

Вопрос по выбору по оптике за 4ый семестр

Илья Михеев

2021г.

# 1 Геометрическая оптика. Принцип Ферма. Законы преломления и отражения. Полное внутреннее отражение.

## Область применения

1.  $\lambda \rightarrow 0, \frac{\lambda}{D} \ll 1$
2.  $|\lambda^2 \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}| \ll |\lambda \frac{\partial a}{\partial x}| \ll a$

## Законы геометрической оптики

1. Закон прямолинейного распространения света
2. Закон отражения
3. Закон преломления
4. Принцип независимости световых лучей
5. Принцип обратимости солнечных лучей

## Принцип Ферма

1. Луч света распространяется в пространстве между двумя точками по тому пути, вдоль которого время его прохождения меньше, чем вдоль любого другого пути, соединяющего эти точки.
2. Свет распространяется между двумя точками по той траектории, оптическая длина которой минимальна.

$$S = \int n(\vec{r}) dl$$

$$E = E_0(r) \exp[i(\Phi(r) - \omega t)]$$

$$k = \text{grad} \Phi$$

$$J = \int_{M_0}^M k(r) dr = \Phi(M) - \Phi(M_0)$$

Для траектории  $L_0$ , совпадающей с траекторией луча, векторы  $\vec{k}$  и  $d\vec{r}$  параллельны, то есть

$$J = \int_{M_0}^M k ds = k_0 L_0(M_0, M)$$

где  $L_0$  — оптическая длина участка  $M_0M$  траектории луча. Если взять какую-либо иную кривую, соединяющую точки  $M_0$  и  $M$ , то вдоль неё векторы  $\vec{k}$  и  $d\vec{r}$  не параллельны, так что  $kds \geq \vec{k}d\vec{r}$ . Поэтому вдоль этой кривой окажется

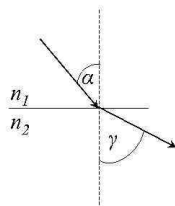
$$k_0 L = k_0 \int_{M_0}^M n ds = \int_{M_0}^M k ds \geq \int_{M_0}^M \vec{k} d\vec{r} = k_0 L_0(M_0, M)$$

Откуда следует равенство  $L \geq L_0$ .

## Закон преломления и отражения

### Закон Снелла преломления света

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{n_2}{n_1}$$



Если  $n_1 > n_2$ , или первая среда оптически более плотная, то  $\gamma < \alpha$ .

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$$

$$\alpha_{\text{кр.}} = \frac{n_2}{n_1}$$

## 2 Центрированные оптические системы. Тонкая линза. Фокусы и главные плоскости оптической системы. Оптические инструменты: лупа, телескоп и микроскоп.

### Центрированной оптической системой

называют совокупность преломляющих и отражающих сред, отделённых друг от друга симметричными поверхностями, центры кривизны которых находятся на одной прямой. Эту прямую называют главной оптической осью системы.

## Тонкая линза

Линза — прозрачное тело, изготовленное из оптически однородного материала, ограниченное двумя полированными выпуклыми или вогнутыми поверхностями.

Точки  $O$  и  $O'$  пересечения поверхностей линзы с главной оптической осью называются вершинами линзы. Расстоянием  $d$  между вершинами называется толщина линзы. Линза считается тонкой, если  $d \ll R_1$ ,  $d \ll R_2$ .

Формула тонкой линзы:

$$\frac{1}{F} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

## 2.1 Фокусы и главные плоскости оптической системы.

Если оптическая система превращает параллельный пучок света в сходящийся, то точка, в которой пересекаются лучи после прохождения системы называется фокусом. Две сопряжённые плоскости, отображающиеся с линейным увеличением  $\beta = \pm 1$ , называются главными.

