

Ampliación de Matemáticas

Métodos Numéricos

Introducción

Cálculo Numérico: describir, analizar y desarrollar algoritmos numéricos que permitan solucionar problemas matemáticos en los cuales están involucradas cantidades numéricas.

Se aplica cuando:

- El problema no posee solución analítica (como $\int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos(x)^2} dx$)
- El procedimiento para hallar la solución es excesivamente complicado
- O excesivamente costoso

Veremos cómo resolver numéricamente ecuaciones, sistemas de ecuaciones, integrales, ...

También estudiaremos cómo interpolar datos, es decir, a partir de valores en puntos conocidos, obtener una función que tenga esos mismos valores.

Errores

Errores

Error absoluto

Toda aproximación a de un valor real r lleva asociada un error. Se llama **error absoluto** a la diferencia entre ambos valores, esto es,

$$E = r - a$$

Ejemplo

Dar una aproximación $a = 35.47$ del número $r = 35.47486$, es cometer un error absoluto de

$$E = 35.47486 - 35.47 = 0.00486$$

Errores

Cifras decimales significativas

Se dice que una aproximación a de un valor real r tiene n cifras significativas si

$$|r - a| \leq 0.5 \cdot 10^{-n}$$

Ejemplo: Redondear el número $r = 35.47486$ mediante una aproximación con 4 cifras decimales significativas, es equivalente a tomar la aproximación a tal que

$$|35.47486 - a| \leq 0.5 \cdot 10^{-4}$$

En este caso, tomando $a = 35.4749$, se cumple que

$$|35.47486 - 35.4749| = 0.00004 = 0.4 \cdot 10^{-4}$$

Errores: Ejemplos

- Una aproximación con 2 cifras decimales significativas de 1.004 es 1.0
- Una aproximación con 3 cifras decimales significativas de 0.9996 es 1.0
- $a_1 = 1.4142$, $a_2 = 1.4142567$ son aproximación con 4 cifras decimales significativas de $\sqrt{2}$

Propagación de errores

Una aproximación, a , tiene un cierto error E , de modo que si se opera con dos aproximaciones, entonces los errores se propagan, en algunos casos aumentando el error, y en otros disminuyendo.

Por ejemplo, si se suman dos aproximaciones a_1, a_2 con errores E_1, E_2 , respectivamente, entonces

$$(a_1 + E_1) + (a_2 + E_2) = (a_1 + a_2) + (E_1 + E_2)$$

en este caso, los errores se suman.

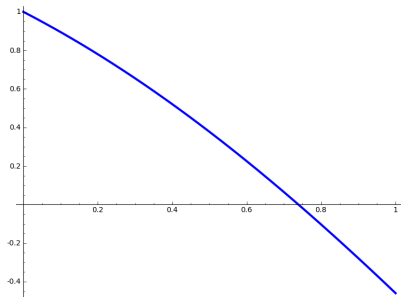
En cambio, si se multiplican:

$$(a_1 + E_1)(a_2 + E_2) = (a_1 a_2) + (E_1 a_2 + E_2 a_1 + E_1 E_2) \approx (a_1 a_2) + (E_1 a_2 + E_2 a_1)$$

pues $E_1 E_2 \approx 0$.

Raíces de una función

Planteamiento del problema



Sea una función $f(x)$, para la que sabemos que existe un valor r tal que $f(r) = 0$. Esto es, el valor r es una raíz de la función.

Los métodos numéricos tratan de encontrar una aproximación del verdadero valor de la raíz de la función.

