

Design and Analysis of Algorithms

Tutorial 7: Graph Algorithms



童咏昕

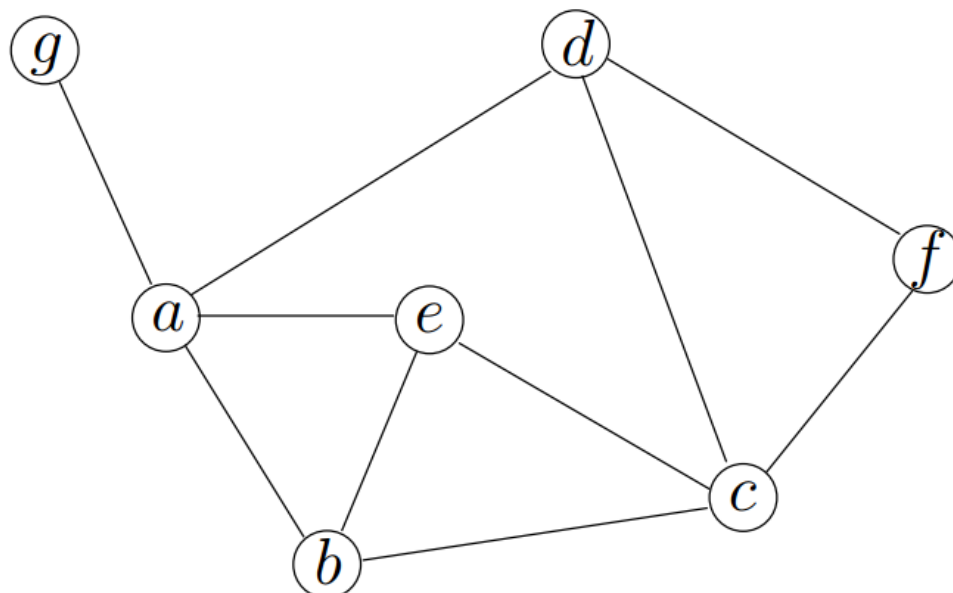
北京航空航天大学 计算机学院

yxtong@buaa.edu.cn

问题1

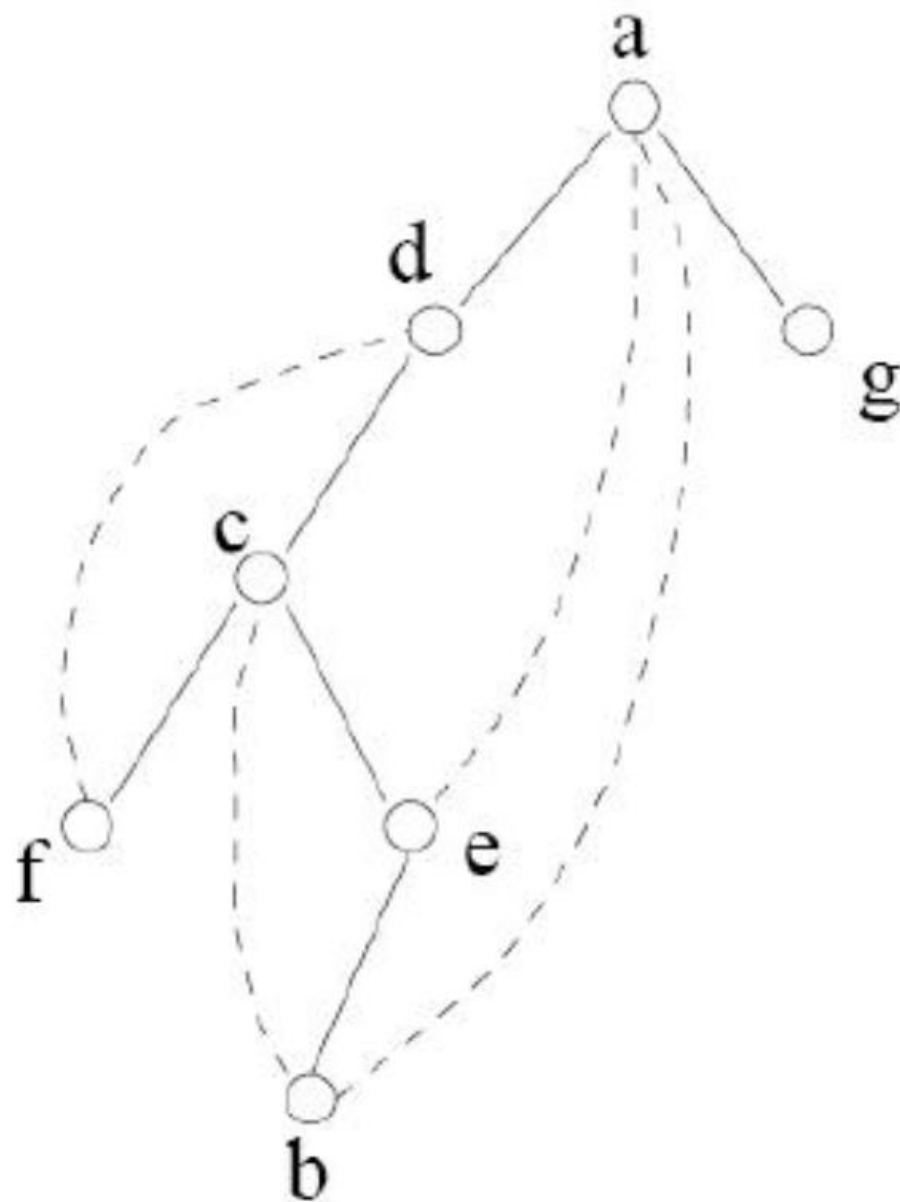
- 无向图G包含7个结点和10条边，其邻接表和结构如下所示。

