基于计算机仿真对“同心协力”策略研究

摘要

同心鼓属于团队合作项目，该项目的目标是使连续颠球次数尽可能多。本文属于物理问题，依据成员的发力时机和力度等因素，建立了仿真模拟模型，对“同心协力”策略进行了研究。

对于问题一：在每个队员可以精准控力下，给出团队最佳协作策略和颠球高度。在精准控力下，球能够连续准确地被反弹，要使颠球次数尽可能的多，要求所有队员消耗的能量最小，即每位队员最省力。因颠球高度越低越省力，所以规定竖直向上发力且颠球高度为 40cm 是最佳协作策略。在鼓的重力与拉力合力平衡以及忽略碰撞能量损失，我们可以推出球-鼓碰撞系统动量、动能守恒。据此列方程求出球和鼓碰撞前后的速度，反推出鼓从初始位置到碰撞点所需能量，进而算出合力的大小。然后，根据合力与某时刻绳子与水平方向的夹角，求出从开始发力到碰撞后每个时刻每个成员的发力大小。对绳长、团队参与人数、相关距离进行遍历，求出以发力最小为目标的优化结果。策略为：参与成员 8 人，绳长 0.79m，其拉力情况见表 2。最后，我们改变球反弹高度进行灵敏度分析，发现拉力的改变率小于 1%，说明该模型比较稳定。

对于问题二：基于实际情况，建立关于发力情况与鼓面倾角的模型。首先我们将鼓进行局部的受力分析，受力点受到人的拉力，鼓自身重力以及周围各点拉力对该点的影响，其中该点受到的重力等于在该点所受拉力占总拉力的比重乘以鼓的总重力。由于受力点的拉力使鼓面的倾角发生改变，加速度也随之改变。为了简便计算，我们定义了单位时间，即在单位时间内加速度不变。然后运用运动学公式，表示出每一时刻某点的速度和位置，通过迭代更新高度和加速度，得到队员发力情况与鼓面倾角的关系，并求出 t=0.1s 时的鼓面倾角，前三种情况鼓面倾角分别为 0.2493°、0.2312°、0.1690°，其它情况的鼓面倾角详见表 3。最后，通过灵敏度分析说明我们模型稳定性较好。

对于问题三：结合问题二的模型，判断问题一的策略是否需要调整。由于问题一的拉力为变力，在现实情况中难以控制好力度和时机，因此我们将问题一策略中绳子的拉力由变力转为恒力。将恒力代入模型一中求解，发现球的反弹高度为 30.64cm，小于 40cm，不能完成颠球任务，故需要对问题一的策略进行调整，求出可以使排球完成颠球任务的最小拉力。考虑到实际情况中人的拉力是上下浮动的，为能够完成颠球任务，故考虑浮动最大的情况，对绳子上的拉力进行上下 10%调整，使得拉力仍可以完成任务，最终求出绳子上的拉力为 13.1533N。最后，通过灵敏度分析发现我们的模型比较稳定。

对于问题四：调整球为竖直状态弹跳，给出精确控制条件下队员的发力时机和力度，并分析现实情况中的实施效果。由于问题四的解并不唯一，首先我们对问题进行了简化，规定了鼓较绳子水平的初始位置、碰撞点的位置、初始时刻的倾斜角度等。然后根据运动学方程和偏移角度，我们可以求出球在第一次碰撞前后的速度。因第二次碰撞后，球的速度方向为竖直，且运动高度为 40cm，所以可以求出碰撞前的速度；根据球碰撞前后的速度与竖直方向的夹角，可以列出竖直方向上的动能、动量定理，求出鼓第二次碰撞前后的速度，鼓从初始时刻到第二次碰撞前这段时间的加速度；根据初始时刻倾斜两端与重力平衡，两端合力的加速度为一个定值，这两个等式联立可求出两端绳子拉力值，最终根据力的影响求出了 10 个点的受力情况。发力时机为同时发力，其部分初始值为：43.22N,41.80N,39.19N，完整值见表 7，具体值见图 5。实际情况会产生倾角。

最终，我们对模型的优缺点进行了评价，并探讨了仿真模型的改进方向和推广前景。

关键词：同心鼓　　计算机仿真　　守恒定律　　运动学方程

一、问题的背景

1.1 问题的背景

“同心协力”（又称为“击鼓颠球”或“同心鼓”）属于一种团队协作项目。虽然活动规则十分简单，但实际操作需要极高的配合能力，并且需要每位成员齐心协力才能完成。此项目好比“众人拾柴火焰高，众人齐心能填海”，为了共同的目标，各位成员要齐心协力击鼓颠球，才能更高效的完成此项目，这是考验默契，耐心，合作的一个项目。在实际情况中，研究每位成员的发力时机，力度和方向提高团队的效率和应用于物理平衡方面有着重要的意义。

1.2 同心鼓的介绍以及项目规则

同心鼓的鼓面是由牛皮制成的，鼓身中间沿圆周均匀的固定多根绳子，且绳子长度相同。项目开始时，排球从鼓面中心上方 0.4m 处竖直下落，队员共同发力将球颠起，使求在鼓面上连续的被颠起，不能落地，否则项目失败，且球被颠起的高度至少离开鼓面 0.4m 以上，若低于 0.4m，则项目失败。

二、问题的重述

“击鼓颠球”项目所用排球质量 270g，鼓的质量 3.6kg，鼓面直径为 0.4m，鼓身高度为 0.22m。队员人数至少为 8 人，队员之间的距离至少为 0.6m。最终目标是让连续颠球次数尽可能的多。

我们建立了相关模型并解决了如下问题：

问题一：在理想状态下，每个人对用力方向，时机和力度都可以紧缺控制，求出团队最佳的协作策略，并给出相应的颠球高度。

问题二：在队员发力时机和力度存在一定的误差时，建立队员发力时机和力度与某一时刻鼓面倾角关系的模型。如果队员人数为 8 人，绳长为 1.7m，鼓面初始位置比绳子水平时低 0.11m，根据给出的不同发力时机和力度表，求出 0.1s 时鼓面的倾斜角度。

问题三：根据问题二建立的模型，结合现实，考虑问题一的策略是否需要调整，若需要，该如何调整？

问题四：假设团队成员为 10，绳长为 2m，球的反弹高度为 60cm，相对竖直方向产生 1°的倾斜角度，且在两位队元之间的夹角比为 1:2。使球调整为竖直状态，求出可精确控制下队员发力时机和力度，并分析在现实情况中次调整的效果。

三、问题的假设

（1）假设忽略空气阻力，只考虑排球自身的重力，做自由落体运动。
原因：若考虑排球所受的空气阻力，需要讨论空气阻力与速度几次幂关系，此出未考虑空气阻力，简化了模型。
（2）假设颠球开始后，鼓面不会落地。
原因：如果鼓面落地违反了原有的规则，失去了设计该项目的意义。
（3）假设鼓面和球面绝对光滑，忽略鼓与球碰撞产生的热量以及其他能量损失。
原因：碰撞问题分为弹性碰撞，非弹性碰撞和完全非弹性碰撞，由于表面光滑，可近似看成没有能量损失的碰撞。
（4）假设重力加速度 g=9.8m/s。
（5）假设将鼓作为一个刚体处理。
原因：因为刚体表面不发生形变，碰撞后质量和密度不发生改变，故作为刚体处理。

四、主要符号说明

符号	符号说明
F_i	第 i 个人对绳子的拉力
v_1	鼓碰撞前的速度
$v_1^{'}$	鼓碰撞后的速度
v_2	排球碰撞前的速度
$v_2^{'}$	排球碰撞后的速度
m_2	排球的重量
x	鼓中心的水平线到手水平处的距离
β	绳线与鼓中心线的夹角
l	绳的长度
F_j	在鼓的 j 点受到拉力的大小
a_{ij}	第 j 个点在第 i 个时刻的加速度

注：其他符号详见文中说明。

五、问题的分析

5.1 问题一的分析

由于每个人都可以精确控制自己的出力方向，时机和力度，所以，只要同时竖直向上用力，符合临界的力度，就可以使颠球高度大于 40cm，所以第一题的策略有无数种，为了体现策略的优越性，我们定义团队的最佳协作策略为团队花费最少能量完成连续颠球任务。从能量的角度来看团队所消耗的能量用于鼓面克服重力做功和用于合力做功以及给与小球能量使得小球可以向上运动 40cm。不考虑能量损失，鼓的重力与拉力平衡，碰撞时间极短的条件下，有球-鼓系统碰撞前后碰撞动量、动能守恒。可列出方程求出球和鼓碰撞前后的速度，从而反推出，鼓从初始位置到碰撞点所需能量进而算出合力的大小。由于随着鼓的上升，绳子与水平方向的夹角逐渐减小，而减少的大小是一个与鼓上升高度有关的函数，夹角可根据运动方程求出。

最后根据合力与某时刻绳子与水平方向的夹角，求出从开始发力到碰撞后每个时刻各个成员的发力大小。对绳长、鼓中心到手的水平距离、鼓面到碰撞点的水平距离、团队参与人数进行遍历，求出发力中最小力的策略为第一问的最终结果。