Aproximación y Error

Para encontrar la aproximación con un error determinado, es necesario establecer previamente el error que se nos permite cometer como máximo. Se tienen dos opciones:

- Encontrar una aproximación con un error máximo permitido fijo: por ejemplo, 0.01, 0.005,...
- Encontrar una aproximación con una precisión de d de cifras decimales significativas, esto es, el error máximo permitido será $0.5 \cdot 10^{-d}$

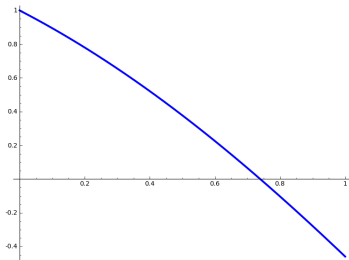
Métodos Numéricos

- Método de la Bisección
- Método de Newton

Método de la Bisección

Teorema de Bolzano

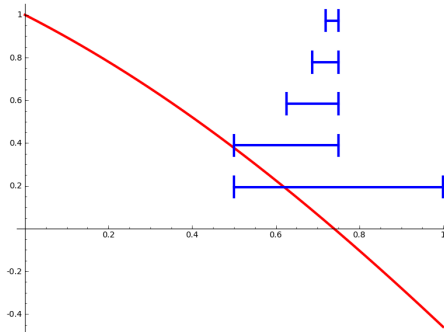
Sea una función continua $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$, entonces existe un valor $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$. Esto es, existe una raíz c en (a, b) .



Tenemos una función $f(x)$ **continua** en un intervalo $[a, b]$. Se cumple que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos en el intervalo. Entonces el **Teorema de Bolzano** nos asegura la existencia de una raíz.

Método de la Bisección

Se trata de un método de dos puntos. Éstos tratan de reducir la anchura del intervalo en el que se encuentra la raíz, manteniendo el cambio de signo en dichos intervalos.

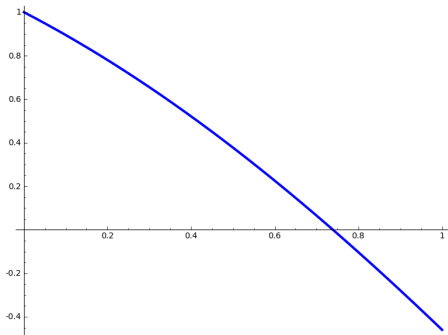


Método de la Bisección: Algoritmo

- 1) Calculamos $c = \frac{a+b}{2}$ (punto medio del intervalo $[a, b]$)
- 2) Calculamos $f(c)$ y lo comparamos con $f(a)$ y $f(b)$.
 - ▶ Si $f(a)$ y $f(c)$ tienen distinto signo, entonces tomamos el intervalo $[a, c]$ y buscamos la nueva raíz en dicho intervalo.
 - ▶ Si $f(a)$ y $f(c)$ tienen igual signo, entonces tomamos el intervalo $[c, b]$, y buscamos la nueva raíz en dicho intervalo.
- 3) Repetimos el proceso hasta que se encuentre una aproximación de la raíz con un error determinado. Volvemos al paso 1 con el nuevo intervalo obtenido.

Método de la Bisección

Ejemplo: $f(x) = -x + \cos(x)$, $[a, b] = [0, 1]$



$$f(a) = 1, f(b) = -0.459698$$

- $c = 0.5, f(c) = 0.377582$
 $\Rightarrow [0.5, 1]$
- $c = 0.75, f(c) = -0.018311$
 $\Rightarrow [0.5, 0.75]$
- $c = 0.625, f(c) = 0.185963$
 $\Rightarrow [0.625, 0.75]$

Aproximación de la raíz: $c = 0.6875$

Método de la Bisección: Error

- Partiendo del intervalo $[a, b]$, el error que se comete al aproximar la raíz es

$$E_0 = b - a$$

- Al aplicar el método de la Bisección, independientemente del intervalo en el que se encuentre la raíz $[a, c]$ o $[c, b]$, el error que se comete es

$$E_1 = \frac{E_0}{2} = \frac{b - a}{2}$$

- Si se aplica n veces el método de la Bisección, el error que se comete al aproximar la raíz es:

$$E_n = \frac{E_{n-1}}{2} = \frac{E_{n-2}}{2^2} = \dots = \frac{E_0}{2^n} = \frac{b - a}{2^n}$$

