Теория графов. Теорема Холла

Д. В. Карпов

Extended edition

2023

Теорема (P.Hall, 1935)

В двудольном графе $G = (L, R, E)$ есть паросочетание, покрывающее долю L, если и только если:

$$\forall A \subset L : |A| \leqslant |N_G(A)|$$

Доказательство методом чередующихся путей.

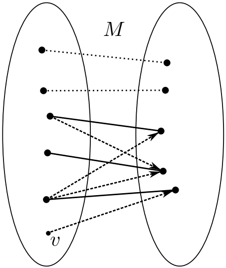
$\boxed{\Rightarrow}$ Очевидно.

$\boxed{\Leftarrow}$ Обсудим идею доказательства. Будем добавлять рёбра в паросочетание M алгоритмом. Зная, что $\forall A \subset L : |A| \leqslant |N_G(A)|$, на шаге $k \leqslant n$ (пусть $|L| = n$) будем доказывать, что можно добавить ещё одно ребро в наше паросочетание. В итоге получим паросочетание, покрывающее L. Докажем это индукцией по шагам алгоритма. $\square$

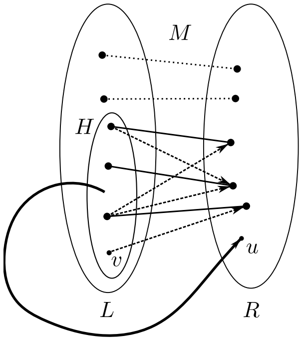
База: $k = 1$. Тогда выберем произвольную вершину и применим к ней условие Холла: $|N_G(A)| \geqslant 1$. Значит, её можно соединить с какой-то вершиной из R.

Переход. Выберем ещё не насыщенную паросочетанием M вершину v, и рассмотрим все вершины, достижимые из неё (граф G'), при условиях:

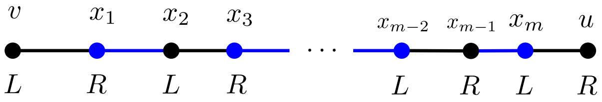
- Из L в R можно ходить по любым рёбрам.
- Из R в L можно ходить *только по рёбрам построенного ранее паросочетания*.



- Очевидно, что G' – подграф графа G.
- Применим к нему условие Холла. Тогда вершин в $R(G')$ не менее, чем в $L(G')$, откуда найдётся ещё хотя бы 1 вершина, с которой H связен. Обозначим её u.



- Если $v \rightsquigarrow u$, то соединяем их и получаем требуемое. Иначе рассмотрим vu путь, предварительно покрасив рёбра паросочетания синим.



- Остаётся заметить, что vu-путь удлиняющий, а значит, если мы заменим паросочетание на паросочетание из чёрных вершин, то, во-первых, оно останется паросочетанием, а во-вторых, мы насытим вершину v и оставим насыщенными уже существовавшие вершины.
- Таким, образом, мы по индукции доказали, что на каждом шаге алгоритма при условии Холла можно добавить $|L|$ рёбер в паросочетание $\Rightarrow$ M покрыло L.