Алгебра. Глава 2. Целые числа

Д. В. Карпов

Университет ИТМО

2023

Делимость

Определение

Пусть $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Тогда a *делится* на b (обозначение: $a \vdots b$) или, что то же самое, b *делит* a (обозначение: $b \mid a$), если $a = bc$, где $c \in \mathbb{Z}$.
Если $a \vdots b$, то b — *делитель* a.

Свойство 1

Если $a \vdots b$ и $b \vdots c$, то $a \vdots c$.

Доказательство. Тогда $a = kb$ и $b = nc$, где $k, n \in \mathbb{Z}$, откуда следует $a = knc$. □

Свойство 2

Пусть $a, b \vdots d$, а $x, y \in \mathbb{Z}$. Тогда $ax + by \vdots d$.

Доказательство. Тогда $a = kd$ и $b = nd$, где $k, n \in \mathbb{Z}$, откуда следует $ax + by = (kx + ny)d$. □

Свойство 3

Пусть $a, d \in \mathbb{N}$, $a \vdots d$. Тогда $a \geq d$.

Доказательство. Тогда $a = kd$, где $k \in \mathbb{N}$, откуда следует $a = kd \geq d$. □

Теорема о делении с остатком

Теорема 1

Пусть $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$. Тогда существуют единственные такие $q, r \in \mathbb{Z}$, что $0 \le r < b$ и $a = bq + r$.

• Число r называется *остатком* от деления a на b.

Доказательство. $\exists$. Пусть q — такое целое число, что $bq \le a < b(q+1)$, а $r = a - bq$. Тогда $0 \le r < b$ (вычтем из всех трех частей первого неравенства bq).

! • Пусть $a = bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2$, причем $0 \le r_1 < b$ и $0 \le r_2 < b$.

• НУО $r_1 > r_2$. Тогда $0 < r_1 - r_2 < b$.

• С другой стороны, $r_1 - r_2 = b(q_2 - q_1) \ge b$. Противоречие. $\square$

НОД

Определение

Пусть $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$. Обозначим через $\mathrm{OD}(a_1, \dots, a_n)$ множество всех общих делителей этих чисел, а через $(a_1, \dots, a_n)$ — их НОД (наибольший из общих делителей).

Свойство 1

Если $b \in \mathbb{N}$. $a \vdots b$, то $\mathrm{OD}(a, b)$ — это все делители b и $(a, b) = b$.

Доказательство. • Если d — общий делитель a и b, то d — делитель b.

• Если d — делитель b, то $a \vdots d$ по свойству 1 делимости. Значит, d — общий делитель a и b. □

Свойство 2

Пусть $a, b, c, k \in \mathbb{Z}$, $c = a + kb$. Тогда $\mathrm{OD}(a, b) = \mathrm{OD}(c, b)$, а следовательно, и $(a, b) = (c, b)$.

Доказательство. • Пусть $d \in \mathrm{OD}(a, b)$. Тогда $c \vdots d$, а значит, $d \in \mathrm{OD}(c, b)$.

• Наоборот, если $d \in \mathrm{OD}(c, b)$, то $a = c - kb \vdots d$, а значит, $d \in \mathrm{OD}(a, b)$. □

Алгоритм Евклида

• Пусть $a, b \in \mathbb{N}$, $a > b$. Каждая строка алгоритма — деление с остатком.

1) $a = bq_1 + r_1, \quad 0 \le r_1 < b;$

2) $b = r_1 q_2 + r_2, \quad 0 \le r_2 < r_1;$

3) $r_1 = r_2 q_3 + r_3, \quad 0 \le r_3 < r_2;$

...

n) $r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n, \quad 0 \le r_n < r_{n-1};$

$n+1$) $r_{n-1} = r_n q_{n+1}$.

• Так как $b > r_1 > r_2 > \dots$ и все эти числа неотрицательны, алгоритм обязательно закончит работу.

Теорема 2

$(a, b) = r_n$, а $\mathrm{OD}(a, b)$ — это все делители (a, b).

Доказательство. • По свойству 2 НОД $\mathrm{OD}(a, b) = \mathrm{OD}(b, r_1) = \mathrm{OD}(r_1, r_2) = \dots = \mathrm{OD}(r_{n-1}, r_n)$, а это по свойству 1 НОДа — все делители r_n.

• Тогда (a, b) — наибольший из делителей r_n, а это r_n. $\square$

Теорема 3

Пусть $a, b, m, d \in \mathbb{N}$. *Тогда:*

1) $(am, bm) = m(a, b)$.

2) *Если* $d \in \mathrm{OD}(a, b)$, *то* $(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = \frac{(a,b)}{d}$.

Доказательство. • НУО $a > b$.

1) • Рассмотрим первую строку алгоритма Евклида для am и bm: $am = bm \cdot q_1 + r_1 m, \quad 0 \le r_1 m < bm$.

• Неполное частное не меняется, а остаток умножается на m.

• Так будет и со следующими строчками, в результате получится столько же строк, сколько в алгоритме Евклида для a и b, а НОД — последний ненулевой остаток — умножится на m.

2) • Рассмотрим первую строку алгоритма Евклида для $\frac{a}{d}$ и $\frac{b}{d}$: $\frac{a}{d} = \frac{b}{d} \cdot q_1 + \frac{r_1}{d}, \quad 0 \le \frac{r_1}{d} < \frac{b}{d}$.

• Неполное частное не меняется, а остаток мы делим на d (в результате он остается целым).

• Так будет и со следующими строчками, в результате получится столько же строк, сколько в алгоритме Евклида для a и b, а НОД — последний ненулевой остаток — разделится на d.

Линейное представление НОД

Теорема 4

Пусть $a, b \in \mathbb{Z}$. Тогда существуют такие $x, y \in \mathbb{Z}$, что $(a, b) = ax + by$.

• Это называется *линейным представлением* НОДа.

Доказательство. • Так как делители у чисел a и $-a$ одни и те же, $(a, b) = (a, -b)$. Поэтому, можно считать, что $a, b \in \mathbb{N}$.

• НУО $a \geq b$. Воспользуемся алгоритмом Евклида и соответствующими обозначениями, дополним их: пусть $r_0 = b$ и $r_{-1} = a$.

• Докажем, что существует представление $(a, b) = x_k r_k + y_k r_{k-1}$ для всех $k = \{n, \dots, 0\}$ (где $(a, b) = r_n$) индукцией с обратным ходом. При $k = 0$ получим утверждение теоремы.

• База $k = n$ очевидна: $(a, b) = 1 \cdot r_n + 0 \cdot r_{n-1}$.

• Переход $k \to k - 1$. Из алгоритма Евклида мы знаем, что $r_k = r_{k-2} - r_{k-1} q_k$. Подставим:

$$(a, b) = x_k r_k + y_k r_{k-1} = x_k(r_{k-2} - r_{k-1} q_k) + y_k r_{k-1} = (-x_k q_k + y_k) r_{k-1} + x_k r_{k-2}. \qquad \square$$

НОД нескольких чисел

Теорема 5

Пусть $n \geq 2$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$. *Положим* $m_2 = (a_1, a_2)$, $m_3 = (m_2, a_3)$, $\dots$, $m_n = (m_{n-1}, a_n)$. *Тогда* $m_n = (a_1, \dots, a_n)$, *а* $\mathrm{OD}(a_1, \dots, a_n)$ *— это все делители* m_n.