Método de la Bisección: Error

Si se aplican n iteraciones del método de la Bisección, el error que se comete al aproximar la raíz en el intervalo $[a, b]$ con n pasos es

$$E_n = \frac{b - a}{2^n}$$

Así, se puede calcular el número de iteraciones necesarias para conseguir que no se supere el error máximo permitido. Si éste se denota como E , entonces

$$\frac{b - a}{2^n} \leq E$$

y despejando n se obtiene el número de iteraciones necesarias, como mínimo, para encontrar la aproximación con un error máximo E , esto es,

$$n \geq \log_2 \frac{b - a}{E}$$

Método de la Bisección: Error

Ejemplo: Se quiere aproximar el valor de la raíz de la función $f(x)$ en el intervalo $[0, 1]$, con una precisión de 3 cifras decimales significativas. ¿Cuántas iteraciones n son necesarias, como mínimo, para encontrar dicha aproximación?

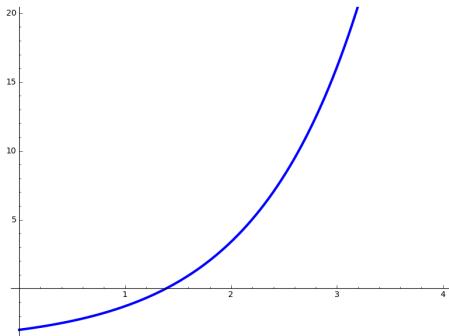
Si buscamos la aproximación con 3 cifras decimales significativas, entonces el error máximo permitido es $E = 0.5 \cdot 10^{-3}$

Para encontrar n se debe cumplir que

$$\frac{1-0}{2^n} \leq 0.5 \cdot 10^{-3} \Rightarrow n \geq \log_2 \frac{1}{0.0005} \Rightarrow n \geq 10.97$$

Con $n = 11$ iteraciones del método de la Bisección, se consigue una aproximación de la raíz en el intervalo $[0, 1]$ con una precisión de 3 cifras decimales significativas.

Método de Newton



Tenemos una función $f(x)$ **continua** y un punto inicial x_0 . Vamos a buscar una raíz de $f(x)$ cercano a x_0 . Se trata de un método de 1 punto. Éstos tratan de obtener una aproximación de la raíz empleando como información la derivada de la función.

Método de Newton: Algoritmo

Sea una función $f(x)$ y un punto inicial x_0 .

- La aproximación de la raíz será el punto x_1
- El punto x_1 se calcula como el punto en el que la tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$ corta el eje X.
- La ecuación de la tangente es:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

- Al imponer el corte con el eje X es:

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Método de Newton: Algoritmo y Error

- Se reitera el proceso, para encontrar otro valor x_2, x_3, \dots, x_n

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

- En la iteración n , el error que se comete al encontrar una aproximación de la raíz es:

$$E_n = |x_n - x_{n-1}|$$

- Se encontrará una aproximación de la raíz, cuando el error cometido en la iteración n es inferior al error máximo permitido (denotado por E). Esto es,

$$|x_n - x_{n-1}| \leq E$$

- En tal caso, consideraremos la aproximación de la raíz como x_n .

Método de Newton: Convergencia

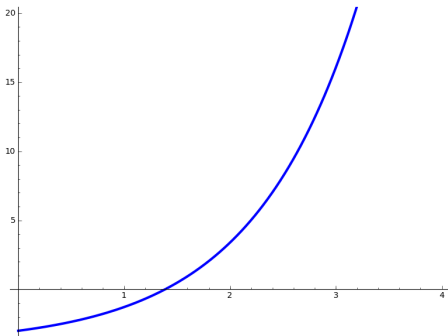
Proposición

Sea f una función continua, con derivada segunda continua, en $[a, b]$, con una raíz r en (a, b) . Si $f'(r) > 0$, $f''(x) > 0$, para todo $x \in [a, b]$, entonces la sucesión de puntos $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} = \{x_n\}$ converge a la raíz r para todo valor inicial x_0 .

