

Домашнее задание по вычислительной математике

Илья Михеев

last upd 26 сентября 2021 г.

1 Погрешности вычислений

I.6.4

У нас есть 2 ряда:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

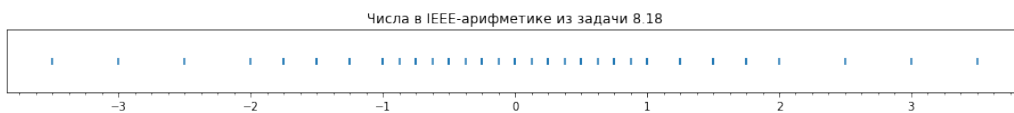
$$\ln(1+x) = m \ln 2 - 2 \left(y + \frac{y^3}{3} + \dots + \frac{y^{2k-1}}{2k-1} + \dots \right)$$

где $1+x = 2^m z$ и $z \in [0,5; 1]$, а $y = \frac{1-z}{1+z}$

Второй ряд имеет преимущества и недостатки. Во-первых: в таком случае у нас $y \in [0; \frac{1}{3}]$, таким образом, каким бы большим у нас не было число x , мы можем претендовать на необходимую погрешность, отбрасывая гораздо меньшее количество членов (Замечу, что в 1ом ряду у нас напротив при больших x всё плохо с погрешностью). Но, сразу же нужно заметить, что при $y \rightarrow 0$ становится тяжелее вычислить члены этого ряда, что затрудняет оценку точности (в таком случае у нас $1+x \rightarrow 2^m$). Особенно будет заметно преимущество первого ряда при $x \rightarrow -0$, где погрешность у второго будет легче вычисляться за счет существования квадратного члена при малых x . Погрешность в рядах тейлора всегда будет не более последнего отбрасываемого члена (из теории)

I.8.18

а)



В данной модели удалось представить 23 числа.

б)

$$\varepsilon_{\text{маш}} = 0,125$$

забавная ситуация, что слева от единицы следующее число располагается на расстоянии 0,125, а справа — 0,25. На всякий случай взял 0,25, так как в методичке было равенство $1 + \varepsilon_{\text{маш}}$.

$$\text{OFL} = 3,5$$

$$\text{UFL} = 0,125$$

I.8.5

Найти погрешность по производной для функции $u = \sqrt{t}$, если заданы точка приближения $t^* = 4$, значение функции u^* в этой точке и погрешность $\Delta t^* = 0,1$.

$$\Delta u(t^*) = \sup_{|t-t^*| < 0,1} |u'(t)| |\Delta t^*|$$

$$\Delta u(t^*) = \frac{\Delta t^*}{2\sqrt{t^* - \Delta t^*}} \approx 0,0253$$

I.8.28

$$\left| \frac{-11f_0 + 18f_1 - 9f_2 + 2f_3}{6h} - f'(x_0) \right| \leq \left| \frac{Mh^3}{4} \right|$$

где $|f^{IV}(\xi)| \leq M$, h — шаг. То есть у формулы третий порядок аппроксимации. предположим, что $|\varepsilon_{\text{маш}}| \leq E$, тогда

$$r_2 = \frac{(11 + 18 + 9 + 2)E}{6h} = \frac{20E}{3h}$$

$$r = r_1 + r_2 = \frac{Mh^3}{4} + \frac{20E}{3h}$$

$$h_{\text{опт}} = \sqrt[4]{\frac{80E}{9M}}$$

$$r^* = \sqrt[4]{\left(\frac{80}{9}E\right)^3 \cdot M}$$

где $h_{\text{опт}}$ — оптимальный шаг численного дифференцирования, а r^* — максимальная точность.

I.9.2

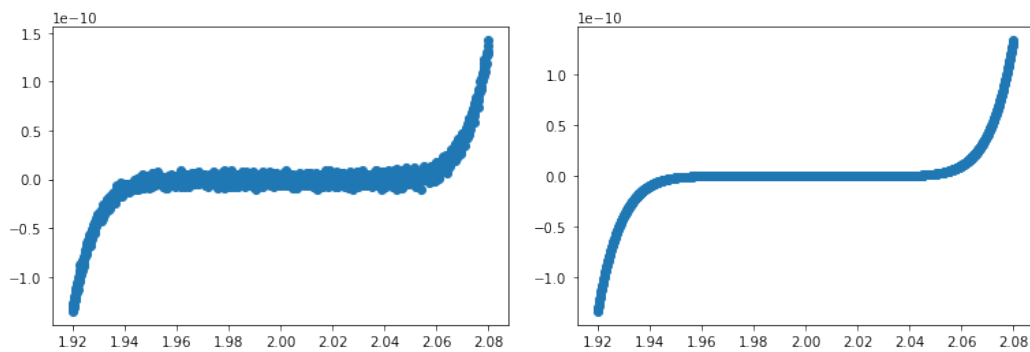


График слева демонстрирует подсчет Горнером, метод справа — вычислением функции в точке. Горнер плох для вычисления нуля, потому что идет много операций (сложения, умножения) на величинах, порядка ε , из-за чего резко теряется точность вычисления значения, что не дает определить нуль функции. (В отличие от вычисления напрямую, где нам дается нуль с большой точностью)

2 Прикладная линейная алгебра

II.7.7

Доказать, что для вектора $x = (x_1, x_2)$ и $h > 0$ выражение $\|x\|_h = \max(|x_1|, |x_2 - x_1|/h)$ является нормой. Найти матричную норму, подчиненную этой векторной норме.

Проверим 3 аксиомы норм.

1. $\|x\|_h = 0 \leftrightarrow x = 0$ Очевидно,