

Алгебра. Глава 2. Целые числа.

Д. В. Карпов

2023

Делимость

Определение

Пусть $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Тогда a **делится** на b (обозначение: $a \div b$) или, что то же самое, b **делит** a (обозначение: $b \mid a$), если $a = bc$, где $c \in \mathbb{Z}$.

Если $a \div b$, то b — **делитель** a .

Свойство 1

Если $a \div b$ и $b \div c$, то $a \div c$.

Доказательство. Тогда $a = kb$ и $b = nc$, где $k, n \in \mathbb{Z}$, откуда следует $a = knc$. □

Свойство 2

Пусть $a, b \div d$, $x, y \in \mathbb{Z}$. Тогда $ax + by \div d$.

Доказательство. Тогда $a = kd$ и $b = nd$, где $k, n \in \mathbb{Z}$, откуда следует $ax + by = (kx + ny)d$. □

Свойство 3

Пусть $a, d \in \mathbb{N}$, $a \div d$. Тогда $a \geq d$.

Доказательство. Тогда $a = kd$, где $k \in \mathbb{N}$, откуда следует $a = kd \geq d$. □

Теорема 1

Пусть $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$. Тогда существуют единственные такие $q, r \in \mathbb{Z}$, что $0 \leq r < b$ и $a = bq + r$.

- Число r называется **остатком** от деления a на b .

Доказательство. \exists . Пусть q — такое целое число, что $bq \leq a < b(q+1)$, а $r = a - bq$. Тогда $0 \leq r < b$ (вычтем из всех трех частей первого неравенства bq).

! • Пусть $a = bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2$, причем $0 \leq r_1 < b$ и $0 \leq r_2 < b$.

• НУО $r_1 > r_2$. Тогда $0 < r_1 - r_2 < b$.

• С другой стороны, $r_1 - r_2 = b(q_2 - q_1) \geq b$.

Противоречие.



Определение

Пусть $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$. Обозначим через $\text{OD}(a_1, \dots, a_n)$ множество всех общих делителей этих чисел, а через (a_1, \dots, a_n) — их НОД (наибольший из общих делителей).

Свойство 1

Если $b \in \mathbb{N}$. $a \div b$, то $\text{OD}(a, b)$ — это все делители b и $(a, b) = b$.

Доказательство. • Если d — общий делитель a и b , то d — делитель b .

• Если d — делитель b , то $a \div d$ по свойству 1 делимости. Значит, d — общий делитель a и b . □

Свойство 2

Пусть $a, b, c, k \in \mathbb{Z}$, $c = a + kb$. Тогда $\text{OD}(a, b) = \text{OD}(c, b)$, а следовательно, и $(a, b) = (c, b)$.

Доказательство. • Пусть $d \in \text{OD}(a, b)$. Тогда $c \div d$, а значит, $d \in \text{OD}(c, b)$.

• Наоборот, если $d \in \text{OD}(c, b)$, то $a = c - kb \div d$, а значит, $d \in \text{OD}(a, b)$. □

- Пусть $a, b \in \mathbb{N}$, $a > b$. Каждая строка алгоритма — деление с остатком.

$$1) \quad a = bq_1 + r_1, \quad 0 \leq r_1 < b;$$

$$2) \quad b = r_1q_2 + r_2, \quad 0 \leq r_2 < r_1;$$

$$3) \quad r_1 = r_2q_3 + r_3, \quad 0 \leq r_3 < r_2;$$

...

$$n) \quad r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n, \quad 0 \leq r_n < r_{n-1};$$

$$n+1) \quad r_{n-1} = r_nq_{n+1}.$$

- Так как $b > r_1 > r_2 > \dots$ и все эти числа неотрицательны, алгоритм обязательно закончит работу.

Теорема 2

$(a, b) = r_n$, $a \text{ OD}(a, b)$ — это все делители (a, b) .

Доказательство. • По свойству 2 НОД

$\text{OD}(a, b) = \text{OD}(b, r_1) = \text{OD}(r_1, r_2) = \dots = \text{OD}(r_{n-1}, r_n)$, а это по свойству 1 НОДа — все делители r_n .

- Тогда (a, b) — наибольший из делителей r_n , а это r_n .



Теорема 3

Пусть $a, b, m, d \in \mathbb{N}$. Тогда:

1) $(am, bm) = m(a, b)$.

2) Если $d \in \text{OD}(a, b)$, то $(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = \frac{(a, b)}{d}$.

Доказательство. • НУО $a > b$.

1) • Рассмотрим первую строку алгоритма Евклида для am и bm :
 $am = bm \cdot q_1 + r_1 m, \quad 0 \leq r_1 m < bm$.

- Неполное частное не меняется, а остаток умножается на m .
- Так будет и со следующими строчками, в результате получится столько же строк, сколько в алгоритме Евклида для a и b , а НОД — последний ненулевой остаток — умножится на m .

2) • Рассмотрим первую строку алгоритма Евклида для $\frac{a}{d}$ и $\frac{b}{d}$:
 $\frac{a}{d} = \frac{b}{d} \cdot q_1 + \frac{r_1}{d}, \quad 0 \leq \frac{r_1}{d} < \frac{b}{d}$.

- Неполное частное не меняется, а остаток мы делим на d (в результате он остается целым).
- Так будет и со следующими строчками, в результате получится столько же строк, сколько в алгоритме Евклида для a и b , а НОД — последний ненулевой остаток — разделится на d .

Линейное представление НОД

Теорема 4

Пусть $a, b \in \mathbb{Z}$. Тогда существуют такие $x, y \in \mathbb{Z}$, что $(a, b) = ax + by$.

• Это называется *линейным представлением* НОДа.

Доказательство. • Так как делители y чисел a и $-a$ одни и те же, $(a, b) = (a, -b)$. Поэтому, можно считать, что $a, b \in \mathbb{N}$.

• НУО $a \geq b$. Воспользуемся алгоритмом Евклида и соответствующими обозначениями, дополним их: пусть $r_0 = b$ и $r_{-1} = a$.

• Докажем, что существует представление $(a, b) = x_k r_k + y_k r_{k-1}$ для всех $k = \{n, \dots, 0\}$ (где $(a, b) = r_n$) индукцией с обратным ходом. При $k = 0$ получим утверждение теоремы.

• База $k = n$ очевидна: $(a, b) = 1 \cdot r_n + 0 \cdot r_{n-1}$.