5.2 问题二的分析

考虑实际情况，建立队员用力与时间和鼓面倾斜角度关系的模型。鼓面产生倾斜是因为在同一竖直平面内，两端绳子牵引鼓向上的力不均衡，所以倾斜的角度与鼓身的绳子牵引力的竖直向上的分力有关。首先我们对每处绳子与鼓的交界处做受力分析，了解到若鼓面发生倾斜则鼓与水平的夹角在时刻变化，从而导致每个时刻绳子拉力的竖直向上的分力是不同的。因此，我们定义了“单位时间”，即假定在单位时间内鼓的一端可以向上运动，且绳子的倾斜角度不发生改变，进而求出每个单位时间鼓的来自绳子拉力的竖直分力 Fj。但在抬起鼓的一角时，该点竖直向上的力会对周围角做出影响，所以绳子竖直向上向下的力要考虑该点受到的拉力、其他点发力对该点的影响的力以及重力。我们由初始的点的速度，发力大小和初始鼓面的角度，求出单位时间后 8 个点的高度，由正弦公式求出单位时间内倾斜的角度，然后更新高度，鼓面倾斜角度，8 个点单位时间后的速度，带入下一次迭代公式中，最终经过多次单位时间遍历，算出达到 0.1s 时

的鼓面倾斜角度。

5.3 问题三的分析

在现实情形中，根据问题二的模型考虑是否需要调整问题一的策略。由于问题一策略为发力力度精确，但在现实生活中人们无法精确自己的力道，导致合力小于用力值，从而小球无法反弹 40cm 完成任务；在现实生活中团队用力不均匀导致小球距离竖直中心偏移较大的角度使球落地，而项目失败，所以我们需要调整对发力大小进行调整。我们对绳长、鼓中心距离手的水平高度、人数和发力大小进行遍历，我们设每个人对绳子施加一个恒力，使得小球可以颠起的高度≥40cm,目标函数即总和的拉力最小。我们首先对绳子上的恒力以 0.0001N 为步长，进行遍历，程序实现中为了求出碰撞点与鼓球碰撞前速度，引用问题二模型中所采用的“单位时间”，根据动量守恒和动量定理，求出碰撞后的速度，判断碰撞后球速度大于等于 $\sqrt{0.8g}$ ，即退出遍历，输出此时的得到的 F 值，即为第一个满足要求的 F。最佳策略即为团队每位成员都施加力 F。

但在现实生活中每个人的发力大小会发生改变假设上下 10%波动，所以要考虑最坏情况即所有人的 F 都在实际情况中只使用了 0.9F。这样会使得颠球未超过游戏规则的 40cm，所以将最佳 F 调整为 F/0.9.这样即使在最坏情况下也能成功颠起球超过 40cm。

5.4 问题四的分析

由于球从鼓面弹出只收到在重力影响，所以根据题目给出的球的倾斜角度与上升高度，我们可以求出在竖直方向上球第一次碰撞后的初始速度根据偏移角度可求出球在第一次碰撞后的速度，由于假设中下一次的碰撞点与上一次碰撞点的水平高度相同，所以可求出第二次碰撞后的速度。由于在第二次碰撞后，球的速度为竖直，且规定颠球的高度为 40cm，所以可以求出碰撞前的速度，有了球碰撞前后的速度与与竖直方向的夹角，因此可以列出竖直方向上的动能动量定理，求出鼓第二次碰撞前后的速度，根据运动学方程，可以求出鼓从初始时刻到第二次碰撞前这段时间的加速度，根据初始时刻倾斜两端与重力平衡 倾斜两端二者合力的加速度为一个定值这两个等式列出方程可求出两端绳子拉力值，最终根据力的影响求出了 10 个点的受力。

六、模型的建立与求解

6.1 问题一：理想状态下的团队最佳协作策略

6.1.1 前提条件

（1）定义：球被颠起的高度：从碰撞点开始向上运动的距离。

（2）颠球高度的确定

在完成连续颠球次数尽可能多的情况下，团队的最佳协作方案为所有队员消耗的能量最小，在满足颠球最低高度的前提下，弹起高度越低越好，故颠球高度确定为 40cm。

（3）用力方向、时机的规定

因为每位队员之间需要配合发力，共同作用于鼓使鼓上升，排球被反弹，故每位成员竖直向上并且同时发力时最省力，且每位成员无需移动位置。

6.1.2 模型的建立

（1）决策变量

F_i：第 i 个人对绳子的拉力$(i>0)$。

（2）目标函数

在理想条件下，每个队员精确控制用力方向和角度，即每次鼓和球碰撞时，击中鼓面的正中心，在满足击球高度的前提下，可以一直持续颠球。在完成连续颠球次数尽可能多的情况下，团队的最佳协作方案为所有队员消耗的能量最小，即每位队员最省力，可以持续的时间更长，颠球次数更高。所以得到优化模型的目标函数为：

$$\min f = nF_i \tag{1}$$

（3）约束条件

鼓的初始状态为：

$$nF_0 \sin\alpha = m_1 g \tag{2}$$

其中，F_0为初始时刻队员对绳子的拉力；m_1为鼓的重量。

$$\sin\beta = \frac{x}{l} \tag{3}$$

x 为鼓中心的水平线到手水平处的距离；l 为绳的长度；α为绳线与鼓中心线的夹角。

在碰撞时因为处于理想状态下，每次碰撞球击中鼓的正中心。假设球和鼓在碰撞时，鼓所受的合外力等于鼓的重力，故球-鼓构成的碰撞系统，在碰撞时间很短的情况下，内力远大于外力（排球的质量），系统动量守恒。式子如下：

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1^{'} + m_2 v_2^{'} \tag{4}$$

其中m_2：排球的重量；$v_1, v_1^{'}$：分别表示鼓碰撞前后的速度；$v_2, v_2^{'}$：分别表示球碰撞前后的速度。

假设鼓与球碰撞产生的热量很少，忽略热量以及其他能量损失，所以可以看成弹性碰撞，即动量守恒。由动量守恒得：

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^{'2} + \frac{1}{2}m_2 v_2^{'2} \tag{5}$$

要使总能量消耗最小，颠球高度在满足条件的情况下越低越好，故每次颠球高度为 40cm 消耗能量最少。

根据计算机仿真，求出鼓和球的碰撞点 X（X 表示鼓面到手所处直线的距离），可得出球碰撞前后的速度。在第一次碰撞前，假设不考虑排球所受的空气阻力，球做自由落体运动，可知：

$$40 - X = \frac{1}{2}gt^2 \tag{6}$$

即第一次碰撞前的速度为：

$$v_2 = v_0 + gt = \sqrt{80g - 2gX} \tag{7}$$

碰撞后，球受到力竖直向上运动，到达 40cm 球的速度刚好为零，h=40cm，因此有：

$$v_2^{'2} = 2gh \tag{8}$$

解得碰撞后球的速度为：

$$v_2^{'} = \sqrt{80g} \tag{9}$$

根据动量守恒（4）和动能守恒（5）两式联立，求出鼓碰撞前后的速度。

$$\begin{cases} v_1 = \dfrac{1}{2}\left[\left(v_2^{'} + v_2\right) - \dfrac{m_2}{m_1} \times \left(v_2 - v_2^{'}\right)\right] \\ v_1^{'} = \dfrac{1}{2}\left[\left(v_2^{'} + v_2\right) + \dfrac{m_2}{m_1} \times \left(v_2 - v_2^{'}\right)\right] \end{cases} \tag{10}$$

鼓碰撞前的速度由拉力和重力提供，由能量守恒得：

$$F_{合}X - m_1 gX = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - 0 \tag{11}$$

整理可得，人对拉绳对鼓的合力为：

$$F_{合} = \frac{(1/2)\times m_1 v_1^2 + m_1 gX}{X} \tag{12}$$

所以最终根据计算机仿真，求出鼓和球的碰撞点 X，得出球碰撞前后的速度，加速度，根据合力与当时绳子与水平方向的夹角，可求出从开始发力到碰撞后每个时刻各个成员的发力大小。

综上所述，模型的总结为：

$$\min f = nF_i$$
$$s.t.\begin{cases} nF_0 \sin\alpha = m_1 g \\ v_2 = \sqrt{80g - 2gX} \\ v_2^{'} = \sqrt{80g} \\ v_1 = \dfrac{1}{2}\left[\left(v_2^{'} + v_2\right) - \dfrac{m_2}{m_1}\times\left(v_2 - v_2^{'}\right)\right] \\ v_1^{'} = \dfrac{1}{2}\left[\left(v_2^{'} + v_2\right) + \dfrac{m_2}{m_1}\times\left(v_2 - v_2^{'}\right)\right] \\ F_{合} = \dfrac{(1/2)\times m_1 v_1^2 + m_1 gX}{X} \end{cases} \tag{13}$$

（4）仿真算法设计

鼓和球第二次碰撞及以后算法流程图见图 2，我们编写了 high 函数，输入绳长、鼓中心到手的水平距离、鼓面到碰撞点的水平距离、团队参与人数输出鼓撞前撞后的速度以及人对绳子拉力的值，high 函数见附录 1。

