Суммация

Университет ИТМО

2024

Преимущества

- Более краткий вид записи
- Более простая работа с выражением
- Все правила работают также и с мультипликацией $\prod$

Как мы убедимся, суммирование и произведение позволят записать даже те выражения, которые нельзя записать через троеточия в понятном виде, и более того, преобразовывать их.

Примеры

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{i=1}^{n} i$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

Смещение индекса заменой

Проблема. На самом деле, суммы $\sum_{i=5}^{n-3} i$ и $\sum_{i=2}^{n-6} (i+3)$ равны.

- Стоит придерживаться правила, что все индексы начинаются с одного и того же числа (например, с 0 или 1), чтобы не пропустить равенство в преобразовании.
- Для того, чтобы сместить индекс во второй сумме, введём замену $j = i + 3$ (чтобы начало шло с 5, как в первой сумме)
- Тогда $i = j - 3$
- Подставим $j - 3$ вместо i во вторую сумму и получим требуемое:

$$\sum_{i=2}^{n-6} (i+3) = \sum_{j=5}^{n-3} (j - 3 + 3) = \sum_{j=5}^{n-3} j$$

Бином Ньютона

Доказательство.

Докажем известное тождество $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$ индукцией по n.

База. При $n = 1$, очевидно, равенство верно.

Переход.

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n \cdot (a+b) = (a+b) \cdot \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i} =$$

$$= b^{n+1} + \sum_{i=0}^{n} \left(\binom{n}{i} a^i b^{n-i} + \binom{n}{i-1} a^i b^{n-i} \right) + a^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^i b^{n-i}$$

$\square$

Вложенные, условные суммы

- Предположим ситуацию: необходимо записать сумму от 1 до $i = 1..n$, каждое слагаемое которой является *суммой от 1 до i*
- Конечно, это можно записать как $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{i} j$.
- Читать такие выражения становится гораздо труднее.
- Поэтому полезно понимать, что все вложенные суммы можно сократить до набора равенств в одной суммации:

$$\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant i}} j$$

$$(a+b)^n = \sum_{i+j=n} \binom{i}{n} a^i b^j$$

Обратите внимание, что переменные i,j можно также выражать друг через друга.

Производная многочленов

- Докажем, что $(fg)' = f'g + fg'$
- Пусть $f = a_n x^n + \dots + a_0$, $g = b_n x^n + \dots + b_0$ (можно считать, что многочлены одной степени, иначе дополним коэффициенты нулями)

$$(fg)' = \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant 2n\\ j+k=i}} (a_j b_k x^i)' = \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant 2n\\ j+k=i}} \left(a_j b_k i x^{i-1}\right)$$

$$f'g + fg' = \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant 2n\\ j+k=i}} a_j b_k j x^{i-1} + \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant 2n\\ j+k=i}} a_j b_k k x^{i-1} = \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant 2n\\ j+k=i}} a_j b_k (j+k) x^{i-1} = (fg)'$$

$\square$

Перегруппировка сумм по делителям

Лемма

Пусть f, g *– произвольные функции. Тогда*

$$\sum_{d|n}\left(f(d)\sum_{d'|d} g(d')\right) = \sum_{d'|n}\left(g(d')\sum_{d'|d|n} f(d)\right)$$

Доказательство.

- Перегруппируем слагаемые: будем сначала суммировать по $d' \mid n$ ($d' \mid d \mid n \Rightarrow d' \mid n$).
- Далее суммируем по $d \mid n$, но, если $d \not\vdots\, d'$, то слагаемого с таким d не было в изначальной сумме.
- Записав это рассуждение, получим в точности утверждение леммы.

$\square$

Формула обращения Мёбиуса

Теорема 1

Пусть $f : \mathbb{N} \mapsto$. *Тогда* $f(n) = \sum\limits_{d|n} \left(\mu\left(\frac{n}{d}\right) \sum\limits_{d'|d} f(d') \right)$.

Доказательство.

