Билеты по Матану, прости Господи

Илья Михеев

last upd 5 января 2021 г.

Часть I
Свёртки и приближение функций бесконено гладкими

1 Свёртка функций и её асоциативность. Дифференцирование свёртки

1.1 Определение

Свёрткой функции $h(x)$ назовем такой интеграл:

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)g(x-t)\,dt \tag{1}$$

или $h = f * g$.

1.2 Немного о существовании интеграла

Theorem 1. *Если функции f и g имеют конечные интегралы, то $f * g$ определена почти всюду и выполняется неравенство*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f * g|\,dx \le \int_{\mathbb{R}^n} |f|\,dx \cdot \int_{\mathbb{R}^n} |g|\,dx \tag{2}$$

и равенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} f * g\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f\,dx \cdot \int_{\mathbb{R}^n} g\,dx \tag{3}$$

Доказательство. Функция $f(y)g(x)$ измерима по Лебегу и интеграл ее модуля равен произведению интегралов модулей f и g по теореме Фубини. Тогда выражение

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |f(x-t)g(t)\, dt dx \tag{4}$$

также равно произведению модулей f и g, так как различается от $|f(y)g(x)|$ линейной заменой с ед. детерминантом. Отсюда можно понять, что интегралы в неравенстве

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t)\, dt \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t)g(t)|\, dt \tag{5}$$

определены почти для всех x и требуемое неравенство получается из интегрирования по x. Последнее равенство получается из теоремы Фубини линейной заменой $x - t = y$. □

1.3 Ассоциативность

Theorem 2. *Свёртка ассоциативна, то есть:*

$$f * (g * h) = (f * g) * h \tag{6}$$

Доказательство.

$$f*(g*h) = f*\int_{\mathbb{R}^n} g(x-t)h(t)\, dt = f*k = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-u) \int_{\mathbb{R}^n} g(u-v)h(v)\, dv\, du \tag{7}$$

$$(f*g)*h = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t)\, dt*h = k*h = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-u-v)g(v)h(u)\, dv\, du \tag{8}$$

Становится понятно, что первое равно второму после замены $s = u+v$ во втором равенстве. Также надо в верхнем переставить второй интеграл в начало (имеем право). Ну сами попробуйте короче. □

1.4 Дифференцирование свёртки

Theorem 3. *Если в свёртке функция g интегрируема с конечным интегралом, а f ограничена, также как и ее частная производная $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. Тогда можем дифференцировать под знаком интеграла (по теореме из 2ого сема, которая имеет буквально те условия, что описаны выше)*

$$\frac{\partial (f * g)}{\partial x_i} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f(x-t)}{\partial x_i} g(t)\, dt = \frac{\partial f}{\partial x_i} * g \tag{9}$$

Доказательство. Следует из теоремы, доказанной ранее (прошлый семестр), не уверен, что ее требуется передоказывать. □

2 Бесконечно гладкие функции с компактным носителем, примеры

Давайте для начала посмотрим на некоторую бесконечно гладкую функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ e^{-1/x}, & x > 0. \end{cases} \tag{10}$$

Она бесконечно дифференцируема везде, кроме мб точки 0. Всякая производная справа от нуля у функции имеет вид $P(1/x)e^(- 1/x)$, где P — многочлен. Отсюда следует, что предел ее производной в нуле справа равен нулю. Также имеет место (Лопиталь)

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \frac{f^{(n+1)}(x)}{1} = 0 \tag{11}$$

Поэтому функция f бесконечно дифференцируема (бесконечно гладкая) на всей прямой. Тогда введем функцию $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = f(x+1)f(x-1) \tag{12}$$

Которая будет бесконечно гладкой на всей прямой и будет отлична от нуля только на интервале $(-1, 1)$, на котором она будет положительна.

Lemma 4. *Для всякого $\varepsilon > 0$ существует бесконечно гладкая функция $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, отличная от нуля только в $U_\varepsilon(0)$ и такая, что*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x)\, dx = 1 \tag{13}$$

Для всяких $\varepsilon > \delta > 0$ существует бесконечно гладкая функция $\psi_{\varepsilon,\delta} : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$, отличная от нуля только в $U_\varepsilon(0)$ тождественно равная 1 в $U_\delta(0)$.

Доказательство. В первом случае пойдет функция вида

$$\varphi_\varepsilon(x_1, \dots, x_n) = A\varphi(\frac{\sqrt{n}x_1}{\varepsilon}) \dots \varphi(\frac{\sqrt{n}x_n}{\varepsilon}) \tag{14}$$

для уже известной функции φ и некоторой константы A. Способ построения функции указывает, что в пределе одного аргумента функция ненулевая при $|x_i| \le \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$. □

Во втором случае сначала рассмотрим функцию одной переменной

$$\psi(x) = B \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(t)\, dt, \tag{15}$$

Где константу выбираем так, чтобы $\psi(x) \equiv 0$ при $x \leq -1$ и $\psi(x) \equiv 1$ при $x \geq 1$. Тогда достаточно положить

$$\psi_{\varepsilon,\delta}(x) = \psi\left(\frac{\delta + \varepsilon - |x|}{\varepsilon - \delta}\right) \tag{16}$$

Такая вот прикольная псевдо-ступенька.

