ВТА

§1 Изм по Жордану мн-ва в $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$

$\mathbb{R}^n \quad x = (x_1, \dots, x_n), \; y = (y_1, \dots, y_n)$

$\rho(x, y) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$ — ск. пр

ЕП.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$. Точка $a \in \mathbb{R}^n$ наз-ся

1. внутр (·) D, если $\exists \, \delta > 0 : B(a, \delta) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \rho(x, a) < \delta \} \subset D$
2. внешн (·) D, если $\exists \, \delta > 0 : B(a, \delta) : B(a, \delta) \cap D = \varnothing$
3. граничной (·) D, если любая окр-ть (·) a сод как (·) $\in D$, так и (·) $\notin D$
4. предельной (·) D, если любая окр-ть (·) a сод б. много (·) $\in D$

Мн-во D наз-ся

1. открытым, если каждая его (·) явл внутр (·) D
2. замкн., если $\mathbb{R}^n \setminus D$ — открытое ($\Leftrightarrow$ D содержит все свои предельные точки) $\bar{D} = D$
3. связным, если любые две (·) мн-ва D можно соед. непр кр $\Gamma \subset D$
4. областью, если оно открыто и связно
5. $\bar{D} = D \cup \{\text{пред (·) } D\}$ — замыкание D.
6. ограничено, если ~~diam D~~ $\operatorname{diam} D < +\infty$

   $\operatorname{diam} D = \sup\limits_{x, y \in D} \rho(x, y)$
7. компактом в $\mathbb{R}^n$, если оно ограничено и замкнуто

§ п.2 Мера Жордана

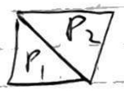
$P \in \mathbb{R}^2$, $P \in \mathbb{R}^3$ — объед. кон. числа многогр (многогр) наз-ся многогранным телом

многоуг. — многогранник.

$\mathcal{P}$ — мн-во всех ~~многоуг. мн(многогран)~~ многогранных тел.

О.1. $\forall P \in \mathcal{P} \to \mu(P) \geq 0$:

1. $P_1 \cong P_2 \Rightarrow \mu(P_1) = \mu(P_2)$
2. $\mu(P_1 \cup P_2) = \mu(P_1) + \mu(P_2)$, если $P_1 \cap P_2$ не имеет внутр (·)



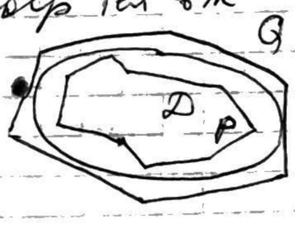
3. если E — ед кв в $\mathbb{R}^2$ (ед куб в $\mathbb{R}^3$), то $\mu(E) = 1$

Из 2) и $\mu(P) \geq 0 \Rightarrow P_1 \subseteq P_2$ $\mu(P_1) \leq \mu(P_2)$

! осн. сл $n = 2, 3$

$n \geq 4$ — полностью аналогичен $n = 3$

О.2. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — огр мн-во, $\mathcal{P}$ — мн-во всех многогр тел в $\mathbb{R}^n$



$\sup\limits_{P \subseteq D} \mu(P) \doteq \mu_*(D)$ — нижняя мера

$\inf\limits_{D \subseteq Q} \mu(Q) \doteq \mu^*(D)$ — верхняя мера

! $\mu_*(D) \leq \mu^*(D)$

О.3 Если $\mu_*(D) = \mu^*(D)$, то D наз-ся изм. по Жордану, а

$\mu(D) = \mu^*(D) = \mu_*(D)$ — мера Ж. мн. D

Если $\nexists P \subset D$ $\mu_*(D) = 0$

Замечание: не всякое ограниченное мн. измеримо по Жордану

$n = 2$ квадр фиг

кубир. тело

П.3 Критерий изм-ти

$\boxed{T1}$ П $D \subset \mathbb{R}^n$ - огр мн-во

(D изм. по Жордану) $\Longleftrightarrow$ ($\forall \varepsilon > 0\ \exists P, Q \in \mathcal{P} : P \subseteq D \subseteq Q$ и $\mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon$)

Δ: $\Longrightarrow$

D изм, $\mu(D) = \mu_* = \mu^*$. $\forall \varepsilon > 0 \begin{cases} \exists P \in \mathcal{P} : P \subseteq D \quad \mu(D) - \mu(P) < \frac{\varepsilon}{2} \\ \exists Q \in \mathcal{P} : D \subseteq Q \quad \mu(Q) - \mu(D) < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$

$\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists P, Q \in \mathcal{P} : P \subseteq D \subseteq Q \quad \mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon$

$\Longleftarrow$

$\forall \varepsilon > 0$ фиксир. $\exists P, Q \in \mathcal{P}$

$P \subseteq D \subseteq Q$

$\mu(P) \leq \mu_*(D) \leq \mu^*(D) \leq \mu(Q) \Longrightarrow \underbrace{\mu^*(D) - \mu_*(D)} \leq \mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon$

$\overset{\text{т.к.}}{\underset{\varepsilon\ \text{произв.}}{\Longrightarrow}}$ $\mu_*(D) = \mu^*(D)$, т.е. D - изм по Ж ■

$\boxed{O.4}$ Мн-во $D \subset \mathbb{R}^n$ имеет нулевую меру Жордана, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists Q \in \mathcal{P} : D \subseteq Q$ и $\mu(Q) < \varepsilon$

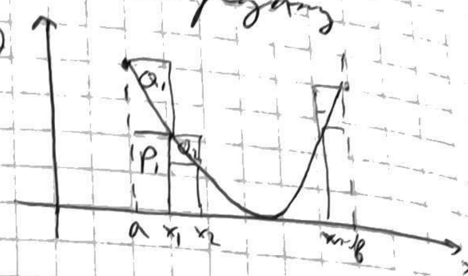
D

$\boxed{\text{Сл-ие}}$ (Мн-во D изм. по Ж) $\Longleftrightarrow$ (∂D имеет нулевую меру Ж)

Δ: $\partial D \subset \overline{Q \setminus P}$ - многоуг. т

$\mu(\overline{Q \setminus P}) = \mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon$ (пояснение, не нам док-во)

Т. 2 Пусть $f\in R[a,b]$, $f(x)\ge 0$ на $[a,b]$. Тогда $D=\{(x,y)\mid x\in[a,b],\ 0\le y\le f(x)\}$ – изм по Жордану



Δ: В разб $\tau=\{x_i\}_{i=0}^{n}$ отр $[a,b]$

$a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=b$

$m_i=\inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$ $\quad M_i=\sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$, $i=\overline{1,n}$

P_i – пр-к с осн $[x_{i-1},x_i]$, выс m_i $\quad P=\bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i$ – многогр тело

Q_i – пр-к с осн $[x_{i-1},x_i]$, выс M_i $\quad Q=\bigcup\limits_{i=1}^{n} Q_i$ – многогр тело

$$\mu(Q)-\mu(P)=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i=S(f,\tau)-s(f,\tau)$$

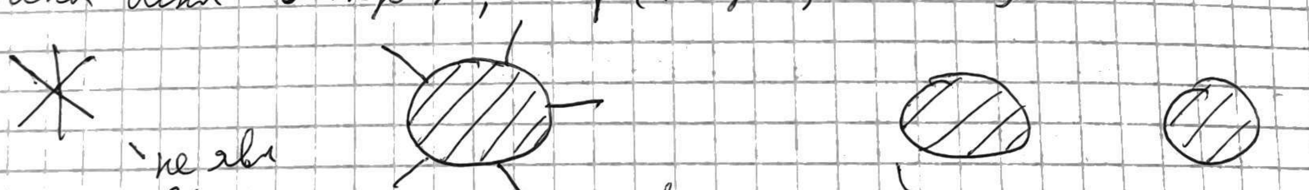
$\Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists P,Q\in\mathcal{P}: P\subseteq D\subset Q$ $\ \mu(Q)-\mu(P)<\varepsilon$, т.е. по кр изм D – измерима (ч.т.д.) ■

§2 Кратные интегралы Римана. Их св-ва

п1. Опр кр инт. Пусть $D\subset\mathbb{R}^n$ – огр, замкн, явл-ся замыканием области

(A)

Пока искл отказ D, неогр. (позже, несоб-инт)



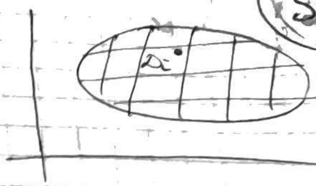
не явл замык обл. $\quad$ не явл. зам обл. $\quad$ не явл. связным

$n=1$ $[a,b]$ – огр, замкн, замык (a,b)

Опр 0.1 Пусть $D\subset\mathbb{R}^n$ удовл (A). В разб $\tau=\{D_i\}_{i=1}^{N}$ мн-ва D на <u>изм</u> мн-ва D_i:

1) $D=\bigcup\limits_{i=1}^{N} D_i$ $\quad$ 2) D_i не имеют общих внутр (·)

3) D_i – замыкание области в $\mathbb{R}^n$ $\forall i=\overline{1,N}$



$\forall i = \overline{1,N}$ (·) $M_i \in D_i$; разб τ с набором (·) $\{M_i\}$

$(\tau, \{M_i\})$ ⊔ дана $f: D \to \mathbb{R}$

$\sigma_\tau(f, \{M_i\}) = \sum_{i=1}^{N} f(M_i)\cdot\mu(D_i)$ – инт. сумма Римана постр. по разб τ и набору (·) $\{M_i\}$

$\lambda(\tau) = \max_{1\le i\le N} \operatorname{diam}(D_i)$ – хар-ка разб τ

$\boxed{О.2}$ Число I наз-ся пределом инт. сумм Римана при $\lambda(\tau)\to 0$, если $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta(\varepsilon)>0\ \forall (\tau, \{M_i\})$ $(\lambda(\tau)<\delta \Rightarrow$ $\Rightarrow |\sigma_\tau(f,\{M_i\}) - I| < \varepsilon)$

$$I = \lim_{\lambda(\tau)\to 0} \sigma_\tau(f, \{M_i\})$$

$\boxed{О.3}$ $f: D\to\mathbb{R}$ наз-ся инт. по Риману на $D\subset\mathbb{R}^n$, если $\exists I\in\mathbb{R}: I = \lim\limits_{\lambda(\tau)\to 0} \sigma_\tau(f, \{M_i\})$

Обозн. $f\in R(D)$

$I = \int\limits_D f(M)\,d\mu$

$n=2$ $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$

$n=3$ $I = \iiint f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

$$I = \int\limits_D \dots \int f(x_1, \dots, x_n)\,dx_1\dots dx_n$$

Замечание: Основные св-ва кратных инт. совпадают с аналогичными св-вами однокр. интегралов (по отр $[a,b]$)

2. Необх. усл. интегр.

{Т1.} Пусть мн $D \subset \mathbb{R}^n$ удовл. усл (А).

Если $f \in R(D)$, то f - огр на D

Д: Дано $\exists I \in \mathbb{R}: \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall (\tau, \{M_i\}) \ (\lambda(\tau) < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |\sigma_\tau(f, \{M_i\}) - I| < \varepsilon)$

Возьм $\varepsilon = 1 \ \forall \tau: \ \lambda(\tau) < \delta(1)$

$\boxed{A1}$ $\quad I - 1 < \sum_{i=1}^{N} f(M_i) \cdot \mu(D_i) < I + 1$

Пусть f - не явл огр на $D = \bigcup_{i=1}^{N} D_i \Rightarrow f$ не явл огр на хотя бы одном ~~подмнож~~ из D_i, например на D_1

фикс (-) $M_2, \dots, M_N$

$$\underbrace{I - 1 - \sum_{i=2}^{N} f(M_i) D_i}_{A_1} < f(M_1) \cdot \mu(D_1) < \underbrace{I + 1 - \sum_{i=2}^{N} f(M_i) D_i}_{A_2}$$

$\mu(D_i) > 0, \ \mu(D_1) > 0$

$\Downarrow$

$\forall M_1 \in D_1$

$$\frac{A_1}{\mu(D_1)} < f(M_1) < \frac{A_2}{\mu(D_1)},$$

т.е. $f(M)$ огр на D_1 $\quad \not\!\!N \quad \blacksquare$

п.3 Св-ва кр инт Р

(i) Суммы Дарбу

Пусть $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ - уд усл (А)

f - огр на D

Возьм $\tau = \{D_i\}$ как в опр 1

$m_i = \inf \{ f(M) \mid M \in D_i \} \quad M_i = \sup \{ f(M) \mid M \in D_i \}$

$s(f, \tau) = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \mu(D_i)$; $S(f, \tau) = \sum_{i=1}^{N} M_i \cdot \mu(D_i)$

— нижние и верхние суммы Дарбу

Св-ва сумм Дарбу

1) $\forall$ τ-разб D $\forall \{\mu_i\}$ $\quad s(f,\{\mu_i\}) \le \sigma_\tau(f,\{\mu_i\}) \le S(f,\{\mu_i\})$

2) если $\tau_1 \prec \tau_2$ (τ_1 – измельч. τ_2), то $s(f,\tau_1) \ge s(f,\tau_2)$, а

$S(f,\tau_1) \le S(f,\tau_2)$

3) $\forall \tau_1, \tau_2 \quad s(f,\tau_1) \le S(f,\tau_2)$

Δ: полностью ан-но $n=1$

δ/з.

$\boxed{\text{Т.2}}$ (Критерий Дарбу)

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – зд изм (A), $f: D \to \mathbb{R}$, f – огр на D, Тогда

$(f \in R(D)) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0\ \exists \tau :\ S(f,\tau) - s(f,\tau) < \varepsilon)$

Δ: Ан-но одном. случаю

$\boxed{\text{Утв 1}}$

Пусть $f: D \to \mathbb{R}$, D – зд. изм. (A).

$f \in R(D) \Rightarrow \lim\limits_{\lambda(\tau)\to 0} S(f,\tau) = \lim\limits_{\lambda(\tau)\to 0} s(f,\tau) = I$; $I = \int_D f(x)\,d\mu$

Δ: Ан-но одном. случ.

$\boxed{\text{Т3}}$ Пусть $f: D \to \mathbb{R}$, D – зд. изм. (A) и $f \in C(D)$. Тогда $f \in R(D)$

Δ: D – огр и замкн в $\mathbb{R}^m$ мн-во (компакт). $f \in C(D) \Rightarrow$

$\xRightarrow{\text{Т. Кантора}}$ f равн. непр на D, т.е $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x, y \in D$

$\left(\rho(x,y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{2\mu(D)}\right)$.

Тогда $\forall \varepsilon > 0$, по $\dfrac{\varepsilon}{2\mu(D)}$ найдем δ и в $\tau = \{D_i\}_{i=1}^N : \lambda(\tau) < \delta$

$\lambda(\tau) = \max\limits_{i=\overline{1,N}} \operatorname{diam}(D_i) < \delta \Rightarrow \forall x, y \in D_i:\ \rho(x,y) < \delta$

$S(f,\tau) - s(f,\tau) = \sum\limits_{i=1}^N (M_i - m_i)\mu(D_i) \le \dfrac{\varepsilon}{2\mu(D)} \underbrace{\sum\limits_{i=1}^N \mu(D_i)}_{\mu(D)} = \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

$M_i - m_i = \sup\limits_{x \in D_i} f(x) - \inf\limits_{y \in D_i} f(y) = \sup\limits_{x,y \in D_i} (f(x) - f(y)) \le \sup\limits_{x,y \in D_i} |f(x) - f(y)| \le \dfrac{\varepsilon}{2\mu(D)}$

$\Rightarrow \quad f \in R(D)$ ▨

кр. Мон.

Замечание: условие (A) и условие 3(были введены, чтобы искл. случай $\mu(D_i)=0$

$\mu(D)=0$

Если требовать заранее огр ф-ии f, то в опр инт. в качестве D и D_i можно брать произв изм по Жордану мн-ва.

$\boxed{T\ 2'}$ Пусть $f: D \to \mathbb{R}$, D-изм. по Жордану мн-во, f-огр на D.

$(f \in R(D)) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon>0\ \exists \tau\ \ S(f,\tau) - s(f,\tau) < \varepsilon)$

$\boxed{\text{Утв } 1'}$ Пусть $f: D \to \mathbb{R}$, D – изм. по Жордану, f-огр на D

$$f \in R(D) \Rightarrow \lim_{\lambda(\tau)\to 0} S(f,\tau) = \lim_{\lambda(\tau)\to 0} s(f,\tau) = I, \text{ где } I = \int_D f(M)\,d\mu$$

$\boxed{T\ 3'}$ Пусть $f: \overline{D} \to \mathbb{R}$, D изм по Ж, $f \in C(\overline{D})$, Тогда $f \in R(D)$

Д: $\overline{D}$ – огр, замкн мн-во (компакт), $f \in C(\overline{D}) \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ - равн. непр на $\overline{D} \supset D \Rightarrow f$ - равн непр на D, далее док-во повторяет д-во T3 ▨

$\boxed{T.4}$ Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$, D-изм. по Ж, замкн. мн.; ф-ие $f: D \to \mathbb{R}$, непр на $D \setminus E$, где $E \subset D$, f-огр на D.

Если $\mu(E)=0$, то $f \in R(D)$

E – мн-во (·) разрыва огр ф-ии f

Д: f-огр на $D \Leftrightarrow \exists C>0\ \forall x \in D\ |f(x)| < C$

$(E)=0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0 : \exists P \in \mathcal{P}\ \ E \subset P, : \mu(P) < \frac{\varepsilon}{4C}$

$\tilde{D} = \overline{D \setminus P}$ – изм по Ж мн-во $\leftarrow$? поч

$f \in R(\tilde{D})$ по $\underset{\sim}{T3}'$, т.е $\forall \varepsilon > 0\ \exists \tau' = \{\tilde{D}_i\}_{i=1}^N : S(f,\tau') - s(f,\tau') < \frac{\varepsilon}{2}$

б $\tau = P \cup \{\tilde{D}_i\}_{i=1}^N$ - разб $D = \tilde{D} \cup P$

$$S(f,\tau) - s(f,\tau) = (M_0 - m_0)\mu(P) + \underbrace{\sum_{i=1}^N (M_i - m_i)\mu(\tilde{D}_i)}_{S(f,\tau') - s(f,\tau') < \frac{\varepsilon}{2}} <$$

$M_0 = \sup_{x \in P} f(x)$, $m_0 = \inf_{x \in P} f(x)$

$M_0 - m_0 \leq 2C$

$$< 2C \cdot \frac{\varepsilon}{4C} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \tau = \{D_i\}$ разб D : $S(f,\tau) - s(f,\tau) < \varepsilon$, т.е. $f \in R(D)$ ▨

(ii) $f, g : D \to \mathbb{R}$, $D \in \mathbb{R}^n$ зуды (A)

$\boxed{\text{Утв 2.}}$ (св-во лин)

П $f, g \in R(D)$, Тогда $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\alpha f + g \cdot \beta \in R(D) \text{ и справ-ва ф-ла } \overbrace{\int_D (\alpha f(M) + \beta g(M))\,d\mu}^{I_{\alpha f + \beta g}} =$$

$$= \alpha \underbrace{\int_D f(M)\,d\mu}_{I_f} + \beta \underbrace{\int_D g(M)\,d\mu}_{I_g}$$

Δ?

$$\underline{\sigma_\tau(\alpha f + \beta g, \{M_i\})} = \alpha\,\sigma_\tau(f, \{M_i\}) + \beta\,\sigma_\tau(g, \{M_i\})$$

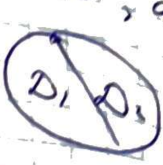
$\lambda(\tau) \to 0$

$$I_{\alpha f + \beta g} = \alpha I_f + \beta I_g$$ ▨

3 (Аддитивность инт по мн-ву)

Ш D_1, D_2 - удовл (A) и не имеют общих внутр (·), а

$D = D_1 \cup D_2$



Тогда а) $f \in R(D) \Rightarrow \forall i=1,2 \ \ f \in R(D_i)$
б) $f \in R(D_i), i=\overline{1,2} \Rightarrow f \in R(D)$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int\limits_{D_1 \cup D_2 = D} f(M)\,d\mu = \int\limits_{D_1} f(M)\,d\mu + \int\limits_{D_2} f(M)\,d\mu$$

$\boxed{T5}$ (О среднем для инт)

Ш $f \in R(D)$, $m = \inf\limits_{x \in D} f(x)$, $M = \sup\limits_{x \in D} f(x)$. Тогда

$$\exists\, \alpha \in [m, M] : \int\limits_D f(M)\,d\mu = \alpha \cdot \mu(D)$$

Сл-ие Если $f \in C(D)$, D - связно, то $\exists (\cdot)\ N \in D$:

$$\int\limits_D f(M)\,d\mu = f(N) \cdot \mu(D)$$

$\boxed{\text{Утв 4}}$ (Св-ва инт, выр-ие нер-ми)