Доказательство. • Индукцией по k докажем, что $\mathrm{OD}(a_1, \dots, a_k)$ — все делители m_k.

• База $k = 2$ доказана в Теореме 2.

• Переход $k \to k + 1$. $\mathrm{OD}(a_1, \dots, a_k, a_{k+1})$ — это все числа из $\mathrm{OD}(a_1, \dots, a_k)$, являющиеся делителями a_{k+1}.

• Так как $\mathrm{OD}(a_1, \dots, a_k)$ — это все делители m_k, получаем, что $\mathrm{OD}(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}) = \mathrm{OD}(m_k, a_{k+1})$, а это все делители $m_{k+1} = (m_k, a_{k+1})$ по Теореме 2.

• Итак, утверждение доказано и $\mathrm{OD}(a_1, \dots, a_n)$ — это все делители m_n. Теперь понятно, что $m_n = (a_1, \dots, a_n)$. $\square$

Следствие 1

Для $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ *существует линейное представление НОД, то есть, такие* $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$*, что* $(a_1, \dots, a_n) = x_1 a_1 + \dots x_n a_n$.

Доказательство. • Докажем индукцией по k, что существует линейное представление $m_k = (a_1, \dots, a_k)$.
База $k = 2$ доказана в Теореме 4.

• Переход $k \to k+1$. По Теореме 5 и индукционному предположению,

$$m_{k+1} = (a_1, \dots, a_k, a_{k+1}) = (m_k, a_{k+1}) = ym_k + x_{k+1}a_{k+1} =$$
$$y(x'_1 a_1 + \dots + x'_k a_k) + x_{k+1}a_{k+1} =$$
$$(yx'_1)a_1 + \dots (yx'_k)a_k + x_{k+1}a_{k+1}.$$

Все коэффициенты yx'_1, ..., yx'_k, очевидно, целые. □

Взаимно простые числа

Определение

• Числа $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ называются **взаимно простыми**, если $(a_1, \dots, a_n) = 1$.

• Если любые два из $a_1, \dots, a_n$ взаимно просты, эти числа называются **попарно взаимно простыми**.

Свойство 1

Если $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ попарно взаимно просты, то они взаимно просты.

Доказательство. Если $(a_1, \dots, a_n) = d > 1$, то $(a_1, a_2) \,\vdots\, d$, а значит, $(a_1, a_2) > 1$. $\square$

Свойство 2

Если $a, b, c \in \mathbb{Z}$ *и* $(a, b) = 1$, *то* $(ac, b) = (c, b)$.

Доказательство. • Пусть $d = (c, b)$ и $f = (ac, b)$.

• Из $c \vdots d$ следует, что $ac \vdots d$. Значит, $d \in \mathrm{OD}(ac, b)$ и по Теореме 2 $f \vdots d$.

• Из $b \vdots f$ следует, что $bc \vdots f$. Значит, $f \in \mathrm{OD}(ac, bc)$.

• По Теоремам 3 и 2, $c = c(a, b) = (ac, bc) \vdots f$.

• Следовательно, $f \in \mathrm{OD}(c, b)$ и по Теореме 2 $d \vdots f$.

• Из $d, f \in \mathbb{N}$, $d \vdots f$ и $f \vdots d$ следует, что $d = f$. $\square$

Свойство 3

Если $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $(a, b) = 1$ *и* $ac \vdots b$, *то* $c \vdots b$.

Доказательство. По Свойству 2 $(c, b) = (ac, b) = b$ (последнее верно так как $ac \vdots b$). Следовательно, $c \vdots b$. $\square$

Свойство 4

Пусть $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{Z}$, *причем* $(a_i, b_j) = 1$ *для всех* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *и* $j \in \{1, \ldots, m\}$. *Тогда* $(a_1 \ldots a_n,\ b_1 \ldots b_m) = 1$.

Доказательство. • Докажем, что $(a_1 \ldots a_k, b_j) = 1$ для всех $j \in \{1, \ldots, m\}$ и $k \in \{1, \ldots, n\}$ индукцией по k.

База $k = 1$: дано в условии.

Переход $k \to k + 1$: $(a_1 \ldots a_k a_{k+1}, b_j) = (a_1 \ldots a_k, b_j) = 1$ по свойству 2 (так как $(a_{k+1}, b_j) = 1$).

• Пусть $A = a_1 \ldots a_n$. Докажем, что $(A, b_1 \ldots b_k) = 1$ для всех $k \in \{1, \ldots, m\}$ индукцией по k.

База $k = 1$: доказано выше.

Переход $k \to k + 1$: $(A, b_1 \ldots b_k b_{k+1}) = (A, b_1 \ldots b_k) = 1$ по свойству 2 (так как $(A, b_{k+1}) = 1$). $\square$

Простые числа

Определение

• Натуральное число, имеющее ровно два натуральных делителя, называется простым.

• Натуральное число, имеющее более двух натуральных делителей, называется составным.

• Множество всех простых чисел обозначается $\mathbb{P}$.

• Если $p \in \mathbb{P}$, то натуральные делители числа p — это 1 и p.

• $1 \notin \mathbb{P}$. Любое натуральное число, большее 1 — простое или составное.

Определение

Пусть $a \in \mathbb{N}$. *Собственный делитель* числа a — это любой его делитель, отличный от 1.

Свойство 1

Если $a \in \mathbb{N}$ — составное, то существует разложение $a = bc$, где $b, c \in \mathbb{N}$, $a > b, c > 1$.

Доказательство. • Составное число a имеет собственный делитель $b < a$. Тогда $a = bc$, где $c \in \mathbb{N}$. Очевидно, $1 < c < a$. $\square$

Свойство 2

Пусть $a \in \mathbb{N}$, $a \neq 1$, а d — минимальный собственный делитель a. Тогда $d \in \mathbb{P}$.

Доказательство. • По определению, $d > 1$.

• Предположим, что d — составное. По свойству 1 тогда $d = bc$, где $d > b > 1$.

• Из $a \vdots d$ и $d \vdots b$ следует, что $a \vdots b$. Значит, $b < d$ — собственный делитель a, противоречие с выбором d. □

Теорема 6

Простых чисел бесконечно много.

Доказательство. • Предположим противное, пусть $\mathbb{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$.

• Пусть $m = p_1 \dots p_n + 1$, а q — наименьший собственный делитель m.

• По свойству 2 тогда $q \in \mathbb{P}$. Значит, $q = p_i$ для некоторого $i \in \{1, \dots, n\}$

• Так как $m - 1 \vdots p_i$, $(m, p_i) = (1, p_i) = 1$ (по свойству 2 НОДа). Значит, $m \not\vdots\, p_i$, противоречие. □

Свойство 3

Пусть $a \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{P}$. Тогда либо $a \,\vdots\, p$, либо $(a, p) = 1$.

Доказательство. • Так как $d = (a, p) \in \mathbb{N}$ и $p \,\vdots\, d$, то $d = 1$ или $d = p$.

