Домашнее задание по вычислительной математике

Илья Михеев

last upd 6 октября 2021 г.

1 Погрешности вычислений

I.6.4

У нас есть 2 ряда:

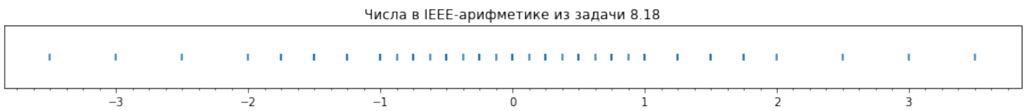
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}$$

$$\ln(1+x) = m\ln 2 - 2\left(y + \frac{y^3}{3} + \dots + \frac{y^{2k-1}}{2k-1} + \dots\right)$$

где $1+x = 2^m z$ и $z \in [0{,}5; 1]$, а $y = \frac{1-z}{1+z}$
Второй ряд имеет преимущества и недостатки. Во-первых: в таком случае у нас $y \in \left[0; \frac{1}{3}\right]$, таким образом, каким бы большим у нас не было число x, мы можем претендовать на необходимую погрешность, отбрасывая гораздо меньшее количество членов (Замечу, что в 1ом ряду у нас при$|x| > 1$ ряд расходится, т.к. радиус сходимости ряда — 1, но при остальных x ряд сходится). Но, сразу же нужно заметить, что при $y \to 0$ становится тяжелее вычислить члены этого ряда, что затрудняет оценку точности (в таком случае у нас $1 + x \to 2^m$). Особенно будет заметно преимущество первого ряда при $x \to -0$, где погрешность у второго будет легче вычисляться за счет существования квадратного члена при малых x. Погрешность в рядах тейлора всегда будет не более последнего отбрасываемого члена (из теории)

I.8.18

а)



В данной модели удалось представить 32 числа.
б)

$$\varepsilon_{\text{маш}} = 0{,}125$$

$$\text{OFL} = 3{,}5$$

$$\text{UFL} = 0{,}125$$

I.8.5

Найти погрешность по производной для функции $u = \sqrt{t}$, если заданы точка приближения $t^* = 4$, значение функции u^* в этой точке и погрешность $\Delta t^* = 0{,}1$.

$$\Delta u(t^*) = \sup_{|t-t^*|<0{,}1} |u'(t)||\Delta t^*|$$

$$\Delta u(t^*) = \frac{\Delta t^*}{2\sqrt{t^* - \Delta t^*}} \approx 0{,}0253$$

I.8.28

$$\left|\frac{-11f_0 + 18f_1 - 9f_2 + 2f_3}{6h} - f'(x_0)\right| \leq \left|\frac{Mh^3}{4}\right|$$

где $|f^{IV}(\xi)| \leq M$, h — шаг. То есть у формулы третий порядок аппроксимации. предположим, что $|\varepsilon_{\text{маш}}| \leq E$, тогда

$$r_2 = \frac{(11 + 18 + 9 + 2)E}{6h} = \frac{20E}{3h}$$

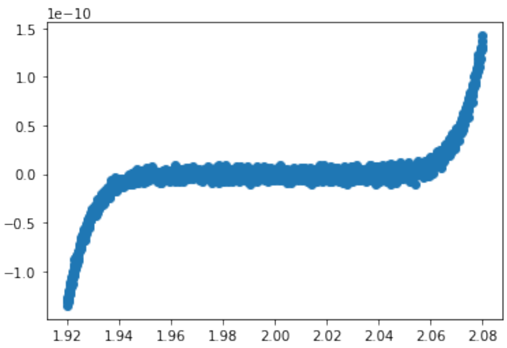
$$r = r_1 + r_2 = \frac{Mh^3}{4} + \frac{20E}{3h}$$

$$h_{\text{опт}} = \sqrt[4]{\frac{80E}{9M}}$$

$$r^* = \sqrt[4]{\left(\frac{80}{9}E\right)^3 \cdot M}$$

где $h_{\text{опт}}$ — оптимальный шаг численного дифференцирования, а r^* — максимальная точность.

I.9.2



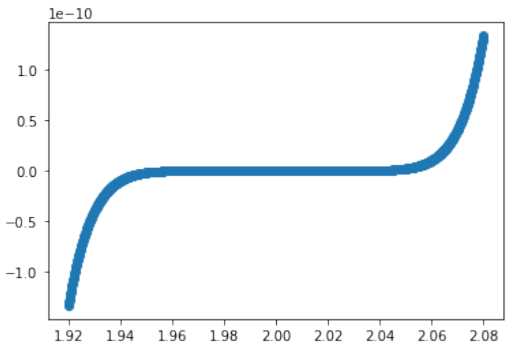


График слева демонстрирует подсчет Горнером, метод справа — вычислением функции в точке. Горнер плох для вычисления нуля, потому что идет много операций (сложения, умножения) на величинах, порядка ε, из-за чего резко теряется точность вычисления значения, что не дает определить нуль функции. (В отличии от вычисления напрямую, где нам дается нуль с большой точностью). Схема Горнера даёт выигрыш в сравнении с простым вычислением многочлена по его коэффициентам тем, что в ней достигнут минимум операций сложения и умножения, из-за чего они дают соответственно меньший вклад в погрешность на околоэпсилонных значениях.

2 Прикладная линейная алгебра

II.7.7

Доказать, что для вектора $x = (x_1{,}x_2)$ и $h > 0$ выражение $||x||_h = max(|x_1|, |x_2–x_1|/h)$ является нормой. Найти матричную норму, подчиненную этой векторной норме.
Проверим 3 аксиомы норм.
1. $||x||_h = 0 \leftrightarrow x = 0$ Очевидно,