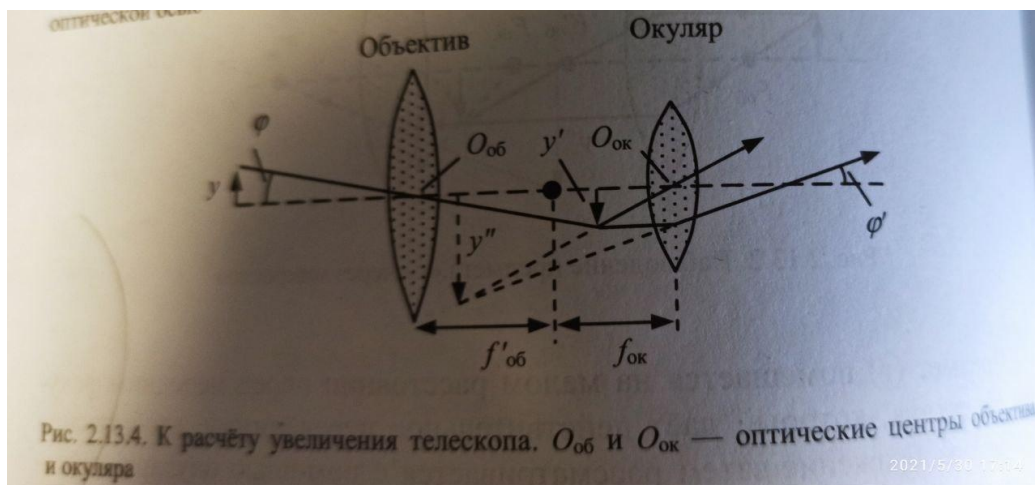
## 2.2 Лупа

Лупа — это оптическая система, состоящая из одной или нескольких линз и предназначенная для наблюдения мелких предметов, расположенных на конечном расстоянии.

Если с расстояния  $l_0$  смотреть на изображение, то  $\Gamma = \frac{l_0}{F}$ , где  $F$  — фокусное расстояние лупы. (Выведешь сам)

## 2.3 Телескоп

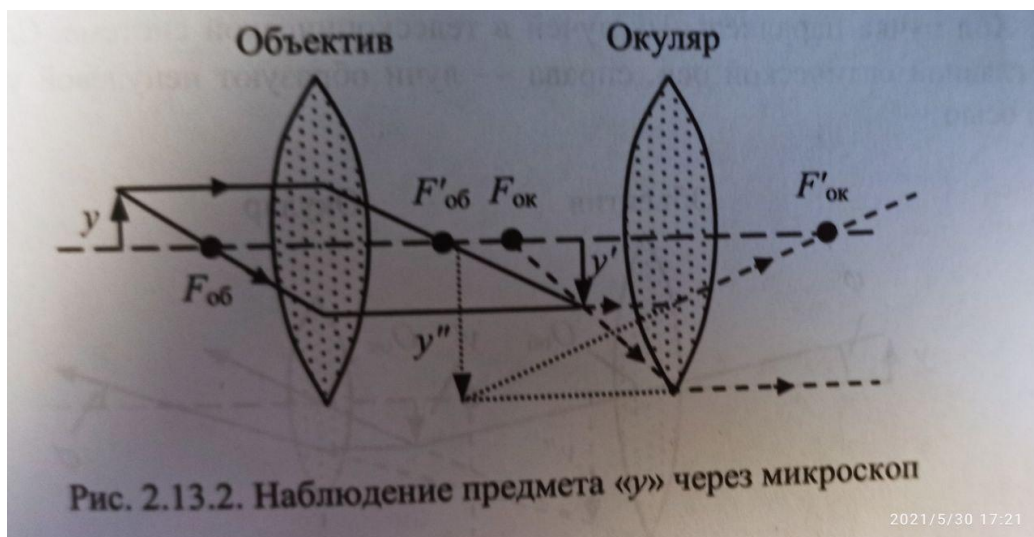
Телескоп — система, включающая в себя объектив и окуляр. Причём передний фокус окуляра совмещён с задним фокусом объектива. При таком расположении элементов параллельный пучок, попадающий в объектив преобразуется в параллельный пучок на выходе из окуляра.



$$\Gamma = \frac{F_{об}}{F_{ок}}$$

Фокусное расстояние окуляра как правило мало по сравнению с фокусным расстоянием объектива, что обеспечивает большое увеличение

## 2.4 Микроскоп



Предмет ( $y$ ) помещается на малом расстоянии перед передним фокусом объектива, который даёт действительное перевёрнутое изображение ( $y'$ ). Это изображение затем рассматривается с помощью окуляра, действующего так же, как лупа.