• Переход $k \rightarrow k - 1$. Из алгоритма Евклида мы знаем, что $r_k = r_{k-2} - r_{k-1}q_k$. Подставим:

$$(a, b) = x_k r_k + y_k r_{k-1} = x_k (r_{k-2} - r_{k-1}q_k) + y_k r_{k-1} =$$

$$(-x_k q_k + y_k) r_{k-1} + x_k r_{k-2}.$$



Теорема 5

Пусть $n \geq 2$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$. Положим $m_2 = (a_1, a_2)$, $m_3 = (m_2, a_3)$, \dots , $m_n = (m_{n-1}, a_n)$. Тогда $m_n = (a_1, \dots, a_n)$, а $\text{OD}(a_1, \dots, a_n)$ — это все делители m_n .

Доказательство. • Индукцией по k докажем, что $\text{OD}(a_1, \dots, a_k)$ — все делители m_k .

- База $k = 2$ доказана в Теореме 2.
- Переход $k \rightarrow k + 1$. $\text{OD}(a_1, \dots, a_k, a_{k+1})$ — это все числа из $\text{OD}(a_1, \dots, a_k)$, являющиеся делителями a_{k+1} .
- Так как $\text{OD}(a_1, \dots, a_k)$ — это все делители m_k , получаем, что $\text{OD}(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}) = \text{OD}(m_k, a_{k+1})$, а это все делители $m_{k+1} = (m_k, a_{k+1})$ по Теореме 2.
- Итак, утверждение доказано и $\text{OD}(a_1, \dots, a_n)$ — это все делители m_n . Теперь понятно, что $m_n = (a_1, \dots, a_n)$. \square

Следствие 1

Для $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ существует линейное представление НОД, то есть, такие $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$, что $(a_1, \dots, a_n) = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n$.

Доказательство. • Докажем индукцией по k , что существует линейное представление $m_k = (a_1, \dots, a_k)$.

База $k = 2$ доказана в Теореме 4.

• **Переход $k \rightarrow k + 1$.** По Теореме 5 и индукционному предположению,

$$\begin{aligned} m_{k+1} &= (a_1, \dots, a_k, a_{k+1}) = (m_k, a_{k+1}) = y m_k + x_{k+1} a_{k+1} = \\ &= y(x'_1 a_1 + \dots + x'_k a_k) + x_{k+1} a_{k+1} = \\ &= (y x'_1) a_1 + \dots + (y x'_k) a_k + x_{k+1} a_{k+1}. \end{aligned}$$

Все коэффициенты $y x'_1, \dots, y x'_k$, очевидно, целые.



Определение

- Числа $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ называются **взаимно простыми**, если $(a_1, \dots, a_n) = 1$.
- Если любые два из a_1, \dots, a_n взаимно просты, эти числа называются **попарно взаимно простыми**.

Свойство 1

Если $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ попарно взаимно просты, то они взаимно просты.

Доказательство. Если $(a_1, \dots, a_n) = d > 1$, то $(a_1, a_2) \vdots d$, а значит, $(a_1, a_2) > 1$. □

Свойство 2

Если $a, b, c \in \mathbb{Z}$ и $(a, b) = 1$, то $(ac, b) = (c, b)$.

Доказательство. • Пусть $d = (c, b)$ и $f = (ac, b)$.

• Из $c \vdots d$ следует, что $ac \vdots d$. Значит, $d \in \text{OD}(ac, b)$ и по Теореме 2 $f \vdots d$.

• Из $b \vdots f$ следует, что $bc \vdots f$. Значит, $f \in \text{OD}(ac, bc)$.

• По Теоремам 3 и 2, $c = c(a, b) = (ac, bc) \vdots f$.

• Следовательно, $f \in \text{OD}(c, b)$ и по Теореме 2 $d \vdots f$.

• Из $d, f \in \mathbb{N}$, $d \vdots f$ и $f \vdots d$ следует, что $d = f$. □

Свойство 3

Если $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $(a, b) = 1$ и $ac \vdots b$, то $c \vdots b$.

Доказательство. По Свойству 2 $(c, b) = (ac, b) = b$ (последнее верно так как $ac \vdots b$). Следовательно, $c \vdots b$. □

Свойство 4

Пусть $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{Z}$, причем $(a_i, b_j) = 1$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$ и $j \in \{1, \dots, m\}$. Тогда $(a_1 \dots a_n, b_1 \dots b_m) = 1$.

Доказательство. • Докажем, что $(a_1 \dots a_k, b_j) = 1$ для всех $j \in \{1, \dots, m\}$ и $k \in \{1, \dots, n\}$ индукцией по k .

База $k = 1$: дано в условии.

Переход $k \rightarrow k + 1$: $(a_1 \dots a_k a_{k+1}, b_j) = (a_1 \dots a_k, b_j) = 1$ по свойству 2 (так как $(a_{k+1}, b_j) = 1$).

• Пусть $A = a_1 \dots a_n$. Докажем, что $(A, b_1 \dots b_k) = 1$ для всех $k \in \{1, \dots, m\}$ индукцией по k .

База $k = 1$: доказано выше.

Переход $k \rightarrow k + 1$: $(A, b_1 \dots b_k b_{k+1}) = (A, b_1 \dots b_k) = 1$ по свойству 2 (так как $(A, b_{k+1}) = 1$). □

Простые числа

Определение

- Натуральное число, имеющее ровно два натуральных делителя, называется **простым**.
- Натуральное число, имеющее более двух натуральных делителей, называется **составным**.
- Множество всех простых чисел обозначается \mathbb{P} .
- Если $p \in \mathbb{P}$, то натуральные делители числа p — это 1 и p .
- $1 \notin \mathbb{P}$. Любое натуральное число, большее 1 — простое или составное.

Определение

Пусть $a \in \mathbb{N}$. **Собственный делитель** числа a — это любой его делитель, отличный от 1.

Свойство 1

Если $a \in \mathbb{N}$ — составное, то существует разложение $a = bc$, где $b, c \in \mathbb{N}$, $a > b, c > 1$.

Доказательство. • Составное число a имеет собственный делитель $b < a$. Тогда $a = bc$, где $c \in \mathbb{N}$. Очевидно, $1 < c < a$.



Свойство 2

Пусть $a \in \mathbb{N}$, $a \neq 1$, а d — минимальный собственный делитель a . Тогда $d \in \mathbb{P}$.

Доказательство. • По определению, $d > 1$.

• Предположим, что d — составное. По свойству 1 тогда $d = bc$, где $d > b > 1$.

• Из $a \div d$ и $d \div b$ следует, что $a \div b$. Значит, $b < d$ — собственный делитель a , противоречие с выбором d . □

Теорема 6

Простых чисел бесконечно много.

Доказательство. • Предположим противное, пусть $\mathbb{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$.

• Пусть $m = p_1 \dots p_n + 1$, а q — наименьший собственный делитель m .

