

分类号: \_\_\_\_\_

密级: \_\_\_\_\_

UDC: \_\_\_\_\_

编号: \_\_\_\_\_

专业硕士学位论文

(工程硕士)

**基于射线与波叠加法耦合的  
弹性结构辐射声场预报方法研究**

硕士研究生：刘铨豪

指导教师：商德江 教授

工程领域：电子与通信工程

哈尔滨工程大学

2020年3月

分类号: \_\_\_\_\_

密级: \_\_\_\_\_

U D C: \_\_\_\_\_

编号: \_\_\_\_\_

专业硕士学位论文

(工程硕士)

基于射线与波叠加法耦合的  
弹性结构辐射声场预报方法研究

硕 士 研 究 生：刘铨豪

指 导 教 师：商德江 教授

学 位 级 别：工程硕士

工 程 领 域：电子与通信工程

所 在 单 位：水声工程学院

论文提交日期：2020 年 2 月 23 日

论文答辩日期：2020 年 3 月 19 日

学位授予单位：哈尔滨工程大学

Classified Index:

U.D.C:

A Dissertation for the Professional Degree of Master

(Master of Engineering)

Research on Radiation Sound Field Prediction of  
Elastic Structures Based on the Coupling of Ray  
and Wave Superposition

**Candidate:** Liu Yihao

**Supervisor:** Prof. Shang Dejiang

**Academic Degree Applied for:** Master of Engineering

**Engineering Field :** Electronics and Communication Engineering

**Date of Submission:** Feb. 23, 2020

**Date of Oral Examination:** Mar. 18, 2020

**University:** Harbin Engineering University



# 摘要

海洋环境中弹性结构的声辐射预报是水声学中较为关注的研究领域。传统的声辐射计算方法主要针对于自由空间或者半自由空间，而考虑与海洋边界作用的海洋信道中的研究较少，尤其是中高频段的辐射声场预报在目前为止仍是空白。本文结合射线理论与波叠加法，在已知结构表面振动信息的条件下，通过配置相应的虚拟源，将结构声源等效为若干个虚拟声源，实现中高频段下信道环境下弹性结构辐射声场的预报。

本文在建立射线波叠加法理论模型的过程中，针对一定条件下辐射声场的预报结果受结构表面振动信息的微小扰动而产生较大波动这一影响数值计算稳定性的现象，提出了一种优化方案，在逆问题求解过程中，用正则化参数将可能出现的病态方程构造一个稳定的泛函，通过调整正则化参数的取值求解病态方程的稳定近似解，从而实现数值计算的优化。结合本文提出的理论基础编写射线波叠加法声辐射预报程序，在给出射线波叠加法相应的参考适用范围之后，本文从格林函数近场计算精度以及虚拟源配置策略的角度验证射线波叠加法的有效性并分析其预报的精度，说明了虚拟源数量和虚拟源面与结构表面半径比的选取准则以及误差的影响规律。

在完成上述工作的基础之上，本文进行了浅海环境下弹性结构声辐射特性分析。通过对弹性圆柱壳和弹性球壳的声辐射与相应点源辐射声场案例的计算与分析，主要从声源类型和声源尺寸这两方面揭示了结构声辐射的特性。这种特性主要体现在辐射声源产生特定的振型从而激发模态，在辐射声场中表现为阶数不同的简正波的衰减与传播。结构声源和点声源的各阶简正波激发强度谱，虽然分布不同，但是谱成分一致，存在一定的联系。

最后，本文进行了射线波叠加法的实验验证工作，在特定的实验环境中测量弹性结构模型的表面振动信息和辐射声场，有效验证了射线波叠加法的实用性和可靠性。

**关键词：**波叠加法；射线理论；弹性结构；声辐射预报；辐射声场特性

# Abstract

Predicting radiated acoustic field of elastic structures in sea is a concerned research area in underwater acoustics. Traditional acoustic radiation calculation methods are mainly aimed at free space or semi-free space, but few studies have been conducted in ocean channels considering interaction with ocean boundaries, especially the radiation acoustic prediction in the middle and high frequency band is still blank. This paper combines the ray theory and the wave superposition method. Using the vibration information on the structure surface, the corresponding structural sound source is equivalent to several virtual sound sources by configuring corresponding virtual sources, and then the prediction of the radiated sound field of the elastic structure in sea in the middle and high frequency band is realized.

In the process of establishing the theoretical model of the ray combined wave superposition method, this paper proposes an optimization for the phenomenon that the prediction result of the radiated sound field under certain conditions is greatly affected by the small disturbance of the vibration information of the structure surface, which damages the stability of the numerical calculation. In the solution, in the process of solving the inverse problem, a stable functional is constructed by using the regularization parameters to the possible ill-conditioned equations, and the stable approximate solution of the ill-conditioned equations is solved by adjusting the values of the regularization parameters, so as to optimize the numerical calculation. Combined with the theoretical basis proposed in this paper, a prediction program of acoustic radiation by ray combined wave superposition method is compiled. After giving the corresponding reference scope of the ray wave superposition method, this paper verifies the validity of the ray wave superposition method from the perspective of the near-field calculation accuracy of the Green's function and the virtual source allocation strategy. After analyzing the accuracy of its prediction, this paper explains the selection criteria and error influence rules of the number of virtual sources and the ratio of the virtual source surface to the structural surface radius.

Based on the completion of the above work, the paper analyzes the acoustic radiation characteristics of elastic structures in shallow sea environments. The analysis mainly reveals the characteristics of structural acoustic radiation from two aspects: the type of the sound source and the size of the source, which is mainly reflected in the fact that the radiated sound

source generates a specific mode. In the radiated sound field, it is reflected in the attenuation and propagation of normal modes with different orders. The excitation intensity spectra of normal modes corresponding to structural sources and point sources have different distributions, but the spectral components are consistent, indicating a certain relationship.

Finally, the experimental verification of the ray combined wave superposition method is carried out in this paper. The surface vibration information and radiated acoustic field of the elastic structure model are measured in a specific experimental environment, which effectively verifies the practicality and reliability of the ray combined wave superposition method.

**Keywords:** Wave superposition method, ray theory, elastic structure, acoustic radiation prediction, radiation acoustic field characteristics

# 目 录

第 1 章 绪论.....	1
1.1 研究背景.....	1
1.2 研究现状.....	1
1.3 研究内容.....	4
第 2 章 射线波叠加法理论模型.....	7
2.1 引言.....	7
2.2 波叠加理论 .....	7
2.2.1 虚拟源强的反演 .....	8
2.2.2 格林函数 .....	10
2.2.3 数值稳定性 .....	11
2.3 射线理论 .....	14
2.3.1 波束追踪 .....	14
2.3.2 强度计算 .....	16
2.4 本章小结.....	18
第 3 章 射线波叠加法的验证与分析.....	19
3.1 引言 .....	19
3.2 信道中近场格林函数收敛性分析 .....	19
3.3 射线叠加及其适用性的分析 .....	22
3.4 信道中波叠加法虚拟源的配置 .....	25
3.5 本章小结.....	31
第 4 章 浅海弹性结构声辐射特性研究.....	33
4.1 引言 .....	33
4.2 不同类型辐射声源的声场特性研究 .....	33
4.2.1 弹性球壳与点源的辐射声场差异性研究 .....	34
4.2.2 弹性圆柱壳与点源的辐射声场差异性研究 .....	38
4.3 不同尺寸辐射声源的声场特性研究 .....	41
4.4 本章小结 .....	44
第 5 章 射线波叠加法实验研究.....	46



5.1 引言 .....	46
5.2 实验内容 .....	46
5.2.1 实验系统介绍 .....	46
5.2.2 振动测量系统 .....	47
5.2.3 水声测量系统 .....	48
5.3 实验结果与分析 .....	49
5.4 本章小结 .....	53
结论.....	54
参考文献.....	56
攻读硕士学位期间发表的论文和取得的科研成果.....	61
致 谢.....	62

# 第1章 绪论

## 1.1 研究背景

水下结构体的辐射噪声预报，一直以来都是声学领域的研究者们非常关注的一个问题。作为一种水下结构体，潜艇辐射噪声的水平往往是其隐蔽性能的体现，而隐蔽性可以说是潜艇的生命线。因而，潜艇的振动噪声监测能力，对提高潜艇的动态声隐身技术的研究和实现来说，有着重要作用。长期以来，各国对潜艇结构的噪声监测，即辐射声快速预报有着一定的诉求，要求预报能及时地反馈结构的辐射噪声状态及变化，以及在远场的传播特性，从而评价当前的辐射噪声，确保潜艇的安全半径，并且为可能实现的有源消声提供输入参数。

由于我国的周边海域大多为浅海，海况较为特殊，海面和海底作为声传播空间的界面时，存在着反射与折射，称为海洋信道环境。海洋信道中的声辐射预报则更加复杂，它涵盖了结构声学 and 海洋声学两大领域的内容，存在着结构与流体的耦合作用，这与自由场空间相比更加复杂。水中弹性结构辐射噪声在海洋中的传播规律，取决于海区的海水温度分布、盐度分布和海底地质条件等因素。在不同的海区或同一海区不同的季节，其辐射噪声的传播规律有所不同，这需要结合具体的海洋声学环境的参数，与大量的海上实验相结合。因此，针对有界的声场环境，探索一种结构辐射噪声的快速预报方法具有重要的理论价值和广泛的应用背景，它不仅对信道中目标的检测识别，减振降噪在信道中效果的检验具有指导意义；而且为潜艇各工况下的安全半径预报、实现动态隐身提供必要的理论基础，对浅海中潜艇辐射噪声的实时监测、制定技战术策略以及提高潜艇生存力具有举足轻重的作用。

## 1.2 研究现状

水下弹性结构声辐射这一研究领域，一直以来都能够获得国内外研究者的关注。至今，已有大量学者对典型弹性结构声振特性进行了较为深入的研究，并且提出了一定激励下弹性结构辐射声压相应的表达式<sup>[1-6]</sup>。这些学者为之后研究人员对弹性结构声辐射的深入研究奠定了一定的理论基础。

与在空气中振动相比，结构在水中的振动会复杂的多，不仅水介质的压力密度情况与空气不同，辐射声波在水中的传播也较空气中更加难以解析。与空气介质相比，水介质的密度更大，声速也远大于空气中的声速，这将导致水中的特性阻抗与空气中截然不同。因为弹性结构的特性阻抗与水介质相比量级接近，因此，置于水中的弹性结构，在

振动时不能忽视水对结构振动产生的作用，结构会与流体产生耦合效应<sup>[7]</sup>。相比于自由场或者半无限空间，海水是个有边界的物理域，需要考虑海面边界与海底边界对辐射声场的作用。那么水下弹性结构的声辐射这一问题，实质上就一类多物理场耦合的系统，涉及到的物理场包括激励、固体、流体、海水边界以及相应的声场分布。这个耦合物理场中的每一个物理场都不能忽略，所以这增大了该问题建模的难度。当结构的几何复杂性和海洋环境的多变性都加以考虑的话，对该问题的求解会更加复杂。

通常来说，结构辐射声场的研究手段一般有几类：解析法、数值法以及试验法。解析法适合简单形状的弹性结构，这类弹性结构的辐射声场较易解析，已有大量学者对此作了较为深入的研究<sup>[8-14]</sup>。而复杂形状弹性结构的辐射声场难以用解析法结算，在建模上就会产生极大的困难。试验法可以克服上述的困难，但是试验法的成本高昂，这种成本不仅包括经济上的，还包括时间成本和人力成本。另外，试验法对环境的要求较高，难以量化环境的复杂性，往往只能作为验证的手段之一。相比而言，数值法较容易实现，只需要在计算机上建立合理的模型，采用数值计算的方法预报辐射声场，高效而便捷，可以对不同的外部环境做针对性的研究，因而成为了当前研究的主流。

当前，常用的用于结构振动声辐射的数值方法有很多，包括有限元法、边界元法、统计能量法、波叠加法等等。有限元方法是一种全局域的数值方法，在计算域中生成离散网格，变量插值以 Helmholtz 方程为基础，结合流体与结构以及其他耦合的相应边界条件，对离散后的声场进行代数求解。随着计算频率的升高，为了满足有限元网格密度的基本要求，网格密度也要相应的增大，这就给计算机带来的较大的负担，于是声场的计算距离受到了严重限制。为了克服有限元法自身的缺陷，有学者引入边界积分方程来实现对声辐射的计算，这种方法后来被称为边界元法。边界元法利用基本解，把需要计算的物理域上的偏微分方程转变为该物理域在其边界上的积分方程。同有限元法类似，边界元法也采用了一定的离散方法，在边界上生成离散单元，可以由结构边界的物理量求得整个声场，有着良好的计算精度，并且边界元方法将问题的维数降低了一维，将三维空间问题降维为二维问题，从而使得数据的需求量和求解的自由度数大大的减少，故而是一种应用十分广泛的辐射声场预报方法。但是边界元方法存在有明显的不足，即需要对不同阶的奇异积分做相应的数值处理，当遇到具有解非唯一性的特征波数时，对该奇异积分的处理就更加困难<sup>[15-20]</sup>。统计能量法是以统计为出发点，从能量的观点来分析结构在激励下的振动响应。在统计能量法的观点中，一个振动系统由一系列可以接收、

存储、消耗、传输能量的耦合子系统构成，子系统被定义为传递波形的集合，通过假设子系统的边界条件并忽略一定的细节进行简化分析。由此，将对复杂振动系统的分析转化为对每个子系统的分析。统计能量分析的精度与分析频段内结构的模态密度有关，在分析频段内一般要求至少有 5 个结构模态来保证分析的精度。低频时，统计能量法的计算结果误差较大，所以适用于高频分析<sup>[21-24]</sup>。

为了寻找更为有效的声辐射计算方法，在 20 世纪 80 年代，Koopmann 等<sup>[25-26]</sup>和 Miller 等<sup>[27]</sup>提出了波叠加法，这种方法将复杂的辐射体结构用简单源等效替代。J. B. Fahnlne<sup>[28]</sup>和 R. Jeans<sup>[29]</sup>等人通过研究分析，说明了波叠加法回避了繁琐的边界奇异积分，降低了数学处理的难度，有着较高的计算效率。由于波叠加法有着很强的适应性和简洁的物理意义，使得该方法很快引起了国内外学者极大的关注。李加庆<sup>[30]</sup>、于飞<sup>[31]</sup>、李卫兵<sup>[32-33]</sup>等将波叠加法运用在声全息领域，实现复杂结构的声场重构。熊济时<sup>[34]</sup>为了实现近场声辐射的计算，提出了基于传统波叠加法的三维数字空间方法，该方法具有良好的结构适应性。高煜<sup>[35]</sup>对基于波叠加法的声辐射算法做了实验验证，通过与仿真结果进行对比，证明了波叠加法在声辐射计算中是有效且可靠的。虚拟源的配置作为波叠加法的关键技术，先后有不少学者<sup>[36-39]</sup>对此进行了研究与分析。

有关声在海洋信道中的传播，已有大量学者做了研究，形成了多种多样的声传播理论。根据假设和近似的不同，声传播理论中的主要理论方法有简正波理论、波数积分理论、抛物方程理论和射线理论<sup>[40]</sup>。简正波解是波动方程精确的积分解，它是用特征函数来分解声场，每一个特征函数都是波动方程一个解，满足相应的边界条件和初始条件<sup>[41-42]</sup>。波数积分法按简正波近似方法来分离波动方程解并做谱积分，并用不同的方法对该积分做数值计算。抛物方程法主要是针对水平变化问题而提出的，可以很容易地推广至三维问题，而且可以计算全场解，对于低频问题的计算速度很快。抛物方程法在处理声道水平变化和三维变化的声场方面具有优越性，但是由于模型假设上的限制，抛物方程方法不能计算近场，不能计算水平变化比较剧烈的声场。另外，当频率较高时，差分步长必须取得很小，计算量很大，计算时间很长，使得抛物方程法的应用受到一定的限制<sup>[43-48]</sup>。射线理论相比较其他声场模型而言，它具有物理图像清晰、计算速度快、适用范围广等诸多优点。射线理论起始于亥姆霍兹方程，作了几何声学的近似后，通过计算声线轨迹，并且判定本征声线，来计算相应的射线解。射线理论在频率较高时计算结果非常精确，根据不同频率作适当的衍射修正，射线理论可以对较低频的声传播问题有良好的求解。

它不仅应用于分层海洋,而且可以推广应用于三维海洋中<sup>[49-50]</sup>。这类将结构视作点声源的研究方法忽略了结构表面的振动分布特性和声辐射的方向性差异,仅将弹性结构视为具有相同源强且无指向性的点声源,已经难以满足科研需求。

对于弹性结构在浅海信道环境下的声辐射计算问题,在采用单一方法难以满足计算需求的情况下,一些同时采用多种计算方法的联合计算模型被开发出来。陈鸿洋<sup>[51]</sup>在对水下有界空间中弹性结构声辐射预报的研究中,分别从自由场和半自由场的角度,针对波叠加法虚拟源的配置提供了配置的准则,并结合了波导中的声传播理论,实现了波导中弹性结构辐射声场的预报。商德江等<sup>[52-53]</sup>联合简正波理论、多物理场耦合有限元法以及波叠加法,提出一种新的浅海信道中计算结构声辐射理论方法,并且分析了浅海信道中圆柱壳的声辐射特性。钱治文<sup>[54]</sup>提出了一种方法,结合了有限元和抛物方程法,在近场有源区需要获取近场柱面声场数据,在远场无源区域采用抛物方程法求取完整的声场解。抛物方程法是一种步进递推方法,远距离计算会导致误差累积,另外该方法在实际应用中,直接获取近场柱面声场的数据难度较大。

### 1.3 研究内容

为了实现准确有效的对海水信道中弹性结构的声辐射快速预报,本文提出基于射线和波叠加法联合的海水波导中弹性结构声辐射预报方法,并从仿真对比和实验测量两个角度对该方法做了完整的验证与分析。射线波叠加法首先进行声学逆运算,基于弹性结构表面振速,采用波叠加法获得结构内部一系列虚拟源的源强度,然后用于求解声学正问题,运用射线理论,求解各个虚拟源的辐射声场,并将各个源的辐射声场叠加,得到弹性结构总的辐射声场。实际工程中,相比于近场声场的场点声压信息或者结构表面的声压信息来说,结构表面的振动状态在监测起来更加直接和容易。关于其是否可靠,需要满足结构表面弯曲波长的关系,这样才能将结构的各阶振型的变化区别出来,从而准确的预报辐射声场。本文在射线波叠加法的基础之上,从声辐射源的类型、尺寸等角度分析了浅海环境中弹性结构声辐射的特性,将结构声辐射问题与点源声辐射问题的联系起来,寻找它们之间的共性与差异。该方法具有结果直观、清晰,数学运算简洁的特点,较好的拓展了传统波叠加法的适用范围,其高频计算的潜力将为今后研究中高频的弹性结构声辐射提供新的途径。具体内容如下:

第一章,绪论,介绍了水下弹性结构声辐射研究的背景与意义,结合国内外学者在该领域研究的现状,说明了该问题研究的发展与遇到的难点,并有针对性地提出了射线

波叠加法。

第二章，射线波叠加法的理论模型，详细阐述了射线波叠加法的理论基础，从声学逆问题和声学正问题两个部分，分别介绍了包括虚拟源强度的反演，波导中格林函数，波束追踪、强度计算等在内理论要点，并结合数值分析思想，对该方法的数值稳定性做了改善。

第三章，射线波叠加法的验证与分析，建立射线波叠加法的模型并完成方法可行性有效性的验证与分析。在分析过程中，由内及外，分别研究了格林函数，射线理论以及虚拟源配置方法对该方法计算精度和适用性的影响。

第四章，浅海弹性结构声辐射特性分析，在射线波叠加法的基础上，从声辐射源的类型、尺寸等角度分析了浅海环境中弹性结构声辐射的特性，完成不同辐射声源的辐射声场差异性研究。

第五章，射线波叠加法实验研究，采用实物验证的办法，通过测量弹性结构模型在水下的辐射声场，并与理论预报值对比，进一步验证并说明射线波叠加法的有效性与准确性。

最后，总结与展望，对全文的研究内容与研究结论做了归纳总结，在提出射线波叠加法的同时，说明了该方法在虚拟源配置及使用范围上需要注意的问题。运用射线波叠加法对浅海弹性结构声辐射特性研究，揭示了弹性结构辐射声场与点声源辐射声场的联系与差异，为浅海环境下弹性结构辐射声场的计算提供有效指导。



## 第 2 章 射线波叠加法理论模型

### 2.1 引言

本文所提出的方法的理论模型主要分为声学逆问题和声学正问题两个方面，即波叠加理论和射线理论。该方法利用波叠加法从已知的结构表面振动出发，结合满足边界条件的格林函数，通过数学上的近似反演，将结构声源离散成若干虚拟点声源，再由射线理论对虚拟点声源声场求解，从而推演出远场的结构辐射声场，如图 2.1 所示。