3 Приближение функций в $\mathbb{R}^n$ (вместе с производными) бесконечно гладкими функциями

3.1 Простое приближение

Theorem 5. *Пусть $\varphi : \mathbb{R}^n \to R$ — неотрицательная бесконечно гладкая функция, отличная от нуля только при $|x| \leq 1$ и пусть $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx = 1$. Положим*

$$\varphi_k(x) = k^n \varphi(kx), \tag{17}$$

эти функции тоже имеют единичные интегралы и φ_k отлична от нуля только при $|x| \leq 1/k$. (Попробуйте эту лабуду представить сначала без k^n, а потом поймите зачем k^n нужно). Теперь для непрерывной $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ определим свёртки

$$f_k(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)\varphi_k(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\varphi_k(x-t)\, dt \tag{18}$$

Функции f_k бесконечно дифференцируемые и $f_k \to f$ равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Выпишем разность

$$f_k(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-t) - f(x))\varphi_k(t)\, dt \tag{19}$$

Пусть f равномерно непрерывна в δ окрестности компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ и пусть$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ при $|x - y| < \delta$ в этой окрестности. Выберем k

настолько большим, чтобы $1/k < \delta$. Тогда в интеграле $\varphi_k(t)$ отлична от нуля только при $|t| < \delta$, и тогда $|f(x-t) - f(x)| < \varepsilon$, при $x \in K$. Тогда при $x \in K$ верна оценка

$$|f_k(x) - f(x)| \le \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x)\,dx = \varepsilon \tag{20}$$

Это показывает равномерную сходимость на компактах. Дифференцируемость можно доказать, используя дифференцирование интеграла

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(t)\varphi_k(x-t)\,dt. \tag{21}$$

по параметру по той же теореме из прошлого сема. Производная при $x \in K$ будет зависеть только от значения f в $1/k$-окрестности K, то есть f можно считать интегрируемой при дифференцировании по параметру, что позволяет применить теорему. □

Theorem 6. *В условиях предыдущей теоремы, если исходная функция f имеет непрерывные производные до m-го порядка, то производные f_k до m-го порядка равномерно на компактах сходятся к соответствующим производным f.*

Доказательство. Давайте дифференцировать $f * \varphi_k$ по нескольким x_i точно также, как описано выше. Тогда получится

$$\frac{\partial^m (f * \varphi_k)}{\partial x_{i_1} \dots x_{i_n}} = \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \dots x_{i_n}} * \varphi_k \tag{22}$$

Таким образом, последовательность производных свёртки является последовательностью свёрток производной f с теми же функциями φ_k. А значит для этой последовательности тоже имеет место верна равномерная сходимость к производной f. □

3.2 Лебег!

Theorem 7. *Пусть функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ имеет конечный интеграл Лебега. Тогда свёртки $f * \varphi_k$ сколь угодно близко приближают f в среднем.*

Доказательство. Возьмём $\varepsilon > 0$ и представим по теореме из 2ого сема (о приближении ступенчатой в среднем)

$$f = g + h \tag{23}$$

где g — элементарно ступенчатая и

$$\int_{\mathbb{R}^n} |h(x)|\, dx < \varepsilon \tag{24}$$

Тогда по теореме 1

$$\int_{\mathbb{R}^n} |h * \varphi_k|\, dx < \varepsilon \tag{25}$$

Что значит, что если будет так, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g - g * \varphi_k|\, dx < \varepsilon \tag{26}$$

То будет выполняться

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f - f * \varphi_k|\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |h(x)|\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} |h * \varphi_k|\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} |g - g * \varphi_k|\, dx < 3\varepsilon \tag{27}$$

Таким образом, достаточно доказать утверждение для элементарно ступенчатой g. Раскладывая g в сумму характеристических функций параллелепипеда с некоторыми коэффициентами, можно видеть, что достаточно доказать утверждение для одной характеристической функции параллелепипеда χ_P. Но разность$\chi_P - \chi_P * \varphi_k$ будет отлична от нуля только в $1/k$-окрестности ∂P и будет там по модулю не более 1, то естьпосле интегрирования модуля разности мы получим не более $\mu(U_{1/k}(\partial P))$. Прямым вычислением можно убедиться, что эта мера стремится к нулю при $k \to \infty$ $\square$

Если говорить проще, то мы смотрим на одну ступеньку и говорим, что ее характеристическая функция отлично приближается свертками. Причем мера точности приближения будет обратно пропорциональна k $\to$ всё по кайфу.

Часть II
Дифференцируемые отображения и криволинейные системы координат

4 Дифференцируемые отображения и производная композиции отображений

4.1 Дифференцируемые отображения

Definition 4.1 (Дифференцируемое отображение)**.** Отображение $f : U \to \mathbb{R}^m$, где $U \subset \mathbb{R}^n$ и открытое, называется дифференцируемым, если представимо как

$$f(x) = f(x_0) + Df_{x_0}(x - x_0) + o(|x - x_0|) \tag{28}$$

при $x \to x_0$
где $Df_{x_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — линейное отображение, называемое производной в точке $x_0 \in U$.

[Непрерывно дифференцируемое отображение]

Definition 4.2. $f : U \to \mathbb{R}^m$ называется Непрерывно дифференцируемым, если $\forall x_0 \in U \, \exists Df_{x_0}$, которое непрерывно и непрерывно зависит от $x_0 \in U$.