Увеличение окуляра связано с тем, что конечное изображение ( $y''$ ) видно под большим углом, чем при непосредственном наблюдении глазом.

### 3 Основы фотометрии. Яркость источника, освещённость изображения. Теорема о сохранении яркости оптической системой.

#### 3.1 Основы фотометрии

##### 3.1.1 Поток энергии

Обозначим  $\Phi_{\Xi}$  поток энергии (энергию в единицу времени)

$$\Phi_{\Xi} = \int_0^{\infty} \varphi(\lambda) d\lambda$$

где  $\varphi(\lambda)$  — спектральная плотность энергии (рассчитана на единичный интервал длины волн)

##### 3.1.2 Видность

Шаманская функция  $V(\lambda)$  с гауссовским графиком вокруг  $\lambda = 555\text{нм}$

##### 3.1.3 Световой поток

Для характеристики интенсивности света с учётом его способности вызывать зрительные ощущения вводится величина  $\Phi$  — световой поток. Для интервала  $d\lambda$  имеем

$$d\Phi = V(\lambda) d\Phi_{\Xi}$$

Полный световой поток может быть представлен в виде

$$\Phi = \int_0^{\infty}$$

##### 3.1.4 Сила света

Световой поток, излучаемый в единичный телесный угол, называется силой света:

$$J = d\Phi/d\Omega$$

Полный световой поток —  $\Phi = 4\pi J$ .

### 3.1.5 Интенсивность света

$$I = d\Phi/dS_{\perp}$$

## 3.2 Яркость источника

Это понятие характеризует поверхности и неприменимо к точечным источникам

$$B = \frac{d\Phi}{dS_{\perp}d\Omega} = \frac{dJ}{dS_{\perp}} = \frac{dJ}{dS \cos \theta}$$

## 3.3 Освещённость изображения

$$E = \frac{d\Phi}{dS}$$

Пусть источник света точечный, тогда величина

$$d\Phi = Jd\Omega = J \frac{dS_{\perp}}{r^2}$$

есть поток, падающий на площадку  $dS_{\perp} = dS \cos \theta$ , где  $\theta$  — угол падения излучения на поверхность. В результате оказывается, что

$$E = \frac{d\Phi}{dS} = \frac{J}{r^2} \cos \theta$$

## 3.4 Теорема о сохранении яркости оптической системой

Пусть оптическая система создаёт некоторое изображение светящегося предмета.

Найдём сначала яркость изображения, рассматривая последнее, как светящийся объект. Пусть исходный предмет есть квадрат со стороной  $y$ , а его изображение представляет из себя квадрат со стороной  $y'$ . Пусть яркость предмета равна  $B$ . Тогда световой поток, создаваемый предметом, равен

$$d\Phi = B(\theta)d\Omega dS \cos \theta = 2\pi B(\theta)dS \sin \theta \cos \theta d\theta \approx 2\pi B(\theta)dS \theta d\theta$$

Для изображения также

$$d\Phi' = B'(\theta')d\Omega' dS' \cos \theta' = 2\pi B'(\theta')dS' \sin \theta' \cos \theta' d\theta' \approx 2\pi B'(\theta')dS' \theta' d\theta'$$

Считая, что потери энергии малы:  $d\Phi = d\Phi'$  и из теоремы Лагранжа-Гельмгольца  $ny\theta = n'y'\theta'$ . Тогда

$$B'(\theta') = \left(\frac{n'}{n}\right)^2 B(\theta)$$

Откуда при равенстве показателей преломления по обе стороны от оптич. системы получаем сохранение яркости Q.E.D.

## 4 Волновое уравнение. Монохроматические волны. Уравнение Гельмгольца. Комплексная амплитуда. Волновой вектор, фазовая скорость. Плоские и сферические волны.