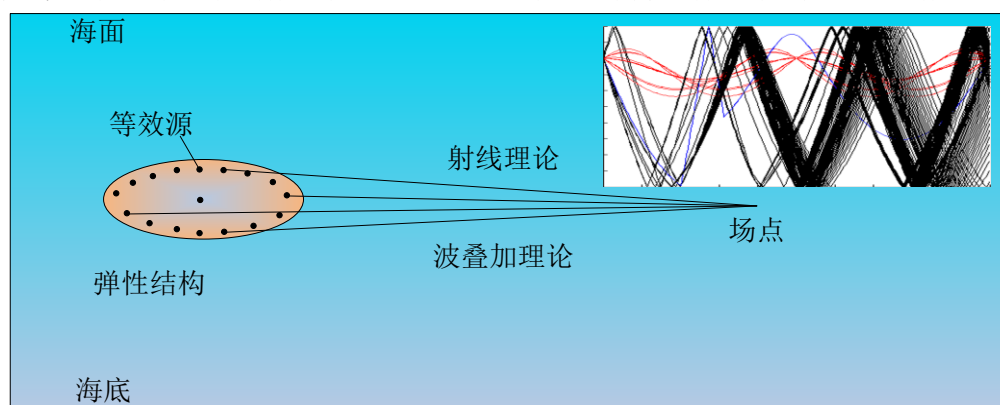


图 2.1 射线波叠加法示意图

波叠加理论计算所需要结构表面振动信息需要包含结构体与流体介质以及海水波导边界的耦合效应。这种对复杂物理场耦合效应推演的方法也是射线波叠加法的必不可少的一部分。本章详细介绍了射线波叠加法的理论模型，以及对理论中关键部分的处理。

### 2.2 波叠加理论

国内外学者对弹性振动体的声辐射研究从很早就开始了，长期以来形成了较多成熟的方法。对于复杂且或者不规则形状的结构体来说，理论上的解析方法难以满足要求，所以在工程中应用较多的是有限元法以及边界元法等数值计算方法。但是这两种方法都有相应的适用条件，且自身存在一定的缺陷。为了克服这两类数值方法在实现过程中上存在的缺陷，波叠加理论被提了出来。波叠加法又名等效源法，是一种基于简单声源代替复杂结构的离散数值计算方法，被证明与 Helmholtz 积分方程存在等效关系。其中，格林函数是等效的基础，其计算的准确性直接影响射线波叠加法对辐射声场的预报是否正确。另外，作为一种数值计算方法，射线波叠加法在数值求解过程中尤其是在反演过程中存在一些影响数值计算稳定性的问题，本文从数值分析的角度对该问题作了讨论。因此，本小节分为三部分展开。



### 2.2.1 虚拟源强的反演

浅海信道中流体环境下弹性结构辐射的声场,除了满足必要的 Helmholtz 方程之外,在流固耦合边界还需满足法向振速连续的条件。Huygens-Fresnel 原理表明,声波在介质传播过程中,波阵面上的点都是次级声源,且对下一级子波产生贡献,而空间中任一点的声场是所有二次辐射产生子波在该点的干涉叠加。海水信道中,无穷远边界处的次波源会对声场内任一点产生贡献,使得声场产生多值特性,这与辐射声场的实际情况不符。为了避免这种多值现象给声场带来的不确定性,需要约束无穷边界上次波源对辐射场点叠加的结果为零,即辐射声场在远场需要满足 Sommerfeld 辐射条件。对于结构体来说,需要满足 Neumann 边界条件,使得在结构与流体耦合的界面上,法向振速保持连续。综上,浅海信道中流体环境下弹性结构的声辐射问题有如下的表示:

$$\nabla^2 p + k^2 p = 0 \quad (2-1)$$

$$v_n = v_n^+ \quad (2-2)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[ r \left( \frac{\partial p}{\partial r} + jkp \right) \right] = 0 \quad (2-3)$$

其中  $k$  为波数,  $p$  为声压,  $v_n$  为包覆结构表面的流体介质法向振速,  $v_n^+$  为流体介质中结构表面的法向振速。式(2-3)为 Sommerfeld 远场辐射条件。

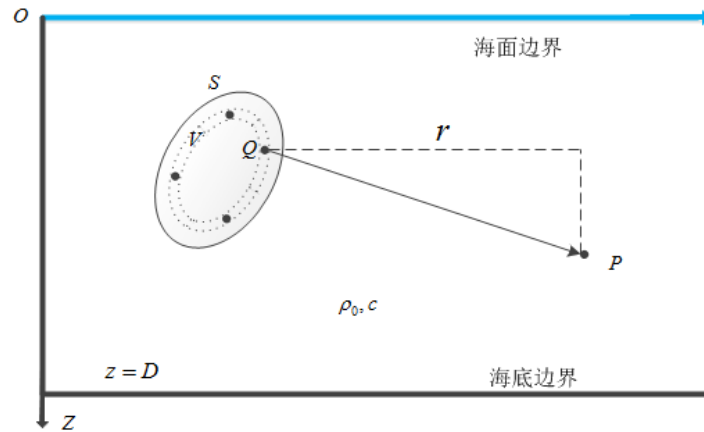


图 2.2 浅海信道中波叠加法示意图

通过 Helmholtz 积分方程求解该问题,可以根据等效的虚拟源的类型采取不同形式的积分。虚拟源可以是单极点源,偶极子点源,混合点源或者是体积源、能量源,他们所对应的等效形式也各不相同。相较其他类型的虚拟源来说,等效为单极点源的物理意义更加直观,而且由于简化虚拟源的结构使得虚拟源的数量较少,有利于计算复杂结构时计算机性能的提升,故本文将选取单极点源作为虚拟源。对于任意形状的辐射体,场点  $P$  处的辐射声压是结构内部连续分布的虚拟声源和格林函数在辐射体体积  $V$  内的积

分，如图 2.2。

$$p(P) = j\rho_0\omega \int_V q(Q)G(P,Q)dV \quad (2-4)$$

$P, Q$  为全局坐标系下的场点坐标以及虚拟声源的中心坐标， $\rho_0$  为声场介质的密度， $\omega$  为角频率， $q(Q)$  为虚拟体积源  $Q$  的源强， $G(P, Q)$  为相应边界条件下的由  $Q$  点到  $P$  点的格林函数。引入线性 Euler 公式，将方程转化为表面法向振速的积分表示形式，即

$$u_n(P) = - \int_V q(Q) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} dV \quad (2-5)$$

当  $P$  点位于结构表面  $S$  时， $u_n(P)$  表示结构表面的法向振速。至此，将表面法向振速与格林函数用虚拟源强度联系了起来。这是因为在实际应用中，相较于用声压作为波叠加的输入来说，振动体表面的法向振速的获取较为容易。从理论上说，虚拟声源的分布没有限制，它可以位于结构内的任何位置。为了方便起见，不妨假定虚拟声源分布在结构内部一个厚度为  $\delta_r$  的虚拟球壳面  $\sigma$  上，则式(2-5)可以写为

$$u_n(P) = -\delta_r \oint_{\sigma} q(Q) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} d\sigma \quad (2-6)$$

对于严格推导出来的式(2-6)的积分，为了实现数值计算求解虚拟源强  $q$ ，需要对虚拟球壳面  $\sigma$  做离散处理。将虚拟球壳面分成  $N$  份，每一份的表面为  $\sigma_i$ 。当离散化程度足够高时，即每个球壳冠面  $\sigma_i$  足够小，则求和时  $\delta_r$  可以视为常量。于是结构表面不同点处的法向振速近似写为：

$$u_n(P_s) = -\sum_{i=1}^N q(Q_i) \frac{\partial G(P_s, Q_i)}{\partial n} \quad (2-7)$$

其中  $P_s$  表示第  $s$  个表面振速点的坐标， $Q_i$  表示第  $i$  个虚拟源的坐标， $q(Q_i)$  表示虚拟面上第  $i$  个的源强，式(2-7)写为矩阵形式：

$$Q = -[D]^{-1}U \quad (2-8)$$

式中结构表面法向速度矩阵  $U$  可以用源强矩阵  $Q$  与传递矩阵  $D$  的乘积表示，可以利用此关系求解源强矩阵。其中  $D$  为表面法向振速与虚拟源强的传递矩阵，有以下的具体形式

$$D_{si} = \frac{\partial G(P_s, Q_i)}{\partial n} \quad (2-9)$$

在确定格林函数的具体形式后，可以通过结构表面法向速度矩阵  $U$  来反演给定分布的虚拟源的强度，从而根据反演出来的虚拟源强结合射线理论预报辐射声场。

### 2.2.2 格林函数

在虚拟源强的反演过程中，需要用格林函数来将结构表面振速与虚拟源强联系起来，所以格林函数的具体形式需要确定下来。对于介质是周向均匀的声传播问题，假设声速和密度只与深度  $z$  有关，而不随水平距离变化。水深为  $D$ ，则柱面形式的点声源 Helmholtz 方程为<sup>[55]</sup>：

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \rho(z) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial p}{\partial z} \right) + k^2 p = -\frac{\delta(r)\delta(z-z_s)}{2\pi r} \quad (2-10)$$

其中  $r$  为水平距离， $z_s$  为声源位置的深度， $z$  为场点位置处深度， $\delta$  为 Dirac 函数。对该式利用变量分离法，使  $p(r, z) = R(r)Z(z)$ ，用  $k_m$  表示分离常数代入式(2-10)，得到深度与距离方向分离的 Sturm-Liouville 方程：

$$\rho(z) \frac{d}{dz} \left[ \frac{1}{\rho(z)} \frac{dZ_n(z)}{dz} \right] + [k^2 - k_m^2] Z_n(z) = 0 \quad (2-11)$$

其中  $n$  为该方程模式序号。模式用本征函数  $Z_n(z)$  和本征值  $k_m$  表征。第  $n$  个模式在  $[0, D]$  区间内有  $n$  个零点。本征函数  $Z_n$  构成了完备正交函数集，可以将声压表示成简正模式之和。

$$\int_0^D \frac{Z_n Z_m}{\rho(z)} dz = \begin{cases} 1 & m=n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \quad (2-12)$$

$$p(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r) Z_n(z) \quad (2-13)$$

代入式(2-11)简化后利用正交性得到声场随  $r$  的变化规律。

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[ r \frac{dR_m(r)}{dr} \right] + k_{rm}^2 R_m(r) = -\frac{\delta(r) Z_m(z_s)}{2\pi r \rho(z_s)} \quad (2-14)$$

该标准方程的解可以用汉克尔函数表示由于  $r \rightarrow \infty$  能量向外的辐射条件，将时间因子默认为  $e^{j\omega t}$ ，解取第二类汉克尔函数  $H_0^{(2)}$ 。

$$R_m(r) = -\frac{i}{4\rho(z_s)} Z_m(z_s) H_0^{(2)}(k_{rm} r) \quad (2-15)$$

从而求得简正模式下的声场解：

$$p(r, z) = -\frac{i}{4\rho(z_s)} \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(z) Z_n(z_s) H_0^{(2)}(k_{rn} r) \quad (2-16)$$

该声场解形式上表现为无穷阶本征函数的叠加，物理上表现为所有阶简正模式的共同作用，即海水中的辐射声场是由点源发出的不尽相同的无穷阶简正波在声场所处位置处的叠加。本征函数  $Z_n(z)$  的具体形式取决于海水信道的边界条件，不同边界条件使得声源

所激发出的简正模式的数学形式存在差异。对于一类经典的海水信道边界条件，也就是海面为 Dirichlet 边界，海底为 Neumann 边界，同时也是理想浅海波导环境来说，存在以下的约束：

$$Z_n(0) = 0 \quad (2-17)$$

$$\left( \frac{dZ_n}{dz} \right)_D = 0 \quad (2-18)$$

由该边界约束得到的本征函数解为：

$$Z_n(z) = \sqrt{\frac{2}{D}} \sin(k_{zn}z) \quad (2-19)$$

其中  $k_{zn} = \sqrt{k^2 - k_m^2}$ ， $k_{zn}$  表示波数的垂直分量， $k_m$  表示波数的水平分量。则在该边界条件下的声场格林函数为：

$$G(r, z) = -\frac{i}{2D\rho(z_s)} \sum_{n=1}^N \sin(k_{zn}z) \sin(k_{zn}z_s) H_0^{(2)}(k_m r) \quad (2-20)$$

### 2.2.3 数值稳定性

根据波叠加理论衍生的波叠加数值方法，在数值求解过程中需要关注数值求解的可行性。根据结构表面振速反演得到虚拟源强的过程属于声学逆问题。求解这类数学物理的逆问题面临两个实质性的困难：一个是反演所需要的原始数据可能不在该问题精确解对应的数据集合中，故该问题在经典意义下的数值近似解可能不存在；另一个困难是反演所需要的原始数据在实际中难以避免的出现微小的观测误差，而往往这种微小的误差会使得数值近似解与真值产生巨大的偏离。也就是说，求解逆问题常常是不适定的，需要用特殊的方法来处理或者求解，否则将难以得到符合常理的结果<sup>[56]</sup>。

在波叠加理论中，通过传递矩阵  $D$  与结构表面法向速度矩阵  $U$  求解源强矩阵  $Q$  是线性方程组求解的过程。对于该过程可以表示为如下的线性方程组形式：

$$Ax = y, \quad x \in X = R^n, \quad y \in Y = R^n \quad (2-21)$$

由于  $A \in R^{n \times n}$ ，所以  $A$  是有限维空间的有界线性算子。故方程(2-21)会有如下的几种情况：

(1) 当  $\det(A) = 0$  时，因为  $A$  奇异，所以其逆矩阵不存在，这时该问题是一个不适定的问题。

(2) 当  $\det(A) \neq 0$  时， $A$  的逆矩阵存在，方程得解存在且唯一。此时可以通过矩阵的条件数  $\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$  的大小来判断该矩阵是病态还是良态的。

相比于边界元法，波叠加法很好的回避了各阶的奇异性处理，但是在求解逆矩阵(当

矩阵  $D$  为非方阵时, 此时求解的是广义逆矩阵) 上增大了处理的难度。这是因为传递矩阵  $D$  往往会出现病态的情况: 若矩阵  $D$  的条件数过大, 则该矩阵为病态矩阵, 结构表面法向速度矩阵  $U$  的微小扰动会引起源强矩阵  $Q$  的求解产生较大的变化<sup>[57]</sup>。

对于这类病态的线性方程组求解, 有多种方案可以处理。一方面是增加数值计算的计算精度, 表现为增加计算机的字长, 另一方面是寻求理论模型的优化, 依靠条件预优法或者正则化方法来处理病态矩阵。条件预优法是要构造一个非奇异的矩阵  $P$ , 使  $\text{cond}(PA) \ll \text{cond}(A)$ , 来转化需要求解的方程组, 但是矩阵  $P$  的选择会带来新的困难。

Tikhonov 正则化<sup>[58-59]</sup>是当前波叠加法中应用最广, 最有效的病态矩阵处理方法。

定义集合  $U = \{u \in R^n : \|Au - y\| = \inf_{v \in U} \|Av - y\|\}$ , 若向量  $x_T \in U$  满足以下条件:

$$\|x_T\| = \min_{u \in U} \|u\| \quad (2-22)$$

则称向量  $x_T$  为方程(2-21)的正规拟解。有研究可以证明, 满足条件的  $x_T$  向量是存在且唯一的, 若  $A^{-1}$  存在, 则正规拟解和普通意义中的解是等效关系。线性方程组两边乘上  $A^T$ , 可以得到:

$$A^T A x = A^T y \quad (2-23)$$

存在唯一的正交矩阵  $P$ , 满足

$$A^T A = P D P, \quad D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n), \lambda_i \geq 0$$

令  $z = P^T x$  代入方程(2-23)可以得到:

$$D z = P^T A^T y \equiv F$$

则方程(2-23)的解为:

$$z_i = \begin{cases} \frac{F_i}{\lambda_i} & (\lambda_i \neq 0) \\ 0 & (\lambda_i = 0) \end{cases} \quad (2-24)$$

那么可以得到:

$$x_T = P z$$

在原始数据存在扰动的情况下, 情况变得特殊。不妨假设  $y$  存在一定的扰动, 假设这种扰动很小, 将它的近似值表示为  $y$ , 则存在以下关系:

$$\|y - y\| \leq \delta \quad (\delta > 0)$$

由上述方法得到的解为:

$$z_i = \frac{F}{\lambda_i}$$

此时求解  $x_T$  在数值上是不稳定的。这时需要构造一个稳定的泛函:

$$M^{\alpha}(x, y) = \|Ax - y\|^2 + \alpha \|x\|^2 \quad (2-25)$$

对于任给的  $\alpha > 0$ ，都存在  $x_{\alpha}$  在  $X$  的某一个稠子集  $X_1$  中，使得

$$M^{\alpha}(x_{\alpha}, y) = \inf_{x \in X_1} M^{\alpha}(x, y) \quad (2-26)$$

此时，上述问题可以转化为对如下的方程求解：

$$(A^T A + \alpha L)x_{\alpha} = A^T y \quad (2-27)$$

$L$  为任意矩阵。方程(2-27)是方程(2-23)的正则化形式，其中解为：

$$x_{\alpha} = (A^T A + \alpha L^T L)^{-1} A^T y \quad (2-28)$$

将  $m \times n$  维病态传递矩阵  $A$  分解：

$$A = U \Sigma V^T \quad (2-29)$$

式(2-29)中  $U$  和  $V$  分别为  $m \times m$  和  $n \times n$  维的正交矩阵， $E = [E_m \ 0]$ ， $E_m = \text{diag}(e_i)$ ，且奇异值满足  $e_1 \geq e_2 \geq \dots \geq e_n$ ， $u_i$  和  $v_i$  为相应矩阵的奇异向量。一定条件下，Tikhonov 正则化解可以利用传递矩阵的奇异值分解项来表示：

$$x_{\alpha} = \sum_{i=1}^n \frac{e_i^2}{e_i^2 + \alpha^2} \frac{u_i^T y}{e_i} v_i \quad (2-30)$$

只要参数  $\alpha$  选取适当，满足  $\alpha > 0$  使得当  $\|y - y\| \leq \delta$  时，正则化参数  $\alpha$  能够与误差水平  $\delta$  适配，从而求解病态方程的稳定近似解。

关于正则化参数  $\alpha$  的选取，可以采用  $L$  曲线标准来预估<sup>[60-61]</sup> 预估。写出解的平滑范数和残余范数的表达式分别为：

$$\|x_{\alpha}\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{e_i^2}{e_i^2 + \alpha^2} \frac{|u_i^T y|}{e_i} \right)^2 \quad (2-31)$$

$$\|Ax_{\alpha} - y\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \left[ \left( 1 - \frac{e_i^2}{e_i^2 + \alpha^2} \right) |u_i^T y| \right]^2 \quad (2-32)$$

绘制出平滑范数对残余范数变化的对数曲线，即为  $L$  曲线，如图 2.3 所示。

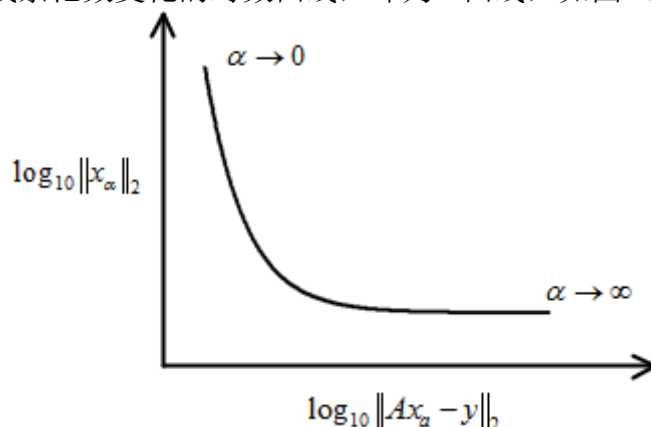


图 2.3  $L$  曲线示意图

该曲线可以说明正则化参数  $\alpha$  的不同取值使残余范数和最小化解之间存在一种平衡关系。该曲线的水平部分说明过正则化起主要作用,垂直部分说明欠正则化起主要作用。正则化化参数  $\alpha$  的最优解在  $L$  曲线拐点处,因为在此处重建解有最小的残值余量和较少的震荡项,表现为  $L$  曲线在该点的曲率最大。

## 2.3 射线理论

射线声学理论在水声学早期的时候就进入了人们的研究范围,具有物理意义简单直观的特点,而且能够在较为复杂的介质条件和边界条件中得到较好地应用。在经典的射线声学理论中,声场的能量是由某个位置处的声源激发出来的,表现为一根根束管向外辐射并与声传播介质和海水信道边界产生折射或者反射效应,经过衰减后在声场中呈一定规则广泛分布。在确定虚拟源强的位置和强度后,根据射线理论求解辐射声场时,往往分为三个步骤:波束追踪来实现声线的绘制以及本征声线的确定;强度计算来计算相应本征声线的强度、相位等声学参数;联合坐标变换用来实现三维空间中虚拟点源与结构源辐射声场的匹配。