El método de Newton proporciona una sucesión de valores $\{x_n\}$ que convergerá a la raíz de la función $f(x)$.

Método de Newton

Ejemplo: $f(x) = e^x - 4, x_0 = 2$



- $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1.54134113294645$
- $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.39771625526465$
- $x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1.38635934331094$

Sistemas de ecuaciones

Planteamiento del problema

Sea un sistema de ecuaciones lineales

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2,$$

...

$$a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n,$$

- $a_{11}, \dots, a_{nn}, b_1, \dots, b_n$ son los coeficientes del sistema, conocidos.
- Matriz del sistema: $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in M_{m \times n}$
- Vector de términos independientes: $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$
- Vector de variables: $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

Planteamiento del problema

Este tipo de sistemas aparecen en multitud de aplicaciones como:

- Procesamiento de señales
- Simulación
- Análisis y procesamiento de datos espaciales

Los métodos directos producen inconvenientes cuando se aplican a sistemas de grandes dimensiones, pues requieren muchas operaciones y son sensibles a errores de redondeo.

- Regla de Cramer
- Método de Gauss
- Método de Gauss con pivoteo parcial

Métodos Iterativos

Los métodos iterativos están especialmente indicados en la resolución de este tipo de sistemas, o en aquellos en las que las matrices son dispersas (poseen muchos ceros). Estudiaremos los siguientes métodos iterativos:

- Sistemas de Ecuaciones Lineales
 - ▶ Método de Jacobi
 - ▶ Método de Gauss-Seidel
- Sistemas de Ecuaciones No Lineales
 - ▶ Método de Newton

Sistemas Lineales: Métodos Iterativos

Sea el sistema de ecuaciones lineales: $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

Los métodos iterativos consisten en definir una sucesión de vectores $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots$ que converjan a la solución del sistema.

Para ello utilizamos que $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow (\mathbf{M} - \mathbf{N})\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{Mx} = \mathbf{Nx} + \mathbf{b}$$

con lo cual

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{Nx} + \mathbf{b})$$

Métodos iterativos

Analíticamente, los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel utilizan las matrices, creadas a partir de \mathbf{A} :

- \mathbf{D} es la matriz diagonal con la misma diagonal que \mathbf{A}
- \mathbf{L} es una matriz triangular inferior (tiene ceros en la diagonal y por encima) construida a partir de \mathbf{A} .
- \mathbf{U} es la matriz triangular superior (ceros en la diagonal y por debajo) construida a partir de \mathbf{A} .

Métodos iterativos

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & -2 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Método de Jacobi

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}, \mathbf{N} = -(\mathbf{L} + \mathbf{U})$$

con lo cual

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{L} + \mathbf{U} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$$

y el sistema $\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{N}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ es equivalente a resolver

$$\mathbf{D}\mathbf{x} = -(\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

Así, la sucesión se construye partiendo de un valor inicial \mathbf{x}_0 y definiendo

$$\mathbf{D}\mathbf{x}_{k+1} = -(\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x}_k + \mathbf{b}, \quad k \geq 0$$

Es equivalente a despejar de cada ecuación una incógnita.

Método de Jacobi

Ejemplo:

$$\begin{aligned}2x - y &= 9 \\ x + 6y - 2z &= 15 \\ 4x - 3y + 8z &= 1\end{aligned}$$

Despejamos x de la primera ecuación, y de la segunda, z de la tercera:

$$\begin{aligned}2x &= y + 9 \\ 6y &= -x + 2z + 15 \\ 8z &= -4x + 3y + 1\end{aligned}$$

Y partiendo de un punto inicial $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ calculamos el siguiente mediante estas ecuaciones.

