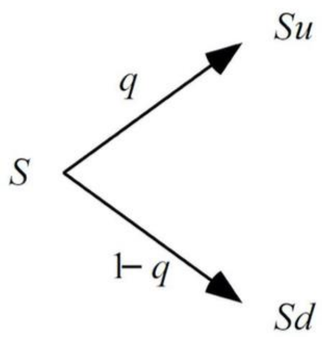
Binomial Option Pricing Model

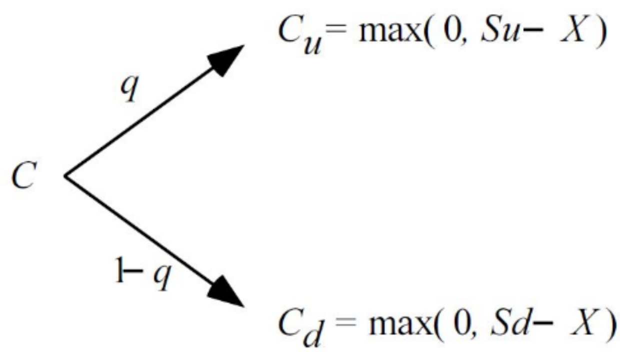
基本假設

- 時間不連續可以被一段段衡量
- 股價呈現隨機漫步
- 股價不上則下，資產現價 S 有 q 的機率走到 S*u，剩下有 (1 - q) 的機率走到 S*d，且 0 < q < 1 和 d < u
- S：現價，u：漲幅，d：跌幅，X：執行價，r：無風險利率和 n：期數



歐式買權（單一時間）

- 當現貨價格上升，買權價值：Cu = Max(0, Su – X)
- 當現貨價格下降，買權價值：Cd = Max(0, Sd – X)



基本想法

- 無套利機會的市場
- 要複製一組可以產生與選擇權相同 payoff 的投資組合
- 因為無套利的設定，所以兩種投資方式 payoff 必須相同
- 由此計算選擇權之合理價格

複製投資組合

不可以拿自己的錢出來，所以採取發債券借錢去買股票

<u>時間 0</u>

- 買入 h 股股票（h，aka hedge ratio or delta）
- 投資 B 元債卷（利率 R 為無風險利率）

成本結構：h*S + B

<u>時間 1</u>

- 由無套利機會假設可知，此投資組合要和持有買權產生相同收益

列式：

$$hSu + RB, \quad \text{up move,} \qquad\qquad hSu + RB = C_u,$$
$$hSd + RB, \quad \text{down move.} \qquad\qquad hSd + RB = C_d.$$

化簡出：

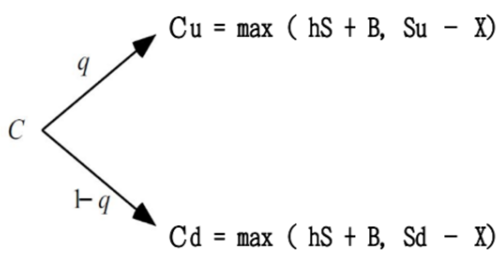
$$\begin{aligned} h &= \frac{C_u - C_d}{Su - Sd} \geq 0, \\ B &= \frac{uC_d - dC_u}{(u-d)\,R}. \end{aligned}$$

由時間 1 回推時間 0，買權價值應該和複製之投資組合在時間 0 有相同價值

C = hS + B

美式買權

不同於歐式買權，美式買權可以在到期時間之前，每一個時間點都可以執行買權



偽概率（Pseudo Probability）

$$hS + B = \frac{\left(\frac{R-d}{u-d}\right) C_u + \left(\frac{u-R}{u-d}\right) C_d}{R}.$$

$$pSu + (1-p)\,Sd = RS.$$

$$p \triangleq \frac{R-d}{u-d}.$$

總結

當我們推倒至這個步驟以後，二項期權定價模型我們推倒出這個等式，中間未知數只剩下 C 買權價格一個，其他變數都是已知，從此我們可以採用 backward induction，推倒回上一期的買權價格。因此不管有多少期，都可以以此類推做計算。