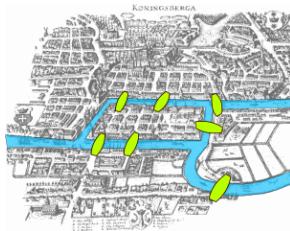


Ampliación de Matemáticas

Teoría de Grafos

15 de octubre de 2018

Grafos: Isomorfía, conexión y grados

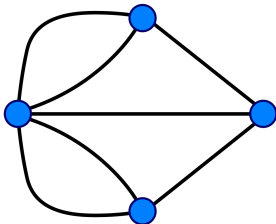


La Teoría de Grafos comenzó en 1735 al resolver Leonard Euler el problema de los puentes de Königsberg.

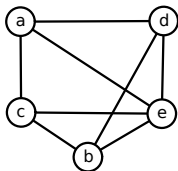
Los grafos permiten modelizar situaciones en lo que lo único que importa es si los objetos están relacionados.

Tienen multitud de aplicaciones:

- Redes
- Diagramas de flujo
- Bases de Datos
- etc



Definición de grafo



Un **grafo** (V, E) está formado por

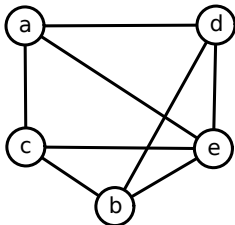
- un **conjunto de vértices** V
- un **conjunto de aristas** E

Las aristas se determinan por los vértices que conectan.

Decimos que dos vértices $u, v \in V$ son **adyacentes** si existe una arista $e = \{u, v\}$ que los conecta.

Así, decimos que e es **incidente** con u y v y que u, v son los **extremos** de e .

Definición de grafo

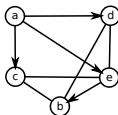
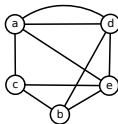
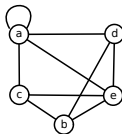


En el grafo de la izquierda:

$$V = \{a, b, c, d, e\}$$

$$E = \{\{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \\ \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \\ \{c, e\}, \{d, e\}\}$$

Generalizaciones del concepto de grafo

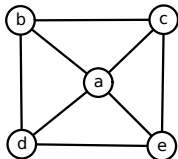
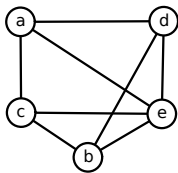


Si admitimos vértices conectados con ellos mismos: **pseudografo**. En dicho caso se denominan **lazos** a las aristas que conectan un vértice consigo mismo.

Si hay más de una conexión entre dos vértices: **multigrafo**. Se denominan **paralelas** a las aristas que conectan los mismos vértices.

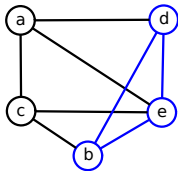
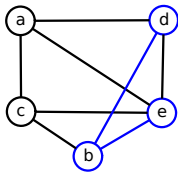
Si los pares de vértices son ordenados: **digrafo** o **grafo dirigido**

Grafos isomorfos



Dos grafos $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ son **isomorfos** si renombrando los vértices y aristas del primero, obtenemos el segundo

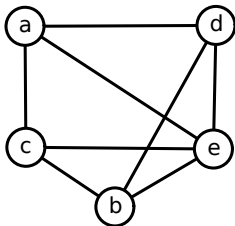
Subgrafos



Denominamos **subgrafo** de un grafo a un grafo obtenido tomando un subconjunto de vértices y un subconjunto de aristas y todos los extremos de estas.

Denominamos **subgrafo completo** de un grafo a un grafo obtenido tomando un subconjunto de vértices y todas las aristas cuyos extremos sean esos vértices.

