堆，你可以直接使用它而不必从头开始证明其正确性。