$a \rightarrow d, e, b, g$	$b \rightarrow e, c, a$
$c \rightarrow f, e, b, d$	$d \rightarrow c, a, f$
$e \rightarrow a, c, b$	$f \rightarrow d, c$
$g \rightarrow a$	



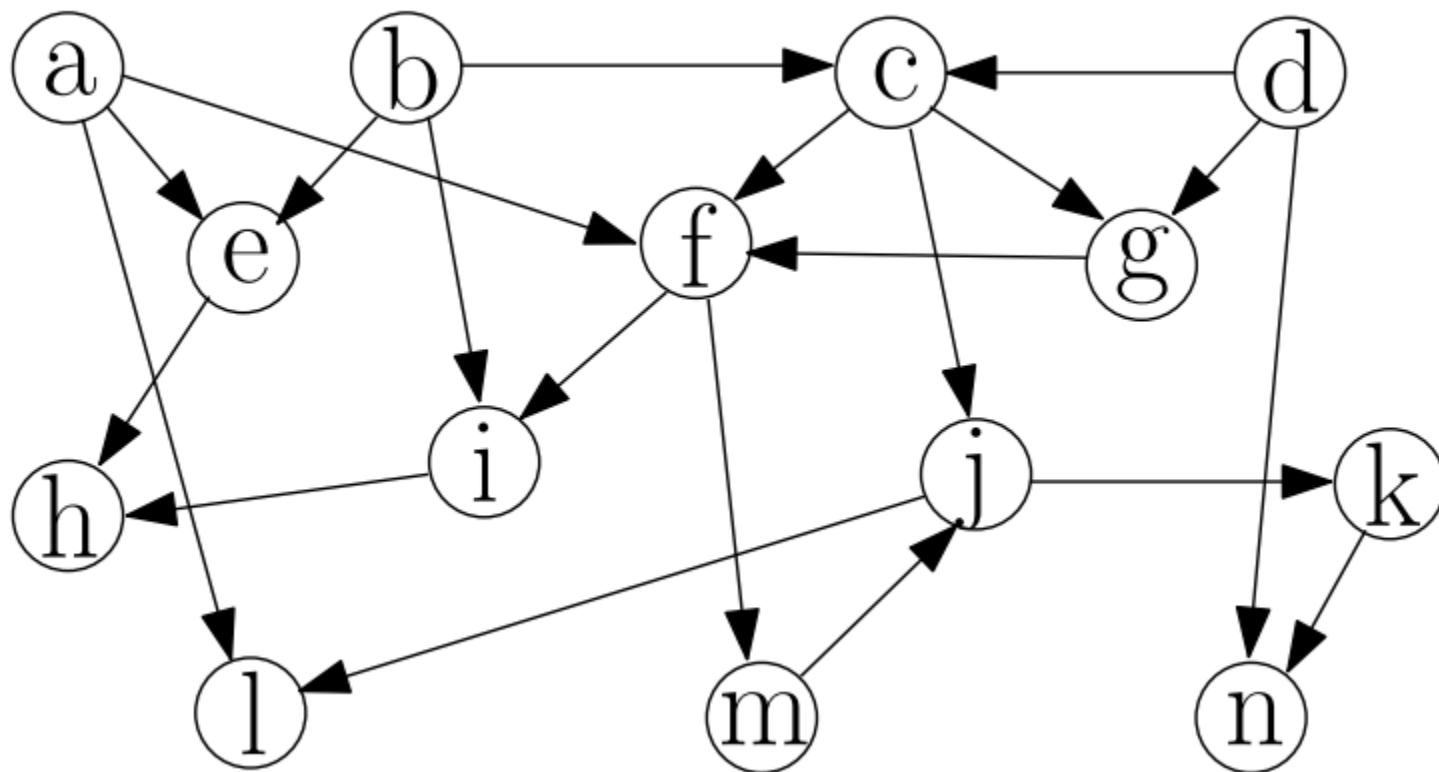
- 以结点a作为起始结点执行深度优先搜索 (DFS)，请画出相应的搜索树，并将不在搜索树中的边用虚线在搜索树中标注。