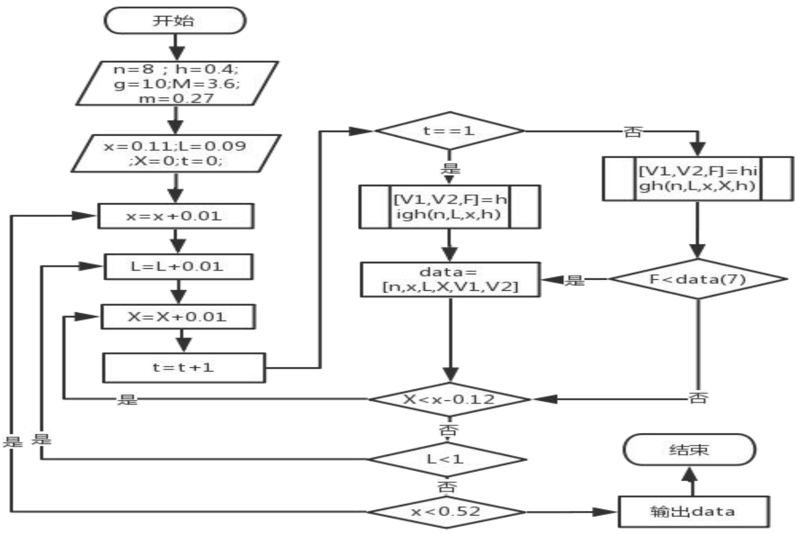


图 1：第一次碰撞前的算法流程图

在第一次碰撞后小球会升到碰撞点以上 40cm，鼓会回到初始高度，所以我们需要对第二次以及后面的最佳碰撞策略进行求解，算法流程图如下。

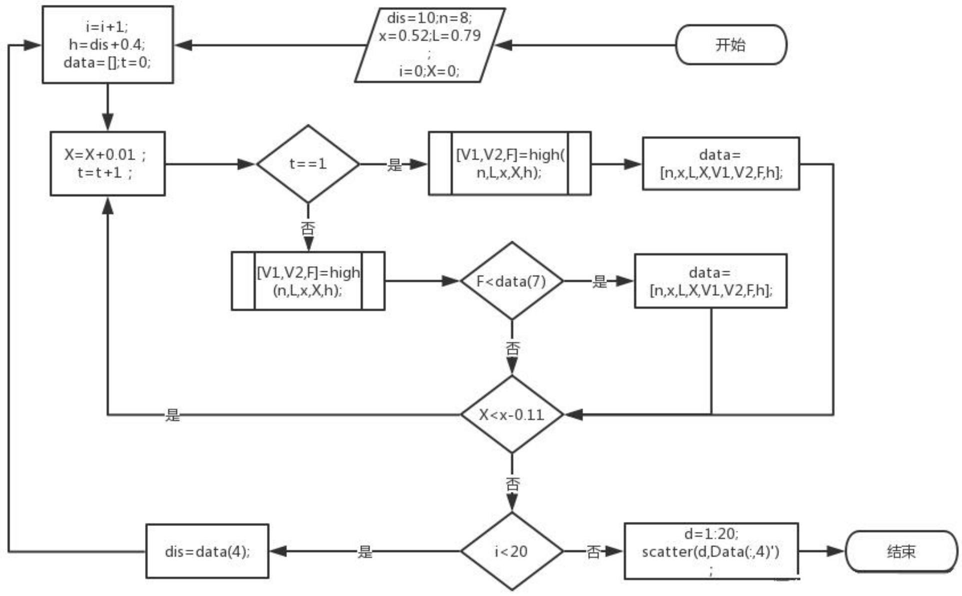


图 2：鼓和球第二次碰撞及以后算法流程图

6.1.3 模型的求解

对绳长、鼓中心到手的水平距离、鼓面到碰撞点的水平距离、团队参与人数进行遍历，求出发力中最小力的策略如下表所示。

表 1：团队最佳协作策略和颠球高度

用力方向	用力时机	力度	绳长（单位：m）	颠球高度
竖直向上	同时发力	见图 2	0.79	0.4

在队员发力最小，消耗能量最少时，每次颠球高度为 0.4m，团队参与人数为 8 人，绳长为 0.79m。球稳定后碰撞点最小值为 0.45m，最大值为 0.48m。经检验绳长为 0.79m 时，两为队员之间的距离大于 60cm，符合条件。在碰撞前人拉力的变化如图 3 所示：

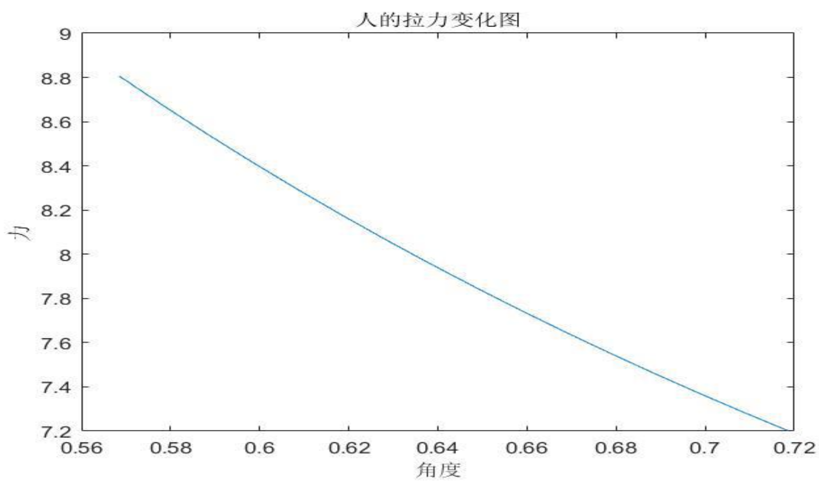


图 3：第一次碰撞前人拉力的变化

由图 3 可知，最小拉力值为 7.2025N，随着角度的减小，拉力值在不断增大。鼓-球碰撞系统在碰撞点的轨迹如下：

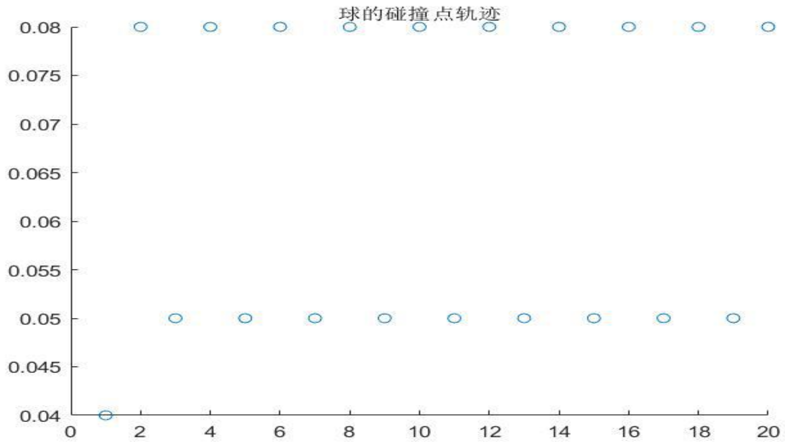


图 4：球的碰撞点轨迹

由上图可知，在碰撞稳定后，每次球的碰撞点的位置都一样，在理想的力度和用力方向下，每次颠球的高度为 0.4m，稳定后碰撞点最小值为 0.45m，最大值为 0.48m。

6.1.4 模型的灵敏度分析

为了验证模型的灵敏度，我们将排球弹起的最小高度上下调整 10cm，判断对拉力、绳长的影响情况。

表 2：改变球弹起高度对结果的影响

弹起高度要求	最小拉力	绳长	球稳定后碰撞点最小值	碰撞点最大值
0.3	7.2024	0.79	0.35	0.35
0.4	7.2025	0.79	0.45	0.48
0.5	7.2023	0.79	0.57	0.59

将游戏规则要求的最小高度进行更改，发现最小拉力的变化很小，几乎不变，且绳长相等，球最终都能以稳定的形式一直弹下去。所以，该模型比较稳定。

6.2 问题二：非理想状态下鼓的形态模型

在现实情形中，队伍发力时机,力度不可能做到精确控制，存在一定的误差，所以鼓面可能会出现倾斜，所以需要重新建立非理想状态下的鼓的形态模型，来解决受力不均匀情况下任意时刻鼓面的倾角计算问题。

6.2.1 仿真模拟模型的建立

由题意可知，鼓的初始速度 $v_{0j}=0(m/s)$ ，初始加速度 $a_{0j}=0(\mathrm{m/s^2})$，发力的初始时间为-0.1s，倾斜角度：

$$\sin\alpha=\frac{x}{l} \tag{14}$$

x 为鼓中心的水平线到手水平处的距离；l 为绳的长度；α 为绳线与鼓中心线的夹角。

我们对鼓的受力点进行分析，由于受力不均匀，鼓面发成倾斜，故分成了两种情况。

第一种情况：当鼓的右端高于左端时，有$\alpha=\beta-\beta_1$。第二种情况：当鼓的左端高于右端时，有$\alpha=\beta+\beta_1$。在抬起鼓的一角时，该点竖直向上的力会对周围角做出影响，即力在作用点起开始，沿着圆弧线性减小，直到达到作用点的另一端时减为零，所以要考虑其他点发力对该点的影响的力F'。具体的受力点在鼓身右侧受力分析见附录 2，受力点在鼓身左侧的受力分析见图 5：

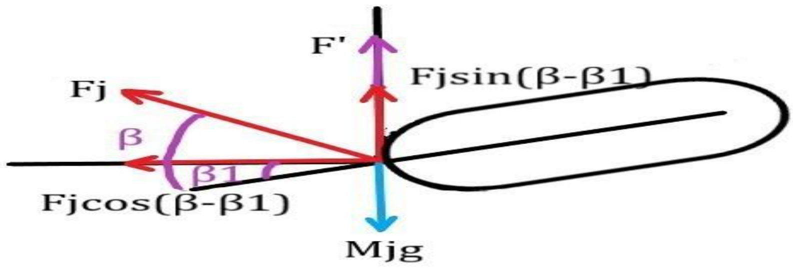


图 5：鼓左侧的受力分析图

其中，F_j：在鼓的 j 点受到拉力的大小；β：j 点受到拉力与鼓中心水平线的夹角；β_1：鼓倾斜的角度；$M_j g$：在就 j 点受到的重力大小。F'：受到 j 点周围人施加的力对 j 点产生影响力的大小。沿竖直方向上的分力为$F_{jy}=F_j\sin(\beta\pm\beta_1)$。

