

ФГБОУ ВО «САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

**ОТЧЁТ ПО ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ**  
курса «Теория вероятностей и математическая статистика»

**Вариант 6**

Выполнил студент:

Калачиков Алексей Юрьевич  
группа: 3-ИАИТ-10

Проверил:

к.ф.-м.н., доцент  
Попов Николай Николаевич

Самара, 2022 г.

# Содержание

<b>1. Статистическая обработка малой выборки</b>	<b>2</b>
1.1. Цель работы . . . . .	2
1.2. Ход работы . . . . .	3
1.2.1. Построить эмпирическую функцию распределения $F^*(x)$ . . . . .	3
1.2.2. Найти оценку математического ожидания. . . . .	4
1.2.3. Найти несмещенную оценку дисперсии и среднеквадратичного отклонения. . . . .	4
1.2.4. Найти доверительный интервал для математического ожидания и дисперсии при значениях доверительной вероятности $\beta = 0,9$ и $\beta = 0,95$ . . . . .	4
1.2.5. Выдвинуть гипотезу о законе распределения генеральной совокупности. В качестве гипотетического закона принять нормальный закон распределения. . . . .	5
1.2.6. На чертеже с графиком эмпирической функции $F^*(x)$ построить график теоретической функции $F(x)$ . . . . .	6
1.2.7. Оценить меру расхождения между теоретическим и статистическим распределениями по критерию Колмогорова. . . . .	7
1.3. Вывод . . . . .	7
1.4. Листинг . . . . .	7

## Лабораторная работа 1

# Статистическая обработка малой выборки

### 1.1. Цель работы

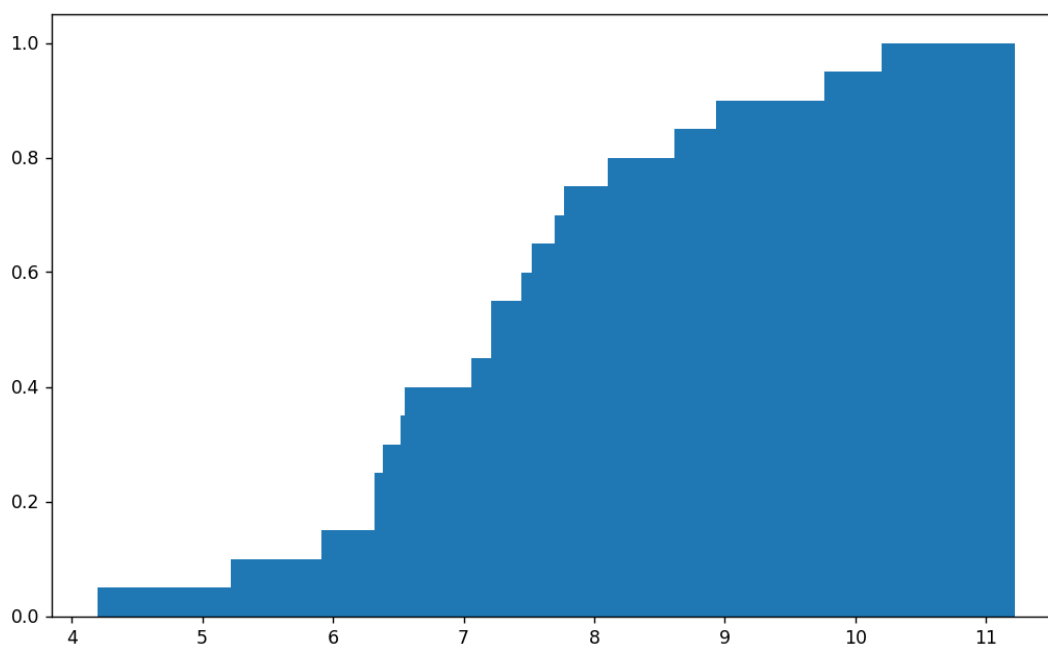
1. Построить эмпирическую функцию распределения  $F^*(x)$ .
2. Найти оценку математического ожидания.
3. Найти несмещенную оценку дисперсии и среднеквадратичного отклонения.
4. Найти доверительный интервал для математического ожидания и дисперсии при значениях доверительной вероятности  $\beta = 0,9$  и  $\beta = 0,95$ .
5. Выдвинуть гипотезу и законе распределения генеральной совокупности. В качестве гипотетического закона принять нормальный закон распределения.
6. На чертеже с графиком эмпирической функции  $F^*(x)$  построить график теоретической функции  $F(x)$ .
7. Оценить меру расхождения между теоретическим и статистическим распределениями по критерию Колмогорова.