问题1-提示

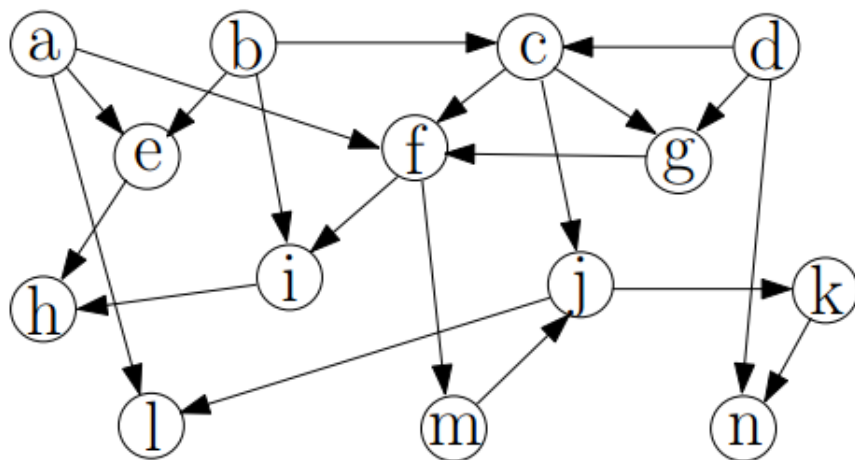


问题2

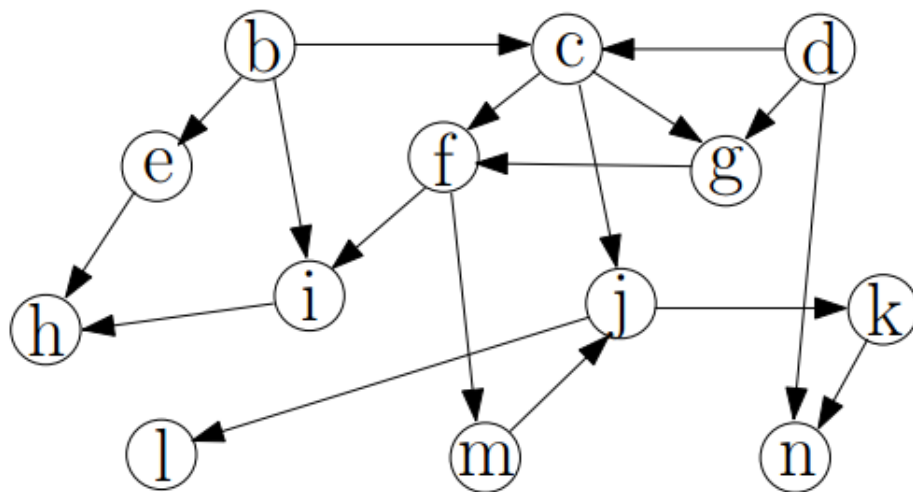
- 对下面的有向图进行拓扑排序。



问题2-提示



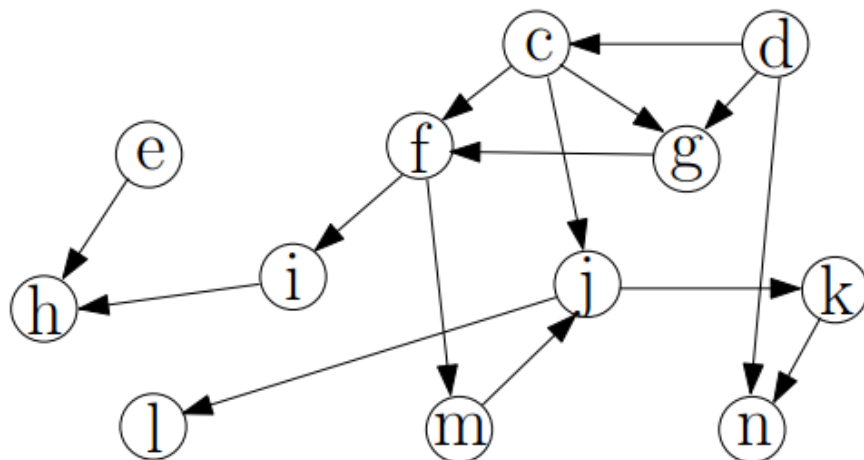
$$Q = \{a, b, d\}$$



$$Q = \{b, d\}$$