### 2.3.1 波束追踪

对于波动方程

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (2-33)$$

声速  $c = c(x, y, z)$  为空间变化量。假如有以下形式的解存在:

$$p(x, y, z, t) = A(x, y, z) e^{j[\omega t - k_0 \varphi(x, y, z)]} \quad (2-34)$$

波数  $k = \frac{\omega}{c_0} \cdot \frac{c_0}{c} = k_0 n(x, y, z)$ ,  $c_0$  为参考点的声速,  $n(x, y, z)$  为折射率,  $k_0 \varphi$  表示相位值,  $\varphi(x, y, z) = n(x, y, z) \cdot \varphi_1(x, y, z)$  称为程函, 为长度量纲, 表示相位的变化。将该形式解代入波动方程可以得到如下的关系式<sup>[62]</sup>:

$$\frac{\nabla^2 A}{A} - \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - j \frac{\omega}{c_0} \left(\frac{2 \nabla A}{A} \cdot \nabla \varphi + \nabla^2 \varphi\right) = 0 \quad (2-35)$$

取实部虚部分别寻找关系:

$$\frac{\nabla^2 A}{A} - k_0^2 \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi + k^2 = 0 \quad (2-36)$$

$$\nabla^2 \varphi + \frac{2}{A} \nabla A \cdot \nabla \varphi = 0 \quad (2-37)$$

如果满足  $\frac{\nabla^2 A}{A} \ll k^2$ ，即声压振幅的变化量与声速的变化量的尺度远小于波长，换言之满足高频近似时，可以得到如下关系：

$$(\nabla \phi)^2 = \left( \frac{c_0}{c} \right)^2 = n^2(x, y, z) \quad (2-38)$$

式(2-36)称为程函方程，式(2-37)称为强度方程，它们是射线声学中两个基本方程。梯度  $\nabla \phi$  代表着声线的方向，可以根据此推导出声线的轨迹，所以称为程函方程，这也是波束追踪的核心。不妨设声线  $s$  与  $x, y, z$  的方向余弦分别为  $\cos \alpha = dx/ds$ ， $\cos \beta = dy/ds$ ， $\cos \gamma = dz/ds$ ，则程函方程可以有另一种表示方式：

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}(n \cos \alpha) = \frac{\partial n}{\partial x} \\ \frac{d}{ds}(n \cos \beta) = \frac{\partial n}{\partial y} \\ \frac{d}{ds}(n \cos \gamma) = \frac{\partial n}{\partial z} \end{cases} \quad (2-39)$$

在只考虑声速在深度方向变化的情况下，声线位于  $xoz$  平面内， $c = c(z)$ ， $n = n(z)$ ，在初始值  $c = c_0$ ， $\alpha = \alpha_0$  给定之后， $\frac{\partial n}{\partial x} = 0$ ， $\frac{\partial n}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{c_0}{c(z)} \right) = -\frac{c_0}{c^2} \frac{dc}{dz}$ ，代入式(2-39)可以得到：

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} \left( \frac{c_0}{c} \cos \alpha \right) = 0 \\ \frac{d}{ds} \left( \frac{c_0}{c} \cos \gamma \right) = -\frac{c_0}{c^2} \frac{dc}{dz} \end{cases} \quad (2-40)$$

式(2-40)可知， $\frac{\cos \alpha}{c}$  为一常数，这说明该比值是恒定的，不随着声线行进的深度而变化，并且在声速正梯度时声线向上弯折，换言之，声线总是向声速较小的方向弯曲。这就是射线声学的基本定律，Snell 定律，表示为：

$$\frac{\cos \alpha(z)}{c(z)} = \frac{\cos \alpha_0}{c_0} = K \quad (2-41)$$

根据几何知识，沿声线显然有以下关系存在：

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{d(\tan \alpha_z)}{dx} = \frac{d(\tan \alpha_z)}{d\alpha_z} \cdot \frac{d\alpha_z}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{1}{\cos^2 \alpha_z} \cdot \frac{d\alpha_z}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \quad (2-42)$$

结合 Snell 定律可得一个高阶方程，可以表示在恒定声速梯度下声线的轨迹<sup>[63]</sup>：

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = -\frac{K}{\cos^3 \alpha_z} \cdot \frac{dc(z)}{dz} = -\frac{1}{K^2 c^3(z)} \cdot \frac{dc(z)}{dz} \quad (2-43)$$

至此，已经可以求解在声源处以任一角度出射的声线在海水信道中传播的轨迹。然



而，对于某一位置确定的接收位置，到达该位置的声线决定着该点获得的能量，故需要找到从声源出射并且能够到达接收位置的声线，这类声线也即本征声线。本征声线的求取是射线理论计算声场的核心问题，往往求取本征声线的计算量在整个声场计算过程中也占较大的比重。

当某一声源以一定开角出射声线时，随着开角大小的单调变化，声线在到达接收距离时的深度也呈一定规律的扫掠形式。在此基础上可以绘制该声源在该接收距离处的角度-深度图。

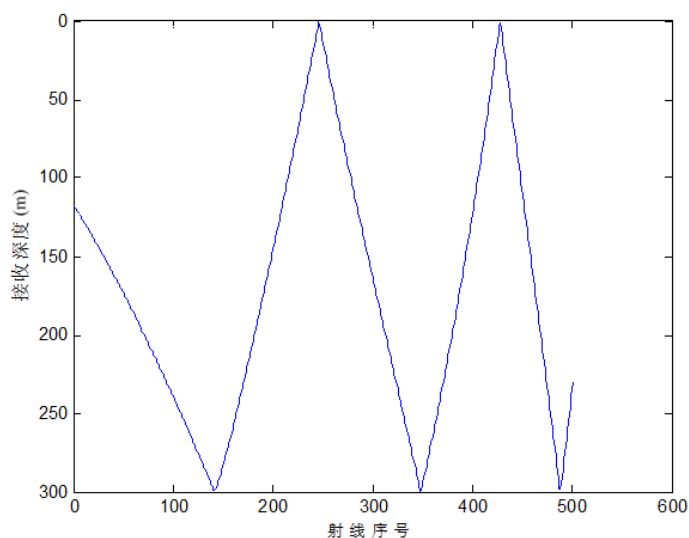


图 2.4 角度-深度图

如图 2.4 所示为在水深 300m 的满足正声速梯度的海水信道中，声源在某一深度处以一定开角出射声线，当接收距离为 1000m 时的深度-角度图。可以看出，出射角度被等分成 500 根声线，当角度按声线序号连续变化时，其深度出现起伏。此时该距离上某一接收深度的本征声线的数目即为该深度线与角度-深度线的交点个数。从深度-角度图可以很容易确定本征声线的数目以及对应的出射角度。

### 2.3.2 强度计算

在确定了接收位置对应的本征声线后，根据每根声线的强度与相位可以求解该点位置的辐射声场。

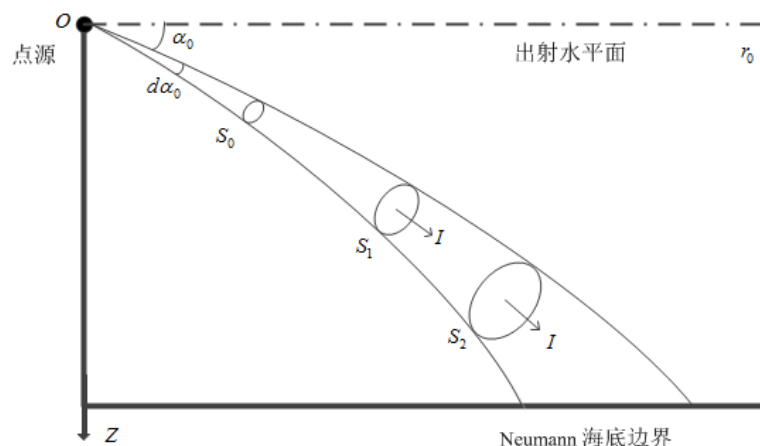


图 2.5 强度计算示意图

声强度  $I$  表征通过垂直于声线传播方向上单位面积的平均声能，声能传递的方向即为声线行进的方向。由式(2-37)强度方程可以推导出声强度的散度为零，即：

$$\nabla \cdot (A^2 \nabla \varphi) = 0 \quad (2-44)$$

根据高斯定理，可以将对声线内部也即声束管的体积分转化为面积分。取声束管的两个端截面  $S_1, S_2$ ，可得：

$$\iint_{S_1} I \cdot dS + \iint_{S_2} I \cdot dS = 0 \quad (2-45)$$

由于  $S_1, S_2$  的外法线方向相反，所以当声强在端面上均匀分布时，式(2-45)可以写成如下形式：

$$I_{s_1} S_1 = I_{s_2} S_2 \quad (2-46)$$

该等式表明单根声线内的能量守恒，不会通过侧面向声线外部扩散，声能的密度仅与声束管端面的大小有关。这说明了只要求得本征声线内的声能量，接收位置处的声能量可以表示为经过该点的所有本征声线能量的叠加。

令  $W$  代表声源单位立体角内的辐射声功率，立体角微元  $d\Omega$  所张的截面积微元为  $dS$ ，则对于平面问题来说声强可以表示为：

$$I(r, z) = \frac{W d\Omega}{dS} \quad (2-47)$$

$r$  为水平距离。不妨假设声源出射的声线满足轴对称条件，考虑在掠射角  $\alpha_0$  到  $\alpha_0 + d\alpha_0$  所夹立体角的声线管束，由于对称性，单位立体角的微元：

$$d\Omega = \frac{dS_0}{r_0^2} = 2\pi \cos \alpha_0 d\alpha_0 \quad (2-48)$$

其中， $dS_0$  表示单位距离  $r_0$  处立体角  $d\Omega$  所张开的微元面积。同样，根据几何关系，式(2-47)中的微元  $dS$  也能表示出来：

$$dS = 2\pi \cdot r \sin \alpha_z \left( \frac{\partial r}{\partial \alpha} \right)_{\alpha_0} d\alpha_0 \quad (2-49)$$

那么，对于单根声线来说，其声强的计算结果表示如下：

$$I(r, z) = \frac{W \cos \alpha_0}{r \left( \frac{\partial r}{\partial \alpha} \right)_{\alpha_0} \sin \alpha_z} \quad (2-50)$$

在单层线性介质中，根据声线轨迹的方程和 Snell 定律，可以将该环境下的声强表示式化为更简洁的形式。声强可以表示为：

$$I = \frac{W \cos^2 \alpha}{x^2} \quad (2-51)$$

在不计入常数因子的情况下，声压振幅体现为声强的根值，即：

$$A(r, z) = I^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{W \cos^2 \alpha}{x^2}} \quad (2-52)$$

方程的相位信息由程函方程通过对  $r, z$  方向的分离后，得到的程函表达式来表现。

$$\varphi(r, z) = \cos \alpha_0 \cdot r + \int_0^z \sqrt{n^2 - \cos^2 \alpha_0} \cdot dz + C \quad (2-53)$$

代入式(2-34)得到射线声学近似下平面问题的单根射线声压表达式。需要说明的是，不同的声线与海底海面的接触角度和接触次数存在着差异，因此受到的海底与海面的反射影响也不尽相同，需要具体结合边角反射系数来确定声线最终到达接收位置处的声压幅值与相位。

## 2.4 本章小结

本章提出了射线波叠加法的理论模型，指出了射线波叠加法声辐射预报其背后的物理意义与数学意义，为全文的展开奠定了理论基础。由于格林函数是表示源点和场点关系的函数，所以在声辐射预报中扮演关键角色，是多数声辐射预报方法不可缺少的一部分。在射线波叠加法中，格林函数用来串联起弹性结构表面振速和虚拟源的强度，将受到激励的结构的振动信息转化为声信息，这将赋予格林函数新的物理含义。同时，本章还简要介绍了射线声学的理论基础，指出了在一定的高频近似条件下，可以通过程函方程和强度方程这两个射线声学基本方程作为切入点，结合 Snell 定律推导声线的轨迹方程和相应声线的能量和强度，从而建立一个完整的射线声学体系。在反演得到虚拟源的强度后，在射线声学的体系下实现辐射声场的预报。

## 第3章 射线波叠加法的验证与分析

### 3.1 引言

本文提出的射线波叠加法理论上来说是一种近似方法，需要对近似的精度加以讨论，以验证该方法的正确性。作为一种数值计算方法，射线波叠加法的近似不光体现在信道中格林函数叠加时选择有限阶本征值的截断上，也体现在反演出虚拟源强的数值求解过程中，同样体现在声学正问题中射线理论这种声传播模型的高频近似上。本章从不同角度分析射线波叠加法中局部近似带来的误差，从而实现该方法的验证，同时归纳出射线波叠加法在数值计算上的一些特性。

### 3.2 信道中近场格林函数收敛性分析

对于射线波叠加法来说，将结构表面振速和虚拟源强联系起来的是格林函数，可以说格林函数是波叠加法的核心。因为虚拟源往往与结构表面振速单元之间的距离较近，所以格林函数的准确性，尤其是近场的精度直接决定了能否将结构表面的振速信息准确有效地进行传递。一旦影响了传递矩阵计算的准确性，误差将体现在结构表面振速反演的虚拟源强中，从而对最后声场的虚拟源声场叠加的结果产生影响。信道中的格林函数从形式上来看，表示为每一阶简正波在加权后进行累加求和。由简正波理论可知，随着简正波阶次的增大，简正波对远场声场的贡献会越来越小。而高阶简正波虽然在近场有所体现，但是作用距离也会随着简正波阶次发生改变而不断减小。从数值计算的角度来说，为了实现信道中格林函数的计算，需要选取有限阶简正波实现加权叠加，这不可避免的会产生截断误差。但是这样会对近场会产生较大影响，所以选取阶数的大小决定着格林函数近场计算的准确性。本节将结合具体案例对信道中格林函数近场精度加以讨论。

选取 200m 深的浅海信道，水中声速取值为 1500m/s，海面为 Dirichlet 边界，海底为 Neumann 边界。有一个频率为 20Hz 的单极点源位于 25m 深的位置。在有限元软件 COMSOL 中建立相应的模型，在网格密度足够多时，求解点源的辐射声场，并与同样环境下的格林函数法所求解的辐射声场对比。

此时格林函数的具体形式在式(2-20)中已经给出，为了方便，将式(2-20)复写如下：

$$G(r, z) = -\frac{i}{2D\rho(z_s)} \sum_{n=1}^N \sin(k_{zn}z) \sin(k_{zn}z_s) H_0^{(2)}(k_m r) \quad (3-1)$$

对于简正波阶数的阶数计算范围  $N$ ，存在以下关系：

$$N = N_0 + N_1 \quad (3-2)$$

$$N_0 = \left( \frac{D\omega}{\pi c} + \frac{1}{2} \right) \quad (3-3)$$

其中  $N_0$  表示简正波的传播项所对应的数量。当简正波阶次小于  $N_0$  时, 该阶简正波波数的水平分量  $k_m$  的实部存在, 表示该阶简正波可以传播到很远的距离, 对远场声场产生贡献。当简正波阶次大于  $N_0$  时, 该阶简正波波数的垂直分量  $k_{zn} > k$ , 水平分量  $k_m = \sqrt{k^2 - k_{zn}^2}$  为虚数, 表示该阶简正波的幅度随着距离  $r$  增加而衰减, 故只对近场产生贡献。为了保证简正波格林函数在近场计算的准确性, 需要在  $N_0$  阶简正波之外, 再包含  $N_1$  阶简正波。理论上, 当  $N_1$  趋近于无穷大时, 简正波格林函数的计算趋近于真值, 但实际上为了满足运算要求, 需要对高阶简正波有所舍弃。

在对上述模型对比计算时, 求得  $N_0 = 5$ , 取  $N_1 = 100$  时, 得到的点源辐射声场在 25m 接收深度的传播损失如图 3.1。

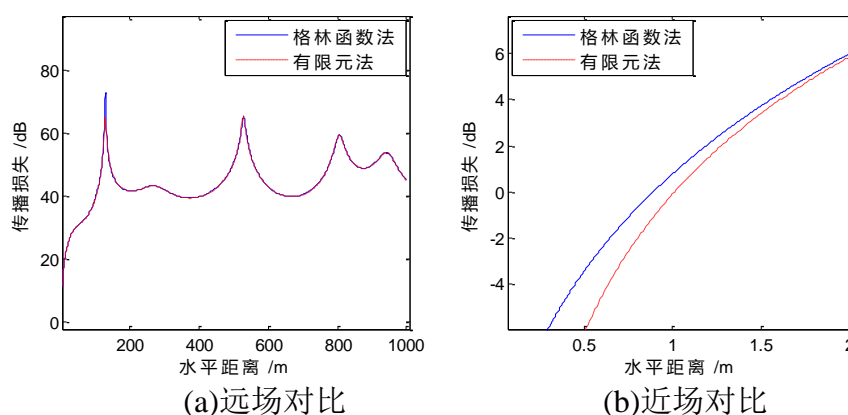


图 3.1 格林函数法与有限元法在 25m 深度的传播损失对比图

图中可以看出, 当  $N_1 = 100$  时, 格林函数法计算的远场传播损失和有限元相比非常接近, 精度很高。但在计算近场的声场信息时, 与有限元计算结果偏差较大。当虚拟源与结构表面的距离较小, 小于 1m 时, 此时使用该格林函数求得的传递矩阵  $D$  不能很好的将结构表面振速的信息传递到虚拟源强中, 这会严重影响射线波叠加法的有效性。

为了衡量格林函数近场的误差, 定义绝对误差限  $\varepsilon^* > 0$ , 使得绝对误差  $e^* = |TL_G - TL_{FE}| \leq \varepsilon^*$ , 其中  $TL_G$  和  $TL_{FE}$  分别为格林函数法和有限元法计算的传播损失。不妨令绝对误差限  $\varepsilon^* = 0.5$ , 由于格林函数的绝对误差随着水平距离的增大而减小, 此时用格林函数法与有限元法传播损失绝对误差小于 0.5dB 时的水平距离来表征近场计算的精度, 该水平距离越近说明格林函数近场的计算越精确。由式(3-3)可知, 水深  $D$ 、声源频率  $f$ 、声速  $c$  会影响简正波的成分, 下面分别分析这三个变量对格林函数近场计算精度的影响。

选取一个浅海信道，水中声速为 1500m/s，海面为 Dirichlet 边界,海底为 Neumann 边界。有一个频率为 20Hz 的单极点源位于 25m 深的位置。改变水深，使得水深分别为 50m、200m、500m.使用有限元软件 COMSOL 建立相应的模型，在网格密度足够多时，求解点源的辐射声场，并与同样环境下的格林函数法所求解的辐射声场对比。以选取的格林函数的阶数为自变量，误差刚好在误差限以内时的水平距离为因变量，绘制格林函数法与有限元法近场误差的对比图，如图 3.2。

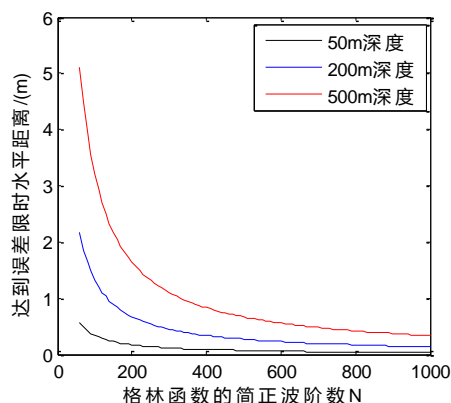


图 3.2 不同水深条件下格林函数法与有限元法的近场误差

图中可以看出，当选取的简正波阶数较大时，格林函数的近场精度较高。在相同条件下，随着水深增加，为了满足同样的格林函数计算精度所需要的简正波阶数更多，所以理论上在水深较浅的信道环境中，格林函数更容易准确计算，根据格林函数建立的射线波叠加法的计算精度可以得到保证。

如果保持信道水深为 200m 不变，改变点源的频率，使得频率分别为 20Hz、100Hz、500Hz、1000Hz，绘制格林函数法与有限元法近场误差的对比图如图 3.3

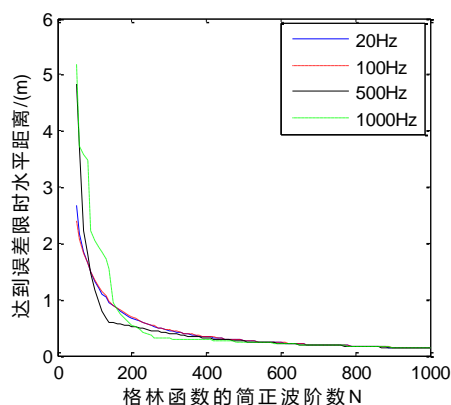


图 3.3 不同频率条件下格林函数法与有限元法的近场误差

图 3.3 中可以看出，在同样的信道环境下，为了在水平距离 2m 以内满足误差要求，

高频所需要的格林函数阶数相比低频更高，这说明为了达到一定的精度要求，高频所需的格林函数阶数更高。这是因为在声源为高频声源时，波长较短，水深的尺度相比波长来说较大，此时的信道环境比低频时的信道环境更加接近深海信道，为了满足同样的格林函数计算精度所需要的简正波阶数更多。但是在图中，当达到误差限时的水平距离在 1m 以内时，高频所需要的简正波阶数反而较低频更少。出现这种情况的原因是因为高频点源辐射的声场能量集中于低阶的简正波，而在一定的阶数截断并累加时，高阶简正波能量遗漏所带来的影响要比同等情况下低频时的影响要小。但是相同的是，在简正波阶数达到 400 阶及以上时，不同点源频率所带来的差异已经不再明显。