Вот эта вот D де-факто — матрица $m \times n$, в которой каждая ячейка выглядит как $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$, и для проверки последнего определения достаточно проверить все эти ячейки на непрерывность.

4.2 Норма матрицы

Докажем существование "нормы"у матриц линейных отображений:

Lemma 8. $\forall$ *линейного* $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \ \exists ||A|| \in \mathbb{R}$т.ч. $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$|Ax| \leq ||A|| \cdot |x| \tag{29}$$

Доказательство. Ax непрерывно зависит от x. Рассмотрим $n-1$-мерную сферу $S^{n-1} = \left\{x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; |x| = 1\right\}$
S^{n-1} компактно $\to$ $|Ax|$ достигает максимума на S^{n-1}.
Пусть $\max\limits_{|x|=1} |Ax| = ||A|| \in \mathbb{R}$.
$|Ax| \leq ||A|| \cdot |x|$ верно при $|x| = 1$. При $x = 0$ всё так же очевидно, при $y = tx$ всё будет очевидно после вынесение t за скобки везде. □

4.3 Производная композиции

Theorem 9. *Пусть у нас есть $f : U \to \mathbb{R}^m$ и $g : V \to \mathbb{R}^k$, где $U \in \mathbb{R}^n$, а $V \in \mathbb{R}^m$. Обозначим также $f(x_0) = y_0 \in V$, $x_0 \in U$*
Пусть также f дифференцируема в x_0 и g дифференцируема в y_0. Тогда $g \circ f$ дифференцируемо в x_0 и $D(g \circ f)_{x_0} = Dg_{y_0} \circ Df_{x_0}$

Доказательство. Обозначим $A = Df_{x_0}$ и $B = Dg_{x_0}$. Тогда

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(|x - x_0|)$$

$$g(x) = g(y_0) + B(y - y_0) + o(|y - y_0|)$$

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + B(A(x - x_0) + o(|x - x_0|)) + o(A(|x - x_0|) + o(|x - x_0|)) \tag{30}$$

это же выражение равно

$$g(f(x)) = g \circ f(x_0) + B \cdot A(x - x_0) + Bo(|x - x_0|) + o(A|x - x_0|) \tag{31}$$

которое используя тот факт, что $Co(x) = o(Cx) = o(x)$ преобразовывается как:

$$g(f(x)) = g \circ f(x_0) + B \cdot A(x - x_0) + o(|x - x_0|) \tag{32}$$

□

5 Теорема о существовании обратного отображения. Локальные системы криволинейных координат.

Сразу скажу, что здесь много и долго, настройтесь на это. Ну а теперь начнем с небольшой, простенькой =) леммы.

Lemma 10. *Пусть открытое множество $U \subset \mathbb{R}^n$ выпукло. Для непрерывно дифференцируемого отображения $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ найдётся непрерывное отображение $A : U \times U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$, такое что для любых x',$x'' \in U$*

$$\varphi(x') - \varphi(x'') = A(x', x'')(x'' - x') \tag{33}$$

и $A(x, x) = D\varphi_x$. Здесь $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ — линейные отображения из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ с топологией в пространства матриц $\mathbb{R}^{nm}$.

Доказательство. Рассмотрим такую $f(t) = \varphi(tx'' + (1 - t)x')$ Тогда очевидно, что

$$\varphi(x'') - \varphi(x') = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}\, dt = \int_0^1 D\varphi_{tx''+(1-t)x'}(x'' - x')\, dt \tag{34}$$

(Взяли производную сложной функции)
Теперь мы скажем, что наша матрица $A(x', x'')$ это именно этот интеграл

$$A(x', x'') = \int_0^1 D\varphi_{tx''+(1-t)x'}(x'' - x')\, dt \tag{35}$$

(так как $(x'' - x')$ не зависит от t, то имеем право вынести за интеграл)
Непрерывность A следует из равномерной непрерывности подынтегрального выражения по переменным x' и x'', рассматриваемым как параметры, меняющиеся в рамкахнекоторого компакта $K \subset U \times U$, содержащего маленькую окрестность данной пары(x', x''). При изменении x' и x'' не более чем на $\delta > 0$ из равномерной непрерывности значение под интегралом будет меняться не более чем на $\varepsilon > 0$, а значит и сам интеграл будет меняться не более чем на ε. При $x' = x'' = x$ из явной формулы мы будем иметь $A(x,x) = D\varphi_x$.
Вроде как это утверждение следует из теорем прошлого сема, так что не нужно бояться, что попросят доказать (хотя тут всего-то равномерная непрерывность интеграла). □

И собственно теперь поговорим о том, ради чего собрались:

Theorem 11. *Если отображение $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируемо в окрестности точки x и его дифференциал $D\varphi_x$ является невырожденным линейным преобразованием, то это отображение взаимно однозначно отображает некоторую окрестность$V \ni x$ на окрестность $W \ni y$, где $y = \varphi(x)$, и обратное отображение $\varphi^{-1} : W \to V$ тоже непрерывно дифференцируемо.*

