

Теория графов. Теорема Татта

Д. В. Карпов

Extended edition

2023

Содержание теоремы

- ▶ Паросочетание в графе G называется **совершенным**, если оно покрывает все вершины графа G .
- ▶ Обозначим за $odd(G)$ (или $o(G)$) количество компонент связности графа, содержащих нечётное количество вершин.
- ▶ Мы готовы сформулировать теорему.

Теорема (W. T. Tutte, 1947)

В графе G существует совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда для любого $S \subset V(G)$ выполняется условие $odd(G - S) \leq |S|$.

Доказательство теоремы

Туда

\Rightarrow Пусть M – совершенное паросочетание, $S \subset V(G)$. Тогда граф $G - S$ разобьётся на чётные и нечётные компоненты. Тогда для каждой нечётной компоненты C существует вершина, которая не покрыта рёбрами из $M \cap C$, но **она была покрыта**. Значит, одна вершина из нечётной компоненты связности смежна ребром из паросочетания M с вершиной из множества S (потому что только его мы и удаляли). Все вершины, с которыми соединены вершины из нечётных компонент, разные, потому что из вершины паросочетания выходит ровно 1 ребро. Отсюда следует, что в S вершин не меньше, чем $odd(G - S)$

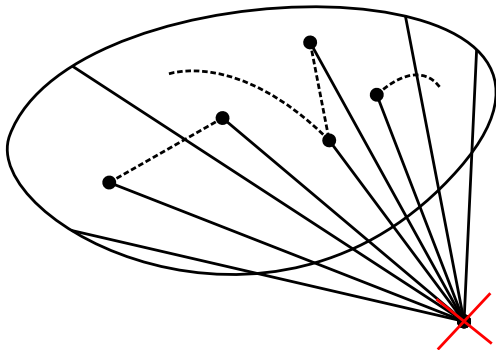
Доказательство теоремы

Обратно



- ▶ Предположим, что граф удовлетворяет условию, но не имеет совершенного паросочетания. Тогда, в частности (подставим $S = \emptyset$), $odd(G) \leq |\emptyset| = 0$, то есть, $v(G)$ чётно (потому что в G нет нечётных компонент).
- ▶ Пусть G^* – максимальный надграф G на том же множестве вершин, не имеющий совершенного паросочетания (то есть, добавив любое ребро, совершенное паросочетание уже будет). Мы построим совершенное паросочетание в G^* и придем к противоречию (фактически главная идея доказательства).

- Пусть $U = \{u \in V(G) : d_{G^*}(u) = v(G) - 1\}$ (множество вершин, соединённых со всеми остальными). G^* – не полный граф, а значит, $U \neq V(G)$. Удалим эти вершины из G^* .

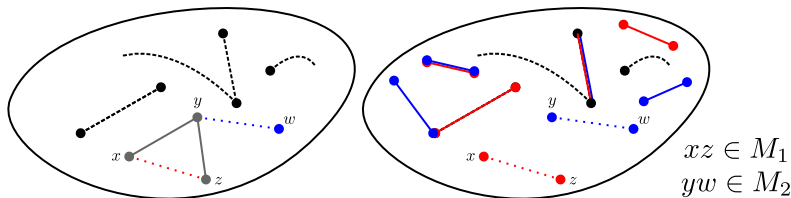


- (Лемма) Утверждается, что получившийся граф $G^* - U$ – это **объединение нескольких несвязанных полных графов**. Доказывать будем от противного.

Доказательство леммы

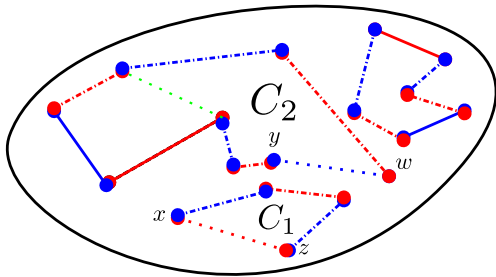
Доказательство.

