Домашнее задание по оптике

Илья Михеев

last upd 15 апреля 2021 г.

1 Геометрическая оптика

1.15

$$\sin \alpha_{\text{кр}} = \frac{n_2}{n_1} \tag{1}$$

По световоду пойдут лучи, ограниченные лучом, испытывающем на его стенке полное внутреннее отражение. На торце световода $\sin \alpha = n \sin \beta$. Из (1) условие полного внутреннего отражения: $\sin(90° - \beta) = 1/n$. Отсюда $2\alpha = 2 \arcsin(n^2 - 1)^{1/2}$. Так будет пока $n^2 < 2$, т.е. пока $\sin \alpha < 1$. Для больших значений n угловая апертура будет уже $2\alpha = \pi$.

T1

а)

У близорукого человека будет зрение определяться соотношением:

$$\frac{1}{L_d} + \frac{1}{b_0} = D_{\text{бл}}$$

Требуется, чтобы было:

$$\frac{1}{\infty} + \frac{1}{b_0} = D_{\text{ид}}.$$

Таким образом требуемая сила очков будет равна:

$$\Delta D = -\frac{1}{L_d} = -2\text{дптр}$$

б)

У дальнозоркого человека оптимальное зрение определится соотношением:

$$\frac{1}{L_b} + \frac{1}{b_0} = D_{\text{дал}}$$

Требуется, чтобы было:

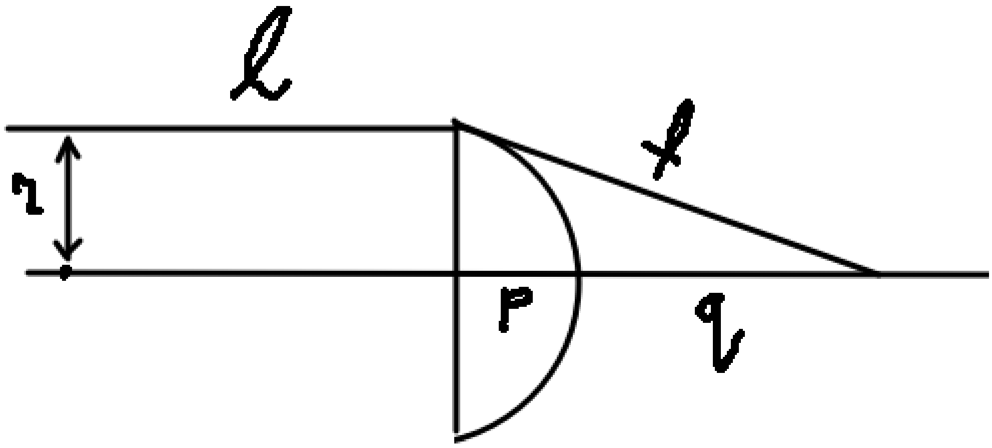
$$\frac{1}{L_0} + \frac{1}{b_0} = D_{\text{необ}}.$$

Таким образом требуемая сила очков будет равна:

$$\Delta D = \frac{1}{L_0} - \frac{1}{L_b} = 3\text{дптр}$$

T2

Геометрически выходит гипербола, доказываем.



Так как длина оптических путей должна совпадать, то запишем равенство

$$l + f = l + np + q$$

Таким образом, приходим к равенству

$$np + q = \sqrt{(p+q)^2 + r^2}$$

$$(n^2 - 1)p^2 + 2pq(n-1) = r^2$$

Что сводится к уравнению гиперболы в координатах (p,r)

1.57

Яркость изображения в данном случае — это освещённость получаемого изображения. Обозначая освещённость от Луны на поверхности Земли за E_0, для освещённости в глазу (без телескопа) получаем ,$B = E_0 \pi d_з^2/(4S_0)$, где S_0 — площадь изображения в глазу. Для увеличения в телескопе имеем

$$\Gamma = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{f_2}{f_1} = \frac{D}{d}$$

Отношение площадей изображения в глазу $S/S_0 = (D/d)^2$.
Диаметр потока, выходящего из телескопа $d = D/\Gamma$ оказывается меньше диаметра зрачка лишь при $\Gamma = 50$.
Пока диаметр больше — яркость та же (случаи 1 и 2). При $\Gamma = 50$ поток (а следовательно и яркость) уменьшается в 4 раза.

