Домашнее задание по оптике: часть вторая

Илья Михеев

last upd 25 мая 2021 г.

1 Дифракция на синусоидальных решётках. Элементы фурье-оптики.

9.11

$\tau(x) = \frac{1}{2}(1 + \sin \Omega x)$, $\frac{2\pi}{d} = \Omega$ — было.
$A_1 = A_0 e^{i(-\Omega x)}$, $k \sin \alpha = \Omega$ — стало.
$A_2 = A_0 e^{i\Omega x}$.

$$S_1 = Ae^{i\Omega x}(\frac{1}{2} + \frac{e^{i\Omega x} - e^{-i\Omega x}}{4i})$$

$$S_1 = \frac{1}{2}Ae^{i\Omega x} + \frac{A}{4}e^{i2\Omega x - \frac{\pi i}{2}} + \frac{A}{4}e^{\frac{\pi i}{2}}$$

$$S_2 = \frac{1}{2}Ae^{-i\Omega x} + \frac{A}{4}e^{\frac{\pi i}{2} - i2\Omega x} + \frac{A}{4}e^{\frac{-\pi i}{2}}$$

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{2}Ae^{i\Omega x} + \frac{1}{2}Ae^{-i\Omega x} + \frac{A}{4}e^{i2\Omega x - \frac{\pi i}{2}} + \frac{A}{4}e^{\frac{\pi i}{2} - i2\Omega x}$$

u	A	φ
Ω	$\frac{A}{2}$	0
$-\Omega$	$\frac{A}{2}$	0
2Ω	$\frac{A}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$
-2Ω	$\frac{A}{4}$	$\frac{\pi}{2}$

9.17

$$\tau(x) = e^{im \cos \Omega x}$$

$$E(x) = E_0 \tau(x) \approx E_0(1 + im \cos \Omega x) = E_0(1 + \frac{im}{2}e^{i\Omega x} - \frac{im}{2}e^{-i\Omega x})$$

После пластинки

$$E = iE_0(1 + \frac{m}{2}e^{i\Omega x} - \frac{m}{2}e^{-i\Omega x})$$

$$I = E_0^2(1 + \frac{m^2}{4} + \frac{m^2}{4} + \frac{m^2}{4}e^{2i\Omega x} + \frac{m^2}{4}e^{-2i\Omega x} + me^{i\Omega x} + me^{i\Omega x}) \approx E_0^2(1 + 2m \cos \Omega x)$$

При задержке в $3\pi/2$

$$E = iE_0(-1 + \frac{m}{2}e^{i\Omega x} - \frac{m}{2}e^{-i\Omega x})$$

$$I = E_0^2(1 - 2m \cos \Omega x)$$

При коэф. поглощения k_n:

$$I = E_0^2 k_n^2 (k_n + 2m\cos\Omega x) = E_0^2 (1 - \frac{2m\cos\Omega x}{k_n})$$

9.28

$$\tau_1(x) = \frac{1+\cos\Omega x}{2}$$
$$\tau_2(x) = e^{im\cos\Omega x}$$

Вплотную:

$$E = E_0\tau_1\tau_2 = E_0 2(\frac{1+\cos\Omega x}{2}\cdot e^{im\cos\Omega x}) = E_0\frac{1+\cos\Omega x}{2}(1+m\cos\Omega x) =$$

$$= \frac{E_0}{2} + \frac{E_0}{2} im\cos^2\Omega x + \frac{E_0}{2}(\cos\Omega x + im\cos\Omega x) =$$

$$= \frac{E_0}{2} + E_0 im\frac{\cos 2\Omega x + 1}{2} + \frac{E_0}{4}(e^{i\Omega x} + e^{-i\Omega x} + me^{-i\Omega x + \frac{\pi i}{2}} + me^{i\Omega x + \frac{\pi i}{2}})$$

$E_{+1} = E_{-1}$ и $I_{-1} = I_{+1}$

$$E_0\frac{1+\cos(\Omega x - \frac{\pi}{2})}{2}(1 + im\cos\Omega x)$$

$$E_{-1} = \frac{E_0}{4}(e^{i\Omega x - \frac{\pi i}{2}} + ime^{i\Omega x}) = \frac{E_0}{4}(1 + me^{-i(\Omega x - \frac{\pi}{2})})$$

$$\frac{E_1}{E_{-1}} = \frac{1-m}{1+m};\ \frac{I_1}{I_{-1}} = \frac{(1-m)^2}{(1+m)^2} \approx 1-4m$$

9.79

$$E(x) = \sum_m A_m e^{ik_{x_m}x}$$

$$k_{x_m} = k\sin\theta_m; \qquad \sin\theta_m = \frac{md}{F};$$

а также

$$k_{z_m} = \sqrt{k^2 - k_{x_m}^2} = k - \frac{k}{2}\sin^2\theta_m = k - \frac{k}{2}\frac{m^2 d^2}{F^2}$$