• По свойству 2 тогда $q \in \mathbb{P}$. Значит, $q = p_i$ для некоторого $i \in \{1, \dots, n\}$

• Так как $m - 1 \div p_i$, $(m, p_i) = (1, p_i) = 1$ (по свойству 2 НОДа). Значит, $m \not\div p_i$, противоречие. □

Свойство 3

Пусть $a \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{P}$. Тогда либо $a \vdots p$, либо $(a, p) = 1$.

Доказательство. • Так как $d = (a, p) \in \mathbb{N}$ и $p \vdots d$, то $d = 1$ или $d = p$.

• Во втором случае $(a, p) = p$, следовательно, $a \vdots p$. □

Свойство 4

Пусть $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ и $p \in \mathbb{P}$ таковы, что $a_1 \dots a_n \vdots p$.
Тогда существует такое $i \in \{1, \dots, n\}$, что $a_i \vdots p$.

Доказательство. • Предположим противное, пусть $a_i \not\vdots p$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$. По Свойству 3 тогда $(a_i, p) = 1$.

• По Свойству 4 взаимно простых чисел, тогда и $(a_1 \dots a_n, p) = 1$. Значит, $a_1 \dots a_n \not\vdots p$. Противоречие. □

Теорема 7

Любое натуральное число $a > 1$ раскладывается в произведение простых чисел. Такое разложение единственно с точностью до порядка сомножителей.

Доказательство. \exists . Индукция. База $n \in \mathbb{P}$ очевидна: подходит разложение $a = a$.

Переход. • Пусть a — составное, а для всех меньших чисел теорема доказана.

- Тогда $a = bc$, где $1 < b, c < a$. Следовательно, $b = p_1 \dots p_n$ и $c = q_1 \dots q_m$.
- Тогда $a = p_1 \dots p_n q_1 \dots q_m$ — искомое разложение.

! Предположим противное, пусть $a = p_1 \dots p_n = q_1 \dots q_m$ — два разложения a в произведение простых, причем a — наименьшее натуральное число, для которого разложение в произведение простых неединственно.

- Из $a = p_1 \dots p_n \div q_1$ следует, что $p_i \div q_1$ для некоторого $i \in \{1, \dots, n\}$. НУО $i = 1$.
- Из $p_1, q_1 \in \mathbb{P}$ и $p_1 \div q_1$ следует, что $p_1 = q_1$ (единственным делителем простого p_1 , большим 1, является само p_1).
- Тогда $a' = \frac{a}{p_1} = p_2 \dots p_n = q_2 \dots q_m$. Но разложение a' в произведение простых единственно с точностью до порядка сомножителей, откуда следует, что разложение a — тоже единственно с точностью до порядка сомножителей. □

Определение

Каноническое разложение — это представление натурального числа в виде $n = p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s}$, где $p_1, \dots, p_s \in \mathbb{P}$ различны.

Определение

Для $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $d(n)$ количество натуральных делителей n .

Теорема 8

Пусть $n = p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s}$ — каноническое разложение. Тогда выполнены следующие утверждения.

- 1) $n \vdots d$, если и только если $d = p_1^{\ell_1} \dots p_s^{\ell_s}$, где $0 \leq \ell_i \leq k_i$ для всех $i \in \{1, \dots, s\}$.
- 2) $d(n) = (k_1 + 1) \dots (k_s + 1)$.

Доказательство. 1) \Leftarrow . Очевидно.

\Rightarrow . • Если $n \vdots d$, то d не может иметь простых делителей, кроме p_1, \dots, p_s . Следовательно, $d = p_1^{\ell_1} \dots p_s^{\ell_s}$.

• Если $\ell_i > k_i$ для какого-то $i \in \{1, \dots, s\}$, то очевидно, что $n \nmid d$.

2) • Показатель степени простого числа p_i в каноническом разложении делителя $d \mid n$ можно выбрать $k_i + 1$ способами $(0, 1, \dots, k_i)$.

• Перемножаем количества вариантов для p_1, \dots, p_s и получаем доказываемую формулу. □

Теорема 9

Пусть $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{N}$, $p_1, \dots, p_s \in \mathbb{P}$ причем $a_i = p_1^{k_{i,1}} \dots p_s^{k_{i,s}}$ для всех $i \in \{1, \dots, m\}$ (некоторые из показателей могут быть равны 0). Тогда

$$(a_1, \dots, a_m) = p_1^{\min(k_{1,1}, \dots, k_{m,1})} \dots p_s^{\min(k_{1,s}, \dots, k_{m,s})}.$$

Доказательство. • По теореме 8, $d \mid a_t$, если и только если $d = p_1^{\ell_1} \dots p_s^{\ell_s}$, где $\ell_j \leq k_{t,j}$ для всех $j \in \{1, \dots, s\}$.

• Следовательно, $d \in \text{OD}(a_1, \dots, a_m)$, если и только если $d = p_1^{\ell_1} \dots p_s^{\ell_s}$, где $\ell_i \leq \min(k_{1,i}, \dots, k_{s,i})$ для всех $i \in \{1, \dots, s\}$.

• Теперь понятно, что наибольший элемент в $\text{OD}(a_1, \dots, a_m)$ вычисляется в точности по формуле из условия. □

Линейные диофантовы уравнения с двумя неизвестными

$$\bullet \quad ax + by = c, \quad (*)$$

где $a, b, c \in \mathbb{Z}$ — константы, $x, y \in \mathbb{Z}$ — неизвестные.

• Пусть $d = (a, b)$. Если $c \not\vdash d$, то $(*)$ не имеет решений.

• Далее $c \vdash d$. Пусть $a = da'$, $b = db'$, $c = dc'$. Тогда уравнение $(*)$ эквивалентно

$$a'x + b'y = c', \quad \text{где } (a', b') = 1. \quad (**)$$

• Существует линейное представление НОД: $a'x_0 + b'y_0 = 1$. Умножив на c' , получим $a'(x_0c') + b'(y_0c') = c'$.

Теорема 10

Решения уравнения $()$ представляются в виде $x = x_0c' + tb'$, $y = y_0c' - ta'$, где $t \in \mathbb{Z}$.*

Доказательство. • Будем работать с эквивалентным уравнением $(**)$. Проверим, что это действительно его решения:

$$a'(x_0c' + tb') + b'(y_0c' - ta') = a'(x_0c') + b'(y_0c') + a'tb' - b'ta' = c'.$$

- Пусть (x, y) — решение $(*)$. Тогда

$$a'x + b'y = c' = a'(x_0c') + b'(y_0c') \Rightarrow a'(x - x_0c') = b'(y_0c' - y).$$

- Тогда $a'(x - x_0c') \div b'$. Так как $(a', b') = 1$, откуда $x - x_0c' \div b'$. Пусть $x - x_0c' = tb'$.
- Аналогично, $y_0c' - y \div a'$. Пусть $y_0c' - y = sa'$.
- Тогда $a'tb' = b'sa'$, откуда $s = t$. □

- Пусть $m \in \mathbb{N}$, тогда нетрудно проверить, что $m\mathbb{Z} = \{mx : x \in \mathbb{Z}\}$ — идеал в \mathbb{Z} .