Если ф-ции $g, f \in R(D)$, то

а) $|f| \in R(D)$ и $\left|\int\limits_D f(M)\,d\mu\right| \leq \int\limits_D |f(M)|\,d\mu$

б) для $f(M) \leq g(M)\ \forall M \in D \Rightarrow \int\limits_D f(M)\,d\mu \leq \int\limits_D g(M)\,d\mu$

в) $f \cdot g \in R(D)$ и справ. нер-во К-Б: $\left|\int\limits_D f(M) g(M)\,d\mu\right| \leq \left(\int\limits_D f^2(M)\,d\mu\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int\limits_D g^2(M)\,d\mu\right)^{\frac{1}{2}}$

$n=2$

T1 (д. прямоугольника)

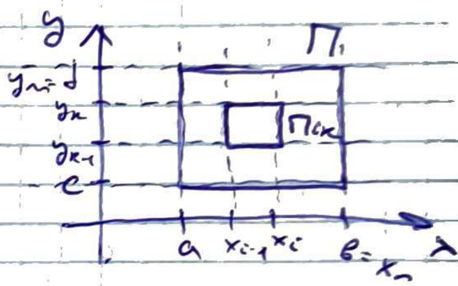
Пусть $f:\Pi\to\mathbb{R}$, $\Pi=[a,b]\times[c,d]$, $f\in R(\Pi)$ и

$\forall x\in[a,b]\ \exists\ J(x)=\int\limits_c^d f(x,y)\,dy$, Тогда

$\exists \int\limits_a^b J(x)\,dx \overset{=I}{}$ и $\int\limits_a^b\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\,dx=I$; где $I=\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right)dx=$

$$=\underbrace{\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)\,dy}_{\text{повт. инт}}.$$

Δ:



в разб. сторон

$a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$

$c=y_0<y_1<\dots<y_m=d$

$\Pi_{ik}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{k-1},y_k]$

$\tau=\{\Pi_{ik}\}_{i=1,k=1}^{n,m}$ – р П

$m_{ik}=\inf\limits_{(x,y)\in\Pi_{ik}} f(x,y)$ $\quad M_{ik}=\sup\limits_{(x,y)\in\Pi_{ik}} f(x,y)$

(·) $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]\ \forall i=\overline{1,n}$ $\quad\int\limits_{y_{k-1}}^{y_k}$

$\forall y\in[y_{k-1},y_k]$ спр-во $\quad m_{ik}\le f(\xi_i,y)\le M_{ik}\Longrightarrow$

$$\Rightarrow m_{ik}\Delta y_k\le\int\limits_{y_{k-1}}^{y_k} f(\xi_i,y)\,dy\le M_{ik}\cdot\Delta y_k$$

$\overset{\text{сумм}}{\underset{\text{по }k}{\Longrightarrow}}\ \sum\limits_{k=1}^m m_{ik}\Delta y_k\le\underbrace{\sum\limits_{k=1}^m\int\limits_{y_{k-1}}^{y_k} f(\xi_i,y)\,dy}\le\sum\limits_{k=1}^m M_{ik}\cdot\Delta y_k$

$$\overset{\S2}{=}\int\limits_c^d f(\xi_i,y)\,dy=J(\xi_i)$$

$\cdot\Delta x_i$ и сумм

$$\sum\limits_{i=1}^n\sum\limits_{k=1}^m m_{ik}\overbrace{\Delta x_i\Delta y_k}^{\mu(\Pi_{ik})}\le\sum\limits_{i=1}^n J(\xi_i)\Delta x_i\le\sum\limits_{i=1}^n\sum\limits_{k=1}^m M_{ik}\overbrace{\Delta x_i\Delta y_k}^{\mu(\Pi_{ik})}$$

$$s(f,\tau)\le\sigma_{\tau_x}(J(x),\{\xi_i\})\le S(f,\tau)$$

1.*

iam $\Pi_{ik} = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_k^2}$

$\lambda(T_x) = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \Delta x_i \le \lambda(T)$

$\underset{\underset{I}{\downarrow}}{s(T,f)} \le \sigma_{T_x}(J(x), \{\xi_i\}) \le \underset{\underset{I}{\downarrow}}{S(T,f)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{\lambda(T_x)\to 0} \sigma_{T_x}(J(x), \{\xi_i\}) = I$, т.е

$\exists \int_a^b J(x)\,dx = I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$ ■

Замечание: 1) Если $\forall y \in [c,d]$ $\exists \overset{J(y)}{\overset{\parallel}{\int_a^b f(x,y)\,dx}}$, Тогда

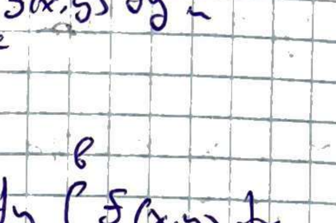
$\exists I = \int_c^d J(y)\,dy$ и $I = \iint_\Pi f(x,y)\,dx\,dy$

2) Если $\exists$ оба инт, т.е $\forall x \in [a,b]$ $\exists \int_c^d f(x,y)\,dy$ и

$\forall y \in [c,d]$ $\exists \int_a^b f(x,y)\,dx$, Тогда

$$\underbrace{\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx}_{\text{двойн. инт}} = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx$$

О.1 $\sqcup$ дана две ф-ии $y_1(x)$, $y_2(x)$, которые опред. и непр на $[a,b]$, причем $\forall x \in [a,b]$ $y_1(x) \le y_2(x)$, Тогда мн-во $D \doteq \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$ наз-ся стандартным отн оси Oy

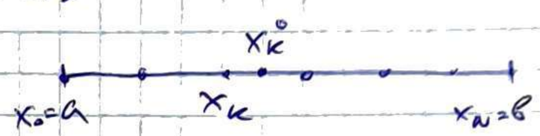


Лемма Пусть $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\varphi \in C[a,b]$, Тогда ~~граф~~ гр. ф-ии φ $\Gamma_\varphi := \{(x,y) \mid x \in [a,b],\ y = \varphi(x)\}$ явл-ся мн-ом нулевой м. по Ж. $\mathbb{R}^2$.

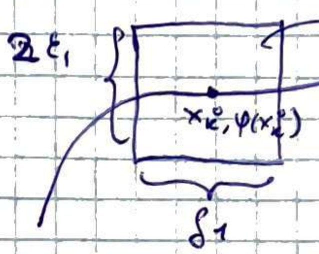
Δ $\varphi \in C[a,b] \Rightarrow \varphi$ - р.н. на $[a,b]$, $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x', x'' \in [a,b]$
$\left(|x'-x''| < \delta \Rightarrow |\varphi(x') - \varphi(x'')| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)} = \varepsilon_1\right)$

Выберем $N \in \mathbb{N}$: $\delta_1 = \frac{b-a}{N} < \delta(\varepsilon_1)$

$x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{N}$, $k = 0, 1, \dots, N$



$x_k^0 = x_k + \frac{1}{2}\frac{b-a}{N}$



Π_k — пр-к с ц. в (·) $x_k^0, \varphi(x_k^0)$

$P = \bigcup_{k=1}^{N} \Pi_k$

$\Gamma_\varphi \subset P$

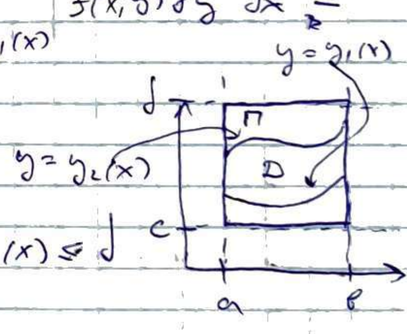
$\mu(P) \leq \sum_{k=1}^{N} \underbrace{2\varepsilon_1 \cdot \delta_1}_{\mu(\Pi_k)} = \sum_{k=1}^{N} \frac{2\varepsilon}{4(b-a)} \cdot \frac{(b-a)}{N} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ ■

Лекция № 3

$\boxed{T2}$

Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ стандартная отн. оси Oy, ф-ия $f \in R(D)$
и $\forall x \in [a,b]$ $\exists \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$, тогда $\exists \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx =$

Тогда $= \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$.



Δ: б $\Pi = [a,b] \times [c,d]$: $\forall x \in [a,b]$. $c < y_1(x) \leq y_2(x) \leq d$

$f^*(M) = \begin{cases} f(M), & M \in D \\ 0, & M \in \Pi \setminus D \end{cases} \Rightarrow f^* \in R(D)$, т.к $f^* = f$ на D

$f^* \in R(\overline{\Pi \setminus D})$, т.к (f^* непр на $\overline{\Pi \setminus D}$ всюду за искл. б.м. точек границы (·) ∂D, а $\mu(\partial D) = 0$, f^* огр на $\overline{\Pi \setminus D}$
$\Rightarrow f^* \in R(\overline{\Pi \setminus D})$)

19 - во адд-ти и T1

$$\iint\limits_{\Pi} f^* dx\,dy = \iint\limits_{D} \overset{f}{f^*} dx\,dy + \iint\limits_{\Pi\setminus D} \overset{0}{f^*} dx\,dy$$

$f^* \in R(\Pi)$ по T4, т.к. f^* непр на Π всюду за искл. б.м. $(\cdot)$ ∂D, а $\mu(\partial D) = 0$.

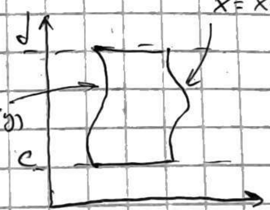
$$\Rightarrow \iint\limits_{D} f\,dx\,dy = \iint\limits_{\Pi} f^* dx\,dy \overset{T1}{=} \int_a^b \left(\int_c^d f^*(x,y)\,dy \right) dx =$$

$$= \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx \quad ■$$

Замечание

1) Если мн-во $D \subset \mathbb{R}^2$ станд отн оси Oy и т.д., то

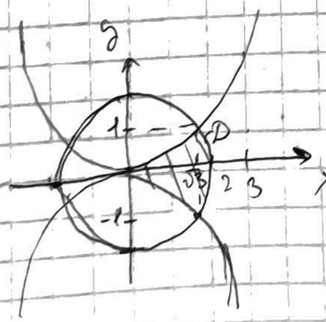
$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx$$



2) Если мн-во D можно разбить на конечное число частей стандартных отн одной из осей, то можно разбить двойной инт на сумму повт. интегралов и к каждому применить теорему.

Пример $\iint\limits_{D} f\,dx\,dy =$, D $x \geq 0$ и огр кр. $3y = \pm x^2$, $x^2+y^2=4$

$f \in C(D)$



$$= \int_0^2 dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy = \int_0^{\sqrt{3}} dx \int_{-\frac{x^2}{3}}^{\frac{x^2}{3}} f\,dy + \int_{\sqrt{3}}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f\,dy =$$

$$= \int_0^1 dy \int_{\sqrt{3y}}^{\sqrt{4-y^2}} f\,dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{\sqrt{3y\cdot(-1)}}^{\sqrt{4-y^2}}$$

Сведение n-кратных интегралов к повторным

О2 П $\Omega \subset \mathbb{R}^n$: $\Omega = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \equiv (\bar{x}, x_n) \mid \bar{x} \in D \subset \mathbb{R}^{n-1}$ и
$$y_1(\bar{x}) \le x_n \le y_2(\bar{x})\} \quad (*),$$
где D – огр, связное мн-во $\mathbb{R}^{n-1}$, явл замыканием области, а ф-ии $y_1(\bar{x})$ и $y_2(\bar{x})$ непр в D.

Ω наз-ся стандартным отн Ox_n

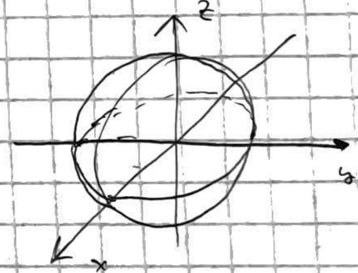
Т3 П $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ станд мн-во отн-но оси Ox_n, $f \in R(\Omega)$, $f(x) \equiv f(\bar{x}, x_n)$ и $\forall \bar{x} \in D$ $\exists \int_{y_1(\bar{x})}^{y_2(\bar{x})} f(\bar{x}, x_n)\,dx_n$, Тогда

$$\exists \int_D \left(\int_{y_1(\bar{x})}^{y_2(\bar{x})} f(\bar{x}, x_n)\,dx_n \right) \underbrace{dx_1 \dots dx_{n-1}}_{= d\bar{x}} = \int_\Omega f\,d\mu$$

$$\int_D dx_1 \dots dx_{n-1} \int_{y_1(\bar{x})}^{y_2(\bar{x})} f(\bar{x}, x_n)\,dx_n$$ – повт инт

Д: (б/д)

<u>Пример.</u>
$$I = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \le R^2} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{x^2+y^2 \le R^2} dx\,dy \int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} f\,dz = \int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} f\,dz$$



~4077

$$I = \iiint_V \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3} =,$$ где V: $x+y+z=1$, $x=0, y=0, z=0$

$$= \iint_D dx\,dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} =$$

Криволинейные координаты в пространстве

$n=3$ ($n=2$ аналог., $n>3$ по аналогии с $n=3$)

Пусть E_3 и $\tilde{E}_3$ – евкл. пр-ва

ДПСК O_{xyz} $\tilde{O}_{uvw}$; $\Omega \subset E_3$, $D \subset \tilde{E}_3$

задано отобр
$$(1)\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$$
$D \xrightarrow{\text{на}} \Omega$ вз. одн., вз. непр.

$x, y, z \in C^1(D)$

обр $u, v, w \in C^1(\Omega)$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} \quad (2)$$

м. Якоби

Пусть $(\cdot)\, M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$

$x_0 = x(u_0, v_0, w_0)$; $y_0 = y(u_0, v_0, w_0)$; $z_0 = z(u_0, v_0, w_0)$

$(\cdot)\, N_0(u_0, v_0, w_0) \in D$

в E_3 6 кривые, проход. через $(\cdot) M_0$

$\vec{R}_1(u) = \{x(u, v_0, w_0), y(u, v_0, w_0), z(u, v_0, w_0)\} = \{x, y, z\}|(u, v_0, w_0)$

$\vec{R}_2(v) = \{x, y, z\}|(u_0, v, w_0)$

$\vec{R}_3(w) = \{x, y, z\}|(u_0, v_0, w)$

Каждая $(\cdot)\, M_0 \in \Omega$ лежит на линии R_i, проходящей через эту точку, причем линии с одинаковыми индексами повтр по разным $(\cdot)$ не пересекаются.

$\forall\, (\cdot)\, M(x,y,z) \in \Omega \;\; \exists_{\text{и}} !\, (\cdot)\, N(u,v,w) \in D$, поэтому коорд u, v, w однозначно определяют положение $(\cdot)\, M$ из Ω.

u, v, w наз-ют криволинейными коорд. $(\cdot)\, M$

Криволинейными коорд в E_3 на Ω

$\vec{R}_1(u)$, $\vec{R}_2(v)$, $\vec{R}_3(w)$ – коорд. линии

$$\vec{\tau}_1 = \frac{d}{du}\vec{R}_1(u)\Big|_{N_0} = \left\{\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right\}\Big|_{(u_0, v_0, w_0) = N_0}$$

ан-но $\vec{\tau}_2 = \frac{d}{dv}\vec{R}_2(v)\Big|_{N_0} = \left\{\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right\}\Big|_{(u_0, v_0, w_0)}$

$$\vec{\tau}_3 = \frac{d}{dw}\vec{R}_3(w)\Big|_{N_0} = \left\{\frac{\partial x}{\partial w}, \frac{\partial y}{\partial w}, \frac{\partial z}{\partial w}\right\}\Big|_{N_0}$$

$\vec{\tau}_i$ – касат. век-ры к коорд. линиям

$|\vec{\tau}_i| \doteq H_i$, $i = 1, 2, 3$ – коэф. Ламе кр. с. к. (криволин. сист. коорд.)

Пусть $J = |$м. Якоби$| \neq 0 \quad \forall (u, v, w) \in D$

$$(\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2, \vec{\tau}_3) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0 \iff \vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2, \vec{\tau}_3 \text{ – не компл.}$$

$\Downarrow$

они обр. базис.

Криволинейная система коорд. наз-ся ортогон., если $\vec{\tau}_i$ попарно орт., т.е. $(\vec{\tau}_i, \vec{\tau}_j) = 0$, $i \neq j$.

Якобиан $J = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = (\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2, \vec{\tau}_3) = \begin{cases} H_1 H_2 H_3 \text{ – правая орт. с.к.} \\ -H_1 H_2 H_3 \text{ – левая} \end{cases}$

$\leftarrow$ еще 1 запись

$\uparrow$

для орт. сист. коорд.

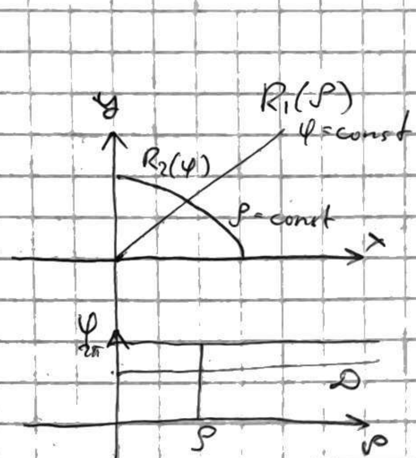
II. Некоторые системы кр. коорд.

1. Полярные коорд. $(n = 2)$

$x = \rho\cos\varphi \quad 0 \le \rho \le +\infty$

$y = \rho\sin\varphi \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$

$u \to \rho, \quad v \to \varphi$



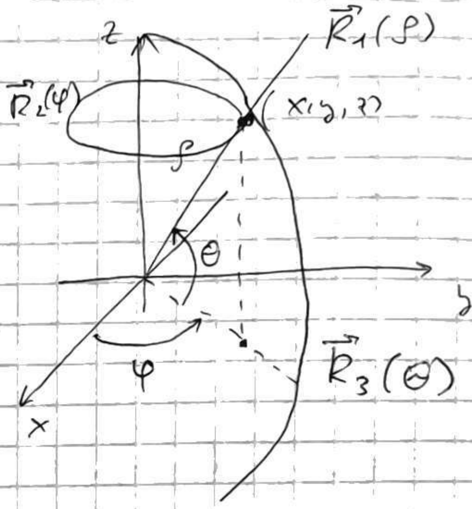
$\vec{\tau}_1 = \{\cos\varphi_0, \sin\varphi_0\} \quad H_1 = 1 \quad \Leftarrow \quad \vec{R}_1(\rho) = \{\rho\cos\varphi_0, \rho\sin\varphi_0\}$

$\vec{\tau}_2 = \{-\rho_0\sin\varphi_0, \rho_0\cos\varphi_0\} \quad H_2 = \rho_0 \quad \vec{R}_2(\varphi) = \{\rho_0\cos\varphi, \rho_0\sin\varphi\}$

$\Rightarrow \vec{\tau}_1$ и $\vec{\tau}_2$ орт.

$$J = \rho\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = \rho$$

2. Сферические коорд в E_3



$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\cos\varphi \\ y = \rho\cos\theta\sin\varphi \\ z = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \rho > 0 \\ \varphi \in [0, 2\pi) \\ \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{array}$$

$\rho = u,\ \varphi = v,\ \theta = w$

коорд. в.

$\vec{r}_1 = \{\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta\}$, $H_1 = 1$

$\vec{r}_2 = \rho\{-\cos\theta\sin\varphi, \cos\theta\cos\varphi, 0\}$, $H_2 = \rho\cos\theta$

$\vec{r}_3 = \rho\{-\sin\theta\cos\varphi, -\sin\theta\sin\varphi, \cos\theta\}$, $H_3 = \rho$

$(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = 0$, $(\vec{r}_2, \vec{r}_3) = 0$, $(\vec{r}_1, \vec{r}_3) = 0$ ортог. с-ма $\Rightarrow J = H_1 H_2 H_3 = \rho^2\cos\theta$

3. Цилиндр коорд в E_3

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0 \le \rho < +\infty \\ \varphi \in [0, 2\pi) \\ z \in \mathbb{R} \end{array}$$

$u = \rho,\ v = \varphi,\ w = z$

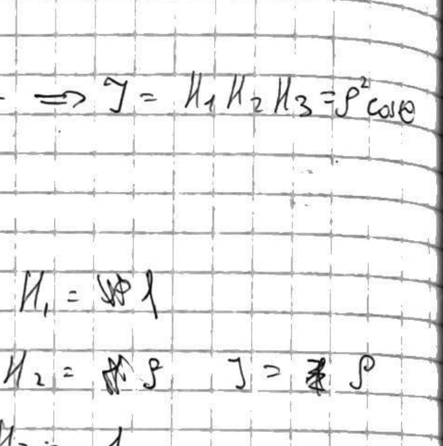
$\vec{r}_1 = \{\cos\varphi, \sin\varphi, 0\}$, $H_1 = 1$

$\vec{r}_2 = \rho\{-\sin\varphi, \cos\varphi, 0\}$, $H_2 = \rho$, $J = \rho$

$\vec{r}_3 = \{0, 0, 1\}$, $H_3 = 1$

Замена перем в кратном интеграле.

