# Теория графов. Теорема Татта

Д. В. Карпов

Extended edition

2023

# Содержание теоремы

- Паросочетание в графе $G$ называется совершенным, если оно покрывает все вершины графа $G$.
- Обозначим за $odd(G)$ (или $o(G)$) количество компонент связности графа, содержащих нечётное количество вершин.
- Мы готовы сформулировать теорему.

**Теорема (W. T. Tutte, 1947)**

*В графе $G$ существует совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда для любого $S \subset V(G)$ выполняется условие $odd(G - S) \leqslant |S|$.*

# Доказательство теоремы

## Туда

$\boxed{\Rightarrow}$ Пусть $M$ – совершенное паросочетание, $S \subset V(G)$. Тогда граф $G - S$ разобьётся на чётные и нечётные компоненты. Тогда для каждой нечётной компоненты $C$ существует вершина, которая не покрыта рёбрами из $M \cap C$, но она была покрыта. Значит, одна вершина из нечётной компоненты связности смежна ребром из паросочетания $M$ с вершиной из множества $S$ (потому что только его мы и удаляли). Все вершины, с которыми соединены вершины из нечётных компонент, разные, потому что из вершины паросочетания выходит ровно 1 ребро. Отсюда следует, что в $S$ вершин не меньше, чем $odd(G - S)$

# Доказательство теоремы

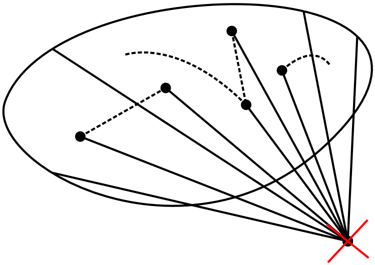
## Обратно



$\boxed{\Leftarrow}$

- Предположим, что граф удовлетворяет условию, но не имеет совершенного паросочетания. Тогда, в частности (подставим $S = \varnothing$), $odd(G) \leqslant |\varnothing| = 0$, то есть, $v(G)$ чётно (потому что в $G$ нет нечётных компонент).
- Пусть $G^*$ – максимальный надграф G на том же множестве вершин, не имеющий совершенного паросочетания (то есть, добавив любое ребро, совершенное паросочетание уже будет). Мы построим совершенное паросочетание в $G^*$ и придем к противоречию (фактически главная идея доказательства).

- Пусть $U = \{u \in V(G) : d_{G^*}(u) = v(G) - 1\}$ (множество вершин, соединённых со всеми остальными). $G^*$ – не полный граф, а значит, $U \neq V(G)$. Удалим эти вершины из $G^*$.

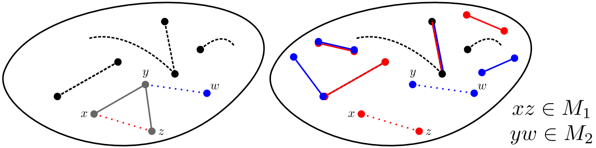


- (Лемма) Утверждается, что получившийся граф $G^* - U$ – это объединение нескольких несвязанных полных графов. Доказывать будем от противного.

# Доказательство леммы

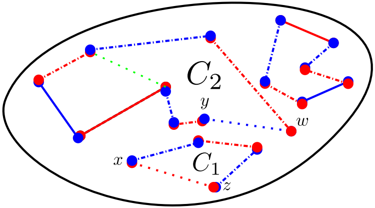
## Доказательство.

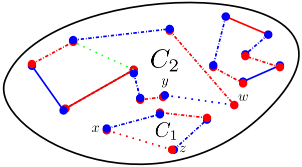
- Предположим, что это не так. Тогда существуют такие вершины $x, y, z \in V(G) \setminus U$, что $xy, yz \in E(G^*)$, но $xz \notin E(G^*)$.
- Так как $y \notin U$, существует такая вершина $w \notin U$, что $yw \notin E(G^*)$.
- Ввиду максимальности графа $G^*$ существует совершенное паросочетание $M_1$ в графе $G^* + xz$ и совершенное паросочетание $M_2$ в графе $G^* + yw$. Так как в графе $G^*$ нет совершенного паросочетания, $xz \in M_1$ и $yw \in M_2$.



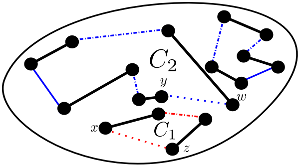
- Пусть $H = (V(G), M_1 \triangle M_2)$. Граф $H$ – несвязное объединение циклов чётной длины, потому что из каждой вершины графа $H$ выходит или 0, или 2 ребра (можно вспомнить критерий двудольности графа и применить его для каждой из компонент). Очевидно, в каждом из циклов чередуются рёбра паросочетаний $M_1$ и $M_2$. Из-за чередования рёбер диагоналей в циклах быть не может. 2 случая:

**Случай 1.** $xz$ и $yw$ в разных компонентах $C_1$ и $C_2$ графа $H$



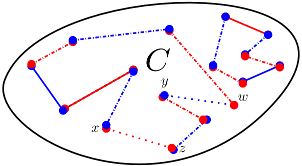


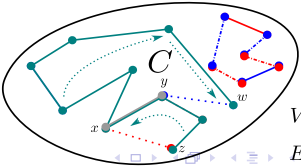

- Тогда на вершинах $C_1$ мы выберем рёбра паросочетания $M_2$, на вершинах $C_2$ мы выберем рёбра паросочетания $M_1$ , а в остальных компонентах графа $H$ – любое из этих паросочетаний (на рисунке $M_1$).
- В итоге получится совершенное паросочетание графа $G^*$ , противоречие.



**Случай 2.** Рёбра $xz$ и $yw$ лежат в одной компоненте $C$ графа $H$.

- В силу симметричности $x$ и $z$ можно считать, что вершины расположены в чётном цикле $C$ в порядке $ywxz$.
- Рассмотрим простой путь $P = zCyxCw$, который состоит из двух дуг цикла $C$ и ребра $xy$ (оно не в графе $H$, но точно у нас было в $G^*$!). Тогда $V(P) = V(C)$ и $E(P) \subset E(G^*)$. Количество рёбер между точками $z, y$ и $x, w$ чётно (иначе рёбра не чередуются). Итак, мы получили путь, убрав ребра $xz, yw$ из чётного цикла и добавив ребро $xy \Rightarrow$ осталось нечётное количество рёбер. Очевидно, в простом пути нечётной длины существует совершенное паросочетание. $\square$




$V(P) = V(C)$

$E(P) \subset E(G^*)$

# Доказательство теоремы

- По лемме $G^* - U$ – объединение несвязных полных графов. В силу условия, среди них не более чем $|U|$ имеет нечётное число вершин ($odd(G^* - U) \leqslant |U|$).
- В каждой чётной компоненте графа $G^* - U$ существует совершенное паросочетание, в каждой нечётной – паросочетание, покрывающее все вершины, кроме одной. Соединим её с вершиной из $U$ (используем различные, и их точно хватит, т. к. $odd(G^* - U) \leqslant |U|$).
- Разбиваем оставшиеся вершины в $U$: они разобьются на пары: это возможно всегда, потому что в изначальном графе (а значит и в $G^*$, потому что $V(G^*) = V(G)$ по построению) количество вершин чётно, а вершины из $U$ – это *те вершины, которые соединены с остальными по построению.* $\square$

# Рисунок к последним пунктам

## Мы молодцы