при $z = 0$ все волны должны прийти в фазе

$$E(x,z) = \sum_m A_m e^{ik_{x_m}x} e^{ik_{z_m}z}$$

$$z_0 \frac{k}{2} \frac{m^2 d^2}{F^2} = 2\pi n$$

$$z_0 = \frac{2\lambda F^2}{d^2} = 1 \text{ м}$$

2 Голография

9.33

$$E = \frac{A}{\tau} e^{ikz} + E_0 e^{ikz}$$

$$\tau = \sqrt{L^2 + x^2 + y^2} \approx L + \frac{x^2 + y^2}{2L}$$

Обозначим $a = \frac{A}{\tau}$

$$E(x,y) = E_0 + ae^{ikL + ik\frac{x^2+y^2}{2L}}$$

$$I(x,y) = (E_0 + ae^{ikL + ik\frac{x^2+y^2}{2L}})(E_0 + ae^{ikL + ik\frac{x^2+y^2}{2L}})$$

$$T(x,y) = ET_0(1 + m\cos(k\frac{x^2+y^2}{2L}))$$

$$E_{out} = E_0 T_0 + \frac{E_0 m}{2}(e^{ik\frac{x^2+y^2}{2L}} + e^{-ik\frac{x^2+y^2}{2L}})$$

теперь восст. под углом θ:

$$E(x,y) = ae^{ikz} + E_0 e^{ikz + ik\sin\theta_x}$$

$$E(x,y) = e^{ikz}(a + E_0 e^{i(k\sin\theta_x - kz)})$$

$$T(x,y) = T_0 + 2T_0 m\cos(k\sin\theta_x - kz)$$

$$k\sin\theta_x - k\frac{x^2+y^2}{2L} - kL = const$$

$$(x - L\sin\theta)^2 + y^2 = c$$

При восст.

$$\rho_{min} = \frac{1}{n} \qquad \Delta x < \rho_{min}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda}\frac{x_n^2}{2L} = 2\pi n$$
$$2x_n \Delta x_n = 2\lambda L$$
$$x_n = \frac{\lambda L}{\Delta x_n} = \rho_{min}$$
$$b_{min} = \frac{1}{n} \qquad D = a_{min} = L\lambda n = \frac{L\lambda}{\rho_{min}}$$

9.36

Допускаемая немонохроматичность: $\Delta_{max} \leq \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$.

$$\Delta_{max} = \sqrt{L^2 - r^2} - L \approx \frac{r^2}{2L}$$

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{r^2} 2L$$

если излуч. под углом θ, то изображение смещается на

$$\Delta x = L \sin\theta$$

$$\Delta x = L \sin\alpha \approx L\alpha$$
$$b_{min} = \frac{\lambda}{D} L = \alpha L = 10 \text{ мкм}$$
$$\alpha = \frac{\lambda}{2r}$$
$$\Delta\lambda = 8\alpha^2 L = 80 \text{ нм}$$

9.40

Из 9.52 $N = \frac{n}{\lambda_z} = 5$ слоёв.

9.78

$$E = E_1 e^{ikR_1 + ik\frac{x^2}{2R_1}} + E_2 e^{ikR_2 + ik\frac{x^2}{2R_2}} = e^{ikR_1 + \frac{ikx^2}{2R_1}} (E_1 + E_2 e^{ik(R_2 - R_1)}) + ik\frac{x^2}{2}(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1})$$

$$T \sim 1 + m\cos(k(R_2 - R_1) + \frac{kx^2}{2}(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}))$$

на вход 3 волны, два изображения действительные, одно мнимое.

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = 180 \text{ см}$$

3 Поляризация света. Элементы кристаллооптики

11.13

Линейная и по кругу поляризации света не когерентны $\to$ интенсивности складываются. В положении I_{max}

$$I = I_л = \frac{I_к}{2}$$

$$E = E_0 \cos\omega t \cos\varphi + E_0 \sin\omega t \sin\varphi$$

$$E = E_0 \cos(\omega t - \varphi)$$

$I = EE^* = \frac{E_0^2}{2} = \frac{I_к}{2}$ не зависит от φ.
При повороте на $30°$:

$$I = \frac{I_к}{2} + I_л \cos^2 30°$$

$$0{,}8 = \frac{\frac{3}{4}I_л + \frac{1}{2}I_к}{I_л + \frac{1}{2}} \to \frac{I_к}{I_л} = \frac{1}{2}$$

11.60

1. На выходе должен быть неполяризованный свет $\to E_x = E_y$.