• Во втором случае $(a, p) = p$, следовательно, $a \,\vdots\, p$. □

Свойство 4

Пусть $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ и $p \in \mathbb{P}$ таковы, что $a_1 \dots a_n \,\vdots\, p$. Тогда существует такое $i \in \{1, \dots, n\}$, что $a_i \,\vdots\, p$.

Доказательство. • Предположим противное, пусть $a_i \not\vdots\, p$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$. По Свойству 3 тогда $(a_i, p) = 1$.

• По Свойству 4 взаимно простых чисел, тогда и $(a_1 \dots a_n, \ p) = 1$. Значит, $a_1 \dots a_n \not\vdots\, p$. Противоречие. □

Основная теорема арифметики

Теорема 7

Любое натуральное число $a > 1$ раскладывается в произведение простых чисел. Такое разложение единственно с точностью до порядка сомножителей.

Доказательство. $\exists$. Индукция. База $n \in \mathbb{P}$ очевидна: подходит разложение $a = a$.

Переход. • Пусть a — составное, а для всех меньших чисел теорема доказана.

• Тогда $a = bc$, где $1 < b, c < a$. Следовательно, $b = p_1 \dots p_n$ и $c = q_1 \dots q_m$.

• Тогда $a = p_1 \dots p_n q_1 \dots q_m$ — искомое разложение.

! Предположим противное, пусть $a = p_1 \dots p_n = q_1 \dots q_m$ — два разложения a в произведение простых, причем a — наименьшее натуральное число, для которого разложение в произведение простых неединственно.

• Из $a = p_1 \dots p_n \,\vdots\, q_1$ следует, что $p_i \,\vdots\, q_1$ для некоторого $i \in \{1, \dots, n\}$. НУО $i = 1$.

• Из $p_1, q_1 \in \mathbb{P}$ и $p_1 \,\vdots\, q_1$ следует, что $p_1 = q_1$ (единственным делителем простого p_1, большим 1, является само p_1).

• Тогда $a' = \frac{a}{p_1} = p_2 \dots p_n = q_2 \dots q_m$. Но разложение a' в произведение простых единственно с точностью до порядка сомножителей, откуда следует, что разложение a — тоже единственно с точностью до порядка сомножителей. $\square$

Каноническое разложение

Определение

Каноническое разложение — это преставление натурального числа в виде $n = p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s}$, где $p_1, \dots, p_s \in \mathbb{P}$ различны.

Определение

Для $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $d(n)$ количество натуральных делителей n.

Теорема 8

Пусть $n = p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s}$ — каноническое разложение. Тогда выполнены следующие утверждения.

1) $n \,\vdots\, d$, *если и только если* $d = p_1^{\ell_1} \dots p_s^{\ell_s}$, *где* $0 \le \ell_i \le k_i$ *для всех* $i \in \{1, \dots, s\}$.

2) $d(n) = (k_1 + 1) \dots (k_s + 1)$.

Доказательство. 1) $\Leftarrow$. Очевидно.

$\Rightarrow$. • Если $n \,\vdots\, d$, то d не может иметь простых делителей, кроме p_1, ..., p_s. Следовательно, $d = p_1^{\ell_1} \dots p_s^{\ell_s}$.

• Если $\ell_i > k_i$ для какого-то $i \in \{1, \dots, s\}$, то очевидно, что $n \not\,\vdots\, d$.

2) • Показатель степени простого числа p_i в каноническом разложении делителя $d \mid n$ можно выбрать $k_i + 1$ способами (0, 1, ..., k_i).

• Перемножаем количества вариантов для p_1, ..., p_s и получаем доказываемую формулу. $\square$

Теорема 9

Пусть $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{N}$, $p_1, \dots, p_s \in \mathbb{P}$ *причем* $a_i = p_1^{k_{i,1}} \dots p_s^{k_{i,s}}$ *для всех* $i \in \{1, \dots, m\}$ *(некоторые из показателей могут быть равны 0). Тогда*

$$(a_1, \dots, a_m) = p_1^{\min(k_{1,1}, \dots, k_{m,1})} \dots p_s^{\min(k_{1,s}, \dots, k_{m,s})}.$$

Доказательство. • По теореме 8, $d \mid a_t$, если и только если $d = p_1^{\ell_1} \dots p_s^{\ell_s}$, где $\ell_j \le k_{t,j}$ для всех $j \in \{1, \dots, s\}$.

• Следовательно, $d \in \mathrm{OD}(a_1, \dots, a_m)$, если и только если $d = p_1^{\ell_1} \dots p_s^{\ell_s}$, где $\ell_i \le \min(k_{1,i}, \dots, k_{s,i})$ для всех $i \in \{1, \dots, s\}$.

• Теперь понятно, что наибольший элемент в $\mathrm{OD}(a_1, \dots, a_m)$ вычисляется в точности по формуле из условия. □

Линейные диофантовы уравнения

- $ax + by = c$ **(*)**, где $a,b,c \in \mathbb{Z}$ – константы, а $x, y \in \mathbb{Z}$ – неизвестные.
- Если $c \not\vdots (a,b)$, то, очевидно, (*) не имеет решений.
- Иначе, пусть $a = da', b = db', c = dc'$. Разделим (*) на (a,b), и получим $a'x + b'y = c'$, где $(a,b) = 1$.
- По Теореме 4, существует линейное представление НОДа: $a'x_0 + b'y_0 = 1 \overset{\cdot c'}{\Leftrightarrow} a'(x_0c') + b'(y_0c') = c'$.

Теорема 10 (Решения диофанта)

Решения (*) представляются в виде $x = x_0c' + tb'$, $y = y_0c' - ta'$, *где* $t \in \mathbb{Z}$.

Доказательство.

Пусть мы нашли подходящую пару (x_0, y_0) для линейного представления $a'x + b'y = 1$. Тогда (x_0c', y_0c') – пара, удовлетворяющая $a'x + b'y = c'$. Отсюда можно записать: $a'x + b'y = c' = a'(x_0c') + b'(y_0c')$ (подставили (x_0c', y_0c)) Перегруппируем: $a'(x - x_0c') = b'(y_0c' - y)$ **(**)**. Так как $(a', b') = 1$, а ЛЧ $\vdots\, a'$, то остаётся единственный вариант – $y_0c' - y \vdots a' \Leftrightarrow y_0c' - y = a't \Leftrightarrow \boxed{y = y_0c' - ta'}(t \in \mathbb{Z})$.

Подставив в (**), получим: $a'(x - x_0c') = tb'a' \overset{a' \neq 0}{\Longleftrightarrow} x - x_0c' = tb' \Leftrightarrow \boxed{x = x_0c + tb'}$.

□

Идеалы в $\mathbb{Z}$

• Пусть $m \in \mathbb{N}$, тогда нетрудно проверить, что $m\mathbb{Z} = \{mx \ : \ x \in \mathbb{Z}\}$ — идеал в $\mathbb{Z}$.

Теорема 11

Пусть I — идеал в $\mathbb{Z}$. Тогда $I = m\mathbb{Z}$, где $m \in \mathbb{N}_0$.