Representación con listas



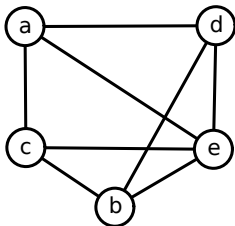
Lista de incidencia: Se enumeran las aristas

$$\{\{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \\ \{b, d\}, \{b, e\}, \{c, e\}, \{d, e\}\}$$

Lista de adyacencia: Se enumeran los vértices adyacentes:

$$\{\{a \rightarrow c, d, e\}, \{b \rightarrow c, d, e\}, \\ \{c \rightarrow a, b, e\}, \{d \rightarrow a, b, e\} \\ \{e \rightarrow a, b, c, d\}\}$$

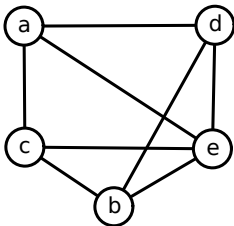
Representación con matrices



Matriz de incidencia: Se representan las aristas. -1 del vértice que sale y 1 al vértice que llega.

$$\begin{pmatrix}
 & a & b & c & d & e \\
 a & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 b & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 c & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 d & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
 e & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
 f & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
 g & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
 h & 0 & 0 & 0 & -1 & 1
 \end{pmatrix}$$

Representación con matrices



Matriz de adyacencia: En la posición (i,j) hay un 1 si las aristas i,j son adyacentes.

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Isomorfía a partir de la matriz de adyacencia

Sean $M_G, M_{G'}$ matrices de adyacencia de los grafos G y G' .

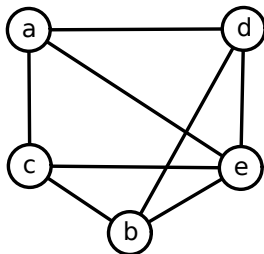
Teorema

Los grafos G y G' son isomorfos si y solo si existe una matriz de permutaciones P tal que $PM_G = M_{G'}P$.

$$M_G = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad M_{G'} = \begin{matrix} & \begin{matrix} a' & b' & c' & d' & e' \end{matrix} \\ \begin{matrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \\ e' \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

P es la permutación $\{1, 2, 3, 4, 5\} \rightsquigarrow \{5, 2, 3, 1, 4\}$

Grado de un vértice



Denominamos **grado** de un vértice al número de aristas que lo tienen como extremo.

En el grafo de la figura:

$$\text{gr}(a) = 3, \text{gr}(e) = 4$$

Se denomina **secuencia de grados** de un grafo a la lista (decreciente) de los grados del grafo.

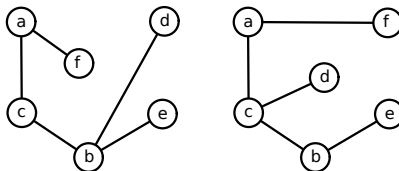
$$(4, 3, 3, 3, 3)$$

Secuencia de grados

Proposición

Si dos grafos son isomorfos, entonces tienen la misma secuencia de grados.

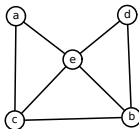
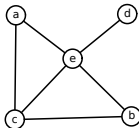
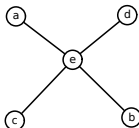
Dos grafos pueden tener la misma secuencia de grados y no ser isomorfos.



Propiedades de la secuencia de grados

- La suma de los grados es igual al doble del número de aristas.
- En particular, la suma de los grados es un número par.
- **Algoritmo de Havel-Hakimi:** Para determinar si una secuencia de números naturales $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k \geq 0$ es la secuencia de grados de un grafo, debemos usar el siguiente algoritmo:
 - 1 Si todos los elementos son cero, terminamos con respuesta afirmativa. En caso contrario,
 - 2 Eliminamos n_1 de la secuencia y restamos 1 a (los primeros) n_1 elementos.
 - 3 Si algún entero toma valor negativo, terminamos con respuesta negativa.
 - 4 Reordenamos la secuencia de mayor a menor.
 - 5 Volvemos al primer paso.