Доказательство. После сдвига координат будем считать, что мы работаем в окрестности точки $x = 0$ и $y = \varphi(x) = 0$. Заменив φ на его композицию с линейным отображением $D\varphi_0^{-1}$, будем считать, что $D\varphi$ в нуле является единичным линейным преобразованием, запишем тогда

$$\varphi(x) = x + \alpha(x) \tag{36}$$

Что тут произошло? Мы хотим работать так, чтобы было удобно, поэтому делаем сдвиг (лин замена, ничего не портит) и приводим матрицу преобразования в нуле к единичной численно (по теореме о производной композиции), всё хорошо, потому что там тоже лин. преобразование. Как-то так.
Тогда $D\alpha = D\varphi - id$ в нуле — нулевой оператор, а в его окрестности очень мал, мал настолько, что верна такая оценка

$$|D\alpha(v) \leq ||D\alpha|| \cdot |v| \leq 1/2|v|. \tag{37}$$

Тогда мы можем применить ту самую лемму в δ-окрестности нуля:

$$|\alpha(x'') - \alpha(x')| = |\int_0^1 \frac{d}{dt}\alpha((1-t)x' + tx'')\,dt\ | = |\int_0^1 D\alpha_{(1-t)x'+tx''}(x'' - x')\,dt\ | \leq 1/2|x'' - x'| \tag{38}$$

Далее начнем решать задачу

$$x = y - \alpha(x) = f(x, y)$$

При $|y| \leq \delta/2$ и $|x| \leq \delta$ из-за предыдущего неравенства на α получим

$$|f(x, y)| \leq \delta$$

И, что самое важное, наше отображение сжимаемое, то есть

$$|f(x'', y) - f(x', y)| \leq 1/2|x'' - x'| \tag{39}$$

Далее по индукции попробуем решить уравнение, положим $\psi_1(y) = 0$, далее определим

$$\psi_k(y) = f(\psi_{k-1}(y), y)$$

В силу того, что отображение сжимаемое выполняется

$$|\psi_{k+1}(y) - \psi_k(y)| = |f(\psi_k(y), y) - f(\psi_{k-1}(y), y)| \leq 1/2|\psi_k(y) - \psi_{k-1}(y)| \tag{40}$$

Откуда по индукции можно понять, что

$$|\psi_{k+1}(y) - \psi_k(y)| \leq \delta 2^{2-k} \tag{41}$$

То есть $\psi_k(y)$ сходятся к некоторому непрерывному отображению $\psi(y)$ непрерывно по признаку Вейерштрасса и переходя к пределу $k \to \infty$ в определении ψ_k получим

$$\psi(y) = f(\psi(y), y) = y - \alpha(\psi(y)) = y - \varphi(\psi(y)) + \psi(y) \tag{42}$$

То есть, $y = \varphi(\psi(y))$. Из того, что α сжимаемое также следует, что $\forall y : |y| \leq \delta/2$ найдётся не более одного $x : |x| \leq \delta$, для которого $\varphi(x) = y$, и на самом деле мы его уже нашли как $x = \psi(y)$.Взяв окрестность $W \ni y$, меньшую по сравнению с $\delta/2$, и взяв открытое $V = \varphi^{-1}(W)$ мы видим, что φиψявляются взаимно обратными на этих окрестностях. Установим дифференцируемость ψ. По "простенькой"лемме можно написать.

$$\varphi(x) = \varphi(x) - \varphi(0) = A(x)x \tag{43}$$

где линейный оператор $A(x)$ непрерывно зависит от xи равен id при $x = 0$. Подставим в эту формулу $x = \psi(y)$ и получим

$$y = A(\psi(y))\psi(y) \Rightarrow \psi(y) = A(\psi(y))^{-1}y \tag{44}$$

Где линейный оператор $B(y) = A(\psi(y))^{-1}$ непрерывен по y и равен тождественному при $y = 0$. Из выражения $\psi(y) = B(y)y$ тогда следует дифференцируемость ψ в нуле с дифференциалом $B(0)$, дифференцируемость в остальных точках проверяется послесдвига начала координат в соответствующую точку повторением тех же рассуждений. □

Добавить можно лишь, что тут важна невырожденность матрицы Якоби ($D\varphi$).

Definition 5.1. Криволинейной системой координатв окрестности точки $p \in \mathbb{R}^n$ мы будем называть набор таких функций, которые являются координатами гладкого отображения окрестности p на некоторое открытое множество в $\mathbb{R}^n$с гладким обратным отображением.

По теореме об обратном отображении для того, чтобы гладкие $y_1, \ldots, y_n$ в некоторой окрестности p давали КСК необходима невырожденность матрицы Якоби в точке p, иначе говоря, линейная независимость дифференциалов $dy_1, \ldots, dy_n$ в точке p.

6 Теоремы о системе неявных функций, определяемых системой уравнений (случай гладких уравнений).

Theorem 12. *Пусть функции* $f_1, \dots, f_k$ *непрерывно дифференцируемы в окрестности* $p \in \mathbb{R}^n$ *и определитель*

$$det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^k$$

не равен нулю в этой окрестности. Пусть также $f_i(p) = y_i$. *Тогда найдётся окрестностьточки* p *вида* $U \times V, U \subset \mathbb{R}^k, V \subset R^{n-k}$, *такая что в этой окрестности множество решений системы уравнений*

$$f_1(x) = y_1, \dots, f_k(x) = y_k$$

совпадает с графиком непрерывно дифференцируемого отображения $\varphi : V \to U$, *заданного в координатах как*

$$\begin{aligned} &x_1 = \varphi_1(y_1, \dots, y_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \\ &\dots \\ &x_k = \varphi_1(y_1, \dots, y_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Пояснение: тут и далее x_i — функции, которые возвращают от точки p одну координату, как бы это очевидно не было. и первые k аргументов - константы, потому являются параметрами.

