

Суммация

Университет ИТМО

2024

Преимущества

- ▶ Более краткий вид записи
- ▶ Более простая работа с выражением
- ▶ Все правила работают также и с мультипликацией \prod

Как мы убедимся, суммирование и произведение позволят записать даже те выражения, которые нельзя записать через троеточия в понятном виде, и более того, преобразовывать их.

Примеры

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{i=1}^n i$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$$

Смещение индекса заменой

Проблема. На самом деле, суммы $\sum_{i=5}^{n-3} i$ и $\sum_{i=2}^{n-6} (i+3)$ равны.

- ▶ Стоит придерживаться правила, что все индексы начинаются с одного и того же числа (например, с 0 или 1), чтобы не пропустить равенство в преобразовании.
- ▶ Для того, чтобы сдвинуть индекс во второй сумме, введём замену $j = i + 3$ (чтобы начало шло с 5, как в первой сумме)
- ▶ Тогда $i = j - 3$
- ▶ Подставим $j - 3$ вместо i во вторую сумму и получим требуемое:

$$\sum_{i=2}^{n-6} (i+3) = \sum_{j=5}^{n-3} (j-3+3) = \sum_{j=5}^{n-3} j$$

Бином Ньютона

Доказательство.

Докажем известное тождество $(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$ индукцией по n .

База. При $n = 1$, очевидно, равенство верно.

Переход.

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b)^n \cdot (a + b) = (a + b) \cdot \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i} = \\ &= b^{n+1} + \sum_{i=0}^n \left(\binom{n}{i} a^i b^{n-i} + \binom{n}{i-1} a^i b^{n-i} \right) + a^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^i b^{n-i} \end{aligned}$$



Вложенные, условные суммы

- ▶ Предположим ситуацию: необходимо записать сумму от 1 до $i = 1..n$, каждое слагаемое которой является *суммой от 1 до i*
- ▶ Конечно, это можно записать как $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i j$.
- ▶ Читать такие выражения становится *гораздо* труднее.
- ▶ Поэтому полезно понимать, что все вложенные суммы можно сократить до набора равенств в *одной* суммации:

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq i}} j$$

$$(a + b)^n = \sum_{i+j=n} \binom{i}{n} a^i b^j$$

Обратите внимание, что переменные i, j можно также выражать друг через друга.

Производная многочленов

- ▶ Докажем, что $(fg)' = f'g + fg'$
- ▶ Пусть $f = a_n x^n + \dots + a_0$, $g = b_n x^n + \dots + b_0$ (можно считать, что многочлены одной степени, иначе дополним коэффициенты нулями)

$$(fg)' = \sum_{\substack{0 \leq i \leq 2n \\ j+k=i}} (a_j b_k x^i)' = \sum_{\substack{0 \leq i < 2n \\ j+k=i}} (a_j b_k i x^{i-1})$$

$$f'g + fg' = \sum_{\substack{0 \leq i \leq 2n \\ j+k=i}} a_j b_k j x^{i-1} + \sum_{\substack{0 \leq i \leq 2n \\ j+k=i}} a_j b_k k x^{i-1} = \sum_{\substack{0 \leq i \leq 2n \\ j+k=i}} a_j b_k (j+k) x^{i-1} = (fg)'$$



Перегруппировка сумм по делителям

Лемма

Пусть f, g – произвольные функции. Тогда

$$\sum_{d|n} \left(f(d) \sum_{d'|d} g(d') \right) = \sum_{d'|n} \left(g(d') \sum_{d'|d|n} f(d) \right)$$

Доказательство.

- ▶ Перегруппируем слагаемые: будем сначала суммировать по $d' | n$ ($d' | d | n \Rightarrow d' | n$).
- ▶ Далее суммируем по $d | n$, но, если $d \not\equiv d'$, то слагаемого с таким d не было в изначальной сумме.
- ▶ Записав это рассуждение, получим в точности утверждение леммы.



Формула обращения Мёбиуса

Теорема 1

Пусть $f : \mathbb{N} \mapsto \cdot$. Тогда $f(n) = \sum_{d|n} \left(\mu \left(\frac{n}{d} \right) \sum_{d'|d} f(d') \right)$.

Доказательство.

