

Design and Analysis of Algorithms

Tutorial 6: Sorting and Searching & Graph Algorithms



童咏昕

北京航空航天大学 计算机学院

yxtong@buaa.edu.cn

问题1

- 现有 n/k 个数组，每个数组包括 k 个元素(可以认为 k 整除 n)，且第 $i-1$ 个数组中的任意元素都小于第 i 个数组中的所有元素。要将这 n/k 个数组合并为一个包括 n 个元素的数组，请证明任何**基于比较的排序算法**的时间复杂度的下界为 $\Theta(n \log k)$ 。

问题1-提示

对于其中某一个数组，共有 $k!$ 种可能的顺序，而数组间元素的大小关系已知，因此整个数组(包括 n 个元素)可能的顺序的个数为 $(k!)^{\frac{n}{k}}$.

即对这 n 个元素进行排序生成的决策树包括 $(k!)^{\frac{n}{k}}$ 个叶节点。

问题1-提示

一个高度为 h 的二叉树最多拥有 2^h 个叶子节点。
因此

$$\begin{aligned} 2^h &\geq (k!)^{n/k} \\ \Rightarrow h &\geq \log \left((k!)^{n/k} \right) \\ &= n/k \cdot \log(k!) \\ &\geq n/k \cdot \log \left((k/2)^{k/2} \right) \\ &= n/k \cdot k/2 \cdot \log(k/2) \\ &= \Omega(n \log k) \end{aligned}$$

即任何基于比较的排序算法在最坏情况下都需要 $\Omega(n \log k)$ 次比较。

问题2

无向图 $G = (V, E)$ ，其中 V 为结点集合， E 为边集合。假设图中连接任意两点的边至多只有一条，且没有连接同一结点的边。

- a) G 至多包括多少条边？
- b) G 中有两个结点的度 (degree) 为0， G 至多包括多少条边？
- c) G 中无环， G 至多包括多少条边？
- d) G 为连通图，且 G 中至少包括一个环， G 至少包括多少条边？
- e) G 为连通图， G 中结点可能拥有的最小的度为多少？
- f) G 中简单路径的最大长度为多少？

问题2-提示

- a) 每一对(各不相同的)结点之间都可以添加一条边, 数量为

$$\binom{|V|}{2} = \frac{|V|(|V| - 1)}{2}$$

- b) 两个结点度为0(没有边与之相连), 剩余 $|V| - 2$ 个结点可以自由添加边, 数量为

$$\binom{|V| - 2}{2} = \frac{(|V| - 2)(|V| - 3)}{2}$$

- c) $|V| - 1$. 当G连通时包括的边的数量最多, 此时该图为连通无环图(树), 根据Lecture 8知树包括 $|V| - 1$ 条边。

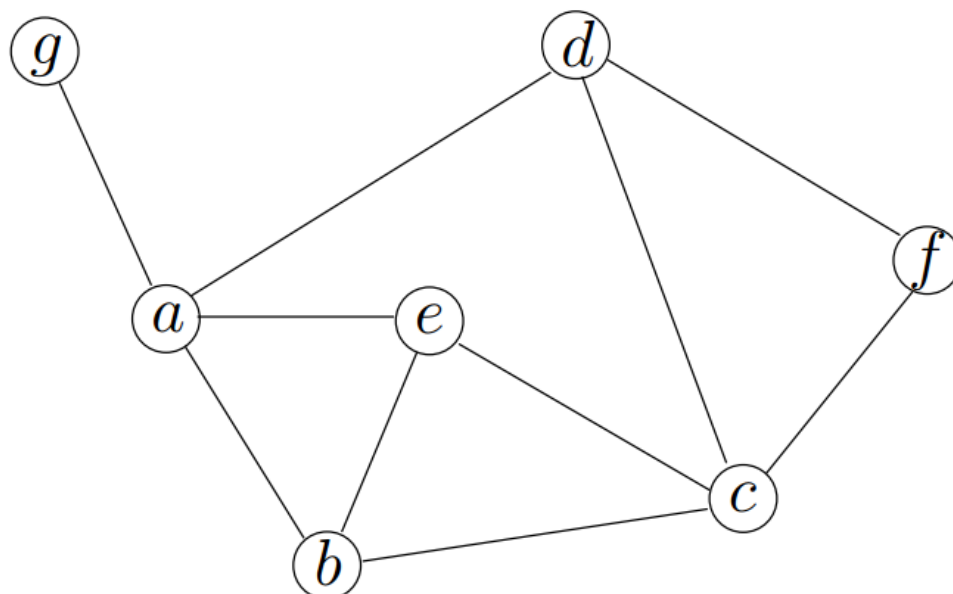
问题2-提示

- d) $|V|$. 仍根据Lecture 8中关于树的相关知识，一个连通图至少包含 $|V| - 1$ 条边，当仅包含 $|V| - 1$ 条边时为一棵树，没有环存在。向该图中添加一条边，图将成为有环图。
- e) 若 $|V| < 2$ ，则最小的度为0；若 $|V| \geq 2$ ，则最小的度为1（否则图不可能连通）。
- f) $|V| - 1$. 最长的简单路径访问每个结点至多1次，因此长度最长为 $|V| - 1$ 。

问题3

- 无向图G包含7个结点和10条边，其邻接表和结构如下所示。

$a \rightarrow d, e, b, g$	$b \rightarrow e, c, a$
$c \rightarrow f, e, b, d$	$d \rightarrow c, a, f$
$e \rightarrow a, c, b$	$f \rightarrow d, c$
$g \rightarrow a$	



- 以结点a作为起始结点执行宽度优先搜索(BFS)，请画出相应的搜索树，并将不在搜索树中的边用虚线在搜索树中标注。

问题3-提示