Доказательство. Условия теоремы означают, что дифференциалы

$$df_1, \dots, df_k, dx_{k+1}, \dots, dx_n$$

являются линейно независимыми и из функций $f_1, \dots, f_k, x_{k+1}, \dots, dx_n$ можно составить отображение, локально имеющее непрерывно дифференцируемое обратное, то есть они дают криволинейную систему координат в окрестности p. Следовательно, в этой окрестности старые координаты $x_1, \dots, x_k$ можно непрерывно дифференцируемо выразить через новые координаты

$$x_i = \varphi_i(f_1, \dots, f_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

и поставить в этом выражении вместо f_i константы y_i.
Это рассуждение доказывает, что множество решений системы уравнений содержится в графике отображения $\varphi : V \to U$ при достаточно малых V и U, таких что $\varphi(V) \in U$. Но и обратное верно, так как значения

$f_1, \dots, f_k$ на точке вида

$$(\varphi_1(y_1, \dots, y_k, x_{k+1}, \dots, x_n), \dots, \varphi_k(y_1, \dots, y_k, x_{k+1}, \dots, x_n), x_{k+1}, \dots, x_n)$$

обязаны совпадать с $y_1, \dots, y_k$, так как φ_i были выбраны как компоненты отображения,обратного к отображению, описанному выше. $\square$

7 Теорема о расщеплении гладкого отображения на простые гладкие отображения.

Theorem 13. *Если отображение φ непрерывно дифференцируемо в окрестности точки $p \in \mathbb{R}^n$ и имеет обратимый $D\varphi_x$, то его можно представить в виде композиции перестановки координат, отражений координат и элементарных отображений, непрерывно дифференцируемо и возрастающим образом меняющих только одну координату $y_i = \psi_i(x_1, \dots, x_n)$.*

Доказательство. Доказательство этой теоремы имитирует приведение матрицы к гауссовому виду, то есть разложение матрицы в произведение матрицы перестановки, матриц умножений координаты на число, и элементарных матриц. Пусть компоненты φ являются функциями $y_1, \dots, y_n$ в окрестности точки p. Некоторая y_i имеет ненулевую производную$\frac{\partial y_i}{\partial x_1}$. Переставив y (и запомнив эту перестановку) мы можем считать, что это y_1. Поменяв при необходимости знак y_1, можно считатьэту производную положительной. Тогда $y_1, x_2, \dots, x_n$ (в силу нетривиальности якобиана) дают криволинейную систему координат в некоторой окрестности p и эта система отличается от исходной возрастающей заменой первой координаты. Далее какая-то из оставшихся $y_2, \dots, y_n$ уже в новой системе координат $y_1, x_2, \dots, x_n$ имеет ненулевую $\frac{\partial y_i}{\partial x_2}$, иначе $dy_i (i = 1, \dots, n)$ не были бы линейно независимыми. Переставив y (и запомнив и эту перестановку), можно считать, что это y_2. Также можно считать эту производную положительной, поменяв при необходимости знак y_2. Тогда можно заменить$y_1, x_2, \dots, x_n$ на систему координат $y_1, y_2, \dots, x_n$. Делая в том же духе n раз, мы сделаем n замен координат (отображений), меняющих возрастающим образом только одну координату, а в конце нам останется поменять знаки у некоторых y_i и переставить их. $\square$

Часть III

Дифференциал, гессиан и исследование функции на экстремум

8 Дифференциал функции как линейный функционал. Корректность определения второго дифференциала (гессиана) функции как квадратичной формы на касательных векторах для случая, когда первый дифференциал функции равен нулю.

8.1 Дифференциал функции как линейный функционал

Definition 8.1. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество. Отображение $f : U \to \mathbb{R}^m$ называется дифференцируемым в точке $x_0 \in U$, если

$$f(x) = f(x_0) + Df_{x_0}(x - x_0) + o(|x - x_0|),\ x \to x_0 \tag{45}$$

где $Df_{x_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ является линейным отображением. Далее оговариваемся, что для функций $f : U \to \mathbb{R}^m$ мы вводим обозначение $Df_x = df_x$ и называть это дифференциалом функции. По определению это линейная форма из $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

8.2 Корректность определения второго дифференциала (гессиана) функции как квадратичной формы на касательных векторах для случая, когда первый дифференциал функции равен нулю

Тут скорее всего идет речь о том, что при замене координат гессиан ведет себя как квадратичная форма.