Применим доказанную выше лемму:

$$\sum_{d|n} \left(\mu \left(\frac{n}{d} \right) \sum_{d'|d} f(d') \right) = \sum_{d'|n} \left(f(d') \sum_{d|n} \mu \left(\frac{n}{d} \right) \right)$$

По одной из лемм в главе «целые числа», вложенная сумма обращается в 0 всегда, кроме случая $d' = n$. Стало быть,

$$\sum_{d'|n} \left(f(d') \sum_{d|n} \mu \left(\frac{n}{d} \right) \right) = f(n), \quad \square$$

Обобщённый бином Ньютона

Теорема 2

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n = \sum_{i_1 + i_2 + \dots + i_k = n} \binom{n}{i_1, i_2, \dots, i_k} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_k^{i_k}$$

Доказательство.

Индукция по n .

База. При $n = 1$, очевидно, равенство верно.

Переход.

$$\begin{aligned} (a_1 + \dots + a_k)^n &= (a_1 + (a_2 + \dots + a_k))^n = \sum_{i+j=n} \left(\binom{n}{i} a_1^i (a_2 + \dots + a_k)^j \right) = \\ &= \sum_{\substack{i+j=n \\ i_2+i_3+\dots+i_k=j}} \left(a_1^i a_2^{i_2} \dots a_k^{i_k} \cdot \binom{n}{i} \binom{j}{i_2, i_3, \dots, i_k} \right) \end{aligned}$$

Конец доказательства

- ▶ Остаётся заметить, что нам нужно лишь доказать, что

$$\binom{n}{i} \binom{j}{i_2, i_3, \dots, i_k} = \binom{n}{i, i_2, \dots, i_k}$$

.

- ▶ В то же время, $j = n - i$.
- ▶ Раскрыв число сочетаний и полиномиальный коэффициент, получим:

$$\frac{n!}{i! (n - i)!} \cdot \frac{(n - i)!}{i_2! i_3! \dots i_k!} = \frac{n!}{i! i_2! \dots i_k!} = \binom{n}{i, i_2, \dots, i_k}$$



Сумма первообразных корней из 1

Теорема 3

Сумма первообразных корней из 1 по модулю n равна $\mu(n)$

Доказательство.

Будем пробегать по всем $k = 1..n$ и, если $(k, n) \neq 1$, обращать слагаемые в 0 по свойству суммы Мёбиуса.

$$\begin{aligned}
 \sum_{(k,n)=1} e^{i \frac{2\pi k}{n}} &= \sum_{k=1}^n \left(e^{i \frac{2\pi k}{n}} \sum_{1|d|(k,n)} \mu(d) \right) = \sum_{(k,n)|n} \left(e^{i \frac{2\pi k}{n}} \sum_{1|d|(k,n)} \mu(d) \right) = \\
 &\stackrel{lem}{=} \sum_{d|n} \left(\mu(d) \sum_{d|(k,n)|n} e^{i \frac{2\pi k}{n}} \right) = \sum_{d|n} \left(\mu(d) \sum_{d|(k,n)} e^{i \frac{2\pi k}{n}} \right) \\
 &= \sum_{d|n} \left(\mu(d) \sum_{(k,n)=d, 2d, 3d, \dots, (n/d)d} e^{i \frac{2\pi k}{n}} \right) = \sum_{d|n} \left(\mu(d) \sum_{k=d, 2d, 3d, \dots, (n/d)d} e^{i \frac{2\pi k}{n}} \right)
 \end{aligned}$$

Конец доказательства

$$\begin{aligned}
& \sum_{d|n} \left(\mu(d) \sum_{(k,n)=d, 2d, 3d, \dots, (n/d)d} e^{i \frac{2\pi k}{n}} \right) = \sum_{d|n} \left(\mu(d) \sum_{k=d, 2d, 3d, \dots, (n/d)d} e^{i \frac{2\pi k}{n}} \right) = \\
& = \sum_{d|n} \left(\mu(d) \sum_{(k,n)=d, 2d, 3d, \dots, (n/d)d} e^{i \frac{2\pi k}{n}} \right) = \sum_{d|n} \left(\mu(d) \sum_{\ell=1}^{n/d} e^{i \frac{2\pi \ell d}{n}} \right) = \sum_{d|n} \left(\mu(d) \sum_{\ell=1}^{n/d} e^{i \frac{2\pi \ell}{n/d}} \right)
\end{aligned}$$

Заметим, что вложенная сумма обращается в 0 всегда, кроме случая $n = d$ (как сумма корней из 1). Значит,

$$\sum_{d|n} \left(\mu(d) \sum_{\ell=1}^{n/d} e^{i \frac{2\pi \ell}{n/d}} \right) \stackrel{n=d}{=} \mu(n) \cdot e^{i \cdot 2\pi} = \mu(n)$$