Теорема 11

Пусть I — идеал в \mathbb{Z} . Тогда $I = m\mathbb{Z}$, где $m \in \mathbb{N}_0$.

Доказательство. • Если $I = \{0\}$, то подходит $m = 0$.
Далее $I \neq \{0\}$.

- Пусть $a \in I$, $a \neq 0$. Тогда и $-a \in I$. Одно из чисел a и $-a$ — натуральное. Таким образом, $I' = I \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$.
- Тогда существует минимальный элемент в I' , обозначим его m . Докажем, что $I = m\mathbb{Z}$.
- Предположим противное, пусть $b \in I$, $b \not\equiv m$. Тогда $b = mq + r$, где $0 < r < m$ (теорема о делении с остатком).
- Так как $b, m \in I$, имеем $r = b - mq \in I$. Тогда $r \in I'$. Противоречие с минимальностью m . □

Теорема 12

Пусть $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Тогда существует линейное представление (a_1, \dots, a_n) , а $\text{OD}(a_1, \dots, a_n)$ состоит из всех делителей (a_1, \dots, a_n) .

Доказательство. • Пусть $I = \langle \{a_1, \dots, a_n\} \rangle$. Этот идеал состоит из линейных комбинаций чисел a_1, \dots, a_n .

- Очевидно, $I \neq \{0\}$. Тогда по Теореме 11 существует такое $d \in \mathbb{N}$, что $I = d\mathbb{Z}$ — состоит из кратных d .
- Так как $a_1, \dots, a_n \in I$, все они делятся на d , значит, $d \in \text{OD}(a_1, \dots, a_n)$.
- С другой стороны, $d \in I$, а значит, $d = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n$, где $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$.
- Значит, для любого $f \in \text{OD}(a_1, \dots, a_n)$ мы имеем $d \mid f$.
- Так как $d > 0$, d — наибольший элемент в $\text{OD}(a_1, \dots, a_n)$, то есть, $d = (a_1, \dots, a_n)$.



Определение

Пусть $m \in \mathbb{N}$; $a, b \in \mathbb{Z}$. Будем говорить, что a **сравнимо** с b по модулю m , если $a - b \vdots m$. Обозначения: $a \equiv_m b$ или $a \equiv b \pmod{m}$.

Лемма 1

Пусть $m \in \mathbb{N}$; $a, b \in \mathbb{Z}$. Следующие утверждения равносильны.

1° $a \equiv b \pmod{m}$.

2° $a - b \vdots m$.

3° a и b имеют одинаковые остатки от деления на m .

4° $a \equiv b \pmod{m\mathbb{Z}}$.

Доказательство. 1° \iff 2° по определению сравнения.

2° \iff 3° очевидно.

2° \iff 4° по определению главного идеала $m\mathbb{Z}$.



Свойство 1

Если $a \equiv_m a'$ и $b \equiv_m b'$, $a, x, y \in \mathbb{Z}$, то $ax + by \equiv_m a'x + b'y$.

Доказательство.

$$ax + by - (a'x + b'y) = x(a - a') + y(b - b') \div m.$$



Свойство 2

Если $a \equiv_m a'$ и $b \equiv_m b'$, то $ab \equiv_m a'b'$.

Доказательство. $ab - a'b' = (ab - a'b) + (a'b - a'b') = (a - a')b + a'(b - b') \div m.$



Свойство 3

Если $a \equiv_m b$ и $n \in \mathbb{N}$, то $a^n \equiv_m b^n$.

Доказательство. • Индукция по n . База $n = 1$ очевидна.

• Переход $n \rightarrow n + 1$. Так как $a^n \equiv_m b^n$ (по индукционному предположению) и $a \equiv_m b$, по свойству 2 имеем $a^{n+1} = a^n \cdot a \equiv_m b^n \cdot b = b^{n+1}.$



Свойство 4

Если $(a, m) = 1$ и $ab \equiv_m ac$, то $b \equiv_m c$.

Доказательство. $ab \equiv_m ac \Rightarrow a(b - c) \div m \Rightarrow b - c \div m \Rightarrow b \equiv_m c$ (по Свойству 3 взаимно простых чисел можно сократить на a).



Вычеты

- \equiv_m — отношение эквивалентности, так как это частный случай сравнения по модулю идеала (впрочем, можно несложно проверить напрямую).

Определение

Вычет по модулю m — это класс эквивалентности по \equiv_m .

- Перечислим тривиальные следствия Леммы 1.
- Каждый вычет по модулю m имеет вид $a + m\mathbb{Z}$ для некоторого $a \in \mathbb{Z}$.
- В каждом вычете все числа имеют одинаковый остаток от деления на m , а числа из разных вычетов имеют разные остатки.
- Существует ровно m вычетов по модулю m .

Определение

Числа $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{Z}$ — образуют **полную систему вычетов** по модулю m (сокращенно: **ПСВ** $(\bmod m)$), если каждый вычет по модулю m содержит ровно одно из них.

Лемма 2

$a_1, \dots, a_m \in \mathbb{Z}$ — ПСВ $(\bmod m)$, если и только если никакие два из них не сравнимы по модулю m .

Доказательство. \Rightarrow очевидно следует из определения.

\Leftarrow . Если есть m чисел, и никакие два из них не сравнимы по модулю m , то в каждом вычете по модулю m ровно одно из них. \square

Теорема 13

Пусть a_1, \dots, a_m — ПСВ $(\bmod m)$, $k, b \in \mathbb{Z}$, причем $(k, m) = 1$. Тогда $ka_1 + b, \dots, ka_m + b$ — ПСВ $(\bmod m)$.

Доказательство. • Достаточно проверить критерий из Леммы 2.

• Пусть $ka_i + b \equiv_m ka_j + b \iff k(a_i - a_j) \div m$.

• Так как $(k, m) = 1$, это означает, что

$a_i - a_j \div m \iff a_i \equiv_m a_j$, что не так. \square

НОД вычета и модуля. Приведенная система вычетов

- Если $a \equiv_m b$, то $a - b \vdots m$ и по свойству 2 НОД мы имеем $(a, m) = (b, m)$.
- Таким образом, для каждого вычета $\bar{a} = a + m\mathbb{Z}$ корректно определен НОД $(\bar{a}, m) := (a, m)$.

