Konvolucija in impulzni odziv

LDSTA

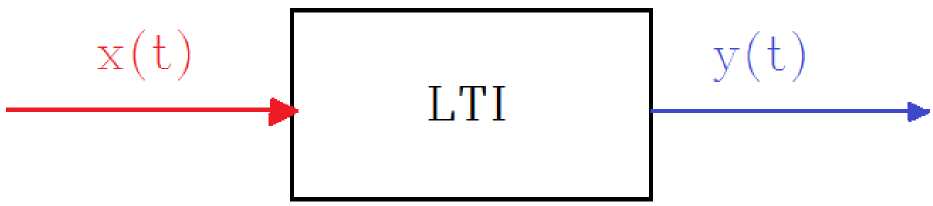
1 Namen vaje

Pri vaji spoznamo kako lahko opišemo odziv akustičnega sistema/prostora na impulz. Akustični sistem lahko vzbudimo tudi s poljubnim vhodnim signalom $x(t)$, pri čemer izmerimo izhodni signal oziroma odziv $y(t)$. Vhodni in izhodni signal sta povezana s prenosno funkcijo $h(t)$, ki jih pravimo impulzni odziv. Funkcije $x(t)$, $y(t)$ in $h(t)$ so povezane preko konvolucijskega integrala.

$$x(t) \rightarrow h(t) \rightarrow y(t) \tag{1}$$

2 Uvod, Teorija

Karakterizacija prenosne funkcije in opis odziva akustičnega sistema na podlagi vzbujanja z vhodnim signalom je ena najpogostejših nalog s področja akustike. Pri tem sta vhodni in izhodni signal lahko tudi med seboj različni fizikalni količini. Primer je zvočnik, kjer je vhodni signal električna napetost, na izhodu pa dobimo zvočni tlak.
v splošnem velja, da lahko akustične sisteme opišemo s prenosno funkcijo. Pri tem se omejimo na linearne, časovno invariantne sisteme.



Slika 1: Vhodni signal $x(t)$, izhodni signal $y(t)$ in linearen, časovno invarianten sistem (LTI).

Linearnost:
če je vhodni signal vsota dveh signalov x_1, x_2 je potem tudi izhodni signal vsota dveh signalov y_1 in y_2, ki nastaneta zaradi posameznih vhodnih signalov x_1 in x_2:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) + x_2(t) \\ x_1(t) &\rightarrow y_1(t) \\ x_2(t) &\rightarrow y_2(t) \\ y(t) &= y_1(t) + y_2(t) \end{aligned} \tag{2}$$

Časovna invariantnost:

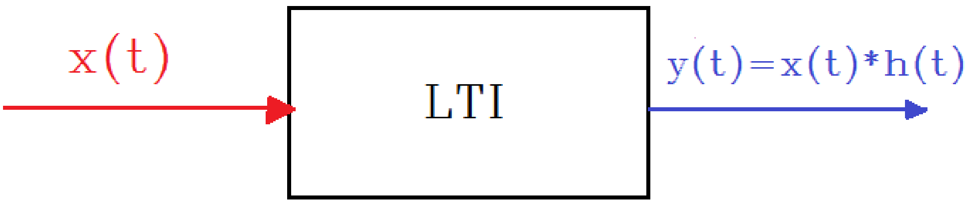
Sistem je časovno invarianten, če časovni premik vhodnega signala pomeni tudi časovni premik izhodnega signala. Pomeni tudi, da se s časom ne spreminja.
Večina akustičnih sistemov je linearnih. Linearni časovno invariantni sistem pa lahko v celoti okarakteriziramo z impulznim odzivom.

2.1 Konvolucija in impulzni odziv

Impulzni odziv je funkcija $h(t)$ definirana v časovni domeni. Konvolucijski teorem pravi, da če je vhodni signal enak $x(t)$ in je impulzni odziv sistema enak $h(t)$, potem lahko določimo odziv sistema $y(t)$ s pomočjo konvolucijskega integrala:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau = x(t) * h(t) \tag{3}$$

Če poznamo impulzni odziv sistema potem lahko vsak vhodni signal s konvolucijo pretvorimo v izhodni signal, saj lahko vsak signal obravnavamo kot serijo impulzov. Konvolucija je tako matematično orodje s katerim lahko določimo izhod oziroma odgovor sistema na poljubni vhod.