Algoritmo de Havel-Hakimi



Tomemos $(4, 3, 3, 2, 2)$. Asignamos a cada grado un nombre de vértice:

$$\begin{matrix} e & c & b & d & a \\ (4, & 3, & 3, & 2, & 2) \end{matrix}$$

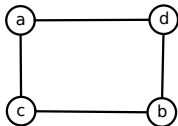
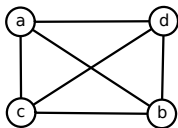
Unimos el vértice eliminado con los vértices a los que restamos.

$$\begin{matrix} c & b & a & d \\ (2, & 2, & 1, & 1) \end{matrix}$$

Repetimos el proceso: $\begin{matrix} b & d & a \\ (1, & 1, & 0) \end{matrix}$

Repetimos y terminamos: $\begin{matrix} d & a \\ (0, & 0) \end{matrix}$

Grafos regulares y completos



Denominamos **grafo completo** a un grafo tal que todos los pares de vértices están conectados.

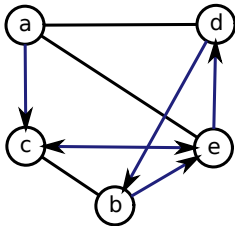
Denotamos K_n al grafo completo de n vértices.

Denominamos **grafo k -regular** a todo grafo tal que todos sus vértices tienen grado k .

Todo grafo completo K_n es $n - 1$ regular.

Caminos en un grafo

Camino, circuito y ciclo



acedbec

Camino de longitud 6

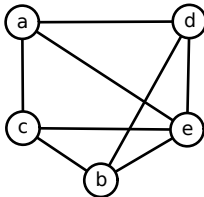
Camino: Sucesión finita de vértices de modo que cada dos consecutivos son adyacentes.

El número de aristas dentro de un camino es su **longitud**.

Se denominan **extremos** del camino al primer y último vértice.

Dos vértices u, v están **conectados** si son los extremos de algún camino.

Camino, circuito y ciclo



Un camino es **cerrado** cuando los extremos coinciden: *acbeca*

Un camino es **simple** cuando no se repite ningún vértice: *acbde*

Un **ciclo** es un camino cerrado en el que no se repite ningún otro vértice: *acbea*

Un **circuito** es un camino cerrado en el que no se repite ninguna arista: *edaebce*

Teorema

Si en un grafo G existe un camino que conecta dos vértices distintos, entonces existe un camino simple que conecta los mismos vértices.

Demostración.

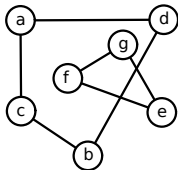
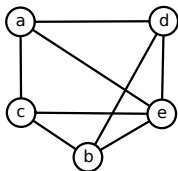
Supongamos que u, v están conectados por $u = w_0 w_1 w_2 \dots w_n = v$. Si no es simple $w_i = w_j$, para algún $i < j$. Entonces el camino

$$w_0 w_1 \dots w_{i-1} w_i = w_j w_{j+1} \dots w_n$$

tiene un vértice repetido menos. Repitiendo el proceso obtenemos un camino simple.



Grafo conexo y componentes conexas



Decimos que un grafo es **conexo** si todo par de vértices están conectados.

Se denomina **componente conexa** a todo subgrafo conexo maximal (que no esté contenido en otro subgrafo conexo más grande).

En el grafo de la izquierda, hay dos componentes conexas: $\{a, b, c, d\}$ y $\{e, f, g\}$.

Conexión a partir de la matriz de adyacencia

Teorema

Sea G un grafo y M_G su matriz de adyacencia. La posición (i, j) de la matriz M_G^k es el número de caminos de longitud k que comienzan en el vértice i y terminan en el j .

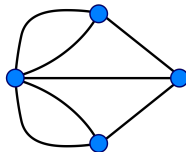
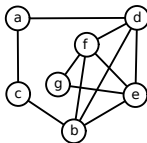
Definimos la **matriz de conexión** como

$$M_C = M_G + M_G^2 + \dots + M_G^{n-1}$$

donde n es el número de vértices.