Доказательство. • Если $I = \{0\}$, то подходит $m = 0$. Далее $I \neq \{0\}$.

• Пусть $a \in I$, $a \neq 0$. Тогда и $-a \in I$. Одно из чисел a и $-a$ — натуральное. Таким образом, $I' = I \cap \mathbb{N} \neq \varnothing$.

• Тогда существует минимальный элемент в I', обозначим его m. Докажем, что $I = m\mathbb{Z}$.

• Предположим противное, пусть $b \in I$, $b \not\vdots\, m$. Тогда $b = mq + r$, где $0 < r < m$ (теорема о делении с остатком).

• Так как $b, m \in I$, имеем $r = b - mq \in I$. Тогда $r \in I'$. Противоречие с минимальностью m. $\square$

НОД через идеал

Теорема 12

Пусть $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Тогда существует линейное представление $(a_1, \dots, a_n)$, а $\mathrm{OD}(a_1, \dots, a_n)$ состоит из всех делителей $(a_1, \dots, a_n)$.

Доказательство. • Пусть $I = \langle \{a_1, \dots, a_n\} \rangle$. Этот идеал состоит из линейных комбинаций чисел $a_1, \dots, a_n$.

• Очевидно, $I \neq \{0\}$. Тогда по Теореме 11 существует такое $d \in \mathbb{N}$, что $I = d\mathbb{Z}$ — состоит из кратных d.

• Так как $a_1, \dots, a_n \in I$, все они делятся на d, значит, $d \in \mathrm{OD}(a_1, \dots, a_n)$.

• С другой стороны, $d \in I$, а значит, $d = x_1a_1 + \dots + x_na_n$, где $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$.

• Значит, для любого $f \in \mathrm{OD}(a_1, \dots, a_n)$ мы имеем $d \,\vdots\, f$.

• Так как $d > 0$, d — наибольший элемент в $\mathrm{OD}(a_1, \dots, a_n)$, то есть, $d = (a_1, \dots, a_n)$. $\square$

Сравнения

Определение

Пусть $m \in \mathbb{N}$; $a, b \in \mathbb{Z}$. Будем говорить, что a **сравнимо** с b по модулю m, если $a - b \vdots m$. Обозначения: $a \equiv_m b$ или $a \equiv b \pmod{m}$.

Лемма 1

Пусть $m \in \mathbb{N}$; $a, b \in \mathbb{Z}$. Следующие утверждения равносильны.

1° $a \equiv b \pmod{m}$.

2° $a - b \vdots m$.

3° *a и b имеют одинаковые остатки от деления на m.*

4° $a \equiv b \pmod{m\mathbb{Z}}$.

Доказательство. $1^\circ \iff 2^\circ$ по определению сравнения.

$2^\circ \iff 3^\circ$ очевидно.

$2^\circ \iff 4^\circ$ по определению главного идеала $m\mathbb{Z}$. $\square$

Свойство 1

Если $a \equiv_m a'$ и $b \equiv_m b'$, а $x, y \in \mathbb{Z}$, то $ax + by \equiv_m a'x + b'y$.

Доказательство.
$ax + by - (a'x + b'y) = x(a - a') + y(b - b') \vdots m$. □

Свойство 2

Если $a \equiv_m a'$ и $b \equiv_m b'$, то $ab \equiv_m a'b'$.

Доказательство. $ab - a'b' = (ab - a'b) + (a'b - a'b') = (a - a')b + a'(b - b') \vdots m$. □

Свойство 3

Если $a \equiv_m b$ и $n \in \mathbb{N}$, то $a^n \equiv_m b^n$.

Доказательство. • Индукция по n. База $n = 1$ очевидна.
• Переход $n \to n + 1$. Так как $a^n \equiv_m b^n$ (по индукционному предположению) и $a \equiv_m b$, по свойству 2 имеем
$a^{n+1} = a^n \cdot a \equiv_m b^n \cdot b = b^{n+1}$. □

Свойство 4

Если $(a, m) = 1$ и $ab \equiv_m ac$, то $b \equiv_m c$.

Доказательство. $ab \equiv_m ac \Rightarrow a(b - c) \vdots m \Rightarrow b - c \vdots m$
$\Rightarrow b \equiv_m c$ (по Свойству 3 взаимно простых чисел можно сократить на a). □

Вычеты

• $\equiv_m$ — отношение эквивалентности, так как это частный случай сравнения по модулю идеала (впрочем, можно несложно проверить напрямую).

Определение

Вычет по модулю m — это класс эквивалентности по $\equiv_m$.

• Перечислим тривиальные следствия Леммы 1.

• Каждый вычет по модулю m имеет вид $a + m\mathbb{Z}$ для некоторого $a \in \mathbb{Z}$.

• В каждом вычете все числа имеют одинаковый остаток от деления на m, а числа из разных вычетов имеют разные остатки.

• Существует ровно m вычетов по модулю m.

Определение

Числа $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{Z}$ — образуют полную систему вычетов по модулю m (сокращенно: ПСВ $\pmod{m}$), если каждый вычет по модулю m содержит ровно одно из них.

Лемма 2

$a_1, \dots, a_m \in \mathbb{Z}$ — ПСВ $\pmod{m}$, если и только если никакие два из них не сравнимы по модулю m.

Доказательство. $\Rightarrow$ очевидно следует из определения.
$\Leftarrow$. Если есть m чисел, и никакие два из них не сравнимы по модулю m, то в каждом вычете по модулю m ровно одно из них. $\square$

Теорема 13

Пусть $a_1, \dots, a_m$ — ПСВ $\pmod{m}$, $k, b \in \mathbb{Z}$, причем $(k, m) = 1$. Тогда $ka_1 + b, \dots, ka_m + b$ — ПСВ $\pmod{m}$.

Доказательство. • Достаточно проверить критерий из Леммы 2.

• Пусть $ka_i + b \equiv_m ka_j + b \iff k(a_i - a_j) \,\vdots\, m$.

• Так как $(k, m) = 1$, это означает, что $a_i - a_j \,\vdots\, m \iff a_i \equiv_m a_j$, что не так. $\square$

НОД вычета и модуля. Приведенная система вычетов

• Если $a \equiv_m b$, то $a - b \vdots m$ и по свойству 2 НОД мы имеем $(a, m) = (b, m)$.

• Таким образом, для каждого вычета $\overline{a} = a + m\mathbb{Z}$ корректно определен НОД $(\overline{a}, m) := (a, m)$.

Определение

1) Вычет $\overline{a}$ по модулю m называется взаимно простым с модулем m, если $(\overline{a}, m) = 1$.

2) Для $m \in \mathbb{N}$ функция Эйлера $\varphi(m)$ — количество чисел от 1 до m, взаимно простых с m.

• !!! $\varphi(1) = 1$.

• Существует ровно $\varphi(m)$ вычетов по модулю m, взаимно простых с m.

Определение

Числа $a_1, \dots, a_{\varphi(m)}$ образуют приведенную систему вычетов по модулю m, (сокращенно: ПрСВ $\pmod{m}$), если каждый вычет по модулю m, взаимно простой с m, содержит ровно одно из них.

