

Design and Analysis of Algorithms

Tutorial 9: Graph Algorithms



童咏昕

北京航空航天大学 计算机学院

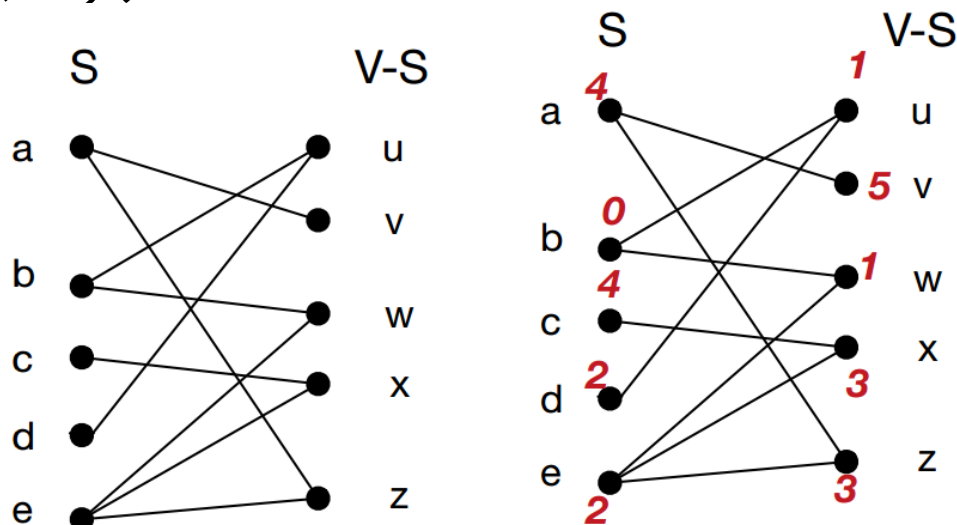
yxtong@buaa.edu.cn

问题1

- 已知图 $G = (V, E)$ 为一个无向连通图，请设计一个时间复杂度为 $O(V + E)$ 的算法检测图 G 是否为一个二分图(bipartite graph)。提示：考虑使用BFS.

问题1-提示

- 任选一个顶点执行广度优先搜索，广度优先搜索运行产生的数组 $d[v]$ 可以表示结点 v 到根节点的最短距离。
- 令集合 S 表示所有 $d[v]$ 为偶数的结点的集合：
 $S = \{v \in V \mid d[v] \text{ is even}\}$.
- 猜想：图 G 是一个二分图当且仅当图中的任意一条边 (u, v) ， $d[u]$ 与 $d[v]$ 的奇偶性不同。



问题1-提示

- 图 G 是一个二分图当且仅当图中的任意一条边 (u, v) , $d[u]$ 与 $d[v]$ 的奇偶性不同。
 \Leftarrow
- 令 $S = \{v \in V \mid d[v] \text{ is even}\}$. 则 $V - S$ 表示所有 $d[v]$ 为奇数的结点集合。 S 内的点之间没有边相连, $V - S$ 内的点之间也没有边相连, 因此 G 是一个二分图。

问题1-提示

- 图 G 是一个二分图当且仅当图中的任意一条边 (u, v) , $d[u]$ 与 $d[v]$ 的奇偶性不同。
 \Rightarrow
- 假设图是二分图, 令 $S, V - S$ 为二分图的划分. 不失一般性, 假设BFS的起始结点 $w \in S$.
- 根据二分图的定义, 从 w 到 S 内其他结点的路径的长度都是偶数, 而从 w 到 $V - S$ 内的结点的路径长度都是奇数。
- 特别地, 由 w 到 S 内其他结点的最短路径长度为偶数, 由 w 到 $V - S$ 内其他结点的最短路径长度为奇数。