{T1} Пусть отобр $y: D \to \Omega$, $D \subset \tilde{E}_n$, $\Omega \subset E_n$



$y = (y_1(x_1 \dots x_n), \dots, y_n(x_1 \dots x_n))$:

1) y вз. одн. отобр Ω на D

2) $y \in C^1(\bar{D})$, т.е. $\forall\, i, j = \overline{1, n}$ ф-ции $\frac{\partial y_i}{\partial x_j}$ — непр на D

3) $\forall x \in D$ Якобиан $J(x) = \frac{D(y_1, \dots, y_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}(x) \ne 0$

Пусть $f(y)$: $f \in R(\bar{\Omega})$, $\bar{\Omega}$ — измер

Тогда спр-ва ф-ла: $\int\limits_{\Omega} f(y_1 \dots y_n)\, dy_1 \dots y_n = \int\limits_{D} f(y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_n(x_1, \dots, x_n)) \cdot |J(x)|\, dx_1 \dots dx_n$

Ф-ла замены перем в кратном инт.

$\triangleright$ д/з

В частности

1) Сферические коорд. $J = \frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,\theta)} = \rho^2\cos\theta$

$\rho > 0,\ \varphi \in [0, 2\pi),\ \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$\iiint\limits_{\Omega_{x,y,z}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{D_{\rho,\varphi,\theta}} f(\rho\cos\varphi\cos\theta, \rho\cos\theta\sin\varphi, \rho\sin\theta)\,\rho^2\cos\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$$

и т.д.

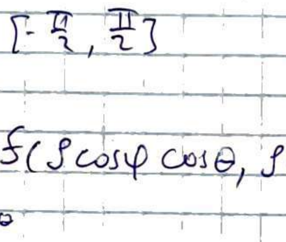
Пример

1) $I = \iint\limits_{\Omega} (x^2+y^2)\,dx\,dy = \iint\limits_{D} (vu + \frac{u}{v})\cdot\frac{1}{2v}\,du\,dv =$ отв

$\Omega = \{(x,y) \mid 1 \le xy \le 2,\ 0 \le x \le 2y \le 4x\}$

$\begin{cases} u = xy \\ v = \cancel{x+y}\ \frac{y}{x} \end{cases}$ $\quad 1 \le u \le 2$, $\quad \frac{1}{2} \le v \le 2$

$\begin{cases} x = \sqrt{\frac{u}{v}} \\ y = \sqrt{uv} \end{cases}$

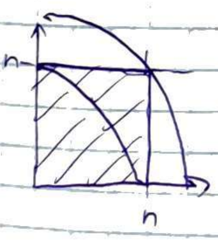


$$J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{\sqrt{u}}{2v\sqrt{v}} \\ \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \end{vmatrix} =$$

$=$

2) $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ — инт. Эйлера-Пуассона

$I = \lim\limits_{n\to+\infty} \underbrace{\int_0^n e^{-x^2}dx}_{J_n}$, $\quad J_n^2 = \int_0^n e^{-x^2}dx \int_0^n e^{-y^2}dy = \iint\limits_{\substack{0\le x\le n \\ 0\le y\le n}} e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy$



$$J_n^2 = \int_0^n dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} r\,d\varphi + \int_n^{\sqrt{2}n} dr \int_{\arccos\frac{n}{r}}^{\arcsin\frac{n}{r}} e^{-r^2} r\,d\varphi =$$

$x = n$

$r\cos\varphi = n$

$\varphi = \arccos\frac{n}{r}$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^n e^{-r^2} r\,dr + \int_n^{\sqrt{2}n} e^{-r^2} r \cdot$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{n}{\cos\varphi}} e^{-r^2} r\,dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{n}{\sin\varphi}} e^{-r^2} r\,dr = -\frac{1}{2}$$

Несобственный кратный интеграл.

$\boxed{О1.}$ Пусть G откр мн-во в $\mathbb{R}^n$. Посл.-ть откр мн-в $\{G_k\}_{k=1}^{\infty}$ наз-ся монотонно исчерпывающей мн-во G, если

1) $\forall k \in \mathbb{N}$ $\overline{G_k} \subset G_{k+1}$

2) $G = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_k$

Напр: $G = \mathbb{R}^2$, $\{G_k\}_{k=1}^{\infty} = \{x^2+y^2 < k^2\}$

$\boxed{О.2}$ Пусть $f: G \to \mathbb{R}$, G-откр. мн-во в $\mathbb{R}^n$, $f \in R(D)$, $\forall D$ - измер и $\overline{D} \subset G$. Если $\exists \lim\limits_{k\to+\infty} \int\limits_{G_k} f\,d\mu$, независящий от монот ~~исч~~ исч. G. посл $\{G_k\}_{k=1}^{\infty}$, то этот предел наз кр- нес. инт. в фун f по G

! $\{G_k\}_{k=1}^{\infty}$ посл. изм. ~~на~~ мн-в.

$\boxed{Т.1}$ Пусть G - откр. мн-во. в $\mathbb{R}^n$, $f(x) \geq 0$ на G, $f \in R(D)$ $\forall D$ изм и $\overline{D} \subset G$. Если $\exists \{G_k\}_{k=1}^{\infty}$ посл изм монот исч. G, для которой г.п. $a_k = \int\limits_{G_k} f\,d\mu$ огр сверху, то $\int\limits_{G} f\,d\mu$ сх-ся

$\int\limits_{G} f\,d\mu = \lim\limits_{k\to\infty} a_k$

Δ: $\overline{G_k} \subset G_{k+1}$, $a_{k+1} - a_k = \int\limits_{G_{k+1}} f\,d\mu - \int\limits_{G_k} f\,d\mu = \int\limits_{G_{k+1}\setminus G_k} f\,d\mu \geq 0$

$\Rightarrow a_k$ неуб. ~~[illegible]~~ г.п., a_k - огр св.

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{a_k\to\infty} a_k = I$, $a_k \leq I$

Б ~~[illegible]~~ $\{G'_k\}_{k=1}^{\infty}$ другая посл. монот исч. ~~[illegible]~~ откр мн-в

(?) $\exists \lim\limits_{k\to+\infty} \underbrace{\int\limits_{G'_k} f\,d\mu}_{a'_k} = I$

в $\forall n_0 \in \mathbb{N}$, G_{n_0} - фикс, $\exists n_1 \in \mathbb{N} : \overline{G'_{n_0}} \subset G_{n_1}$ $\Longrightarrow$

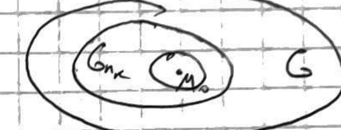
П $N^\wedge$ $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists M_n : M_n \in \overline{G'_{n_0}} \wedge M_n \notin G_{n_1}$

$\{M_n\}$ - посл $(\cdot)$ $\overline{G'_{n_0}}$ - Компакт.

$\Rightarrow \exists \{M_{n_k}\} : M_{n_k} \to M_0 \in \overline{G'_{n_0}} \subset G,\ k \to \infty$

$\{G_k\}$ - как монот исч G, то $\exists N_1\ \forall n > N_1\ M_0 \in G_{N_1} \subset G_n$

G_{N_1} - откр $\Rightarrow \exists\ \varepsilon > 0\ U_\varepsilon(M_0) \subset G_{N_1}$



по $\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)\ \forall n_k > N\ M_{n_k} \in U_\varepsilon(M_0)$

в $n_k > \max(N, N_1) \Rightarrow \underline{M_{n_k}} \in U_\varepsilon(M_0) \subset G_{N_1} \subset \underline{G_{n_k}}$ $N^\wedge$

$\Longrightarrow$ $a'_{n_0} = a_{n_1} \le I\ \ \forall n_0 \in \mathbb{N}$, т.е.

$\{a'_k\}$ - огр сл $\Rightarrow \exists \lim a'_k = I'$ и $I' \le I$, $I \le I'$ ∎

$\Downarrow$

$I' = I$

$\boxed{T2}$ (Признак ср-ия)

П G - откр мн-во $\mathbb{R}^n$, а ф-ии f, g опр на G и для $\forall \Rightarrow$ гуд

$\forall x \in G\ \ 0 \le f(x) \le g(x)$, где f и g удовл О.2.

Тогда (i) из сход-ти $\int_G g\,d\mu \Rightarrow$ сх. $\int_G f\,d\mu$

(ii) из расх. $\int_G f\,d\mu \Rightarrow$ расх $\int_G g\,d\mu$.

□ П $\{G_k\}_{k=1}^{\infty}$ послед. откр., изм мн-в. монот исч. G

Тогда $a_k := \int_{G_k} f\,d\mu \le \int_{G_k} g\,d\mu =: b_k$

(i) $\{b_k\}$ - сх., огр $\Rightarrow$ $\{a_k\}$ - огр., сход $\overset{\boxed{T1}}{\Rightarrow} \exists \int_{G} f\,d\mu = \lim_{k \to \infty} a_k$

(ii) от противного из (i) ∎

2

1

∐ G - откр. мн-во $\mathbb{R}^n$, f удовл. О.2, $n \geq 2$

Тогда $\left(\int_G f\,d\mu - \text{сх}\right) \Leftrightarrow \left(\int_G |f|\,d\mu - \text{сх}\right)$

Δ: (б/д)

Глава 8

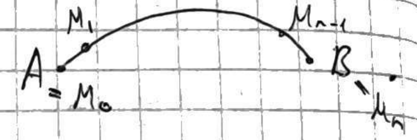
Криволинейные и Поверхностные интегралы

Криволин. инт. первого рода

Задача 2 тип

$n = 3$, E_3, ДПСК $Oxyz$

спрямл. кр $L = \overset{\frown}{AB}$, простая (без самопересеч)



$\vec{r}(t): [a,b] \to E_3$, $\vec{r}(a) = \vec{OA}$, $\vec{r}(b) = \vec{OB}$

$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$\forall (\cdot)\ (x,y,z) \in L$ опред $f(x,y,z) \in \mathbb{R}$ $\quad f: L \to \mathbb{R}$

$f(x(t), y(t), z(t)): [a,b] \to \mathbb{R}$

б τ разб $[a,b]$ $\quad a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$; $\{t_i\}_{i=0}^n \to$

$\to$ разб $\{M_i\}_{i=0}^n$ - разб. кр L $\quad \overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ - частич. дуга разб. кр L

Δl_i = дл. $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$, $i = \overline{1,n}$; $\lambda(\tau) = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \Delta l_i$

$\forall\ i = \overline{1,n}$ выберем $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $\underbrace{\{\xi_i\}_{i=1}^n}_{\xi}$ - набор $(\cdot)$

$(x(\xi_i), y(\xi_i), z(\xi_i)) = N_i \in \overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$

$$\sigma(f, \tau, \{\xi_i\}) = \sum_{i=1}^{n} f(N_i) \Delta l_i$$

$\boxed{О.1}$

Число I наз-ся пределом инт. суммы $\sigma(f, \tau, \{N_i\})$ и $\{\xi_i\}$ при $\lambda(\tau) \to 0$, если

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall (\tau, \xi) \ (\lambda(\tau) < \delta \Rightarrow |\sigma(f, \tau, \underbrace{\{\xi_i\}}_{\xi}) - I| < \varepsilon)$

$\boxed{О.2}$

Если для ф-ии $f: L \to \mathbb{R}$ $\exists I \in \mathbb{R}$, что вып. $\underline{О.1}$, то говорят, что для ф-ии f сущ. криволин. инт. первого рода по кривой L

Замечание

1) Если L - простая кр., то $\vec{r}(t) : [a, b] \to E_3$ вз. однозн отобр отр $[a, b]$ на кр-ую L

2) Если кр L гладкая или кусочно гладкая, т.е. $x(t), y(t), z(t) \in C^1[a,$

то из того, что $(\lambda(\tau) \to 0) \Rightarrow (\max\limits_{i=\overline{1,n}} \Delta l_i \to 0)$

$$\Delta l_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\vec{r}\,'(t)| dt \le M \Delta t_i$$

3) Если кр L без особых точек, т.е. $|\vec{r}\,'(t)| \ne 0$

$\forall t \in [a, b]$ $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 \ne 0$ на $[a, b]$,

то $(\max\limits_{i=\overline{1,n}} \Delta l_i \to 0) \Rightarrow (\lambda(\tau) \to 0)$

$$\Delta l_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\vec{r}\,'(t)| dt \ge m \Delta t_i, \ m > 0$$

$$I = \int_L f(x, y, z) dl = \int_{\overset{\frown}{AB}} f(M) dl = \lim_{\lambda(\tau) \to 0} \sigma(f, \tau, \xi)$$

24

$\boxed{T1}$ Пусть $L = \breve{AB}$ с вект. парам. $\vec{r}(t) : [a,b] \to E_3$,

L – гл. кр. без особ. точек, а ф-ция $f : L \to \mathbb{R}$ непр на L, т.е.

($f(\vec{r}(t))$ – непр на $[a,b]$), Тогда $\exists \int\limits_L f(M)\,dl = \int\limits_a^b f(x(t),y(t),z(t)) \cdot |\dot{\vec{r}}(t)|\,dt$

Δ: Б $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{n}$ разб. $[a,b]$, $l_i = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} |\dot{\vec{r}}(t)|\,dt$

$\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $\{\xi_i\}_{i=1}^{n}$ $\underbrace{|\dot{\vec{r}}(t)|\, f(x(t),y(t),z(t))}_{g(t)}$ – непр на $[a,b] \Rightarrow g \in R[a,b]$

по теор о непр суперпозиции

$$\exists \int\limits_a^b f(x(t),y(t),z(t))\,|\dot{\vec{r}}(t)|\,dt = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} f(x(t),y(t),z(t))\,|\dot{\vec{r}}(t)|\,dt$$

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x(\xi_i), y(\xi_i), z(\xi_i)) \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} |\dot{\vec{r}}(t)|\,dt$$

$$R = \left| \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \Big(f(x(t),y(t),z(t)) - f(x(\xi_i),y(\xi_i),z(\xi_i)) \Big) |\dot{\vec{r}}(t)|\,dt \right| \leq$$

?($\leq$)

$t, \xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ $\quad \Delta t_i = t_i - t_{i-1} < \lambda(\tau)$

$\tilde{g}(t) = f(x(t),y(t),z(t))$ – непр. на $[a,b] \xRightarrow{\text{т. Кантора}} f(x(t),y(t),z(t))$ – равн. непр на $[a,b]$,

т.е. $\forall \varepsilon_1 > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall t', t'' \in [a,b] \ \left(|t' - t''| < \delta \Rightarrow |\tilde{g}(t') - \tilde{g}(t'')| < \varepsilon_1 \right)$, $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{l}$

l – дл. $\breve{AB}$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \left| f(x(t),y(t),z(t)) - f(x(\xi_i),y(\xi_i),z(\xi_i)) \right| |\dot{\vec{r}}(t)|\,dt \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \max_{t, \xi_i \in [t_{i-1}, t_i]} |\tilde{g}(t) - \tilde{g}(\xi_i)| \cdot \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} |\dot{\vec{r}}(t)|\,dt <$$

выберем $\lambda(\tau) < \delta$ – из опр равн. непр

$$< \frac{\varepsilon}{l} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} |\dot{\vec{r}}(t)|\,dt}_{\int\limits_a^b |\dot{\vec{r}}(t)|\,dt \,=\, l} = \varepsilon, \text{ т.е. } \exists \lim_{\lambda(\tau) \to 0} \sigma = I \quad \blacksquare$$

Св-ва кр инт 1-го рода

Пусть L — гл. кр. без особых точек, f и g интегр по кривой L, тогда справ. св-ва

1. Линейность

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\quad \int\limits_{\breve{AB}} (\alpha f(M) + \beta g(M))\,dl = \alpha \int\limits_{\breve{AB}} f(M)\,dl + \beta \int g(M)\,dl$

2. Аддитивность. Если $\breve{AB} = \breve{AC} \cup \breve{CB}$.

$\int\limits_{\breve{AB}} f(M)\,dl = \int\limits_{\breve{AC}} f(M)\,dl + \int\limits_{\breve{CB}} f(M)\,dl$

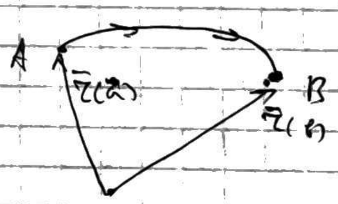
3. (f интегр по $\breve{AB}$) $\Rightarrow$ (f — огр на $\breve{AB}$)

4. (f интегр по $\breve{AB}$) $\Rightarrow$ ($\{|f|$ — интегр. по $\breve{AB}\}$ и $\{f \cdot g$ инт по $\breve{AB}\}$ и спр-во нер-во К-Б $\left| \int\limits_{\breve{AB}} f(M) g(M)\,dl \right| \le \left(\int\limits_{\breve{AB}} f^2(M)\,dl \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{\breve{AB}} g^2(M)\,dl \right)^{\frac{1}{2}}$)

Криволин инт 2-го рода.

Пусть $\breve{AB}$ — простая спрямляемая кривая в ~~3х мерн~~ E_3, ДПСК $Oxyz$, $\vec{r}(t)$ параметр. $\vec{r}(a) = \vec{OA}$ $\quad \vec{r}(b) = \vec{OB}$, t идет от a к b

кр $\breve{AB}$ — ориентир-на, задано напр дв-ие для опр-ти $a < b$



И в T-разб $[a, b]$ $\quad a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$

$\vec{OM_i} = \vec{r}(t_i)$

$\Delta \vec{r}_i = \vec{OM_i} - \vec{OM_{i-1}}$

$\vec{OM_i} = (x(t_i), y(t_i), z(t_i))$

$\Delta \vec{r}_i = (\underbrace{x(t_i) - x(t_{i-1})}_{\Delta x_i}, \underbrace{y(t_i) - y(t_{i-1})}_{\Delta y_i}, \underbrace{z(t_i) - z(t_{i-1})}_{\Delta z_i})$

Пусть опр $\vec{F} : \breve{AB} \to E_3$; $\vec{F} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$

$\forall i = \overline{1,n}$ $\quad \xi_i \in [t_{i-1}, t_i] \longmapsto \{\xi_i\}_{i=1}^{n}$ набор (·)

$N_i = M(x(\xi_i), y(\xi_i), z(\xi_i)) \in \overset{\smile}{M_{i-1}M_i}$

$$\sigma(\vec F, \tau, \{N_i\}) = \sum_{i=1}^{n} (\vec F(N_i), \Delta \vec r_i) = \sum_{i=1}^{n} (P(N_i)\Delta x_i + Q(N_i)\Delta y_i + R(N_i)\Delta z_i)$$

$\boxed{О.1.}$

Если $\exists$ (кон.) предел инт. суммы $\sigma(\vec F, \tau, \{N_i\})$ при пар. разб. $\lambda(\tau) \to 0$, то этот предел наз-ся кр. инт 2-го рода от вект. ф-ии $\vec F$ по кр $\overset{\smile}{AB}$

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} \vec F d\vec l = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} P dx + Q dy + R dz$$ – криволин. инт 2-го рода

! Если $A = B$, то $\overset{\smile}{AB}$ наз-ся замкн. контуром

$\oint\limits_L \vec F d\vec l$ – интеграл по з. контуру L

Сведение интеграла 2 рода к инт по отрезку

$\boxed{Т1}$ Пусть $\overset{\smile}{AB}$ – гл кр. без особых точек с парам. $\vec r(t) : [a, b] \to E_3$ $\vec r(a) = \overrightarrow{OA}$ $\vec r(b) = \overrightarrow{OB}$, т.о.