Лемма 3

$a_1, \dots, a_{\varphi(m)} \in \mathbb{Z}$ — ПрСВ $\pmod m$, если и только если все эти числа взаимно просты с m и никакие два из них не сравнимы по модулю m.

Доказательство. $\Rightarrow$ очевидно следует из определения.
$\Leftarrow$. Есть $\varphi(m)$ чисел, и никакие два из них не сравнимы по модулю m, а также есть ровно $\varphi(m)$ вычетов в ПрСВ (взаимно простых с m). Значит, в каждом вычете из ПрСВ ровно одно из этих чисел. $\square$

Теорема 14

Пусть $a_1, \dots, a_{\varphi(m)}$ — ПрСВ $\pmod m$, $k \in \mathbb{Z}$, причем $(k, m) = 1$. Тогда $ka_1, \dots, ka_{\varphi(m)}$ — ПрСВ $\pmod m$.

Доказательство. • Достаточно проверить критерий из Леммы 3.

• Так как $(k, m) = 1$ и $(a_i, m) = 1$, то $(ka_i, m) = 1$ (для всех $i \in \{1, \dots, \varphi(m)\}$).

• Если $ka_i \equiv_m ka_j$, то $a_i \equiv_m a_j$ по Свойству 4 сравнений, что не так. $\square$

Теорема Эйлера

Теорема 15 (Эйлера)

Пусть $m \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{Z}, (a,m) = 1$. *Тогда* $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$

Доказательство.

- Пусть $r_1, \dots, r_{\varphi(m)}$ – ПрСВ $\pmod{m}$.
- По Теореме 14 $ar_1, \dots, ar_{\varphi(m)}$ – ПрСВ $\pmod{m}$.
- Перемножив 2 эти ПрСВ, мы получим, что они сравнимы $\pmod{m}$, потому что в каждой $\varphi(m)$ чисел, и для каждого из первой найдётся какое-то сравнимое $\pmod{m}$ из второй. Пусть $R = r_1 \dots r_{\varphi(m)}$
- Тогда $a^{\varphi(m)} R \equiv R \pmod{m}$. Так как $\forall i : (r_i, m) = 1$, то на R можно сократить: $\boxed{a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}}$

□

Следствие (Малая теорема Ферма)

Пусть $a \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{P}, (a, p) = 1$. *Тогда* $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Функция Эйлера

Лемма 4

Функция Эйлера мультипликативна, то есть, если $a, b \in \mathbb{N}$ взаимно просты, то $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

Доказательство. • Запишем числа от 1 до ab в таблицу $a \times b$ так, что в первой строке — числа от 1 до a, во второй — от $a+1$ до $2a$, итд, в b строке — числа от $(b-1)a+1$ до ba.

• Все числа в i столбце принадлежат одному вычету $\overline{i} = i + a\mathbb{Z}$ по модулю a. Эти числа взаимно просты с a, если и только если $(i, a) = 1$.

• Вычеркнем все столбцы с номерами i, не взаимно простыми с a. Останутся ровно $\varphi(a)$ столбцов.

• Все числа, взаимно простые с ab, должны быть взаимно простыми и с a, они лежат в оставшихся $\varphi(a)$ столбцах.

• Рассмотрим оставшийся столбец, пусть числа в нем имеют вид $j, a+j, \dots, (b-1)a+j$. Эти числа образуют ПСВ $\pmod{b}$ в силу теоремы 13 (так как получены из ПСВ $0, 1, \dots, b-1$ умножением на a, взаимно простое с b и прибавлением j: $\quad 0 \to j,\ 1 \to a+j,\ \dots,\ b-1 \to (b-1)a+j$).

• Значит, среди чисел j, $a+j$, $\dots$, $(b-1)a+j$ ровно $\varphi(b)$ взаимно простых с b. Остальные числа точно не взаимно просты с ab, вычеркнем их.

• Оставшиеся $\varphi(a)\varphi(b)$ чисел взаимно просты и с a, и с b, а значит, взаимно просты с ab. Значит, осталось ровно $\varphi(ab)$ чисел (все числа от 1 до ab, взаимно простые с ab). $\square$

Лемма 5

Если $p \in \mathbb{P}$, $n \in \mathbb{N}$, то $\varphi(p^n) = p^n - p^{n-1}$.

Доказательство. • Посчитаем количество чисел от 1 до p^n, не взаимно простых с p^n.

• Пусть $(a, p^n) = d > 1$. Так как $p^n \vdots d$, должно быть $d \vdots p$.

• Следовательно, числа от 1 до p^n, не взаимно простые с p^n — это в точности числа от 1 до p^n, кратные p. Их количество равно $\frac{p^n}{p} = p^{n-1}$. $\square$

Теорема 16

Если $n \in \mathbb{N}$ *имеет каноническое разложение* $n = p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}$, *то*

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_m}\right).$$

Доказательство. • Докажем индукцией по количеству простых делителей s, что $\varphi(p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s}) = \prod_{i=1}^{s} \varphi(p_i^{k_i})$.

• База для $s = 1$ очевидна.

• Переход $s \to s+1$. Так как $(p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s},\ p_{s+1}^{k_{s+1}}) = 1$, по Лемме 4 и индукционному предположению имеем

$$\varphi(p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s} \cdot p_{s+1}^{k_{s+1}}) = \varphi(p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s}) \cdot \varphi(p_{s+1}^{k_{s+1}}) = \left(\prod_{i=1}^{s} \varphi(p_i^{k_i})\right) \cdot \varphi(p_{s+1}^{k_{s+1}}) = \prod_{i=1}^{s+1} \varphi(p_i^{k_i}).$$

• Следовательно,

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^{m} \varphi(p_i^{k_i}) = \prod_{i=1}^{m} (p_i^{k_i} - p_i^{k_i - 1}) = \prod_{i=1}^{m} p_i^{k_i}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = n \cdot \prod_{i=1}^{m}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

Сумма функции Эйлера по делителям числа

Теорема 17

Для любого $n \in \mathbb{N} : \sum\limits_{d|n} \varphi(d) = n$

Доказательство.

- Запишем в ряд дроби: $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}$, приведём их к несократимому виду.
- Тогда множество знаменателей – все делители числа n.
- Легко видеть, что для знаменателя q всего существует $\varphi(q)$ дробей (потому что дробь несократима).
- А всего выписано n дробей. Значит, просуммировав по всем q (то есть, по делителям n), получим:

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n, \ \square$$

Кольцо вычетов

• Вычеты по модулю $m \in \mathbb{Z}$ — они же вычеты по модулю идеала $m\mathbb{Z}$ — образуют *кольцо вычетов* $\mathbb{Z}_m := \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Лемма 6

Обратимые элементы $\mathbb{Z}_m$ — это в точности вычеты из ПрСВ $\pmod{m}$.

Доказательство. • Если $\overline{a} \in \mathbb{Z}_m$ обратим, то существует такой $\overline{b} \in \mathbb{Z}_m$, что $\overline{a}\overline{b} = \overline{1} \iff ab \equiv_m 1$. Тогда $(ab, m) = 1$, а значит и $(a, m) = 1$.