### 4.1 Волновое уравнение

Сначала запишем уравнения максвелла и материальные уравнения:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} E &= -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}, & \operatorname{div} D &= 0 \\ \operatorname{rot} H &= \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t}, & \operatorname{div} B &= 0 \\ D &= \varepsilon E & H &= \mu B\end{aligned}$$

Откуда получаем, что

$$\nabla^2 E = \frac{\varepsilon \mu}{c} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

что является волновым уравнением.

### 4.2 Монохроматические волны

Монохроматическая волна — строго гармоническая (синусоидальная) волна с постоянными во времени частотой, амплитудой и начальной фазой. Её уравнение:

$$\nabla^2 \Psi = \frac{\varepsilon \mu}{c} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

Частное решение уравнения:

$$\Psi = u e^{-i\omega t} \quad \Psi = u e^{i\omega t}$$

где  $\omega$  — частота волны.

### 4.3 Уравнение Гельмгольца.

Если поле меняется по периодическому закону, то волновое переходит в уравнение Гельмгольца:

$$(\Delta + k^2)E = 0$$



#### 4.4 Комплексная амплитуда

В трехмере уравнение плоской волны будет иметь вид

$$E(r,t) = E_1 \exp[i(kr - \omega t + \varphi_0)]$$

где  $E_0 = E_1 \exp(i\varphi_0)$  будет являться комплексной амплитудой.

#### 4.5 Волновой вектор

Вектор  $k$  называется волновым,  $k = 2\pi/\lambda$ . Он направлен вдоль распространения волны.

#### 4.6 Фазовая скорость

Точки с фиксированной фазой движутся со скоростью

$$v = \omega/k = c/n$$

#### 4.7 Плоские и сферические волны

Плоские и сферические волны являются решениями уравнения максвелла. Уравнение плоской волны было выше, сферическая — то же самое, но поделить на  $r$ .

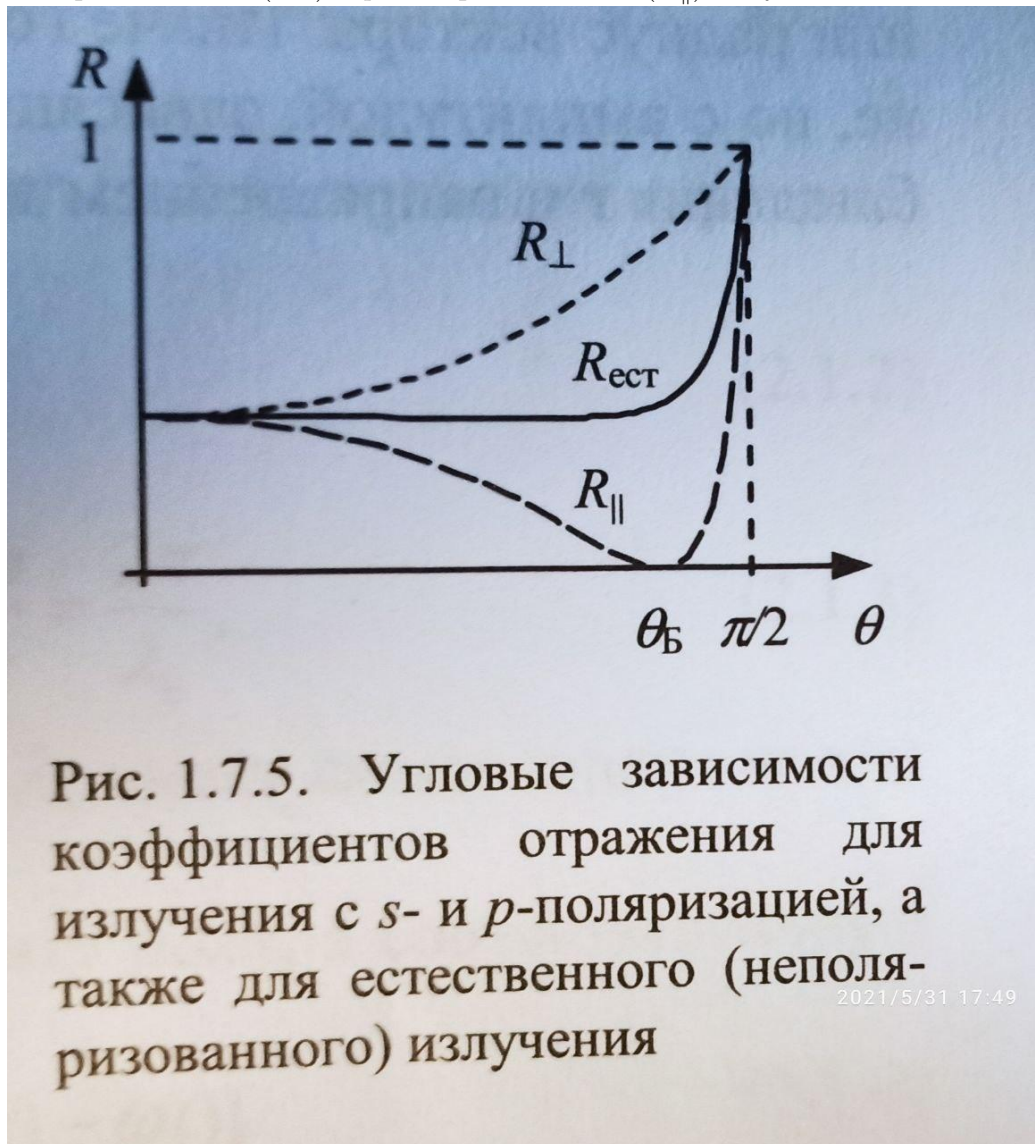
### 5 Электромагнитные волны на границе раздела двух диэлектриков. Зависимость коэффициентов отражения от угла падения (качественно). Явление Брюстера.