$\overset{\smile}{AB}$ с зад. ориент от (·) A к (·) B

Пусть на $\overset{\smile}{AB}$ зад. и непр в. ф-ия $\vec F(M) = (P(M), Q(M), R(M))$

$F : \overset{\smile}{AB} \to E_3$, Тогда ~~...~~ опр ф-ла

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} \vec F d\vec l = \int_a^b (P(x(t), y(t), z(t)) \cdot \dot x(t) + Q \dot y(t) + R \cdot \dot z(t)) dt = \int_a^b (\vec F(\vec r(t)), \dot{\vec r}(t)) dt$$

Δ: Пусть $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{n}$ – разб $[a, b]$ $\lambda(\tau)$ – пар-р

$\forall i = \overline{1, n}$ $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ ~~...~~ $\{\xi_i\}_{i=1}^{n}$

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\left(\vec F(\vec r(\xi_i)), \Delta\vec r_i\right) - \int_a^b \left(\vec F(\vec r(t)), \dot{\vec r}(t)\right)dt\right| =$$

$$\Delta\vec r_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{\vec r}(t)\,dt$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n}\left(\vec F(\vec r(\xi_i)), \int_{t_{i-1}}^{t_i}\dot{\vec r}(t)dt\right) - \int_a^b \left(\vec F(\vec r(t)), \dot{\vec r}\right)dt\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left(\vec F(\vec r(\xi_i)) - \vec F(\vec r(t)), \dot{\vec r}(t)\right)dt\right| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left|\vec F(\vec r(\xi_i)) - \vec F(\vec r(t))\right| \, |\dot{\vec r}(t)|\,dt \le$$

$\vec F(\vec r(t))$ – равн. непр. на $[a,b]$

$\forall \varepsilon>0\ \exists\, \delta(\varepsilon)>0 : \forall\, t', t'' \in [a,b]\ \left(|t'-t''|<\delta \Rightarrow |\vec F(\vec r(t')) - \vec F(\vec r(t''))| < \varepsilon_1\right)$

где $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{l}$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \max_{\xi_i, t\in[t_{i-1}, t_i]} \left|\vec F(\vec r(\xi_i)) - \vec F(\vec r(t))\right| \cdot \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\dot{\vec r}(t)|\,dt <$$

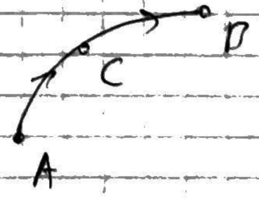
$$< \frac{\varepsilon}{l}\cdot l = \varepsilon \quad \blacksquare$$

Замечание:

1 Если ф-ии $\vec F$ и $\vec G$ инт. по $\breve{AB}$, то

$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \int_{\breve{AB}} (\alpha\vec F + \beta\vec G)\,d\vec l = \alpha\int_{\breve{AB}} \vec F\,d\vec l + \beta\int_{\breve{AB}} \vec G\,d\vec l$

2) $\breve{AB} = \breve{AC} \cup \breve{CB}$



$$\int_{\breve{AB}} \vec F\,d\vec l = \int_{\breve{AC}} \vec F\,d\vec l + \int_{\breve{CB}} \vec F\,d\vec l$$

3) $\int_{\breve{AB}} \vec F\,d\vec l = -\int_{\breve{BA}} \vec F\,d\vec l$

4. Связь криволин. инт. 1-го и 2-го рода.

$$\int\limits_{\breve{AB}} \vec{F}\, d\vec{l} = \int_a^b (\vec{F}, \dot{\vec{r}}(t))\, dt = \int_a^b \Big(\vec{F}, \underbrace{\frac{\dot{\vec{r}}(t)}{|\dot{\vec{r}}(t)|}}_{\vec{\tau}}\Big) \underbrace{|\dot{\vec{r}}(t)|\, dt}_{ds} = \int_a^l (\vec{F}, \vec{\tau})\, ds$$

$F = \{P, Q, R\}$

$\breve{AB}$ $\vec{r}(t)$ $[a,b] \to \mathbb{R}$

5. Плоские кр.

Γ: $y = y(x)$, $a \le x \le b$ $\quad$ $y(x)$ — непр. дифф. ф на $[a,b]$

$\vec{F} = \{P, Q\}$

$\vec{r}(t) = (t, y(t))$ $\quad$ $\int\limits_{\breve{AB}} \vec{F}\, d\vec{l} = \int_a^b (P(x,y(x)) + Q(x,y(x))\, y'(x))\, dx =$

$$= \int_a^b \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{P\, dx} + Q\, dy = \int\limits_{\breve{AB}} Q\, dy$$

Формула Грина

$n = 2$ ДПСК Oxy

О.1

$G = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$ — обл. I-го типа

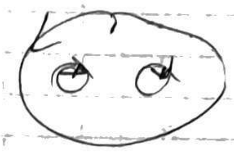
$G = \{(x,y) \mid c \le y \le d,\ x_1(y) \le y \le x_2(y)\}$ — обл II-го типа

$y_i(x)$ и $x_i(y)$, $i = \overline{1,2}$ — непр. ф. на соотв. отрезках

О.2

Мн-во G на пл-ти наз-ся простой обл., если G м.б. разбита на кон. число как областей I типа, так и на кон. число обл. II-го типа

О.З
Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ с гр. $\partial G = \Gamma$, сост. из кон. числа простых замкн. кр. (контуров Жордана)



Гр. G наз-ся полож. ориент., если на каждой ее части ориент. задана так, что при обх-е этой ч. границы обл. ост-ся слева.

$\oint\limits_\Gamma$ — инт. пол. ориент. (по отн. к G) гр Γ

$\boxed{T1}$ (Ф-ла Грина)

(i) Пусть G — пр-ая обл ~~квадрир.~~ $\mathbb{R}^2$ с полож. ориент.-ой ~~полож. ориент.~~ границей Γ, Γ — кус.-гл. кр., а ф-ии $P, Q \in C^1(\overline{G})$, $P = P(x,y)$, $Q = Q(x,y)$.

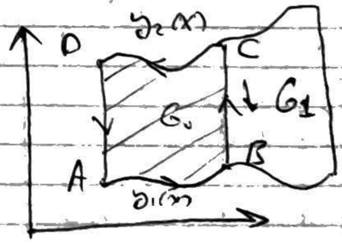
Тогда $$\oint\limits_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Δ:

Пусть G_0 — обл. 1-го типа

$$\iint\limits_{G_0} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dy = \int_a^b \left(P(x,y_2(x)) - P(x,y_1(x))\right) dx =$$

$$= -\int\limits_{\breve{AB}} P\,dx - \int\limits_{\breve{CD}} P\,dx - \underbrace{\int\limits_{\breve{BC}} P\,dx}_{0} - \underbrace{\int\limits_{\breve{DA}} P\,dx}_{0} =$$



$$= -\int\limits_{ABCDA} P\,dx = -\oint\limits_{\partial G_0} P\,dx$$ Суммируя по всем обл. 1-го т. $\Rightarrow$ $\boxed{\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\oint\limits_\Gamma P\,dx}$

По усл. G — прост. обл., т.е. G допуск. разб. на кон-ое число обл. 1-го типа

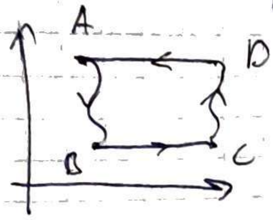
(ii) Пусть G_0 — обл II-го типа

$$\iint\limits_{G_0} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx = \int_c^d Q(x_2(y),y) - Q(x_1(y),y)\,dy =$$

$$= \oint\limits_{\partial G_0}$$

30)

$$= \int_{AB} Q\,dy + \int_{DC} Q\,dy + \underbrace{\int_{BC} Q\,dy}_{0} + \underbrace{\int_{DA} Q\,dy}_{0} = \int_{ABCDA} Q\,dy = \oint_{\partial G} Q\,dy$$



$$\iint_G \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \oint_\Gamma Q\,dy$$

$$\Rightarrow \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint_\Gamma Q\,dy + P\,dx \quad \blacksquare$$

Т-1'

Пусть G — огр. обл. $\mathbb{R}^2$ с кусочно гладкой гр. Γ — кус. гл. кр., а ф-ции $P, Q \in C(\bar{G})$, $\exists\ \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y} \in C(G)$, а инт. в л.ч. ф-лы Грина $\exists$ как несобств.

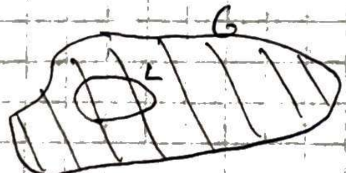
$$\Rightarrow \oint_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Д: б/д.

Независимость криволинейного инт. 2-го рода от пути инт. на пл-ти (для потенц. векторного поля)

О.1

Обл. $G \subset \mathbb{R}^2$ наз-ся односвязной, если $\forall L$ прост. замкн. кр. целиком лежащ. в G — обл. огр. этой кр. тоже целиком лежит в G



{Т1}

Пусть G – односв. обл. $\mathbb{R}^2$, $\vec{F} = \{P, Q\}$ $P, Q \in C(G)$ и $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x} \in C(G)$,

Тогда след. усл. эквив.-ны:

1. $\oint_L Pdx + Qdy = 0$ $\forall$ прост. замкн. кус.-гл. конт. L, цел. леж. $\in G$

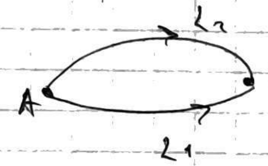
2. $\int_{\breve{AB}} Pdx + Qdy$ не завис. от пути $\breve{AB} \subset G$, лишь от A и B

3. $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = dU$, $U(x,y)$ в обл. G

4. $\forall x, y \in G$ $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

Δ По схеме $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$

$1 \to 2$

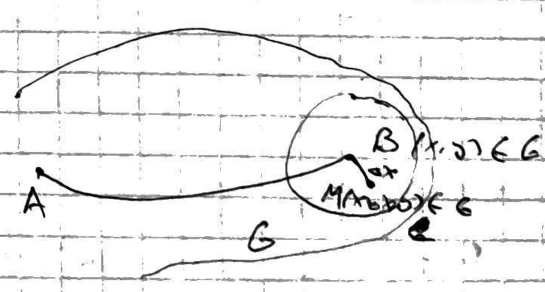


$$\int_{L_1} Pdx + Qdy \overset{?}{=} \int_{L_2} Pdx + Qdy$$

В з. контур L: $L_1 \cup L_2^- = L_1 \cup L_2^-$ $\quad 1 \Rightarrow 0 = \oint_L Pdx + Qdy =$

$$= \int_{L_1} + \int_{L_2^-} = \int_{L_1} - \int_{L_2} = 0$$

$2 \to 3$



Пусть $A(x_0, y_0) \in G$
$B(x, y) \in G$

$U(x,y)$ – ? $\quad$ A – фикс.

$\underline{U(B)} = \int_{AB} Pdx + Qdy$ – функ. $B(x,y)$

$\Rightarrow U(x,y)$ – опр. в G

Покажем, что $\forall (x,y) \in G$ $\exists$ $\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y)$, $\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y)$

$$\frac{U(x+\Delta x, y) - U(x,y)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\left(\int_{AM} - \int_{AB}\right) = \frac{1}{\Delta x}\int_{BM} Pdx + Q\cancel{dy}^{0} = \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} P(t,y)\,dt \;=$$

$AM = AB + BM$; BM: $y = \mathrm{const}$

32) Т.о. ср. для инт. от перем. φ

$$\ominus \frac{1}{\Delta x} P(x+\theta_0 x, y)\cdot \Delta x \xrightarrow[\Delta x\to 0]{} P(x,y)$$

$\Rightarrow \exists \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = P(x,y) \in C(G)$, Ан-но $\exists \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = Q(x,y) \in C(G)$,

т.е. $u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ — непр. в $G \Rightarrow u(x,y)$ — дифф. и

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\cancel{(x,y)}\, dx + \frac{\partial u}{\partial y}\, dy = P\,dx + Q\,dy$$

(3 → 4)

$$du(x,y) = P\,dx + Q\,dy, \quad P = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial u}{\partial y}$$

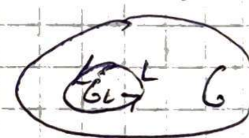
По усл. $\exists \underbrace{\frac{\partial P}{\partial y}}_{\in C(G) \text{ по усл.}} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ и $\exists \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial x}}_{\in C(G)} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$

т. о равенстве смеш. произв. $\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, т.е. $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

(4 → 1)

в $\forall$ кус. гл. конт. $L \subset G$ — односв., L — гран. обл. G_L,

тогда $\oint\limits_L P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{G_L} \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)}_{=0} dx\,dy = 0$ ■



$P, Q \in C^1(\overline{G_L})$

Замечание:

$F = \{P, Q\} : G \to \mathbb{R}^2$ — вект. поле; $\exists u(x,y) : \frac{\partial u}{\partial x} = P \wedge \frac{\partial u}{\partial y} = Q$

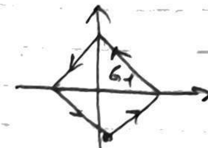
u — пот. в. п. $\vec{F} = \{P, Q\}$

$$\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy = u(B) - u(A) = u\Big|_A^B$$

Примеры:

1) $\oint_L x^2 y\,dx - y^2 x\,dy \overset{\Phi}{\underset{\Gamma p}{=}}$

$L: \{|x| + |y| = a,\ a>0$ (↺)

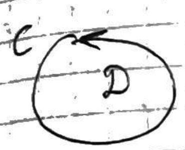


$$= \iint_G (-y^2 - x^2)\,dx\,dy = -\iint_G x^2+y^2\,dx\,dy = -4\iint_{G_1} x^2+y^2\,dx\,dy =$$

$$= -4\int_0^a dx\int_0^{a-x}(x^2+y^2)\,dy = -4\int_0^a x^2(a-x) + \frac{(a-x)^3}{3}\,dx = -\frac{2}{3}a^4$$

2) (4307)

$$\oint_C \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$$



(i) (·) $O \notin \overline{D}$

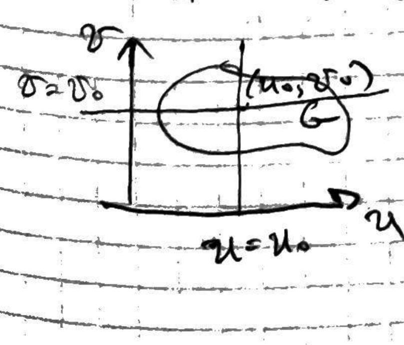
(ii) (·) $O \in \overline{D}$

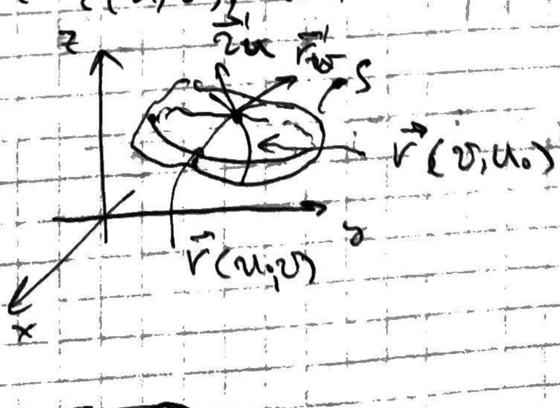
Лекция № 7

§5 Площадь пов-ти

О.1

Пусть G — огр. односв. обл. с кус.-гл. гр. Γ, $\overline{G} = G\cup\Gamma$, на $\overline{G}$ опр. в. ф-ие $\vec r: \overline{G} \to \mathbb{R}^3$, т.е. $\vec r = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ $u,v \in \overline{G}$, где $\vec r$ вз. одн. и вз. непр. отобр. $\overline{G}$ на $S(\equiv \vec r(\overline{G}))$ $S\subset\mathbb{R}^3$, S наз-ся простой поверхностью с параметризацией $\vec r(u,v)$. $S\subset\mathbb{R}^3_{x,y,z}$, $S = \{M(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v),\ (u,v)\in\overline{G}\}$





$\boxed{О.2}$ Прост пов наз-ся гладкой без. особ. (·), если $x(u,v), y(u,v), z(u,v) \in C^1(\overline{G})$ и $\forall (u,v) \in \overline{G}$

$$\operatorname{Rang}\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = 2 \iff r'_u \not\parallel r'_v$$

Т.О. мн гл. пов G без особых (·)

Кас. пл.-ть и нормаль к пов.

Пусть $S \subset \mathbb{R}^3$ - прост гл пов без особых (·) с параметр $\vec{r}(u,v)$ $(u,v) \in \overline{G}$, $\vec{r} \in C^1(\overline{G})$ и $\vec{r}'_u \not\parallel \vec{r}'_v$ $\forall (u,v) \in \overline{G}$

тогда $\vec{n}(M_0) = \vec{r}'_u \times \vec{r}'_v$, $\vec{n} \neq \vec{0}$, $M_0 \in (\overset{x_0}{x(u_0,v_0)}, \overset{y_0}{y(u_0,v_0)}, \overset{z_0}{z(u_0,v_0)})$

Плоскость Π: (·) $M_0 \in \Pi \wedge \vec{n}|_{M_0} \perp \Pi$ наз-ся кас. пл к пов. S в (·) M_0

$\vec{\rho} = (x,y,z)$

вект. ур-ие Π: $(\vec{\rho} - \vec{r}_0, \vec{n}|_{M_0}) = 0$, $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$

ур-ие нормали к пов-ти S в (·) M_0: $\vec{\rho} - \vec{r}_0 = t \cdot \vec{n}$

$$\vec{n}|_{M_0} = \vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|_{M_0} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}_{M_0} = \{A, B, C\}|_{M_0}$$

и $\neq 0$ дикл опр-ть

$$A = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, B = -\begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$$

$\boxed{\text{Обозн. } \overset{S(x,y)}{S'_x} = S_x}$

Π: $A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$ кас. пл.

ℓ_n $\dfrac{x-x_0}{A} = \dfrac{y-y_0}{B} = \dfrac{z-z_0}{C}$

Лемма

Пусть S – прост. гл. пов. без ос. (·), тогда $\exists\,\delta>0$ $\forall \tilde S\subset S$: $\operatorname{diam}\tilde S<\delta$, $\tilde S$ – часть пов-ти S – взаимно однозн. проект. на кас. пл. к S провед. в ~~конц~~ любой (·) $\tilde S$

Д: б/д

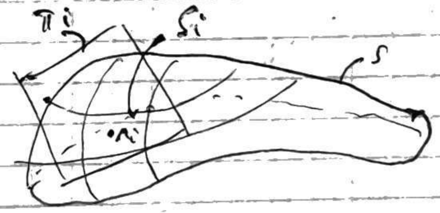
Пусть S-прост. гл. пов. без ос. (·) $\bar r(u,v)$ ее парам. $(u,v)\in\bar G$. Возьм. разб. $\tau=\{G_i\}_{i=1}^{n}\rightsquigarrow S_i\Leftarrow \bar r(\bar G_i)$

$\{S_i\}_{i=1}^{n}$ – разб. S. Т.к. $\bar r:\bar G\to S$ – гомеоморфизм (вз. одн. вз. непр.)

если $(\lambda(\tau)\to 0)\Rightarrow(\max\limits_{i=\overline{1,n}}\operatorname{diam}S_i\to 0)$ (д-ть самост.)

~~Д: (д-ть самост.)~~

$\exists\,\tau$: соотв. р. $\{S_i\}$ удовл. усл. леммы. Возьм. (·) $M_i\in S_i$ и пусть $\Pi(M_i)$ – кас. пл. к S в (·) M_i



Возьм. $\sigma_i=\text{Пр}_{\Pi_i}S_i$, $\mu(\sigma_i)$ – пл-дь $\underset{\text{обл на пл-ти }\Pi_i}{\underline{\sigma_i}}$

О.3 Если $\exists\lim\limits_{\lambda(\tau)\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\mu(\sigma_i)$ не зависит от выбора (·) M_i, то пов-ть S наз-ся квадр., а число I наз-ся ее площадью. $I=\mu(S)$

$\boxed{\text{Т.1}}$

Пусть S – ~~пов-ть без~~ простая гл. пов без ос (·) с параметриз. $\vec r(u,v)$, $(u,v)\in \bar G$, Тогда S ~~...~~ квадр-ма и ее площадь $\mu(S)=\iint\limits_G |\vec r'_u\times \vec r'_v|\,du\,dv$.