• Наоборот, пусть $(a, m) = 1$. По Теореме 13 тогда $0, a, 2a, \dots, (m-1)a$ — ПСВ $\pmod{m}$. Значит, $\exists b: \ ab \equiv_m 1 \Rightarrow \overline{a}\overline{b} = \overline{1}$. $\square$

• Если вычет $\overline{a}$ обратим, то обратный вычет $(\overline{a})^{-1}$ единственен (это доказано в общем случае для кольца ранее, а в данном случае следует из доказательства Леммы 6).

Теорема 18

Если $p \in \mathbb{P}$, то $\mathbb{Z}_p$ — поле.

Доказательство. Так как все некратные p числа взаимно просты с p, ПрСВ $\pmod{p}$ — это все ненулевые вычеты. Тогда по Лемме 6, все ненулевые элементы $\mathbb{Z}_p$ обратимы. $\square$

Алгоритм поиска обратного вычета

- Пусть $a \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, причем $(a, m) = 1$. Как найти обратный вычет a^{-1} ?
- Пусть r — остаток от деления a на m. Тогда $0 \le r < m$.
- Если $r = 0$, то $(a, m) > 1$ и обратного вычета не существует.
- Если $r > 0$, то с помощью алгоритма Евклида ищем $d = (r, m) = (a, m)$.
- Если $d > 1$, то обратного вычета не существует.
- Если $d = 1$, то при помощи (выполненного ранее) алгоритма Евклида ищем линейное представление НОД: $1 = ax + my$.
- Тогда $ax \equiv 1 \pmod{m}$, а значит, $(\overline{a})^{-1} = \overline{x}$ в $\mathbb{Z}_m$.

Линейное сравнение с одним неизвестным

- Пусть $a, b \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$. Нужно решить (относительно x) сравнение
$$ax \equiv b \pmod{m}. \qquad (*)$$
- Пусть $d = (a, m)$. Если $b \not\vdots\, d$, то очевидно, $(*)$ решений не имеет.
- Если $b \,\vdots\, d$, то пусть $a = a'd$, $b = b'd$, $m = m'd$. Тогда

$$(*) \iff ax - b \,\vdots\, m \iff a'x - b' \,\vdots\, m' \iff a'x \equiv b' \pmod{m'}. \qquad (**)$$

- Так как $(a', m') = 1$, существует обратный вычет $(\overline{a'})^{-1}$ в $\mathbb{Z}_{m'}$.
- Пусть $s \in (\overline{a'})^{-1}$. Тогда $x \equiv b's \pmod{m'}$ — решение сравнения $(**)$, а значит, и исходного сравнения $(*)$.

Делимость на попарно взаимно простые числа

Лемма 7

Пусть $m_1, \dots, m_k$ — попарно взаимно простые натуральные числа, $m = m_1 \dots m_k$. Пусть $b \in \mathbb{Z}$ таково, что $b \vdots m_1$, $\dots$, $b \vdots m_k$. Тогда $b \vdots m$.

Доказательство. Пусть $n_\ell = m_1 \dots m_\ell$. Докажем индукцией по ℓ, что $b \vdots n_\ell$.

- База $\ell = 1$ очевидна.

Переход $\ell \to \ell + 1$. • По индукционному предположению $b = cn_\ell$, где $c \in \mathbb{Z}$.

- Так как $cn_\ell = b \vdots m_{\ell+1}$ и $(n_\ell, m_{\ell+1}) = 1$, по Свойству 3 взаимно простых чисел имеем $c \vdots m_{\ell+1}$.
- Тогда $c = dm_{\ell+1}$ и $b = dm_{\ell+1}n_\ell = dn_{\ell+1}$. $\square$

Китайская теорема об остатках

Теорема 19

Пусть $m_1, \dots, m_k$ — попарно взаимно простые натуральные числа, $m = m_1 \dots m_k$, $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Z}$. Тогда существует единственное такое $a \in \{0, 1, \dots, m-1\}$, что $a \equiv_{m_1} a_1$, ..., $a \equiv_{m_k} a_k$.

Доказательство. $\exists$. • Пусть $n_\ell = m_1 \dots m_\ell$. Докажем индукцией по ℓ существование такого $b_\ell \in \mathbb{Z}$, что $b_\ell \equiv_{m_1} a_1$, ..., $b_\ell \equiv_{m_\ell} a_\ell$.

База $\ell = 1$ очевидна.

Переход $\ell \to \ell + 1$. • Так как $(m_{\ell+1}, n_\ell) = 1$ по Теореме 13 числа b_ℓ, $b_\ell + n_\ell$, $b_\ell + 2n_\ell$, ..., $b_\ell + (m_{\ell+1} - 1)n_\ell$ — ПСВ $\pmod{m_{\ell+1}}$ (они получены из ПСВ 0,1, ..., $m_{\ell+1} - 1$ умножением на n_ℓ и прибавлением b_ℓ).

• Значит, среди этих чисел есть число $kn_\ell + b_\ell \equiv_{m_{\ell+1}} a_{\ell+1}$. Положим $b_{\ell+1} := kn_\ell + b_\ell$.

• Тогда $b_{\ell+1} - a_{\ell+1} \,\vdots\, m_{\ell+1}$.

• По построению $b_{\ell+1} - b_\ell \,\vdots\, n_\ell$. Так как по индукционному предположению $b_\ell - a_i \,\vdots\, m_i$ для всех $i \in \{1, \dots, \ell\}$, мы имеем $b_{\ell+1} - a_i = (b_{\ell+1} - b_\ell) + (b_\ell - a_i) \,\vdots\, m_i$.

• Итак, мы получили число b_k, удовлетворяющее всем требованиям теоремы, кроме одного: число должно быть от 0 до $m-1$.

• Для получения такого числа a поделим b_k с остатком на m: пусть $b_k = mq + a$, $0 \le a \le m-1$.

• Так как $a - b_k \,\vdots\, m \,\vdots\, m_i$ и $b_k - a_i \,\vdots\, m_i$, то и $a - a_i \,\vdots\, m_i$ для всех $i \in \{1, \dots, k\}$.

! • Предположим, что a и a' — два различных числа, удовлетворяющих условию. Тогда $a - a' \,\vdots\, m_i$ для всех $i \in \{1, \dots, k\}$.

• Так как $m_1, \dots, m_k$ попарно взаимно просты, по Лемме 7 $\quad a - a' \,\vdots\, m = m_1 \dots m_k$. Но $|a - a'| < m$, противоречие. $\square$

• Из доказательства единственности в Теореме 19 видно, что все целые числа a, для которых $a - a_i \,\vdots\, m_i$ при всех $i \in \{1, \dots, k\}$ образуют в точности один вычет по модулю $m = m_1 \dots m_k$.

Алгоритмы поиска решения для КТО

- Пусть $m_1, \dots, m_k$ — попарно взаимно простые натуральные числа, $m = m_1 \dots m_k$, $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Z}$.
- Мы ищем такое a, что $a \equiv_{m_1} a_1, \dots, a \equiv_{m_k} a_k$ $(*)$.
- Будет использоваться алгоритм поиска обратного вычета, описанный выше.

Алгоритм 1.

- Пусть $m'_i = \frac{m_1 \dots m_k}{m_i}$. Тогда $(m'_i, m_i) = 1$.

