Álgebra lineal 2024-I **Profesor:** Pablo Toro Sánchez

Lista de ejercicios: Bases ortonormales y diagonalización ortogonal

1. Determine si los siguientes conjuntos forman una base ortonormal para el subespacio dado. De no serlo, utilice el proceso de Gram-Schmidt para hallar dicha base.

   a) $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ para $\mathbb{R}^2$.

   b) $u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $u_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$ para $\mathbb{R}^3$.

   c) $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ para $X = \text{gen}\{x_1, x_2\} \subset \mathbb{R}^3$.

   d) $w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $w_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ para $W = \text{gen}\{w_1, w_2\} \subset \mathbb{R}^4$.

   e) $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ para $S = \text{gen}\{A_1, A_2\} \subset M_{2\times 2}$.

   f) $p_1(x) = x^2 + x + 1$, $p_2(x) = x^2 + x$ y $p_3(x) = x^2$ para $\mathcal{P}_2$.

2. Halle las coordenadas de los vectores dados en las bases ortonormales de los correspondientes subespacios halladas en el ejercicio 1.

   a) $v = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$ en $\mathbb{R}^2$.

   b) $u = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$ en $\mathbb{R}^3$.

   c) $x = \begin{bmatrix} -15 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}$ en X.

   d) $w = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ en W.

   e) $A = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ en S.

   f) $p(x) = -x^2 + 1$ en $\mathcal{P}_2$.

3. Halle una diagonalización ortogonal para las matrices simétricas A dadas a continuación. Es decir, halle una matriz diagonal D y una matriz ortogonal Q tales que $A = QDQ^T$.

   a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

   c) $A = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.

   d) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

   e) $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$.