

Билеты по Матану, прости Господи

Илья Михеев

last upd 2 января 2021 г.

Часть I

Свёртки и приближение функций бесконечно гладкими

1 Свёртка функций и её ассоциативность. Дифференцирование свёртки

1.1 Определение

Свёрткой функции $h(x)$ назовем такой интеграл:

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t) dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)g(x-t) dt \quad (1)$$

или $h = f * g$.

1.2 Немного о существовании интеграла

Theorem 1. Если функции f и g имеют конечные интегралы, то $f * g$ определена почти всюду и выполняется неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f * g| dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f| dx \cdot \int_{\mathbb{R}^n} |g| dx \quad (2)$$

и равенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} f * g dx = \int_{\mathbb{R}^n} f dx \cdot \int_{\mathbb{R}^n} g dx \quad (3)$$

Доказательство. Функция $f(y)g(x)$ измерима по Лебегу и интеграл ее модуля равен произведению интегралов модулей f и g по теореме Фубини. Тогда выражение

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |f(x-t)g(t)| dt dx \quad (4)$$

также равно произведению модулей f и g , так как различается от $|f(y)g(x)|$ линейной заменой с ед. детерминантом. Отсюда можно понять, что интегралы в неравенстве

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t) dt \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t)g(t)| dt \quad (5)$$

определены почти для всех x и требуемое неравенство получается из интегрирования по x . Последнее равенство получается из теоремы Фубини линейной заменой $x-t=y$. \square

1.3 Ассоциативность

Theorem 2. *Свёртка ассоциативна, то есть:*

$$f * (g * h) = (f * g) * h \quad (6)$$

Доказательство.

$$f * (g * h) = f * \int_{\mathbb{R}^n} g(x-t)h(t) dt = f * k = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-u) \int_{\mathbb{R}^n} g(u-v)h(v) dv du \quad (7)$$

$$(f * g) * h = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t) dt * h = k * h = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-u-v)g(v)h(u) dv du \quad (8)$$

Становится понятно, что первое равно второму после замены $s = u+v$ во втором равенстве. Также надо в верхнем переставить второй интеграл в начало (имеем право). Ну сами попробуйте короче. \square

1.4 Дифференцирование свёртки

Theorem 3. *Если в свёртке функция g интегрируема с конечным интегралом, а f ограничена, также как и ее частная производная $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. Тогда можем дифференцировать под знаком интеграла (по теореме из 2ого сема, которая имеет буквально те условия, что описаны выше)*

$$\frac{\partial (f * g)}{\partial x_i} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f(x-t)}{\partial x_i} g(t) dt = \frac{\partial f}{\partial x_i} * g \quad (9)$$

Доказательство. Следует из теоремы, доказанной ранее (прошлый семестр), не уверен, что ее требуется передоказывать. \square

2 Бесконечно гладкие функции с компактным носителем, примеры

Давайте для начала посмотрим на некоторую бесконечно гладкую функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ e^{-1/x}, & x > 0. \end{cases} \quad (10)$$

Она бесконечно дифференцируема везде, кроме мб точки 0. Всякая производная справа от нуля у функции имеет вид $P(1/x)e^{(-1/x)}$, где P — многочлен. Отсюда следует, что предел ее производной в нуле справа равен нулю. Также имеет место (Лопиталь)

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \frac{f^{(n+1)}(x)}{1} = 0 \quad (11)$$

Поэтому функция f бесконечно дифференцируема (бесконечно гладкая) на всей прямой. Тогда введем функцию $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = f(x+1)f(x-1) \quad (12)$$

Которая будет бесконечно гладкой на всей прямой и будет отлична от нуля только на интервале $(-1, 1)$, на котором она будет положительна.

Lemma 4. Для всякого $\varepsilon > 0$ существует бесконечно гладкая функция $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$, отличная от нуля только в $U_\varepsilon(0)$ и такая, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x) dx = 1 \quad (13)$$

Для всяких $\varepsilon > \delta > 0$ существует бесконечно гладкая функция $\psi_{\varepsilon, \delta} : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$, отличная от нуля только в $U_\varepsilon(0)$ тождественно равная 1 в $U_\delta(0)$.

