

Exercice (ACP):

Une étude gastronomique a conduit à apprécier le service, la qualité et le prix de quatre restaurants. Pour cela, un expert a noté ces restaurants avec des notes allant de -3 à 3.

Les résultats sont les suivants

Restaurant	Service	Qualité	Prix
R1	-2	3	-1
R2	-1	1	0
R3	2	-1	-1
R4	1	3	2

1. Calculer la moyenne pour chaque variable, les écarts types des variables, la matrice X_c des données centrées et la matrice centrée réduite X_{cr}

La matrice des covariances est

$$V = \begin{bmatrix} 5/2 & -3 & 1/2 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1/2 & -2 & 3/2 \end{bmatrix}$$

Et celle des corrélations :

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -0.85 & 0.26 \\ -0.85 & 1 & -0.73 \\ 0.26 & -0.73 & 1 \end{bmatrix}$$

Pour l'étude on effectuera une ACP centrée

2. Effectuer la décomposition aux valeurs propres de V
3. Calculer les pourcentages d'inertie. Quelle est la dimension à retenir ?
4. On donne $U_1 = (0.5 \ -0.8 \ 0.3)'$ et $U_2 = (0.65 \ 0.11 \ -0.75)'$
 - a. Calculer les composantes principales
 - b. Représenter les individus dans le plan principal (1,2).
5. Représenter les variables dans le plan factoriel (1,2).
6. Interpréter les résultats.

Solution (ACP):

Restaurant	Service	Qualité	Prix
R1	-2	3	-1
R2	-1	1	0
R3	2	-1	-1
R4	1	-3	2

7. Calculer la moyenne pour chaque variable, les écarts types des variables et la matrice X_c des données centrées

$$\text{Moy (service)} = 0 ; \text{Moy (qualité)} = 0 ; \text{Moy (prix)} = 0$$

$$X_c = X \text{ (tableau initial)}$$

$$\begin{aligned} \text{Var (S)} &= [(-2)^2 + (-1)^2 + 2^2 + 1^2] * 1/4 \\ &= 10/4 = 2.5 \end{aligned}$$

$$\sigma_1 = 1.58$$

$$\text{Var (Q)} = 5 \rightarrow \sigma_2 = 2.23$$

$$\text{Var (P)} = 1.5 \rightarrow \sigma_3 = 1.22$$

$$X_{cr} = X_c * D'$$

$$D = [1/1.58 \ 0 \ 0 ; 0 \ 1/2.23 \ 0 ; 0 \ 0 \ 1/1.22]$$

$$X_{cr} =$$

$$\begin{array}{ccc} -1.2658 & 1.3453 & -0.8197 \\ -0.6329 & 0.4484 & 0 \\ 1.2658 & -0.4484 & -0.8197 \\ 0.6329 & -1.3453 & 1.6393 \end{array}$$

8. Effectuer la décomposition aux valeurs propres de V

$$\lambda_1 = 7.6225 ; \lambda_2 = 1.3775 ; \lambda_3 = 0$$

9. Calculer les pourcentages d'inertie. Quelle est la dimension à retenir ?

$$\lambda_1 / 9 = 84.695 \%$$

$$\lambda_2 / 9 = 15.305 \%$$

10. On donne $U_1 = (0.5 \ -0.8 \ 0.3)'$ et $U_2 = (0.65 \ 0.11 \ -0.75)'$

- c. Calculer les composantes principales

$$CP = X_c * U$$

$$\begin{array}{cc} CP = & -3.7000 \ -0.2200 \\ & -1.3000 \ -0.5400 \\ & 1.5000 \ 1.9400 \end{array}$$

$$3.5000 \quad -1.1800$$

- d. Représenter les individus dans le plan principal (1,2).