Entonces el grafo es conexo si y sólo si M_C no tiene ceros.

Grafo euleriano



Un grafo es **euleriano** cuando existe un circuito (camino cerrado en que no se repite ninguna arista) que recorre todas las aristas. A dicho camino lo llamamos **circuito euleriano**.

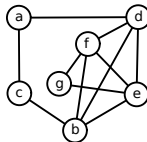
El problema de los puentes de Königsberg se reduce a encontrar un circuito euleriano.

Teorema

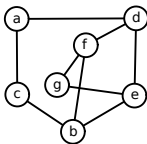
Un grafo conexo es euleriano si y solo si todo vértice tiene grado par.

Algoritmo de Hierholzer.

- 1 Partimos de un vértice v cualquiera.
- 2 Elegimos un vértice u adyacente a v y eliminamos la arista $\{u, v\}$.
- 3 Repetimos el paso 2 hasta volver a v . Esto nos genera un circuito C .
- 4 Si no quedan aristas, hemos terminado. Si quedan aristas tomamos v un vértice de C de grado positivo.
- 5 Repetimos 2 y 3 y obtenemos un nuevo circuito C_1 . Unimos C_1 a C .
- 6 Si no quedan aristas hemos terminado. En caso contrario, vamos a 4.



Grafos no eulerianos



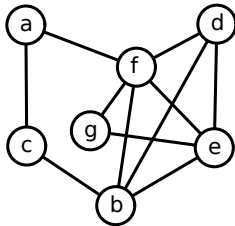
¿Qué puede ocurrir si el grafo no es euleriano? Puede existir un **camino abierto euleriano**: camino abierto que recorre todas las aristas sin repetir ninguna.

Teorema

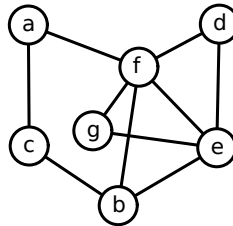
Un grafo conexo tiene un camino abierto euleriano si y sólo si tiene exactamente 2 vértices de grado impar.

Si añadimos una arista que una los dos vértices de grado impar, así pasan a tener grado par. Creamos un circuito euleriano, y luego borramos la arista que hemos añadido.

Grafos hamiltonianos



Hamiltoniano



No hamiltoniano

Un grafo es **hamiltoniano** cuando existe un ciclo que recorre todos los vértices.

Teorema

Sea G un grafo con $n \geq 3$ vértices. Si cada vértice tiene grado $\geq n/2$, entonces G es hamiltoniano.

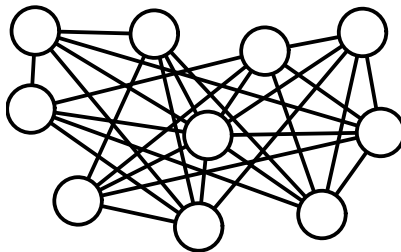
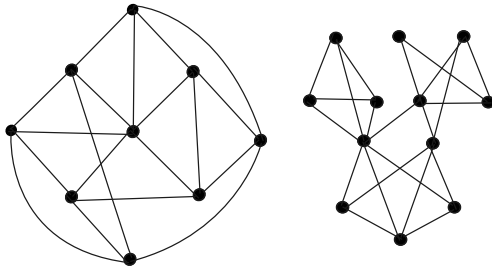


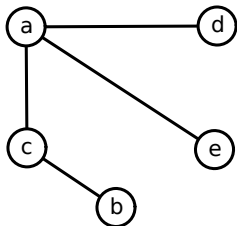
Figura: El grafo es hamiltoniano por el Teorema de Ore

Teorema (Criterio de Euler)

Sea G un grafo conexo con más de dos vértices. Si existe un vértice de G tal que al borrarlo junto con todas las aristas que lo tienen por extremo, se obtiene un subgrafo no conexo, entonces G no es hamiltoniano.



