
Numerische Methoden — Praktikum

Labor für Informatik und Mathematik im Anwendungsfeld Industrie 4.0

Prof. Dr. Christian Scheffer
Marc-Maurice Torchala, M.Sc.

Vorbereitung und Hinweise

Das Praktikum findet in Form von Einzelarbeit oder Gruppenarbeit mit maximal 2 Studierenden statt. Wenn Sie das Praktikum zu zweit bearbeiten, geben Sie dies bitte bei der Abgabe des Praktikums an!

Ihr Ziel im Praktikum wird es sein die nachfolgenden **drei** Aufgabenstellungen funktionsfähig und korrekt zu implementieren. Die Aufgabenstellungen orientieren sich dabei relativ nah an den Themen die in der Vorlesung behandelt werden. So vertiefen Sie direkt auch die Vorlesungsinhalte mithilfe des Praktikums. An dieses Praktikum sind nur wenige terminliche Rahmenbedingungen gebunden. Sie müssen alle **drei** korrekt implementierten und funktionsfähigen Aufgabenstellungen allerspätestens bis zum 15.07.2022 per E-Mail eingereicht haben. Die Dozenten des Kurses behalten sich allerdings vor die Frist für das Einreichen der Implementierungen zu verlängern. Sie dürfen ihre Implementierungen aber auch schon eher einreichen. Insbesondere bekommen Sie dann auch schon eher Feedback zu ihrer Lösung mit Hinweisen zu Fehlern in ihrer Implementierung oder auch schon ein Teilstat, wenn ihre Implementierung vollständig korrekt ist. Dies bedeutet, dass Sie fehlerhafte Abgaben ausbessern und korrigieren dürfen.

Bitte reichen Sie nicht die Lösungen anderer Kommilitonen als ihre Lösung ein!

Für die Absolvierung des Praktikums ist die Verwendung eines Systems zur Versionierung ihres Codes sinnvoll. Empfehlenswert wäre daher, dass Sie sich ein Repository auf Plattformen, wie bspw. Github erstellen. Gerne können Sie aber auch eine Alternative dazu verwenden. Dies lohnt sich insbesondere daher, da Sie so auch die Dozenten dieses Kurses in das Repository einladen können und bei Fragen so schnellere Hilfe möglich ist. Parallel führen Sie so auch gleich einen Nachweis dafür, welches Gruppenmitglied an den Aufgabenstellungen mitgearbeitet hat. Weiterhin gibt es keine genauen Vorgaben, welche Programmiersprache Sie für die einzelnen Aufgabenstellungen verwenden sollen. Allerdings sollten Sie eher Programmiersprachen verwenden, die möglichst alle ihre Gruppenmitglieder kennen und anwenden können. Üblicherweise wären dies Programmiersprachen, wie *MATLAB*, *Python* oder *Java*.

Bei Fragen zum Ablauf der Praktika oder zu den Aufgabenstellungen wenden Sie sich gerne per E-Mail an marc.torchala@hs-bochum.de !

Ihre implementierten Lösungen reichen Sie bitte bei beiden Dozenten per E-Mail oder über eine Einladung in ein entsprechendes Repository ein.

Aufgabenstellung 1 – Bisektionsverfahren und Fixpunktiteration

Implementieren Sie ein Programm mit dem es möglich ist bei einer gegebenen Funktion f das Bisektionsverfahren und die Fixpunktiteration für das Finden von Nullstellen anzuwenden. Das jeweilige Verfahren soll über einen Übergabeparameter ausgewählt werden können. Dabei soll die Anwendung des Verfahrens entweder abgebrochen werden, wenn sich die Ergebnisse zwischen zwei Schritten der beiden Verfahren nicht mehr um mehr als 0.001 unterscheiden. Andernfalls soll das Verfahren auch nach dem Durchlaufen von maximal 100 Schritten abgebrochen werden.

Beide Verfahren sollen möglichst ohne die Hilfe von Bibliotheken implementiert werden. Finden Sie mithilfe ihrer Implementierung die Nullstelle der Funktion $f(x) = \ln(2+4x^2) - x$. Als Startwert für die Fixpunktiteration können Sie bspw. $x_0 = 0$ verwenden. Für das Bisektionsverfahren können Sie die Intervallgrenzen selbst auswählen.

Aufgabenstellung 2 – Gradientenabstiegsverfahren (Gradient Descent)

Finden Sie mithilfe des Gradientenabstiegsverfahrens eine lineare Regressionsfunktion $r(x)$, die die nachfolgenden Datenpunkte nach dem Verfahren der kleinsten Fehlerquadrate bestmöglich abbildet.

Die zugehörige Loss-Funktion lautet: $L(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - r(x_i))^2$

Weiterhin sei $r(x) = a_1 \cdot x + a_2$. Optimieren Sie also die Parameter a_1 und a_2 der obigen Regressionsfunktion schrittweise mit dem Gradientenabstiegsverfahren. Sie können die Anwendung des Verfahrens abbrechen, wenn sich die Parameter a_1 und a_2 nicht mehr um mehr als 0.001 vom vorherigen Wert unterscheiden. Weiterhin soll das Verfahren auch nach dem Durchlaufen von maximal 100 Schritten abgebrochen werden.

Datenpunkte:

n	x_i	y_i
1	-1	-0.5
2	0	0.5
3	1.5	1.8
4	3	2
5	3.5	4
6	4	4.3
7	4.5	5
8	6	6.8
9	7.3	7

Plotten Sie die Datenpunkte und die gefundene Regressionsfunktion $r(x)$. Beginnen Sie das Gradientenabstiegsverfahren stets mit $a_1 = 0$ und $a_2 = 0$.

Aufgabenstellung 3 – Numerische Lösung von Gleichungssystemen

Implementieren Sie mindestens für Matrizen der Größe 3×3 Matrizen das Jacobi-Verfahren. Ihre Implementierung sollte eine variable Anzahl an Schritten mit dem Jacobi-Verfahren durchführen können. Sie sollten für ihre Implementierung des Jacobi-Verfahrens keine bereits fertigen Implementierungen des Jacobi-Verfahrens aus Bibliotheken oder ähnliches verwenden. Ihre Implementierung sollte 50 Schritte des Jacobi-Verfahrens durchführen. Lösen Sie nach Fertigstellung der Implementierung das nachfolgende lineare Gleichungssystem des Typs $Ax = b$ numerisch mit dem Jacobi-Verfahren:

$$\begin{aligned}2x_1 - 1x_2 &= 3 \\ -x_1 + 2x_2 - 1x_3 &= 4 \\ -x_2 + 2x_3 &= 5\end{aligned}$$

Als Startvektor können Sie bspw. $(2, 2, 2)^T$ verwenden!