根据牛顿第三定律中力的作用是相互的，可知当受到的拉力越大时，承受的重力越大。人给鼓的拉力占总拉力的比重设为权，对每个受力点的重力按权重进行分配。第 j 个点在第 i 个时刻的加速度表达式为：

$$a_{ij}=\frac{F_j\sin(\beta\pm\beta_{(i-1)j})-\dfrac{F_j}{\sum F}m_{总}g+F'}{m_{总}},j=1,\cdots,8 \tag{15}$$

其中，a_{ij}：第 j 个点在第 i 个时刻的加速度；$m_{总}$：鼓的总质量。

定义“单位时间”，即假定在单位时间内鼓的一端向上运动，且绳子的倾斜角度不发生改变。虽然每个点处的加速度在不断的改变，当时间非常短时，假设$t_{单}=0.001\mathrm{s}$，可近似看成每一处做匀加速直线运动，由速度和位移公式知每各点的速度和位置为：

$$v_{ij}=v_{i-1j}+a_{ij}\times t_{单} \tag{16}$$

$$x_j=\frac{v_{ij}^2-v_{i-1j}^2}{2a_{ij}} \tag{17}$$

每个时刻的倾斜角度的正弦值为上升高度的最大值与上升高度最小值的差值除以鼓面直径，故根据迭代可求出某一时刻的鼓面倾斜角度。r 为鼓的半径。式子表示如下：

$$\sin\alpha_{ij}=\frac{\max(x)-\min(x)}{2r} \tag{18}$$

综上所述，考虑存在一定的误差，队员的发力时机和力度与某一特定时刻的鼓面的倾斜角度关系用公式表示为：

$$\begin{cases} a_{ij}=\dfrac{F_j\sin(\beta\pm\beta_{(i-1)j})-\dfrac{F_j}{\sum F}m_{总}g+F'}{m_{总}},j=1,\cdots,8 \\ v_{ij}=v_{i-1j}+a_{ij}\times t_{单} \\ x_j=\dfrac{v_{ij}^2-v_{i-1j}^2}{2a_{ij}} \\ \sin\alpha_{ij}=\dfrac{\max(x)-\min(x)}{2r} \end{cases} \tag{19}$$

由于单位时间定义的非常小所以会导致迭代次数过多，人力难以计算出最终迭代结果，所以借助计算机快速的计算速度，求解速度快，精准无误差的优势，来解决模型求解问题。下面给出模型实现的算法设计。

6.2.2 算法设计

$Step1$：根据所给鼓面初始时刻是静止的，初始位置比绳子水平时低 11cm，得知鼓的初始时间，初始速度，角度以及每个受力点的受力情况。

$Step2$：根据牛顿第三定律中力的作用是相互的原理可知，每处受到的拉力越大，分配的重力越多。根据每处占总体的拉力值的大小即可计算出每处鼓分配的重力大小。

$Step3$：已知每个受力点的角度和受力情况，求出每个点的瞬时加速度；已知单位时间（t=0.001s）内物体做匀加速直线运动，根据速度与位移公式，求出单位时间后的每个点的速度和位置。

$Step4$：根据每个点位置，求出鼓面的倾斜角度。

$Step5$：将已求出的速度，角度，代入下一单位时间的方程中，当 $t<0.1s$ 时，转为 $Step2$，若 t=0.1s 算法结束，输出最终鼓面的倾斜角度。

6.2.3 模型结果的得出

根据每次求出速度和位置，对时间进行迭代，以步长为 0.001s，求出每次的加速度和速度，直到 0.1s 时结束，输出最终的鼓面的倾斜角度。对于队员们不同发力时机和力度的 9 种情况，在 0.1s 时的倾斜角度大小如下：

表 3：0.1s 时鼓面的倾斜角度

序号	鼓面的倾斜的角度
第 1 种情况	0.1363
第 2 种情况	0.1265
第 3 种情况	0.0929
第 4 种情况	1.8639
第 5 种情况	1.7533
第 6 种情况	1.3637
第 7 种情况	2.7316
第 8 种情况	1.4397
第 9 种情况	1.3587

由上表可知，第 1-3 种情况，单独改变发力大小时鼓面的倾斜角度较小。在同时改变发力大小和时机后，倾斜角度比只改变发力大小稍有增大。总体来说，模型结果较好，具有可靠性。在真实情况下，绳子的长度与下降距离可能与真实值具有一定的误差，所

以为了检验模型的稳定性，需要对模型进行灵敏度检验，检验如下。

6.2.4 模型的灵敏度分析

为了验证模型的稳定性，我们改变绳长上下±0.1m，初始位置较绳子水平下降高度上下改变±0.01m，判断对 0.1s 时鼓面的倾斜角度影响情况。

表 4：改变绳长和下降高度对倾斜角度的影响

绳长		1.6			1.7			1.8	
下降距离	0.14	0.15	0.16	0.13	0.14	0.15	0.11	0.12	0.13
1	0.13	0.14	0.15	0.12	0.13	0.14	0.11	0.11	0.12
2	0.10	0.10	0.11	0.09	0.09	0.10	0.08	0.08	0.09
3	1.93	2.18	2.43	1.64	1.86	2.09	1.39	1.59	1.80
4	1.82	2.05	2.29	1.54	1.75	1.97	1.31	1.50	1.69
5	1.41	1.59	1.77	1.20	1.36	1.53	1.02	1.17	1.32
6	2.82	3.14	3.46	2.44	2.73	3.03	2.12	2.38	2.65
7	1.49	1.68	1.86	1.27	1.44	1.61	1.08	1.24	1.39
8	1.41	1.59	1.77	1.20	1.36	1.52	1.02	1.16	1.31
9	0.14	0.15	0.16	0.13	0.14	0.15	0.11	0.12	0.13

由上表可知，改变绳长和高度下，在只改变发力大小的情况下，鼓面的倾斜角度改变不超过 0.02，误差较小，在同时改变发力时机和大小的情况下，鼓面的倾斜角度不超过 0.2，可以观测出模型比较稳定。

6.3 问题三：根据构建的模型考虑问题一的策略是否需要调整

由于问题一求解出人对鼓施加的力为变力，在现实情况中，对力度不好控制，存在一定的误差，可能会使颠球高度达不到 40cm 或球出现倾斜落出鼓面，从而项目失败，因此需要调整问题一的策略，重新建立新的最佳团队策略的优化模型。

6.3.1 模型的建立

由于问题一求解出人对鼓施加的力为变力，在现实情况中，对每秒的力度不好控制，存在一定的误差，可能会使颠球高度达不到 40cm 或球出现倾斜落出鼓面，从而项目失败，因此需要调整问题一的策略。

原拉力为问题一中最大的拉力，在原拉力最大的情况下，不能满足球的反弹高度，故找最小恒拉力使满足反弹高度。虽然我们固定了拉力为恒力，但个人的发力大小会发生改变假设上下 10%波动，所以要考虑最坏情况即所有人的 F 都在实际情况中只使用了 0.9F。将最佳 F 调整为 F/0.9。这样即使在最坏情况下也能成功颠起球超过 40cm，所以碰撞点轨迹图不需要改动，只改变发力大小即可。

假设每次颠球完成后，队伍会在下次小球下落前到达指定位置，假设队伍每次颠完球后，鼓恢复水平。本问建立的模型与问题一类似，相同之处便不再复述。

（1）决策变量

F_i：第 i 个人对绳子施加的力。

（2）目标函数

同问题一的目标一样，使团队的总能量消耗最少，即总和的拉力最小。优化的目标函数为：

$$\min = \sum_{i=1}^{8} F_i \tag{20}$$

（3）约束条件

本模型的约束条件与问题一，问题二的模型类似，故此处不再重复说明相同之处，重点说明不同之处。问题一中约束条件中，鼓受的外力的合力为恒力；而本问题中的约束条件，每个人施加对绳的力为恒力。

由题意可知，鼓的初始速度 $v_{0j} = 0(m/s)$ ，初始加速度 $a_{0j} = 0(\mathrm{m/s^2})$，发力的初始时间为-0.1s，初始的倾斜角度：

$$\sin\alpha = \frac{x}{l} \tag{14}$$

其中，x 为鼓中心的水平线到手水平处的距离；l 为绳的长度；α 为绳线与鼓中心线的夹角。由于对鼓的受力点的分析与问题二相同，所以在此省略。

根据牛顿第三定律中力的作用是相互的，可知当受到的拉力越大时，承受的重力越大。人给鼓的拉力占总拉力的比重设为权，对每个受力点的重力按权重进行分配。第 i 个时刻的加速度表达式为：

$$a_i = \frac{8 \times F_i \times \sin\alpha_{i-1} - M * g}{M} \tag{15}$$

其中，a_i：在第 i 个时刻的加速度；M：鼓的总质量。

定义“单位时间”，即假定在单位时间内鼓的一端向上运动，且绳子的倾斜角度不发生改变。虽然每个点处的加速度在不断的改变，当时间非常短时，假设 $t_{单} = 0.001\mathrm{s}$，可近似看成每一处做匀加速直线运动，由速度和位移公式知每各点的速度和位置为：

$$\mathrm{V}_i = V_{i-1} + a_i \times t_{单} \tag{16}$$

$$h_i = \frac{(v_i^2 - v_{i-1}^2)}{2 \times a_i} \tag{17}$$

每个时刻的倾斜角度的正弦值为上升高度的最大值与上升高度最小值的差值除以鼓面直径，故根据迭代可求出某一时刻的鼓面倾斜角度。r 为鼓的半径。式子表示如下：

$$\alpha_{\mathrm{i}} = \arcsin(\frac{x - H_i}{L}) \tag{18}$$

每个时刻球下落的累计高度为 1/2 乘以重力加速度乘以累计时间的平方。式子表示如下：

$$\mathrm{H}_1 = \frac{1}{2} \times gt^2 \tag{19}$$

第一次碰撞，当鼓上升与球下落高度>=40cm 时，即找到了最佳的策略。表达式子如下：

$$\mathrm{H}_1 + H_{end} \geq 0.4 \tag{20}$$

H_{end} 为碰撞时最后一刻的鼓上升的累计高度。

综上所述，考虑存在一定的误差，队员的发力时机和力度与某一特定时刻的鼓面的倾斜角度关系用公式表示为：

$$\min z=\sum_{i=1}^{8}F_i$$

$$st\begin{cases}\sin\alpha_0=\dfrac{x}{L}\\ a_i=\dfrac{8\times F_i\times\sin\alpha_{i-1}-M*g}{M}\\ V_i=V_{i-1}+a_i\times t_{单}\\ h_i=\dfrac{(v_i^2-v_{i-1}^2)}{2\times a_i}\\ \alpha_i=\arcsin(\dfrac{x-H_i}{L})\\ H_1=\dfrac{1}{2}\times gt^2\\ H_1+H_{end}\geq 0.4\end{cases}\tag{21}$$

