

Теория Графов. Теорема Кёнига

Д. В. Карпов

Extended edition

2023

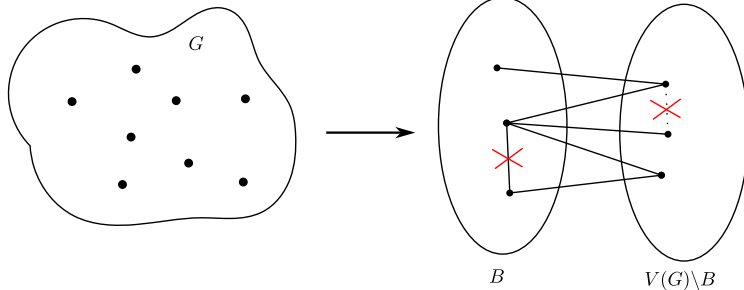
Теорема (D.König, 1931)

В двудольном графе $G = (L, R, E) : \alpha'(G) = \beta(G)$.

Доказательство.

Будем доказывать теорему при помощи теоремы Холла.

- ▶ Рассмотрим наименьшее вершинное покрытие (обозначим $B, \beta(G) = |B|$). Перестроим двудольный граф следующим образом: $G' = (B, V(G) \setminus B, E')$ (в левую долу поместим выбранные в B вершины, остальные поместим в правую).
- ▶ В правой доле рёбер нет: иначе B не является вершинным покрытием. Удалим все рёбра между вершинами левой доли – правомерность будет объяснена позже.

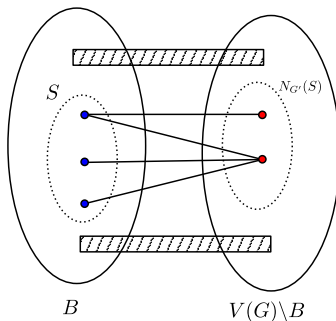


Преобразование графа

- Для того, чтобы доказать, что $\alpha'(G) = \beta(G)$, достаточно доказать, что $\alpha'(G) \geq \beta(G)$ и $\alpha'(G) \leq \beta(G)$.

$$\alpha'(G) \geq \beta(G)$$

- ▶ Проверим наличие паросочетания размера $|B| = \beta(G)$. Достаточно проверить условие Холла для B .
- ▶ Если это не так, то $\exists S \subset B : |N_{G'}(S)| < |S|$ и, заменив S на $N_G(S)$, мы получим, что множество рёбер, которое покрывается, остаётся прежним (\Rightarrow условие для покрытия сохраняется), а размер покрытия станет меньше, противоречие с минимальностью B .



$$\alpha'(G) \leq \beta(G)$$

- ▶ Единственный вариант улучшить паросочетание – каким-то образом добавить удалённые ранее рёбра.
- ▶ Выделим покрывающее B паросочетание M . Будем преобразовывать его в M' .
- ▶ Выбрав одно удалённое ребро для M' , нам придётся убирать рёбра паросочетания для двух инцидентных ребру вершин u, v , а значит, удалять по крайней мере 2 их ребра.
- ▶ $N_{G'}(u) \cup N_{G'}(v) \not\subseteq M'$, потому что в правой доле нет рёбер, а остальные вершины уже соединены рёбрами паросочетания M .
- ▶ Значит, паросочетание лишь уменьшится. □

Рисунок к последним пунктам

