

Теория графов. Теорема Холла (о свадьбах)

Д. В. Карпов

Extended edition

2023

Теорема (Р.Халл, 1935)

В двудольном графе $G = (L, R, E)$ есть паросочетание, покрывающее долю L , если и только если:

$$\forall A \subset L : |A| \leq |N_G(A)|$$

Доказательство методом чередующихся путей.

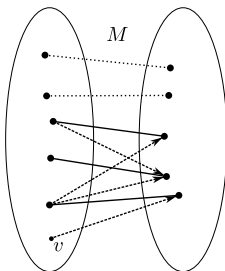
\Rightarrow Очевидно.

\Leftarrow Обсудим идею доказательства. Будем добавлять рёбра в паросочетание M алгоритмом. Зная, что $\forall A \subset L : |A| \leq |N_G(A)|$, на шаге $k \leq n$ (пусть $|L| = n$) будем доказывать, что можно добавить ещё одну вершину в наше паросочетание. В итоге получим паросочетание, покрывающее L . Докажем это индукцией по шагам алгоритма.

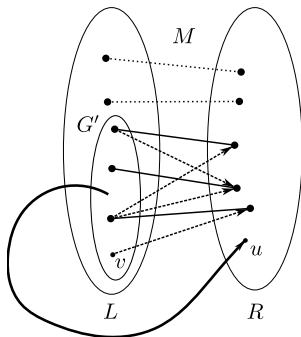
База: $k = 1$. Тогда выберем произвольную вершину и применим к ней условие Холла: $|N_G(A)| \geq 1$. Значит, её можно соединить с какой-то вершиной из R .

Переход. Выберем ещё не насыщенную паросочетанием M вершину v , и рассмотрим все вершины, достижимые из неё (граф G'), при условиях:

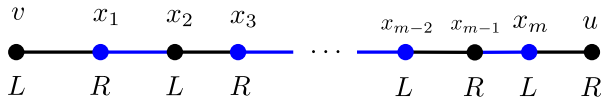
- ▶ Из L в R можно ходить по любым рёбрам.
- ▶ Из R в L можно ходить *только по рёбрам построенного ранее паросочетания*.



- ▶ Очевидно, что G' – подграф графа G .
- ▶ Применим к нему условие Холла. Тогда вершин в $R(G')$ не менее, чем в $L(G')$, откуда найдётся ещё хотя бы 1 вершина, с которой G' связан. Обозначим её u .



- ▶ Если $v \rightsquigarrow u$, то соединяем их и получаем требуемое. Иначе рассмотрим vu путь, предварительно покрасив рёбра паросочетания **синим**.



- ▶ Остаётся заметить, что vu -путь удлиняющий, а значит, если мы заменим паросочетание на паросочетание из чёрных рёбер, то, во-первых, оно останется паросочетанием, а во-вторых, мы насытим вершину v и оставим насыщенными уже существовавшие вершины.
- ▶ Таким образом, мы по индукции доказали, что при условии Холла можно добавить $|L|$ вершин в паросочетание \Rightarrow паросочетание M покрыло L . \square