

# 程序设计与算法 (2017 年秋季学期)

## 第一次作业

作业提交截止时间：2017 年10 月31 日

- 1 对下面每一对表达式  $(A, B)$ ，请判断  $A$  和  $B$  之间的关系是  $O, \Omega$  还是  $\Theta$ 。注意他们之间可能满足多种关系。(每小题 4 分，共 20 分)

1.  $A = n^3 - 100n, B = n^2$ ;

2.  $A = \log n, B = \log_{1.1} n$ ;

3.  $A = 2^{2n}, B = 2^{3n}$ ;

4.  $A = 2^{\log n}, B = n$ ;

5.  $A = \log \log n, B = 10^{100}$ .

- 2 请给出  $T(n)$  尽可能紧凑的渐进上界并予以说明，可以假定  $n$  是 2 的幂次。(每小题 3 分，共 21 分)

1.

$$T(1) = T(2) = 1$$

$$T(n) = T(n-2) + 1 \quad \text{if } n > 2$$

2.

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = T(n/2) + 1 \quad \text{if } n > 1$$

3.

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = T(n/2) + n \quad \text{if } n > 1$$

4.

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = 2T(n/2) + 1 \quad \text{if } n > 1$$

5.

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = 4T(n/2) + 1 \quad \text{if } n > 1$$

6.

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = 3T(n/2) + n^2 \quad \text{if } n > 1$$

7.

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = T(n/2) + \log n \quad \text{if } n > 1$$

### 3 $k$ 路归并问题 (19 分)

现有  $k$  个有序数组 (从小到大排序), 每个数组中包含  $n$  个元素。您的任务是它们合并成 1 个包含  $kn$  个元素的有序数组。首先来回忆一下课上讲的归并排序算法, 它提供了一种合并有序数组的算法 *Merge*。如果我们有 2 个有序数组大小分别为  $x$  和  $y$ , *Merge* 算法可以用  $O(x+y)$  的时间来合并这两个数组。

1. 如果我们应用 *Merge* 算法先合并第一个和第二个数组, 然后由前后两个数组合并后的数组与第三个合并, 再与第四个合并, 直到合并完  $k$  个数组。请分析这种合并策略的时间复杂度 (请用关于  $k$  和  $n$  的函数表示)。
2. 针对本题的任务, 请给出一个更高效的算法, 并分析它的时间复杂度。(提示: 此题若取得满分, 所设计算法的时间复杂度应为  $O(nk \log k)$ 。)

### 4 局部最小值问题 (20 分)

给定一个由  $n$  ( $n \geq 3$ ) 个互不相同的整数组成的数组  $A[1..n]$ , 其满足  $A[1] > A[2]$  并且  $A[n-1] < A[n]$ 。我们定义数组的**局部最小值**为比它的两个相邻元素 (如果存在) 都小的整数。换言之,  $A[x]$  是局部最小值当且仅当它满足  $A[x] < A[x-1]$  并且  $A[x] < A[x+1]$  ( $1 < x < n$ )。例如, 下图所示数组中包含两个局部最小值, 分别为 3 和 1。

9	3	7	2	1	4	5
---	---	---	---	---	---	---

求局部最小值显然有一个  $O(n)$  的做法, 仅需要扫描一遍整个数组就可以找到所有的局部最小值。请你给出一个算法可以在  $O(\log n)$  的时间复杂度内找出一个数组的局部最小值。如果局部最小值有多个, 仅需要找出任意一个局部最小值即可。(提示: 我们给出的限制条件保证数组至少有一个局部最小值。)

### 5 字符串等价关系判定问题 (20 分)

给定两个长度为  $n$  的字符串  $A$  和  $B$ , 若称  $A$  与  $B$  是**等价的**, 当且仅当它们满足如下关系之一:

1.  $A$  和  $B$  完全相同;

2. 若将把  $A$  分成长度相等的两段  $A_1$  和  $A_2$ ，也将  $B$  分成长度相等的两段  $B_1$  和  $B_2$ 。且他们之间满足如下两种关系之一：
- a.  $A_1$  和  $B_1$  等价且  $A_2$  和  $B_2$  等价;
  - b.  $A_1$  和  $B_2$  等价且  $A_2$  和  $B_1$  等价;

请你设计一个高效的算法来判断两个字符串是否等价并分析你的算法的时间复杂度。

例如，假设  $A$  字符串为  $aaba$ ， $B$  字符串为  $abaa$ 。 $A$  字符串首先分裂为  $A_1 = aa$ ， $A_2 = ba$ 。 $B$  字符串分裂为  $B_1 = ab$ ， $B_2 = aa$ 。 $A_2$  字符串再分裂为  $A_{21} = b$ ， $A_{22} = a$ 。 $B_1$  字符串再分裂为  $B_{11} = a$ ， $B_{12} = b$ 。此时  $A_{21}$  和  $B_{12}$  相等， $A_{22}$  和  $B_{11}$  相等，因此根据等价关系的判断条件 2.b 可知， $A_2$  和  $B_1$  等价。又因为  $A_1$  和  $B_2$  完全相同，根据等价关系的判断条件 1 可知， $A_1$  和  $B_2$  等价。再次利用等价关系的判断条件 2.b，可以得出结论，字符串  $A$  和  $B$  等价。