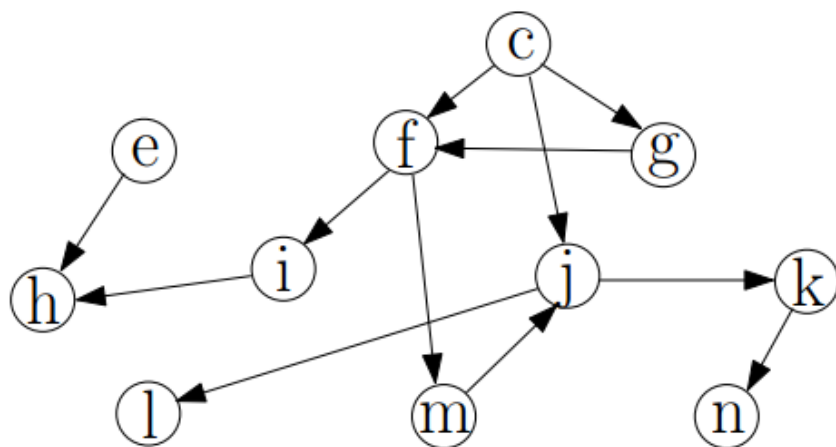
Output: *a*

问题2-提示



$$Q = \{d, e\}$$

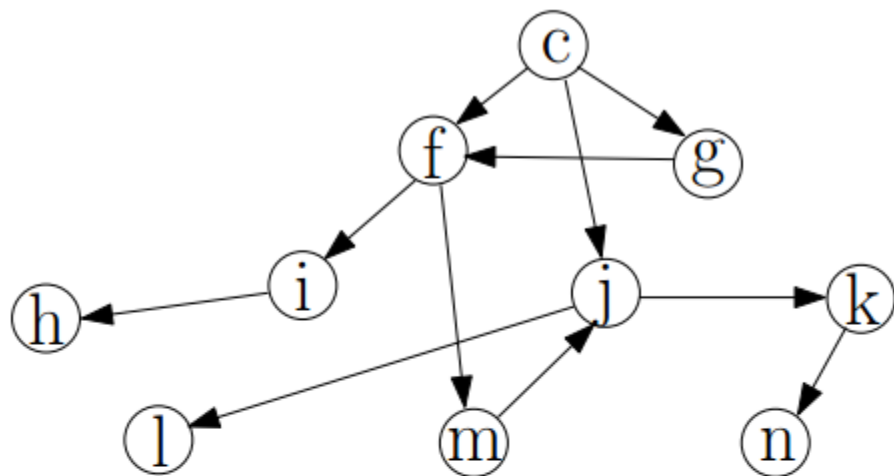
Output: a, b



$$Q = \{e, c\}$$

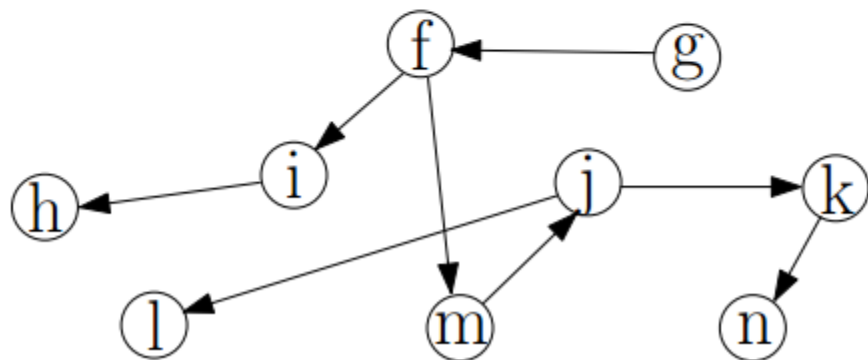
Output: a, b, d