由于单位时间定义的非常小所以会导致迭代次数过多。且该算法需要在某一解区间上对绳子上的力进行遍历，以逼近真实的满足颠球高度的绳子最小恒力，在步长过小的情况下，人力难以计算出最终迭代结果，所以借助计算机快速的计算速度，求解速度快，精准无误差的优势，来解决模型求解问题下面给出模型实现的算法设计。

6.3.2 算法设计

*Sept*1：初始化作用在绳子上的合力，开始时间，鼓上升高度，初始速度以及绳子与水平线的夹角。

*Step*2：根据运动学方程，列出速度，加速度，高度的表达式，通过该平面中点所处的位置列出鼓面倾斜角度的正弦关系。

*Step*3：若不满足小球可以颠起的高度≥40cm，对时间进行迭代（步长为 0.001s）模拟出在碰撞前球鼓的速度，若满足判断碰撞后球速度是否等于 $\sqrt{0.8g}$ 或稍大于 $\sqrt{0.8g}$，若不成立我们对绳子上的恒力以 0.0001N 为步长，进行遍历，根据动量守恒和动量定理，求出碰撞后的速度，

*Step*4：若求出碰撞后球速度为 $\sqrt{0.8g}$ 或稍大于 $\sqrt{0.8g}$，退出遍历，输出此时的遍历到的 F 值，即为第一个满足要求的 F，所以最佳策略即为团队所有人都使用 F。

6.3.2 求解结果及分析

对第一问中得到的策略进行检验，假使人施加得力每一刻都相同，在原数据下球反弹 30.64 厘米，远远小于 40 厘米，故需要对原策略进行调整。

表 5：对拉力的调整

调整前最大拉力值	调整后拉力
7.2025	13.1533N

项目参与人数，绳长，初始位置较绳子水平下落的距离与问题一相同，均不改变，只改变人的拉力 F 的值，求得满足条件的最小 F 为 11.8380N，假设人的力在上下 10%波动，考虑最坏情况则拉力 F 为 13.1533N。

6.3.2 模型的灵敏度分析

为了验证模型的稳定性，我们将球的反弹高度上下调整±10cm，判断对拉力值的影响情况。

表 6：改变球的反弹高度对结果的影响

规则	原拉力	原拉力反弹高度	调整后拉力	调整后反弹高度
30	7.2024	23.04	13.1171	32.21
40	7.2025	30.64	13.1533	42.95
50	7.2023	38.36	13.1141	53.34

原拉力为问题一中最大拉力，调整后拉力为考虑误差后的拉力大小。由上述结果可知，改变排球的反弹高度，调整后的反弹高度均高于项目规则，符合要求，调整后拉力值变化很小，说明模型模型比较稳定。

6.4 问题四：非/理想情况下策略调整模型

由于当鼓面发生倾斜时，球跳动的方向不在垂直，所以 1，2，3 问题所建立的模型不在适用，所以需要重新建立新的模型用于讨论两种情况下的策略调整方案。由于该问题解不唯一，我们做如下假设：

1. 预先规定初始位置低于绳子水平位置 11cm；
2. 碰撞点在鼓面上方 0.05m 处；初始时刻球落下的倾斜角度为 1°；
3. 我们设定鼓初始状态是倾斜的，10 个人对鼓拉力的沿竖直向上方向分力之和与重力平衡，并且鼓匀加速上升与匀加速下落的球在中心点发生碰撞；
4. 10 个人是同时发力的；
5. 每一次的碰撞点的高度相同；
6. 每个人可以精准控制力道与发力时机。

6.4.1 模型的建立

（1）初始条件以及已知的数据

队员人数 n=10；绳长 l=2m；重力加速度 $g=9.8m/s^2$；球落向鼓面时与竖直方向的倾斜角度 $\theta_2=1^{\circ}$；

（2）速度和加速度的求解

鼓面的倾斜角度：

$$\theta_1=\arcsin\left(\frac{x}{l}\right) \tag{22}$$

球竖直的初始速度：

$$v_2=\sqrt{0.6\times 2g} \tag{23}$$

根据动量、能量守恒，求出碰撞前后鼓的速度，其速度与问题一一致，故此处不再重复说明。

（3）人对鼓施加的最大、最小力

10 个人作用于鼓的合力大小为：

$$F=\frac{Mg}{10\times\sin\theta_1} \tag{24}$$

设人对鼓施加的最大拉力为 F_1，人对鼓施加的最小拉力为 F_2，基于加速度相同，联立求出最高点与最低点的拉力大小。联立方程如下：

$$
\begin{cases}
F_4 = F_2 \times \sin(\theta_1 - \theta_2) \\
F_3 = F_1 \times \sin(\theta_1 + \theta_2) \\
F_3 - \dfrac{F_3}{F_3 + F_4} \times Mg = F_4 - \dfrac{F_4}{F_3 + F_4} \times Mg \\
F_3 + F_4 + 8F \times \sin\theta_1 - Mg = Ma
\end{cases} \tag{25}
$$

（4）各点距离第一个点的距离

xx_i：一个一行十列的行向量，计算的是第 i 个点距离起始点的水平距离，式子如下所示：

$$
xx_i = r - r \times \cos(12 + 36 \times (i-1)) \tag{26}
$$

gx_i：第二问 gxd 程序中所求出的贡献度方程，输入点和点之间的距离可以得出两点力的相互影响大小，式子如下所示：

$$
gx_i = \frac{(1 - 0.0028 \times xx_i)}{0.0013} \tag{27}
$$

f1,f2 分别代表最高点和最低点对十个位置拉力分布的影响。式子如下所视：

$$
\begin{gathered}
f_1 = F_2 \times gx \\
f_2 = F_1 \times gx
\end{gathered} \tag{28}
$$

10 个点的拉力大小计算公式如下所示：

$$
f(i) = \begin{cases} f_1(i) + f_2(i+s), 1 \le i \le s \\ f_1(i) + f_2(i-s), 6 \le i \le 10 \end{cases} \tag{29}
$$

综上所述，总结如下：

$$
\begin{cases}
\theta_1 = \arcsin\left(\dfrac{x}{l}\right),\ \ v_2 = \sqrt{0.6 \times 2g} \\
\begin{cases}
F = \dfrac{Mg}{10 \times \sin\theta_1} \\
F_4 = F_2 \times \sin(\theta_1 - \theta_2),\ \ F_3 = F_1 \times \sin(\theta_1 + \theta_2) \\
F_3 - \dfrac{F_3}{F_3 + F_4} \times Mg = F_4 - \dfrac{F_4}{F_3 + F_4} \times Mg \\
F_3 + F_4 + 8F \times \sin\theta_1 - Mg = Ma
\end{cases} \\
xx_i = r - r \times \cos(12 + 36 \times (i-1)) \\
gx_i = \dfrac{(1 - 0.0028 \times xx_i)}{0.0013} \\
f_1 = F_2 \times gx，f_2 = F_1 \times gx \\
f(i) = \begin{cases} f_1(i) + f_2(i+s), 1 \le i \le s \\ f_1(i) + f_2(i-s), 6 \le i \le 10 \end{cases}
\end{cases} \tag{30}
$$

在进行问题求解之前我们需要假设：我们预先规定初始位置低于绳子水平位置 11cm，碰撞点在鼓面上方 0.05m 处，初始时刻球落下的倾斜角度为 1°，我们设定鼓初始状态是倾斜的，10 个人对鼓拉力的沿竖直向上方向分力之和与重力平衡，并且鼓匀加速上升与匀加速下落的球在中心点发生碰撞。且 10 个人是同时发力的。假设此次碰撞点与上次的高度相同，算法设计如下。

（5）算法设计

*Step*1：根据任务为小球在碰撞后向上匀减速运动 40cm，运动学公式求出小球碰撞前后的速度。
*Step*2 :根据动能动量定理，联立求出鼓的碰撞前后速度。
*Step*3：根据运动学方程，求出鼓从初始时刻到碰撞前这段时间的加速度。
*Step*4：根据 1 初始时刻倾斜两端与重力平衡 2，二者合力的加速度为一个定值这两个等式可列出两个方程，联立求出鼓面最高点的绳子拉力值，鼓面最低点绳子的拉力值。
*Step*5：根据力的影响可以出 10 个点的受力。