Lemma 14. *Если $df_{x_0} = 0$, то при любой замене координат $x = \varphi(t)$*

гессиан в точке $x_0 = \varphi(t_0)$ меняется так:

$$d_2(f \circ \varphi)_{t_0}(\Delta t) = d_2 f_{x_0}(D\varphi_{t_0}(\Delta t)) \tag{46}$$

Доказательство. Для нахождения элементов второго дифференциала (как матрицы) надо дифференцировать композицию один раз, а потом ещё один раз. Помимо выписанных слагаемых со вторыми производными f и первыми производными φ могли бы появиться слагаемые с первыми производными f и вторыми производными φ. Но по условию в точке x_0 первые производные f равны нулю, а значит выражение содержит только вторые производные f. □

9 Локальные максимумы и минимумы функций многих переменных. Необходимое условие экстремума непрерывно дифференцируемой функции.

9.1 Локальные максимумы и минимумы функций многих переменных.

Definition 9.1 (Локальный экстремум функции)**.** Точка p называется локальным экстремумом функции f, если является строгим ее экстремумом (max || min) при ограничении f на некоторую окрестность p.

9.2 Необходимое условие экстремума непрерывно дифференцируемой функции.

Theorem 15. *Если f дифференцируема в точке p и имеет локальный экстремум в p, то $df_p = 0$.*

Доказательство. $f(x_0 + te_i) = g(t)$ имеет экстремум в $t = 0$, откуда получаем

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0 \tag{47}$$

$\forall x_i \Rightarrow df_p = 0$ ЧТД. □

10 Необходимые и достаточные условия экстремума дважды непрерывно дифференцируемых функций.

10.1 Необходимое условие экстремума дважды непрерывно дифференцируемой функции

Theorem 16. *Если f дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки p, то $d_2f_p \geq 0$ для минимума и $d_2f_p \leq 0$ для максимума.*

Доказательство. Б.о.о. рассмотрим минимум. Запишем формулу тейлора для $\xi = p + tv$

$$f(p+tv) = f(p) + \frac{1}{2}d_2f_p(tv) + o(t^2|v|^2) = f(p) + t^2(\frac{1}{2}d_2f_p(v) + o(1)) \quad (48)$$

А так как в точке p экстремум, то при пределе $t \to 0$ второй дифференциал должен быть положителен или равен нулю. □

10.2 Достаточное условие экстремума дважды непрерывно дифференцируемой функции

Сначала докажем одну лемму

Lemma 17. *Если квадратичная форма Q положительно определена, то найдётся $\varepsilon > 0$, такой что*

$$Q(v) \geq \varepsilon|v|^2 \quad (49)$$

для любого v

Доказательство. Положим ε равным минимуму Q на единичной сфере. Так как единичная сфера является компактом, а квадратичная форма является непрерывной функцией, то этот минимум достигается и положителен. Тогда неравенство верно для единичной сферы. Из этого следует неравенство для всех векторов, так как при умноже-нии вектора на t обе части неравенства умножаются на t^2 □

Theorem 18. *Если f дважды непрерывно дифференцируема в окрестностир, $df_p = 0$ и $d_2f_p > 0$, то p — точка строгого локального минимума. Если неравенство в другую сторону, $d_2f_p < 0$, то p — точка строгого локального максимума.*

Доказательство. Докажем без ограничения общности для минимума. Для $\xi = p + \upsilon$ запишем по формуле Тейлора с использованием предыдущей леммы:

$$f(p+\upsilon) = f(p) + \frac{1}{2}d_2 f_p(\upsilon) + o(|\upsilon|^2) \geq f(p) + \left(\frac{\varepsilon}{2} + o(1)\right)|\upsilon|^2 \qquad (50)$$

По определению $o(1)$ при достаточно малом $|\upsilon|$ (независимо от направления υ) выражение в скобках будет положительным. □

11 Условные экстремумы. Необходимое условие условного экстремума в терминах первых производных. Метод множителей Лагранжа.

11.1 Условные экстремумы

Definition 11.1 (Условный экстремум)**.** экстремума ограничения функцииfна множество S, задаваемое системой непрерывно дифференцируемых (как минимум) уравнений

$$\varphi_1(x) = \cdots = \varphi_m(x) = 0$$

Также требуется линейная независимость дифференциалов

$$dim\,\langle d\varphi_1, \ldots, d\varphi_m\rangle = m$$

11.2 Необходимое условие условного экстремума в терминах первых производных

Theorem 19. *Если f и $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ непрерывно дифференцируемы в окрестности p, дифференциалы φ линейно не зависимы и f имеет условный экстремум в p при условии $\varphi_1(x) = \cdots = \varphi_m(x) = 0$, то в точке p выполняется*

$$df_p = \lambda_1 d\varphi_{1,p} + \cdots + \lambda_m d\varphi_{m,p} \qquad (51)$$

для некоторых $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$.

Доказательство. Заметим, что нахождение df в линейной оболочке $d\varphi_i$ инвариантно относительно криволинейных замен координат по формуле дифференциала композиции. Согласно этой формуле, при замене координат строка чисел $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ получается из строки чисел $\frac{\partial f}{\partial y_j}$ умножением

справа на матрицу с элементами $\frac{\partial y_j}{\partial x_i}$.
Тогда мы можем считать $\varphi_1 = y_1,\ldots,\varphi_m = y_m$ в системе координат $y_1,\ldots,y_n$. В этом случае мы имеем экстремум функции по остальным переменным при условии $y_1 = \cdots = y_m = 0$, что даёт равенства$\frac{\partial f}{\partial y_i} = 0$ при $i > m$. Тогда можно составить линейную комбинацию

$$df_p = \lambda_1 dy_1 + \cdots + \lambda_m dy_m \tag{52}$$

□

11.3 Метод множителей Лагранжа

1. Составим функцию Лагранжа в виде линейной комбинации функции f и функций φ_i, взятых с коэффициентами, называемыми множителями Лагранжа — λ_i:

$$L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x) \tag{53}$$

2. Составим систему из $n + m$ уравнений, приравняв к нулю частные производные функции Лагранжа $L(x,\lambda)$ по x_j и λ_i.