2 Формулы Френеля. Поляризация. Поток энергии и давление света

2.1

Ну давайте докажем, сначала разберем случай для $\mathbf{E}$, лежащего в плоскости падения.

$$1 - R_{\parallel} = T_{\parallel} \cos\psi / \cos\varphi,\ 1 + R_{\parallel} = nT_{\parallel}$$

$$1 - R_{\perp} = T_{\perp} \cos\psi / \cos\varphi,\ 1 + R_{\perp} = nT_{\perp}$$

Далее выводим, что

$$1 - R_{\parallel}^2 = T_{\parallel}^2 n \cos\psi / \cos\varphi$$

$$1 - R_{\perp}^2 = T_{\perp}^2 n \cos\psi / \cos\varphi$$

Для потоков энергии, в случае равенства потока энергии падающей волны потокам энергии отраженной и преломлённой волн имеем

$$\cos\varphi E_{e\parallel}^2 = \cos\varphi E_{r\parallel}^2 + \cos\psi E_{d\parallel}^2$$

Вводя амплитудные коэффициенты отражения и преломления находим

$$1 = R_{\parallel}^2 + T_{\parallel}^2 n \cos\psi / \cos\varphi$$

Получили из формул Френеля.
В случае нормального падения волны ($\varphi = \psi = 0$) находим

$$1 - R_{\parallel} = T_{\parallel},\ 1 + R_{\parallel} = nT_{\parallel},\ 1 + R_{\perp} = T_{\perp},\ 1 - R_{\perp} = nT_{\perp}$$

Отсюда получаем

$$R_\perp = -R_\parallel,\ T_\perp = T_\parallel$$

ЧТД.

2.20

$$T_\parallel = 2\sin\psi\cos\varphi / \left[\sin(\varphi+\psi)\cos(\varphi-\psi)\right] \tag{2}$$

$$T_\perp = 2\sin\psi\cos\varphi / \sin(\varphi+\psi) \tag{3}$$

$$\Delta = (I_\perp - I_\parallel)/(I_\perp + I_\parallel) \tag{4}$$

Используем (2) и (3) на верхней границе, на нижней — то же самое, но переставим φ и ψ. Из 4, учитывая, что падает естественный свет получим

$$\Delta = \left[\cos^4(\varphi-\psi) - 1\right] / \left[\cos^4(\varphi-\psi) + 1\right]$$

По заданным в условии величинам находим: $-0{,}015;\ -0{,}091;\ -0{,}176;\ -0{,}402$

2.27

$E_\parallel = E_\perp$, $\delta = \frac{\pi}{2}$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\delta}{2}\right) = \frac{1-n^2}{2n} = 1$$

Откуда $n = 0{,}414$, т.е. $n_1 = 2{,}41$ при $n_2 = 1$.

3 Дисперсия

10.21

$$n^2 = \varepsilon = 1 - 4\pi N(e^2/m)/\omega^2 = 1 - \omega_p^2/\omega^2 = 1 - \nu_p^2/\nu^2 \tag{5}$$

$$u = c^2/v = cn \tag{6}$$

Из (5) и (6) получаем

$$u = c(1 - \omega_p^2/\omega^2)^{1/2}$$

для показателя преломления близком к единице находим

$$u \approx c\left[1 - Ne^2/(2\pi m\nu^2)\right]$$

Для разницы времён прихода импульсов получаем

$$\Delta t = L(1/u_1 - 1/u_2) \approx LNe^2/(2\pi mc\nu_1^2)$$

Отсюда $L = 2\pi cm\nu_1^2\Delta t/(Ne^2) \approx 6{,}67\cdot 10^{20}$ см ≈ 700 св. лет.

10.24

Частота ультрафиолета $\omega = E/\hbar = 5 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-12}/(1{,}054 \cdot 10^{-27}) \approx 8 \cdot 10^{15} c^{-1}$. Граница прозрачности определяется из (5) при $n = 0$, откуда

$$N = m\omega/(4\pi e^2) = 2 \cdot 10^{22}\text{см}^{-3}$$

Число атомов серебра в единице объема

$$N_{Ag} = \rho N_A / A$$

Получаем $N_{Ag} = 6 \cdot 10^{22}\text{см}^{-3}$

10.35

Показатель преломления определяется соотношением

$$n = \sqrt{1 + 4\pi\alpha N}$$

где α — поляризуемость молекул газа (в гауссовской системе), а N — их концентрация. Принимая во внимание, что

$$N(h) = \frac{P_0}{kT} \exp\left(-\frac{mg_B h}{kT}\right)$$

где P_0/kT — концентрация молекул при $h = 0$, получим

$$n = \sqrt{1 + 4\pi\alpha \frac{P_0}{kT} \exp\left(-\frac{mg_B h}{kT}\right)} \approx 1 + 2\pi\alpha \frac{P_0}{kT}\left(1 - \frac{mg_B h}{kT}\right)$$