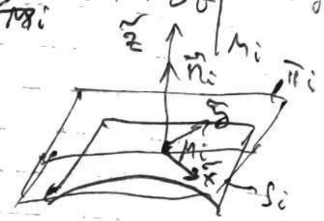
Δ: Пусть τ – разб G $\{G_i\}_{i=1}^n$: $\max\limits_{i=\overline{1,n}} \operatorname{diam} S_i < \delta$ – из $\underline{1}$

$\tau \rightsquigarrow \{S_i\}_{i=1}^n$

в произв. частях S_i пов-ти S. Пусть (·) $M_i\in S_i$ произв., фикс. в $\mathbb{R}^3_{x,y,z}$ ДПСК $Oxyz$

$\vec n_i=\vec n(M_i)$; $\vec r=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$; $\pm\vec n_i = \dfrac{\vec r'_u\times\vec r'_v}{|\vec r'_u\times\vec r'_v|}\Big|_{M_i}$

$\tilde x,\tilde y,\tilde z$ ДПСК в $\mathbb{R}^3$



$\sigma_i=\Pr_{\pi_i} S_i$,

(·) $M\in S$ $\quad M(\tilde x(u,v),\tilde y(u,v),\tilde z(u,v))$

$\pi_i:\ \tilde z=0$, $\quad \sigma_i:\ \underline{\tilde x=\tilde x(u,v),\ \tilde y=\tilde y(u,v),\ \tilde z=0}$.

$$\mu(\sigma_i)=\iint\limits_{\sigma_i} d\tilde x\, d\tilde y \underset{\substack{\text{Т-ма}\\ \text{зам. перем}}}{=} \iint\limits_{G_i}\left|\frac{D(\tilde x,\tilde y)}{D(u,v)}\right| du\,dv \qquad (1)$$

$$\vec n_i=\left(0,0,\begin{vmatrix}\tilde x_u & \tilde x_v\\ \tilde y_u & \tilde y_v\end{vmatrix}\right)\Big|_{M_i} \quad \text{в с.к. } \tilde x,\tilde y,\tilde z$$

$$|\vec r'_u\times\vec r'_v|(u,v)=|\vec r'_u\times\vec r'_v|(u_i,v_i)+\underbrace{|\vec r'_u\times\vec r'_v|(u,v)-|\vec r'_u\times\vec r'_v|(u_i,v_i)}_{=\varepsilon_i(u,v)}$$

$$=\left|\det\begin{pmatrix}\tilde x_u & \tilde x_v\\ \tilde y_u & \tilde y_v\end{pmatrix}\right|(u_i,v_i)+\varepsilon_i(u,v)=$$

$$=|\vec r'_u\times\vec r'_v|(u_i,v_i)+\varepsilon_i(u,v)$$

Из (1) $\Rightarrow \mu(\sigma_i)=\iint\limits_{G_i}\left(|\vec r'_u\times\vec r'_v|(u_i,v_i)+\varepsilon_i(u,v)\right)du\,dv$

$$\left|\sum_{i=1}^n\mu(\sigma_i)-\iint\limits_G|\vec r'_u\times\vec r'_v|(u,v)\,du\,dv\right|\le\left|\sum_{i=1}^n\iint\limits_{G_i}|\vec r'_u\times\vec r'_v|(u_i,v_i)-|\vec r'_u\times\vec r'_v|(u,v)\,du\,dv\right|$$

$$+\left|\sum_{i=1}^n\iint\limits_{G_i}\varepsilon_i(u,v)\,du\,dv\right|$$

т.к. $\vec r \in C^1(\bar G)$, то $|\vec r'_u \times \vec r'_v|(u,v)$ - равн. непр. на $\bar G$, т.е.

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0: \forall (u',v'),(u'',v'')\in \bar G\ \big(|u'-u''|^2+|v'-v''|^2<\delta^2$

$\Rightarrow \big||\vec r'_u\times \vec r'_v|(u',v') - |\vec r'_u\times\vec r'_v|(u'',v'')\big| < \frac{\varepsilon}{2\mu(G)}\big)$

$\le \frac{\varepsilon}{2\mu(G)}\sum_{i=1}^n \underbrace{\iint_{G_i} du\,dv}_{\mu(G_i)} + \frac{\varepsilon}{2\mu(G)}\sum_{i=1}^n \mu(G_i) = \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, т.е.

т.е. $\exists \lim_{\lambda(\tau)\to0}\sum_{i=1}^n \mu(\sigma_i) = \iint_G |\vec r'_u\times\vec r'_v|(u,v)\,du\,dv$ ☒

Замеч. 1) $|\vec r'_u\times \vec r'_v|\,du\,dv = dS$ - элем. пл-ди пов-ти.

2) $r'_v\{x_1,y_1,z_1\}$ $\{y_1z_2-y_2z_1; -x_1z_2+z_1x_2; x_1y_2-$

$r'_v\{x_2,y_2,z_2\}$

Пусть S - пр. гл. пов. без особ. (·) с парам. $\vec r(u,v)$, $(u,v)\in \bar G$

Пусть $f: S\to\mathbb{R}$, ф. f - опр. на $S\subset\mathbb{R}^3$, $\tau=\{G_i\}_{i=1}^n$ - р. $\bar G$, $\forall i=\overline{1,n}$

выбер. (·) $M_i\in S_i$ $M_i=(x(u_i,v_i),y(u_i,v_i),z(u_i,v_i))$ $(u_i,v_i)\in\bar G_i$

Сост. инт. сумму $\sigma(f;\tau,\{M_i\}) = \sum_{i=1}^n f(M_i)\cdot\mu(S_i)$

$\lambda(\tau)=\max_{i=\overline{1,n}} \operatorname{diam}(G_i)$

$\mu(S_i)$ - пл-дь S_i

$\boxed{О.1}$ Число I наз-ся пов. инт. 1-го рода от ф-ции f по S, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall(\tau,\{M_i\})\ \big(\lambda(\tau)<\delta \Rightarrow |\sigma(f,\tau,\{M_i\})-I|<\varepsilon\big)$

$I=\lim_{\lambda(\tau)\to0}\sigma(f,\tau,\{M_i\})$ $f\in R(S)$

Ф-ция f наз-ся инт. по S, если $\exists \lim_{\lambda(\tau)\to0}\sigma$

Обозн.

$f\ge0$ на S

$\int_S f(M)\,dS = \int_S f(x,y,z)\,dS$ $\iint_S f\,dS$ - масса куска пов-ти

3

Осн. св-ва (из опред)

1. Линейность $\sqcup f, g$ инт по S $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\iint\limits_S (\alpha f + \beta g)\, dS = \alpha \iint\limits_S f\, dS + \beta \iint\limits_S g\, dS$$

2. Если $S = S_1 \cup S_2$ f инт на S, то

$$\iint\limits_S f\, dS = \iint\limits_{S_1} f\, dS + \iint\limits_{S_2} f\, dS$$

S_1 и S_2 не имеют общих внутр (·)

$\boxed{\text{T.1}}$ $\sqcup$ S - пр. гл. пов-ть без ос. (·) с парам. $\vec{r}(u,v)_{(u,v)\in G}$ а ф. $f \in C(S)$, Тогда $f \in R(S)$ и спр-ва ф-ла $\iint\limits_S f(M)\, dS =$

$$= \iint\limits_G f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot |\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'|\, du\, dv \equiv I \quad (2)$$

$\Leftrightarrow$ По усл $f(\vec{r}(u,v)) \in C(\bar{G})$, $|\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'| \in C(\bar{G})$ $\Rightarrow \exists$ гл. инт I.

$\forall$ разб. $\tau = \{G_i\}_{i=1}^n$ и соотв. р. $\{S_i\}_{i=1}^n$, $\forall i = \overline{1,n}$ $\forall$ (·) $(u_i, v_i) = N_i$, $N_i \in G_i$ $\quad N_i \xleftrightarrow{\vec{r}} M_i \in S_i$ $\quad \vec{r}(N_i) = \vec{OM_i}$, т.к. $\mu(S_i) = \iint\limits_{G_i} |\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'|\, du\, dv$

Нд. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall (\tau, \{M_i\})\ (\lambda(\tau) < \delta \Rightarrow \underbrace{|\sigma(f, \tau, \{M_i\}) - I|}_{= A} < \varepsilon)$

$$A = \left| \sum_{i=1}^n f(M_i)\mu(S_i) - \sum_{i=1}^n \iint\limits_{G_i} f(\vec{r}(u,v))\, |\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'|\, du\, dv \right| =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^n \iint\limits_{G_i} (f(M_i) - f(\vec{r}(u,v)))\, |\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'|\, du\, dv \right| \leq$$

$f(\vec{r}(u,v)) \in C(\bar{G})$, $\bar{G}$-компакт $\xRightarrow{\text{Т. Кантора}}$ f р.н. на $\bar{G}$, т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall N'(u',v')$, $N''(u'',v'') \in \bar{G}$, $(\operatorname{dist}(N', N'') < \delta \Rightarrow |f(\vec{r}(u',v')) - f(\vec{r}(u'',v''))| < \varepsilon/\mu(S))$

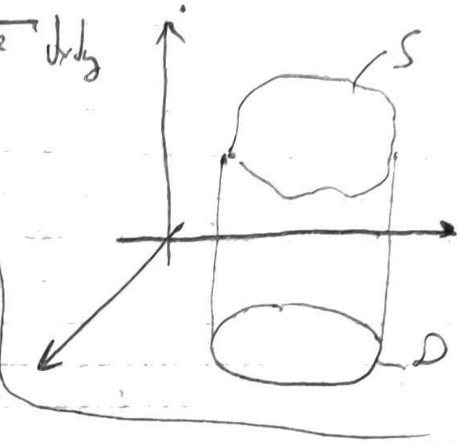
$\forall$ р. τ с $\lambda(\tau) < \delta$ из р. непр.

$$\leq \sum_{i=1}^n \iint\limits_{G_i} \underbrace{|f(\vec{r}(u,v)) - f(\vec{r}(N_i))|}_{< \varepsilon/\mu(S)} \cdot |\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'|\, du\, dv <$$

$$< \frac{\varepsilon}{\mu(S)} \sum_{i=1}^n \underbrace{\iint\limits_{G_i} |\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'|\, du\, dv}_{\mu(S_i)} = \frac{\varepsilon}{\mu(S)} \cdot \mu(S) = \varepsilon \Rightarrow f \in R(S) \text{ и } \overset{\text{спр}}{} (2) \quad ⊠$$

Замеч: 1) $\sqcup$ $S = \{(x,y,z) \mid \forall (x,y) \in D \quad z = z(x,y)\}$

$f \in C(S)$; $\iint\limits_S f\,dS = \iint\limits_D f(x,y,z(x,y)) \cdot \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dx\,dy$



2) $\vec{F} = \{P, Q, R\}$

$\int\limits_S \vec{F}\,dS = \vec{i}\int\limits_S P\,dS + \vec{j}\int\limits_S Q\,dS + \vec{k}\int\limits_S R\,dS$

3) S: $x^2+y^2+z^2 = a^2 \quad a>0$

$$\begin{cases} x = a\cos\theta\cos\varphi \\ y = a\cos\theta\sin\varphi \\ z = a\sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \quad \varphi \in [0, 2\pi] \quad \varphi \leftrightarrow u,\ \theta \leftrightarrow v$$

$\vec{r}_u' = \{-a\cos\theta\sin\varphi, a\cos\theta\cos\varphi, 0\}$

$\vec{r}_v' = \{-a\sin\theta\cos\varphi, -a\sin\theta\sin\varphi, a\cos\theta\}$

$|\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'| = |\vec{r}_u'|\,|\vec{r}_v'| \cdot \sin\alpha \ominus$

$|\vec{r}_u'| = a\cos\theta$

$|\vec{r}_v'| = a$

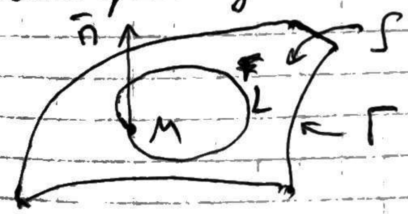
$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{(r_u', r_v')}{|r_u'|\cdot|r_v'|}\right)^2} = \sqrt{1}$, $\frac{(r_u', r_v')}{|r_u'|\cdot|r_v'|} = 0$

$\ominus\ a^2\cos\theta$

§7 Поверхностные инт. 2-го рода

~~РЗ~~

Б простую гл. пов-ть без особых точек



Г-край S, образ ∂G при отобр.

$\vec{r}(u,v) \qquad M = M(u,v) \quad (u,v) \in G \setminus \partial G$,

т.е. M - внутр. (·) S

Опр. а) гл-ая пов-ть S наз-ся двусторонней, если обход по $\forall$ замкн. контуру L, леж. внутри S не меняет напр. $\nexists\ \vec{n}$

б) Если на S $\exists$ замкн. контур L, при обходе по которому напр. норм. $\vec{n}$ меняется на противоположн., то пов-ть наз-ся односторонней

О· В) двустороннее пов-ть S наз-ся ориент., если на ней выбр. поле и фикс. непр. на S поле нормалей, узловым. (а)

Обозн.

~~Обозн.~~ Для двухсторон. пов. $S^+ = (S, \vec{n}^+)$, $S^- = (S, \vec{n}^-)$
поле нормали

Опр-ие и св-ва

$\boxed{O2}$ П S - прост., гл. пов. без особ. (·), двухст., выбран и зафикс. на S поле нормалей $\vec{n}(M), M \in S$, $\underbrace{(S, \vec{n})}_{S^+}$ - ориент. пов.

П $\vec{F} = \{P, Q, R\} \in C(S)$. пов. инт. 2-го рода от $\vec{F}$ по ориент. пов-ти S^+ наз-ся $\iint\limits_S (\vec{F}, \vec{n})\, ds$

$\iint\limits_{S^+} \vec{F} d\vec{s}$ и $\iint\limits_{S^+} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy$ - обозн. пов-го инт. 2-го рода

$(\vec{F}, \vec{n})$ - скал. ф-ия, ~~непр~~ (·) на S, непр. на S

Св-ва инт II-го рода следуют из св-в инт. I-го рода.

1) $S^- = (S, -\vec{n})$ $\quad \iint\limits_{S^-} \vec{F} d\vec{s} = -\iint\limits_{S^+} \vec{F} d\vec{s}$

2) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ фун $\vec{F}$ и $\vec{G}$ - непр. на S (св-во линейности)

$$\iint\limits_{S^+} \alpha \vec{F} + \beta \vec{G}\, d\vec{s} = \alpha \iint\limits_{S^+} \vec{F} d\vec{s} + \beta \iint\limits_{S^+} \vec{G} d\vec{s}$$

3) $S^+ = (S, \vec{n})$ S разбита на S_1 и S_2 : $S_1 \cap S_2$ не имеет внутр.(·)
$S = S_1 \cup S_2$

в $S_1^+ = (S_1, \vec{n})$
$S_2^+ = (S_2, \vec{n})$, Тогда $\iint\limits_{S^+} \vec{F} d\vec{s} = \iint\limits_{S_1^+} \vec{F} d\vec{s} + \iint\limits_{S_2^+} \vec{F} d\vec{s}$ (св-во аддитивности)
$\vec{F} \in C(S)$

4) $\vec{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, $\vec{F} = \{P, Q, R\}$

в $\vec{F}_1 = \{P, 0, 0\}$

$\iint\limits_{S^+} \vec{F}_1 d\vec{s} = \iint\limits_S P\cos\alpha\, ds = \iint\limits_S P\,dydz$ и аналог. для F_2, F_3

Вычисление

Пусть S и двусторон пов без особых $(\cdot)$, тогда

$\vec r(u,v): \bar G \to \mathbb{R}^3$ $\quad$ $\mathrm{Rang}\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix} = 2 \ \forall (u,v)\in \bar G$

$\Rightarrow$ на S $\exists$ 2 непр поле нормалей

$$\vec n = \pm \frac{\vec r'_u \times \vec r'_v}{|\vec r'_u \times \vec r'_v|}, \quad dS = |\vec r'_u \times \vec r'_v|\, du\, dv$$

$|\vec r'_u \times \vec r'_v| \neq 0$, т.к. $\vec r'_u \not\parallel \vec r'_v$

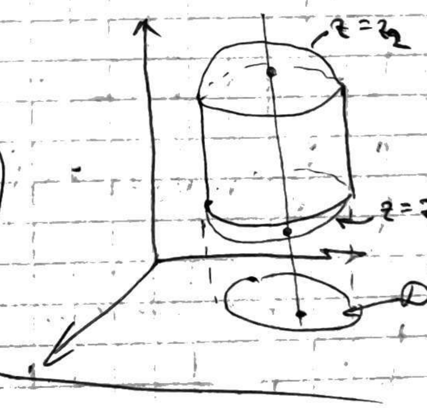
$$\iint_{S^+} \vec F d\vec S = \iint_S (\vec F, \vec n)\, dS = \iint_S (\vec F, \vec r'_u \times \vec r'_v) \frac{dS}{|\vec r'_u \times \vec r'_v|} = \iint_G (\vec F(\vec r(u,v)), \vec r'_u \times \vec r'_v)\, du\, dv$$

§ Теорема Гаусса-Остроградского

$\boxed{О.1}$ Мн-во $V \subset \mathbb{R}^3$ наз-ся областью 1-го типа (I), если

$V = \{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y),\ (x,y)\in D\}$, z_1, z_2 – непр. в $\bar D$ ф-ции,

D – квадр фигура на пл-ти



$\boxed{О.2}$ Мн-во $V \subset \mathbb{R}^3$ наз-ся простой обл., если оно в некоторой ДПСК допускает разб на кон-ое число областей I-го типа, II-го типа, III-го типа.

$$\iiint_{V_i} \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\,dy\,dz = \iint_{D_i} dx\,dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\, dz = \iint_{D_i} R(x,y,z_2(x,y))\,dx\,dy - \iint_{D_i} R(x,y,z_1(x,y))\,dx\,dy =$$

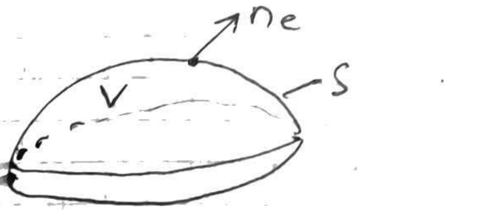
$$= \iint_{S_2^i} R\cos\gamma\, dS + \iint_{S_1^i} R\cos\gamma\, dS + \iint_{S_3^i} R\cos\gamma\, dS = \iint_{S_i^+} R\cos\gamma\, dS$$ – сум по всем i

$$\sum_i = \iint_{S^+} R\cos\gamma\, dS = \iint_{S^+} R\, dx\,dy.$$

$\boxed{T1}$ (Ф-ла Гаусса-Остроградского)

Пусть V — прост. обл. $\mathbb{R}^3$, с кус.-гл. гран. без особых (·)

S — двусторонняя пов-ть, ограничив. V, $\bar V = V \cup S$, Пусть $\vec F = \{P, Q, R\} \in C(\bar V)$ и



$$\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z} \in C(\bar V)$$

Пусть на S выбрана ориент. $S^+ = (S, \bar n_e)$,

где $\bar n_e$ — непр. на S поле внешних нормалей, Тогда

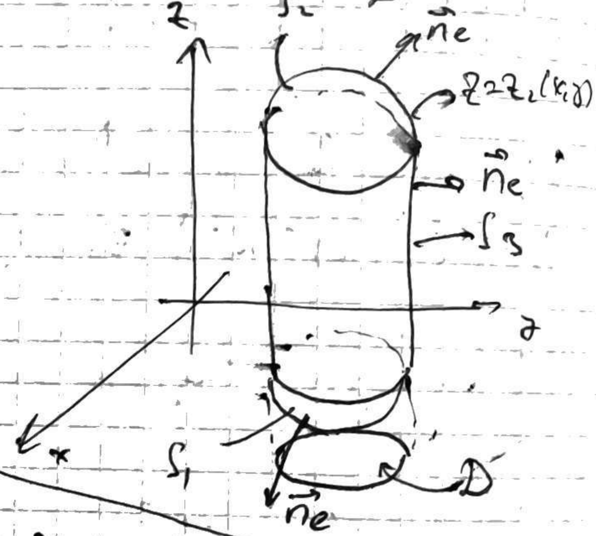
$$\iint\limits_{S^+} \vec F\, d\vec S = \iiint\limits_V \operatorname{div} \vec F\, dx\,dy\,dz = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$

Δ:

1) V — обл. I-го типа, тогда

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\,dy\,dz = \iint\limits_D dx\,dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\, dz = \iint\limits_D R(x,y,z_2(x,y))\,dx\,dy - \iint\limits_D R(x,y,z_1(x,y))\,dx\,dy$$

$$= \iint\limits_{S_2^+} R\,dx\,dy + \iint\limits_{S_3^+} R\,dx\,dy + \iint\limits_{S_1^+} R\,dx\,dy =$$



$$= \oiint\limits_{S^+} R\,dx\,dy$$

V — обл. II, III типа ⇒

$$\iiint\limits_V \frac{\partial P}{\partial x}\, dx\,dy\,dz = \oiint\limits_{S^+} P\,dy\,dz \ \wedge \ \iiint\limits_V \frac{\partial Q}{\partial y}\, dx\,dy\,dz = \oiint\limits_{S^+} Q\,dx\,dz$$

V (всю область) разбив. на конечное число V_i I-го типа, склад-ем.

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\,dy\,dz = \iint\limits_{S^+} R\,dx\,dy$$ Ан-но II и III

$$\Rightarrow \iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial x}\, dx\,dy\,dz = \oiint\limits_{S^+} P\,dy\,dz + R\,dx\,dy + Q\,dx\,dz \ \blacksquare$$

Замечание

1. Ф-ла Г-О справ, если V - огр обл в $\mathbb{R}^3$ с гр S - кус гл. замкн. пов-ть без ос. (·) $\vec{F}=(P,Q,R)\in C(\bar{V})$

$\bar{V} = V\cup S$, $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z} \in C(V)$, а инт

$$\exists \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$$ (хотя бы как несобств.)