3. Если полученная система имеет решение относительно параметров x'_j и λ'_i, тогда точка x' может быть условным экстремумом, то есть решением исходной задачи. Заметим, что это условие носит необходимый, но не достаточный характер.

12 Необходимые и достаточные условия условного экстремума с использованием вторых производных.

12.1 Необходимое условие условного экстремума с использованием вторых производных

Theorem 20. *Если f и $\varphi_1,\ldots,\varphi_m$ дважды непрерывно дифференцируемы в окрестности p, выполняется линейная независимость дифференциалов и f имеет условный экстремум в p при условии $\varphi_1(x) = \cdots = \varphi_m(x) = 0$, то*

$$df_p = \lambda_1 d\varphi_{1,p} + \cdots + \lambda_m d\varphi_{m,p}$$

и второй дифференциал функции Лагранжа положительно полуопределён (для минимума)или отрицательно полуопределён (для максимума) на векторах v, удовлетворяющих линейным уравнениям

$$d\varphi_{1,p}(v) = \cdots = d\varphi_{m,p}(v) = 0$$

Доказательство. Заметим, что при выполнении условий $\varphi_1(x) = \cdots = \varphi_m(x) = 0$ функции f и L равны. Но функция Лагранжа удобнее тем, что $dL_p = 0$. Лемма о корр. кв формыпозволяет в этом случае считать d_2L_p корректно определённой квадратичной формой и сделать замену координаттак, чтобы $\varphi_1 = y_1, \dots, \varphi_m = y_m$, при этом d_2L_p преобразуется так, как положено преобразовываться квадратичной форме при линейном преобразовании, которое является производной замены координат. После замены координат мы фактически рассматриваем функцию L при фиксированных первых m переменных. Допустимые приращения соответствуют векторам v, первые m координат которых равны нулю, то есть

$$dy_1(v) = \cdots = dy_m(v) = 0 \tag{54}$$

Но тогда теорема о необходимом условии экстремума без условий показывает, что d_2L_pдолжна быть полуопределена на допустимых приращениях v, что после обратной замены координат превращается в утверждение теоремы. □

12.2 Достаточное условие условного экстремума с использованием вторых производных

Theorem 21. *Если f и $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ дважды непрерывно дифференцируемы в окрестности p, выполняется линейная независимость дифференциалов*

$$df_p = \lambda_1 d\varphi_{1,p} + \cdots + \lambda_m d\varphi_{m,p} \Leftrightarrow dL_p = 0$$

и второй дифференциал функции Лагранжа положителен (для минимума) или отрицателен (для максимума) на ненулевых векторах v, удовлетворяющих линейным уравнениям

$$d\varphi_{1,p}(v) = \cdots = d\varphi_{m,p}(v) = 0$$

то f имеет строгий условный экстремум в p на ограничении S.

Доказательство. Аналогично предыдущей теореме, взяв φ_i за первые m координат ивоспользовавшись леммой о корр. опр. гессиана, мы сводим задачу к случаю экстремума без условий. □

Часть IV

Векторы и дифференциальные формы первой степени

13 Касательные векторы к открытому подмножеству $\mathbb{R}^n$ в точке. Определение через дифференцирование функций в точке и явный вид

13.1 Касательные векторы к открытому подмножеству $\mathbb{R}^n$ в точке

Докажем лемму, которая будет нужна далее:

Lemma 22. *Всякую гладкую функцию, определённую в некоторой окрестности $x_0 \in \mathbb{R}^n$, в возможно меньшей окрестности x_0 можно представить в виде*

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{0,k}) g_k(x) \tag{55}$$

Доказательство. Это следует из леммы 10 и её доказательства. Бесконечная дифференцируемость функций g_k (которые в той лемме были компонентами отображения A) следует из возможности бесконечно дифференцировать определяющий их интеграл по параметрам □

Definition 13.1 (Касательные векторы к открытому подмножеству $\mathbb{R}^n$ в точке)**.** Определим касательный векторв точке $p \in U$ открытого множества $U \subset \mathbb{R}^n$ как $\mathbb{R}$-линейное отображение $X : C^\infty(U) \to \mathbb{R}$, удовлетворяющее

$$X(fg) = X(f)g(p) + X(g)f(p) \tag{56}$$

13.2 Определение через дифференцирование функций в точке и явный вид

Запишем используя Лемму 22, запишем

$$X(f) = X(f(p)) + \sum_{i=1}^{n} (x_i - p_i) X(g_i) + \sum_{i=1}^{n} X(x_i - p_i) g_i(p) \tag{57}$$

Что равно

$$X(f) = \sum_{i=1}^{n} X(x_i) g_i(p) = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \tag{58}$$

14 Касательное пространство в точке и дифференциал отображения как отображение касательных пространств. Векторные поля на открытых областях в $\mathbb{R}^n$.