在分析了水深和声源频率对格林函数近场精度的影响后，还需要关注格林函数近场精度对水中声速差异的敏感性。这次在信道水深为 200m 和点源频率为 20Hz 不变时，分别改变水中的声速为 1400m/s、1450m/s、1500m/s、1600m/s 时，绘制格林函数法与有限元法近场误差的对比图，如图 3.4。

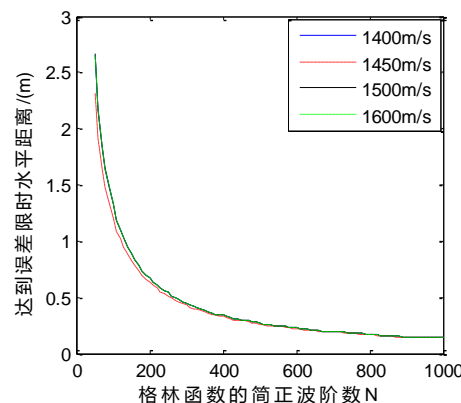


图 3.4 不同声速条件下格林函数法与有限元法的近场误差

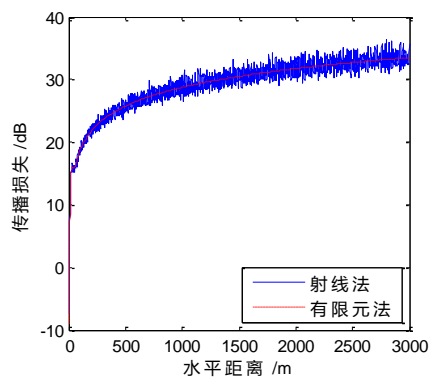
与深度和频率的影响不同，声速差异对格林函数近场的精度影响有限。虽然式(3-1)中波数  $k$  的各个分量和简正波阶数  $N$  的取值都与声速直接相关，但是显然在正常的符合实际情况的声速取值范围内，格林函数近场精度遵循着简正波阶数越大越精确的规律。

### 3.3 射线叠加及其适用性的分析

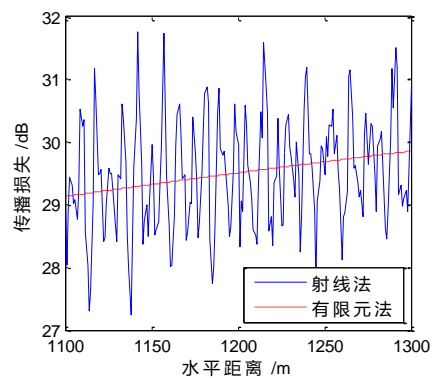
对于使用简正波格林函数求解虚拟源对应辐射声场的传统的波叠加法来说，每一个虚拟源辐射声场的计算时间与声场的范围和选取的简正波阶数有很大的关系，这在高频条件下体现的更加明显，所以弹性结构的高频辐射声场在远场的预报并不适合使用简正波格林函数实现声场的叠加。射线理论在整个声场范围内做波束追踪，并提取本征声线，对高频辐射声场的计算成本较小。由于射线理论是在高频近似的条件下推导的，需要验

证射线解是否能满足不同频率和不同水深声场叠加的精度要求。

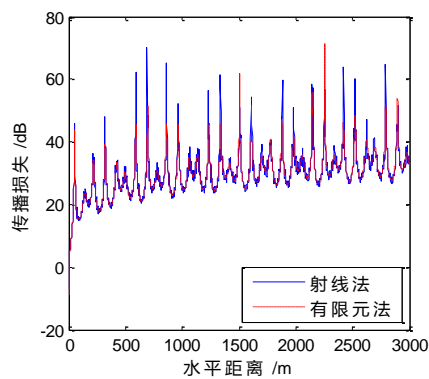
建立一个浅海信道中点源的模型，海面为 Dirichlet 边界，海底为 Neumann 边界。6 个点源位于垂直于海底的一条直线上，分别处于 25—30 米的深度，相邻两个点源间距为 1m。假设水中声速恒定为 1500m/s，海水密度为 1024kg/m<sup>3</sup>。改变海水深度和声源频率，分别用射线理论和有限元法计算这些点源共同作用后的辐射声场。下图给出了几幅海水深度和声源频率确定后在深度为 25m 处的传播损失对比图。



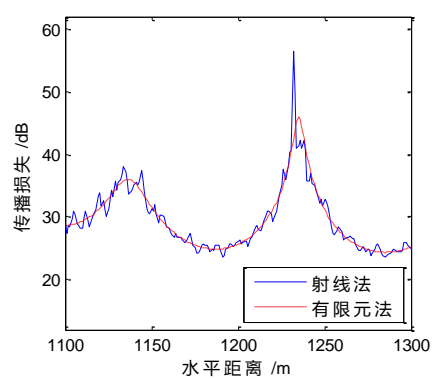
(a) f=20Hz D=50m 时整体对比



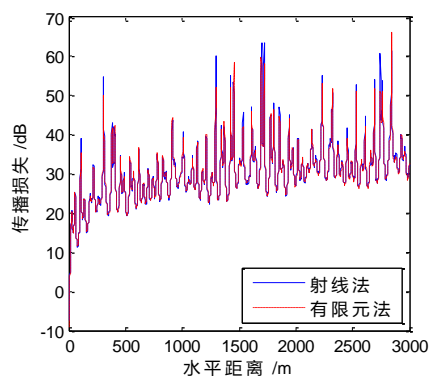
(b) f=20Hz D=50m 时细节对比



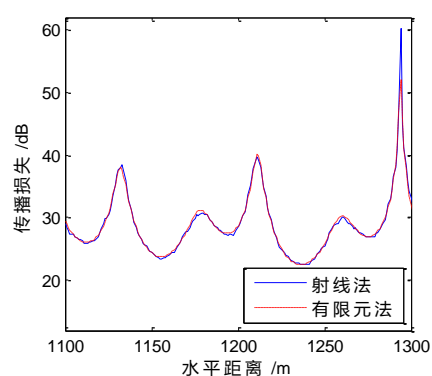
(c) f=50Hz D=50m 时整体对比



(d) f=50Hz D=50m 时细节对比

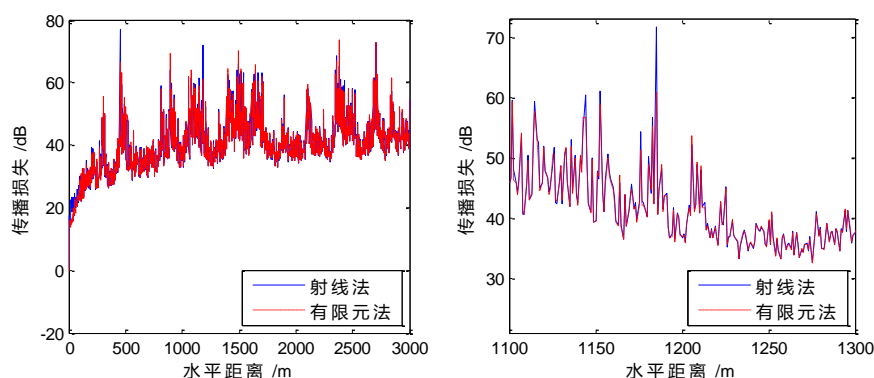


(e) f=50Hz D=100m 时整体对比



(f) f=50Hz D=100m 时细节对比





(g)  $f=1000\text{Hz}$   $D=50\text{m}$  时整体对比 (h)  $f=1000\text{Hz}$   $D=50\text{m}$  时细节对比

图 3.5 不同频率和不同海深条件下射线法与有限元法在 25m 深度处传播损失的对比图（整体对比与细节对比）

从图中可以看出，当求解频率较低时，射线理论的传播损失求解结果与有限元法相比会产生较为明显的振荡，而不是平滑变化的。此时，声源数量较多时，由于每个点声源的辐射声场都会产生异常波动，那么叠加后的声场表现为多种波动形态点源辐射声场的共同作用，其计算结果也将难以保证正确。为了表示这种波动带来的误差，现定义均方误差：

$$MSE = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^M (TL_R - TL_F)^2 \quad (3-4)$$

式中  $M$  为测量点数， $TL_R$  和  $TL_F$  分别为射线理论和有限元法得到的同一深度处的传播损失。在信道的边界不变的情况下，改变海深和频率，用均方误差  $MSE$  来定量射线理论的波动量，制成如下表格：

表 3.1 射线理论和有限元法在不同频率和不同海深条件下计算的传播损失对应的均方误差表

频率/Hz	海水深度/m	水平距离 100m 以外的远场均方误差
20	50	0.7274
	100	0.2573
	200	0.7015
50	50	3.3416
	100	0.6347
	200	0.8860

100	50	1.2024
-----	----	--------

续表 3.1

频率/Hz	海水深度/m	水平距离 100m 以外的远 场均方误差
100	100	0.5367
	200	4.3707
1000	50	0.4219
	100	0.2159
	200	0.0756

由表可得，在频率过低或者水深过浅的条件下，射线理论所求解的声场与有限元法求解的声场相比不够光滑，存在较大误差。而在高频域中，射线解的精确度非常高，可以直接对虚拟源声场做叠加，计算结果非常可靠。从整体来说，射线理论解的振荡对计算结果的影响有限，而射线理论自身有很多优势，在高频的频带处性能出众，可以更好地拓展波叠加法的适用范围。

### 3.4 信道中波叠加法虚拟源的配置

射线波叠加法的关键是声学逆问题的求解，也就是虚拟源的反演。而虚拟源反演的结果对最终声场的计算影响显著。研究表明波叠加法反演的精度与虚拟源配置有较大关系，其中大多数研究是基于自由空间或者半空间的声场格林函数。而由于信道中格林函数是柱函数的形式，相比自由空间或半空间的格林函数更加复杂，需要另外加以研究其不同配置对射线波叠加法辐射声场预报精度的影响。

本节选取典型信道环境中的受激弹性球壳作为案例，用射线波叠加法计算辐射声场并与有限元软件 COMSOL 的计算结果对比，来说明射线波叠加法的计算精度，同时分析不同虚拟源配置方法对计算精度的影响。选取弹性球壳的原因是这种结构是轴对称的，在 COMSOL 中可以使用二维轴对称方法建立模型来计算较远距离的辐射声场。如果选取其他周向非对称的结构，需要 COMSOL 建立三维模型并计算三维声场。由于计算机性能的限制，三维声场的计算距离将会很近，不利于射线波叠加法与有限元法预报结果的对比验证，这在高频条件下体现的更加明显。这同时也说明了对于三维非对称结构的声辐射预报而言，射线波叠加法在预报远场声场时性能的优越。故本节选取弹性球壳用

来分析射线波叠加法的计算精度更为合适。

选取的弹性球壳半径为 2m，厚度为 0.1m。材料的弹性杨氏模量  $E=2\times 10^{11} \text{ N/m}^2$ ，泊松比  $\sigma=0.3$ ，密度  $\rho_s=7850 \text{ kg/m}^3$ ，壳体外部的流体介质为水介质，其密度  $\rho_l=1024 \text{ kg/m}^3$ ，恒定声速  $c=1500 \text{ m/s}$ ，壳体内部为真空。球壳中心位置位于水深 25m 处。有一大小为 1N 频率为 100Hz 的激励力作用于球壳底部正中心，方向竖直向上。信道水深 200m，海面与海底边界条件满足典型信道条件，即海面为 Dirichlet 边界，海底为 Neumann 边界。COMSOL 建立的模型示意图如图 3.6。

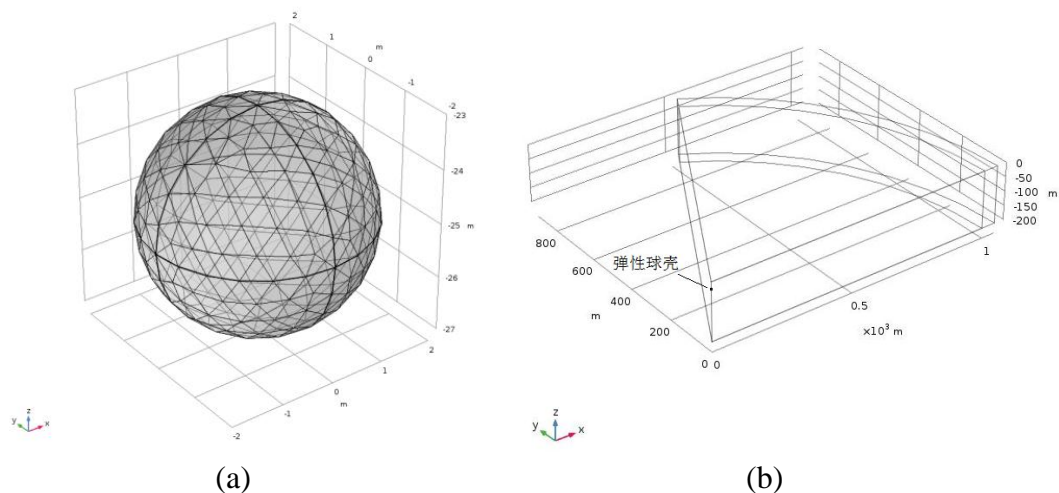


图 3.6 COMSOL 建立模型示意图

由于薄壳结构存在弯曲波，同时也存在横波和纵波，声波的传播与在流体中有差异，所以需要针对不同介质以不同的规则划分网格，以保证有限元计算的准确性。一般来说，使用 COMSOL 划分网格时，需要满足划分区域内的网格最大尺寸要小于声波波长的 1/6。在上述模型中，介质中的声波波长与声速相关，而弹性球壳的波长需要按弯曲波长处理。薄壳结构的弯曲波波长可以按如下关系来求得：

$$\lambda_{s\min} = \sqrt{\frac{2\pi R c_l}{f}} \quad (3-5)$$

$$R = \frac{h}{\sqrt{12(1-\sigma^2)}} \quad (3-6)$$

$$c_l = \sqrt{\frac{E}{\rho_s(1-\sigma^2)}} \quad (3-7)$$

式(3-5)中  $\lambda_{s\min}$  为弯曲波的最小波长， $R$  表示薄壳结构的截面回转半径， $c_l$  表示结构的纵波波速， $f$  表示计算频率。

由于球壳是周向对称的,因此可以将 COMSOL 计算的结构表面的二维振动信息在周向以 36 度的角度做扫描,从而获得三维弹性球壳表面的振动分布。以此振动分布作为输入量,使用射线波叠加法反演出虚拟源的强度。

研究表明,使用与结构表面共形的虚拟源面进行反演并求得的声学正问题精度较高,是一种较为合适的配置方法。本节采用共形的虚拟源面,将球壳结构通过向内收缩结构表面来获得虚拟源表面,将虚拟源面和球壳表面的半径比取为 0.5,除了上下两个顶点之外,虚拟源面在圆周方向和垂直方向上分别分为 10 个间隔和 6 个间隔,即一共将虚拟源面用 72 个虚拟源点来代替(记为 $10 \times 7$ 虚拟源)。虚拟源面的设置方法如图 3.7 所示。

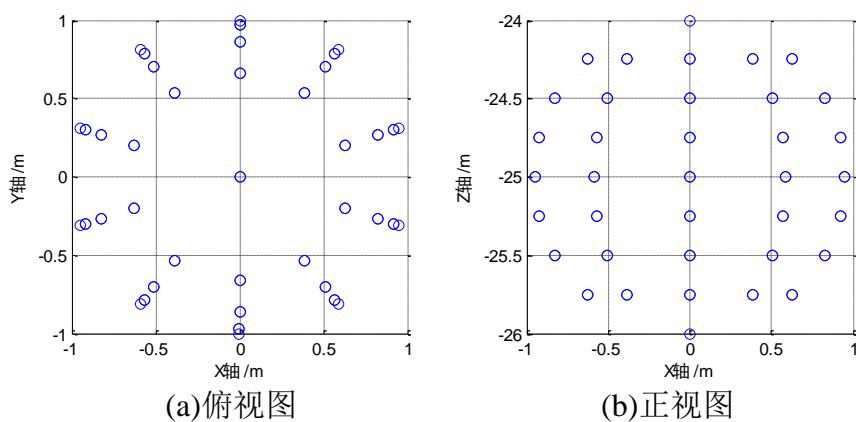
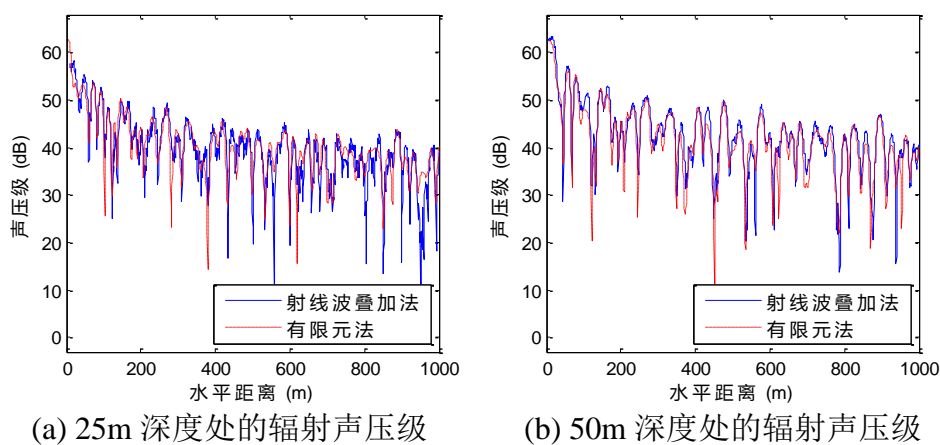
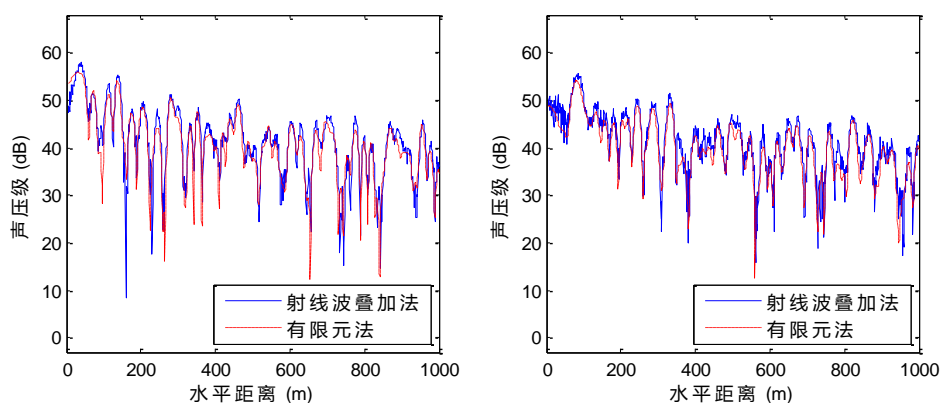


图 3.7 虚拟源设置示意图

使用射线波叠加法和有限元法求解得到的不同深度处的辐射声压级对比如图。





(c) 100m 深度处的辐射声压级

(d) 150m 深度处的辐射声压级

图 3.8 不同深度处的辐射声压级对比图（频率为 100Hz）

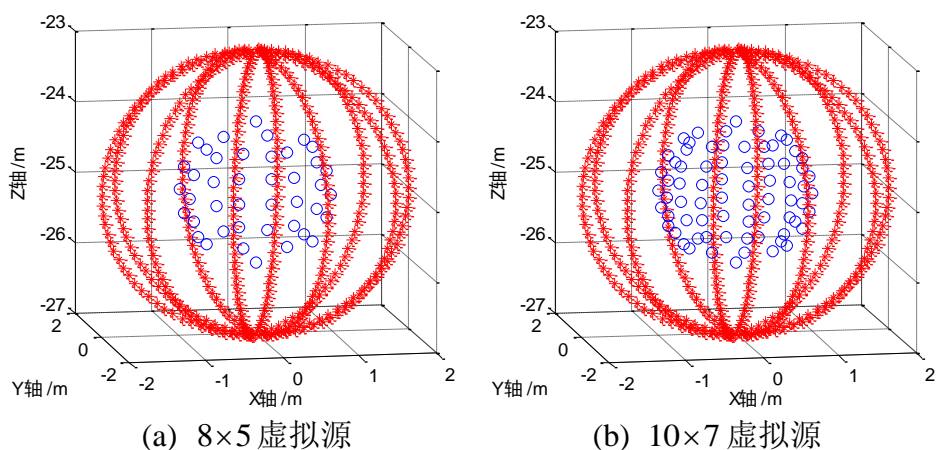
图 3.8 中可以看出，射线波叠加法与有限元法的计算结果相当接近，除去个别距离处的峰值或谷值有所差异外，射线波叠加法从整体上来说计算较为准确。

