Ejercicios Tema 1. Segunda Parte

1. Resolver mediante eliminación gaussiana con pivote los sistemas

$$a)\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \\ 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_3 - 2x_4 = 1 \\ 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases} \qquad c)\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 2x_3 - 4x_4 = 2 \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_4 = 4 \end{cases}$$

a) matriz ampliada:

$$\begin{pmatrix} 1.0 & 2.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 2.0 & -2.0 & 3.0 & 0.0 & 3.0 \\ 1.0 & 0.0 & 4.0 & -2.0 & 0.0 \\ 0.0 & 3.0 & 4.0 & 1.0 & 0.0 \end{pmatrix}$$

Intercambiamos las filas 1 y 2

$$\begin{pmatrix} 2.0 & -2.0 & 3.0 & 0.0 & 3.0 \\ 1.0 & 2.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 1.0 & 0.0 & 4.0 & -2.0 & 0.0 \\ 0.0 & 3.0 & 4.0 & 1.0 & 0.0 \end{pmatrix}$$

Hacemos 0 debajo de la diagonal en la columna 1.
Fila 2$\rightsquigarrow$ Fila 2 - Fila 1 * 0.5.
Fila 3$\rightsquigarrow$ Fila 3 - Fila 1 * 0.5.

$$\begin{pmatrix} 2.0 & -2.0 & 3.0 & 0.0 & 3.0 \\ 0.0 & 3.0 & -1.5 & 1.0 & -1.5 \\ 0.0 & 1.0 & 2.5 & -2.0 & -1.5 \\ 0.0 & 3.0 & 4.0 & 1.0 & 0.0 \end{pmatrix}$$

Intercambiamos las filas 4 y 2

$$\begin{pmatrix} 2.0 & -2.0 & 3.0 & 0.0 & 3.0 \\ 0.0 & 3.0 & 4.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 2.5 & -2.0 & -1.5 \\ 0.0 & 3.0 & -1.5 & 1.0 & -1.5 \end{pmatrix}$$

Hacemos 0 debajo de la diagonal en la columna 2
Fila 3$\rightsquigarrow$ Fila 3 - Fila 2 $*$ 1/3.
Fila 4$\rightsquigarrow$ Fila 4 - Fila 2

$$\begin{pmatrix} 2.0 & -2.0 & 3.0 & 0.0 & 3.0 \\ 0.0 & 3.0 & 4.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.16666666667 & -2.33333333333 & -1.5 \\ 0.0 & 0.0 & -5.5 & 0.0 & -1.5 \end{pmatrix}$$

Intercambiamos las filas 4 y 3

$$\begin{pmatrix} 2.0 & -2.0 & 3.0 & 0.0 & 3.0 \\ 0.0 & 3.0 & 4.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -5.5 & 0.0 & -1.5 \\ 0.0 & 0.0 & 1.16666666667 & -2.33333333333 & -1.5 \end{pmatrix}$$

Hacemos 0 debajo de la diagonal en la columna 3
Fila 4 $\rightsquigarrow$ Fila 4 + Fila 3 * 1.16666666667/5.5

$$\begin{pmatrix} 2.0 & -2.0 & 3.0 & 0.0 & 3.0 \\ 0.0 & 3.0 & 4.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -5.5 & 0.0 & -1.5 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -2.33333333333 & -1.81818181818 \end{pmatrix}$$

Y ahora resolvemos

$$(0.467532467532, -0.623376623377, 0.272727272727, 0.779220779221)$$

2. Resolver los siguientes sistemas lineales utilizando eliminación gaussiana con y sin pivote:

$$a) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 100x_3 = 1 \\ x_1 - 10x_2 + 0.00001x_3 = 0 \\ 3x_1 - 100x_2 + 0.0001x_3 = 0 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} x_1 + 20x_2 - x_3 + 0.001x_4 = 1 \\ 2x_1 - 5x_2 + 20x_3 - 0.1x_4 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - 100x_3 - 10x_4 = 1 \\ 2x_2 - 100x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Sin pivote. matriz ampliada:

$$\begin{pmatrix} 2.0 & -3.0 & 100.0 & 1.0 \\ 1.0 & -10.0 & 1 \times 10^{-05} & 0.0 \\ 3.0 & -100.0 & 0.0001 & 0.0 \end{pmatrix}$$