Определение

- 1) Вычет \bar{a} по модулю m называется **взаимно простым** с модулем m , если $(\bar{a}, m) = 1$.
 - 2) Для $m \in \mathbb{N}$ **функция Эйлера** $\varphi(m)$ — количество чисел от 1 до m , взаимно простых с m .
- !!! $\varphi(1) = 1$.
 - Существует ровно $\varphi(m)$ вычетов по модулю m , взаимно простых с m .

Определение

Числа $a_1, \dots, a_{\varphi(m)}$ образуют **приведенную систему вычетов** по модулю m , (сокращенно: **ПрСВ** $(\bmod m)$), если каждый вычет по модулю m , взаимно простой с m , содержит ровно одно из них.

Лемма 3

$a_1, \dots, a_{\varphi(m)} \in \mathbb{Z}$ — ПрСВ $(\bmod m)$, если и только если все эти числа взаимно просты с m и никакие два из них не сравнимы по модулю m .

Доказательство. \Rightarrow очевидно следует из определения.

\Leftarrow . Есть $\varphi(m)$ чисел, и никакие два из них не сравнимы по модулю m , а также есть ровно $\varphi(m)$ вычетов в ПрСВ (взаимно простых с m). Значит, в каждом вычете из ПрСВ ровно одно из этих чисел. \square

Теорема 14

Пусть $a_1, \dots, a_{\varphi(m)}$ — ПрСВ $(\bmod m)$, $k \in \mathbb{Z}$, причем $(k, m) = 1$. Тогда $ka_1, \dots, ka_{\varphi(m)}$ — ПрСВ $(\bmod m)$.

Доказательство. • Достаточно проверить критерий из Леммы 3.

- Так как $(k, m) = 1$ и $(a_i, m) = 1$, то $(ka_i, m) = 1$ (для всех $i \in \{1, \dots, \varphi(m)\}$).
- Если $ka_i \equiv_m ka_j$, то $a_i \equiv_m a_j$ по Свойству 4 сравнений, что не так. \square

Теорема 15

Пусть $m \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$, $(a, m) = 1$. Тогда $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.

Доказательство. • Пусть $r_1, \dots, r_{\varphi(m)}$ — ПрСВ \pmod{m} .

• По Теореме 14 тогда и $ar_1, \dots, ar_{\varphi(m)}$ — ПрСВ \pmod{m} .

• Введем обозначения $i_1, \dots, i_{\varphi(m)}$ так, что $r_1 \equiv_m ar_{i_1}$, \dots , $r_{\varphi(m)} \equiv_m ar_{i_{\varphi(m)}}$ и $\{1, \dots, \varphi(m)\} = \{i_1, \dots, i_{\varphi(m)}\}$.

• Пусть $R = r_1 \cdots r_{\varphi(m)}$. Тогда $(R, m) = 1$.

• Перемножая записанные выше сравнения, получаем

$$R \equiv r_1 \cdots r_{\varphi(m)} \equiv ar_1 \cdots ar_{\varphi(m)} \equiv a^{\varphi(m)} \cdot R \pmod{m}.$$

Сокращая на R , получаем $1 \equiv a^{\varphi(m)} \pmod{m}$. □

Лемма 4

Функция Эйлера *мультипликативна*, то есть, если $a, b \in \mathbb{N}$ взаимно просты, то $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

Доказательство. • Запишем числа от 1 до ab в таблицу $a \times b$ так, что в первой строке — числа от 1 до a , во второй — от $a + 1$ до $2a$, итд, в b строке — числа от $(b - 1)a + 1$ до ba .

- Все числа в i столбце принадлежат одному вычету $\bar{i} = i + a\mathbb{Z}$ по модулю a . Эти числа взаимно просты с a , если и только если $(i, a) = 1$.

- Вычеркнем все столбцы с номерами i , не взаимно простыми с a . Останутся ровно $\varphi(a)$ столбцов.

- Все числа, взаимно простые с ab , должны быть взаимно простыми и с a , они лежат в оставшихся $\varphi(a)$ столбцах.

- Рассмотрим оставшийся столбец, пусть числа в нем имеют вид $j, a + j, \dots, (b - 1)a + j$. Эти числа образуют ПСВ $(\text{mod } b)$ в силу теоремы 13 (так как получены из ПСВ $0, 1, \dots, b - 1$ умножением на a , взаимно простое с b и прибавлением j : $0 \rightarrow j, 1 \rightarrow a + j, \dots, b - 1 \rightarrow (b - 1)a + j$).

- Значит, среди чисел $j, a + j, \dots, (b - 1)a + j$ ровно $\varphi(b)$ взаимно простых с b . Остальные числа точно не взаимно просты с ab , вычеркнем их.
- Оставшиеся $\varphi(a)\varphi(b)$ чисел взаимно просты и с a , и с b , а значит, взаимно просты с ab . Значит, осталось ровно $\varphi(ab)$ чисел (все числа от 1 до ab , взаимно простые с ab). \square

Лемма 5

Если $p \in \mathbb{P}$, $n \in \mathbb{N}$, то $\varphi(p^n) = p^n - p^{n-1}$.

Доказательство. • Посчитаем количество чисел от 1 до p^n , не взаимно простых с p^n .

- Пусть $(a, p^n) = d > 1$. Так как $p^n \div d$, должно быть $d \div p$.
- Следовательно, числа от 1 до p^n , не взаимно простые с p^n — это в точности числа от 1 до p^n , кратные p . Их количество равно $\frac{p^n}{p} = p^{n-1}$. \square

Теорема 16

Если $n \in \mathbb{N}$ имеет каноническое разложение $n = p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}$, то

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_m}\right).$$

Доказательство. • Докажем индукцией по количеству простых делителей s , что $\varphi(p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s}) = \prod_{i=1}^s \varphi(p_i^{k_i})$.

• База для $s = 1$ очевидна.

• **Переход $s \rightarrow s + 1$.** Так как $(p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s}, p_{s+1}^{k_{s+1}}) = 1$, по Лемме 4 и индукционному предположению имеем

$$\begin{aligned} \varphi(p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s} \cdot p_{s+1}^{k_{s+1}}) &= \varphi(p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s}) \cdot \varphi(p_{s+1}^{k_{s+1}}) = \\ &= \left(\prod_{i=1}^s \varphi(p_i^{k_i}) \right) \cdot \varphi(p_{s+1}^{k_{s+1}}) = \prod_{i=1}^{s+1} \varphi(p_i^{k_i}). \end{aligned}$$

• Следовательно,

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^m \varphi(p_i^{k_i}) = \prod_{i=1}^m (p_i^{k_i} - p_i^{k_i-1}) = \prod_{i=1}^m p_i^{k_i} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = n \cdot \prod_{i=1}^m \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

Теорема 17

Для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{d \in \mathbb{N}, d \mid n} \varphi(d) = n.$$

Доказательство. • Рассмотрим все \mathbb{N} числа от 1 до n — их как раз n штук. Каждое из них имеет НОД с n — и этот НОД — делитель n .

