Design and Analysis of Algorithms

Tutorial 8: Graph Algorithms


童咏昕

北京航空航天大学 计算机学院

yxtong@buaa. edu. cn

问题1

- 令图$G=(V,E)$为一个连通的无向图。证明：
$$\log(\mathrm{E})=\Theta(\log V)$$

问题1-提示

- 首先图G的边数$E \le \frac{V(V+1)}{2} < V^2$，有

$$\log E \le \log V^2 = 2\log V$$

因此$\log E = O(\log V)$.

- 由于图G为连通图，因此$\mathrm{V} - 1 \le E$, 对于足够大的图，有$\frac{V}{2} \le E$（当图的结点数大于等于2即可），取对数有

$$\log V - 1 \le \log E \implies \log E = \Omega(\log V)$$

结合上述两方面即有

$$\log E = \Theta(\log V)$$

问题2

- 带权无向图G $= (V, E)$, 其边所带权值均非负，T为G的一颗最小生成树。现将图G的每条边的权值w替换为w^2，得到一个新的图G'.
  - T是否仍为所得新的图的最小生成树？
  - 原图G中由结点u到结点v的一条最短路径$u \longrightarrow v$是否仍为新的图中由u到v的最短路径？

  请证明或推翻上述两个猜想。

问题2-提示

- 生成树T仍为新的图G′的最小生成树。
  证明：令T′为所得新的图G′的一颗最小生成树。若T′与T不同，则T′中一定存在一条边e'不在T内。现将e'从T'中删去，则T′分为互不连通的两部分，令S和V − S分别表示这两部分，令割(Cut) $C = (S, V - S)$.
- 将e'加入树T中，将会在T中产生一个环(Cycle). 显然环中存在一条边e(不同于e')穿过割C. 由于T为G的最小生成树，因此$w(e) \leq w(e')$(否则我们在T中将边e替换为e'得到新的生成树的权值比T的权值更小)，因此$\mathrm{w(e)}^2 \leq \mathrm{w(e')}^2$.