6.4.2 模型的求解与结果分析

理想条件下，每个人拉力值变化如下表：

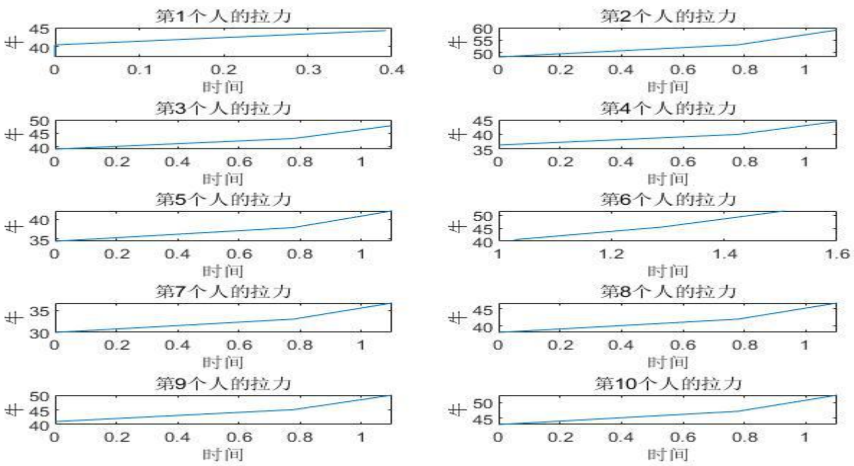


图 6：每个人的拉力随时间的变化情况

由上图可知，每个人的拉力随时间的增加而增大，拉力值变化的拐点大约在 0.8s，在 0.8s 前拉力变化幅度较小，0.8s 之后变化幅度增加。

表 7：每位成员用力使球反弹高度的大小

成员	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
拉力	43.22	41.80	39.19	36.40	34.49	34.19	35.61	38.22	41.02	42.93

根据表 7，我们可以直观看出每一个成员的起始点拉力大小，因为是在理想情况模拟，所以我们又绘制了鼓开始运动后的拉力值变化，即图 5。根据该图，可以发现随着运行时间的增加，人的拉力也逐渐升高，且每个人的拉力改变轨迹图相似。若是基于现实情况下的调整，则该调整策略无法准确实施，时机与力大小的不确定性将会导致这种调整策略实施效果较差。

在现实情况下，很难实施调整后的策略，因为人们无法准确改变力的大小和时机，所以会和理想条件下的误差较大。

6.4.3 模型的灵敏度分析

为了验证模型的稳定性，我们改变了题目条件中球的反弹高度，将其值在上下 10 厘米改变，并求出了改变后各成员的拉力值。

表 8：改变球的反弹高度对拉力的影响

成员	球的反弹高度	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
拉力	0.7	51.07	49.38	46.30	43.00	40.74	40.39	42.08	45.16	48.46	50.71
	0.6	43.22	41.80	39.19	36.40	34.49	34.19	35.61	38.22	41.02	42.93
	0.5	42.52	41.12	38.55	35.80	33.92	33.63	35.03	37.60	40.35	42.23

纵向观察该表的数值变化，可发现拉力的变化最大不超过 8N，模型的稳定性较好。

七、模型的评价与推广

6.1 模型的优点

（1）从能量角度考虑，仿真模拟模型建立了最佳策略的标准，目的性强，运用计算机仿真求解精度较高，且可人为调整仿真精度。
（2）采用物理中局部受力分析的想法解决问题，从八个点的受力的角度进行分析，求解出加速度，模型简单，运用物理学公式求解，运行速度快，结果较为精确。
（3）处理问题的角度较好，在分析问题时从实际出发，解决问题时从能量去向问题角度考虑。

6.2 模型的缺点

（1）对球分析时，未考虑空气阻力以及碰撞时的能量损失，得出的结果有一定的误差。
（2）在实际情况下，鼓的平面会发生倾斜，导致球倾斜颠出，我们默认平面倾斜角度较小，球竖直弹出，会导致误差产生，与真实值会有一定差异。
（3）若考虑变量较多的情况下，程序运行时间会指数型上升，不利于求解。在实际情况下鼓与水平方向的角度，加速度，速度时刻在变，虽然单位时间可人为调整的较小，但是也会造成误差积累，导致结果偏差较大。

6.3 模型的改进与推广

6.3.1 模型的改进

（1）分别考虑排球受到的空气阻力与速度成正比，与速度平方成正比的情况。
（2）考虑用微分方程和动力学方程对每个时刻的速度，加速度，绳子与水平方向夹角进行求解，进而求出发力时刻和力度与鼓面倾角的关系。改进后模型误差较小，结果精确。

6.3.2 模型的推广

计算机仿真模拟是解决实际问题的一种有效途径，可以在较短的时间内得到到整体的变化情况，实现起来比较简单，容易操作，此模型我们可以应用于乒乓球碰撞问题的研究，物理微分等，此类项目能够增强团队的凝聚力，具有很广的研究价值。

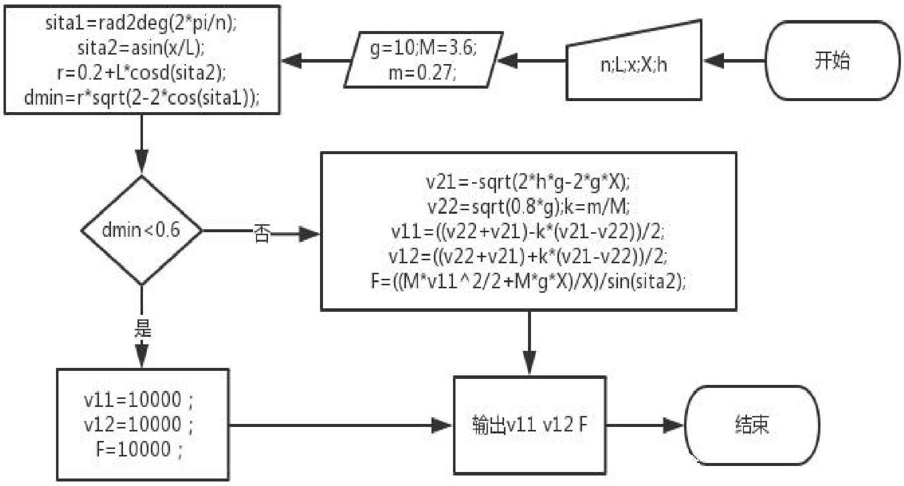
八、参考文献

[1] 韩晓霞.动量守恒定律与能量守恒定律的适用范围研究[J].济南职业学院学报,2013(04):90-91+94.
[2] 陈余华.刚体运动瞬心方法的应用[J].物理教师,2017,38(12):95-96.
[3] 雷成. DF_（8B）型机车碰撞过程计算机仿真分析[D].西南交通大学,2006.
[4] 王秀丰．台球运动中主球运动轨迹的仿真分析[J]．黑龙江科

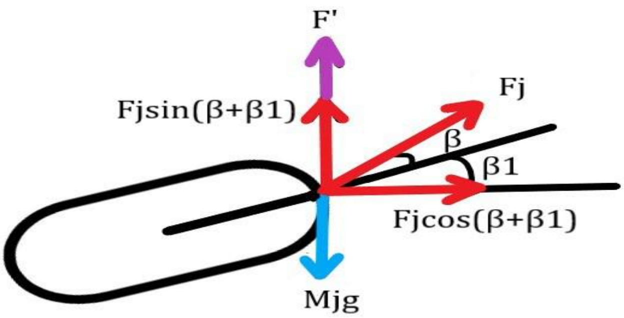
学,2016,7(23):104-105.
[5] 许彩明,卢钦龙,张凯. 台球运动中主球运动轨迹的仿真分析[J]. 体育科学,2007(04):80-83.
[6] 刘亚,杜磊. 台球碰撞问题解析理论与有限元分析[J]. 内蒙古科技与经济,2015(15):14-16.
[7] 陈尔康,廖欣,高长生,荆武兴.考虑刚体运动与弹体变形耦合效应的旋转导弹动力学建模[J].兵工学报,2018,39(11):2159-2171.
[8] 周光耀. 考虑坐标系位置瞬变的船舶多自由度耦合模型及参数横摇运动分析[D].天津大学,2017.

九、附录

附录 1：问题一 high 函数的算法流程图



附录 2：问题二鼓右侧的受力分析



附录 3：问题一第一次碰撞情况的 matlab 程序 main_1_1

```
%第一次鼓面与球相碰撞的情况分析
%运行时间 7 秒
clear
clc
t=0;h=0.4;%初始球与鼓面距离 40 厘米
n=8;%参与人数
g=9.8;M=3.6;m=0.27;%重力加速度,鼓和球质量
%for n=8:2:12%经测试 8 人时所花费力最小 若需验证可解开 for 循环注释 运行时间稍长
```

```
for x=0.11:0.01:0.52%鼓中心至绳拉平水平面距离
    for L=0.1:0.01:1%绳长距离
        for X=0.01:0.01:x-0.12%碰撞点至鼓面的距离
            t=t+1;
            if t==1%记录第一次的各个指标
                [V1,V2,F]=high(n,L,x,X,h);
                data=[n,x,L,X,V1,V2,F];
                Data(t,:)=[n,x,L,X,V1,V2,F];
            end
            if t>1
                [V1,V2,F]=high(n,L,x,X,h);
                Data(t,:)=[n,x,L,X,V1,V2,F];
                if F<data(7)%取人施加的力最小的情况
                    data=[n,x,L,X,V1,V2,F];
                end
            end
        end
    end
end
sita1=asin(data(2)/data(3));%绳与鼓静止使得夹角
sita2=asin((data(2)-data(4))/data(3));k=0;%鼓碰撞前与绳的夹角
for i=sita1:-0.01:sita2
    k=k+1;
    f(k)=((M*data(5)^2/2+M*g*data(4))/data(4))/(sin(i)*8);
end
xlab=sita1:-0.01:sita2;plot(xlab,f,'-');%画出人施加力度的线
title('人的拉力变化图');ylabel('力');xlabel('角度');
%end
```