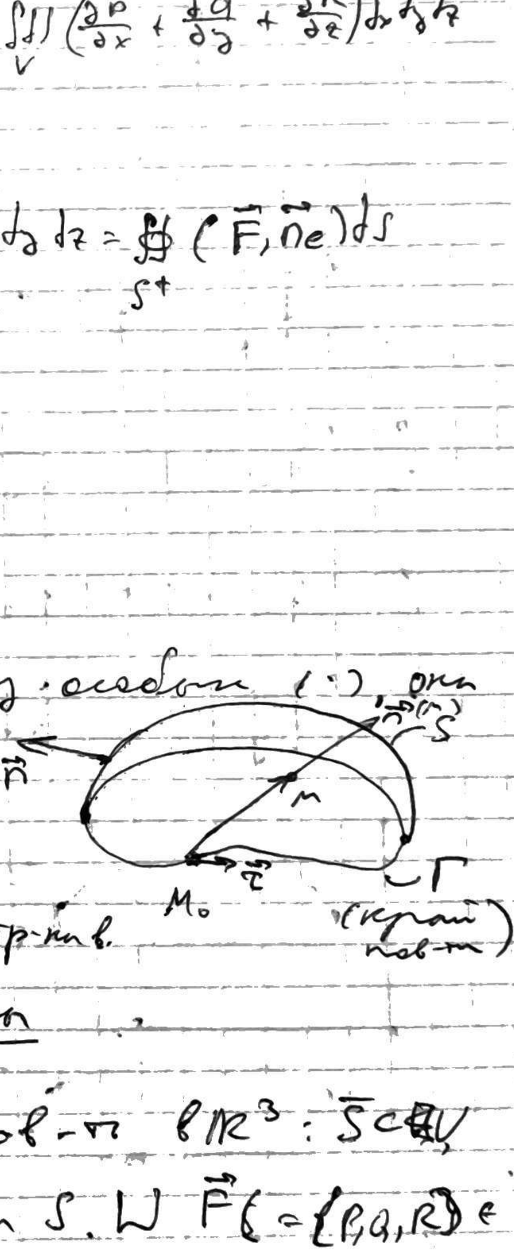
Тогда $\exists \oiint_{S^+} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$

2. $\vec{F}=(P,Q,R)\in C^1(V)$

$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z} \equiv \operatorname{div}\vec{F}$, $\iiint_V (\operatorname{div}\vec{F})\,dx\,dy\,dz = \oiint_{S^+} (\vec{F},\vec{n}_e)\,dS$

(Г-О в вект виде)

§9 Теорема Стокса



$\boxed{\text{Опр 1}}$ Пусть S - гл. двустор. пов-ть без особых (·), огр. кус гл. конт Γ

$(S,\vec{n})$ ор-ная пов-ть, $\vec{n}$ - непр поле норм.

$M\in S$, $M_0\in\Gamma$, тр-ка в. $\vec{\tau}, \overrightarrow{M_0M}, \vec{n}$ - правая тр-ка в.

ор-ие ~~пов~~ S и обход Γ согласованы.

$\boxed{\text{Опр 2}}$ Пусть V - откр мн-во $\mathbb{R}^3$, S - пов-ть в $\mathbb{R}^3$: $\bar{S}\subset V$,

$\bar{S} = S\cup\Gamma$, V наз-ся окр-тью пов-ти S. Пусть $\vec{F}(=\{P,Q,R\})\in$

$\in C^1(V(S))$ $\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left\{\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right\}$

T. (ф-ла Стокса)

Пусть S - гл. двухст пов-ть огр. простым кус. гл. конт Γ, вект. поле $\vec F = (P,Q,R)$ в соотв ДПСК, $\vec F \in C^1(U(S))$, а

(i) ориент. $\vec F$ и Γ согласованы, т.е. тр. $\vec\tau, \vec n_{0M}, \vec n$ прав

(ii) S - вз. однозн. проект на каждую из коорд плоскостей

Тогда $\oint\limits_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_S (\operatorname{rot}\vec F, \vec n)\,dS$, где

ор-ия $(S, \vec n)$ и обход Γ согласованы.

Δ Пусть $\vec n = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$

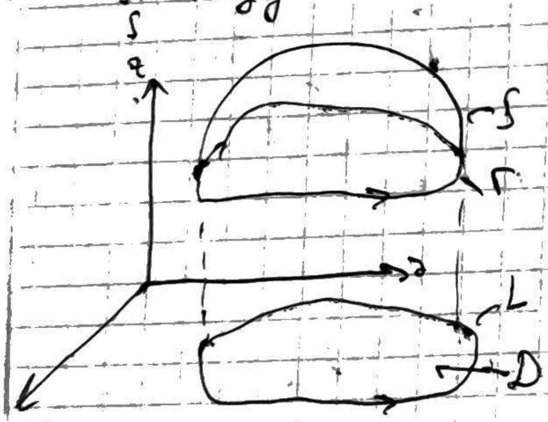
$$\iint\limits_S \left(\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial y}\right)\cos\gamma\right) dS$$

$$\iint\limits_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right) dS = \oint\limits_\Gamma P\,dx \quad (1)$$

$\vee$ По усл S вз. одн. пр-ие на пл-ть O_{xy}

$$\iint\limits_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma - \frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha\right) dS = \oint\limits_\Gamma Q\,dy \quad (2)$$

$$\iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha - \frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta\right) dS = \oint\limits_\Gamma R\,dz \quad (3)$$



$z = z(x,y) \quad (x,y) \in D$

$D = \text{Пр}_{O_{xy}} S, \; L = \text{Пр}_{O_{xy}} \Gamma$

$\vec n = \dfrac{\{-z'_x, -z'_y, 1\}}{\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}}$, к.н. $\cos\gamma > 0$.

$\Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{-z'_x}{\sqrt{\ }}, \quad \cos\beta = \dfrac{-z'_y}{\sqrt{\ }}, \quad \cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{\ }}$

$$\iint\limits_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right) dS =$$

$$= \iint\limits_S \left(-\frac{\partial P}{\partial z}(x,y,z(x,y))\,z'_y - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y,z(x,y))\right)\frac{dS}{\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}} =$$

$$= -\iint\limits_S \left(\frac{\partial P}{\partial z} z'_y + \frac{\partial P}{\partial y}\right)\underbrace{\frac{dS}{\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}}}_{=\, dS\cos\gamma \,=\, dx\,dy} \circledequal$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y,z(x,y)) = P'_y + P'_z \cdot z'_y$$

L — мн-во (·) на Oxy

$L = \{(x,y) \mid x = x(t),\ y = y(t),\ t_0 \le t \le t_1\}$

Γ: $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(x(t), y(t)),\ t_0 \le t \le t_1$

(3) $$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \oint_L P\,dx = \int_{t_0}^{t_1} P(x(t), y(t), z(x(t), y(t)))\cdot \dot{x}(t)\cdot dt = \oint_\Gamma P\,dx,$$ т.о. д-ли (1).

$$\oint_\Gamma P\,dx = \int_{t_0}^{t_1} P(x(t), y(t), z(x(t), y(t)))\,\dot{x}(t)\,dt$$

Ан-но (2) и (3), сл-ем и получаем ф-лу ■

Замечание:

1) На самом деле вз. однозн. не обязательна

2) $\iint_S (\operatorname{rot}\bar{F}, \bar{n})\,ds$ — поток ротора вект поля $\bar{F}$ через пов-ть S в напр $\bar{n}$

А в левой части — циркуляция вект поле F по контуру Γ

важно

3) $\oint_\Gamma \vec{F}\,d\vec{e}$ — вект ф. записи.

Стокса

Скалярные и векторные поля.

§ 1 Скалярное поле.

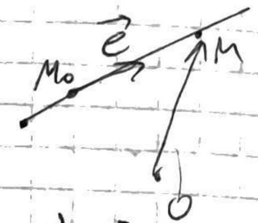
$n=3$

$\boxed{О.1}$ Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $u: \Omega \to \mathbb{R}$, т.е. $\forall (\cdot)\, M \in \Omega$ соотв. единств. $u(M) \in \mathbb{R}$. В $S = \{M \in \Omega \mid u(M) = C\}$ — $C \in \mathbb{R}$, C - фикс., $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, S - пов-ть уровня

$\boxed{О.2}$ Пусть $U: \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, Ω - обл в $\mathbb{R}^3$, $M_0 \in \Omega$

Пусть $\vec{e}$ ($|\vec{e}| = 1$) - ед. в. и предпол. $\overrightarrow{M_0M} = t \cdot \vec{e}$

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t \cdot \vec{e}$ - вект. ур-ие прямой l



$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{e}}\right|_M = \lim_{t \to 0} \frac{u(M(t)) - u(M_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{u(\overrightarrow{OM_0} + t \cdot \vec{e}) - u(\overrightarrow{OM_0})}{t}$$

— произв. скалярного поля по напр. $\vec{e}$

$\boxed{О.3}$ Пусть $U: \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, Ω - обл в $\mathbb{R}^3$, $M_0 \in \Omega$

Пусть $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \Delta\vec{r}$, $(\cdot)\, M \in \Omega$

Если $u(\overrightarrow{OM}) - u(\overrightarrow{OM_0}) = u(M) - u(M_0) = \Delta u(M_0, \Delta\vec{r}) =$
$= (\vec{g}(M_0), \Delta\vec{r}) + \bar{o}(|\Delta\vec{r}|)$, $|\Delta\vec{r}| \to 0$, то

ск. поле u наз-ся дифф в $(\cdot)\, M_0$, а выр-ие $(\vec{g}(M_0), \Delta\vec{r})$ наз-ют ее дифф.

$\vec{g}(M_0)$ наз-ся градиентом ск. поля в $(\cdot)\, M_0$

$\boxed{\text{I}}$ Пусть $\vec i, \vec j, \vec k$ — орты ДПСК $Oxyz$ в $\mathbb{R}^3$, $\vec e = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, $|\vec e| = 1$. $U: \Omega \to \mathbb{R}$, Ω — обл. в $\mathbb{R}^3$, $U = U(x, y, z)$ дифф. в каждой $(\cdot)$ Ω. Тогда

(i) $\forall (\cdot) M \in \Omega \quad \exists \left.\frac{\partial U}{\partial \vec e}\right|_M = \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_M \cos\alpha + \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_M \cos\beta + \left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_M \cos\gamma$.

(ii) $\forall (\cdot) M \in \Omega \quad \exists \operatorname{grad} U|_M = \frac{\partial U}{\partial x} \vec i + \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_M \vec j + \left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_M \vec k$;

(iii) $\forall \vec e : |\vec e| = 1 \quad \forall (\cdot) M \in \Omega \quad \left| \left.\frac{\partial U}{\partial \vec e}\right|_M \right| \leq \left| \operatorname{grad} U|_M \right|$.

(!) для случая, когда $\operatorname{grad} U|_M \neq 0$, рав-во лишь при $\operatorname{grad} U|_M \parallel \vec e$

Δ:

(i) $M_0(x_0, y_0, z_0)$; $\vec{OM}(t) = \vec{OM_0} + t \cdot \vec e$.

в р-ию $\varphi(t) = U(\vec{OM}(t))$; $\varphi(0) = U(\vec{OM_0})$, U — дифф. $\Rightarrow \exists \varphi(0)$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial \vec e}\right|_{M_0} = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \varphi'(0)$$

$$\varphi(t) = U(\underbrace{x_0 + t\cos\alpha}_{x}, \underbrace{y_0 + t\cos\beta}_{y}, \underbrace{z_0 + t\cos\gamma}_{z(t)})$$

$$\varphi'(t)\Big|_{t=0} = \left(\frac{\partial U}{\partial x} \cdot \dot x + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \dot y + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \dot z\right)\Big|_{t=0} = \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{M_0} \cos\alpha + \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{M_0} \cos\beta + \left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{M_0} \cos\gamma =$$

$$= \left.\frac{\partial U}{\partial \vec e}\right|_{M_0}$$

(ii) ф-ия U — дифф., по опр

$$U(\vec{OM}) - U(\vec{OM_0}) = A_1 \Delta x + A_2 \Delta y + A_3 \Delta z + \bar{o}(\rho) \circleddash$$

$\vec{OM} - \vec{OM_0} = \Delta \vec r = \{\Delta x; \Delta y; \Delta z\}$, $\rho = |\Delta \vec r|$

$$\circleddash (\vec A, \Delta \vec r) + \bar{o}(\rho) \underset{\text{grad}}{\overset{\text{опр}}{\Longrightarrow}} \vec A = \operatorname{grad}(U)|_{M_0} \Bigg| \Rightarrow$$

$A_1 = \frac{\partial U}{\partial x}(M_0)$, $A_2 = \frac{\partial U}{\partial y}(M_0)$, $A_3 = \frac{\partial U}{\partial z}(M_0)$

$$\operatorname{grad} U|_{M_0} = \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{M_0} \vec i + \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{M_0} \vec j + \left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{M_0} \vec k$$

(iii) $\mathcal{U}_3(i) \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \vec{e}}\Big|_M = (\operatorname{grad} U|_M, \vec{e})$

$|(\vec{a}, \vec{b})| \le |\vec{a}|\,|\vec{b}|$; = лишь при $|\cos\varphi| = 1$.

Замечание:

1) в-р $\operatorname{grad} U|_M \perp$ пов-ти уровня $U(x,y,z) = C$ в каждой (·) M, лежащей на этой пов-ти

2) Если $U(M)$, $V(M)$ – дифф. в Ω скалярные поля, то

а) $\operatorname{grad}(C_1U + C_2V)|_M = C_1 \operatorname{grad} U|_M + C_2 \operatorname{grad} V|_M$

б) $\operatorname{grad}(U \cdot V) = U \operatorname{grad} V + V \operatorname{grad} U$

в) $V(M) \neq 0$, тогда $\operatorname{grad}\left(\frac{U}{V}\right) = \frac{V \operatorname{grad} U - U \operatorname{grad} V}{V^2}$

3) ~~Если~~ $U(M) \to \operatorname{grad} U|_M$; $\nabla U = \operatorname{grad} U$

4) $U(M)$ – скалярное поле. $\operatorname{grad} U$ – векторное поле.

§2 Векторные поля.

п.1 Потенциальное векторное поле.

$\boxed{O.1}$

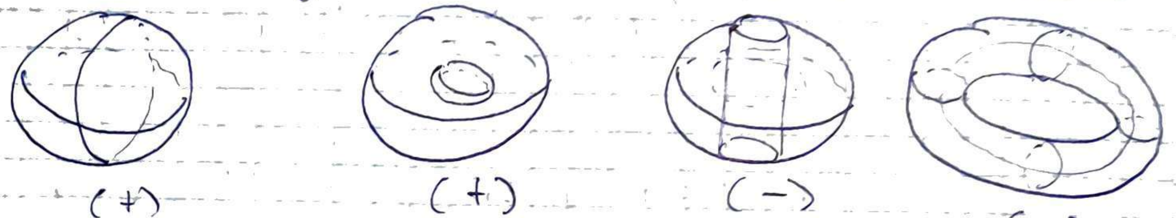
$\vec{A}$ – в. ф-ия : $\Omega \to \mathbb{R}^3$, Ω – область в $\mathbb{R}^3$. $\vec{A}(M)$ – векторное поле.

Если фикс. ДПСК, то $\vec{A} = \{P, Q, R\}$, $P, Q, R : \Omega \to \mathbb{R}$.

в. поле $\vec{A}$ наз-ся непр. (дифф., непр. дифф.), если ф-ии P, Q, R перем x, y, z непр (дифф., непр дифф) в обл Ω.

$\boxed{\text{О.2}}$ в. поле $\vec{A}$ зад. в $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ наз-ся потенциальным в Ω, если $\exists$ ск. поле $U(M)$: $\vec{A} = \operatorname{grad} U$ $\forall (\cdot) M \in \Omega$.
ск. поле $U(M)$ наз-ют потенциалом в. поля $\vec{A}$ в обл Ω.

$\boxed{\text{О.3}}$ Обл. $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ наз-ся поверхностно односвязной, если $\forall$ кус. гл. простого замкн. кривой, целиком лежащей в Ω $\exists$ гл. пов-ть, натянутая на этот контур, целиком лежащая в Ω.



(+) (+) (−) (−)

$\boxed{\text{Т1}}$ (Критерий потенциальности в. поля в $\mathbb{R}^3$)

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ пов. односв. область, $\vec{A}(M) = \{P, Q, R\}$ в. поле на Ω, $P, Q, R \in C^1(\Omega)$. Тогда след. утв. эквив-ны:

1) $\forall$ кус.-гл. замкн. контура $\gamma \subset \Omega$ $\oint\limits_{\gamma} \vec{A}\, d\vec{l} = 0$

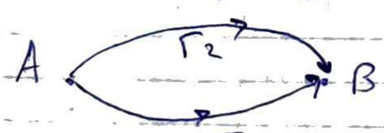
2) $\int\limits_{\breve{AB}} \vec{A}\, d\vec{l}$ — не зависит от кр $\breve{AB} \subset \Omega$, соед $(\cdot)$ A и B

3) в. поле $\vec{A}(M)$ потенциально в Ω

4) $\operatorname{rot} \vec{A} = 0$ $\forall (\cdot) M \in \Omega$ $\left(\text{т.е.} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = 0 \text{ в } \Omega \right)$

Δ: по схеме $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$

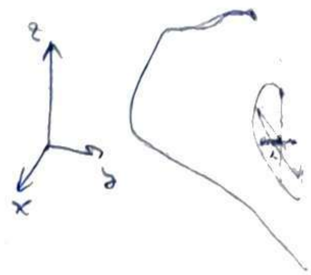
$(1 \to 2)$



$\int\limits_{\Gamma_1} = \int\limits_{\Gamma_2}$; $\gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2^-$ — замкн. контур

Из (1) $\oint\limits_{\gamma} \vec{A}\, d\vec{l} = \int\limits_{\Gamma_1} \vec{A}\, d\vec{l} + \int\limits_{\Gamma_2^-} \vec{A}\, d\vec{l} = \underbrace{\int\limits_{\Gamma_1} \vec{A}\, d\vec{l} - \int\limits_{\Gamma_2} \vec{A}\, d\vec{l}}_{} = 0$

(2→3) в $\forall (\cdot)\ M_0 \in \Omega$



$M(x_0+\Delta x,\ y_0,\ z_0) \in B(M_0, \delta) \subset \Omega$

$\int\limits_{M_0 M} \vec{A}\, d\vec{l}$ – не зависит от $\overline{M_0 M}$ (зависит от (·) M_0, M)

$\overline{M_0 M} = [M_0, M] = \{(x,y,z) \mid x = x_0 + t\Delta x,\ y = y_0,\ z = z_0,\ t \in [0,1]\}$

Тогда $\int\limits_{[M_0,M]} \vec{A}\, d\vec{l} = \int_0^1 P(x_0+t\Delta x, y_0, z_0)\, \dot{x}(t)\, dt = \Delta x \int_0^1 P(x_0 + t\Delta x, y_0, z_0)\, dt$

$= \Delta x \cdot P(x_0 + \theta\Delta x, y_0, z_0)$, $0<\theta<1$ $= U(M)$

по теор о ср для инт от непр фун

$U(M) \doteq \int\limits_{MM_0} \vec{A}\, d\vec{l}$, $U(M_0) = 0$

$$\frac{U(M) - U(M_0)}{\Delta x} = \underbrace{P(x_0 + \theta\Delta x, y_0, z_0)}_{\text{непр. ф-ие}} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} P(x_0, y_0, z_0)$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{\Delta x \to 0} \frac{U(M) - U(M_0)}{\Delta x} \doteq \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{M_0} \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = P;$$ Ан-но $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$, $\frac{\partial U}{\partial z} = R$

$\Rightarrow \vec{A} = \operatorname{grad} U \Rightarrow \vec{A}$ – потенциально

(3→4) По усл $\vec{A} \in C^1(\Omega)$ по (3) $\vec{A} = \operatorname{grad} U =$

$$= \left\{\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right\};\quad \operatorname{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \overbrace{\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y}}^{0}, \overbrace{\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x}}^{0}, \overbrace{\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}}^{0} \right\} = 0$$

по. Т. о рав-ве смеш. произв.

$4 \to 1$

Пусть $\forall\, \Gamma \subset \Omega$ — произв. кус. гл. простой замкн. контур, целиком лежащий в Ω, Ω — пов. односв. область $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists$ гл. пов-ть $S \subset \Omega$, натянутая на Γ
По ф-ле Стокса $\oint\limits_{\Gamma} \vec{A}\, d\vec{l} = \iint\limits_{S} (\mathrm{rot}\, \vec{A}, \vec{n})\, ds = 0$ ∎
обход Γ и $\vec{n}$ согласованы

Замечание:
Д Т1 — необходимое и дост. усл-ие потенц. в. поля A в пов. одн. области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$.

Утв. 1

Если в. п. $\vec{A}$ потенц. в обл. Ω, то его потенциал опр-ся с точностью до константы.