问题2

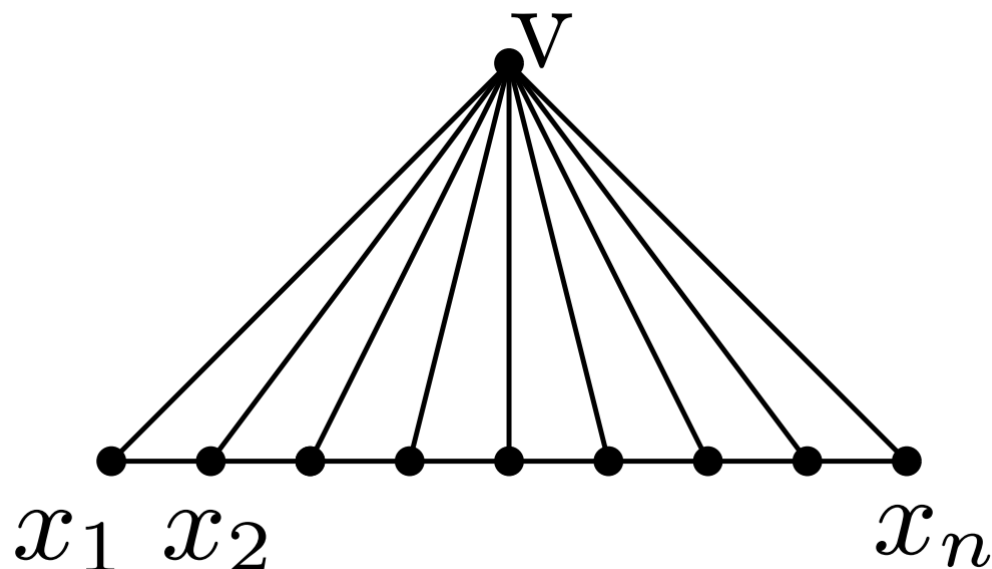
- 在扇形图 (Fan Graph) F_n 中，结点的邻接表如下所示。

$$v: x_1, x_2, \dots, x_n,$$

$$x_1: v, x_2$$

$$x_n: v, x_{n-1}$$

$$\forall i \neq 1, n, x_i: v, x_{i-1}, x_{i+1}$$

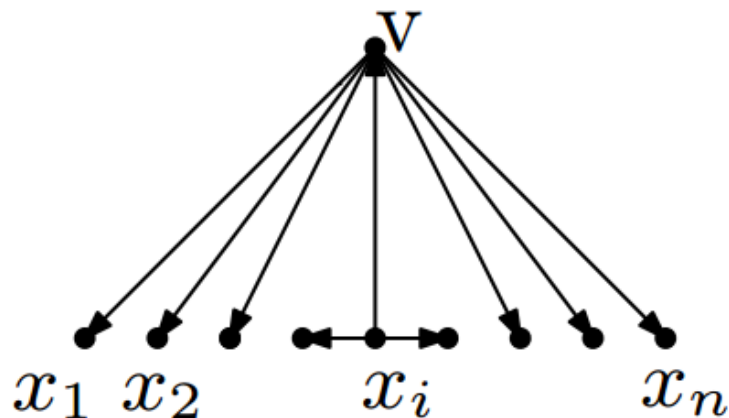
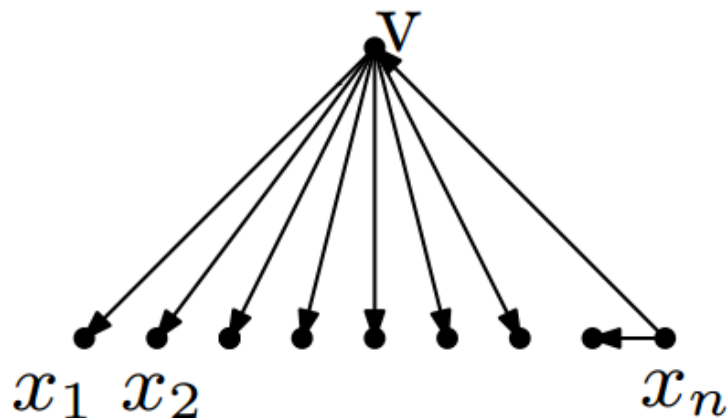
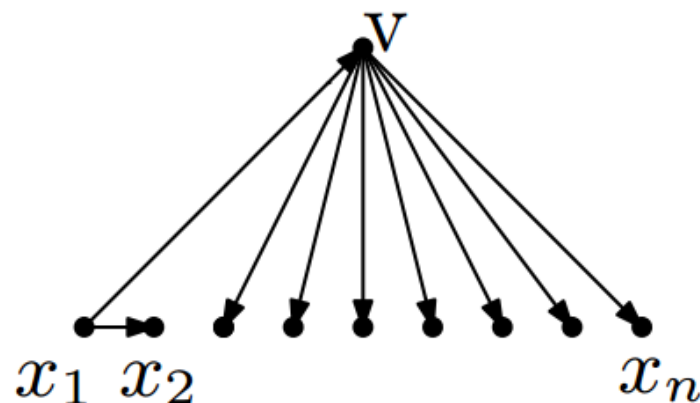
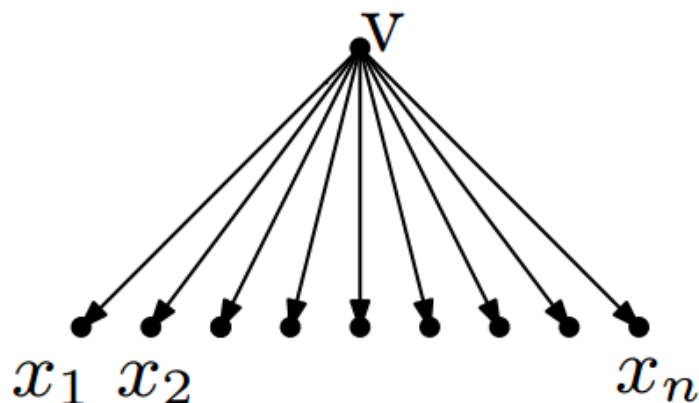