附录 4：问题一第二次及以后碰撞情况的 matlab 程序 main_1_2

```
%第二次及以后碰撞情况分析
clear
clc
dis=0.1;%第一次碰撞鼓面与碰撞点距离为 10 厘米
n=8;x=0.52;L=0.79;%根据第一次碰撞所确定值
for i=1:20
    h=dis+0.4;%每一次碰撞后鼓面与球的距离 相当于碰撞点与鼓面距离加 40 厘米
    data=[];t=0;%初始化
    for X=0.01:0.01:x-0.11%求出碰撞点距鼓面距离
        t=t+1;
        if t==1%储存第一次值
            [V1,V2,F]=high(n,L,x,X,h);
            data=[n,x,L,X,V1,V2,F,h];
        end
        if t>1
```

```
            [V1,V2,F]=high(n,L,x,X,h);
            if F<data(7)%找出施加力最小的情况
                data=[n,x,L,X,V1,V2,F,h];
            end
        end
    end
    Data(i,:)=data;%储存每一次碰撞的数据
    dis=data(4);%保存碰撞点距离用于下一次循环
end
d=1:20;
scatter(d,Data(:,4)');
title('球的碰撞点轨迹');
```

附录 5：high 函数 用于求速度与力 high

```
%第一题函数
%n 为参与人数 x 为鼓中心到绳子水平的距离 L 为绳长 F 为人的拉力 X 为碰撞点至鼓面距离 h 为鼓面与球的距离
%v11 为鼓撞前速度 v12 为鼓撞后速度 F 为人施加的力大小
function [v11,v12,F]=high(n,L,x,X,h)
%n=8;x=0.52;L=0.79;F=80;X=0.1;
g=9.8;M=3.6;m=0.27;%重力加速度,鼓和球质量
sita1=rad2deg(2*pi/n);sita2=asin(x/L);%绳与水平面的夹角
r=0.2+L*cos(sita2);%鼓到人的水平距离
dmin=r*sqrt(2-2*cosd(sita1));%余弦定理求第三边
if dmin<0.6%若人与人之间距离大于 60 厘米则无效数据
    v11=10000; v12=10000;F=10000;
else
v21=-sqrt(2*h*g-2*g*X);v22=sqrt(0.8*g);%v1 为块的速度 v2 为球的速度
k=m/M;
v11=((v22+v21)-k*(v21-v22))/2;%动量定理与动能定理联立求解
v12=((v22+v21)+k*(v21-v22))/2;
F=((M*v11^2/2+M*g*X)/X)/(sin(sita2)*8);%绳子上施加的力的大小
end
```

附录 6：对于问题一灵敏度分析的程序 main_1_1_linmindu

```
%第一问灵敏度检验
%运行时间 7 秒
clear
clc
t=0;h=0.5;%初始球与鼓面距离 30 40 50 厘米
```

```
n=8;%参与人数
g=9.8;M=3.6;m=0.27;%重力加速度,鼓和球质量
%for n=8:2:12%经测试 8 人时所花费力最小 若需验证可解开 for 循环注释 运行时间稍长
for x=0.12:0.01:0.52%鼓中心至绳拉平水平面距离
    for L=0.1:0.01:1%绳长距离
        for X=0.01:0.01:x-0.12%碰撞点至鼓面的距离
            t=t+1;
            if t==1%记录第一次的各个指标
                [V1,V2,F]=high_linmindu(n,L,x,X,h,h);
                data=[n,x,L,X,V1,V2,F];
                Data(t,:)=[n,x,L,X,V1,V2,F];
            end
            if t>1
                [V1,V2,F]=high_linmindu(n,L,x,X,h,h);
                Data(t,:)=[n,x,L,X,V1,V2,F];
                if F<data(7)%取人施加的力最小的情况
                    data=[n,x,L,X,V1,V2,F];
                end
            end
        end
    end
end
data
```

附录 7：对于问题一灵敏度分析的程序 main_1_2_linmindu

```
%第二次及以后碰撞情况分析-灵敏度
clear
clc
dis=0.13;%第一次碰撞鼓面与碰撞点距离为 13 厘米 可更改
n=8;x=0.52;L=0.79;H=0.5;%根据第一次碰撞所确定值 更改 H
for i=1:20
    h=dis+H;%每一次碰撞后鼓面与球的距离 相当于碰撞点与鼓面距离加 50 厘米
    data=[];t=0;%初始化
    for X=0.01:0.01:x-0.11%求出碰撞点距鼓面距离
        t=t+1;
        if t==1%储存第一次值
            [V1,V2,F]=high_linmindu(n,L,x,X,h,H);
            data=[n,x,L,X,V1,V2,F,h];
        end
        if t>1
            [V1,V2,F]=high_linmindu(n,L,x,X,h,H);
            if F<data(7)%找出施加力最小的情况
                data=[n,x,L,X,V1,V2,F,h];
            end
```

```
        end
    end
    Data(i,:)=data;%储存每一次碰撞的数据
    dis=data(4);%保存碰撞点距离用于下一次循环
end
```

附录 8：对于问题一灵敏度分析的程序 high_linmindu

```
%第一题灵敏度
%n 为参与人数 x 为鼓中心到绳子水平的距离 L 为绳长 F 为人的拉力 X 为碰撞点至鼓面距离 h 为鼓面与球的距离
%v11 为鼓撞前速度 v12 为鼓撞后速度 F 为人施加的力大小
function [v11,v12,F]=high_linmindu(n,L,x,X,h,H)
%n=8;x=0.52;L=0.79;F=80;X=0.1;
g=9.8;M=3.6;m=0.27;%重力加速度,鼓和球质量
sita1=rad2deg(2*pi/n);sita2=asin(x/L);%绳与水平面的夹角
r=0.2+L*cos(sita2);%鼓到人的水平距离
dmin=r*sqrt(2-2*cosd(sita1));%余弦定理求第三边
if dmin<0.6%若人与人之间距离大于 60 厘米则无效数据
    v11=10000; v12=10000;F=10000;
else
v21=-sqrt(2*h*g-2*g*X);v22=sqrt(2*H*g);%v1 为块的速度 v2 为球的速度
k=m/M;
v11=((v22+v21)-k*(v21-v22))/2;%动量定理与动能定理联立求解
v12=((v22+v21)+k*(v21-v22))/2;
F=((M*v11^2/2+M*g*X)/X)/(sin(sita2)*8);%绳子上施加的力的大小
end
```

附录 9：问题二运行主函数 main_2

```
%此程序用于求解 9 种情况下的偏转角度
clc,clear
tic
arf=asin(0.22/1.7);%求灵敏度时修改此值
g=9.8;%重力加速度
F0=3.6*g/(8*sin(arf));%平衡重力时的拉力
arf1=zeros(1,9);%初始化
vc=zeros(9,8);
h=zeros(9,8);
f=[ F0 F0 F0 F0 F0 F0 F0 F0 90 80 80 80 80 80 80 80;
    F0 F0 F0 F0 F0 F0 F0 F0 90 90 80 80 80 80 80 80;
    F0 F0 F0 F0 F0 F0 F0 F0 90 80 80 90 80 80 80 80;
    80 F0 F0 F0 F0 F0 F0 F0 80 80 80 80 80 80 80 80;
    80 80 F0 F0 F0 F0 F0 F0 80 80 80 80 80 80 80 80;
    80 F0 F0 80 F0 F0 F0 F0 80 80 80 80 80 80 80 80;
    90 F0 F0 F0 F0 F0 F0 F0 90 80 80 80 80 80 80 80;
    F0 80 F0 F0 80 F0 F0 F0 90 80 80 90 80 80 80 80;
```

```
    F0 F0 F0 F0 80 F0 F0 80 90 80 80 90 80 80 80 80; ];%初始数据

f1=f(:,(1:8));%-0.1s-0s 数据
f2=f(:,(9:end));%0s-0.1s 数据
for i=1:9%计算贡献后力的大小
    f11(i,:)=li(f1(i,:));
    f22(i,:)=li(f2(i,:));
end
%进行递归求最终角度
for i=-0.1:0.001:0.1
    if i<0
        [arf1,h,vc]=fun(arf1,h,f1,f11,vc);
    end
    if i>=0
        if i==0
            h([1:3],:)=0;arf1([1:3],:)=0;vc([1:3],:)=0;
        end
        [arf1,h,vc]=fun(arf1,h,f2,f22,vc);
    end
end
arf1=rad2deg(arf1);%将弧度制转化为角度制
for i=1:9%输出结果
    fprintf('第%d 种情况鼓的倾斜的角度为：%f°  \n',i,arf1(i));
end
toc
```

附录 10：第二问计算贡献后力的函数 li

```
%计算贡献后的力的大小,k 为多了力的点
function  newf=li(F)
load gx
len=length(F);
for i=1:len
    for j=1:len
        FF(i,j)=F(i)-F(j);%力两两相减
        Y(i,:)=circshift(gx,[0,i-1]);%每一个点的力对其他点的贡献度
        if FF(i,j)<0%两力相比 小的力不提供贡献力
            FF(i,j)=0;
        end
    end
end
for j=1:len
    FF(j,:)=FF(j,:).*Y(j,:);%计算贡献力
end
%将每个力产生的贡献力和原始的力累计得到最终的各点力分布
for i=1:len
```

```
    a=length(find(FF(:,i)~=0));
    if a~=0
        newf(i)=sum(FF(:,i))/a+F(i);
    else
        newf(i)=F(i);
    end
end
```