2. Чтобы свет был неполяризованным, разность хода должна оказаться больше длины когерентности.

$$l = d(n_0 - n_e) > c\tau = c\frac{1}{\Delta\nu} = \frac{c}{\nu}\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$$

$$d > \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda(n_0 - n_e)} \approx 1 \text{ мм}$$

11.80

Условия резонанса: $m\lambda = 2dn$

$$m_1 = \frac{2n_e d}{\lambda} = 2589 \text{ выполнено условие резонанса}$$

$$m_0 = \frac{2n_0 d}{\lambda} = 2537{,}7 \text{ обыкновенная не проходит}$$

$$I = \frac{I_0}{2}$$

11.121

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_0)l = 2\pi B l E^2$$

$$\Delta\varphi = 2\pi B l (\frac{U}{d})^2 = 14{,}9^\circ$$

$$\text{Сначала:} \qquad \begin{pmatrix} E_0 \sin\omega t \\ E_0 \cos\omega t \end{pmatrix}$$

$$\text{После поляризации:} \qquad \frac{E_0}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \cos\omega t \end{pmatrix}$$

$$\frac{E_0}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \cos\omega t \end{pmatrix} \overset{\text{кювета}}{\rightarrow} \frac{E_0}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \cos(\omega t + \Delta\varphi) \end{pmatrix}$$

После поляризации $\qquad E_{out} = E_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\omega t + \cos(\omega t + \Delta\varphi)) = E_0 \cos(\omega t + \frac{\Delta\varphi}{2}) \cos\frac{\Delta\varphi}{2}$

$$I \sim \frac{1}{2}E_0^2 \cos^2(\frac{\Delta\varphi}{2}) \approx 0{,}492 I_0$$

4 Рассеяние света. Элементы нелинейной оптики

11.88

Условия резонанса: $2nd = m\lambda$.

$$2d(n_0 + n_2E^2) = m\lambda$$

$$E^2 = \frac{m\lambda - 2dn_0}{2dn_2}$$

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E} \times \vec{H}$$

$$p = \frac{c\varepsilon E^2}{4\pi}(1-\rho) = \frac{cn_0^2}{4\pi}(1-\rho)(\frac{m\lambda - 2dn_0}{2dn_2}) = 10^{15}\frac{\text{эрг}}{\text{см}^2 \cdot \text{с}}$$

$$m_0 = \frac{2dn_0}{\lambda} = 79{,}92 \text{ ближаешее целое — } 80.$$

11.90

Фокусировка возможна, если ум диам пучка больше дифф расх.

$$\frac{R}{f} > \frac{\lambda}{2R}$$

$$L = dn_2 + d(n_0 + n_2E^2) = d(n_0 + n_2E^2e^{-\frac{2r^2}{R^2}}) = d(n_0 + n_2E_0^2(1 - \frac{2r^2}{R^2}))$$

$$L \approx A - \frac{2dn_2E_0^2r^2}{R^2}$$

$$\frac{2dn_2E_0^2r^2}{R^2} = \frac{r^2}{2F} \text{ сфер. волна в приближении}$$

$$F = \frac{R^2}{4dn_2E_0^2}$$

$$\frac{R \cdot 4dn_2E_0^2}{R} > \frac{\lambda}{2R}$$

$$E_0^2 > \frac{\lambda}{8dn_2}$$

Мощность излучнения: $N = < S > \pi R^2 = \frac{c}{4\pi}\frac{E_0^2}{2}\pi R^2 = \frac{cR^2\lambda}{64dn_2} = 0{,}4{\cdot}10^{15}\frac{\text{эрг}}{\text{с}}$

11.128

$$I_0 e^{-\alpha_1^{-4} x_1} = I_0 e^{-\alpha_2^{-4} x_2}$$

$$x_1 + x_2 = L$$

$$\frac{x_1}{\lambda_1^4} = \frac{L - x_1}{\lambda_2^4} \qquad x = \frac{L}{1 + (\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^4} \approx 452 \text{ м}$$

T7

При комнатной температуре невозможно обеспечить фазовый синхронизм, т. к. даже при $\theta = 90°$, $n_e(2\omega) = n_0(\omega)$ при $T \simeq 80°C$ с пов-ти показатель преломления для $n_0(\omega)$ и $n_e(2\omega)$ кас. друг друга при $\theta = 90°$.

$$J_{2\omega} \sim \left(\frac{\sin \frac{\Delta k z}{2}}{\frac{\Delta k z}{2}} \right)^2 z^2 \qquad \Delta k = k_2 - 2k_1 = \frac{2\omega}{c}(n(2\omega) - n(\omega))$$

$$J_{2\omega} = 0 \text{ при } \frac{\Delta k z}{2} = \pi = \frac{4\pi}{\lambda}(n_e(2\omega) - n_0(\omega))$$

$$\frac{4}{\lambda}\left(\frac{dn_0}{dT} - \frac{dn_e}{dT}\right) \Delta T \frac{l}{2} = 1 \Rightarrow \Delta T = \frac{\lambda}{2L(\frac{dn_0}{dT} - \frac{dn_e}{dT})} = 1{,}54°$$