$b_i \in \{0, 1, \dots, m_i - 1\}$ — такое число, что $b_i \cdot m'_i \equiv 1 \pmod{m_i}$ (мы найдем b_i с помощью алгоритма поиска обратного вычета).

Утверждение

$a = a_1 b_1 m'_1 + a_2 b_2 m'_2 + \dots + a_k b_k m'_k$ — *решение* $(*)$.

Доказательство. Так как $m'_j \,\vdots\, m_i$ при всех $j \neq i$, для любого $i \in \{1, \dots, k\}$

$a \equiv a_i b_i m'_i \equiv a_i \pmod{m_i}$. □

- Как сказано выше, все решения системы $(*)$ — это в точности числа, сравнимые с a по модулю m.
- Поделив a на m с остатком, мы найдем решение системы среди чисел $0, 1, \dots, m - 1$.

Алгоритм 2

• Индукцией по s найдем x_s, удовлетворяющее первым s сравнениям:

$x_s \equiv_{m_1} a_1, \dots, x_s \equiv_{m_s} a_s$.

• База $s = 1$ очевидна: подойдет $x_1 = a_1$.

Переход $s \to s+1$. • Пусть $n_s = m_1 \dots m_s$.

Будем искать решение в виде $x_{s+1} = x_s + c_s n_s$.

• Тогда $x_{s+1} - x_s \vdots m_j$ для всех $j \in \{1, \dots, s\}$, поэтому, x_{s+1} удовлетворяет первым s сравнениям.

• Подберем c_s так, чтобы $x_{s+1} \equiv a_{s+1} \pmod{m_{s+1}}$:

$x_s + c_s n_s \equiv a_{s+1} \pmod{m_{s+1}} \iff c_s n_s \equiv a_{s+1} - x_s \pmod{m_{s+1}} \iff c_s \equiv (a_{s+1} - x_s) \cdot (n_s)^{-1} \pmod{m_{s+1}}$.

• Так как $(n_s, m_{s+1}) = 1$, обратный вычет $(n_s)^{-1}$ существует и может быть найден с помощью описанного выше алгоритма.

• Второй алгоритм решения КТО на первый взгляд сложнее, чем первый, но требует применения $k-1$ алгоритмов поиска обратного вычета (а не k): мы не ищем обратный вычет по модулю m_1.

• Поэтому, целесообразно нумеровать модули так, чтобы m_1 оказался самым большим.

Формула обращения Мёбиуса

Определение

Функция Мёбиуса $\mu(n) :=$
$$\begin{cases} 1, & \text{если } n = 1, \\ (-1)^k, & \text{если } n = p_1 \dots p_k \text{ — произведение различных простых чисел,} \\ 0, & \text{если } n \text{ делится на квадрат простого числа.} \end{cases}$$

Лемма 8

Пусть $m, d \in \mathbb{N}$, $m \vdots d$. Тогда $\sum\limits_{d \,|\, n \,|\, m} \mu(\frac{m}{n}) = \begin{cases} 1, & m = d, \\ 0, & m > d. \end{cases}$

(суммирование ведется по всем n, кратным d и делящим m).

Доказательство. • Пусть $k := \frac{m}{d} = p_1^{t_1} \dots p_r^{t_r}$ — каноническое разложение. Тогда

$$\sum_{d \,|\, n \,|\, m} \mu(\tfrac{m}{n}) = \sum_{s \,|\, p_1 \dots p_r} \mu(s) = \sum_{\ell=0}^{r} \mathrm{C}_r^\ell (-1)^\ell = (1-1)^r$$

(так как ненулевое значение μ достигается только на произведениях различных простых).

• Наша сумма равна 0 во всех случаях, кроме $r = 0$ (а это в точности $k = 1 \iff m = d$). В последнем случае сумма равна 1.

Формула обращения Мёбиуса

Теорема 20 (ФОМ)

Пусть $f,g:\mathbb{N}\mapsto$, *причём* $g(n)=\sum\limits_{d|n} f(d)$ *(сумма по делителям функции* f*). Тогда* $f(n)=\sum\limits_{d|n}\left(\mu(\frac{n}{d})g(d)\right)$.

Доказательство.

$$\sum_{d|n}\left(\mu\left(\frac{n}{d}\right)f(d)\right)=\sum_{d|n}\left(\mu\left(\frac{n}{d}\right)\cdot\sum_{d'|d}g(d')\right)$$

Перегруппируем слагаемые: сначала будем суммировать по d' ($d' \mid d \mid n \Rightarrow d' \mid n$), но тогда для каждого слагаемого этой суммы нужно закреплять $d : d'|d|n$.

$$\sum_{d|n}\left(\mu\left(\frac{n}{d}\right)\cdot\sum_{d'|d}g(d')\right)=\sum_{d'|n}\left(g(d')\cdot\sum_{d'|d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\right)$$

Почти каждое слагаемое суммы равно 0, т. к. по Лемме 8 внутренняя сумма равна 0 всегда, кроме случая $d'=n$, но тогда подставим $d'=n$:

$$\sum_{\substack{d'|n\\ d'=n}}\left(g(d')\cdot\sum_{d'|d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\right)=g(n)\sum_{n|d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)=g(n)\mu(1)=g(n),\ \square$$

Сумма по делителям функции Эйлера

Альтернативное доказательство

- Предположим, что $\sum\limits_{d|n}\varphi(d)=n$.
- Мы уже знаем, что при $n=p_1^{\alpha_1}\dots p_k^{\alpha_k}$ значение функции Эйлера равно $\varphi(n)=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$.
- Значит, по ранее выведенной ФОМ достаточно показать, что $\varphi(n)=\sum\limits_{d|n}\left(\mu\left(\frac{n}{d}\right)\cdot\sum\limits_{d'|d}\varphi(d')\right)$.
- При $d=p_{i_1}\dots p_{i_t}$ мы имеем $\mu(d)=(-1)^t,\mu(1)=1$, в остальных случаях $\mu(d)=0$. Поэтому, после технической работы слева равенство будет очевидно:

$$n\left(1-\sum_{1\leqslant i\leqslant s}\frac{1}{p_i}+\sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant s}\frac{1}{p_{i_1}p_{i_2}}-\dots\right)\stackrel{?}{=}n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$$

$\square$

Функция Эйлера через формулу обращения Мёбиуса

Теорема 21

Пусть $n = p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s}$ *— каноническое разложение числа* n*. Тогда* $\varphi(n) = n(1 - \frac{1}{p_1}) \dots (1 - \frac{1}{p_s})$*.*

Доказательство. • По Теореме 16, $\sum\limits_{d \in \mathbb{N},\, d \mid m} \varphi(d) = m$.

• По Формуле обращения Мёбиуса,

$\varphi(n) = \sum\limits_{d \in \mathbb{N},\, d \mid n} \mu(d) \cdot \frac{n}{d}$.