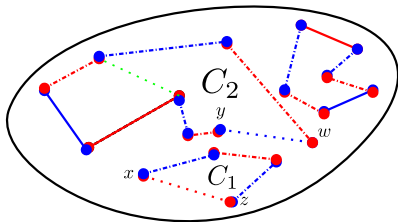
- ▶ Предположим, что это не так. Тогда существуют такие вершины $x, y, z \in V(G) \setminus U$, что $xy, yz \in E(G^*)$, но $xz \notin E(G^*)$.
- ▶ Так как $y \notin U$, существует такая вершина $w \notin U$, что $yw \notin E(G^*)$.
- ▶ Ввиду максимальности графа G^* существует совершенное паросочетание M_1 в графе $G^* + xz$ и совершенное паросочетание M_2 в графе $G^* + yw$. Так как в графе G^* нет совершенного паросочетания, $xz \in M_1$ и $yw \in M_2$.



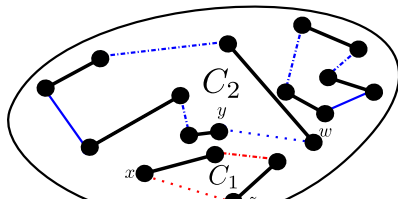
- Пусть $H = (V(G), M_1 \triangle M_2)$. Граф H – несвязное объединение циклов чётной длины, потому что из каждой вершины графа H выходит или 0, или 2 ребра (можно вспомнить критерий двудольности графа и применить его для каждой из компонент). Очевидно, в каждом из циклов чередуются рёбра паросочетаний M_1 и M_2 . Из-за чередования рёбер **диагоналей** в циклах быть не может. 2 случая:

Случай 1. xz и yw в разных компонентах C_1 и C_2 графа H



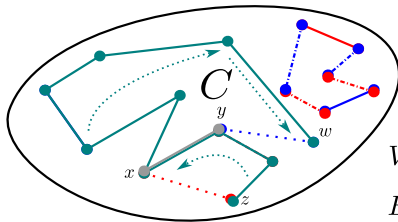
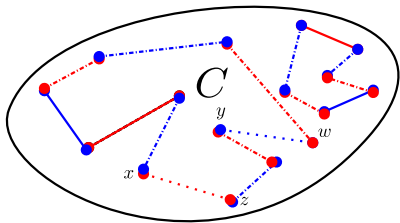


- ▶ Тогда на вершинах C_1 мы выберем **рёбра паросочетания M_2** , на вершинах C_2 мы выберем **рёбра паросочетания M_1** , а в остальных компонентах графа H – любое из этих паросочетаний (на рисунке M_1).
- ▶ В итоге получится совершенное паросочетание графа G^* , противоречие.



Случай 2. Рёбра xz и yw лежат в одной компоненте C графа H .

- ▶ В силу симметричности x и z можно считать, что вершины расположены в чётном цикле C в порядке $ywxz$.
- ▶ Рассмотрим простой путь $P = zCyxCw$, который состоит из двух дуг цикла C и ребра xy (оно не в графе H , но точно у нас было в G^* !). Тогда $V(P) = V(C)$ и $E(P) \subset E(G^*)$. Количество рёбер между точками z, y и x, w чётно (иначе рёбра не чередуются). Итак, мы получили путь, убрав рёбра xz, yw из чётного цикла и добавив ребро $xy \Rightarrow$ осталось нечётное количество рёбер. Очевидно, в простом пути нечётной длины существует совершенное паросочетание. □



$$V(P) = V(C)$$

$$E(P) \subset E(G^*)$$

- ▶ По лемме $G^* - U$ – объединение несвязных полных графов. В силу условия, среди них не более чем $|U|$ имеет нечётное число вершин ($odd(G^* - U) \leq |U|$).
- ▶ В каждой чётной компоненте графа $G^* - U$ существует совершенное паросочетание, в каждой нечётной – паросочетание, покрывающее все вершины, кроме одной. Соединим её с вершиной из U (используем различные, и их точно хватит, т. к. $odd(G^* - U) \leq |U|$).
- ▶ Разбиваем оставшиеся вершины в U : они разобьются на пары: это возможно всегда, потому что в изначальном графе (а значит и в G^* , потому что $V(G^*) = V(G)$ по построению) количество вершин чётно, а вершины из U – это те вершины, которые соединены с остальными по построению. □

Рисунок к последним пунктам

Мы молодцы