Радиус кривизны луча, пущенного горизонтального вблизи поверхности планеты, есть

$$r \approx -\frac{(kT)^2}{2\pi\alpha P_0 m g_B}$$

$$n - 1 \approx (n_0 - 1)\left[1 - mgh/(kT)\right]$$

Т.к. $(n-1) << 1$

$$r = -kT\left[(n_0 - 1)mg\right]$$

Для Земли $n_0 = 1{,}0003$ откуда $r \approx -2{,}9 \cdot 10^4$Км. Так как радиус Земли равен $6{,}4 \cdot 10^3$Км и $n_0 - 1 \sim p_0$, для круговой рефракции давление (и плотность) в атмосфере Земли должны быть увеличены в 4,5 раза.

4 Интерференция монохроматических волн

3.16

$$m\lambda = \Delta + \lambda/2 = 2h(n^2 - \sin^2\varphi)^{1/2} + \lambda/2 \tag{7}$$

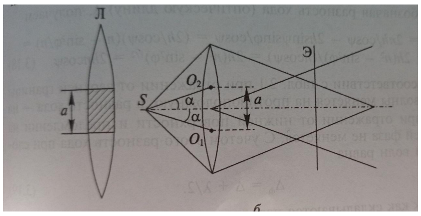
Получаем для угла между поверхностями пластинки α из (7)

$$\alpha = (h_{m+1} - h_m)/\Delta y = \lambda/\left[2\Delta y(n^2 - \sin^2\varphi)^{1/2}\right] \tag{8}$$

Найдем угол α при $n = 1{,}5$, $\Delta y = 5$мм и $\lambda = 5800$ Å

$$\alpha = \lambda/(2n\Delta y) \approx 8''$$

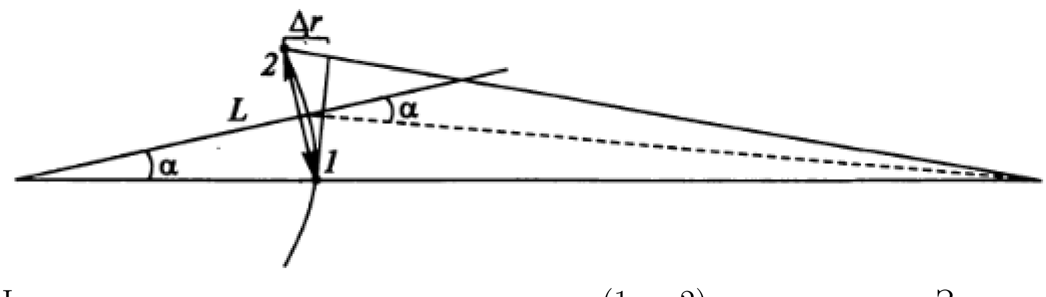
3.11



$$\alpha = \frac{a}{f}$$

$$a = \frac{\lambda f}{\Delta y} = 0{,}6\text{мм}$$

3.20



На рисунке показано положение антенн (1 и 2) при повороте Земли на угол α. Разность хода сигнала до антенн при малом угле α равна

$\Delta r = L\sin\alpha$. Так как напряжение на контуре пропорционально квадратному корню из интенсивности, то т.к. $I = 2I_0\left[1+\cos(k\Delta r)\right]$, то

$$U = U_0\left[\cos(k\Delta r/2)\right] = U_0\left[\cos(\pi L\sin\alpha/\lambda)\right] = U_0\cos\omega t$$

При малых α имеем $\sin\alpha \approx \alpha = \omega_з t$. Таким образом период изменения амплитуды напряжения

$$T = 2\pi/\omega = \lambda T_з/(\pi L) = 2{,}3\text{мин}$$

3.35

Частота лазера меняется по линейному закону $\omega = \omega_0(1+at)$. Заменим частоту на длину волны ($\omega = 2\pi c/\lambda$), получаем $1/\lambda - 1/\lambda_0 = at/\lambda_0$. Умножая это на L и учитывая, что L/λ за период $t = T = 1/\nu$ меняется на единицу находим

$$\nu = \frac{La}{\lambda_0} = 100\text{кГц}.$$

5 Немонохроматический свет, временная когерентность. Пространственная когерентность

