Билеты по Электричеству и Магнетизму

Илья Михеев

27 декабря 2020 г.

Часть I
Электростатика

1 Электрические заряды и электрическое поле. Закон сохранения заряда, элементарный заряд. Напряжённость электрического поля. Закон Кулона. Гауссова система единиц (СГС) и система СИ. Принцип суперпозиции. Электрическое поле диполя.

1.1 Электрические заряды

мера взаимодействия заряженного тела с полем.

1.2 Электрическое поле

область пространства, где действуют электрические силы.

1.3 Закон Сохранения Заряда

экспериментальный факт, что сумма зарядов — сохраняющаяся величина.

1.4 Элементарный заряд

в природе заряд дискретен, его минимальная порция — треть от
$e = 4{,}803 \cdot 10^{-10}$ед.СГСЭ

1.5 Напряженность электрического поля

называется сила, действующая на ед. точечный заряд. Опытным путем установили, что если поместить точечный заряд q в поле, то величина силы F, поделенная на величину заряда не зависит от этой величины.

1.6 Закон Кулона

Экспериментально установлено, что заряды одного знака отталкиваются, а разных — притягиваются.

$$\mathbf{F} = \frac{Qq}{r^3}\mathbf{r} \tag{1}$$

1.7 Гауссова система единиц (СГС) и система СИ

СГС - сантиметр, грамм, секунда, считаем разряд безразмерным. СИ — имеем константу $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 * 10^9$, заряд измеряем в кулонах.

1.8 Принцип суперпозиции

$\sum_{i=1}^{n} E_i = const$ экспериментальный факт.

1.9 Электрическое поле диполя

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_- + \mathbf{E}_+ = -\left[l_x\frac{\partial}{\partial x} + l_y\frac{\partial}{\partial y} + l_z\frac{\partial}{\partial z}\right]\mathbf{E_0}(\mathbf{r}) \equiv -(\mathbf{l}\nabla)\mathbf{E_0} = \frac{3(\mathbf{pr})\mathbf{r} - \mathbf{p}r^2)}{r^5} \tag{2}$$

2 Теорема Гаусса для электрического поля в вакууме в интегральной и дифференциальной фор-мах. Её применение для нахождения электростатических полей.

2.1 Теорема Гаусса для электрического поля в вакууме в интегральной и дифференциальной формах.

$$\Phi = \oint\limits_S \mathbf{E} d\mathbf{S} \tag{3}$$

$$div\mathbf{E} = 4\pi\rho \tag{4}$$

2.2 Доказательство Теоремы Гаусса

2.2.1 Точечный заряд q внутри сферы радиусом r

Начало кооров в центр, после $d\mathbf{S}||\mathbf{r}$. Из того, что $\mathbf{E} = q\mathbf{r}/r^3$ элементарный поток равен

$$d\Phi = \mathbf{E}d\mathbf{S} = \frac{q}{r^2}dS \tag{5}$$

откуда весь поток:

$$\Phi = \frac{q}{r^2}S = \frac{q}{r^2}4\pi r^2 = 4\pi q \tag{6}$$

2.2.2 Поверхность несферическая

$$d\Phi = \mathbf{E}d\mathbf{S} = \frac{q}{r^3}\mathbf{r}d\mathbf{S} = \frac{q}{r^2}dS_{||} \tag{7}$$

далее аналогично верхнему, тк. $dS_{||}$ это буквально часть сферы ну и про телесный угол сказать не забыть.

2.2.3 Заряд вне замкнутой поверхности

сказать, что там 2 раза протыкает заряд поверхность телесным углом (одним) с разными знаками и поэтому ноль.

2.2.4 Заряд конченый и система зарядов

Если заряд в конченой штуке — все будет ок, верим. В системе зарядов говорим про суперпозицию, пока не умрем.

2.3 Применения

Поле равномерно заряженной плоскости:

$$\Phi = 2EdS = 4\pi\sigma dS \Rightarrow E = 2\pi\sigma \tag{8}$$

3 Потенциальный характер электростатического поля. Теорема о циркуляции электростатического поля. Потенциал и разность потенциалов. Связь напряжённости поля с градиентом потенциала. Граничные условия для вектора E.