接下来进一步讨论虚拟源不同配置情况下的计算误差。定义误差计算公式为：

$$\eta = \sqrt{\sum_{i=1}^K (|p_r - p_f|)^2} / \sqrt{\sum_{i=1}^K |p_f|^2} \times 100\% \quad (3-8)$$

式中  $K$  为对比采样点的数量， $p_r$  和  $p_f$  分别为射线波叠加法和有限元法所求得第  $i$  个相同位置处的复声压值。

改变虚拟源的配置，取不同的虚拟源数量：8×5 虚拟源、10×7 虚拟源、12×9 虚拟源和 14×11 虚拟源来构造虚拟源面，如图 3.9。同时改变虚拟源面和球壳表面的半径比，计算 25m 深度处的声压，并画出相应的误差曲线，如图 3.10。



(a) 8×5 虚拟源

(b) 10×7 虚拟源

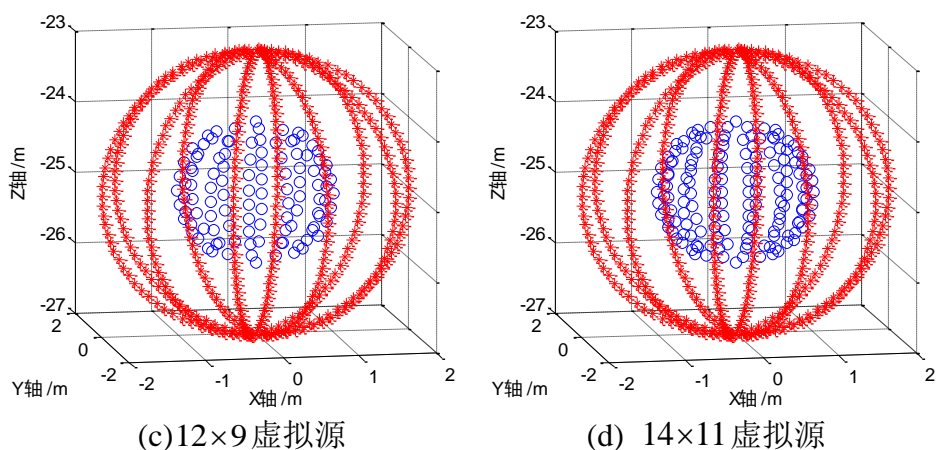


图 3.9 不同的虚拟源数量示意图

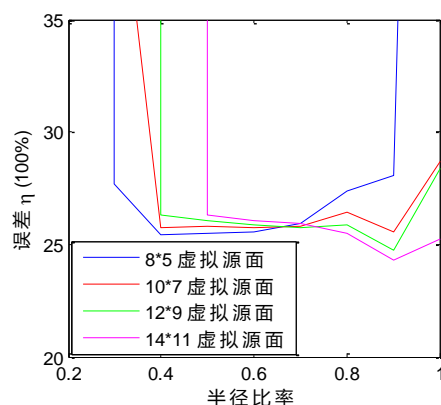


图 3.10 不同虚拟源数量和不同半径比率对计算精度的影响

理论上来说，当虚拟源的数量较多时，对体积源的离散程度会更高。结构表面连续的振速的信息能更好的反映在较为密集的虚拟源面上，从而反演出的虚拟源强能更好的等效产生辐射的结构体。在半径比率为 0.7-1 的范围内，虚拟源的数量越多，射线波叠加法的预报误差越小。在半径比率小于 0.7 的时候，虚拟源的数量越多，预报的误差反而越大，并且相比虚拟源数量较小时更易失效。所谓的失效是指在虚拟源数量和半径比率确定的情况下，预报误差远超正常范围。例如在半径比率为 0.3 时，只有 8×5 虚拟源面的计算误差处在正常范围之内，其他三种虚拟源配置数量所对应的计算结果偏差较大，其计算结果是不可靠的，射线波叠加法将在此时失效。实际上，对于本节分析的案例来说，虚拟源的数量确实会对射线波叠加法的计算精度带来影响。但是这种影响是有限的，因为在此范围之外，是否失效才是对预报结果影响最大的因素。所以，合适的半径比对辐射声场预报的准确性至关重要。对于本节分析的弹性球壳，半径比的最佳比率在 0.5 至 0.9 的范围内，当结构或者环境的其他参数发生变化时，应该结合实际调整虚拟源的



配置来使计算方法适应新的模型。

当虚拟源的配置如图 3.7 时,使用射线波叠加法和有限元法分别得到该球壳的二维辐射声压级如图 3.11。

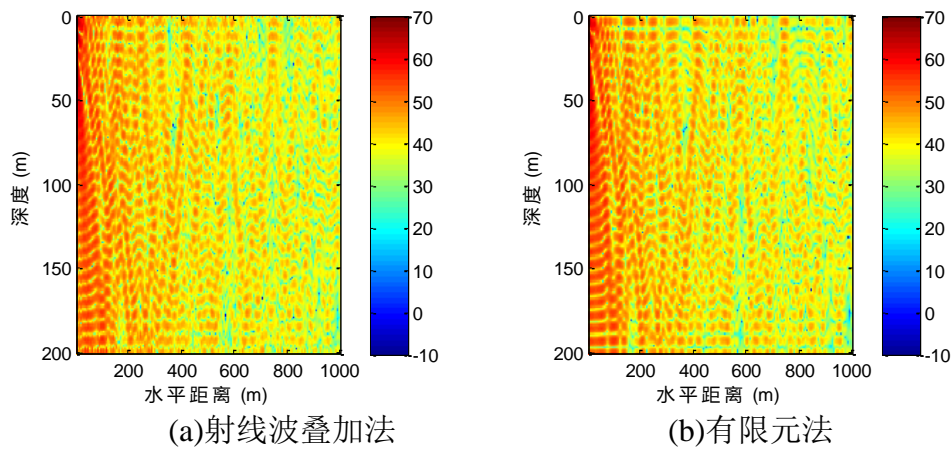


图 3.11 虚拟源设置示意图

图 3.11(a)中的声场干涉条纹清晰可见,其预报结果与图 3.11(b)相似,反映了辐射声在海面与海底间来回反射形成的干涉结构。不同的是,与 3.11(b)相比,图 3.11(a)在波峰与波谷的幅度对比不够明显,这同时也在图 3.8 中有了反映。

在所有环境参数中,频率是一个极为重要的参数,需要讨论频率对虚拟源配置的影响。在不改变其他结构参数和环境的条件下,将激励频率由 100Hz 变为 50Hz,在选择同一虚拟源面时,比较不同频率下的射线波叠加法的计算精度,如图 3.12 所示。

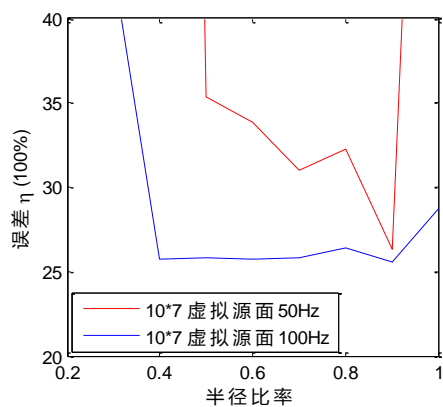


图 3.12 不同频率下的射线波叠加法的计算精度

图中可以看出相较于 100Hz 频率,50Hz 频率的射线波叠加法在 $10\times 7$ 虚拟源面上半径比率的取值范围有所变化,使其计算精度较高的半径比率为 0.9,而半径比率取 1 时方法将失效。在半径比率较小的情况下,这两个频率的射线波叠加法都将失效,但是使射线波叠加法有效的半径比率取值范围在这两种频率条件下有所不同,频率越低其半径比率

取值范围越窄，此时的射线波叠加法对虚拟源配置的合理性要求更高，该方法的鲁棒性会有所下降。

需要注意的是，为了使射线波叠加法能够准确预报结构的辐射声场，海水信道环境需要满足射线理论的适用范围。以下关系可以作为射线理论高频近似的参考范围：

$$f > 10 \frac{c}{D} \quad (3-9)$$

式中  $f$  为辐射声场计算频率， $c$  为海水声速， $D$  为海水的深度。该问题同样可以作为射线波叠加法适用范围的参考。尽管该关系式不能准确的量化频率与海水深度的关系，但确实可以反映射线波叠加法在高频条件下预报辐射声场的潜力。该方法的适用频率范围取决于很多因素，包括近场格林函数高精度计算的频率范围，射线叠加的适用频率范围，以及虚拟源配置的适用频率范围，所以暂时没有对该方法整体的适用频率范围作出具体量化的说明。

### 3.5 本章小结

射线波叠加法作为一种声辐射预报的数值方法，不可避免的存在相应的适用范围。本章从射线波叠加法适用范围的角度作为出发点，从格林函数在近场计算的精度，射线声学自身在浅海信道中的计算性能，以及虚拟源的不同配置方法这三个方面对射线波叠加法的鲁棒性和准确性予以验证和分析。分析表明，射线波叠加法能够较为有效的实现水下弹性结构声辐射的演算与预报，计算精度较高，且有着在高频条件下声场预报的潜力，这也是现有声辐射预报方法难以实现的目标。相较与有限元法，射线波叠加法在对三维远场的辐射声场预报时有着较为明显的计算性能优势。





## 第4章 浅海弹性结构声辐射特性研究

### 4.1 引言

与点源辐射声场相比,信道中弹性结构的声辐射更为复杂。在浅海条件下,海深的尺度相比波长并不是很大,另外结构辐射相比点声源有着较强的指向性,因此,在浅海环境下将弹性结构视作单个点声源是不合适的。为了分析弹性结构在浅海的声辐射特性,在形成射线波叠加法的基础上,本章对弹性结构辐射声场与点声源辐射声场的对比展开分析,并且指出了声源在类型不同、尺寸不同时相应的辐射声场存在的差异与联系,为浅海环境下弹性结构辐射声场的合理预报提供有效指导。

### 4.2 不同类型辐射声源的声场特性研究

为了分析点源辐射声场与弹性结构辐射声场的差异,需要对不同声源产生的声场做对比分析。因为不同的结构体和点源的存在着辐射声功率的差异,为了使结构的辐射声场能够与点源的辐射声场具有可比性,需要使得结构的辐射声功率与点源的辐射声功率相同。这样可以保证结构与点源所辐射出能量的总量相同,使结构与点源的辐射声场所体现的声场结构差异更为突出。弹性结构的辐射声功率可以用任意一个包含该结构的曲面表面上声压与法向速度乘积的曲面积分来表示,如下所示

$$W = \frac{1}{2} \iint_S \operatorname{Re}(p \cdot v^*) dS \quad (4-1)$$

其中 $W$ 为该结构的平均辐射功率, $S$ 为包含该结构的任意曲面, $v$ 为曲面表面质点的法向速度, $p$ 为曲面表面质点的声压。在射线波叠加理论中,结构表面法向速度矩阵已知,不妨令 $S$ 为结构表面,这样很容易结合再结构表面声压的分布,求解不同声源的辐射声功率。利用波叠加法求解辐射声功率,可以在结构不变的条件下由不同的表面振速分布快速估算声辐射功率的变化,使计算的结果可以大大地简化,这也使得射线波叠加法在计算辐射声功率方面有着便捷的计算条件。同样的,在有限元软件 COMSOL 中,也可以使用相应的积分表达式来求解辐射声功率。

由于辐射声功率是表征辐射能量的物理量,所以使用如下的关系来统一辐射声功率:

$$p_0 = \frac{p}{\sqrt{W}} \quad (4-2)$$

式中 $p$ 为声压值, $p_0$ 为单位辐射声功率下的辐射声压值。比较 $p_0$ 即可消除辐射能量的差异,使结构与点源的辐射声场所体现的辐射声场传递系统的差异更为突出,从而

具有可比性。此次分析的结构声源选取弹性球壳和弹性圆柱壳。

#### 4.2.1 弹性球壳与点源的辐射声场差异性研究

本节选取了一个弹性球壳放置在海水中，对该球壳的辐射声场加以研究。球壳的中心位于水深 40m 处，球壳的半径为 2m，壳的厚度为 0.1m，材料为钢，材料的弹性杨氏模量  $E=2\times 10^{11} \text{ N/m}^2$ ，泊松比  $\sigma=0.3$ ，密度  $\rho_s=7850 \text{ kg/m}^3$ 。有一个大小为 1N 的点激励力作用于球壳底部的中心位置，方向竖直向上，球壳受到点激励力的作用而产生辐射声场。海面边界为 Dirichlet 边界，海底边界为 Neumann 边界，不妨设水中的声速恒定为 1500m/s。由于球壳结构是周向对称的，故只选取一个观察平面。模型的示意图如图 4.1 所示。

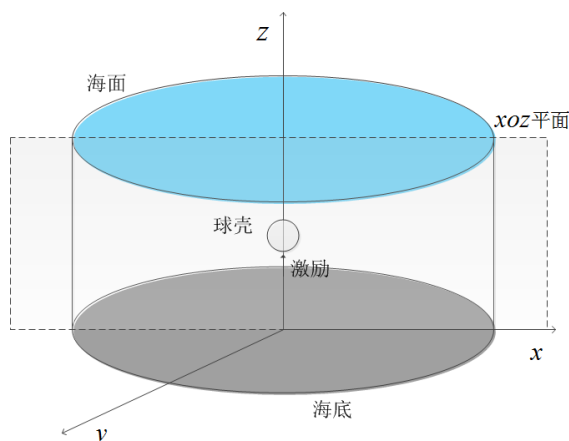
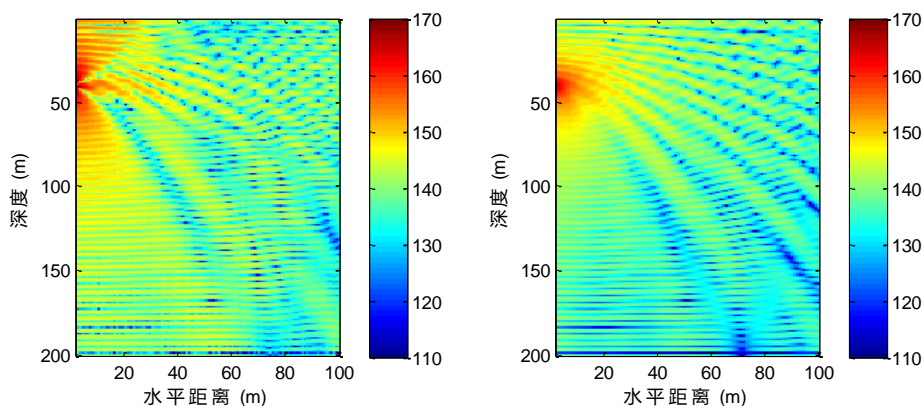


图 4.1 信道中球壳声辐射示意图

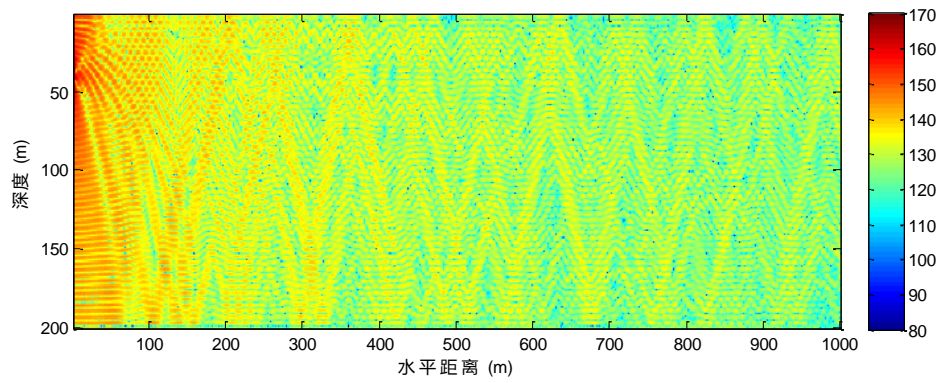
使用 COMSOL 建立结构声辐射的模型，获取结构表面的振速信息。将结构表面的振速信息提取出来，采用射线波叠加法求解结构的辐射声场。对于点源的辐射声场，直接使用 COMSOL 建立点源声辐射模型来求解点源的辐射声场。

当激励频率为 200Hz，海水深度为 200m 时，将结构源与点源的辐射声场作对比。

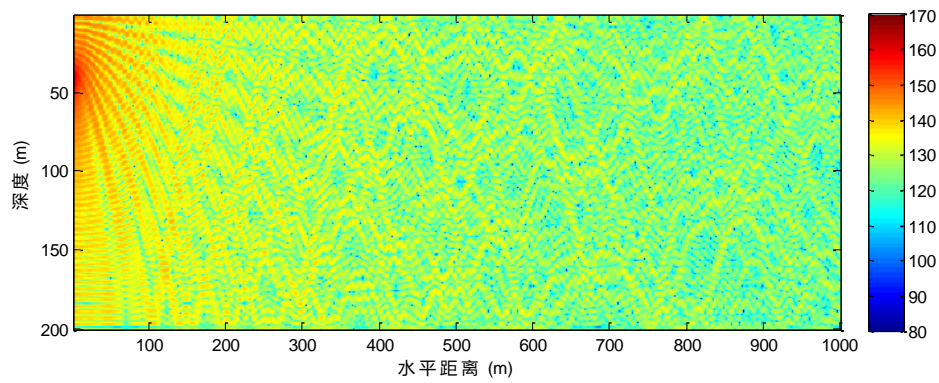


(a) 球壳的近场辐射声场

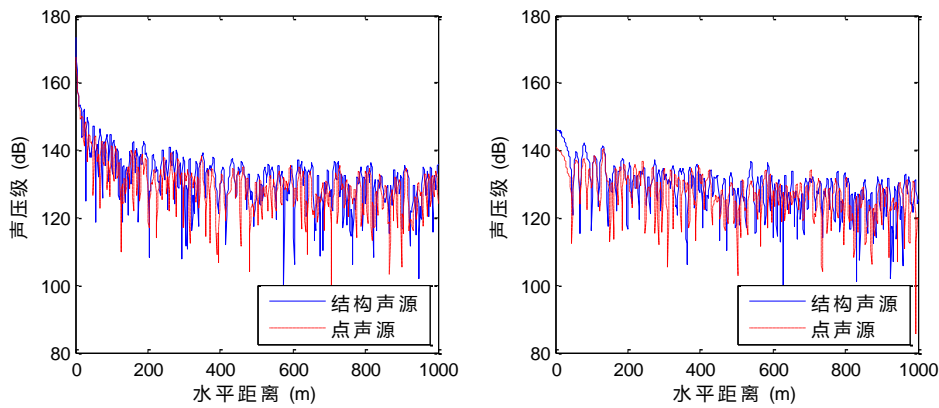
(b) 点源的近场辐射声场



(c) 球壳的远场辐射声场

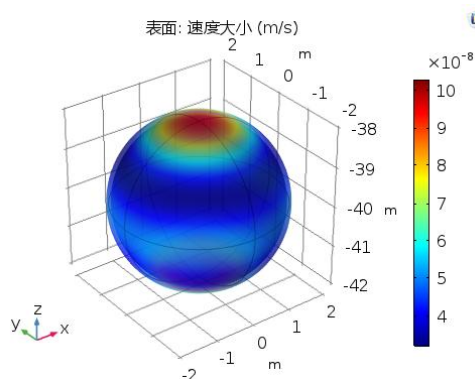


(d) 点源的远场辐射声场



(e) 在 40m 深度的声压级比对

(f) 在 140m 深度的声压级比对



(g) 球壳的表面振速分布

图 4.2 球壳与点源辐射声场的比较信息

图 4.2(a)和图 4.2(b)描述了在较近距离内, 结构源和点源的辐射声压级。与点声源相比, 球壳的辐射声场在声源周围的分布不均匀, 这主要是由于球壳在受到底部激励后声辐射存在一定的指向性, 而这种指向性与球壳表面振动的振型有关。从图 4.2(g)中球壳表面振速的分布来看, 虽然球壳的振动在周向方向是均匀的, 但是在轴向上的振速分布存在差异。这种振速的差异导致球壳在振动时所激发的声场模态与点源相比有很大的不同, 进而影响了辐射声场的分布。用简正波理论分析该模型, 对该问题可以得到较为有力的描述。

从简正波理论来说, 信道中的辐射声场是由不同阶的简正波叠加而成。简正波分为两类, 分别对应于传播模式和渐消模式, 这与本征值的虚部是否存在有关。传播模式的简正波因其不存在指数衰减因子, 所以可在较远距离处传播; 而渐消模式的简正波由于包含随着传播距离增大的指数衰减因子, 故其主要对近场声场起贡献作用。

在信道环境确定的情况下, 简正波中传播模式与渐消模式的组合也随之确定, 同样确定的还有简正波的激发强度, 也就是说简正波在给定的波导中以不变模式传播。激发强度表征相应阶的简正波对声场的贡献大小。所以在远场声场中, 各阶传播模式简正波的激发强度, 往往决定着声场的构成。