• Для любого $d \mid n$ подсчитаем количество всех чисел из $\{1, \dots, n\}$, чей НОД с n равен d .

• Такие числа делятся на d , значит, их нужно искать среди $d, 2d, \dots, n = \frac{n}{d}d$. Так как

$$d = (kd, n) = (kd, \frac{n}{d}d) = d \cdot (k, \frac{n}{d}) \iff (k, \frac{n}{d}) = 1,$$

количество чисел из $\{1, \dots, n\}$, чей НОД с n равен d — это в точности количество таких $k \in \{1, \dots, \frac{n}{d}\}$, что $(k, \frac{n}{d}) = 1$, а это количество равно $\varphi(\frac{n}{d})$.

• Если d пробегает все натуральные делители n , то $d' = \frac{n}{d}$ также пробегает все натуральные делители n . Поэтому,

$$n = \sum_{d \in \mathbb{N}, d \mid n} \varphi(\frac{n}{d}) = \sum_{d' \in \mathbb{N}, d' \mid n} \varphi(d').$$



Кольцо вычетов

- Вычеты по модулю $m \in \mathbb{Z}$ — они же вычеты по модулю идеала $m\mathbb{Z}$ — образуют **кольцо вычетов** $\mathbb{Z}_m := \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Лемма 6

Обратимые элементы \mathbb{Z}_m — это в точности вычеты из ПрСВ $(\text{mod } m)$.

Доказательство. • Если $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$ обратим, то существует такой $\bar{b} \in \mathbb{Z}_m$, что $\bar{a}\bar{b} = \bar{1} \iff ab \equiv_m 1$. Тогда $(ab, m) = 1$, а значит и $(a, m) = 1$.

• Наоборот, пусть $(a, m) = 1$. По Теореме 13 тогда $0, a, 2a, \dots, (m-1)a$ — РСВ $(\text{mod } m)$. Значит, $\exists b : ab \equiv_m 1 \Rightarrow \bar{a}\bar{b} = \bar{1}$. □

• Если вычет \bar{a} обратим, то **обратный вычет** $(\bar{a})^{-1}$ единственен (это доказано в общем случае для кольца ранее, а в данном случае следует из доказательства Леммы 6).

Теорема 18

Если $p \in \mathbb{P}$, то \mathbb{Z}_p — поле.

Доказательство. Так как все некрратные p числа взаимно просты с p , ПрСВ $(\text{mod } p)$ — это все ненулевые вычеты. Тогда по Лемме 6, все ненулевые элементы \mathbb{Z}_p обратимы. □

- Пусть $a \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, причем $(a, m) = 1$. Как найти обратный вычет a^{-1} ?
- Пусть r — остаток от деления a на m . Тогда $0 \leq r < m$.
- Если $r = 0$, то $(a, m) > 1$ и обратного вычета не существует.
- Если $r > 0$, то с помощью алгоритма Евклида ищем $d = (r, m) = (a, m)$.
- Если $d > 1$, то обратного вычета не существует.
- Если $d = 1$, то при помощи (выполненного ранее) алгоритма Евклида ищем линейное представление НОД: $1 = ax + my$.
- Тогда $ax \equiv 1 \pmod{m}$, а значит, $(\bar{a})^{-1} = \bar{x}$ в \mathbb{Z}_m .

- Пусть $a, b \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$. Нужно решить (относительно x) сравнение

$$ax \equiv b \pmod{m}. \quad (*)$$

- Пусть $d = (a, m)$. Если $b \not\vdots d$, то очевидно, $(*)$ решений не имеет.

- Если $b \vdots d$, то пусть $a = a'd$, $b = b'd$, $m = m'd$. Тогда

$$(*) \iff ax - b \vdots m \iff a'x - b' \vdots m' \iff a'x \equiv b' \pmod{m'}. \quad (**)$$

- Так как $(a', m') = 1$, существует обратный вычет $(\overline{a'})^{-1}$ в $\mathbb{Z}_{m'}$.

- Пусть $s \in (\overline{a'})^{-1}$. Тогда $x \equiv b's \pmod{m'}$ — решение сравнения $(**)$, а значит, и исходного сравнения $(*)$.

Лемма 7

Пусть m_1, \dots, m_k — попарно взаимно простые натуральные числа, $m = m_1 \dots m_k$. Пусть $b \in \mathbb{Z}$ таково, что $b \div m_1, \dots, b \div m_k$. Тогда $b \div m$.

Доказательство. Пусть $n_\ell = m_1 \dots m_\ell$. Докажем индукцией по ℓ , что $b \div n_\ell$.

• **База** $\ell = 1$ очевидна.

Переход $\ell \rightarrow \ell + 1$. • По индукционному предположению $b = cn_\ell$, где $c \in \mathbb{Z}$.

• Так как $cn_\ell = b \div m_{\ell+1}$ и $(n_\ell, m_{\ell+1}) = 1$, по Свойству 3 взаимно простых чисел имеем $c \div m_{\ell+1}$.

• Тогда $c = dm_{\ell+1}$ и $b = dm_{\ell+1}n_\ell = dn_{\ell+1}$. □

Китайская теорема об остатках

Теорема 19

Пусть m_1, \dots, m_k — попарно взаимно простые натуральные числа, $m = m_1 \dots m_k$, $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Z}$. Тогда существует единственное такое $a \in \{0, 1, \dots, m-1\}$, что $a \equiv_{m_1} a_1, \dots, a \equiv_{m_k} a_k$.

Доказательство. \exists . • Пусть $n_\ell = m_1 \dots m_\ell$. Докажем индукцией по ℓ существование такого $b_\ell \in \mathbb{Z}$, что $b_\ell \equiv_{m_1} a_1, \dots, b_\ell \equiv_{m_\ell} a_\ell$.

База $\ell = 1$ очевидна.

Переход $\ell \rightarrow \ell + 1$. • Так как $(m_{\ell+1}, n_\ell) = 1$ по Теореме 13 числа $b_\ell, b_\ell + n_\ell, b_\ell + 2n_\ell, \dots, b_\ell + (m_{\ell+1} - 1)n_\ell$ — ПСВ $(\text{mod } m_{\ell+1})$ (они получены из ПСВ $0, 1, \dots, m_{\ell+1} - 1$ умножением на n_ℓ и прибавлением b_ℓ).