问题2-提示



$$Q = \{c\}$$

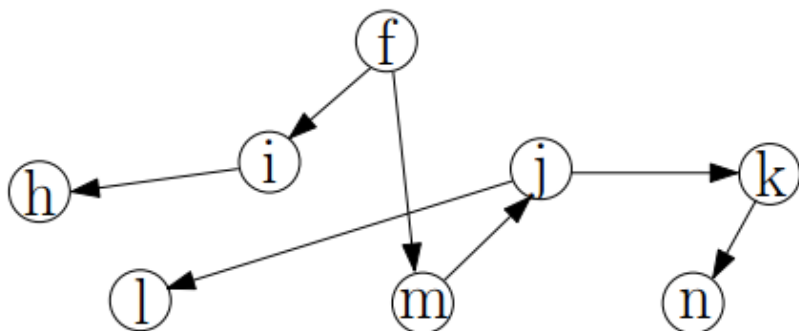
Output: a, b, d, e



$$Q = \{g\}$$

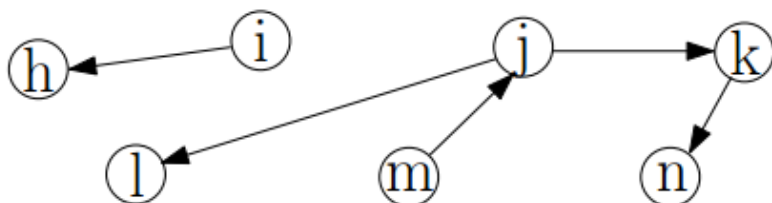
Output: a, b, d, e, c

问题2-提示



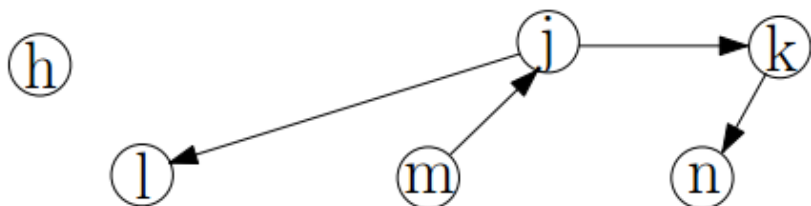