14.1 Касательное пространство в точке

Definition 14.1. Касательное пространство к U в точке p состоит из всех касательных векторов в точке p и обозначается как T_pU

14.2 Дифференциал отображения как отображение касательных пространств

Можно также корректно определить образ касательного вектора при произвольном гладком отображении $\varphi : U \to V$, не обязательно обратимом, следующим образом.Пусть у нас есть вектор $X \in T_pU$, $q = \varphi(p)$, тогда прямой образ вектора,$\varphi_*(X)$, определяется по формуле

$$\varphi_*(X)f = X(f \circ \varphi) \tag{59}$$

Можно выписать координаты этого вектора

$$\varphi_*(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} X_i \frac{\partial}{\partial y_j} \tag{60}$$

Таким образом мы можем бескоординатно определить производную отображения φ в точке p как линейное отображение $\varphi_* : T_pU \to T_qV$ при $q = \varphi(p)$. Его также можно обозначать как $D\varphi_p$, так как в силу своего выражения в координатах оно на самом деле совпадает с введённый ранее производной в смысле линейного приближения отображения, что проясняет геометрический смысл конструкции прямого образа вектора.

14.3 Векторные поля на открытых областях в $\mathbb{R}^n$

Definition 14.2 (Векторное поле на открытом $U \subset \mathbb{R}^n$)**.** X — гладкое сопоставление $\forall p \in U$ вектора в точке p. Вектор в $p \in U$ — T_pU.

Definition 14.3 (Векторное поле на открытом $U \subset \mathbb{R}^n$)**.** Векторное поле на $U^{\text{откр}} \subset \mathbb{R}^n$ — это $\mathbb{R}$-линейное $X : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$ т.ч.

$$X(f \cdot g) = X(f)g + X(g)f \tag{61}$$

15 Дифференциальные формы первой степени и дифференциалы функций. Замена координат в дифференциальной форме первой степени.

15.1 Дифференциальные формы первой степени и дифференциалы функций

Для всякой функции $f \in C^\infty(U)$ её дифференциал как отображения $U \to \mathbb{R}$ можно считать формой первой степени в соответствии с формулой

$$df(X) = X(f) \tag{62}$$

действительно, это выражение линейно относительно умножения X на бесконечно гладкие функции и в координатах компоненты df оказываются равны $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, то есть это уже известный нам дифференциал функции, но определённый по-новому.

15.2 Замена координат в дифференциальной форме первой степени

Дифференциалы координатных функций $dx_1, \dots, dx_n$ в любой точке дают базис пространства T_p^*U, двойственный к базису $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ в смысле

$$dx_i \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} \tag{63}$$

По этому базису можно разложить любую форму в точке, а применяя это во всех точках области $U \subset \mathbb{R}^n$ обнаруживаем, что всякая дифференциальная форма на U первой степени выражается как

$$\alpha_1 dx_1 + \dots + \alpha_n dx_n \tag{64}$$

где $\alpha_i \in C^\infty(U)$. При замене координат компоненты дифференциальной формы первой степени ведут себя так же, как компоненты дифференциала функции, то есть преобразование от новой к старой системе координат выглядит как

$$\alpha_j = \sum_j \widetilde{\alpha}_i \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \tag{65}$$

Часть V
Дифференциальные формы высших степеней

16 Дифференциальные формы произвольной степени на открытых множествах в $\mathbb{R}^n$, их определение и свойства.

16.1 Определение

Сначала введем некоторые обозначения:
V — векторное пространство.
V^* — двойственное $V = \big\{$линейное $\lambda : V \to \mathbb{R}\big\}$
существует такая полилинейная форма ω, что

$$\omega : (v_1, \dots, v_k) \mapsto \omega(v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{R}$$

$$\Lambda^k V^* \subset \omega, k\text{-ой степени}$$

с правилом кососимметрии

Definition 16.1. В $U \subset \mathbb{R}^n$ $\Omega^k(U)$ (дифф. форма kой степени) — это выбор формы в $\Lambda^k T_p^* U$ $\forall p \in U$ гладко зависящего от p

Definition 16.2. $\omega \in \Omega^k(U)$ — это $C^\infty(U)$-линейное сопоставление набору из k векторных полей $f \in C^\infty(U)$ + кососимметричное.

$$\omega(f_1 X_1, \dots, f_k X_k) = f_1, \dots, f_k \omega(X_1, \dots, X_k)$$
$$\omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) = sgn(\sigma) \cdot \omega(X_1, \dots, X_k)$$

16.2 Свойства

Lemma 23. *Значение выражения* $\alpha(X_1, \dots, X_k)$ *в точке* p *зависит только от значений векторных полей* X_i *в точке* p.

Доказательство. Представим каждое поле X_i в виде $\Sigma_j X_i^j \frac{\partial}{\partial x_j}$. Применив линейность α, разложим выражение на слагаемые, в каждом из которых α применяется к векторным полям $\frac{\partial}{\partial x_i}$ (это будет не зависящая от векторных полей часть), а множители X_i^j вынесены из α как функции. Значение этого выражения в точке p будет зависеть только отзначений X_i^j в точке p. $\square$

вроде больше свойств нет ...