## 1.2. Ход работы

### 1.2.1. Построить эмпирическую функцию распределения $F^*(x)$ .

Начальные данные	Отсортированные данные	Накопленная частота
7,03	4,71	0,05
4,71	5,73	0,1
7,72	6,42	0,15
5,73	6,83	0,2
10,27	6,83	0,25
10,71	6,89	0,3
6,83	7,03	0,35
8,03	7,06	0,4
6,89	7,57	0,45
7,57	7,72	0,5
9,12	7,72	0,55
8,28	7,95	0,6
8,61	8,03	0,65
6,42	8,21	0,7
7,95	8,28	0,75
7,06	8,61	0,8
7,72	9,12	0,85
9,44	9,44	0,9
6,83	10,27	0,95
8,21	10,71	1

Построим эмпирическую функцию распределения на основе отсортированных данных. График эмпирической функции.



**1.2.2. Найти оценку математического ожидания.**

Математическое ожидание — среднее значение случайной величины. Оно находится по формуле:

$$\tilde{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

Найдем оценку математического ожидания:  $m = 7,757$ .

**1.2.3. Найти несмещенную оценку дисперсии и среднеквадратичного отклонения.**

Несмещенная оценка дисперсии находится по формуле:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2.$$

Найдем несмещенную оценку дисперсии:  $S^2 = 2,092$ .

Среднеквадратичное отклонение находится по формуле:

$$\sigma = \sqrt{S^2}.$$

Найдем среднеквадратичное отклонение:  $\sigma = 1,446$ .

**1.2.4. Найти доверительный интервал для математического ожидания и дисперсии при значениях доверительной вероятности  $\beta = 0,9$  и  $\beta = 0,95$ .**

Доверительный интервал для математического ожидания вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned} \bar{x} - \frac{t_{\beta,n-1}\bar{S}}{\sqrt{n}} < m < \bar{x} + \frac{t_{\beta,n-1}\bar{S}}{\sqrt{n}} \\ t_{\beta,n-1} &= t_{0,9,19} = 1,73; \\ t_{\beta,n-1} &= t_{0,95,19} = 2,09. \end{aligned}$$

При значении доверительной вероятности  $\beta = 0,9$ :

$$7,199 < m < 8,321.$$

При значении доверительной вероятности  $\beta = 0,95$ :

$$7,082 < m < 8,438.$$

Доверительный интервал для дисперсии вычисляется по формуле:

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2},n-1}^2}$$

При значении доверительной вероятности  $\beta = 0,9$ :

$$\begin{aligned}\chi_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}^2 &= \chi_{0,95,19}^2 = 30,14; \\ \chi_{\frac{\alpha}{2},n-1}^2 &= \chi_{0,05,19}^2 = 10,17. \\ 1,148 &< \sigma < 1,977.\end{aligned}$$

При значении доверительной вероятности  $\beta = 0,95$ :

$$\begin{aligned}\chi_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}^2 &= \chi_{0,975,19}^2 = 32,85; \\ \chi_{\frac{\alpha}{2},n-1}^2 &= \chi_{0,025,19}^2 = 8,91. \\ 1,099 &< \sigma < 2,112.\end{aligned}$$

**1.2.5. Выдвинуть гипотезу о законе распределения генеральной совокупности. В качестве гипотического закона принять нормальный закон распределения.**

Предполагаемый закон распределения — нормальный. Выдвигаем гипотезу  $H_0$  о подчинении случайной величины  $X$  нормальному закону распределения