$$Q = \{f\}$$

Output: a, b, d, e, c, g



$$Q = \{i, m\}$$

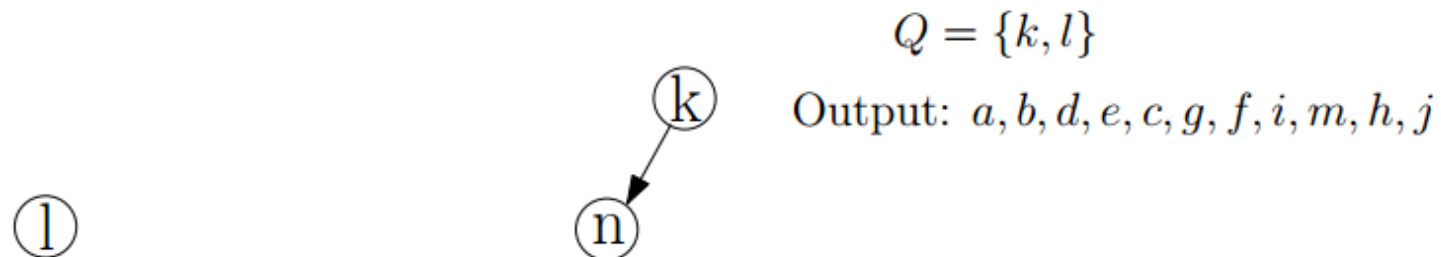
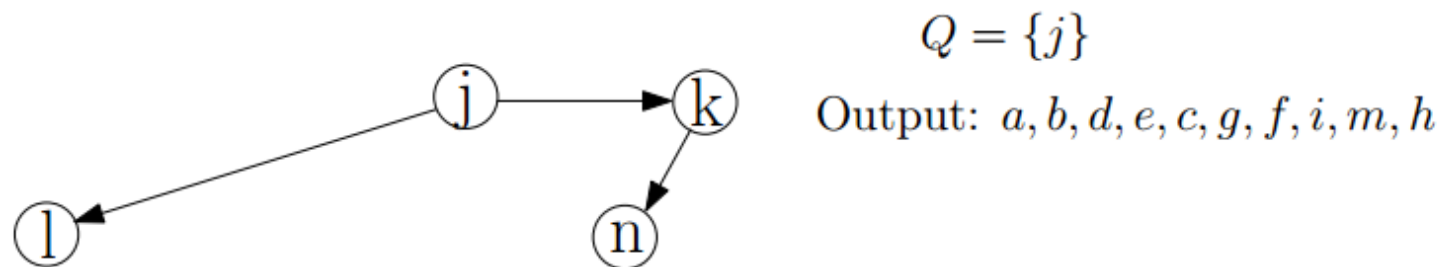
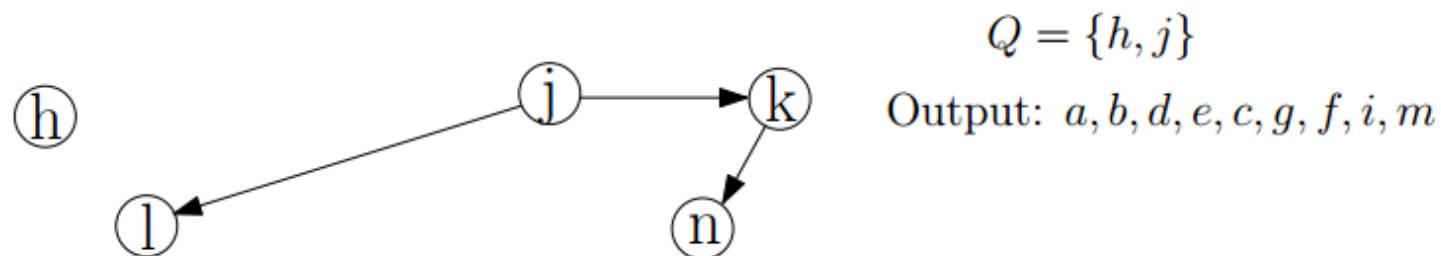
Output: a, b, d, e, c, g, f