3.1 Потенциальный характер электростатического поля

$$A_{12} = \int\limits_{(1)}^{(2)} q\mathbf{E}(\mathbf{r})d\mathbf{r} = qQ\int\limits_{(1)}^{(2)} \frac{\mathbf{r}d\mathbf{r}}{r^3} = qQ(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}) \tag{9}$$

Данная шняга зависит онли от нач и кон точки $Rightarrow$ поле консервативно у точечного заряда, ну и в силу суперпозиции у их системы. Таким образом вводим потенциальную энергию заряда q в этом поле: работа сил поля на пути $1 \to 2$ равна убыли потенциальной энергии заряда.

3.2 Теорема о циркуляции электростатического поля

Из того, что поле потенциально очевидна теорема:

$$\oint\limits_L \mathbf{E}d\mathbf{r} = 0 \tag{10}$$

Это кстати является циркуляцией вектора **E** в интергральной форме, дифф форма теоремы:

$$rot\mathbf{E} = 0 \tag{11}$$

3.3 Потенциал и разность потенциалов

Разностью потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ называют работу сил по перемещению заряда из точки 1 в точку 2. Часто за начало отсчета берут бесконечность, а сам потенциал в таком случае имеют ввиду, как функцию от $\mathbf{r}$

3.4 Связь напряжённости поля с градиентом потенциала

$$\varphi(\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = -d\varphi = \mathbf{E}(\mathbf{r})d\mathbf{r} \tag{12}$$

откуда $E = -\nabla\varphi$.

3.5 Граничные условия для вектора E

1. Очевидно из теоремы о циркуляции, что $E_{1\tau} = E_{2\tau}$. 2. Накрываем поверхность параллелепипедом и пишем:

$$\oint_S \mathbf{E}d\mathbf{S} = 4\pi q \Rightarrow E_{1n} - E_{2n} = 4\pi\sigma \tag{13}$$

4 Уравнения Пуассона и Лапласа. Проводники в электрическом поле. Граничные условия на поверхности проводника. Единственность решения электростатической задачи. Метод изображений. Изображение точечного заряда в проводящих плоскости и сфере

4.1 Уравнения Пуассона и Лапласа

Поскольку

$$\mathbf{E} = -grad\varphi, div\mathbf{E} = 4\pi\rho \tag{14}$$

то отсюда выведем *уравнение Пуассона* для потенциала поля:

$$divgrad\varphi = -4\pi\rho \tag{15}$$

или $\Delta\varphi = -4\pi\rho$ где введен лапласиан. Если $\rho = 0$, то получаем обычное уравнение Лапласа:

$$\Delta\varphi = 0 \tag{16}$$

4.2 Теорема о единственности решения

в обоих уравнениях для единственности добавляем граничное условие: в лапласе это:

$$\varphi(\mathbf{r} \in \Gamma) = 0$$

в Пуассоне:

$$\varphi(\mathbf{r} \in \Gamma) = f(\mathbf{r})$$

4.2.1 Лаплас

Говорим, что $\varphi = 0$ — решение, теперь предположим, что есть еще, у другой функции есть место, где она не равна нулю, а во всей остальной окрестности равна. Тогда у этой функции очев будет экстремум $\Rightarrow$ сумма вторых производных будет ненулевая ЧТД.

4.2.2 Пуассон

Предполагаем 2 решения, потом говорим, что есть функция, равная их разности, которая удовлетворяет уравнению Лапласа, но т.к. там решение только 0, то изначальные решения равны.

4.3 Проводники в электрическом поле

Вещества, обладающие малым сопротивлением, в них имеются свободные заряды (элетроны), которые могут перемещаться под воздействием любых полей. В объеме проводника поле — ноль (тк элста), откуда выходит, что все заряды на поверхности.