Hacemos 0 debajo de la diagonal en la columna 1
Fila 2 $\rightsquigarrow$ Fila 2 - Fila 1 * 0.5. Fila 3 $\rightsquigarrow$ Fila 3 - Fila 1 * 1.5

$$\begin{pmatrix} 2.0 & -3.0 & 100.0 & 1.0 \\ 0.0 & -8.5 & -49.99999 & -0.5 \\ 0.0 & -95.5 & -149.9999 & -1.5 \end{pmatrix}$$

Hacemos 0 debajo de la diagonal en la columna 2
Fila 3 $\rightsquigarrow$ Fila 3 - Fila 2 * 11.2352941176

$$\begin{pmatrix} 2.0 & -3.0 & 100.0 & 1.0 \\ 0.0 & -8.5 & -49.99999 & -0.5 \\ 0.0 & 0.0 & 411.764693529 & 4.11764705882 \end{pmatrix}$$

Y ahora resolvemos

$$\left(2.56564124327 \times 10^{-17}, 1.00000003029 \times 10^{-08}, 0.0100000003\right)$$

a) Con pivote. matriz ampliada:

$$\begin{pmatrix} 2.0 & -3.0 & 100.0 & 1.0 \\ 1.0 & -10.0 & 1 \times 10^{-05} & 0.0 \\ 3.0 & -100.0 & 0.0001 & 0.0 \end{pmatrix}$$

Intercambiamos las filas 3 y 1

$$\begin{pmatrix} 3.0 & -100.0 & 0.0001 & 0.0 \\ 1.0 & -10.0 & 1 \times 10^{-05} & 0.0 \\ 2.0 & -3.0 & 100.0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

Hacemos 0 debajo de la diagonal en la columna 1
Fila 2 $\rightsquigarrow$ Fila 2 - Fila 1 * 0.333333333333 Fila 3 $\rightsquigarrow$ Fila 3 - Fila 1 * 0.666666666667

$$\begin{pmatrix} 3.0 & -100.0 & 0.0001 & 0.0 \\ 0.0 & 23.3333333333 & -2.33333333333 \times 10^{-05} & 0.0 \\ 0.0 & 63.6666666667 & 99.9999333333 & 1.0 \end{pmatrix}$$

Intercambiamos las filas 3 y 2

$$\begin{pmatrix} 3.0 & -100.0 & 0.0001 & 0.0 \\ 0.0 & 63.6666666667 & 99.9999333333 & 1.0 \\ 0.0 & 23.3333333333 & -2.33333333333 \times 10^{-05} & 0.0 \end{pmatrix}$$

Hacemos 0 debajo de la diagonal en la columna 2
Fila 3 $\rightsquigarrow$ Fila 3 - Fila 2 * 0.366492146597

$$\begin{pmatrix} 3.0 & -100.0 & 0.0001 & 0.0 \\ 0.0 & 63.6666666667 & 99.9999333333 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & -36.6492135602 & -0.366492146597 \end{pmatrix}$$

Y ahora resolvemos

$$(0.0,\ 1.00000003 \times 10^{-08},\ 0.0100000003)$$

3. Aplicar tres pasos del método de Jacobi a los sistemas (partiendo de (0,0,0,0))

$$a)\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases} \quad b)\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - 8x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_3 - 2x_4 = 1 \\ 5x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 0 \end{cases} \quad c)\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 2x_3 - 4x_4 = 2 \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_4 = 4 \end{cases}$$

a) $(0.3, -0.48, 0.0, 0.0)$.
c) No se puede aplicar el método de Jacobi, se debe a que la matriz D es singular (su determinante es 0, y por eso no tiene inversa, con lo cual no podemos resolver el sistema $Dx = -(L+U)x + b$)

4. Aplicar tres pasos del método de Gauss-Seidel a los sistemas (partiendo de (0,0,0,0))

$$a)\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases} \quad b)\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - 8x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_3 - 2x_4 = 1 \\ 5x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 0 \end{cases} \quad c)\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 2x_3 - 4x_4 = 2 \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_4 = 4 \end{cases}$$

a)$(0.24, -0.504, 0.0, 0.0)$

5. Calcular un cero del sistema

$$\begin{aligned} \exp(xy) - 6xy &= 0, \\ -\exp(y) + 6x &= 0, \end{aligned}$$

mediante tres pasos del método de Newton, comenzando en $(1, 1)$.

(0.317413905042, 0.644210809738)

6. Calcular un cero del sistema

$$\begin{aligned} \sin(x) - y^2/\pi = 0, \\ \sin(xy) = 0, \end{aligned}$$

mediante tres pasos del método de Newton, comenzando en $(2.5, 1)$.

(2.69389973089, 1.16618193637)