附录 11：第二问计算初始贡献度程序 gxd

```
%此程序用于求解贡献度 gx.mat 的值
clear
clc
n=8;L=1.7;x=0.22;M=3.6;g=10;%人数，绳长，绳子水平距鼓中心的距离,鼓重，重力加速度
F=[90 80 80 80 80 80 80 80];
k=0.0028;%斜率
r=0.2;%鼓半径
xx(1)=0;xx(2)=r-r*cosd(45);xx(3)=r;xx(4)=r+r*sind(45);xx(5)=2*r;xx=xx*cos(k);%各点位置
gx=1-k*xx/0.0013;%求出贡献率
t=0;
for i=6:8
    t=t+2;
    gx(i)=gx(i-t);
end
save ('gx.mat','gx')%储存贡献率值
F=li(F);
M=F./sum(F)*M;
sita1=asin(x/L);%初始状态绳与水平面角度
%最高点和最低点数据
v1=0;F1=F(1);H1=0;sita=sita1;V1=0;F5=F(5);H2=0;Sita=sita1;
for i=0.001:0.001:0.1
    f_z1=F1*sin(sita);%最高点垂直方向的分力
    f_z2=F5*sin(Sita);%最低点

    a_z1=(f_z1-M(1)*g)/3.6;%最高点竖直方向加速度
    a_z2=(f_z2-M(5)*g)/3.6;%最低点

    v2=v1+a_z1*0.001;%最高点末速度
    V2=V1+a_z2*0.001;%最低点
    h1=(v2^2-v1^2)/(2*a_z1);%单位时间最高点抬起高度
    h2=(V2^2-V1^2)/(2*a_z2);%最低点
    H1=H1+h1;H2=H2+h2;%总抬起高度
    sita2=asin((H1-H2)/0.4);%鼓倾斜角度
    sita=sita1+sita2;Sita=sita1-sita2;%改变后绳与水平面夹角
```

```
    v1=v2;V1=V2;
end
arf=rad2deg(asin((H1-H2)/0.4));
%贡献率方程
k=tan(sita2);%斜率
r=0.2;%鼓半径
xx(1)=0;xx(2)=r-r*cosd(45);xx(3)=r;xx(4)=r+r*sind(45);xx(5)=2*r;xx=xx*cos(k)
;%各点位置
gx=1-k*xx/0.0013;%求出贡献率
t=0;
for i=6:8
    t=t+2;
    gx(i)=gx(i-t);
end
save ('gx.mat','gx')%储存贡献率值
```

附录 12：第二问主程序用于递归函数 fun

```
function [new_arf1,new_h,vm]=fun(arf1,h,f,f1,vc)
%h:现在 8 个点的高度 9*8
%arf1:现在的角度 1*9
%f:8 个点的力 9*8
%vc:8 个点初始速度。9*8
f=f1;
arf=asin(0.22/1.7);%求灵敏度时修改此值
g=9.8;
mb=f.*(3.6);
mc=sum(f,2)';
m=zeros(9,8);
for i=1:9
    m(i,:)=mb(i,:)./mc(i);%每个方案每个点分配的质量
end
a=zeros(9,8);
for j=1:9%第 j 个方案
    [~,id]=sort(h(j,:));
    for i=1:4%高度较矮的 4 个点。
   a(j,id(i))=(f1(j,id(i))*sin(arf-arf1(j))-m(j,id(i))*g)./3.6;%m(j,id(i));
%计算加速度的方式
    end
    for i=5:8%高度较高的 4 个点。
   a(j,id(i))=(f1(j,id(i))*sin(arf+arf1(j))-m(j,id(i))*g)./3.6;%m(j,id(i));
%计算加速度的方式
    end
    %贡献值
end
vm=vc+a.*0.001;%计算单位时间后的每个点的速度
```

```
x=(vm.^2-vc.^2)./(2*a);%匀加速，公式计算单位时间每个点上升了多少
new_h=h+x;%新的高度为老的高度+新上升的高度。
new_arf1=zeros(1,9);
for i=1:9
    new_arf1(i)=asin((max(new_h(i,:))-min(new_h(i,:)))/0.4);
    %（最高值-最低值）/直径=sin（new_arf1）
end
end
```

附录 13：问题三验证程序 yanzheng

```
%%验证原模型是否需要调整
clear
clc
n=8;%参与人数
g=9.8;M=3.6;m=0.27;k=0;%重力加速度,鼓和球质量
p=0;F=7.2025;L=0.79;X=0.1;x=0.52;   %灵敏度验证时改变 F
sita1=asin(x/L);%原始状态绳与水平夹角
H=0;v0=0;t=0;%初始化
for i=0:0.001:3
    a=(F*sin(sita1)*8-M*g)/M;%每单位时间加速度
    v1=v0+a*0.0001;
    h=(v1^2-v0^2)/(2*a);%每单位时间上升高度
    H=H+h;
    sita1=asin((x-H)/L);%新的角度用于下次
    v0=v1;
    t=t+0.001;
    H1=g*t^2/2;%球运动距离
    if H1+H>=0.4     %灵敏度验证时改变此值
        break
    end
end
v2=-g*t;%球撞前速度
v21=(2*M*v1+(m-M)*v2)/(m+M);%球撞后速度
h=v21^2/(2*g)%球反弹高度 若低于 0.4 则需要修改
```

附录 14：第三问调整函数 main_3

```
%%对原策略进行调整
clear
clc
n=8;%参与人数
g=9.8;M=3.6;m=0.27;k=0;%重力加速度,鼓和球质量
p=0;L=0.79;x=0.52;%原策略给出
for F=1:0.0001:1000%对 F 遍历求出满足条件最小 F 值
    t=0;p=0;H=0;v0=0;sita1=asin(x/L);
    for i=0:0.001:3
```

```
        a=(F*sin(sita1)*8-M*g)/M;%单位时间加速度 视为恒定
        v1=v0+a*0.0001;%计算末速度
        h=(v1^2-v0^2)/(2*a);%每次鼓上升高度
        H=H+h;%鼓上升总高度
        sita1=asin((x-H)/L);%更新后角度
        v0=v1;%更新后初速度
        t=t+0.001;
        H1=g*t^2/2;%球运动距离
        if H1+H>=0.4%当两者相撞跳出循环 灵敏度验证时改变 0.4
            p=1;
            break
        end
    end
    if p==1
        v2=-g*t;v21=sqrt(0.8*g);
%满足反弹 40 厘米的球最小速度 灵敏度验证时改变 v21
        V21=(2*M*v1+(m-M)*v2)/(m+M);%球撞后速度
        if V21>=v21
            break
        end
    end
end
chu_F=F
gai_F=F/0.9%考虑最坏情况
```

附录 15：第四问计算理想情况下各点的拉力程序 main_4

```
%用于求解第四问理想情况的每个人拉力变动
clear
clc
n=10;L=2;g=9.8;M=3.6;m=0.27;x=0.22;X=0.05;
sita1=asin(x/L);sita2=1*pi/180;%开始时绳子和鼓倾斜角度
v21=-sqrt(0.6*2*g);%球初速度 %可更改验证灵敏度
v22=sqrt(0.8*g);%球末速度
k=m/M;
v11=(k*(v21-v22)-(v22+v21))/2;%动量定理与动能定理联立求解 鼓撞前速度
v12=(k*(v21-v22)+(v22+v21))/2;%鼓撞后速度
a=v11^2/(2*X);%鼓加速度

F=M*g/(10*sin(sita1));%平衡重力所需拉力
syms F1 F2 %F2>F1>F3  %定义变量
F3=F1*sin(sita1+sita2);F4=F2*sin(sita1-sita2);
[F1,F2]=solve((F3-(F3/(F3+F4))*M*g)==(F4-(F4/(F3+F4))*M*g),F3+F4+8*F*sin(si
ta1)-M*g==M*a,F1,F2);
F1=double(vpa(F1));%最低点拉力值
F2=double(vpa(F2));%最高点拉力值
```

```
r=0.2;
xx(1)=r-r*cosd(12);%点之间距离
for i=2:10
    xx(i)=r-r*cosd(12+36*(i-1));
end
gx=1-0.0028*xx/0.0013;%求出贡献率
f2=F1*gx;
f1=F2*gx;
%求出最后的各个点拉力值
for i=1:5
    f(i)=f1(i)+f2(i+5);
end
for i=6:10
    f(i)=f1(i)+f2(i-5);
end
%绘制拉力变化图像
for j=1:10
    subplot(5,2,j)
    ff=f(j)*sin(sita1);
    sita1=asin(x/L);%初始时刻绳与鼓平面夹角
    sita3=asin((x-X)/L);k=0;%鼓碰撞前与绳的夹角
    if j==1
        sita1=sita1+sita2;%对角度进行更新
        sita3=sita3+sita2;
    elseif j==6
        sita1=sita1-sita2;
        sita3=sita3-sita2;
    end
    FF=[];
    for i=sita1:-0.01:sita3
        k=k+1;
        FF(k)=ff/(sin(i));%该时刻的拉力大小
        tt(k)=real(sqrt(2*(x-L*sin(i))/a));%将角度值转化为和时间的关系
    end
    sita3;plot(tt,FF,'-');%画出人施加力度的线
    A=['第' num2str(j) '个人的拉力'];
    title(A);ylabel('牛');xlabel('时间');
    hold on
end
f
```