Доказательство. В первом случае пойдет функция вида

$$\varphi_\varepsilon(x_1, \dots, x_n) = A \varphi\left(\frac{\sqrt{n}x_1}{\varepsilon}\right) \dots \varphi\left(\frac{\sqrt{n}x_n}{\varepsilon}\right) \quad (14)$$

для уже известной функции φ и некоторой константы A . Способ построения функции указывает, что в пределе одного аргумента функция ненулевая при $|x_i| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$. \square

Во втором случае сначала рассмотрим функцию одной переменной

$$\psi(x) = B \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt, \quad (15)$$

Где константу выбираем так, чтобы $\psi(x) \equiv 0$ при $x \leq -1$ и $\psi(x) \equiv 1$ при $x \geq 1$. Тогда достаточно положить

$$\psi_{\varepsilon, \delta}(x) = \psi \left(\frac{\delta + \varepsilon - |x|}{\varepsilon - \delta} \right) \quad (16)$$

Такая вот прикольная псевдо-ступенька.

3 Приближение функций в \mathbb{R}^n (вместе с производными) бесконечно гладкими функциями

3.1 Простое приближение

Theorem 5. Пусть $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — неотрицательная бесконечно гладкая функция, отличная от нуля только при $|x| \leq 1$ и пусть $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1$. Положим

$$\varphi_k(x) = k^n \varphi(kx), \quad (17)$$

эти функции тоже имеют единичные интегралы и φ_k отлична от нуля только при $|x| \leq 1/k$. (Попробуйте эту лабуду представить сначала без k^n , а потом поймите зачем k^n нужно). Теперь для непрерывной $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ определим свёртки

$$f_k(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t) \varphi_k(t) dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \varphi_k(x-t) dt \quad (18)$$

Функции f_k бесконечно дифференцируемые и $f_k \rightarrow f$ равномерно на компактных подмножествах \mathbb{R}^n .

Доказательство. Выпишем разность

$$f_k(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-t) - f(x)) \varphi_k(t) dt \quad (19)$$

Пусть f равномерно непрерывна в δ окрестности компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ и пусть $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ при $|x - y| < \delta$ в этой окрестности. Выберем k

настолько большим, чтобы $1/k < \delta$. Тогда в интеграле $\varphi_k(t)$ отлична от нуля только при $|t| < \delta$, и тогда $|f(x-t) - f(x)| < \varepsilon$, при $x \in K$. Тогда при $x \in K$ верна оценка

$$|f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x) dx = \varepsilon \quad (20)$$

Это показывает равномерную сходимость на компактах. Дифференцируемость можно доказать, используя дифференцирование интеграла

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(t) \varphi_k(x-t) dt. \quad (21)$$

по параметру по той же теореме из прошлого сема. Производная при $x \in K$ будет зависеть только от значения f в $1/k$ -окрестности K , то есть f можно считать интегрируемой при дифференцировании по параметру, что позволяет применить теорему. \square

Theorem 6. *В условиях предыдущей теоремы, если исходная функция f имеет непрерывные производные до m -го порядка, то производные f_k до m -го порядка равномерно на компактах сходятся к соответствующим производным f .*

Доказательство. Давайте дифференцировать $f * \varphi_k$ по нескольким x_i точно также, как описано выше. Тогда получится

$$\frac{\partial^m (f * \varphi_k)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}} = \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}} * \varphi_k \quad (22)$$

Таким образом, последовательность производных свёртки является последовательностью свёрток производной f с теми же функциями φ_k . А значит для этой последовательности тоже имеет место верна равномерная сходимость к производной f . \square

3.2 Лебег!

Theorem 7. *Пусть функция $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ имеет конечный интеграл Лебега. Тогда свёртки $f * \varphi_k$ сколь угодно близко приближают f в среднем.*

Доказательство. Возьмём $\varepsilon > 0$ и представим по теореме из 2ого сема (о приближении ступенчатой в среднем)

$$f = g + h \quad (23)$$

где g — элементарно ступенчатая и

$$\int_{\mathbb{R}^n} |h(x)| dx < \varepsilon \quad (24)$$

Тогда по теореме 1

$$\int_{\mathbb{R}^n} |h * \varphi_k| dx < \varepsilon \quad (25)$$

Что значит, что если будет так, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g - g * \varphi_k| dx < \varepsilon \quad (26)$$