Método de Jacobi

Partiendo de $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$, \mathbf{x}_1 se calcula:

$$\begin{aligned}2x_1 &= y_0 + 9 = 9 \\6y_1 &= -x_0 + 2z_0 + 15 = 15 \\8z_1 &= -4x_0 + 3y_0 + 1 = 1\end{aligned}$$

con lo cual $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1, z_1) = (4.5, 2.5, 0.125)$

De forma análoga vamos calculando más puntos de la sucesión:

- $\mathbf{x}_2 = (5.75, 1.7916667, -1.1875)$
- $\mathbf{x}_3 = (5.3958333, 1.1458333, -2.078125)$
- $\mathbf{x}_4 = (5.07291667, 0.90798611, -2.14322917)$

que convergen a la solución real, que en este caso, es $(5, 1, -2)$

Método de Jacobi

Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x - y &= 9 \\ x + 6y - 2z &= 15 \\ 4x - 3y + 8z &= 1 \end{aligned}, \text{ con } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & -2 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

tenemos:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Partimos de un valor inicial

$$\mathbf{x}_0 = (0, 0, 0)$$

Método de Jacobi

$$D\mathbf{x}_{k+1} = -(\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x}_k + \mathbf{b}, \quad k \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} 2x_{k+1} &= y_k + 9 \\ 6y_{k+1} &= -x_k + 2z_k + 15 \\ 8z_{k+1} &= -4x_k + 3y_k + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 &= y_0 + 9 = 9 \\ \text{Partiendo de } \mathbf{x}_0 = (0, 0, 0), \quad 6y_1 &= -x_0 + 2z_0 + 15 = 15 \\ 8z_1 &= -4x_0 + 3y_0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

Método de Gauss-Seidel

$$\mathbf{M} = \mathbf{D} + \mathbf{L}, \quad \mathbf{N} = -\mathbf{U}$$

con lo cual el sistema $\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{N}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ es equivalente a resolver

$$(\mathbf{D} + \mathbf{L})\mathbf{x} = -\mathbf{U}\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

Así, la sucesión se construye partiendo de un valor inicial \mathbf{x}_0 y definiendo

$$(\mathbf{D} + \mathbf{L})\mathbf{x}_{k+1} = -\mathbf{U}\mathbf{x}_k + \mathbf{b}, \quad k \geq 0$$

Equivale a despejar las ecuaciones, como hicimos antes, pero usar en la parte derecha de la ecuación los valores para las variables que vamos calculando previamente. Este método es más rápido que el método de Jacobi

Método de Gauss-Seidel

Ejemplo:

$$\begin{aligned}2x &= y + 9 \\6y &= -x + 2z + 15 \\8z &= -4x + 3y + 1\end{aligned}$$

Partiendo de $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$, \mathbf{x}_1 se calcula:

$$2x_1 = y_0 + 9 = 9 \Rightarrow x_1 = 4.5$$

$$6y_1 = -x_1 + 2z_0 + 15 = -4.5 + 15 \Rightarrow y_1 = 1.75$$

$$8z_1 = -4x_1 + 3y_1 + 1 = -4 * 4.5 + 3 * 1.75 + 1 \Rightarrow z_1 = -1.46875$$

con lo cual $\mathbf{x}_1 = (4.5, 1.75, -1.46875)$

- $\mathbf{x}_2 = (5.375, 1.11458333, -2.14453125)$
- $\mathbf{x}_3 = (5.05729167, 0.94227430, -2.05029297)$
- $\mathbf{x}_4 = (4.97113715, 0.98804615, -1.99005127)$

que convergen más rápidamente que con Jacobi a la solución real $(5, 1, -2)$

Método de Gauss-Seidel

$$(\mathbf{D} + \mathbf{L})\mathbf{x}_{k+1} = -\mathbf{U}\mathbf{x}_k + \mathbf{b}, \quad k \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} 2x_{k+1} &= y_k + 9 \\ x_{k+1} + 6y_{k+1} &= 2z_k + 15 \\ 4x_{k+1} - 3y_{k+1} + 8z_{k+1} &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 &= y_0 + 9 \\ \text{Partiendo de } \mathbf{x}_0 = (0, 0, 0), \quad 6y_1 &= -x_1 + 2z_0 + 15 \\ 8z_1 &= -4x_1 + 3y_1 + 1 \end{aligned}$$