Árboles y grafos dirigidos



Decimos que un grafo es un **árbol** si es conexo y no tiene ciclos.

Si un grafo no es conexo ni tiene ciclos decimos que es un **bosque**.

Teorema

Un grafo T es un árbol si y solo si cada dos vértices distintos de T se conectan por un único camino simple.

Teorema

Un grafo conexo de n vértices es un árbol si y sólo si tiene $n - 1$ aristas.

Demostración.

Probaremos que si T es un árbol, entonces tiene $n - 1$ aristas.

Por inducción sobre el número de aristas.

Si T tiene 0 aristas, entonces para ser conexo ha de ser un único vértice y se cumple el resultado.

Supongamos que se cumple para árboles de menos de n aristas y veamos que es cierto para un árbol T de n aristas.

Si eliminamos una arista en un árbol, entonces pasa a tener dos componentes conexas, T_1 , T_2 , sin ciclos, luego dos árboles.

Sea n_1 el número de aristas de T_1 , y n_2 el de T_2 . $n_1, n_2 < n$ y
 $n_1 + n_2 = n - 1$.

Por inducción T_1 tiene $n_1 + 1$ aristas y T_2 tiene $n_2 + 1$ aristas. Entonces T tiene $n_1 + 1 + n_2 + 1 = n + 1$ aristas.

Árboles

Decimos que un vértice v es **terminal** si $\text{gr}(v) = 1$.

Teorema

Un árbol de $n \geq 2$ vértices tiene al menos dos vértices terminales.

Demostración.

Supongamos que no es cierto (tenemos 1 o 0 vértices terminales).

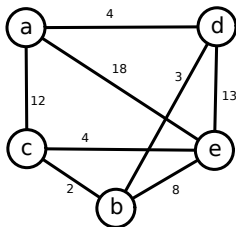
Si tenemos un único vértice terminal, entonces tenemos la contradicción.

$$2(n-1) = 2\#E = \sum_v \text{gr}(v) \geq 1 + 2(n-1)$$

Si no tenemos vértices terminales, entonces tenemos la contradicción.

$$2(n-1) = 2\#E = \sum_v \text{gr}(v) \geq 2n.$$

Grafo etiquetado



Se denomina **grafo etiquetado** a un grafo $G = (V, E)$ con una función $p: E \rightarrow \mathbb{R}$.

Denominamos **peso**, **etiqueta** o **distancia** de $\{u, v\} \in E$ al valor $p(\{u, v\})$.

Si $\{u, v\} \notin E$, podemos considerar $p(u, v) = +\infty$.

Definimos **longitud** de un camino como la suma de las etiquetas de las aristas.

Distancia, radio y diámetro de un grafo

Dados dos vértices u, v , se define **distancia** entre dos vértices u, v , $d(u, v)$, como el mínimo de las longitudes de los caminos que unen u y v .

Se define la **excentricidad** de un vértice v como el máximo de la distancias de v a los vértices del grafo.

$$e(v) = \max\{d(u, v) : u \in V(G)\}.$$

Se define el **radio** de un grafo como el mínimo de las excentricidades y el **diámetro** como el máximo.

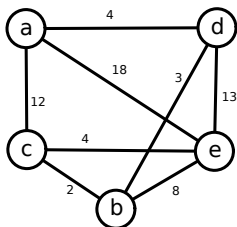
$$r(G) = \min\{e(v) : v \in V(G)\}, \quad d(G) = \max\{e(v) : v \in V(G)\}.$$

Algoritmo de Dijkstra

Teorema (Algoritmo de Dijkstra)

La distancia entre dos vértices x e y se puede obtener por el siguiente procedimiento:

