Black-Scholes Option Pricing Model

Black-Scholes 模型是什麼？

Black-Scholes 模型是利用數學模型假設下替選擇權合約定價，模型目的在衡量未來時間點金融商品價格的變動狀況，且模型假設未來金融產品價格（如：股票、期貨）會服從對數常態分配。給定這個假設下，模型合併考量幾項重要條件，推導出歐式選擇權之理論價格。

Black-Scholes 模型基礎條件

首先最重要的模型假設資產價格服從幾何布朗運動有常數的期望值和變異數，在面對歐式股票選擇權時，模型考率無風險利率（假設投資人為風險中立），合約到期時間，合約執行價和股利分配狀況。

重要假設：

- 歐式選擇權定價模型，合約只有在到期日可以被執行
- 合約期間資產不分配股利（所以有確定股利政策時，資產現價需扣除股利折現）
- 市場是有效率的
- 投資人投資沒有交易成本
- 無風險利率和資產價格的變異數已知且固定
- 報酬呈現常態分配

模型公式推倒

價格服從幾何布朗運動，隨機微分方程可以表示成

$$dS_t := \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t,\ 0 \leq t \leq T$$

S_t :資產在時間 t 的價格
μ := 股價年化收益率期望值（constant drift rate）
σ := 股價年化波動度 （constant volatility）
B_t := 標準布朗運動

$$S_t = S_0 \exp\left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t \right\}$$

S_0 移項，左右同取自然對數。

$$\Rightarrow \ln \frac{S_t}{S_0} = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t$$

由於 B_t 為標準布朗運動，定義可知期望值為零，變異數為 t

推論結果

$$\ln\frac{S_T}{S_0} \sim \mathcal{N}((\mu - \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma^2 T)$$
$$\Rightarrow \ln S_T \sim \mathcal{N}(\ln S_0 + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma^2 T)$$

C = max(0, S – K)

$$C = S_t N(d_1) - K e^{-rt} N(d_2)$$

where

$$d_1 = \frac{ln\frac{S_t}{K} + (r + \frac{\sigma_v^2}{2})\ t}{\sigma_s\ \sqrt{t}}$$
$$d_2 = d_1 - \sigma_s\ \sqrt{t}$$

在 Put Call Parity 底下，$C + Xe^{-rt} = P + St$

可推導出

P = $Ke^{-rt}N(-d2) - StN(-d1)$

where

$$d_1 = \frac{ln\frac{S_t}{K} + (r + \frac{\sigma_v^2}{2})\ t}{\sigma_s\ \sqrt{t}}$$
$$d_2 = d_1 - \sigma_s\ \sqrt{t}$$