利率期限結構 (Term Structure of Interest Rates)

評價利率衍生性商品時，使用 Black-Scholes Model 的假設之下，我們假設連續複利為一致，但是很明顯地我們在真實市場中，利率是會改變的與我們的模型假設不同，我們的解決方式就是將利率模型化，建立短期利率變動(instantaneous short rate)的過程，在風險中立世界下定義出目前的利率期間結構。

這次的操作我在看完老師的講義之後還是沒有掌握全部的邏輯，因此透過參照教授講義上附上之線上資源去做實際程式碼上面的邏輯，幫助我理解更多。

操作方式：蒙地卡羅法

使用 for loop 去重複操作下面的狀況，在不同路線下得到不同 payoff 和利率走勢。

一、利率結構建構方法使用 Hull Whit Term Structure Simulations

短期利率變動：

$$dr = (\theta(t) - ar)dt + \sigma dW$$

Where,

a ：利率變動的速率
dt：一段很小的時間變動
σ：過去一段利率的標準差
dW ：Weiner process，標準布朗運動

$$\theta(t) = \frac{\partial f(0,t)}{\partial t} + af(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at})$$

Where,
$f(0,t)$：0 到 t 的 forward rate

作業裡使用 Quantlib 套件

二、得到不同路徑下的利率結構之後，將利率結構套入幾何布朗運動去預估股價

簡單帶過幾何布朗運動，假設未來股價符合 lognormal dist.

$$Y(t) \cong e^{X(t)}$$

Where,

$X(t)$服從 (μ, σ) 的布朗運動

$$dX = \mu dt + \sigma dW$$

因此未來價格會服從以下公式

$$\ln \frac{S_T}{S_0} \sim N\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma^2 T\right)$$

$$=> \ \ln S_T \ \sim N\left(\ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma^2 T\right)$$

由於將利率期間結構代入，且建立在風險中立世界，所以上述公式的 $\mu := r(t)$

三、假設選擇權履約價為 K，計算選擇權在每一條路線的 Payoff 狀況

在不同路線下，得出買權和賣權之獲利狀況，最後利用利率期間結構下計算得到 Spot rate 將每條路線下的 Payoff 折現至時間 0，計算選擇權價格。