• Значит, среди этих чисел есть число $kn_\ell + b_\ell \equiv_{m_{\ell+1}} a_{\ell+1}$. Положим $b_{\ell+1} := kn_\ell + b_\ell$.

• Тогда $b_{\ell+1} - a_{\ell+1} \vdots m_{\ell+1}$.

• По построению $b_{\ell+1} - b_\ell \vdots n_\ell$. Так как по индукционному предположению $b_\ell - a_i \vdots m_i$ для всех $i \in \{1, \dots, \ell\}$, мы имеем $b_{\ell+1} - a_i = (b_{\ell+1} - b_\ell) + (b_\ell - a_i) \vdots m_i$.

- Итак, мы получили число b_k , удовлетворяющее всем требованиям теоремы, кроме одного: число должно быть от 0 до $m - 1$.

- Для получения такого числа a поделим b_k с остатком на m : пусть $b_k = mq + a$, $0 \leq a \leq m - 1$.

- Так как $a - b_k \vdots m \vdots m_i$ и $b_k - a_i \vdots m_i$, то и $a - a_i \vdots m_i$ для всех $i \in \{1, \dots, k\}$.

! • Предположим, что a и a' — два различных числа, удовлетворяющих условию. Тогда $a - a' \vdots m_i$ для всех $i \in \{1, \dots, k\}$.

- Так как m_1, \dots, m_k попарно взаимно просты, по Лемме 7 $a - a' \vdots m = m_1 \dots m_k$. Но $|a - a'| < m$, противоречие. □

- Из доказательства единственности в Теореме 19 видно, что все целые числа a , для которых $a - a_i \vdots m_i$ при всех $i \in \{1, \dots, k\}$ образуют в точности один вычет по модулю $m = m_1 \dots m_k$.

Алгоритмы поиска решения для КТО

- Пусть m_1, \dots, m_k — попарно взаимно простые натуральные числа, $m = m_1 \dots m_k$, $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Z}$.
- Мы ищем такое a , что $a \equiv_{m_1} a_1, \dots, a \equiv_{m_k} a_k$ (*).
- Будет использоваться алгоритм поиска обратного вычета, описанный выше.

Алгоритм 1.

- Пусть $m'_i = \frac{m_1 \dots m_k}{m_i}$. Тогда $(m'_i, m_i) = 1$.
 $b_i \in \{0, 1, \dots, m_i - 1\}$ — такое число, что $b_i \cdot m'_i \equiv 1 \pmod{m_i}$
 (мы найдем b_i с помощью алгоритма поиска обратного вычета).

Утверждение

$a = a_1 b_1 m'_1 + a_2 b_2 m'_2 + \dots + a_k b_k m'_k$ — решение (*).

Доказательство. Так как $m'_j \vdots m_i$ при всех $j \neq i$, для любого $i \in \{1, \dots, k\}$

$$a \equiv a_i b_i m'_i \equiv a_i \pmod{m_i}.$$



- Как сказано выше, все решения системы (*) — это в точности числа, сравнимые с a по модулю m .
- Поделив a на m с остатком, мы найдем решение системы среди чисел $0, 1, \dots, m - 1$.

Алгоритм 2

- Индукцией по s найдем x_s , удовлетворяющее первым s сравнениям:

$$x_s \equiv_{m_1} a_1, \dots, x_s \equiv_{m_s} a_s.$$

- База $s = 1$ очевидна: подойдет $x_1 = a_1$.

Переход $s \rightarrow s + 1$. • Пусть $n_s = m_1 \dots m_s$.

Будем искать решение в виде $x_{s+1} = x_s + c_s n_s$.

- Тогда $x_{s+1} - x_s \equiv m_j$ для всех $j \in \{1, \dots, s\}$, поэтому, x_{s+1} удовлетворяет первым s сравнениям.

- Подберем c_s так, чтобы $x_{s+1} \equiv a_{s+1} \pmod{m_{s+1}}$:

$$\begin{aligned} x_s + c_s n_s &\equiv a_{s+1} \pmod{m_{s+1}} \iff c_s n_s \equiv a_{s+1} - x_s \\ &\pmod{m_{s+1}} \iff c_s \equiv (a_{s+1} - x_s) \cdot (n_s)^{-1} \pmod{m_{s+1}}. \end{aligned}$$

- Так как $(n_s, m_{s+1}) = 1$, обратный вычет $(n_s)^{-1}$ существует и может быть найден с помощью описанного выше алгоритма.

- Второй алгоритм решения КТО на первый взгляд сложнее, чем первый, но требует применения $k - 1$ алгоритмов поиска обратного вычета (а не k): мы не ищем обратный вычет по модулю m_1 .

- Поэтому, целесообразно нумеровать модули так, чтобы m_1 оказался самым большим.

Определение

Функция Мёбиуса $\mu(n) :=$

$$\begin{cases} 1, & \text{если } n = 1, \\ (-1)^k, & \text{если } n = p_1 \dots p_k \text{ — произведение различных простых чисел,} \\ 0, & \text{если } n \text{ делится на квадрат простого числа.} \end{cases}$$

Лемма 8

Пусть $m, d \in \mathbb{N}$, $m \vdots d$. Тогда $\sum_{d \mid n \mid m} \mu\left(\frac{m}{n}\right) = \begin{cases} 1, & m = d, \\ 0, & m > d. \end{cases}$

(суммирование ведется по всем n , кратным d и делящим m).

Доказательство. • Пусть $k := \frac{m}{d} = p_1^{t_1} \dots p_r^{t_r}$ — каноническое разложение. Тогда

$$\sum_{d \mid n \mid m} \mu\left(\frac{m}{n}\right) = \sum_{s \mid p_1 \dots p_r} \mu(s) = \sum_{\ell=0}^r C_r^\ell (-1)^\ell = (1-1)^r$$

(так как ненулевое значение μ достигается только на произведениях различных простых).

• Наша сумма равна 0 во всех случаях, кроме $r = 0$ (а это в точности $k = 1 \iff m = d$). В последнем случае сумма равна 1.

Теорема 20

Пусть $f, g : \mathbb{N} \rightarrow$, причем $f(m) = \sum_{d|m} g(d)$. Тогда

$$g(m) = \sum_{n|m} \mu\left(\frac{m}{n}\right) f(n).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \sum_{n|m} \mu\left(\frac{m}{n}\right) f(n) &= \sum_{n|m} \mu\left(\frac{m}{n}\right) \cdot \sum_{d|n} g(d) = \\ &= \sum_{d|m} g(d) \cdot \sum_{d|n|m} \mu\left(\frac{m}{n}\right) = g(m) \end{aligned}$$

по Лемме 8.