4.4 Граничные условия на поверхности проводника

Применяем в лоб теорему Гаусса и знание, что поле ноль — получаем: $E_n = 4\pi\sigma$ и $E_\tau = 0$. Таким образом поле проводника — Ёжик.

4.5 Метод Изображений

Пусть у нас есть 2 группы зарядов и эквипотенциальная поверхность, по теореме о ед. мы можем сказать, что поле в области первой группы задается однозначно или этой поверхностью, или второй группой зарядов вместе с первой.

4.6 Изображение точечного заряда в проводящих плоскости и сфере

4.6.1 Плоскость

$$q' = -q$$

4.6.2 Сфера

Если сфера заземлена, то заменяем ее на заряд $q' = -qR/d$ на расстоянии $b = R^2/d$ от центра.
Если сфера несет заряд q_0, то к заряду q', который расположен на том же расстоянии от центра, добавляем заряд

$$q'' = q_0 + q\frac{R}{d}$$

в центр сферы.

5 Электрическое поле в веществе. Поляризация диэлектриков. Свободные и связанные заряды. Вектор поляризации и вектор электрической индукции. Поляризуемость частиц среды. Диэлектрическая проницаемость среды. Теорема Гаусса в диэлектриках. Граничные условия на границе двух диэлектриков.

5.1 Электрическое поле в веществе. Свободные и связанные заряды

Кроме свободных зарядов есть еще *связанные (поляризационные)*, которые мало смещаются от своего положения равновесия под воздействием вн. сил, да еще и потом обратно возвращаются.
Диэлектриками называют вещество с малым количеством свободных зарядов. Они еще ток плохо проводят.

5.2 Вектор поляризации и вектор электрической индукции

Поляризация — это перераспределение связанных зарядов, приводящее к появлению объемного дипольного момента среды. *Вектором поляризации* $\mathbf{P}$ называют дипольный момент единицы объема. Вектором электрической индукции называют вектор $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$, нужен он для лучшего счета, о нем позже.

5.3 Поляризуемость частиц среды. Диэлектрическая проницаемость среды

Про то, что при слабых полях

$$\mathbf{P} = \alpha\mathbf{E}$$

откуда можно найти, что

$$\mathbf{D} = (1 + 4\pi\alpha)\mathbf{E} = \varepsilon\mathbf{E}$$

обычно $\alpha > 0$.

5.4 Теорема Гаусса в диэлектриках

Представим косоугольный параллелепипед (попробуем хотя бы...), его объем $V = Slcos\theta = \mathbf{Sl}$

Если на его краях расположены заряды плотностью σ, то дипольный момент фигуры $\mathbf{p} = (\sigma S)\mathbf{l}$, тогда $\mathbf{P} = \mathbf{p}/V$ найдем его нормальную компоненту:

$$P_n = \frac{\mathbf{PS}}{S} = \sigma \tag{17}$$

Рассмотрим неоднородную поляризацию, для нее:

$$q_{\text{пол.}} = -\oint\limits_S \mathbf{P}d\mathbf{S} \tag{18}$$

откуда мгновенно получаем для вектора D:

$$\oint\limits_S \mathbf{D}d\mathbf{S} = 4\pi q_{\text{своб}} \tag{19}$$

и его дифф форму

$$\text{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho \tag{20}$$

5.5 Граничные условия

Применяя всё то же самое получаем $D_{1n} - D_{2n} = 4\pi\sigma$ и $E_{1\tau} - E_{2\tau} = 0$

6 Электрическая ёмкость. Конденсаторы. Вычисление ёмкостей плоского, сферического и цилиндрического конденсаторов. Энергия электрического поля и её локализация в пространстве.Объёмная плотность энергии. Взаимная энергия зарядов. Энергия в системе заряженных проводников

6.1 Электрическая ёмкость

Так вышло, что для проводника величина q/φ не зависит от заряда и характеризует сам проводник. Соответственно полагают, что $C = q/\varphi$, где C — ёмкость проводника.

6.2 Конденсаторы

Систему из 2 проводников (заряженных) назовем конденсатором, если на одном будет заряд q, а на другом $-q$ и разность потенциалов между ними будет $\Delta\varphi$, то $C = q/\Delta\varphi$.