- ❶ *Generamos $T = V$ y $L(x) = 0$, $L(v) = +\infty$ para todo $v \in V$.*
- ❷ *Calculamos $v \in T$ tal que $L(v) = \min\{L(w) : w \in T\}$.*
- ❸ *Si $v = y$, entonces hemos terminado y la distancia es $L(y)$.*
- ❹ *En caso contrario, hacemos $T \rightarrow T \setminus \{v\}$,
 $L(w) \rightarrow \min\{L(w), L(v) + d(v, w)\}$ y volvemos a 2.*



Distancia mínima de a a e .

$$T = (a, b, c, d, e)$$

$$L = (0, \infty, \infty, \infty, \infty)$$

Tomamos $v = a$:

$$T = (b, c, d, e)$$

$$L = (\infty, 12, 4, 18)$$

Tomamos $v = d$:

$$T = (b, c, e), L = (7, 12, 17)$$

Tomamos $v = b$:

$$T = (c, e), L = (9, 16)$$

Tomamos $v = c$:

$$T = (e), L = (13)$$

La distancia es 13.

Corrección del algoritmo de Dijkstra

Vamos a probar que si v es el vértice elegido en el paso 2, entonces $L(v)$ es la menor distancia de v a x .

Denotaremos $T^{(k)}$ el conjunto T en el paso k .

Denotaremos $D(x, v)$ a la distancia del vértice v al origen, que es la menor de las longitudes de los caminos que conectan v con el origen.

Como para calcular $L(v)$ sumamos distancias a lo largo de un camino, siempre $L(v) \geq D(x, v)$.

Por inducción sobre el número de pasos.

Paso 0.

En el paso 0, $L(x) = 0$ y es la mínima pues todos los pesos son positivos.

Si se verifica para el paso n , también para el $n + 1$.

Sea v el vértice añadido en el paso $n + 1$ ($T^{(n)} = T^{(n+1)} + \{v\}$).

Sea $x = w_0 w_1 \dots w_k = v$ el camino que da la distancia mínima al origen.

Nótese que la longitud de $w_0 w_1 \dots w_j$, $j < k$ es la distancia de w_j al origen, pues en otro caso, tendríamos un camino más corto de x a v .

Sea w_i el primer vértice del camino en $T^{(n)}$. En particular $D(x, w_i)$ es la longitud del camino $w_0 w_1 \dots w_i$.

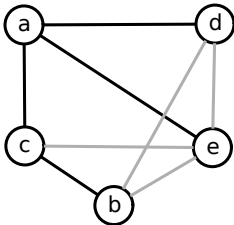
Como w_{i-1} ya ha sido visitado, $L(w_{i-1})$ es la distancia de w_{i-1} al origen. Es más, $L(w_i) \leq L(w_{i-1}) + d(w_{i-1}, w_i)$.

Por otra parte, por elección de v ,

$$L(v) \leq L(w_i) \leq L(w_{i-1}) + d(w_{i-1}, w_i) = D(x, w_i) \leq D(x, w_k).$$

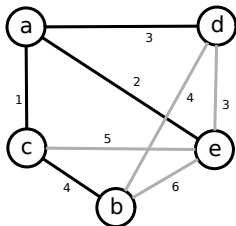
Como teníamos $L(v) \geq D(x, w_k)$, entonces $L(v) = D(x, w_k)$.

Árbol recubridor



Dado un grafo conexo G , se denomina **árbol recubridor** o **generador** de G a cualquier árbol que sea subgrafo de G y contenga todos los vértices.

Árbol recubridor minimal



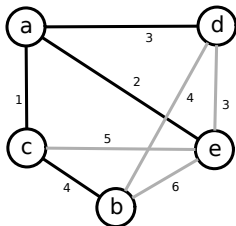
Dado un grafo etiquetado, se denomina **Árbol recubridor minimal** a cualquier árbol recubridor tal que la suma de los pesos de las aristas sea menor o igual a la de cualquier otro árbol recubridor.

Algoritmo de Kruskal

Partimos de un grafo conexo y etiquetado G .