Métodos iterativos: Convergencia

Decimos que una matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})$ es diagonalmente dominante si

$$|a_{kk}| > \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{kj}|, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Teorema

Dado el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$:

- Si \mathbf{A} es diagonalmente dominante, o
- si \mathbf{A}^T es diagonalmente dominante, o
- si \mathbf{A} es simétrica y definida positiva

entonces existe una única solución del sistema y los métodos iterativos producen una sucesión de vectores que converge a dicha solución.

Sistemas No Lineales: Método de Newton

Supongamos ahora que queremos resolver un sistema de ecuaciones no lineal

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

...

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

Denotamos $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$.

Se tendrá el sistema

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

Queremos aplicar el método de Newton a estos sistemas.

Sistemas No Lineales: Método de Newton

Para ello partimos de un vector \mathbf{x}_0 y tomamos

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_{n-1} - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}_{n-1})F(\mathbf{x}_{n-1})$$

donde \mathbf{J} es la matriz Jacobiana de F .

La ecuación equivale al sistema lineal:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}_{n-1})(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1}) = -F(\mathbf{x}_{n-1})$$

De modo que la solución del sistema no lineal se encuentra en el vector \mathbf{x}_n .

Método de Newton

Consideremos el sistema de ecuaciones no lineales:

$$x^3 - y^2 = 0,$$

$$x^2 + 2y^2 - 1 = 0$$

Calculamos la matriz Jacobiana:

$$\begin{pmatrix} 3x^2 & -2y \\ 2x & 4y \end{pmatrix}$$

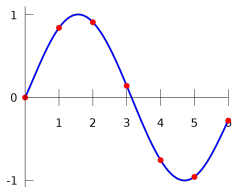
Tomamos $x_0 = (1, 1)$. Calculamos $x_d = x_1 - x_0$ como la solución del sistema

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} x_d = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Resolviendo, $x_d = (-1/4, -3/8)$, por lo que $x_1 = x_0 + x_d = (3/4, 5/8)$. Repitiendo el proceso, ahora con x_1 , obtenemos $x_2 = (2/3, 43/80)$.

Interpolación

Interpolación



La **interpolación** consiste en construir una función (o una curva)

que pase por una serie de puntos fijados.

Tipos:

- **Interpolación polinomial:** el conjunto de datos observados se interpola mediante el polinomio de menor grado que pase por todos los puntos.

Interpolación polinomial

Polinomio interpolador

Dados los puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, existe un único polinomio de grado $\leq n$, $P_n(x)$ tal que

$$P_n(x_k) = y_k, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

al cual llamamos **polinomio interpolador de los puntos**.

Para calcularlo, definimos $P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, e imponemos

$$P_n(x_k) = y_k, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

$$P_n(x_k) = a_0 + a_1x_k + \dots + a_nx_k^n$$

$$a_0 + a_1x_k + \dots + a_nx_k^n = y_k, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Polinomio interpolador

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Este es un sistema de $n + 1$ ecuaciones con $n + 1$ incógnitas. Se prueba que el determinante es no nulo. Por tanto, el polinomio interpolador es único.