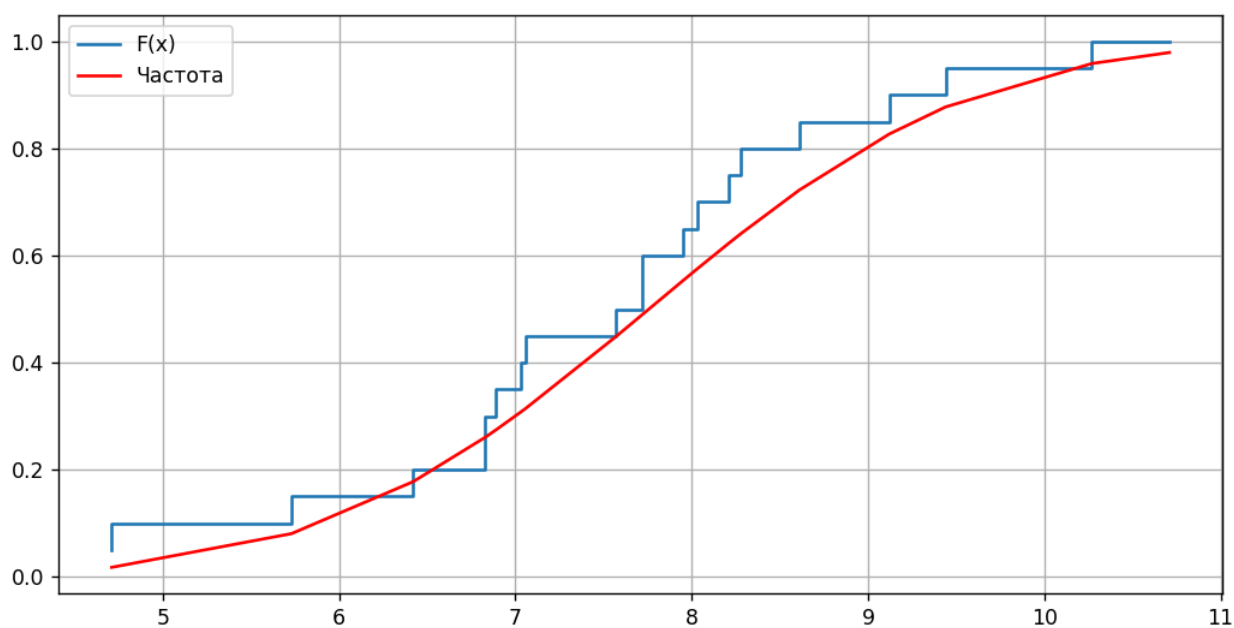
$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \\ F(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dt\end{aligned}$$

где  $\sigma^2$  — несмещенная оценка дисперсии,  $m$  — выборочное среднее.

**1.2.6. На чертеже с графиком эмпирической функции  $F^*(x)$  построить график теоретической функции  $F(x)$ .**

Начальные данные	Отсортированные данные	Накопленная частота	$F(x)$
7,03	4,71	0,05	0,02
4,71	5,73	0,1	0,08
7,72	6,42	0,15	0,18
5,73	6,83	0,2	0,26
10,27	6,83	0,25	0,26
10,71	6,89	0,3	0,27
6,83	7,03	0,35	0,31
8,03	7,06	0,4	0,31
6,89	7,57	0,45	0,45
7,57	7,72	0,5	0,49
9,12	7,72	0,55	0,49
8,28	7,95	0,6	0,55
8,61	8,03	0,65	0,57
6,42	8,21	0,7	0,62
7,95	8,28	0,75	0,64
7,06	8,61	0,8	0,72
7,72	9,12	0,85	0,83
9,44	9,44	0,9	0,88
6,83	10,27	0,95	0,96
8,21	10,71	1	0,98

Графики теоретической и эмпирической функций.



### 1.2.7. Оценить меру расхождения между теоретическим и статистическим распределениями по критерию Колмогорова.

Максимальное значение модуля разности между значениями эмпирической и теоретической функциями равно

$$U = \sup_{x \in R} |F(x) - F^*(x)|.$$

Определяя разницу  $U$ , получаем  $U_0 = 0,11$ . Вычисляем  $\lambda_0$ :

$$\lambda_0 = U_0 \sqrt{n} = 0,49.$$

Для  $\alpha = 0,01$  :  $\lambda_{kp} = 1,63 > 0,49$

Для  $\alpha = 0,05$  :  $\lambda_{kp} = 1,36 > 0,49$

Поэтому гипотеза о нормальном распределении по критерию Колмогорова принимается как не противоречащая опытным данным.

## 1.3. Вывод

Построил эмпирическую функцию распределения на основе отсортированных данных, вычислил мат. ожидание, несмещенную оценку дисперсии и среднеквадратичного отклонения и т.д. Гипотеза о том, что данное распределение было нормальным - принята.