$$Q = \{m, h\}$$

Output: a, b, d, e, c, g, f, i

问题2-提示



问题2-提示

$$Q = \{l, n\}$$

Output: $a, b, d, e, c, g, f, i, m, h, j, k$

①

②

$$Q = \{n\}$$

Output: $a, b, d, e, c, g, f, i, m, h, j, k, l$

③

$$Q = \{\}$$

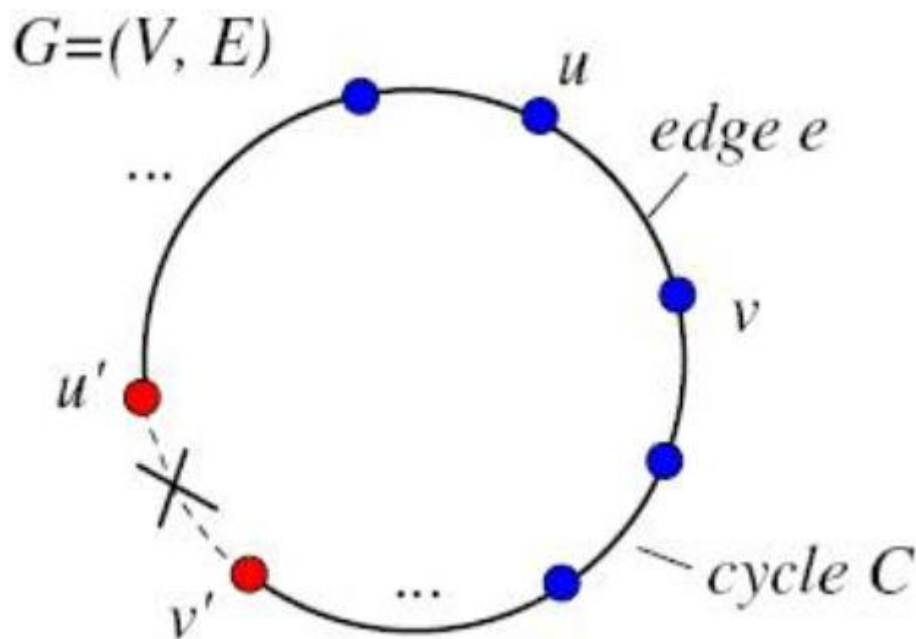
Output: $a, b, d, e, c, g, f, i, m, h, j, k, l, n$

问题3

- 无向连通图 $G = (V, E)$ ，各边的权重 (weight) 各不相同。令 C 为图 G 的一个环 (Cycle)，而 e 为环 C 中权重最大的边，证明： G 中存在不包括边 e 的最小生成树。

问题3-提示

- 反证法：考虑 G 的一个包含边 e 的最小生成树 T . 如图所示，其中边 $e = (u, v)$ 为环 C 中权重最大的边，其权重记为 $W(u, v)$.



- 对于环 C 中的任意其他边 (u', v') 有 $W(u', v') < W(u, v)$

问题3-提示

- 生成树 T 包括边 e , 但无环。因此环 C 中至少有一条边不在 T 中。
- 现在将边 e 从树 T 中移除, 则 T 分为两个较小规模的树 T_1, T_2 , 同一个树上的结点可连通, 而不同树上的结点不连通. 同时环 C 中的结点也分为不可连通的两部分。
- 因此我们总可以找到不同于 u, v 的结点 u', v' , 边 (u', v') 在图 G 中, 但 u' 与 v' 分别位于树 T_1, T_2 上(即边 (u', v') 不在树 T 上)。

问题3-提示

- 接下来添加边 (u', v') , 则 T_1, T_2 形成一颗新的树 T' , 这棵树为图 G 的生成树。 T' 的总权重为
$$W(T') = W(T) - W(u, v) + W(u', v')$$
- 由于 $W(u', v') < W(u, v)$, 因此 $W(T') < W(T)$, 这与假设条件矛盾。因此总存在一颗不包括边 e 的最小生成树。