Д: Пусть $U_1(M)$, $U_2(M)$ — два потенциала в. п. $\vec{A}$, $U = U_1 - U_2$,
Тогда $\nabla U = \underbrace{\nabla U_1}_{\vec{A}} - \underbrace{\nabla U_2}_{\vec{A}} = \vec{0}$ в Ω. По теор. о ср. знач.
ф. многих перем. (сл-ие) $\nabla U = \vec{0}$ в обл. $\Omega \Rightarrow U = \mathrm{const}$ в Ω ∎

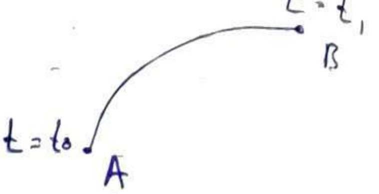
Сл-ие Т1

Пусть $\vec{A}$ — потенц. в. п., а U — его потенциал в пов. одн. обл. Ω,
Тогда $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \vec{A}\, d\vec{l} = U(B) - U(A)$

Д. Пусть $\overset{\frown}{AB}$: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ $t \in [t_0, t_1]$, тогда
$A(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$
$B(x(t_1), y(t_1), z(t_1))$

$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \vec{A}\, d\vec{l} = \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{\partial U}{\partial x}(x(t), y(t), z(t))\, \dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}(\ldots)\, \dot{y} + \frac{\partial U}{\partial z}(\ldots)\, \dot{z}\, dt =$

$$\stackrel{(\sim)}{=} \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} U(x(t), y(t), z(t))\, dt =$$



$$= U(x(t), y(t), z(t))\Big|_{t_0}^{t_1} = U(B) - U(A)$$

п.2 Поток в. поля через пов-ть. дивергенция вект. поля

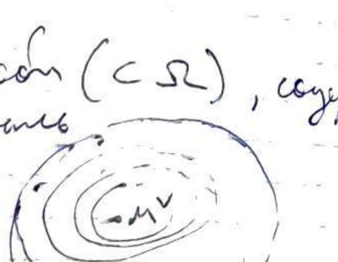
О.4

S – гл. двухст. пов-ть, $\vec{n}$ – поле норм (непр), ориент. $(S, \vec{n})$, в. поле $\vec{A} \in C(U(S))$, Тогда

$\iint\limits_S (\vec{A}, \vec{n})\, dS \equiv \iint\limits_S \vec{A}\, d\vec{S}$ наз-ют потоком в. п. $\vec{A}$ через пов-ть S в напр-ии норм. $\vec{n}$

О.5

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, (·) $M \subset \Omega$, $\{V\}$ – сем-во обл ($\subset \Omega$), содержащих (·) M, $\partial V = S$ – гл. пов. замкн., $\vec{n}$ – внешняя нормаль



гов-т, что $\{V\}$ стягивается в (·) M,

если $\forall \{V_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \{V\}$ вып-се

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}\ (n > N \Rightarrow V_n \subset B(M, \varepsilon))$

$= \{P \mid \rho(M, P) < \varepsilon\}$

~~...~~ $V \to M$ (семейство обл стяг в (·) M)

О.6 Если $\exists \lim\limits_{V \to M} \iint\limits_S \frac{(\vec{A}, \vec{n})}{\mu(S)}\, dS \doteq \operatorname{div} \vec{A}(M)$

T2

В ДПСК $Oxyz$ в.п. $\vec{A} = (P, Q, R)$, непр. дифф., $\vec{A} \in C^1(\Omega)$, Ω – обл. в $\mathbb{R}^3$. Тогда $\forall M \in \Omega \ \exists \operatorname{div}\vec{A}(M) = \frac{\partial P}{\partial x}(M) + \frac{\partial Q}{\partial y}(M) + \frac{\partial R}{\partial z}(M)$

Теперь	Скалярное поле u	Векторное поле $\vec{A}$	
	grad	div	rot
grad		$\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{A}) = \nabla(\nabla, \vec{A})$	
div	$\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = (\nabla, \nabla u) = (\nabla,\nabla)u = \nabla^2 u = \Delta u$		$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A} = 0$ $(\nabla, [\nabla, \vec{A}]) = 0$
rot	$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = [\nabla, \nabla u] = 0$		$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = [\nabla, [\nabla, \vec{A}]] = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A} - \Delta\vec{A} = \nabla(\nabla, \vec{A}) - (\nabla,\nabla)\vec{A}$

$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b})$

$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = [\nabla, [\nabla, \vec{A}]] = [\vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}, [\vec{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j}, A_k \vec{e}_k]] =$

ДПСК $O x_1 x_2 x_3$

$\vec{A} = (A_1, A_2, A_3) \in C^1$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – орты

$\nabla = \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \equiv \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \ i = 1,3$

$\vec{A} = A_i \vec{e}_i$

$= \frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i \partial x_j} [\overset{a}{\vec{e}_i}, [\overset{b}{\vec{e}_j}, \overset{c}{\vec{e}_k}]] =$

$[\vec{e}_i, [\vec{e}_j \times \vec{e}_k]] = \vec{e}_j \underbrace{(\vec{e}_i, \vec{e}_k)}_{\delta_{ik}} - \vec{e}_k \underbrace{(\vec{e}_i, \vec{e}_j)}_{\delta_{ij}}$

$= \overbrace{\frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i \partial x_j} \vec{e}_j \delta_{ik}}^{\vec{B}} - \overbrace{\frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i \partial x_j} \vec{e}_k \delta_{ij}}^{\vec{C}} = \bar{B} - \bar{C}$

5ч

$$\vec{B} = \left(\vec{e}_j \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\frac{\partial A_k}{\partial x_i}\delta_{ik} \overset{i=k}{=} \underset{\nabla}{\left(\vec{e}_j \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}\right)}\underset{\operatorname{div}\vec{A}}{\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i}\delta_{ik}\right)} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A}$$

$$\vec{C} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\delta_{ij}(A_k e_k) = \underset{\Delta}{\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\cdot\delta_{ij}\right)}\underset{\vec{A}}{(A_k e_k)} = \Delta\vec{A}$$

Применение аксиального тензора.

$n=3$ ~~Пр~~ ЕП ~~Ортонорм~~ $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – ОНТ (пр. тр.) $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ $i, j \in \overline{1,3}$

$a = (a^1, a^2, a^3) = a^i e_i$

3^3 чисел. $\varepsilon_{ijk} = (\vec{e}_i, \vec{e}_j \times \vec{e}_k) = (\vec{e}_i \times \vec{e}_j, \vec{e}_k)$

$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} = -\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{kji}$

$\varepsilon_{ijk}\cdot\varepsilon_{lmk} = \varepsilon_{ij1}\cdot\varepsilon_{lm1} + \varepsilon_{ij2}\cdot\varepsilon_{lm2} + \varepsilon_{ij3}\cdot\varepsilon_{lm3} =$

$$= \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} \end{vmatrix} = \delta_{il}\cdot\delta_{jm} - \delta_{im}\cdot\delta_{jl}$$

1) $(a, b) = (a^i e_i, b^j e_j) = a^i b^j \delta_{ij} \overset{i=j}{=} a^i b^i \underbrace{\delta_{ii}}_{1} = a^i b^i$

2) $[a \times b]^i = (a \times b, e_i) = ((a^j e_j) \times (b^k e_k), e_i) =$

$= a^j b^k (e_j \times e_k, e_i) = a^j b^k \underbrace{(e_i, e_j \times e_k)}_{\varepsilon_{ijk}} = a^j b^k \varepsilon_{ijk} \Rightarrow$

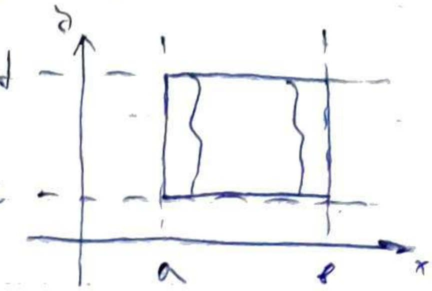
$\Rightarrow a \times b = [a \times b]^i e_i = a^j b^k \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i$

3) $(\operatorname{rot}\vec{a})^i = \left(\left[e_j \frac{\partial}{\partial x_j}, a^k e_k\right], e_i\right) = \frac{\partial a^k}{\partial x_j}([e_j \times e_k], e_i) =$

$= \frac{\partial a^k}{\partial x_j}\cdot\varepsilon_{ijk} \Rightarrow \operatorname{rot}\vec{a} = \frac{\partial a^k}{\partial x_j}\cdot\varepsilon_{ijk}\cdot e_i$

О.1 Пусть $f: \Pi \to \mathbb{R}$, $\Pi = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$

f: $\forall y \in [c,d]\ \exists \int_a^b f(x,y)\,dx$



б. ф-ии $\varphi(y), \psi(y)$: $\forall y \in [c,d]$ $a \le \varphi(y) \le \psi(y) \le b$

Тогда $\forall y \in [c,d]$ опред. ф-ию

$J(y) := \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx$ наз-ся (собств.) интегр. завис. от парам. $y \in [c,d]$

$\boxed{\text{Т.1}}$ (Непр. инт. от парам.)

Пусть $f \in C(\Pi)$, $\varphi, \psi \in C[c,d]$. Тогда $J(y)$ непр. ф-ия на $[c,d]$

Δ. б. $y_1, y_2 \in [c,d]$ и

$$J(y_2) - J(y_1) = \int_{\varphi(y_2)}^{\psi(y_2)} f(x,y_2)\,dx - \int_{\varphi(y_1)}^{\psi(y_1)} f(x,y_1)\,dx = \int_{\varphi(y_2)}^{\psi(y_2)} f(x,y_2) - f(x,y_1)\,dx +$$

$$+ \int_{\varphi(y_2)}^{\psi(y_1)} f(x,y_1)\,dx - \int_{\varphi(y_1)}^{\psi(y_1)} f(x,y_1)\,dx = \int_{\varphi(y_2)}^{\psi(y_2)} (f(x,y_2) - f(x,y_1))\,dx + \int_{\varphi(y_2)}^{\varphi(y_1)} f(x,y_1)\,dx +$$

$$\underbrace{\int_{\varphi(y_2)}^{\psi(y_2)}}_{} \quad \int_{\varphi(y_2)}^{\varphi(y_1)} + \int_{\varphi(y_1)}^{\psi(y_1)} + \int_{\psi(y_1)}^{\psi(y_2)} \qquad + \int_{\psi(y_1)}^{\psi(y_2)} f(x,y_1)\,dx$$

$f \in C(\Pi) \Rightarrow$ (1) f — р. непр. на Π, т.е. $\forall \varepsilon_1 > 0\ \exists \delta > 0\ \forall (x,y), (x',y') \in \Pi$ $\left((x-x')^2 + (y-y')^2 < \delta^2 \Rightarrow |f(x,y) - f(x',y')| < \varepsilon_1\right)$

(2) f — огр., т.е. $\exists M > 0\ \forall (x,y) \in \Pi$ $|f(x,y)| \le M$.

$$|J(y_2) - J(y_1)| \le \int_{\varphi(y_2)}^{\psi(y_2)} \overbrace{|f(x,y_2) - f(x,y_1)|}^{< \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{4(b-a)}}\,dx + \left|\int_{\varphi(y_1)}^{\varphi(y_2)} |f(x,y_1)|\,dx\right| + \left|\int_{\psi(y_1)}^{\psi(y_2)} |f(x,y_1)|\,dx\right| <$$

φ, ψ — р. непр. на $[c,d]$ $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon_2 > 0\ \exists \delta_2 > 0\ \forall y_1, y_2 \in [c,d]$ $\Big(|y_1 - y_2| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |\varphi(y_1) - \varphi(y_2)| < \varepsilon$

~~тогда~~ $|\psi(y_1) - \psi(y_2)| < \varepsilon\Big)$

$\forall \varepsilon > 0$ по $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \to \delta_1$; по $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{4M}$

$$\textcircled{\le} \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \overbrace{(\psi(y_2) - \varphi(y_1))}^{<(b-a)} + M \cdot \underbrace{|\varphi(y_2) - \varphi(y_1)|}_{<\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{4M}} + M \underbrace{|\psi(y_2) - \psi(y_1)|}_{<\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{4M}} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{3\varepsilon}{4} < \varepsilon$$

$\Rightarrow I(y)$ — равн. непр $\Rightarrow$ непр на $[c, d]$ ■

$\boxed{\text{T. 2}}$ (О дифференцировании по парам.)

$\Pi = [a, b] \times [c, d]$.

Пусть $f, f_y \in C(\Pi)$; $\varphi, \psi \in D[c, d]$

Тогда $\forall y \in [c, d] \ \exists \ I'(y) = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x, y)\,dx + f(\psi(y), y)\psi'(y) - f(\varphi(y), y)\varphi'(y)$

Δ: В $\forall y, y + \Delta y \in [c, d] \ \exists \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{I(y+\Delta y) - I(y)}{\Delta y} = I'(y)$

$$I(y + \Delta y) - I(y) = \int\limits_{\varphi(y+\Delta y)}^{\psi(y+\Delta y)} f(x, y+\Delta y)\,dx - \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\,dx =$$

$$= \int\limits_{\varphi(y+\Delta y)}^{\varphi(y)} f(x, y+\Delta y)\,dx + \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} [f(x, y+\Delta y) - f(x, y)]\,dx + \int\limits_{\psi(y)}^{\psi(y+\Delta y)} f(x, y+\Delta y)\,dx =$$

$$= -f(\varphi(y) + \theta_1(\varphi(y+\Delta y) - \varphi(y)), y + \Delta y)(\varphi(y+\Delta y) - \varphi(y)) +$$

$$+ \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x, y + \theta_2 \Delta y)\Delta y\,dx + f(\psi(y) + \theta_3(\psi(y+\Delta y) - \psi(y)), y + \Delta y)(\psi(y+\Delta y) - \psi(y))$$

$0 < \theta_i < 1$, $i = \overline{1,3}$

Тогда $\underset{\Delta y \neq 0}{\frac{I(y+\Delta y) - I(y)}{\Delta y}} = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x, y + \theta_2 \Delta y)\,dx - f(\varphi(y) + \theta_1(\varphi(y+\Delta y) - \varphi(y)), y+\Delta y) \cdot \frac{\varphi(y+\Delta y) - \varphi(y)}{\Delta y}$

$+ f(\psi(y) + \theta_3(\psi(y+\Delta y) - \psi(y)), \Delta y + y) \cdot \frac{\psi(y+\Delta y) - \psi(y)}{\Delta y}$

Невязка

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta J}{\Delta y} = f(\psi(y),y)\,\psi'(y) - f(\varphi(y),y)\varphi'(y) + \underbrace{\lim_{\Delta y\to 0}\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x,y+\theta_2\Delta y)\,dx}_{= I(y)} \quad (*) \qquad 0<\theta_2<1$$

$$I=\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} [f'_y(x,y+\theta_2\Delta y) - f'_y(x,y)]\,dx + \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x,y)\,dx$$

$f'_y \in C(\Pi) \Rightarrow f'_y$ равн непр на $\Pi \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in[a,b]$ $\forall y,\ y+\Delta y\in[c,d]$ $\left(|\Delta y|<\delta \Rightarrow |f'_y(x,y+\theta_2\Delta y) - f'_y(x,y)|<\frac{\varepsilon}{b-a}\right)$

Тогда $\left|I - \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x,y)\,dx\right| \le \int_a^b |f'_y(x,y+\theta_2\Delta y) - f'_y(x,y)|\,dx <$

$< \frac{\varepsilon}{b-a}\int_a^b dx = \varepsilon$, т.е. $\lim_{\Delta y\to 0} I(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x,y)\,dx$

Подст. I в $(*)$, получаем, что надо ■

Т.3 Интегрирование по параметру

Пусть $f\in C(\Pi)$, $\varphi,\psi\in C[c,d]$. Тогда $J(y)\in R[c,d]$, т.е. $\exists\int_c^d\left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx\right)dy$

Δ: по Т1 $J(y)$ - непр. на $[c,d]$ ф-ия $\Rightarrow J\in R[c,d]$ ■

Примеры

~3713(а)

1) $$\lim_{\alpha\to 0}\int\limits_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$$

2) (3718 (а))

$$F(\alpha) = \int\limits_{\underbrace{\sin\alpha}_{\varphi(\alpha)}}^{\overbrace{\cos\alpha}^{\psi(\alpha)}} e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\,dx, \quad F'(\alpha) = ?$$

По Т.2 $$F'(\alpha) = e^{\alpha\overbrace{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}^{=|\sin\alpha|}}\cdot(-\sin\alpha) - e^{\alpha\overbrace{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}^{=|\cos\alpha|}}(\cos\alpha) +$$
$$+\int\limits_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

3) $$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x-at)+\varphi(x+at)\right) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\eta)\,d\eta$$

↑ реш.

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), & x\in\mathbb{R},\ t>0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x\in\mathbb{R} \\ u_t(x,0) = \psi(x), & \end{cases}$$

— ур-ие колебания бесконечной струны

---

§2 Несобственные инт. зависящие от парам.

(Критерий Коши равн. сх-ти несобств. инт.)

О.1 ф-ия $f:\Pi\to\mathbb{R}$, где $\Pi = \{(x,y)\mid a\le x<+\infty,\ y\in\langle c,d\rangle\}$,

где $a\in\mathbb{R}$, а $c<d$ — либо числа, либо символы $-\infty, +\infty$,

$<$ — либо (, либо [, $>$ — либо), либо] и пусть $\forall y \in <c,d>$ сх-ся несобств инт (1) $\mathcal{I}(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$,

$\mathcal{I}(y)$ – несобств инт 1-го рода, зависящий от парам $y \in <c,d>$

Замечание: Ан-но можно расм $\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{b} f(x,y)\,dx}_{\mathcal{I}_1(y)}$; $\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx}_{\mathcal{I}_2(y)} \doteq$

$\doteq \int\limits_{-\infty}^{a} + \int\limits_{a}^{+\infty}$

O.2 Пусть $f: \Pi_b \to \mathbb{R}$, $\Pi_b = \{(x,y) \mid a \le x < b,\ y \in <c,d>\}$

$b \in \mathbb{R}$, Если $\forall y \in <c,d>$ сход-ся несобств инт

$\tilde{\mathcal{I}}(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx \quad (2)$, $\tilde{\mathcal{I}}$ – нес. инт 2-го рода от парам $y \in <c,d>$

с особ в (.) b

O.3 (Равн сх-ть инт по парам)

Нес. инт (1) наз-ся равн сход на $Y \subseteq <c,d>$,

если $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ A(\varepsilon) \ge a\ \ \forall R\ \forall y \in Y \left(R > A \Rightarrow \left| \int\limits_R^{+\infty} f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon \right)$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{R \to +\infty} \sup\limits_{y \in Y} \left| \int\limits_R^{+\infty} f(x,y)\,dx \right| = 0$

$\int\limits_R^{+\infty} f(x,y)\,dx$ – остаток нес. инт $R \ge a$

O.4 Нес инт (2) наз-ся равн. сх-ся на $Y \subseteq <c,d>$,

если $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \tau(\varepsilon) \in [a,b) : \forall \eta\ \forall y \in Y \left(\eta \in (\tau, b) \Rightarrow \left| \int\limits_\eta^b f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon \right)$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{\eta \to b-0} \sup\limits_{y \in Y} \left| \int\limits_\eta^b f(x,y)\,dx \right| = 0$

ост нес инт (2)

60

<u>Замечание</u>: Далее все утв доказываем для $J(y)$, для $\tilde{J}(y)$ ан-но.

$\boxed{\text{Т. 1}}$ (Кр Коши равн. сх-ти нес инт зав от парам)

Нес инт 1-го рода $J(y)$ сх-ся равн-но на $Y \subset \langle c, d \rangle$ $\Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0 \ \exists A(\varepsilon) \geq a : \forall R' > A \ \forall R'' > A \ \forall y \in Y \ \left| \int_{R'}^{R''} f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon \right) \quad (*)$$

Δ: ($\Longrightarrow$)

Нес инт ($J(y)$ сх-ся равн) $\Longleftrightarrow [\forall \varepsilon > 0 \ \exists A(\varepsilon) \geq a \ \forall R \ \forall y \in Y$

$$\left(R \geq A \Rightarrow \left| \int_R^{+\infty} f(x,y)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

Б $R' \geq A$, $R'' > A$;

$$\left| \int_{R'}^{R''} f(x,y)\,dx \right| = \left| \int_{R'}^{+\infty} f(x,y)\,dx - \int_{R''}^{+\infty} \right| \leq \left| \int_{R'}^{+\infty} f(x,y)\,dx \right| + \left| \int_{R''}^{+\infty} f(x,y)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

($\Longleftarrow$)

П вып. усл-ие Коши (*) из него $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow \forall y \in Y$, y - фикс. $\overset{\text{РОКК}}{\underset{\text{сх-ти нес инт без парам}}{\Longrightarrow}}$ нес. инт. $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ — сх-ся $\forall y \in Y$.