在球壳辐射声场满足的二维声场中, 由于简正波本征函数  $\Phi(k_{zn}z)$  具有正交性, 不同阶的简正波在深度方向彼此正交。故利用正交性, 由简正波格林函数可以推导得到如下等式

$$\int_0^H p(r_0, z) \Phi(k_{zn}z) dz = a_n H_0^{(2)}(k_m r_0) \quad (4-3)$$

该式可将一个水平距离  $r_0$  确定的但与深度方向有关的声场数据分解成阶数  $n$  不同的各阶简正波激发强度  $a_n$  与汉克尔函数的乘积形式, 该乘积表示了  $r_0$  距离处声场中的各

阶简正波权值。

对图 4.2 所示的辐射声场，取水平距离不同的声场数据作相应处理，分别得到点源和结构声源的简正波权值以及激发强度。

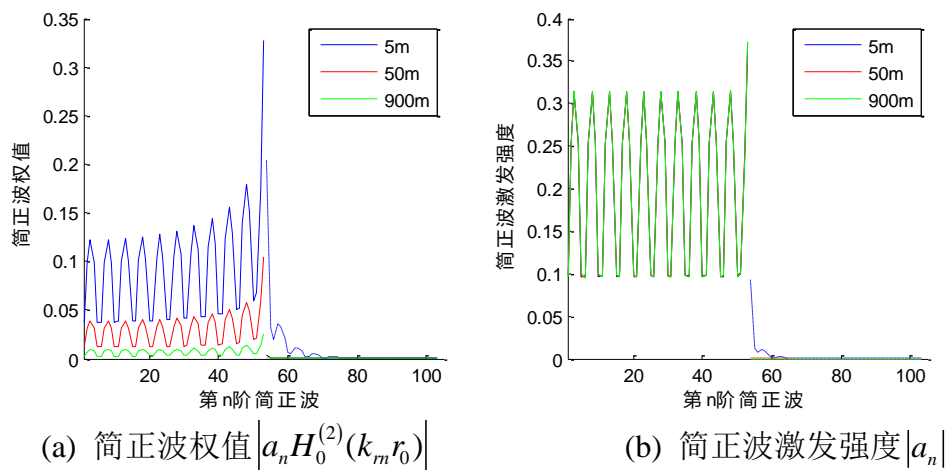


图 4.3 点声源不同水平距离处的简正波分解

图 4.3(a)中可以看出，随着水平距离的增大，汉克尔函数发生衰减，导致各阶简正波的权值也随距离减小。对于该频率和海深确定的信道来说，理论上前 53 阶简正波对应传播模式，而 53 阶及其之后的简正波对应着渐消模式。所以在 53 阶之后，渐消模式的简正波在 5m 处体现明显，而在 50m 和 900m 处由于衰减作用基本上已经消失不见。这说明了渐消模式的简正波主要在近场起作用，而到了远场会衰减消失，此时阶数较低的简正波也就是传播模式的简正波在远场贡献了整个声场。通过图 4.2(b)中也可以看出，在声源较近处的声场干涉结构更加复杂，是由于较多阶简正波的贡献导致，而在较远处声场的干涉结构较简单且清晰，此时参与贡献的简正波数量已经减少。

关于简正波的激发强度  $a_n$ ，从图 4.3(b)可以看出，传播模式的激发强度不随传播距离的增加而发生改变，而是由信道自身环境直接决定，用来表示在某一特定信道环境下，声场传播的谱特征。

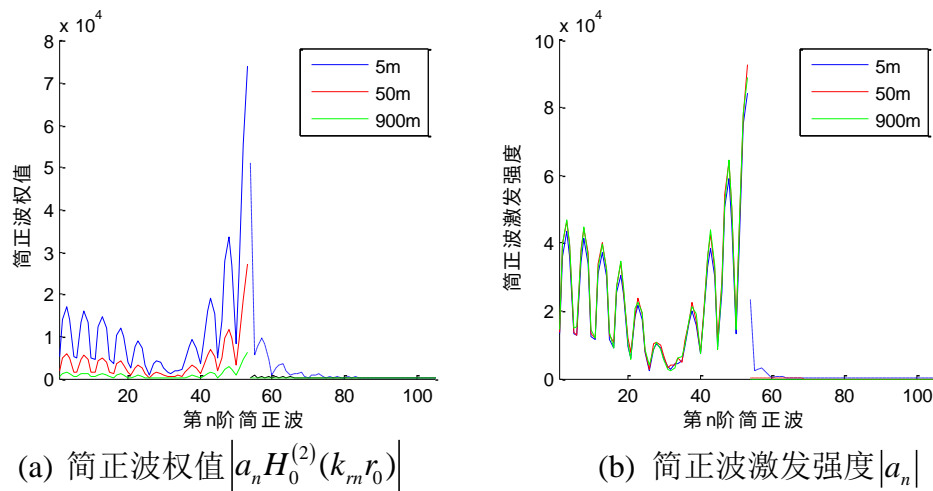


图 4.4 结构声源不同水平距离处的简正波分解

受激球壳作为声源的声辐射也有类似的规律。在通过简正波分解得到的图 4.4 中，传播模式的简正波激发强度同样不随传播距离的增加而改变，即结构声辐射的简正波激发强度谱的组成成分与同样信道环境中的点源相同，但球壳激发强度谱的分布特征与点源不同。这也从另一个角度说明了由于激发强度谱的成分一致，结构源的辐射声场可以用若干个点声源辐射声场通过加权叠加来逼近，这也是射线波叠加法的本质所在。

#### 4.2.2 弹性圆柱壳与点源的辐射声场差异性研究

与 4.2.1 节类似，在信道环境不改变的前提下，将弹性球壳换作弹性圆柱壳，分析其辐射声场与点源辐射声场的差异。圆柱壳的材料为钢，材料的弹性杨氏模量  $E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ ，泊松比  $\sigma = 0.3$ ，密度  $\rho_s = 7850 \text{ kg/m}^3$ 。海面边界为 Dirichlet 边界，海底边界为 Neumann 边界，水中的声速恒定为  $1500 \text{ m/s}$ 。有一个大小为  $1 \text{ N}$  的点激励力作用于圆柱壳底部的中心位置，方向竖直向上，圆柱壳受到点激励力的作用而产生辐射声场。在同样的信道环境中，有一点源放置于圆柱壳中心位置，在同一平面观察结构与点源的辐射声场。观察平面和结构的放置方法如图 4.5 所示。



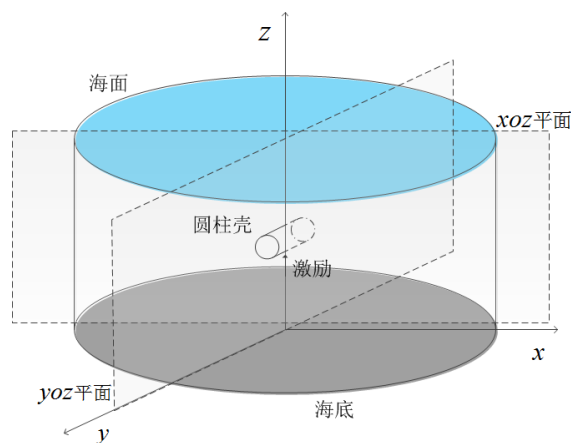
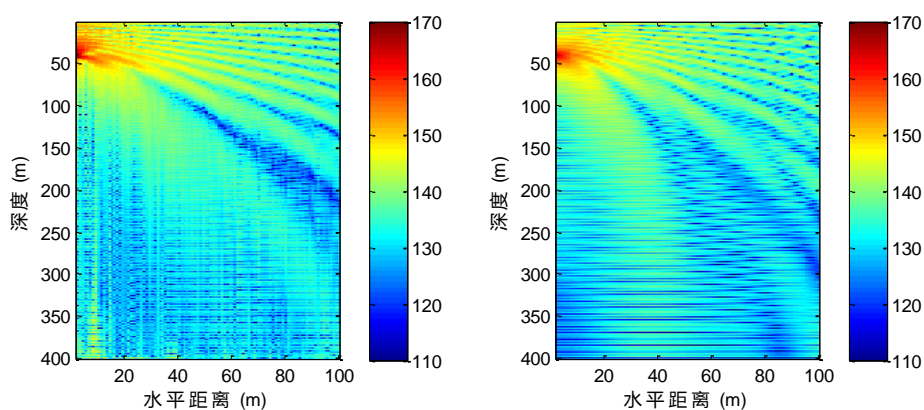


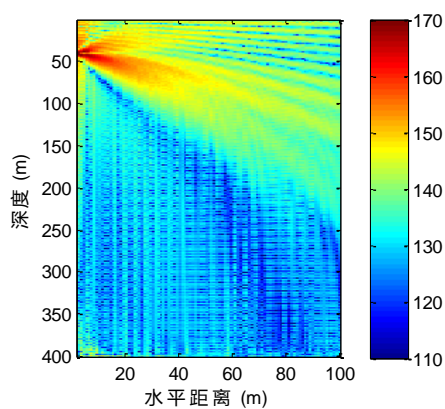
图 4.5 弹性圆柱壳声辐射模型示意图

设定频率  $f$  和水深  $D$ ，使用 COMSOL 建立模型，提取 COMSOL 计算的球壳表面振动信息，利用射线波叠加法求解弹性圆柱壳辐射声场并与在圆柱壳中心处的点源的辐射声场对比，分析差异。

当激励频率为 200Hz，海水深度为 400m 时，将结构源与点源的辐射声场作对比。

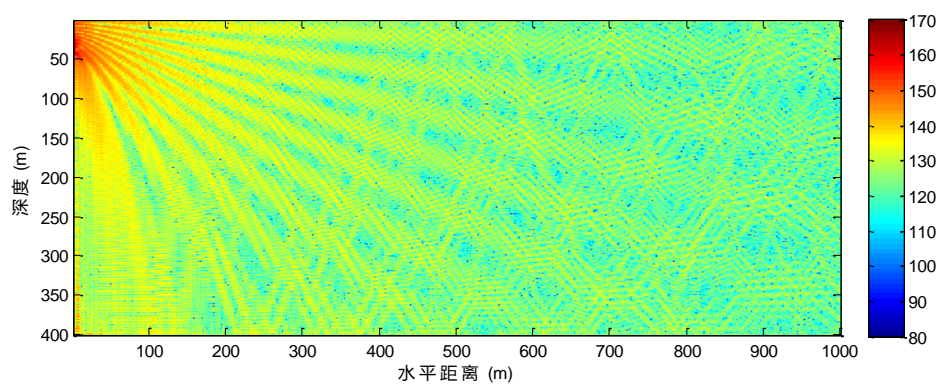


(a) 圆柱壳的近场辐射声场( $xoz$  平面) (b) 点源的近场辐射声场

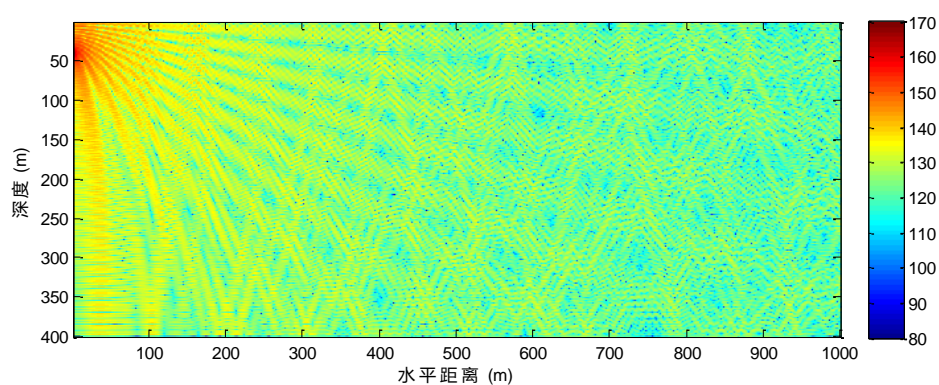


(c) 圆柱壳的近场辐射声场( $yoz$  平面)

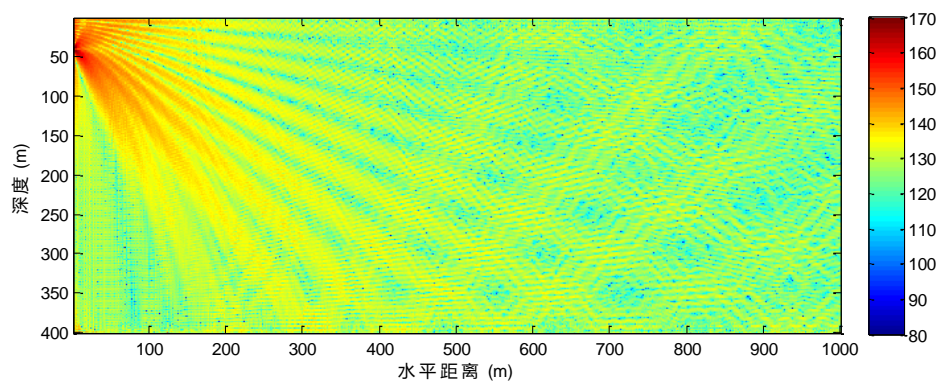




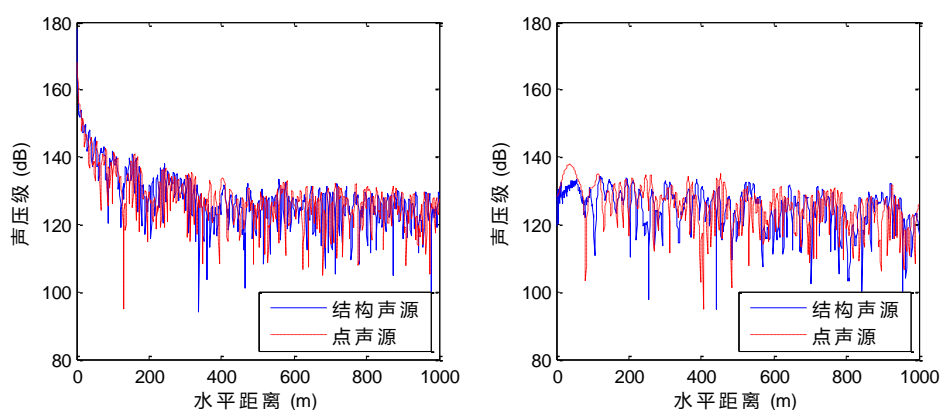
(d) 圆柱壳的远场辐射声场( $xoz$  平面)



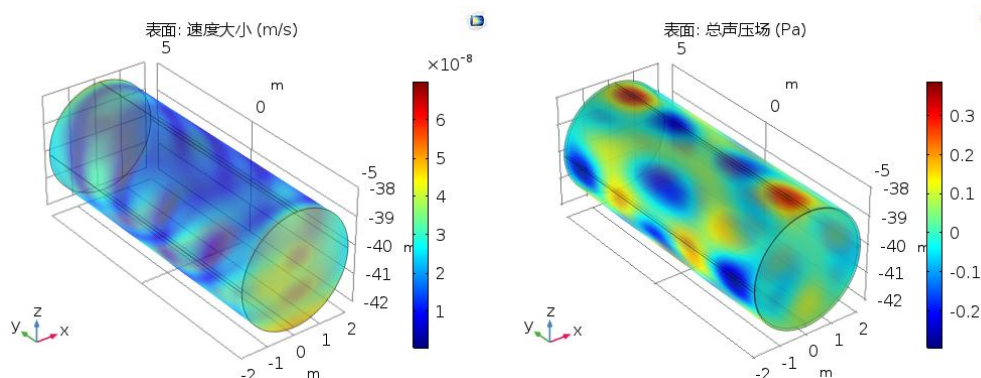
(e) 点源的远场辐射声场



(f) 圆柱壳的远场辐射声场( $yoz$  平面)



(g) 在 40m 深度声压级比对( $xoz$  平面) (h) 在 340m 深度声压级比对( $xoz$  平面)



(i) 圆柱壳的表面振速分布 (j) 圆柱壳的表面声压分布

图 4.6 圆柱壳与点源辐射声场的比较

与周向对称的球壳相比，圆柱壳表面的振动分布和声压分布更为复杂，相应的圆柱壳辐射声场是一个更加复杂的三维声场。对于三维辐射声场来说，二维的简正波分解方法已经不再适用，但是三维声场的分布仍然可以用简正波理论来解释与分析。

图 4.6(a)(b)(c)显示，圆柱壳近场的辐射声场与点源相比， $xoy$  和  $yo z$  平面的分布有较大差异，其指向性呈三维分布。随着传播距离的增大如图 4.6(d)(e)(f)，圆柱壳辐射声场干涉结构的复杂度逐渐减小，与点源辐射声场类似，干涉结构逐渐稳定并最终按一定规律分布。实际上，这正是由于在近场存在渐消模式的简正波，使得近场辐射声场的组成较为复杂，而较远距离处的声场仅保留传播模式的简正波，且点源辐射声场与圆柱壳辐射声场的传播模式简正波谱的组成一致，仅与信道的参数有关。

### 4.3 不同尺寸辐射声源的声场特性研究

在说明了不同类型声源的辐射声场存在的差异和联系后，声源的尺寸对辐射声场特性的影响同样需要加以研究。本节以受激弹性球壳作为声源，研究不同尺寸的球壳的声

辐射特性。

声源信道水深 400m，海面为 Dirichlet 边界，海底为 Neumann 边界，声速恒定为 1500m/s。弹性球壳半径分别为 1m、2m、10m、20m，放置于水下 100m 深处，受到了相同的频率为 50Hz 的激励力，作用于底部正中心，方向竖直向上。在对不同尺寸的弹性球壳声辐射的辐射声功率做了归一化处理后，得到了不同尺寸球壳辐射的声场分布，如图 4.7。

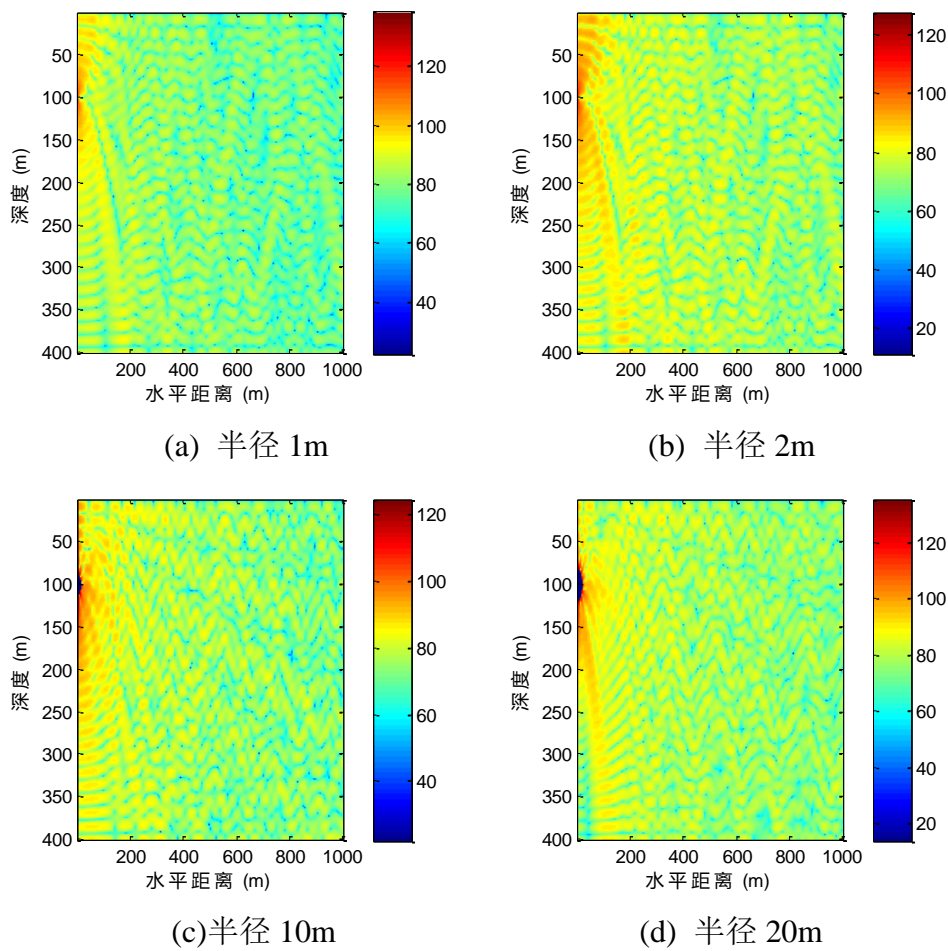


图 4.7 不同尺寸球壳的辐射声压级

图 4.7 中可以看出，在同样的频率下，随着结构尺寸的增大，声场中亮纹的间距也就是声压幅度峰值的间距越来越小，且很难再观察到海面和海底间直接来回反射的干涉结构，这说明结构辐射声场更加复杂。对于一般的弹性壳体结构，例如球壳，在受到激励力的作用下会激发相应的模态。结构的振动以及声场的辐射表征为所激发的相应模态的叠加。尺寸较小时，在一定频率结构激发模态的响应较为简单，随着结构尺寸的增大，该频率下结构激发所能激发的模态更多，其响应由于叠加的效应，变得更加复杂。另外，