## 1.4. Листинг

### Листинг 1.1: lab1.py

```

1 # ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1
2 # Предмет: Теория вероятностей и математическая статистика
3 # Тема: Статистическая обработка малой выборки
4 # Задания:
5 # 1. Построить эмпирическую функцию распределения  $F^*(x)$ .
6 # 2. Найти оценку математического ожидания.
7 # 3. Найти несмещенную оценку дисперсии и среднеквадратичного отклонения.
8 # 4. Найти доверительный интервал для математического ожидания и дисперсии при
9   значениях доверительной вероятности
10 #  $\alpha = 0,01$  и  $\alpha = 0,05$ .
11 # 5. Выдвинуть гипотезу и закон распределения генеральной совокупности. В
12   качестве гипотетического закона принять
13 # нормальный закон распределения.
14 # 6. На чертеже с графиком эмпирической функции  $F^*(x)$  построить график
15   теоретической функции  $F(x)$ .
16 # 7. Оценить меру расхождения между теоретическим и статистическим
17   распределениями по критерию Колмогорова.
18
19 # Импортируем модули

```



```

17
18 import pandas as pd
19 import numpy as np
20 import scipy.stats
21 from matplotlib import pyplot as plt
22
23 # Загрузим данные из .xlsx файла
24 df = pd.read_excel("data.xlsx")
25 # x = [4.71, 5.73, 6.42, 6.83, 6.83, 6.89, 7.03, 7.06, 7.57, 7.72,
26       7.72, 7.95, 8.03, 8.21, 8.28, 8.61, 9.12, 9.44,
27       # 10.27, 10.71]
28
29 x = df['Отсортированные данные'].tolist()
30 y = df['Накопленная частота'].tolist()
31 n = len(x) # объем выборки
32
33 # Построение эмпирической функции распределения на основе отсортированных
34   данных.
35 def histogram():
36     print("1. Построить эмпирическую функцию распределения  $F(x)$ .")
37     fig, ax = plt.subplots()
38     ax.bar(x, y, width=1.02)
39
40     ax.set_title("Построение эмпирической функции распределения на основе отсортированных данных")
41     ax.set_xlabel("Экспериментальные данные")
42     ax.set_ylabel("Накопленная частота")
43
44     ax.set_facecolor('white')
45     fig.set_facecolor('white')
46     fig.set_figwidth(10) # ширина Figure
47     fig.set_figheight(6) # высота Figure
48
49     plt.show()
50     # print(df.head(20))
51
52 # Оценка математического ожидания
53 def mathematical_expectation():
54     print("\n2. Оценка математического ожидания")
55     print("Объем выборки: " + str(len(x)) +
56           "\Максимум: " + str("%.3f" % max(x)) +
57           "\Минимум: " + str("%.3f" % min(x)) +
58           "\Размах выборки: " + str("%.1f" % ((max(x)) - min(x))))
59
60 # Математическое ожидание — среднее значение случайной величины
61 global mean
62 mean = sum(x) / len(x)
63 print("Математическое ожидание: " + str("%.3f" % mean))