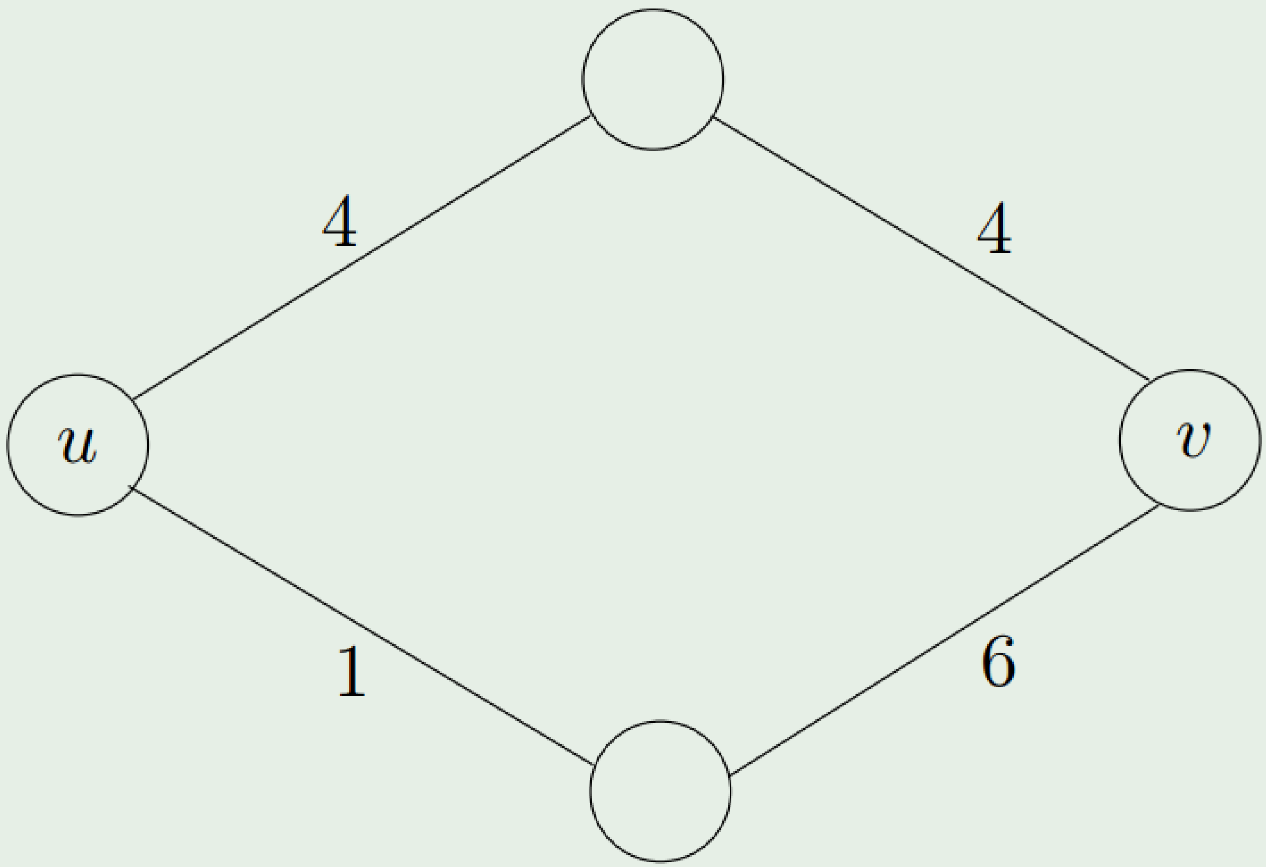
问题2-提示

- 现在在T′中将e'替换为e, 则所得的仍为G′中的一颗生成树，称为T'', 且T''的权重不会超过T'的权重。
- 与T′相比，T''与T不同的边的数量少一条(e′替换为e). 重复上述步骤，最终可以将T'转换为T。而在每一轮转换中，树的权重不会增加。因此T同样为G′的最小生成树。

问题2–提示

- 最短路径：
  不一定，下图是一个反例。

Example



问题3

- 无向图G $= (V, E)$, 每条边的权值$c_e \geq 0$. T为图G的一个最小生成树。现向图G中添加一条新的边(u, v), 其权值为c. 请给出一个算法测试T是否仍为新得到的图的最小生成树。算法的时间复杂度要求为$O(|V|)$.

问题3-提示

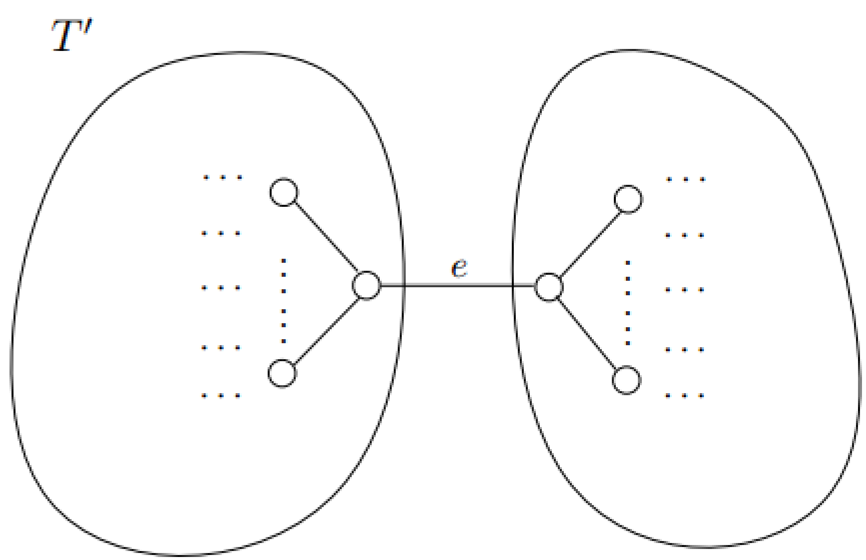
- 算法流程如下：在T中使用DFS或者BFS寻找由结点u到结点v的路径，该路径与添加的边$e = (u, v)$形成一个环(Cycle)，检查边e是否为环中具有最大权值的边，若是，则T仍为一颗最小生成树；否则不是。
- 显然算法的时间复杂度为$O(|V|)$.

问题3-提示

- 正确性：接下来证明T仍为一颗最小生成树当且仅当e为环中权值为大的边。
- $\Longrightarrow$：若T为新得到的图的最小生成树，则e为环中权值最大的边。
  将边e添加到树T中，将导致一个环。若环中存在一条边e'满足$w(e') > w(e)$，则将e′替换为e, 产生一颗新的生成树，且其权值小于T，导致矛盾。因此e为环中权值最大的边。

问题3-提示

- $\Leftarrow$：若e为环中权值最大的边，则T为新得到的图的最小生成树。
  假设T不是新得到的图的最小生成树，则新得到的图的任意最小生成树T'一定包括边e(否则T′也应该是原图G的最小生成树)，考虑由边e导致的割，如下图所示。



问题3-提示

- 环中存在一条不同于e的边e′穿过这个割。在T′中将e替换为e′，将得到一颗新的生成树。由于$w(e) \geq w(e')$，因此新的生成树的权值不会大于T′的权值，这与假设矛盾。因此T为新得到的图的最小生成树。