То будет выполняться

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f - f * \varphi_k| dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |h(x)| dx + \int_{\mathbb{R}^n} |h * \varphi_k| dx + \int_{\mathbb{R}^n} |g - g * \varphi_k| dx < 3\varepsilon \quad (27)$$

Таким образом, достаточно доказать утверждение для элементарно ступенчатой g . Раскладывая g в сумму характеристических функций параллелепипеда с некоторыми коэффициентами, можно видеть, что достаточно доказать утверждение для одной характеристической функции параллелепипеда χ_P . Но разность $\chi_P - \chi_P * \varphi_k$ будет отлична от нуля только в $1/k$ -окрестности ∂P и будет там по модулю не более 1, то есть после интегрирования модуля разности мы получим не более $\mu(U_{1/k}(\partial P))$. Прямым вычислением можно убедиться, что эта мера стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$ \square

Если говорить проще, то мы смотрим на одну ступеньку и говорим, что ее характеристическая функция отлично приближается свертками. Причем мера точности приближения будет обратно пропорциональна $k \rightarrow \infty$ по кайфу.

Часть II

Дифференцируемые отображения и криволинейные системы координат

4 Дифференцируемые отображения и производная композиции отображений

4.1 Дифференцируемые отображения

Definition 4.1 (Дифференцируемое отображение). Отображение $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, где $U \subset \mathbb{R}^n$ и открытое, называется дифференцируемым, если представимо как

$$f(x) = f(x_0) + Df_{x_0}(x - x_0) + o(|x - x_0|) \quad (28)$$

при $x \rightarrow x_0$

где $Df_{x_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ — линейное отображение, называемое производной в точке $x_0 \in U$.

[Непрерывно дифференцируемое отображение]

Definition 4.2. $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ называется Непрерывно дифференцируемым, если $\forall x_0 \in U \exists Df_{x_0}$, которое непрерывно и непрерывно зависит от $x_0 \in U$.

Вот эта вот D де-факто — матрица $m \times n$, в которой каждая ячейка выглядит как $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$, и для проверки последнего определения достаточно проверить все эти ячейки на непрерывность.

4.2 Норма матрицы

Докажем существование "нормы" у матриц линейных отображений:

Lemma 8. \forall линейного $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \exists \|A\| \in \mathbb{R}$ т.ч. $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$|Ax| \leq \|A\| \cdot |x| \quad (29)$$

Доказательство. Ax непрерывно зависит от x . Рассмотрим $n-1$ -мерную сферу $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$

S^{n-1} компактно $\rightarrow |Ax|$ достигает максимума на S^{n-1} .

Пусть $\max_{|x|=1} |Ax| = \|A\| \in \mathbb{R}$.

$|Ax| \leq \|A\| \cdot |x|$ верно при $|x| = 1$. При $x = 0$ всё так же очевидно, при $y = tx$ всё будет очевидно после вынесение t за скобки везде. \square

4.3 Производная композиции

Theorem 9. Пусть у нас есть $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ и $g : V \rightarrow \mathbb{R}^k$, где $U \in \mathbb{R}^n$, а $V \in \mathbb{R}^m$. Обозначим также $f(x_0) = y_0 \in V$, $x_0 \in U$

Пусть также f дифференцируема в x_0 и g дифференцируема в y_0 . Тогда $g \circ f$ дифференцируемо в x_0 и $D(g \circ f)_{x_0} = Dg_{y_0} \circ Df_{x_0}$

Доказательство. Обозначим $A = Df_{x_0}$ и $B = Dg_{y_0}$. Тогда

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(|x - x_0|)$$

$$g(y) = g(y_0) + B(y - y_0) + o(|y - y_0|)$$

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + B(A(x - x_0) + o(|x - x_0|)) + o(|A(x - x_0)| + o(|x - x_0|)) \quad (30)$$

это же выражение равно

$$g(f(x)) = g \circ f(x_0) + B \cdot A(x - x_0) + Bo(|x - x_0|) + o(A|x - x_0|) \quad (31)$$

которое используя тот факт, что $Co(x) = o(Cx) = o(x)$ преобразовывается как:

$$g(f(x)) = g \circ f(x_0) + B \cdot A(x - x_0) + o(|x - x_0|) \quad (32)$$

\square