6.3 Вычисление ёмкостей плоского, сферического и цилиндрического конденсаторов

6.3.1 Плоский

$E = 4\pi\sigma/\varepsilon$ по $2\pi\sigma/\varepsilon$ от каждой пластины, тогда $\Delta\varphi = Ed$ откуда

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{\varepsilon S}{4\pi d} \tag{21}$$

6.3.2 Сферический

Между его обкладками (внутри $+q$) возникает разность потенциалов

$$\Delta\varphi = \frac{q}{\varepsilon R_1} - \frac{q}{\varepsilon R_2}$$

откуда

$$C = \frac{\varepsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

6.3.3 Цилиндрический

Поле между обкладками находим из теоремы Гаусса: $D = 2q/rl$, откуда

$$E = \frac{2q}{\varepsilon r l}$$

откуда, интегрируя от b до a (внут и внеш радиусы) находим

$$\varphi_+ - \varphi_- = \frac{2q}{\varepsilon l} \ln \frac{b}{a}$$

откуда находим

$$C = \frac{\varepsilon l}{2 \ln \frac{b}{a}} \tag{22}$$

6.4 Энергия электрического поля и её локализация в пространстве

Переносчиком взаимодействия зарядов является электрическое поле, так что оно является носителем энергии.

6.5 Объемная плотность энергии

$$\delta U = \int \delta\rho(\mathbf{r}) \cdot \varphi(\mathbf{r}) dV$$

из теоремы Гаусса:

$$\delta\rho = \frac{1}{4\pi} \mathrm{div}\delta\mathbf{D}$$

$$\delta U = \frac{1}{4\pi} \int \varphi \mathrm{div}\delta\mathbf{D} dV = \frac{1}{4\pi} \int \left[\mathrm{div}(\varphi\delta\mathbf{D}) - \delta\mathbf{D} \cdot \mathrm{grad}\varphi\right] dV$$

первое слагаемое обращается в нуль при применении теоремы Остроградского-Гаусса тк на большом расстоянии поле обращается в нуль. Во втором слагаемом учтем, что $E = -\mathrm{grad}\varphi$, тогда

$$\delta U = \int \frac{\mathbf{E}\delta\mathbf{D}}{4\pi} dV$$

в котором всё норм при линейной зависимости. То есть при $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$

$$u = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}$$

6.6 Взаимная энергия зарядов

$$U_{\text{вз}} = \sum_{i,k i<k} \frac{q_i q_k}{r_{ik}} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i$$

6.7 Энергия в системе заряженных проводников

Говорим, что допустим система из 2 зарядов создает с помощью собственных полей 2 собственные энергии, а еще одну взаимную (раскрываем скобочку)

$$U_{\text{вз}} = \int \frac{\mathbf{E_1 E_2}}{4\pi} dV$$

эта энергия может быть и отрицательной.

7 Энергия электрического поля в веществе. Энергия диполя во внешнем поле (жесткий и упругий диполи). Силы, действующие на диполь в неоднородном электрическом поле. Энергетиче-ский метод вычисления сил (метод виртуальных перемещений), вычисление сил при постоянных зарядах и при постоянных потенциалах

7.1 Энергия электрического поля в веществе

Энергия электрического поля в веществе складывается из 2 компонент: электрической и деформации, энергия деформации молекул в объеме

$$u_{\text{деф}} = \frac{\mathbf{PE}}{2}$$

складывая ее с энергией поля получим

$$u = u_{\text{эл}} + u_{\text{деф}} = \frac{\mathbf{ED}}{8\pi}$$

7.2 Энергия диполя во внешнем поле (жесткий и упругий диполи)

7.2.1 Жесткий диполь

на диполь действует момент сил

$$M = pE\sin\theta$$

он стремится уменьшить угол θ откуда

$$A = pE(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

выбрав в качестве начала отсчета прямой угол тета получим:

$$U = -\mathbf{PE} \tag{23}$$