#### 5.1 Электромагнитные волны на границе раздела двух диэлектриков.

На границе мы можем выделить 2 коэффициента: отражения и пропускания  $r$  и  $t$ . Ну и там дальше душная френелевская хуйня.

## 5.2 Зависимость коэффициентов отражения от угла падения (качественно). Явление Брюстера.

На рисунке показана зависимость коэффициента отражения  $R(\theta)$  для  $s$ -поляризованного ( $R_{\perp}$ ) и  $p$ -поляризованного ( $R_{\parallel}$ ) излучения.



В случае  $p$ -поляризованной волны существует такой угол  $\theta = \theta_B$ , называемый углом Брюстера, что волна падающая под этим углом на поверхность не отражается обратно. Полагая в формулах Френеля  $r_{\parallel}(\theta) = 0$ , этот угол будет

$$\operatorname{tg} \theta_B = n_2/n_1$$

При падении под углом Брюстера отражённая волна становится полностью  $s$ -поляризованной.

## 6 Дисперсия волн. Волновой пакет, групповая скорость. Формула Рэлея.

### 6.1 Дисперсия волн

Зависимость фазовой скорости ( $U_{\text{ф}} = \omega/k$ ) от длины волны называется дисперсией.

### 6.2 Волновой пакет, групповая скорость

пишем, что  $u_i = a \sin(k_1 x - \omega_1 t)$  складываем синусы, радуемся. получаем, что

$$u = 2a \cos \left[ \frac{\Delta k}{2} \left( x - \frac{d\omega}{dk} t \right) \right] \sin(kx - \omega t)$$

для двух волн, отсюда получаем, что биения движутся со скоростью  $v_{\text{гр}} = d\omega/dk$ .

Волновым пакетом называется набор волн для  $k$  в диапазоне  $\Delta k/2$  влево и вправо.

### 6.3 Формула Рэлея

$$v_{\text{гр}} = v_{\text{ф}} - \lambda \frac{dv_{\text{ф}}}{d\lambda}$$
$$v_{\text{гр}} = \frac{c}{n} \left( 1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right)$$

## 7 Классическая теория дисперсии света. Аномальная дисперсия. Поглощение света. Дисперсия в плазме и металлах

### 7.1 Классическая теория дисперсии света.