• Напомним, что при $d = p_{i_1} \dots p_{i_t}$ мы имеем $\mu(d) = (-1)^t$ (здесь $i_1, \dots, i_t$ — различные индексы), $\mu(1) = 1$, а в остальных случаях $\mu(d) = 0$. Поэтому,

$$\varphi(n) = n - \sum_{1 \le i \le s} \frac{n}{p_i} + \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le s} \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2}} - \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le s} \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} p_{i_3}} + \dots =$$

$$n\left(1 - \sum_{1 \le i \le s} \frac{1}{p_i} + \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le s} \frac{1}{p_{i_1} p_{i_2}} - \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le s} \frac{1}{p_{i_1} p_{i_2} p_{i_3}} + \dots\right) =$$

$$n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_s}\right). \quad \square$$

Формула обращения Мёбиуса. Мультипликативный вариант

Теорема 22

Пусть K — поле, $f, g : \mathbb{N} \to K \setminus \{0\}$, причем $f(m) = \prod\limits_{d \mid m} g(d)$.

Тогда $g(m) = \prod\limits_{n \mid m} f(n)^{\mu(\frac{m}{n})}$.

Доказательство.

$$\prod_{n \mid m} f(n)^{\mu(\frac{m}{n})} = \prod_{n \mid m} \Big(\prod_{d \mid n} g(d)\Big)^{\mu(\frac{m}{n})} =$$

$$\prod_{d \mid m} g(d)^{\sum\limits_{d \mid n \mid m} \mu(\frac{m}{n})} = g(m)$$

по Лемме 8. $\square$

Сумма мультипликативной функции по делителям числа

Теорема 23

Пусть $f : \mathbb{N} \to$ *— мультипликативная функция,* $g(n) = \sum\limits_{d\,|\,n} f(d)$*. Тогда* g *— мультипликативная функция.*

Доказательство. • Пусть $a, b \in \mathbb{N}$, $(a, b) = 1$.

• $a = p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s}$ и $b = q_1^{\ell_1} \dots q_t^{\ell_t}$ — канонические разложения.

• Так как $(a, b) = 1$, все эти простые различны и $ab = p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s} q_1^{\ell_1} \dots q_t^{\ell_t}$ — каноническое разложение.

• По Теореме 8, $d \,|\, ab \iff d = p_1^{k_1'} \dots p_s^{k_s'} q_1^{\ell_1'} \dots q_t^{\ell_t'}$, где $0 \le k_i' \le k_i$ для всех $i \in \{1, \dots, s\}$ и $0 \le \ell_j' \le \ell_j$ для всех $j \in \{1, \dots, t\}$.

• Следовательно, $d = d_a d_b$, где $d_a \,|\, a$ и $d_b \,|\, b$, причем $(d_a, d_b) = 1$ и такое представление единственно: $d_a = p_1^{k_1'} \dots p_s^{k_s'}$ и $d_b = q_1^{\ell_1'} \dots q_t^{\ell_t'}$.

- Таким образом,

$$g(ab) = \sum_{d \mid ab} f(d) = \sum_{d_a \mid a} \sum_{d_b \mid b} f(d_a d_b) = \sum_{d_a \mid a} \sum_{d_b \mid b} f(d_a) f(d_b) = \left(\sum_{d_a \mid a} f(d_a) \right) \left(\sum_{d_b \mid b} f(d_b) \right) = g(a) g(b).$$

$\square$

Определение

Для $n \in \mathbb{N}$ $\sigma(n)$ — сумма натуральных делителей n.

Теорема 24

Если $n = p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s}$, *то* $\sigma(n) = \frac{p_1^{k_1+1}-1}{p_1-1} \dots \frac{p_s^{k_s+1}-1}{p_s-1}$.

Доказательство. • Пусть $n_r = p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}$.

• Докажем индукцией по r, что $\sigma(n_r) = \frac{p_1^{k_1+1}-1}{p_1-1} \dots \frac{p_r^{k_r+1}-1}{p_r-1}$.

База для $r=1$: делители $p_1^{k_1}$ — это $1, p_1, \dots, p_1^{k_1}$ и по формуле суммы геометрической прогрессии их сумма равна $\frac{p_1^{k_1+1}-1}{p_1-1}$.

Переход $r \to r+1$. Так как $(n_r, p_{r+1}^{k_{r+1}}) = 1$, а по Теореме 23 функция $\sigma(n) = \sum\limits_{d \mid n} d$ мультипликативна,

$$\sigma(n_{r+1}) = \sigma(n_r p_{r+1}^{k_{r+1}}) = \sigma(n_r)\sigma(p_{r+1}^{k_{r+1}}) =$$

$$\left(\frac{p_1^{k_1+1}-1}{p_1-1} \dots \frac{p_r^{k_r+1}-1}{p_r-1}\right) \frac{p_{r+1}^{k_{r+1}+1}-1}{p_{r+1}-1}. \qquad \square$$

Первообразные корни из 1 в $\mathbb{C}$

Определение

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Число $\varepsilon \in \mathbb{C}$ такое, что $\varepsilon^n = 1$, но $\varepsilon^k \neq 1$ при натуральных $k < n$ называется *первообразным корнем из 1* степени n.

• Пусть $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1}$ — все корни степени n из 1, $\varepsilon_k = (\cos(\frac{2\pi k}{n}), \sin(\frac{2\pi k}{n}))$.

Теорема 25

1) *Существует в точности $\varphi(n)$ первообразных корней степени n из 1, это в точности такие корни ε_j, что $(j, n) = 1$.*
2) *Если ε_j — первообразный корень степени n из 1, то ε_j, ε_j^2, $\dots$, ε_j^n — все корни степени n из 1.*

Доказательство. • По формуле Муавра, $\arg(\varepsilon_j^k) = \frac{2\pi kj}{n}$. Разберем два случая.

Случай 1: $(j, n) = d > 1$.

• Тогда $m = \frac{n}{d} \in \mathbb{N}$, $m < n$ и $y = \frac{j}{d} \in \mathbb{Z}$.

• Следовательно, $\arg(\varepsilon_j^m) = \frac{2\pi mdy}{md} = 2\pi y$ и $\varepsilon_j^m = 1$. Это означает, что ε_j не является первообразным корнем из 1 степени n.

Случай 2: $(j, n) = 1$.

- Тогда аргументы $\varepsilon_j, \varepsilon_j^2, \dots, \varepsilon_j^{n-1}, \varepsilon_j^n$ — это $\frac{2\pi j}{n}, \dots, \frac{2\pi nj}{n}$.
- По Теореме 13, числа j, $2j$, …, nj — ПСВ $\pmod n$. Значит, среди их остатков от деления на n каждый встречается ровно один раз.
- Тогда $\frac{2\pi\cdot j}{n}$, $\frac{2\pi\cdot 2j}{n}$, …, $\frac{2\pi\cdot nj}{n}$ — это в точности такие аргументы, как $\frac{2\pi}{n}$, $\frac{4\pi}{n}$, …, $\frac{2n\pi}{n}$ (напомним, что аргумент не меняется при прибавлении 2π).
- Это означает, что $\varepsilon_j, \varepsilon_j^2, \dots, \varepsilon_j^{n-1}, \varepsilon_j^n$ — это в точности ε_0, …, ε_{n-1} — все корни степени n из 1.
- Понятно, что $\varepsilon_j^n = 1$, значит, в меньших степенях ε_j не равен 1, то есть, это первообразный корень степени n из 1. $\square$