问题2

- 分别以 (1) 结点 v ; (2) 结点 v_1 ; (3) 结点 v_n ; (4) 其他节点 v_i 作为起始结点运行广度优先搜索, 请给出相应的BFS树的结构。
- 分别以 (1) 结点 v ; (2) 结点 v_1 ; (3) 结点 v_n ; (4) 其他节点 v_i 作为起始结点运行深度优先搜索, 请给出相应的DFS树的结构。

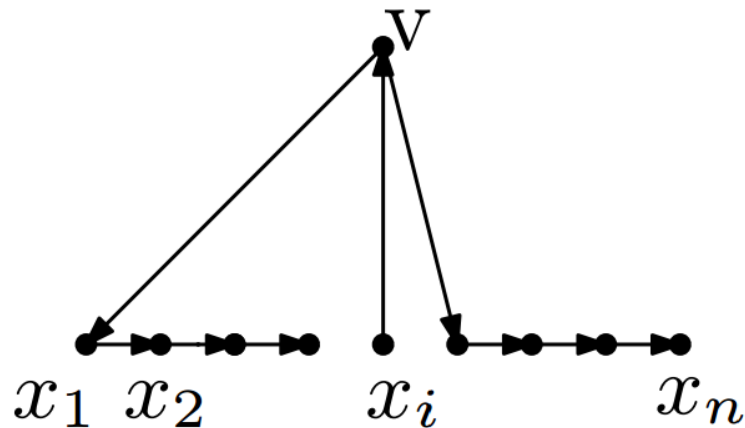
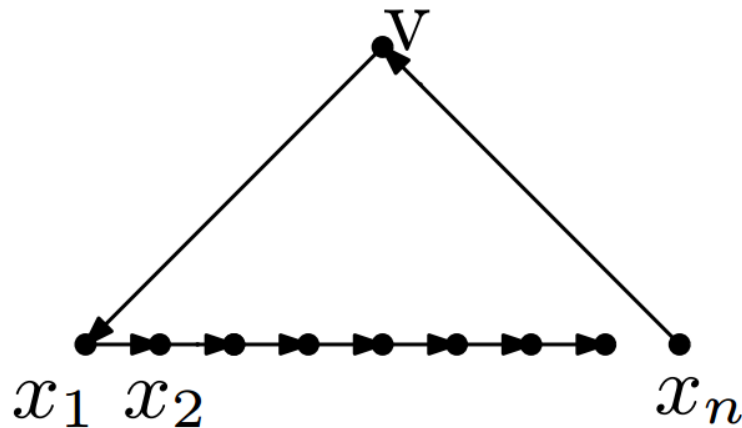
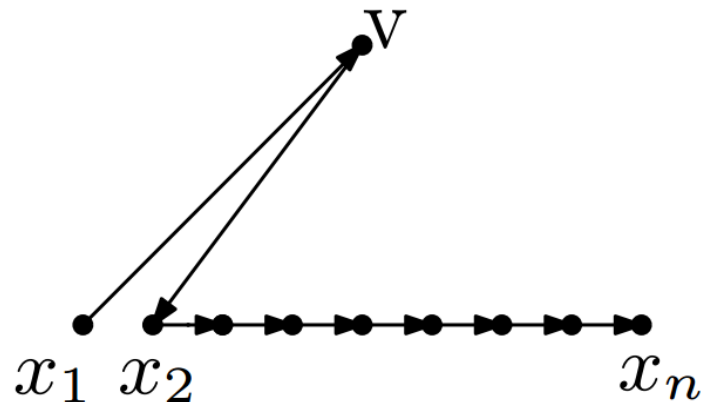
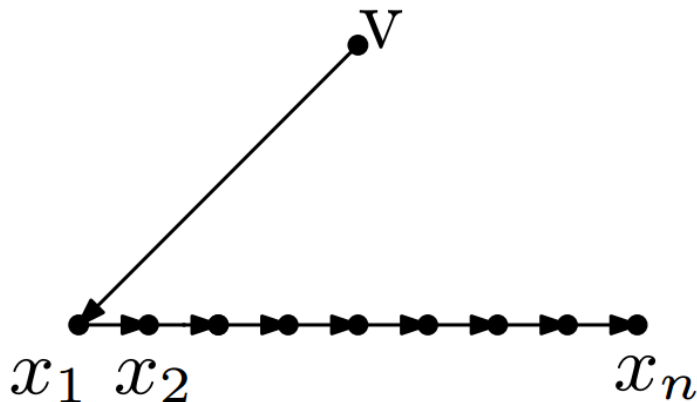
问题2-提示