Ejemplo

Consideremos los puntos:

$$(0, 4), (1, 3), (2, 1), (3, 4)$$

Tenemos que resolver el sistema:

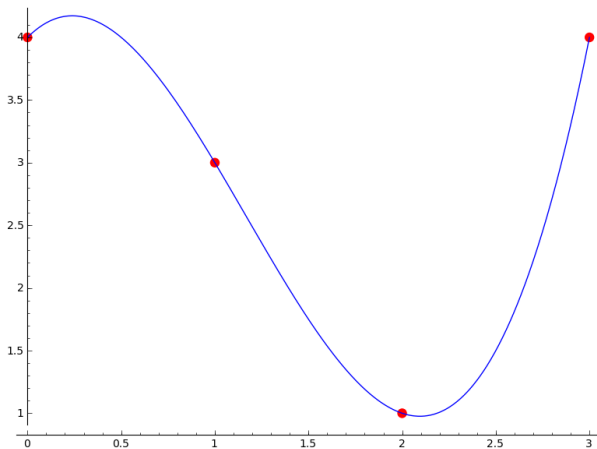
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Resolvemos y obtenemos

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = 4.0 + 1.5x - 3.5x^2 + x^3.$$

Ejemplo

Si dibujamos el polinomio interpolador y los puntos:



Polinomios de Interpolación

- Polinomio de Lagrange
- Polinomio de Newton

Polinomio de Lagrange

Polinomios de Lagrange

Dados $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, se definen los **polinomios de Lagrange** como

$$L_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

$L_i(x)$ es el polinomio interpolador de $(x_i, 1)$ y $(x_j, 0)$, para $j \neq i$.

Polinomio Interpolador de Lagrange

El polinomio interpolador de Lagrange de los puntos (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , \dots , (x_n, y_n) es

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x)$$

Polinomio de Lagrange: Ejemplo

Consideremos los puntos:

$$(0, 4), (1, 3), (2, 1), (3, 4)$$

Tenemos:

$$L_0(x) = -\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{6}, \quad L_1(x) = \frac{x(x-2)(x-3)}{2}$$

$$L_2(x) = -\frac{x(x-1)(x-3)}{2}, \quad L_3(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{6}$$

Polinomio Interpolador de Lagrange:

$$P_3(x) = 4 * L_0(x) + 3 * L_1(x) + 1 * L_2(x) + 4 * L_3(x).$$

Polinomio de Newton

Diferencias divididas de una función

Dada una función $f(x)$, se definen las **diferencias divididas** de $f(x)$ como

$$f[x_k] = f(x_k), \quad f[x_{k-1}, x_k] = \frac{f[x_k] - f[x_{k-1}]}{x_k - x_{k-1}},$$
$$f[x_{k-r}, \dots, x_k] = \frac{f[x_{k-r+1}, \dots, x_k] - f[x_{k-r}, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-r}}.$$

Polinomio Interpolador de Newton

El polinomio interpolador de Newton de los puntos (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , \dots , (x_n, y_n) , puede escribirse usando las diferencias divididas como

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0) \dots (x - x_{n-1}).$$

Polinomio de Newton: Ejemplo

Consideremos los puntos

$$(0, 4), (1, 3), (2, 1), (3, 4)$$

Creamos la tabla de diferencias divididas:

x	f[]	f[,]	f[, ,]	f[, , ,]
0	4			
1	3	-1		
2	1	-2	-1/2	
3	4	3	5/2	1

Polinomio de Newton: Ejemplo

x	$f[]$	$f[,]$	$f[, ,]$	$f[, , ,]$
0	4			
1	3	-1	-1/2	
2	1	-2	5/2	1
3	4	3		

El polinomio interpolador de Newton es:

$$P(x) = 4 - x - (1/2)x(x - 1) + x(x - 1)(x - 2).$$

Integración numérica

Integración numérica

- Queremos calcular el valor de

$$\int_a^b f(x) dx$$

pero no existe una expresión analítica de la integral.

- ▶ Por ejemplo, la capacidad calórica de un sólido es $\int_0^x \frac{t^3}{e^t - 1} dt$

- Disponemos de los valores

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots (x_n, f(x_n)), \quad x_0, \dots, x_n \in [a, b]$$

- La **integración numérica** es una herramienta que permite obtener valores aproximados de integrales definidas mediante los valores de la función en un conjunto de puntos.