По усл Коши $a \leq R' < R''$ $\cancel{\int_{R'}^{R''} f(x,y)\,dx}$ $\exists \lim\limits_{R'' \to +\infty} \left| \int_{R'}^{R''} f(x,y)\,dx \right| \Longrightarrow \left| \int_{R'}^{+\infty} f(x,y)\,dx \right| \leq \varepsilon$

$\Longrightarrow$ вып опр равн сх-ти нес инт на Y ∎

обозн $f(x,y)$
$f(\cdot,y)$ – фция перем x, при фикс y

$\boxed{T2}$ (Пр. Вейерштрасса)

П $f: \Pi \to \mathbb{R}$, $\Pi = \{(x,y) \mid a \le x < +\infty, y \in \langle c,d\rangle\}$.

(i) $\forall y \in Y$ $\forall A \ge a$ $f(\cdot,y) \in R[a,A]$;

(ii) $\exists$ ф-ия $g(x)$ опр на $[a,+\infty)$: $\forall y \in Y$ ${}^{\in\langle c,d\rangle}$ $\forall x \in [a,+\infty)$ вып-ся нер-во $|f(x,y)| \le g(x)$ – фция g мажорирует $f(x,y)$

(iii) нес. ~~инт~~ инт $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx < \infty$

Тогда нес инт (1) сход равн (и абс.) на Y

Δ: $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ – сх-ся $\Rightarrow$ вып. усл. Коши, т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists A(\varepsilon) \ge a$ $\forall R' > A$ $\forall R'' > A$ $\left|\int\limits_{R'}^{R''} g(x)dx\right| < \varepsilon$

$\forall y \in Y$ $\forall R' > A$ $\forall R'' > A$ $\left|\int\limits_{R'}^{R''} f(x,y)dx\right| \le \left|\int\limits_{R'}^{R''} |f(x,y)|\,dx\right| \le$

$\le \left|\int\limits_{R'}^{R''} g(x)\,dx\right| < \varepsilon$ $\Rightarrow$ по Кр Коши р.с. нес инт, знач $\int$ $J(y)$ – сх-ся равн на Y ∎

П: ~ 3758

$$J(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2}\,dx, \quad \alpha \in Y = \mathbb{R}$$

$f(x,\alpha) = \left|\frac{\cos \alpha x}{1+x^2}\right| \le \frac{1}{1+x^2} = g(x)$ $\forall \alpha \in Y$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi \Rightarrow$ сх-ся

$\Bigg\}$ $\xRightarrow{\text{по пр В}}$ $J(\alpha)$ сх-ся абс и равн на $Y = \mathbb{R}$

П.3 Непрерывность по парам. несобств. инт.

$$\forall y \in \langle c,d\rangle \quad J(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx \quad (1)$$

Т.3 (Непр. по парам.)

Пусть $f: \Pi \to \mathbb{R}$, где $\Pi = \{(x,y) \mid a \le x < +\infty;\ y \in \langle c,d\rangle\}$ и вып. усл.:

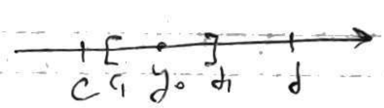
(i) $f(x,y) \in C(\Pi)$

(ii) нес. инт. (1) $J(y)$ сх-ся равн. на $\langle c,d\rangle$

Тогда ф-ия $J(y)$ непр. на $\langle c,d\rangle$, т.е. $J \in C\langle c,d\rangle$

Δ:

Б. $\forall (\cdot)\ y_0 \in \langle c,d\rangle$, y_0 - фиксир.



$\exists\ [c_1, d_1] \subset \langle c,d\rangle \wedge y_0 \in [c_1,d_1]$,

$$\forall y \in [c_1,d_1] \quad |J(y) - J(y_0)| = \left|\int_a^R (f(x,y) - f(x,y_0))\,dx + \int_R^{+\infty} f(x,y)\,dx - \int_R^{+\infty} f(x,y_0)\,dx\right|$$

из усл. 2. $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists A(\varepsilon) \ge a\ \forall R \ge a\ \forall y \in Y$

$$\left(R > A \Rightarrow \left|\int_R^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon/3\right)$$

в част. для $y = y_0$

Тогда $\left|\int_R^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon/3$

$$|J(y) - J(y_0)| \le \left|\int_a^R (f(x,y) - f(x,y_0))\,dx + \int_R^{+\infty} f(x,y)\,dx - \int_R^{+\infty} f(x,y_0)\,dx\right| \le$$

$$\le \left|\int_a^R (f(x,y) - f(x,y_0))\,dx\right| + \left|\int_R^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| + \left|\int_R^{+\infty} f(x,y_0)\,dx\right| <$$

$\forall R > A$, $R = A(\varepsilon)+1$

$$< \left| \int\limits_{Ra}^{R = A(\varepsilon)+1} f(x,y)\,dx \right| + \frac{2\varepsilon}{3} < $$

$f(x,y)$ – непр на $\overbrace{[a, A(\varepsilon)+1] \times [c_1, d_1]}^{K}$ – компакт

$\Rightarrow f(x,y)$ – равн непр на $K \Leftrightarrow (\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : \forall (x,y) \in K$

$(|y-y_0| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - f(x,y_0)| < \frac{\varepsilon}{3(A+1-a)})$

$< \frac{\varepsilon}{3(A+1-a)} \cdot (A+1-a) + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon$, т.е. $I(y)$ непр в (.) y_0

y_0 – произв $\Rightarrow$ непр всюду на $\langle c,d \rangle$ ■

Интегрирование по парам несобств инт

$\boxed{Т.4}$ (Инт по парам)

П $f: \Pi \to \mathbb{R}$, $\Pi = [a,+\infty) \times [c,d]$ и вып усл.

(i) $f \in C(\Pi)$

(ii) $I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ сх-ся равн по y на $[c,d]$, Тогда

фия $I(y)$ – интегр по $[c,d]$, т.е. $I \in R[c,d]$

и справ-ва ф-ла $\int\limits_c^d I(y)\,dy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\right)dy = \int\limits_a^{+\infty}\left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right)dx$

Δ: По $\boxed{Т.3}$ $I \in C[c,d] \Rightarrow I \in R[c,d]$. Д-м, что $\exists$

$$\int\limits_a^{+\infty} \underbrace{\left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right)}_{= g(x)} dx = \int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx, \quad \text{в } \forall R > a$$

$$\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\right)dy - \int\limits_a^R g(x)\,dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\right)dy - \int\limits_a^R \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right)dx =$$

$= \int_c^d \left(\int_R^{+\infty} f(x,y)\,dx \right) dy$; $\left| \int_c^d \left(\int_R^{+\infty} f(x,y)\,dx \right) dy \right| \leq \int_c^d \left| \int_R^{+\infty} f(x,y)\,dx \right| dy$

$\int_a^{+\infty} f\,dx$ – сх. р., т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists A(\varepsilon) \geq a\ \forall R \geq a\ \forall y \in [c,d]$

$\left(R > A \Rightarrow \left| \int_R^{+\infty} f(x,y)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{d-c} \right)$

$< \frac{\varepsilon}{d-c} \int_c^d dy = \frac{\varepsilon}{d-c} \cdot (d-c) = \varepsilon$, т.е.

$\exists \lim_{R \to +\infty} \int_a^R g(x)\,dx = I$ ■

$\boxed{\text{T. 5}}$ (Интегр. по парам. по беск. пром.)

Пусть $f: \Pi \to \mathbb{R}$, $\Pi = [a, +\infty) \times [c, +\infty)$ и вып. усл.

(i) $f \in C(\overline{\Pi})$

(ii) $\left(\forall d > c\right.$ несоб. инт. $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ сх-ся равн. на $\left.[c,d]\right) \wedge$

$\left(\forall b > a\right.$ несоб. инт. $\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$ сх-ся равн. (по x) на $\left.[a,b]\right)$

(iii) Хотя бы 1 из несоб. инт. $\int_a^{+\infty}\left(\int_c^{+\infty} |f(x,y)|\,dy\right)dx$ или $\int_c^{+\infty}\left(\int_a^{+\infty} |f(x,y)|\,dx\right)dy$

сх-ся, тогда инт. $I = \int_a^{+\infty}\left(\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy\right)dx = \int_c^{+\infty}\left(\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\right)dy = I$,

одновр. сущ. и равны

Ряды Фурье

$\boxed{0\ 1}$ Пусть X - ЛП над полем F ($F=\mathbb{R}$ или $F=\mathbb{C}$), и на X задана ф-ия $\forall \vec{x}\in X \to \|x\|\in\mathbb{R}$:

1) $\|x\|\geq 0$, причем $\|x\|=0_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow x=0_x$ (нулевой эл-т)

2) $\forall x\in X\ \forall \lambda\in F\ \ \|\lambda x\| = |\lambda|\cdot\|x\|$ (одн-ть нормы)

3) $\forall x,y\in X\ \ \|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$ (нер-во треуг.)

ф-ия $\|\cdot\|$, удовл. 1-3 наз-ся нормой на ЛПX, а $(X,\|\cdot\|)$ - лин. норм. простр. (ЛНП)

Пример:

1) $X=\{f(x)\mid f(x)$ - непр на $[a,b]\}$! $f(x):[a,b]\to\mathbb{R}$

$\|f\|_C=\|f\|=\max\limits_{[a,b]}|f(x)| \qquad (X,\|\cdot\|)\equiv C[a,b]$ - ЛНП

2) $C^n[a,b]=\{f\in C[a,b]\mid \forall k=\overline{1,n}\ \ f^{(k)}(x)\in C[a,b]\}$

$\|f\|=\max\limits_{k=\overline{1,n}}\|f^{(k)}\|_C=\max\limits_{k=\overline{1,n}}\max\limits_{[a,b]}|f^{(k)}(x)|$ - ЛНП

$\boxed{0.2}$

Пусть $(X,\|\cdot\|)$ - ЛНП, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ - посл. эл-ов X $\{f_n\}$ наз-ся.

1) сход. к $f\in X$, если $\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N}\ (n>N \Rightarrow \|f-f_n\|<\varepsilon$

$f_n\xrightarrow{X}, n\to\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ $(\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\|f-f_n\|=0)$

2) сход-ся, если $\exists f\in X: f_n\xrightarrow{X} f, n\to\infty$

3) фундам., если $\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}: \forall n,m\in\mathbb{N}\ (n<N \wedge m<N \Rightarrow$
$\Rightarrow \|f_n-f_m\|<\varepsilon)$

68

Ут в.1

(i) Если $\xi_n \xrightarrow{X} \xi$, $n \to \infty$, то $\{\xi_n\}$ - огр, т.е. $\exists M > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ $\|\xi_n\| \le M$

(ii) Если $\exists \lim \xi_n = \xi$, то он единств

(тк бесп, но он не пишет, типо куда еще)

(iii) Если $\exists \lim \xi_n$, то $\{\xi_n\}$ - фундам

О.3

ЛНП X наз-ся полным ~~полным~~, если $\forall$ фунд. посл.-ть эл-ов этого пр-ва явл-ся сход-ся в X.

(Пр-во Банаха)

Ут.в 2

ЛНП $C[a,b]$ и $C^n[a,b]$ - ПЛНП

Е.П

О.4

Пусть X - Л.П над F ($F = \mathbb{R}$, или $F = \mathbb{C}$) и на $X \times X$ задана ф-ция 2-х ~~[illegible]~~ вект. аргументов $\forall x, y \in X \to (x,y) \in \mathbb{C}$:

1) $\forall x \in X \quad (x,x) \ge 0$, причем $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_x$ (полож опр)

2) $\forall x, y \in X \quad (x,y) = \overline{(y,x)}$

3) $\forall x, y, z \in X \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C} \quad (\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x,z) + \mu(y,z)$

(линн-ть по 1-му элем)

! $\overset{3)}{\underset{2)}{\Rightarrow}}$ $(z, \lambda x + \mu y) = \overline{(\lambda x + \mu y, z)} = \bar{\lambda}(z,x) + \bar{\mu}(z,y)$

$(X, (\cdot,\cdot))$ — ЕП

Утв 3 Пусть $(X,(\cdot,\cdot))$ — ЕП, $\forall x\in X$ $\|x\| \doteq \sqrt{(x,x)}$,

Тогда $(X,\|\cdot\|)$ — ЛНП

Δ 1) $\|x\|\ge 0$, $\|x\|=0 \Leftrightarrow \sqrt{(x,x)}=0 \Leftrightarrow (x,x)=0 \Leftrightarrow x=0$

$\forall \alpha\in\mathbb{C}, \forall x\in X$ $\|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x,\alpha x)} = \sqrt{\underbrace{\alpha\cdot\bar\alpha}_{=|\alpha|^2} (x,x)} = |\alpha|\sqrt{(x,x)} =$

$= |\alpha|\cdot\|x\|$

2) Нер-во К-Б $\forall x,y$ $|(x,y)|\le \|x\|\cdot\|y\|$

$\forall\alpha\in\mathbb{C}$ $0\le (x+\alpha y, x+\alpha y) = (x,x)+\alpha(y,x)+\bar\alpha(x,y)+|\alpha|^2(y,y) =$

$= \|x\|^2 + t\cdot e^{i\varphi}|(x,y)|e^{-i\varphi} + t\cdot e^{-i\varphi}|(x,y)|\cdot e^{i\varphi} + t^2\|y\|^2 =$

$\mathbb{C}\ni(x,y) = |(x,y)|\cdot e^{i\varphi}$, $\alpha = t\cdot e^{i\varphi}$, $t\ge 0$

$\varphi \doteq \arg(x,y)$

$= \|x\|^2 + 2t|(x,y)| + \|y\|^2\cdot t \ge 0 \quad \forall t\ge 0$

$\|y\|=0 \Leftrightarrow y = 0_X$, тогда очев

$\|y\|\ne 0$

$0\le\|x+y\|^2 = (x+y,x+y) = \|x\|^2 + (x,y)+(y,x)+\|y\|^2 \le$

$(x,y)+(y,x) = 2\operatorname{Re}(x,y)$ | $\le \|x\|^2 + 2|(x,y)| + \|y\|^2 \overset{\text{Н К-Б}}{\le}$

$z+\bar z = 2\operatorname{Re} z \le 2|z|$

$\le \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\|+\|y\|)^2$ ■

$\boxed{\text{Утв 4}}$ Пусть X − ЕП с нормой $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$, тогда

(i) ск. пр-ие (x,y) непр. ф-ия 2х вект. арг.,
т.е. $\forall \{x_n\}\ \forall \{y_m\}: x_n \xrightarrow{X} x,\ n\to\infty \wedge y_m \xrightarrow{X} y,\ m\to\infty \Rightarrow$
$\Rightarrow (x_n, y_m) \to (x,y),\ n\to\infty,\ m\to\infty$

(ii) $\forall f \in X,\ \forall \sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k = g \in X$, т.е. $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} g_k \xrightarrow{X} g,\ n\to\infty$

$$(f,g) = \left(f, \sum_{k=1}^{\infty} g_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, g_k)$$

Δ: (i) $(x_n, y_m) - (x,y) = (x_n - x, y_m) + (x, y_m - y) \to 0,\ n,m\to\infty$

$|(x_n - x, y_m)| \overset{\text{н К-Б}}{\le} \|x_n - x\| \cdot \|y_m\| \le C \cdot \|x - x_n\| \to 0,\ n\to\infty$

$y_m \to y,\ m\to\infty \Rightarrow \{y_m\}$ − огр $\Rightarrow$

$|(x, y_m - y)| \underset{\text{К-Б}}{\overset{\text{нер}}{\le}} \|x\|\ \|y_m - y\| \to 0,\ m\to\infty$

б) $(f, S_n) = \left(f, \sum\limits_{k=1}^{n} g_k\right) \overset{\text{лин}}{\underset{\text{ск пр}}{=}} \sum\limits_{k=1}^{n} (f, g_k) \xrightarrow{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} (f, g_k) = (f,g)$ ∎

$\boxed{\text{О 5}}$

X − ЕП явл-ся ПЛНП с нормой $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$, то X наз-ся пр-вом Гильберта

Примеры:

1) $CL_2[a,b]$ $f,g \in C([a,b], \mathbb{C})$

$(f,g) = \int\limits_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx$ − норм

$\|f\| = \int\limits_a^b |f(x)|^2\,dx$ − норма

$\boxed{\text{Утв 5}}$

$CL_2[a,b]$ и l_3 – ЕП

не явл. полным — полное пр-во

Ряды Фурье по ортог системе эл-ов

$\boxed{\text{О.1}}$ Пусть X – ЛНП, система эл-ов $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}\subset X$ наз-ся: 1) лин. незав в X, если $\forall$ кон. подсист. эл-ов $f_{\alpha_1}\dots f_{\alpha_m}\in$ $\in\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ рав-во $c_1\cdot f_{\alpha_1}+c_2\cdot f_{\alpha_2}+\dots+c_m f_{\alpha_m}=0_X$

~~возможно лишь~~ возможно лишь при $c_1=c_2=\dots=c_m=0$

2) всюду плотной в X, если $\forall f\in X$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists f_{\alpha_0}(\varepsilon)\in\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$: $\|f-f_{\alpha_0}\|<\varepsilon$

3) лин. плотной, если $\forall f\in X$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists f_{\alpha_1},\dots f_{\alpha_m}$ и $\exists c_1,\dots,c_m$: $\|f-\sum\limits_{k=1}^{m}c_k f_{\alpha_k}\|<\varepsilon$

$\boxed{\text{О.2}}$ Система эл-ов ЛНП X $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ наз-ся базисом в X, если $\forall f\in X$ $\exists$ и ! $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}\subset F$:
$f\overset{X}{=}\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k e_k$ (т.е. ряд сх-ся к f, по норме в X)

$\boxed{\text{О.3}}$

Система эл-ов $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}\subset E\setminus\{0\}$ ЕП наз-ся ортогональной, если $\forall f_{\alpha_1},f_{\alpha_2}\in\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ и $\alpha_1\neq\alpha_2\Rightarrow$
$\Rightarrow(f_{\alpha_1},f_{\alpha_2})=0$ (ОС)

наз-ся ортонорм сист. (ОНС)
$\forall\alpha_1,\alpha_2\in A\Rightarrow (f_{\alpha_1},f_{\alpha_2})=\delta_{\alpha_1,\alpha_2}$

$\delta_{\alpha,\beta}=\begin{cases}1,\alpha=\beta\\0,\alpha\neq\beta\end{cases}$

40

$\boxed{О.4}$

Система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset E$ наз-ся ОНБ, если $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ - базис E (ЕП с нормой $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$) и это ОНС.

$\boxed{О.5}$ П $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ ~~некот~~ $\subset E$ - ОНС, Тогда $\forall f \in E$

(1) $f \sim \sum\limits_{k=1}^{\infty} \underbrace{(f,e_k)}_{\alpha_k} e_k$ - ряд Фурье эл-та f по ОНС $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$

$\alpha_k = (f,e_k)$ - коэф Фурье $f \in E$ по ОНС $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$

$\boxed{Утв. 1}$ (Единств разл по ОНС)

П $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ ОНС в E, $f \in E$: $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k$

Тогда $c_k = \alpha_k = (f, e_k)$

Δ: По св-ву ск-го адд-ти $\forall p \in \mathbb{N}$, p - фиксир.

$(f, e_p) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \underbrace{(e_k, e_p)}_{\delta_{kp}} = c_p$ ▨

$\boxed{Т.1}$

П E - ЕП, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ ОНС, Тогда $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall f \in E$

$\min\{\|f - \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k e_k\| \mid \beta_k \in \mathbb{C}, k=\overline{1,n}\} = \|f - \sum\limits_{k=1}^{n} \underbrace{(f,e_k)}_{\alpha_k} e_k\|$

Δ: $\|f - \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k e_k\|^2 = (f - \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k e_k, f - \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k e_k) =$

$= \|f\|^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k \underbrace{(e_k, f)}_{\overline{\alpha_k}} - \sum\limits_{m=1}^{n} \overline{\beta_m} \underbrace{(f, e_m)}_{\alpha_m} + \sum\limits_{k=1}^{n} |\beta_k|^2 =$

$$= \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} (\beta_k \bar{\alpha}_k + \bar{\beta}_k \cdot \alpha_k) + \sum_{k=1}^{n} |\beta_k|^2 =$$

$$(\beta_k - \alpha_k)(\bar{\beta}_k - \bar{\alpha}_k) = |\beta_k|^2 + |\alpha_k|^2 - \beta_k \bar{\alpha}_k - \alpha_k \bar{\beta}_k$$

$$\overset{\shortparallel}{|\beta_k - \alpha_k|^2}$$

$$= \|f\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\beta_k - \alpha_k|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \to \min_{\beta_k = \alpha_k}$$