- 分别以 (1) 结点 v ; (2) 结点 v_1 ; (3) 结点 v_n ; (4) 其他节点 v_i 作为起始结点运行广度优先搜索，请给出相应的BFS树的结构。



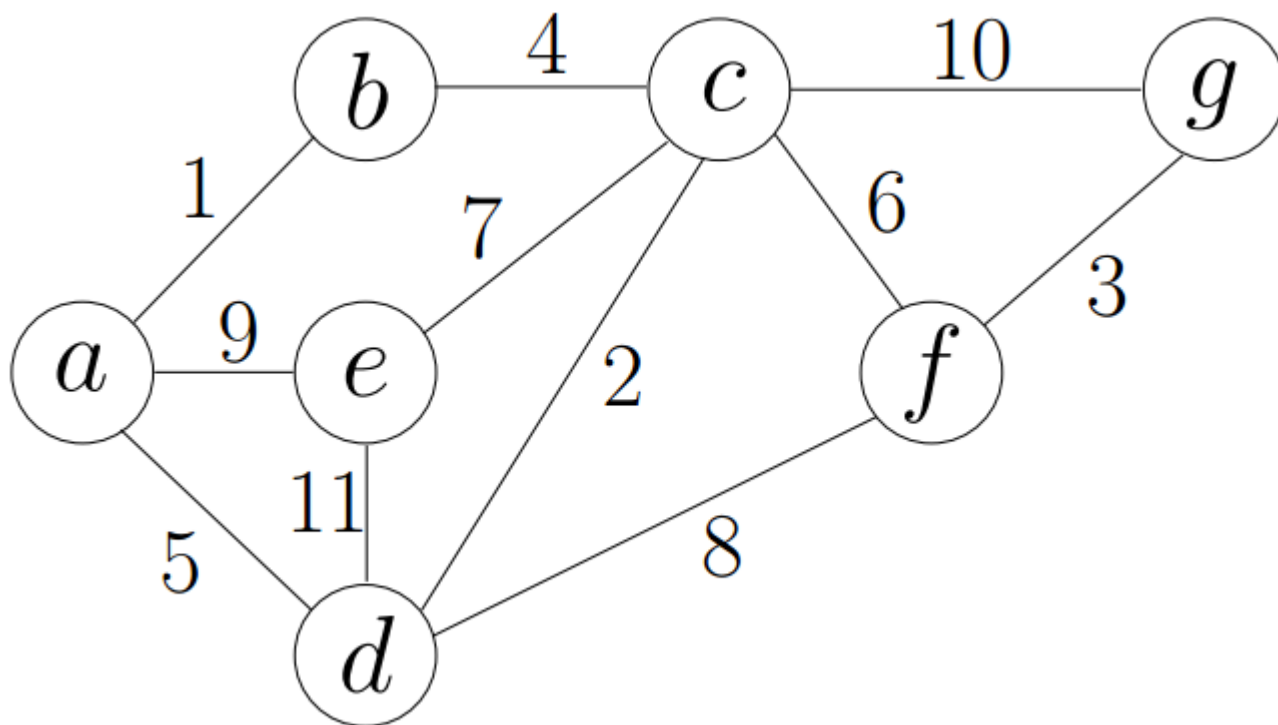
问题2-提示

- 分别以 (1) 结点 v ; (2) 结点 v_1 ; (3) 结点 v_n ; (4) 其他节点 v_i 作为起始结点运行深度优先搜索, 请给出相应的DFS树的结构。