```

```

64 # Несмещенная оценка дисперсии и среднеквадратичное отклонение
65 def standard_deviation():
66     print("\n3. Найти несмещенную оценку дисперсии и среднеквадратичного
67         отклонения.")
68     # Несмещенная оценка дисперсии
69     s2 = 1 / (len(x) - 1) * sum((i - mean) ** 2 for i in x)
70
71     # Среднеквадратическое отклонение
72     s2n = s2 ** (1 / 2)
73     printНесмещенная(" оценка дисперсии: " + str("%.3f" % s2) +
74         "\Среднеквадратического отклонение: " + str("%.3f" % s2n))
75
76
77
78 # Доверительный интервал для математического ожидания и дисперсии при значениях
    доверительной вероятности
79 # = 0. 9 и = 0. 95.
80 def confidence_interval():
81     print(
82         "\n4. Найти доверительный интервал для математического ожидания и
            дисперсии при значениях доверительной"
83             вероятности" = 0. 9 и = 0. 95.")
84     confidence1 = 0.9
85     confidence2 = 0.95
86
87     # Доверительный интервал для математического ожидания
88     a = 1.0 * np.array(x)
89     n = len(a)
90     m, se = np.mean(a), scipy.stats.sem(x)
91     h1 = se * scipy.stats.t.ppf((1 + confidence1) / 2., n - 1)
92     h2 = se * scipy.stats.t.ppf((1 + confidence2) / 2., n - 1)
93
94     print("\Прит = 0. 9, получаем: \t\t\t\t\Прит = 0. 95, получаем:"
95         "\n\t\tраспределение—: ", "%.3f" % scipy.stats.t.ppf((1 +
96             confidence1) / 2., n - 1),
97         "\t\t\t\t\t\t\tраспределение—: ", "%.3f" % scipy.stats.t.ppf((1 +
98             confidence2) / 2., n - 1),
99         "\n\Леваят граница: ", str("%.3f" % (m - h1)), "\t\t\t\t\t\t\t\
100 Леваят граница: ", str("%.3f" % (m - h2)),
101         "\n\Праваят граница: ", str("%.3f" % (m + h1)), "\t\t\t\t\t\t\t\
102 Праваят граница: ", str("%.3f" % (m + h2)))
103
104     # Выдвинуть гипотезу о законе распределения генеральной совокупности. В
        качестве гипотического закона принять
105     # нормальный закон распределения.
106
107 def hypothesis():
108     print(

```

```

106         "\n5. Выдвинуть гипотезу и законе распределения генеральной совокупности.
В качестве гипотического закона"
107         принять" нормальный закон распределения.")
108
109     printПредполагаемый(" закон распределения — нормальный. Выдвигаем
гипотезу H0 о подчинении "
110         случайной" величины X нормальному закону распределения")
111
112
113 # На чертеже с графиком эмпирической функции  $F^*(x)$  построить график
теоретической функции  $F(x)$ .
114 def theoretical_function():
115     print(
116         "\n6. На чертеже с графиком эмпирической функции  $F^*(x)$  построить
график теоретической функции  $F(x)$ ."
117
118     # loc — среднее значение случайно величины
119     # scale — среднее отклонение случайно величины
120     cdf = scipy.stats.norm.cdf(x, loc=7.757, scale=1.446)
121
122     fig = plt.figure(figsize=(10, 5))
123     ax = fig.add_subplot()
124
125     # ax.set_titleГрафик(" теоретический функции")
126     # ax.set_xlabelЭкспериментальные(" данные")
127     # ax.set_ylabelНакопленная(" частота")
128
129     ax.step(x, y, label="F(x)")
130     ax.plot(x, cdf, color='red', labelЧастота="")
131     ax.grid()
132     ax.legend()
133
134     plt.show()
135     # print(cdf)
136
137
138 # Оценить меру расхождения между теоретическим и статистическим распределениями
по критерию Колмогорова.
139 def kolmogorov_criterion():
140     print(
141         "\n7. Оценить меру расхождения между теоретическим и статистическим
распределениями по критерию Колмогорова.")
142     cdf = scipy.stats.norm.cdf(x, loc=7.757, scale=1.446)
143
144     # Вычислим максимальное значение модуля разности между значениями
эмпирической и теоретической функциями:
145     u = max(y - cdf)
146     printМаксимальное(" значение модуля разности между значениями эмпирической
и теоретической функциями: U =",
147         "%.2f" % u)

```

```
148
149 # Вычисляю лямбда0:
150 lambda0 = u * np.sqrt(n)
151 print("lambda0 =", "%.2f" % lambda0)
152
153 # Проверим выполнение условий для критерия Колмогорова
154 # alpha = 0.01
155 lambda_kr1 = 1.63
156 # alpha = 0.05
157 lambda_kr2 = 1.36
158
159 if lambda_kr1 > lambda0 and lambda_kr2 > lambda0:
160     print(
161         "\Гипотеза о нормальном распределении по критерию Колмогорова
принимается как не противоречащая опытном "
162         данным ".")
163 else:
164     print(
165         "\Гипотеза о нормальном распределении по критерию Колмогорова не
166         принимается как не противоречащая опытном "
167         данным ".")
168
169 def main():
170     histogram()
171     mathematical_expectation()
172     standard_deviation()
173     confidence_interval()
174     hypothesis()
175     theoretical_function()
176     kolmogorov_criterion()
177
178
179 if __name__ == '__main__':
180     main()
```