Применим доказанную выше лемму:

$$\sum_{d|n} \left(\mu\left(\frac{n}{d}\right) \sum_{d'|d} f(d') \right) = \sum_{d'|n} \left(f(d') \sum_{d'|d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \right)$$

По одной из лемм в главе «целые числа», вложенная сумма обращается в 0 всегда, кроме случая $d' = n$. Стало быть,

$$\sum_{d'|n} \left(f(d') \sum_{d'|d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \right) = f(n), \quad \square$$

Обобщённый бином Ньютона

Теорема 2

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n = \sum_{i_1+i_2+\dots+i_k=n} \binom{n}{i_1, i_2, \dots, i_k} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_k^{i_k}$$

Доказательство.

Индукция по n.

База. При $n = 1$, очевидно, равенство верно.

Переход.

$$(a_1 + \dots + a_k)^n = (a_1 + (a_2 + \dots + a_k))^n = \sum_{i+j=n} \left(\binom{n}{i} a_1^i (a_2 + \dots + a_k)^j \right) =$$

$$= \sum_{\substack{i+j=n \\ i_2+i_3+\dots+i_k=j}} \left(a_1^i a_2^{i_2} \dots a_k^{i_k} \cdot \binom{n}{i} \binom{j}{i_2, i_3, \dots, i_k} \right)$$

Конец доказательства

- Остаётся заметить, что нам нужно лишь доказать, что

$$\binom{n}{i}\binom{j}{i_2, i_3, \ldots, i_k} = \binom{n}{i, i_2, \ldots, i_k}$$

.

- В то же время, $j = n - i$.
- Раскрыв число сочетаний и полиномиальный коэффициент, получим:

$$\frac{n!}{i!\,(n-i)!} \cdot \frac{(n-i)!}{i_2! i_3! \ldots i_k!} = \frac{n!}{i! i_2! \ldots i_k!} = \binom{n}{i, i_2, \ldots, i_k}$$

$\square$

Сумма первообразных корней из 1

Теорема 3

Сумма первообразных корней из 1 по модулю n равна $\mu(n)$

Доказательство.

Будем пробегать по всем $k = 1..n$ и, если $(k,n) \neq 1$, обращать слагаемые в 0 по свойству суммы Мёбиуса.

$$\sum_{(k,n)=1} e^{i\frac{2\pi k}{n}} = \sum_{k=1}^{n} \left(e^{i\frac{2\pi k}{n}} \sum_{1|d|(k,n)} \mu(d) \right) = \sum_{(k,n)|n} \left(e^{i\frac{2\pi k}{n}} \sum_{1|d|(k,n)} \mu(d) \right) =$$

$$\overset{lem}{=} \sum_{d|n} \left(\mu(d) \sum_{d|(k,n)|n} e^{i\frac{2\pi k}{n}} \right) = \sum_{d|n} \left(\mu(d) \sum_{d|(k,n)} e^{i\frac{2\pi k}{n}} \right)$$

$$= \sum_{d|n} \left(\mu(d) \sum_{(k,n)=d,2d,3d\ldots,(n/d)d} e^{i\frac{2\pi k}{n}} \right) = \sum_{d|n} \left(\mu(d) \sum_{k=d,2d,3d\ldots,(n/d)d} e^{i\frac{2\pi k}{n}} \right)$$

Конец доказательства

$$\sum_{d|n}\left(\mu(d)\sum_{(k,n)=d,2d,3d\dots,(n/d)d} e^{i\frac{2\pi k}{n}}\right)=\sum_{d|n}\left(\mu(d)\sum_{k=d,2d,3d\dots,(n/d)d} e^{i\frac{2\pi k}{n}}\right)=$$

$$=\sum_{d|n}\left(\mu(d)\sum_{(k,n)=d,2d,3d\dots,(n/d)d} e^{i\frac{2\pi k}{n}}\right)=\sum_{d|n}\left(\mu(d)\sum_{\ell=1}^{n/d} e^{i\frac{2\pi \ell d}{n}}\right)=\sum_{d|n}\left(\mu(d)\sum_{\ell=1}^{n/d} e^{i\frac{2\pi \ell}{n/d}}\right)$$

Заметим, что вложенная сумма обращается в 0 всегда, кроме случая $n=d$ (как сумма корней из 1). Значит,

$$\sum_{d|n}\left(\mu(d)\sum_{\ell=1}^{n/d} e^{i\frac{2\pi \ell}{n/d}}\right)\overset{n=d}{=}\mu(n)\cdot e^{i\cdot 2\pi}=\mu(n)$$

$\square$