Fórmulas de cuadratura

Denominamos **fórmula de cuadratura** a una expresión del tipo

$$Q[f] = \sum_{i=0}^n \omega_i f(x_i) \approx \int_a^b f(x) dx$$

- x_0, x_1, \dots, x_n son los **nodos de cuadratura**, que son puntos de $[a, b]$.
- Generalmente, $x_0 = a$, $x_n = b$
- Los nodos suelen estar equiespaciados
- $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ son los **pesos**.

El **error de truncamiento** de la fórmula es

$$E[f] = \int_a^b f(x) dx - Q[f]$$

Grado de precisión de una fórmula de cuadratura

El **grado de precisión** de la fórmula de cuadratura es el mayor número natural n de modo que $E[P] = 0$ para cualquier polinomio P de grado $\leq n$.

Fórmulas de Cuadratura de Newton-Cotes

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_n(x)dx$$

donde P_n es el polinomio interpolador de los puntos equidistantes

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots (x_n, f(x_n))$$

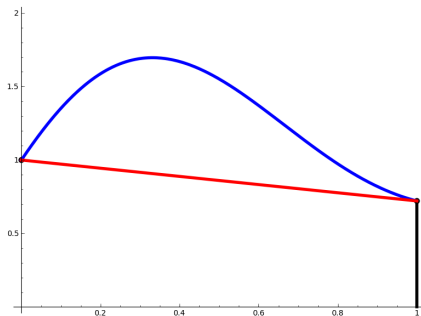
Así, el grado de precisión coincide con el grado del polinomio interpolador, n .

Fórmulas de cuadratura de Newton-Cotes

- Regla del Trapecio
- Regla de Simpson

Regla del Trapecio

Aproximamos el área bajo la curva f mediante el área bajo la recta que interpola $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.



$$x_0 = a, x_1 = b$$

$$h = x_1 - x_0 = b - a$$

$$P_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{h}(x - a)$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2}(f(a) + f(b))$$

Regla del Trapecio: Ejemplo

Aproximemos

$$\int_0^1 (1 + e^{-x} \sin(4x)) dx$$

$$x_0 = 0, x_1 = 1, h = 1$$

$$f(0) = 1, f(1) = 0.72158792$$

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \frac{1}{2}(f(0) + f(1)) = 0.86079396$$

El valor real, en este caso fácilmente calculable, es

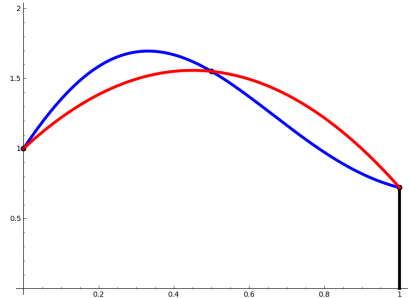
$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{21e - 4 \cos 4 - \sin 4}{17e} = 1.30825060$$

Regla de Simpson

Aproximamos el área bajo la curva f mediante el área bajo el polinomio interpolador de

$$(a, f(a)), (c, f(c)), (b, f(b))$$

siendo $c = \frac{a+b}{2}$ el punto medio del intervalo $[a, b]$.



Regla de Simpson

$$x_0 = a, x_1 = c = \frac{a+b}{2}, x_2 = b$$

$$h = \frac{b-a}{2}$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3}(f(a) + 4f(c) + f(b))$$

Regla de Simpson: Ejemplo

Aproximemos

$$\int_0^1 (1 + e^{-x} \sin(4x)) dx$$

$$x_0 = 0, x_1 = 0.5, x_2 = 1, h = 1/2$$

$$f(0) = 1, f(0.5) = 1.55151676816758, f(1) = 0.72158792$$

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \frac{1/2}{3} (f(0) + 4f(0.5) + f(1)) = 1.32127583$$