4.9

Показатель преломления воздуха n растет с увеличением плотности, которая пропорциональна давлению. При малых изменениях можно считать в данном случае для кювет длиной l что $(n-1)l = a\Delta p$, где a — постоянная величина. Используя $I = 2I_0\left[1+\cos(k\Delta r)\right]$, получаем

$$I = 2I_0(1+\cos\left[k(n-1)l\right])$$

Подставляя $k = \omega/c$ и интегрируя по спектру находим

$$I = 2(I_0/\Delta\omega)\int_{\omega_1}^{\omega_2}\left[1+\cos(\omega a\Delta p/c)\right]d\omega$$

$$I = 2I_0\left(1+\left[2c/(\Delta\omega a\Delta p)\right]\cos\left[(\omega_1+\omega_2)a\Delta p/(2c)\right]\sin\left[\Delta\omega a\Delta p/(2c)\right]\right)$$

Обозначив $(\omega_1+\omega_2)/2 = \omega$ получаем условие первого минимума $\omega a \Delta p_1/c = \pi$. Картина исчезает, когда аргумент синуса становится равным $\pi = \Delta\omega a \Delta p_2/(2c)$. Исключая a, находим

$$\Delta p_2 = \Delta p_1 2\omega/\Delta\omega = 200\text{мм рт. ст.}$$

5.13

Для максимального порядка интерфернционных полос при $\varphi = 0$ получаем $m_{max} = (2hn - \lambda/2)/\lambda = 1000$. Для минимального порядка при $\varphi = 90^\circ$ находим $m_{min} = \left[2h(n^2-1)^{1/2} - \lambda/2\right]/\lambda = 714$. Допустимую немонохроматичность оцениваем как $\Delta\lambda = \lambda/m_{max} \approx 0{,}56$нм. Так как зрительная труба установлена на бесконечность, картина наблюдается как бы на бесконечности, поэтому источник может быть любого размера и в любом положении.

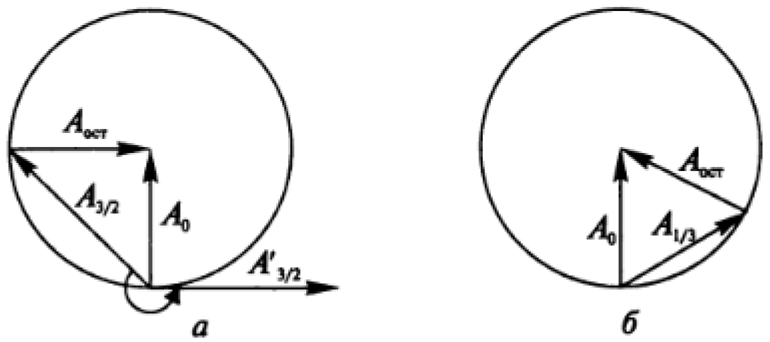
5.13

$$D\sin\theta = m\lambda \tag{9}$$

Так как плоскость наблюдения находится в зоне Фраунгофера, полуширина первого максимума определяется (9), а интенсивность следующего составляет менее 4% от первого, то наблюдения возможны только в пределах области на экране $2L\lambda/b$, где L — растояние от щелей до экрана. Для монохроматического источника в схеме Юнга из $\Delta y = \lambda/(2\alpha)$ получаем ширину полос $\Delta y = \lambda L/l$ и число $N = 2l/b = 40$, поскольку это число совпадает с наблюдаемым числом N_1, немонохроматичность ещё не уменьшает число полосб т.е. $m_{max} = \lambda/\Delta\lambda \geq 40/2$. При уменьшении b в 5 раз число полос в отсутствии немонохроматичности должно возрасти в 5 раз. Но этого не наблюдается. И, следовательно, ограничение связано с немонохроматичностью, т.е. $m_{max} = \lambda/\Delta\lambda = 80/2 = 40$. Откуда $\Delta\lambda = \lambda/40 = 12{,}5$нм.

6 Дифракция Френеля

6.16



На векторной диаграмме показаны амплитуды волн: в остутствие диска A_0, от полутора зон Френеля $A_{3/2}$, от зон вне диска $A_{\text{ост.}}$. Показатель преломления увеличивает фазу волны на $(2\pi/\lambda)(n-1)h$. Максимум амплитуды в точке наблюдения будет, когда зона поворота $A_{3/2} = (5/4)\pi + 2\pi m$, где $m \in \mathbb{Z}^+$ (и 0), откуда $h = (2m + 5/4)(\lambda/2)(n-1)$.

7 Дифракция Фраунгофера

8 Спектральные приборы