- 1 Se considera un bosque B , formado en un principio por el conjunto de todos los vértices y ninguna arista.
- 2 Se toma la arista del grafo de menor peso.
- 3 Si la arista conecta dos árboles distintos del bosque B , se añade al bosque y se elimina de G .
- 4 Si la arista no conecta dos árboles distintos, se elimina de G .
- 5 Si queda alguna arista en G , se vuelve a 2

Algoritmo de Kruskal



En B sólo indicaremos las aristas en cada paso.

$$B = \{\}$$

$$B = \{\{a, c\}\}$$

$$B = \{\{a, c\}, \{a, e\}\}$$

$$B = \{\{a, c\}, \{a, e\}, \{a, d\}\}$$

Descartamos $\{d, e\}$

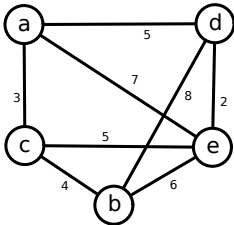
$$B = \{\{a, c\}, \{a, e\}, \{a, d\}, \{c, b\}\}$$

Algoritmo de Prim

Partimos de un grafo conexo $G = (V, E)$.

- 1 Definimos un grafo T formado inicialmente por uno de los vértices.
- 2 De todos los vértices adyacentes a T que no estén en T , añadimos aquel cuya distancia sea mínima y la arista que lo conecta con T de dicha distancia.
- 3 Repetimos el paso anterior hasta agotar todos los vértices.

Algoritmo de Prim



En T indicaremos las aristas en cada paso.

Partimos del vértice a como único vértice de T .

$$T = \{\{a, c\}\}$$

$$T = \{\{a, c\}, \{c, b\}\}$$

$$T = \{\{a, c\}, \{c, b\}\}$$

$$T = \{\{a, c\}, \{c, b\}, \{a, d\}\}$$

$$T = \{\{a, c\}, \{c, b\}, \{a, d\}, \{d, e\}\}$$

Definición

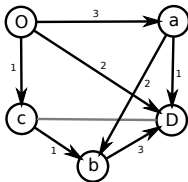
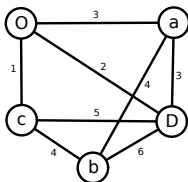
Dado un grafo etiquetado G , un **flujo entre dos vértices**, el origen O y el destino D , es un subgrafo dirigido etiquetado F tal que:

- 1 O, D son vértices de F .
- 2 Los pesos de las aristas de F son menores o iguales que los de G .
- 3 Para todo vértice v de F distinto de O, D la suma de los pesos de las aristas que salen es igual al de las aristas que entran.

Se define la **cantidad total de flujo** como la suma de los pesos de las aristas que salen de O menos la suma de los pesos de las aristas que llegan.

El **problema del flujo máximo** trata de obtener un flujo tal que la cantidad total de flujo sea máxima.

Ejemplo flujo



$$\begin{matrix} O \\ a \\ b \\ c \\ D \end{matrix} \begin{pmatrix} O & a & b & c & D \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz del flujo

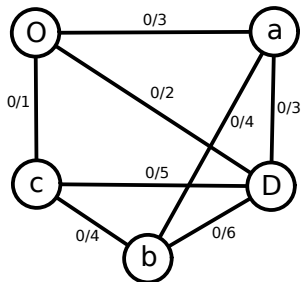
Algoritmo de Ford-Fulkenson

La **capacidad residual** de dos nodos $c(u, v)$ es la diferencia entre el peso de la arista $\{u, v\}$ de G y el flujo $f(u, v)$.