辐射的声场经过与海面与海底等边界的作用，一部分反馈回结构，在结构表面形成多次激励。在较大尺寸的结构上，这种反射声与结构的作用面也随之增大，这种多次激励对声场产生的影响更加明显。这些都是影响声场干涉结构与结构尺寸之间关系的因素。

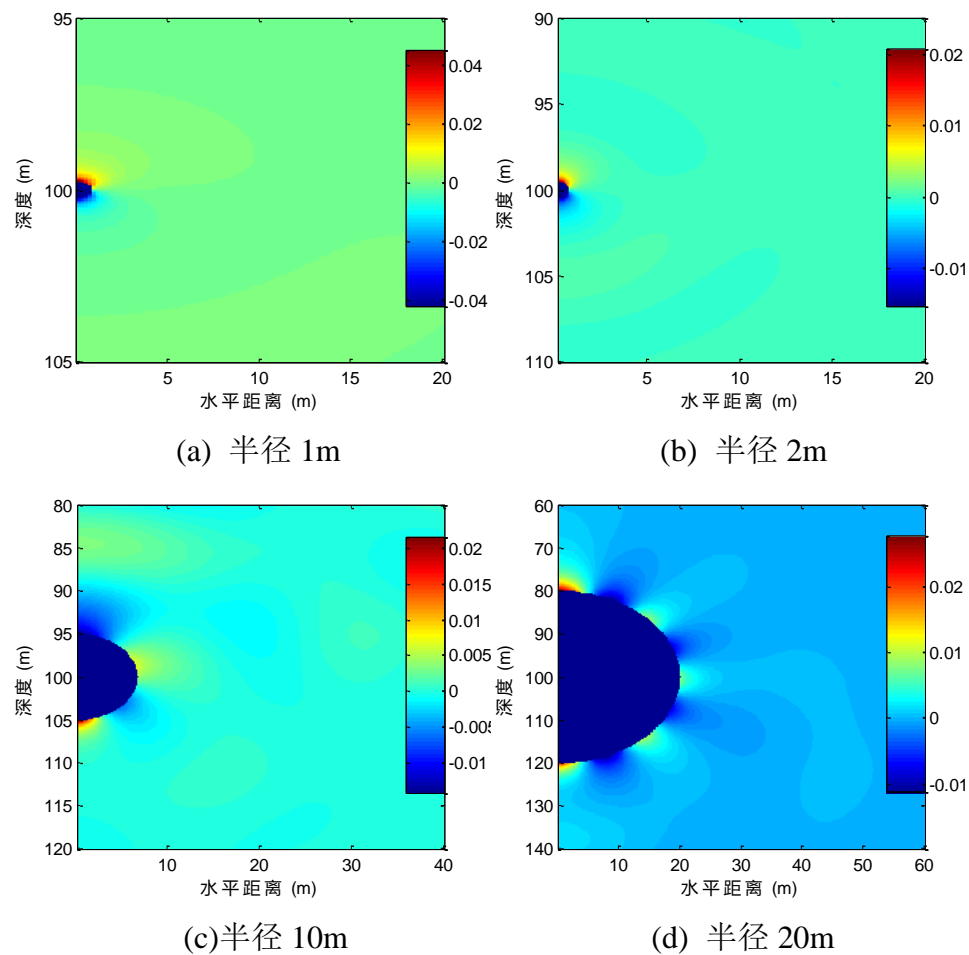


图 4.8 不同尺寸球壳的近场声压实部

不同尺寸的球壳受到激励后其激发模态的差异同样也体现在球壳周围的辐射声场中。如图 4.8 所示为不同尺寸声源周围辐射声场的声压实部分布图。球壳尺寸较大时，结构周围声源周围的声场分布变得复杂。声压在结构周围以多个连续旁瓣的形式分布，而且随着尺寸增大旁瓣的数量随之增多。这与不同尺寸的结构激发出的各阶模态不同有关。模态属于结构自身的固有振动属性，每一个模态具有特定的固有频率、阻尼比和模态振型。结构在一定的信道环境中，在一定的频率范围，能够激发出的模态会随之确定，其辐射声场作为振动响应也会得到确定。这说明了有了一定尺度的结构，其声辐射特性更加复杂。在对周围的声场作了全面分析后可知，球壳声源尺寸较小时，结构周围的声压旁瓣减少，呈上下分布同时相位相反，且半径 1m 球壳激发出的声场与半径 2m 球壳



分布结构较为接近。

球壳辐射声场在近场的激发能力同样体现在简正波激发强度的分布上。对不同尺寸下弹性球壳辐射声场在不同距离处利用简正波的正交性做分解，分解的距离分别选在40m、200m、800m，得到如下的简正波激发强度的谱图。

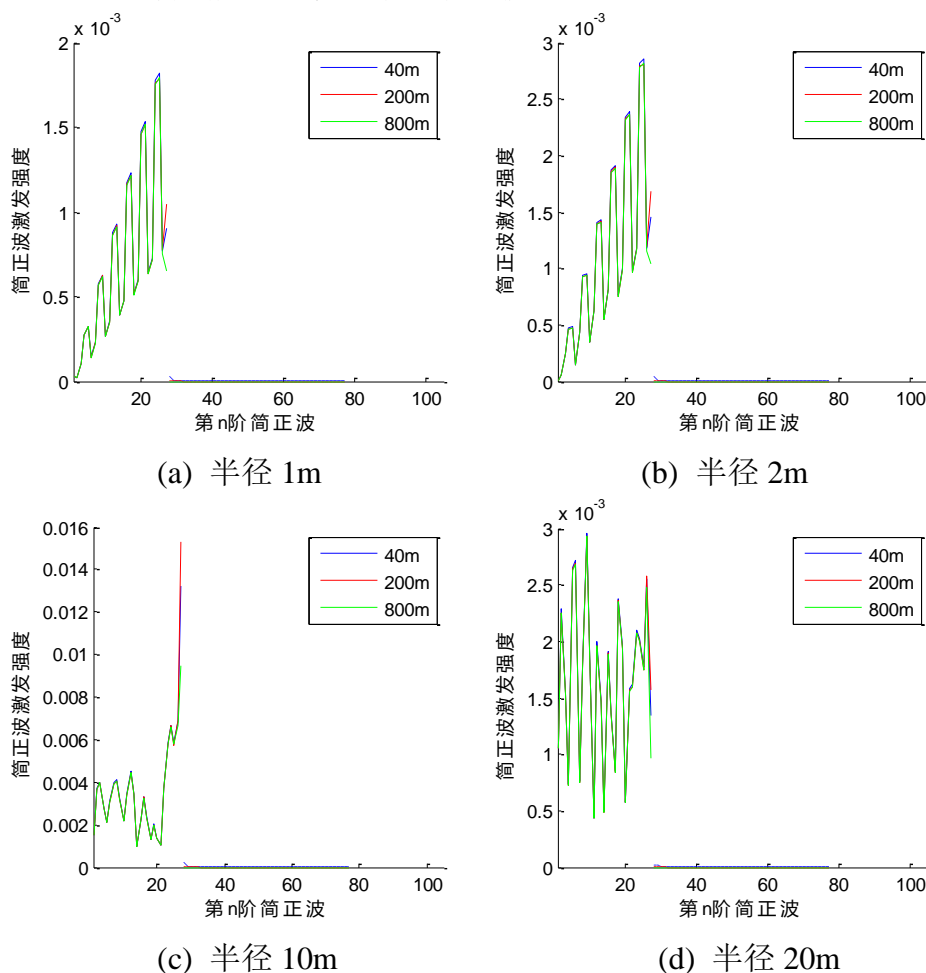


图 4.9 不同尺寸球壳辐射声场的简正波激发强度

半径为 1m 和 2m 的球壳，其周围声场分布接近，而这两个声源的简正波激发强度也较为接近。对于半径为 10m 和 20m 的球壳来说，其周围的声场上体现为旁瓣较多，与小尺寸的球壳存在巨大差异，这种差异也同时体现在简正波激发强度的不同之上。

通过本节的研究说明，尺寸不同的结构声源，其辐射声场特性不同，且与点源辐射声场同时存在着差异和联系。为了使结构辐射声场的预报准确合理，我们在预报时需要对结构自身的振型加以考虑，能够较好的适应不同类型以及不同尺寸的结构，并且合理利用结构声源与点声源的联系，从而实现辐射声场的快速预报。

## 4.4 本章小结

本章采用射线波叠加法分别对弹性圆柱壳和弹性球壳的辐射声场特性作了分析，揭示了不同类型弹性结构的辐射声场与点声源辐射声场之间的差异与联系。这种差异主要体现在辐射声源激发模态的分布，这种分布因结构形状和尺寸的不同以及信道环境的不同而改变，具体表现为激发的各阶简正波谱分布不同。结构声源和点声源的各阶简正波激发强度谱，虽然分布不同，但是存在一定的联系，可以相互转化。

## 第 5 章 射线波叠加法实验研究

### 5.1 引言

为了进一步验证本文提出的弹性结构声辐射计算方法的正确性，以及从应用的角度验证该方法的可行性，本章将在哈尔滨工程大学信道水池中开展试验测试。使用本文提出的弹性结构声辐射计算方法对结构的辐射声场进行仿真预报，并与实际测量的声场信息对比，验证预报方法的正确性。

### 5.2 实验内容

#### 5.2.1 实验系统介绍

实验在信道水池中开展。该信道水池深 5m，宽 6m，用以模拟浅海信道环境，水池四周贴敷了吸声材料，对 20kHz 以上的频率有较好的吸声作用。

实验的模型为一个单层的圆柱壳，如图 5.1 所示。圆柱壳长 1.1m，半径为 0.25m，壳体厚度为 5mm，两侧端盖的厚度为 0.05m，端盖的半径为 0.3m。其中一个端盖设有两个通线孔，通有壳体内部激振器的相应线路。在圆柱壳底部的正中央，距离通线孔一端 60cm 处为一个 400N 的磁致伸缩激振器，在距离通线孔一端 40cm 处与底部呈 90° 处有另一小型激振器，如图 5.2 所示。结构材料参数为杨氏模量为  $E = 2.06 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ ，泊松比为  $\nu = 0.3$ ，密度为  $\rho_s = 7800 \text{ kg/m}^3$ ，结构损耗因子为  $\eta = 0.005$ 。



图 5.1 实验所用圆柱壳模型实物图

图 5.2 实验所用圆柱壳激振器安装图

实验系统的示意图如图 5.3 所示。本次实验将模型置于信道水池的中心位置，即模型的正中心在信道水池宽度和深度的正中心处。使用信号发生器产生指定的激励信号，通过功率放大器放大后，使 400N 的磁致伸缩激振器产生相应的激励信号来对模型激励。模型受到激励后自身产生振动，并在信道水池中产生辐射声场，使用一个水听器线阵在

信道水池中的不同位置处采集模型的辐射声压作为测量值。同时，振动测量系统监控模型表面的振动信息，并将振动信息传输至计算机，采用射线波叠加法求解辐射声场，并与测量值比较，以此方式来验证计算方法的正确性。实验的频率范围选择为4kHz-20kHz。

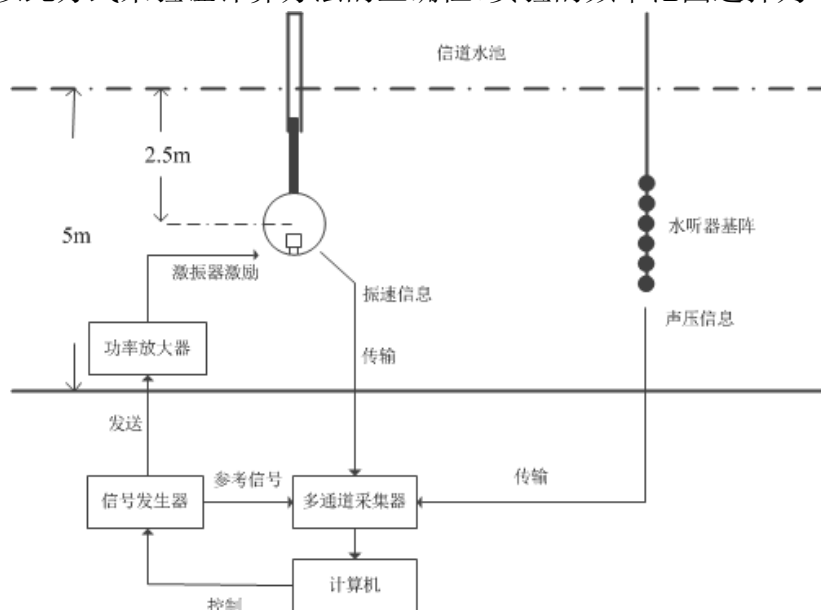


图 5.3 实验系统示意图

## 5.2.2 振动测量系统

振动测量系统用于采集模型表面振动信息。由于实验的测量频率较高，相应的波长较小，所以需要较多的振动测点。在圆柱壳表面以轴向取 10 个等间距的测点作为一条测量线，每个测点间距 10cm，周向共等分为 12 条测量线，再加上圆柱壳两端面各放置有 2 个测量点，共计 124 个振动测量点来测量圆柱壳的表面振动信息，如图 5.4。在每个测量点上安置加速度计，测量振动的法向加速度，经过数学上的处理即可获得表面的法向振动速度。



图 5.4 圆柱壳上的加速度计分布

将加速度计的测量结果通过 B&K3660D 多通道采集器，传输至计算机进行处理。由于圆柱壳表面的振动测量点较多，而且 B&K3660D 多通道采集器的通道数有限，所以模型表面的振动信息需要分多次进行测量。由于结构和激励构成的系统存在对称性，



故只需测量一半的测量线，即圆柱壳同一侧相邻的 7 条测量线。将待测测量点一共分为 7 组测量，每次测量一条测量线上的振动信息。圆柱壳端面的测量点在这 7 组测量的同时持续测量，以作为参考测量点。设立参考测量点的目的是防止在测量过程中因为不同组的测量而产生的随机误差，以确保所测数据的一致性和可靠性。

### 5.2.3 水声测量系统

本次实验采用的水听器是 8103 水听器，如图 5.5 所示。将共计 16 个水听器组成线阵竖直放于信道水池中，且保持在水池宽度的正中央，线阵底端悬挂重物使线阵在水中保持竖直。两个水听器阵元的间距为 30cm，最上方的水听器在水面以下 30cm 处，最下方的水听器在水底上方 20cm 处，如图 5.6。



图 5.5 8103 水听器实物图



图 5.6 水听器阵列实物图

水听器阵列的水平测量位置在圆柱壳正横方向从距圆柱壳中心位置 2m 到 12m 处，每隔 1m 测量一次。将水听器的测量数据通过 B&K3660D 多通道采集器传输至计算机处理。

发射信号用 Agilent33210A 信号发生器产生，通过 YE5874A 功率放大器放大信号，产生窄带激励信号，并作用于模型上。产生的信号范围为 4kHz-20kHz，频点间隔为 2kHz。



图 5.7 B&K3660D 多通道采集器



图 5.8 Agilent33210A 信号发生器



图 5.9 YE5874A 功率放大器



图 5.10 测量现场

### 5.3 实验结果与分析

当水听器阵距离圆柱壳模型 6m 时，位于水中 0.9m 深度处的水听器采集到的频率范围内的信号和背景噪声如图 5.11 所示。各频点的信噪比均能达到大约 40dB 的量级，满足声压测量的信噪比要求。

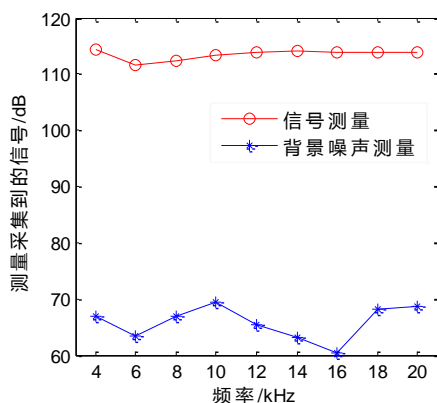


图 5.11 声压采集信号的信噪比

同样需要表示出加速度计测量信噪比。取加速度计第一组测量中距离通线孔最近的加速度计的采集信号与其所测量的背景噪声信号大小，绘制对比图 5.12。该图中在各频点处的信噪比均值大于 50dB，满足模型表面振动加速度的测量要求。

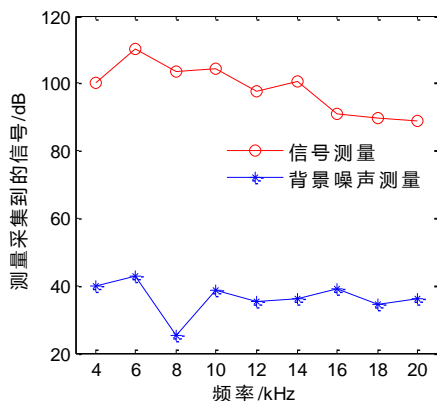


图 5.12 加速度采集信号的信噪比

通过对选取的样本水听器 and 加速度计的相应信号测量与背景噪声的比较，可以说明水听器和加速度计的信噪比满足实验的测量要求。

在对采集的信号做分析之前，需要对信号进行校准，用校准原理来使多次测量的幅值和相位的测量误差统一。其原理为：圆柱壳端面的振速测量点在整个实验过程中持续测量，以作为参考测量点，使得该加速度传感器所测量的不同振动响应所对应的振动激励相同。读出参考的和待校准的传感器振动响应的幅值和相位，将两者的幅值之比作为校准的幅值系数，而相位之差作为相位的参考。

假设参考加速度计两次测量的加速度为  $a_{ref1}$  和  $a_{ref2}$ ，这两次测量的两组数据分别为  $D_1'$  和  $D_2'$ 。不妨假设以第一次测量的参考值为基准，将第二次测量的数据可以按如下关系实现校准：

$$D_2 = D_2' \cdot \frac{a_{ref1}}{a_{ref2}} \quad (5-1)$$

即可实现所有测量数据的校准。使用加速度计测量经处理后获得的圆柱壳模型表面 124 个法向振动速度作为输入数据，采用射线波叠加法反演出虚拟源的强度，并且实现对圆柱壳模型辐射声场的预报。将预报值与信道水池中水听器所测量的声场数据对比，验证该计算方法的预报准确性。取水中声速为 1500m/s，密度为 1024kg/m<sup>3</sup>。

频率为 6kHz 时，水中 4.2m 深的水听器沿距离方向 2-12m 的声场预报值和实验测量值如图：

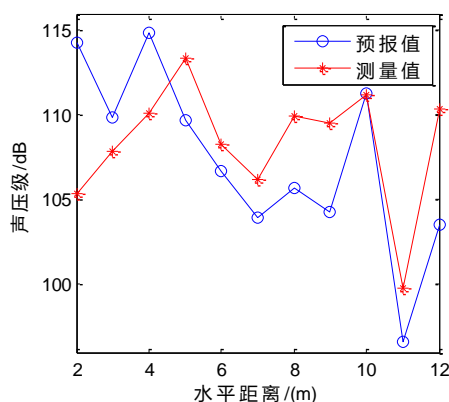


图 5.13 频率 6kHz 深度 4.2m 时声场预报值和实验测量值对比

频率为 10kHz 时，水中 0.6m 深的水听器沿距离方向 2-12m 的声场预报值和实验测量值如图：

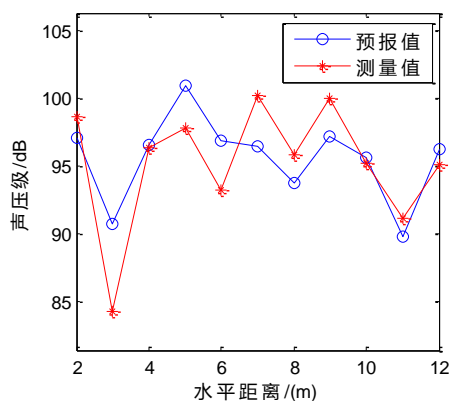


图 5.14 频率 10kHz 深度 0.6m 时声场预报值和实验测量值对比

频率为 16kHz 时，水中 4.2m 深的水听器沿距离方向 2-12m 的声场预报值和实验测量值如图：

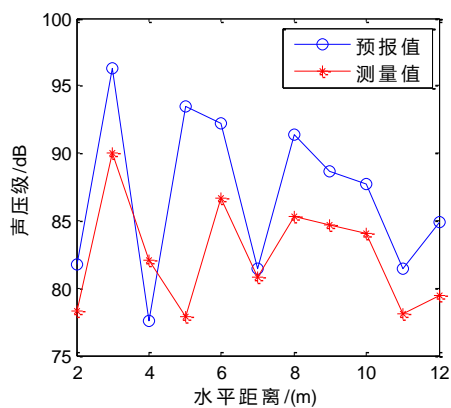


图 5.15 频率 16kHz 深度 4.2m 时声场预报值和实验测量值对比

频率为 18kHz 时，水中 3.9m 深的水听器沿距离方向 2-12m 的声场预报值和实验测量值如图：

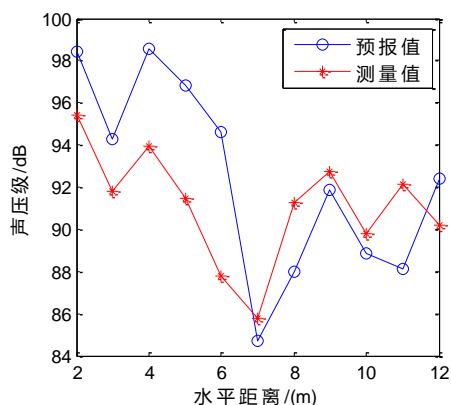


图 5.16 频率 18kHz 深度 3.9m 时声场预报值和实验测量值对比

图 5.13-图 5.16 中可以看出，在距离较近的区域，射线波叠加法的辐射声场预报值

与实验测量值相比存在一定的误差，这是因为在该区域中，水面、水底和水池壁面存在混响效应。混响效应会对声场测量值产生一定的影响，而在射线波叠加法的预报方法中并未考虑到这一效应的出现。从频率上看，由于水池的工作频率为 20kHz，即水池对 20kHz 以上频率的声波有较好的控制效果，但为了在模型表面测量振动信息时能将测量点的密度控制在合理区间而未使用较高的测量频率，故而对测量值带来一部分偏差。