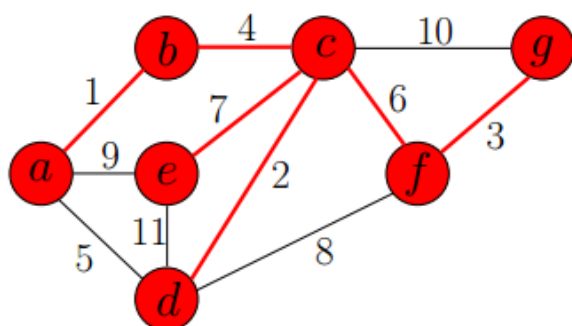
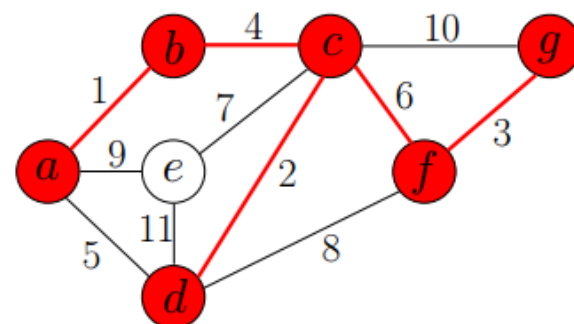
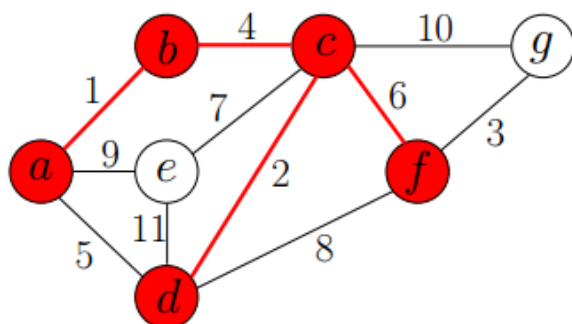
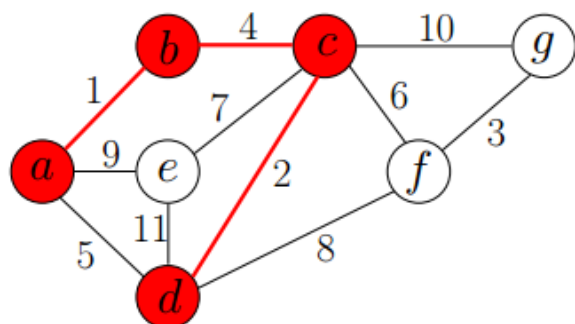
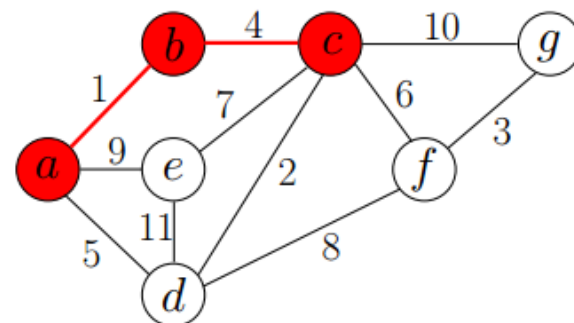
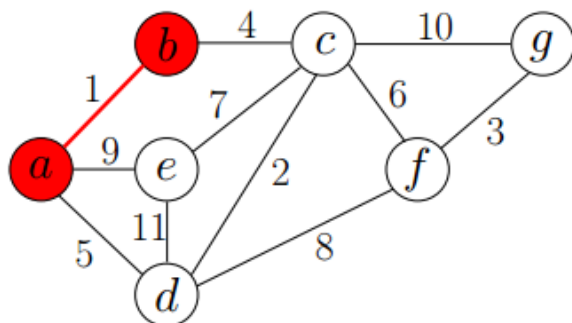
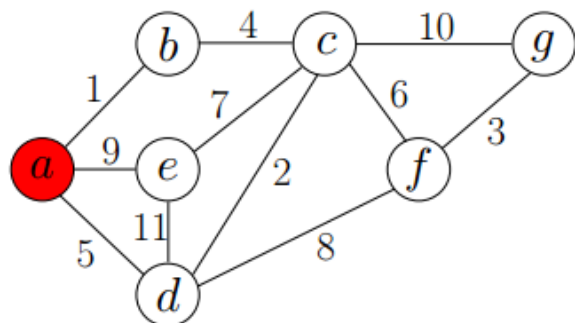
问题3

- Prim的最小生成树算法和Dijkstra的单源最短路径算法具有相似的算法结构，但二者之间有着本质区别。请在下图中运行两个算法，并运行过程中添加边的顺序。假设两个算法的起始结点都是a.



问题3-提示

● MST



问题3-提示

Shortest path

