

算法设计与分析 (2017 年秋季学期)

第四次作业

作业提交截止时间：2017 年 12 月 16 日

1 基站选址问题 (20 分)

假定有一条很长的直线形河流，在河岸上有 n 个房子。可以将该河流看作一条坐标轴，房子的位置以一维坐标的形式按严格递增的顺序给出 (单位为公里)。某通信公司希望在河岸的某些位置搭建手机基站，使得对任意一间房子都存在一个基站到它的距离小于等于 c 公里， c 为给定的一个常数。请给出一个有效的算法来最小化需要搭建的基站的数量，并证明算法的正确性。(注：时间复杂度为 $O(n)$ 的正确的算法可得满分)

2 最长递增子序列问题 (20 分)

请设计一个 $O(n^2)$ 的动态规划算法来求出一个包含 n 个元素的序列中的最长递增子序列。所谓递增子序列是指，从原序列中按顺序挑选出某些元素组成一个新序列，并且该新序列中的任意一个元素均大于该元素之前的所有元素。例如，输入的序列为 $\langle 5, 24, 8, 17, 12, 45 \rangle$ ，那么该序列的最长递增子序列为 $\langle 5, 8, 12, 45 \rangle$ 或 $\langle 5, 8, 17, 45 \rangle$ 。请分析你的算法的正确性并验证其时间复杂度。

3 最长回文子序列问题 (20 分)

一个子序列被称为回文序列是指：该序列从右往左读和从左往右读的结果是一样的。例如，如下所示序列：

$\langle A, C, G, T, G, T, C, A, A, A, A, T, C, G \rangle$

包含了许多回文子序列，如 $\langle A, C, G, C, A \rangle$ ， $\langle A, A, A, A \rangle$ 。请设计一个动态规划的算法来计算序列 $x[1..n]$ 的最长回文子序列。该算法的时间复杂度应为 $O(n^2)$ 。

4 餐厅选址问题 (20 分)

某公司希望在高速公路上设立一些餐厅。现有 n 个位置可选，距高速公路的起点分别为 $m_1, m_2, \dots, m_n (m_1 < m_2 < \dots < m_n)$ 。对每个位置 m_i ，该公司如果在这个位置设立餐厅的话，期望盈利为 $p_i (p_i > 0)$ 。此外，公司设立的任意两个餐厅间的距离应大于等于 $k (k > 0)$ ，但设立的餐厅个数没有限制。请设计一个动态规划的方法来帮助该公司选址，使得期望盈利和最大。请写出你的动态规划转移方程并给出伪代码，最后分析该算法的时间复杂度。

5 子图同构问题 (20 分)

子图同构问题是指，对给出的两个图 G_1 和 G_2 ，判断 G_1 是否是 G_2 的子图。请证明子图同构问题是 NP 完全的。(注：为了证明一个问题是 NP 完全的，首先需要证明该问题是 NP 的，其次需要将其在多项式时间规约到一个已知的 NP 完全问题上。)