Slika 2: Če poznamo impulzni odziv $h(t)$ sistema, potem lahko izračunamo odziv sistema $y(t)$ za poljubni signal $x(t)$.

V diskretnem primeru imamo namesto obravnavamo nezvezne spremenljivke (zaporedne meritve). Konvolucijo lahko potem zapišemo v obliki vsot:

$$y_k = \sum_{i=1}^{N+M-1} x_i \cdot h_{k-i} \tag{4}$$

kjer je:

- N število podatkov (meritev) v tabeli x
- M število podatkov (meritev) v tabeli h

Primer:
Če je $x = [2, 4, 3, 6]$
in je
$h = [1, 5, 2, 3, 4]$
potem dobimo
$y = x * h = [2, 14, 27, 35, 56, 37, 30, 24]$.

2.2 Frekvenčni odziv

Sistem lahko določimo tudi s frekvenčnim odzivom $H(\omega)$ v frekvenčni domeni, ki je Fourierova transformiranka impulznega odziva $h(t)$. V frekvenčni domeni lahko izhodni signal zapišemo kot:

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) \tag{5}$$

Če poznamo frekvenčni odziv, se impulzni odziv izračuna z obratno Fourierjevo transformacijo:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{i\omega t} \mathrm{d}\omega \tag{6}$$

Konvolucija predpostavlja, da je izhodni signal podoben vhodnemu. Zaradi linearnosti imata signala enako frekvenco, lahko pa imata različno amplitudo in fazni zamik. Amplituda in fazni zamik sta odvisni od amplitude in faznega zamika impulznega odziva.

3 Meritve impulznega odziva

V splošnem določimo impulzni odziv z operacijo, ki ji pravimo dekonvolucija. To pomeni, da če poznamo vhodni signal $x(t)$ in izmerimo izhodni signal $y(t)$, lahko impulzni odziv izračunamo.
Najprej oba signala Fourierjevo transformiramo v frekvenčno domeno:

$$x(t) \rightarrow X(\omega) \text{ in } y(t) \rightarrow Y(\omega)$$

in izračunamo frekvenčni odziv z enačbo 5:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega}.$$

Impuzni odziv nato dobimo z inverzno Fourierjevo transformacijo (enačba 6).

Navadno kot vhodne signale uporabljamo:

- **Sinusoidni signal**:

  $$x(t) = a\cos(\omega t)$$

  Izhodni signal $y(t)$ je potem

  $$y(t) = a|H(\omega)|\cos(\omega t + \phi)$$

- **Impulz - Delta funkcija**: kjer so zastopane vse frekvence enakovredno.

  $$x(t) = a\delta(t)$$

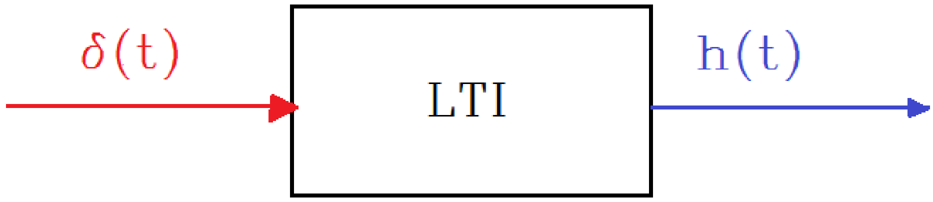
  $$H(\omega) = \frac{1}{a} Y(\omega)$$

  $$h(t) = \mathcal{F}^{-1}(H(\omega))$$

  To obenem pomeni, da je signal $y(t)$, ki je posledica impulza (δ - delta funkcije) v bistvu kar enak prenosni funkciji oziroma impulznem odzivu $h(t)$.