另外，虚拟源面的配置方法对计算精度也会产生一定的影响。预报值的计算过程中，虚拟源按以下原则布置。在柱壳模型两端面共计四个测点位置不变的情况下，柱面按 $10 \times 7$ 配置，即轴向将柱壳等分为 8 段，用 7 个截面等分柱壳模型的长度，每个界面周向 10 等分，共计用 74 个虚拟源，再按 0.6 的半径比率以柱壳中心位置为原点同比内缩，从而形成虚拟源面，如图 5.17 所示。

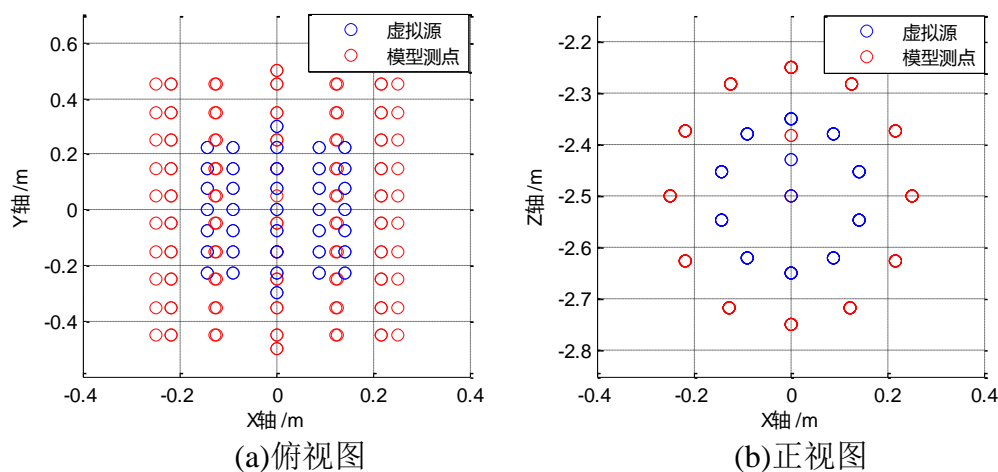


图 5.17 虚拟源设置示意图

首先，对与圆柱壳端面来说，每个端面只有两个测量点，而因为模型结构问题难以测量端面外圈的振动。所以从测点上看，测量忽略了模型一部分的振动。其次，虚拟源配置时 $10 \times 7$ 配置法自身也存在着一定的计算误差。相较于球体模型，圆柱模型对虚拟源的分布要求更高，不能简单依靠按某种半径比率放缩来布置。这要求圆柱模型的虚拟源需要细化配置，在注重柱面配置的同时也要优化端面的配置。所以端面较少的测量点与虚拟源会在一定程度上影响辐射声场预报的准确性，这也是实验误差来源之一。

考虑到以上因素，射线波叠加法的预报值与实验测量值的存在一定的误差是难以避免的，而从整体上的对比可知，射线波叠加法仍不失为一个较为实用快速的辐射声场预报方法，但是在如何优化实验过程中虚拟源的配置这个问题上，还需要在今后的实验中去研究和完善。

## 5.4 本章小结

本章通过在特定的实验环境中测量弹性结构模型的表面振动信息和辐射声场，有效验证了射线波叠加法的实用性和可靠性。首先介绍了验证实验的实验环境与实验设备，在对实验原理介绍的同时，说明了在不同组别的测量过程中保持传感器相位与幅度一致性的方法，进一步保证了试验数据的可靠性。本章在数据分析的部分对预报值与测量值的部分误差做了分析，对其误差有影响的不仅有实验频率不足而导致的信道水池消声效果不佳的因素，也有圆柱壳表面位置尤其是圆柱壳两个端面的振动信息测量点数目不足而导致的结构振动信息过度离散化的因素，同样有近场混响效应对测量值干扰的因素。这种系统误差的来源在实际工程实践中需要特别注意，这是射线波叠加法在应用过程中需要解决的问题之一。

## 结论

本文提出了一种基于射线和波叠加法的计算方法，用以实现对浅海信道中弹性结构声辐射的预报。该方法利用结构表面的法向振速，通过波叠加法这一声学逆问题的处理，将该连续分布的振动离散成一定数量的具有不同源强度的虚拟声源，并结合采用射线近似条件，利用射线理论计算这些虚拟声源的叠加辐射声场，从而完成辐射声场的预报。在与有限元法完成对比验证之后，本文进行了浅海环境下弹性结构声辐射与相应信道环境中点声源声辐射的特性与差异分析，最后以模拟环境下的实验测量再一次验证了射线波叠加法的可行性与可靠性。主要的研究结论如下：

1、本文在对射线波叠加法理论模型介绍的同时，从数值分析的角度，对该方法在逆问题求解过程中可能会遇到的病态矩阵求逆的数值不稳定性提供了一定的解决方案。这种不稳定性将导致一定条件下辐射声场的预报结果受结构表面振动的微小扰动而产生较大波动。本文采用 Tikhonov 正则化方法对病态矩阵做了正则化处理，用正则化参数构造一个稳定的泛函，通过调整正则化参数的取值求解病态方程的稳定近似解，从而实现数值计算结果的优化。

2、射线波叠加法作为一种数值计算方法，存在自身的适用条件。通过对信道中格林函数在近场计算精度的分析可知，在信道深度过低时，格林函数近场计算准确所需要的阶数总数较大，这将对逆问题求解的效率产生较大影响。同时，本文在对射线理论实现多声源叠加验证分析的过程中，发现水深较大，计算频率较高的条件下，射线理论对点源的辐射声场预报结果光滑且扰动较小，此时的预报精度非常高，并给出了可供参考的射线波叠加法的适用范围。

3、射线波叠加法在声学逆问题的求解精度对最终的预报结果影响较大，其中虚拟源配置的方法起到至关重要的作用。本文在射线波叠加法对弹性球壳辐射声场预报验证的同时，分别改变不同的虚拟源配置方法，并对由此产生的预报精度的改变做了说明与分析。在射线波叠加法未失效的前提下，虚拟源数量对声辐射预报表现影响有限，在半径比率较高时虚拟源数量越大预报精度越高，在半径比较小时虚拟源数量越小预报精度越高。只要半径比和虚拟源数量合适，声辐射预报精度整体都处于较高水平，故保证射线波叠加法处于不失效的状况是该方法预报的关键。

4、本文分别对弹性圆柱壳和弹性球壳的辐射声场特性作了分析，揭示了弹性结构辐射声场与点声源辐射声场之间的差异与联系。同一形状的结构声源在尺寸不同的情况

下同样会产生一定差别的辐射声场。这种差异主要体现在辐射声源由其振型所激发得模式上，在辐射声场中表现为各阶简正波的激发强度。这种简正波激发强度仅与信道的自身参数有关。结构声源和点声源的各阶简正波激发强度谱，虽然分布不同，但是存在一定的联系。

射线波叠加法虽然计算精度较高，但在某种条件下会存在失效的现象。作者试图从虚拟源数量大小以及半径比的大小这两方面提供一个较为可靠的射线波叠加法失效条件，但实际的研究效果并不理想。今后将进一步研究在实际应用中如何优化虚拟源的配置，同时考虑这种波叠加法失效及射线理论自身的计算误差对辐射声场预报误差影响规律及解决方法。



## 参考文献

- [1] Chen L H, Schweikert D G. Sound radiation from an arbitrary body[J]. The Journal of the Acoustical society of America, 1963, 35(10): 1626-1632.
- [2] Chertock G. Sound radiation from vibrating surfaces[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1964, 36(7): 1305-1313.
- [3] Zienkiewicz O C, Kelly D W, Bettess P. The coupling of the finite element method and boundary solution procedures[J]. International journal for numerical methods in engineering, 1977, 11(2): 355-375.
- [4] Everstine G C. Prediction of low frequency vibrational frequencies of submerged structures[J]. J. Vib. Acoust. Stress Reliab. Des, 1991, 113(2): 187-191.
- [5] 张敬东. 水下旋转弹性薄壳的振动与声辐射[D].哈尔滨船舶工程学院.1989.
- [6] Junger M C. Radiation loading of cylindrical and spherical surfaces[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1952, 24(3): 288-289.
- [7] 汤渭霖, 范军. 水中弹性结构声散射和声辐射机理——结构和水的声-振耦合作用[J]. 声学学报, 2004, 29(5): 385-392.
- [8] He Z Y. VIBRATION OF IMMERSED RECTANGULAR COMPOSITE PLATE EXERTED BY UNDERWATER SOUND[J]. Chinese Journal of Acoustics, 1984 (3): 4.
- [9] Junger M C, Feit D. Sound, structures, and their interaction[M]. Cambridge, MA: MIT press, 1986.
- [10] Computational aspects of structural acoustics and vibration[M]. Springer Science & Business Media, 2009.
- [11] Skelton E A, James J H. Theoretical acoustics of underwater structures[M]. 1997.
- [12] Soni S, Jain N K, Joshi P V. Vibration analysis of partially cracked plate submerged in fluid[J]. Journal of Sound and Vibration, 2018, 412: 28-57.
- [13] Feit D. Pressure Radiated by a Point - Excited Elastic Plate[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1966, 40(6): 1489-1494.
- [14] Hayek S. Vibration of a spherical shell in an acoustic medium[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1966, 40(2): 342-348.

- [15] Suzuki S, Maruyama S, Ido H. Boundary element analysis of cavity noise problems with complicated boundary conditions[J]. Journal of Sound and Vibration, 1989, 130(1): 79-96.
- [16] Cheng C Y R, Seybert A F, Wu T W. A multidomain boundary element solution for silencer and muffler performance prediction[J]. Journal of Sound and Vibration, 1991, 151(1): 119-129.
- [17] 赵键, 汪鸿振. 边界元法计算已知振速封闭面的声辐射[J]. 声学学报, 1989, 14(4): 250-257.
- [18] 刘钊, 陈心昭. 结构声辐射分析的全特解场边界元方法[J]. 振动工程学报, 1996(4): 341-347.
- [19] 张超. 有限弹性圆柱壳水下声辐射快速预报方法研究[D]. 哈尔滨工程大学, 2008.
- [20] 孙锐. 三维声场边界元法高阶单元几乎奇异积分半解析算法[D]. 合肥工业大学, 2017.
- [21] Bleich H H, Baron M L. Free and forced vibrations of an infinitely long cylindrical shell in an infinite acoustic medium[R]. COLUMBIA UNIV NEW YORK, 1952.
- [22] 楼红伟, 胡光锐, 何元安. 出海管路系统的噪声振动及声辐射[J]. 上海交通大学学报, 2002, 36(5): 726-729.
- [23] 赵蓓蕾, 吴立言, 周建星, 等. 齿轮箱振动噪声预测的统计能量分析方法研究[J]. 机械传动, 2013, 37(2): 24-28.
- [24] 向万龙. 基于统计能量法的水下航行器振动分析[D]. 中国舰船研究院, 2017.
- [25] G.H. Koopmann, L. Song and J. B. Fahnlne, A method for computing acoustic fields based on the principle of wave superposition, The Journal of the Acoustical Society of America 86 (1989)2433–2438.
- [26] L. Song, G.H. Koopmann and J. B. Fahnlne, Numerical errors associated with the method of superposition for computing acoustic fields, The Journal of the Acoustical Society of America 89 (1991) 2625–2633.
- [27] R.D. Miller, E. T. Moyer Jr, H. Huang and H. Überall, A comparison between the boundary element method and the wave superposition approach for the analysis of

- the scattered fields from rigid bodies and elastic shells, *The Journal of the Acoustical Society of America* 89 (1991) 2185–2196.
- [28] J. B. Fahline and G. H. Koopmann, A numerical solution for the general radiation problem based on the combined methods of superposition and singular-value decomposition, *The Journal of the Acoustical Society of America* 90 (1991) 2808–2819.
- [29] R. Jeans and I. Mathews, The wave superposition method as a robust technique for computing acoustic fields, *The Journal of the Acoustical Society of America* 92 (1992) 1156–1166.
- [30] 李加庆, 陈进, 张桂才, 等. 基于波叠加的噪声源识别方法[J]. 上海交通大学学报, 2006, 40(1): 124-128.
- [31] 于飞. 基于波叠加方法的声全息技术与声学灵敏度分析[M]. 合肥工业大学出版社, 2008.
- [32] 李卫兵. 基于统计最优和波叠加方法的近场声全息技术研究[D]. 合肥工业大学, 2006.
- [33] 李卫兵, 陈剑, 毕传兴, 等. 联合波叠加法的全息理论与实验研究[J]. 物理学报, 2006, 55(3): 1264-1270.
- [34] 熊济时, 吴崇健, 徐志云, 等. 三维数字空间法与波叠加法结合的近场声辐射计算[J]. 中国舰船研究, 2011, 6(1): 41-45.
- [35] 高煜. 基于波叠加方法的声辐射与声学灵敏度算法的若干关键问题研究[D]. 合肥工业大学, 2009.
- [36] 李加庆, 陈进, 杨超, 等. 波叠加声场重构精度的影响因素分析[D]. , 2008.
- [37] 魏应三, 靳栓宝, 蒋国健. 等效源方法的适用性判定及源的优化布置[J]. 振动与冲击, 2015, 34(21): 200-204.
- [38] 杨德森, 张睿, 时胜国. 内部体积源作用下的圆柱壳内外声场特性[J]. 物理学报, 2018, 67(24): 244301-244301.\
- [39] 夏雪宝. 基于波叠加法的结构声辐射优化设计及其应用研究[D]. 武汉理工大学, 2018.
- [40] P. C. Etter, *Underwater acoustic modeling and simulation* (CRC press, 2018).

- [41] 杨士莪. 水声传播原理[M]. 哈尔滨工程大学出版社, 2007.
- [42] Apel J R. Principles of ocean physics[M]. Academic Press, 1987.
- [43] 张海刚. 具有弹性海底的海洋环境中声场计算研究[D]. 哈尔滨工程大学, 2006.
- [44] 徐传秀. 基于抛物方程近似的三维声场建模与快速计算方法研究[D]. 哈尔滨工程大学, 2017.
- [45] 魏文专. 基于 Pade 高阶近似的抛物方程方法的实现与应用研究[D]. 哈尔滨工程大学, 2009.
- [46] 徐传秀, 朴胜春, 杨士莪, et al. 采用能量守恒和高阶 Padé近似的三维水声抛物方程模型[J]. 声学学报, 2016(4):477-484.
- [47] 徐传秀, 朴胜春, 张海刚, et al. 三维抛物方程声传播联合预报模型[C]// 中国声学学会水声学分会 2015 年学术会议论文集. 2015.
- [48] 宋俊, 彭朝晖. 抛物方程远场近似条件分析[J]. 声学学报(1):85-90.
- [49] 李庆来. 基于射线理论的浅海声场数值预报研究[D]. 哈尔滨工程大学, 2008.
- [50] 陈小龙, 范军, 汤渭霖. 分层浅海海洋环境噪声场的射线预报方法[J]. 声学技术, 2004(2):79-83.
- [51] 陈鸿洋. 水下有界空间中弹性结构的声辐射预报方法研究 [D]. 哈尔滨工程大学, 2013.
- [52] 商德江, 钱治文, 何元安, 等. 基于联合波叠加法的浅海信道下圆柱壳声辐射研究[J]. 物理学报, 2018, 67(8): 84301-084301.
- [53] 钱治文. 浅海波导中弹性结构声辐射预报方法研究[D]. 哈尔滨工程大学, 2018.
- [54] Z. Qian, D. Shang and Y. He, Sound radiation from a cylinder in shallow water by fem and pe method, The Journal of the Acoustical Society of America 143 (2018) 1927–1927.
- [55] Jensen F B, Kuperman W A, Porter M B, et al. Computational ocean acoustics[M]. Springer Science & Business Media, 2011.
- [56] 肖庭延. 反问题的数值解法[M]. 科学出版社, 2003.
- [57] 徐张明, 沈荣瀛, 华宏星. 奇异值分解(SVD)和 Tikhonov 正则化方法在振速重建中的应用[J]. 上海交通大学学报(6):834-838.
- [58] Winkler J R. Tikhonov regularisation in standard form for polynomial basis

- conversion[J]. Applied Mathematical Modelling, 1997, 21(10): 651-662.
- [59] G. H. Golub, P. C. Hansen and D. P. O'Leary, Tikhonov regularization and total least squares, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications 21 (1999) 185–194.
- [60] Morigi S, Sgallari F. A regularizing L-curve Lanczos method for underdetermined linear systems[J]. Applied mathematics and computation, 2001, 121(1): 55-73.
- [61] Calvetti D, Morigi S, Reichel L, et al. Tikhonov regularization and the L-curve for large discrete ill-posed problems[J]. Journal of computational and applied mathematics, 2000, 123(1-2): 423-446.
- [62] 刘伯胜, 雷家煜. 水声学原理[M]. 2010.
- [63] 卓力, 贡淑怡. 本征声线的一种求取方法[J]. 声学与电子工程, 1997(3):14-16.

## 攻读硕士学位期间发表的论文和取得的科研成果

- [1] 张超,刘铨豪,商德江等. 一种浅海弹性结构辐射声场计算方法. (专利号: 201910681465.0)
- [2] Yihao Liu, Chao Zhang, Dejiang Shang, Buchao An. Research on Sound Radiation Characteristics of Elastic Structure in Shallow Water Based on Wave Superposition and Acoustic Ray Theory[C]. The 14th International Conference on Theoretical and Computational Acoustics. 2019. (EI)
- [3] Buchao An, Chao Zhang, Dejiang Shang, Yihao Liu. Analysis of Acoustic Radiation Characteristics of Three-Dimensional Elastic Structure in Shallow Water by FEM-NM Method[C]. The 14th International Conference on Theoretical and Computational Acoustics. 2019. (EI)
- [4] Zhang C, Liu Y, Shang D, et al. A Method for Predicting Radiated Acoustic Field in Shallow Sea Based on Wave Superposition and Ray[J]. Applied Sciences, 2020, 10(3): 917.(SCI)

## 致 谢

光阴似箭，日月如梭，三年的研究生生活到了要结束的时候。这三年间我收获了知识，开拓了视野，更是学会了如何去思考。在此，我要特别感谢我的导师商德江教授，他渊博的知识，广博的眼界和严谨的学术态度，令我由衷的敬佩。在我的科研道路上，商老师就像一盏明灯，启发我点拨我，指引我向正确的方向走去。是他让我明白了科学研究不能纸上谈兵，需要脚踏实地，夯实基础。同时还要感谢商老师这三年对我生活上的关心与照顾，不仅给我去俄罗斯远东联邦大学实习去拓宽眼界的机会，还对我未来学习生活规划指点迷津。在这里，我要再一次向商德江教授致敬！

感谢张超老师在我学习过程中对我的帮助，帮助我养成良好的学习习惯。感谢王曼老师、刘永伟老师、肖妍老师对我学习生活中的关心与支持，让我充分体会到了课题组是一个有爱的大家庭！

感谢安步潮、董磊、李金谕、牛晨、裴杰、杨小黎、尹琬等同学，还有实验室的兄弟姐妹，和你们一起度过了短暂又快乐的三年时光！感谢我的室友侯建新、秦成、张雷、李松峰对我生活上的关怀与照顾！

感谢我的父母一直以来对我的肯定与支持，他们是我积极向上的源源不断的动力，是我学习生活中的坚强后盾，我永远爱你们！感谢我的好朋友黄乐弘、张卓然、魏翔、程颢颐，在我最困难的时候支持我鼓励我，帮助我克服重重难关！

感谢我生命中的每一个人。