Формула обращения Мёбиуса. Мультипликативный вариант

Теорема 22

Пусть K — поле, $f, g : \mathbb{N} \rightarrow K \setminus \{0\}$, причем $f(m) = \prod_{d|m} g(d)$.

Тогда $g(m) = \prod_{n|m} f(n)^{\mu(\frac{m}{n})}$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \prod_{n|m} f(n)^{\mu(\frac{m}{n})} &= \prod_{n|m} \left(\prod_{d|n} g(d) \right)^{\mu(\frac{m}{n})} = \\ &= \prod_{d|m} g(d)^{\sum_{n|m} \mu(\frac{m}{n})} = g(m) \end{aligned}$$

по Лемме 8.



Сумма мультипликативной функции по делителям числа

Теорема 23

Пусть $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ — мультипликативная функция,
 $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$. Тогда g — мультипликативная функция.

Доказательство. • Пусть $a, b \in \mathbb{N}$, $(a, b) = 1$.

• $a = p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s}$ и $b = q_1^{\ell_1} \dots q_t^{\ell_t}$ — канонические разложения.

• Так как $(a, b) = 1$, все эти простые различны и
 $ab = p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s} q_1^{\ell_1} \dots q_t^{\ell_t}$ — каноническое разложение.

• По Теореме 8, $d | ab \iff d = p_1^{k'_1} \dots p_s^{k'_s} q_1^{\ell'_1} \dots q_t^{\ell'_t}$, где
 $0 \leq k'_i \leq k_i$ для всех $i \in \{1, \dots, s\}$ и $0 \leq \ell'_j \leq \ell_j$ для всех
 $j \in \{1, \dots, t\}$.

• Следовательно, $d = d_a d_b$, где $d_a | a$ и $d_b | b$, причем
 $(d_a, d_b) = 1$ и такое представление единственно:

$d_a = p_1^{k'_1} \dots p_s^{k'_s}$ и $d_b = q_1^{\ell'_1} \dots q_t^{\ell'_t}$.

- Таким образом,

$$g(ab) = \sum_{d \mid ab} f(d) = \sum_{d_a \mid a} \sum_{d_b \mid b} f(d_a d_b) = \sum_{d_a \mid a} \sum_{d_b \mid b} f(d_a) f(d_b) =$$

$$\left(\sum_{d_a \mid a} f(d_a) \right) \left(\sum_{d_b \mid b} f(d_b) \right) = g(a)g(b). \quad \square$$

Определение

Для $n \in \mathbb{N}$ $\sigma(n)$ — сумма натуральных делителей n .

Теорема 24

Если $n = p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s}$, то $\sigma(n) = \frac{p_1^{k_1+1}-1}{p_1-1} \dots \frac{p_s^{k_s+1}-1}{p_s-1}$.

Доказательство. • Пусть $n_r = p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}$.

• Докажем индукцией по r , что $\sigma(n_r) = \frac{p_1^{k_1+1}-1}{p_1-1} \dots \frac{p_r^{k_r+1}-1}{p_r-1}$.

База для $r = 1$: делители $p_1^{k_1}$ — это $1, p_1, \dots, p_1^{k_1}$ и по формуле суммы геометрической прогрессии их сумма равна $\frac{p_1^{k_1+1}-1}{p_1-1}$.

Переход $r \rightarrow r+1$. Так как $(n_r, p_{r+1}^{k_{r+1}}) = 1$, а по Теореме 23 функция $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$ мультипликативна,

$$\begin{aligned} \sigma(n_{r+1}) &= \sigma(n_r p_{r+1}^{k_{r+1}}) = \sigma(n_r) \sigma(p_{r+1}^{k_{r+1}}) = \\ &= \left(\frac{p_1^{k_1+1}-1}{p_1-1} \dots \frac{p_r^{k_r+1}-1}{p_r-1} \right) \frac{p_{r+1}^{k_{r+1}+1}-1}{p_{r+1}-1}. \quad \square \end{aligned}$$

Первообразные корни из 1 в \mathbb{C}

Определение

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Число $\varepsilon \in \mathbb{C}$ такое, что $\varepsilon^n = 1$, но $\varepsilon^k \neq 1$ при натуральных $k < n$ называется *первообразным корнем из 1* степени n .

- Пусть $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1}$ — все корни степени n из 1,
 $\varepsilon_k = (\cos(\frac{2\pi k}{n}), \sin(\frac{2\pi k}{n}))$.

Теорема 25

- Существует в точности $\varphi(n)$ первообразных корней степени n из 1, это в точности такие корни ε_j , что $(j, n) = 1$.
- Если ε_j — первообразный корень степени n из 1, то $\varepsilon_j, \varepsilon_j^2, \dots, \varepsilon_j^n$ — все корни степени n из 1.

Доказательство. • По формуле Муавра, $\arg(\varepsilon_j^k) = \frac{2\pi kj}{n}$.
Разберем два случая.

Случай 1: $(j, n) = d > 1$.

- Тогда $m = \frac{n}{d} \in \mathbb{N}$, $m < n$ и $y = \frac{j}{d} \in \mathbb{Z}$.
- Следовательно, $\arg(\varepsilon_j^m) = \frac{2\pi mdy}{md} = 2\pi y$ и $\varepsilon_j^m = 1$. Это означает, что ε_j не является первообразным корнем из 1 степени n .

Случай 2: $(j, n) = 1$.

- Тогда аргументы $\varepsilon_j, \varepsilon_j^2, \dots, \varepsilon_j^{n-1}, \varepsilon_j^n$ — это $\frac{2\pi j}{n}, \dots, \frac{2\pi nj}{n}$.

- По Теореме 13, числа $j, 2j, \dots, nj$ — ПСВ $(\bmod n)$.

Значит, среди их остатков от деления на n каждый встречается ровно один раз.

- Тогда $\frac{2\pi \cdot j}{n}, \frac{2\pi \cdot 2j}{n}, \dots, \frac{2\pi \cdot nj}{n}$ — это в точности такие аргументы, как $\frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \dots, \frac{2n\pi}{n}$ (напомним, что аргумент не меняется при прибавлении 2π).

- Это означает, что $\varepsilon_j, \varepsilon_j^2, \dots, \varepsilon_j^{n-1}, \varepsilon_j^n$ — это в точности $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1}$ — все корни степени n из 1.

- Понятно, что $\varepsilon_j^n = 1$, значит, в меньших степенях ε_j не равен 1, то есть, это первообразный корень степени n из 1. □