  Torej, če linearni, časovno invariantni sistem vzbudimo z impulzom $\delta(t)$ je signal na izhodu enak kar impulznemu odzivu:

  $$x(t) = \delta(t) \rightarrow h(t) = y(t)$$



Slika 3: Če je vhodni signal delta funkcija ($\delta(t)$), je izhodni signal enak impulznemu odzivu $h(t)$.

Impulzni odziv, ki dobimo po vzbujanju sistema z delta funkcijo je podvržen šumu oziroma ozadju na mestu meritve. Zato dobimo v primeru previsokega ozadja napačne rezultate. Vpliv ozadja ponavadi zmanjšamo s povprečenjem (izmerimo več signalov), korelacijskih funkcij ali uporabo filtrov (npr. Wienerjev filter).

4 Eksperimentalni del - Naloge

4.1 Naloga 1: Konvolucija 1

Uporabi enačbo 4 in izračunaj ter nariši konvolucijo ($y = x * h$) signalov:

$$x = [-1, 3, -2, 1, 0] \quad \text{in}$$
$$h = [-5, 2, -1, -9, 7].$$

4.2 Naloga 2: Konvolucija 1

Vhodni signal ($x(t)$) npr. govor konvoluiraj z impulznim odzivom, (v pomoč ti je skripta napisana v programskem jeziku Python). Izriši grafe, ki prikazujejo impulzni odziv in postopek konvolucije:

- $h(t)$
- vhodni signal $x(t)$
- izhodni signal po konvoluciji $y(t) = x(t) * h(t)$.

1. Izmeri impulzni odziv na oddaljenostih 5 cm, 1.5 m in 5 m od mikrofona.
2. Konvoluiraj impulzne odzive ($h(t)$) z govorom ($x(t)$) v mikrofon na razdalji $\approx$ 5 cm.

4.3 Dodatna naloga 1

Reši prvo nalogo tako, da napišeš lastni program za izračun konvolucije na podlagi enačbe 4. Zapiši psevdokodo oziroma kodo v poljubnem programskemu jeziku.

4.4 Dodatna naloga 2

S pomočjo enačb 5 in 6 ali s pomočjo numeričnih metod ali pa analitično določi impulzni odziv sistema (h) za katerea velja:

$$y = x * h$$

Signala x in y dobiš pri asistentu (pošlji e-pošto z zadevo THAM_2025_04).

4.5 Oddajanje poročil in priporočila

- Oblika poročila: Poročilo se odda v elektronski obliki (kot **.pdf**) na preko e-učilnice
- Ime datoteke naj bo: **04_x_y.pdf**, pri čemer je **x** ime,**y** pa priimek študenta.
- Poročilo mora biti čitljivo, opremljeno z razločnimi slikami, tabelami in grafi. Bodi pozoren na negotovost meritev.
- Meritve, ki odstopajo od pričakovanih rezultatov ustrezni komentiraj.
- V poročilu navedi tudi
  - Ime in priimek avtorja
  - Vpisno številko
  - Naslov vaje
  - Datum opravljenih meritev in datum izdelave poročila.
- Priporočilo za izris grafov:
  - diagram naj vsebuje izmerjene oziroma izračunane količine z enotami,
  - če na enem diagramu predstavljamo več količin, je potrebno dodati legendo,
  - izmerjene vrednosti naj bodo jasno prikazane,
  - vrednosti parametrov pri katerih je bila meritev opravljena (npr: stanje ventila) naj bo prikazana v legendi
  - pri obdelavi meritev in izračunih upoštevajte natančnost in negotovost izmerjenih vrednosti (npr. če ste meritve opravili na 1 decimalnko natančno ni smisleno navajati rezultatov na 5 decimalk natančno)
  - če točkam prilagodimo teoretično krivuljo je potrebno zapisati matematični model, ki naj bo smiseln in univerzalen.
- Rok za oddajo: 14 dni po opravljeni vaji

Luka Čurović, Ljubljana, *November* 2025