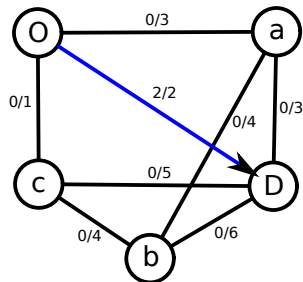
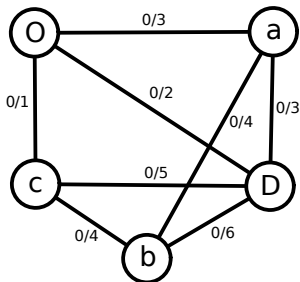
Una **trayectoria de aumento** como un camino simple de O a D tal que para cada dos vértices u, v del camino, tenemos $c(u, v) > 0$.

- 1 Comenzamos con un flujo F tal que $F(u, v) = 0$ para todo par de vértices u, v .
- 2 Buscamos una trayectoria de aumento. Sea $c_t > 0$ el mínimo de $c(u, v)$ donde (u, v) recorre las aristas de la trayectoria.
- 3 Para cada par de vértices (u, v) de la trayectoria, hacemos $F(u, v) = F(u, v) + c_t$ y $F(v, u) = F(v, u) - c_t$.
- 4 Volvemos a 2 hasta que no encontremos más trayectorias de aumento.

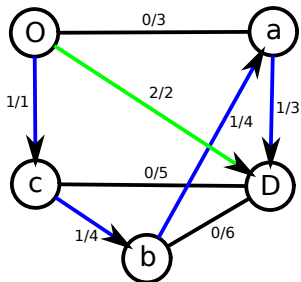
Algoritmo de Ford-Fulkenson

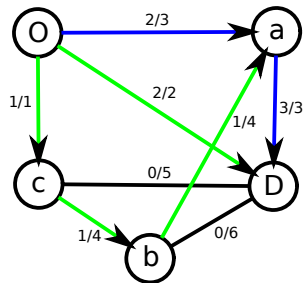


Algoritmo de Ford-Fulkenson



Algoritmo de Ford-Fulkenson

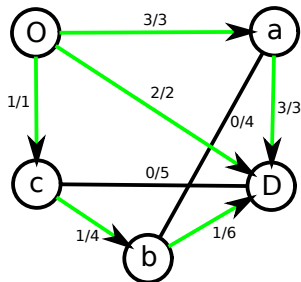
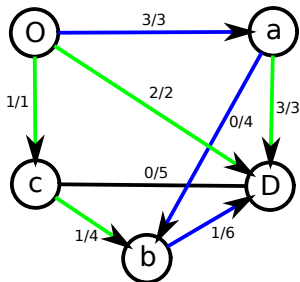




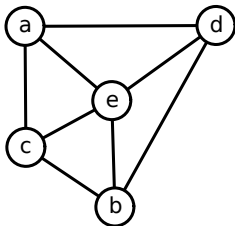
```

graph TD
    O((O)) -- "3/3 (blue)" --> a((a))
    O((O)) -- "2/2 (green)" --> D((D))
    O((O)) -- "1/1 (green)" --> c((c))
    a((a)) -- "0/4 (blue)" --> D((D))
    a((a)) -- "3/3 (green)" --> c((c))
    a((a)) -- "1/6 (blue)" --> b((b))
    c((c)) -- "0/5 (black)" --> D((D))
    c((c)) -- "1/4 (green)" --> b((b))
  
```

Algoritmo de Ford-Fulkenson



Mapas y coloraciones

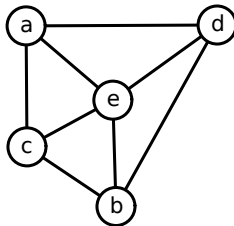


Un grafo es **plano** si admite una representación gráfica en el plano de modo que no se corten las aristas.

Dicha representación gráfica se denomina **mapa**.

Dado un mapa, se denomina **región** a un camino cerrado tal que en su “interior” no hay ni vértices ni aristas.

Se denomina **grado de una región** a la longitud del camino que la rodea.



Teorema

Sea G un grafo plano y R el conjunto de regiones de un mapa asociado. Entonces

$$\sum_{r \in R} gr(r_i) = 2\#E.$$

Teorema (Fórmula de Euler)

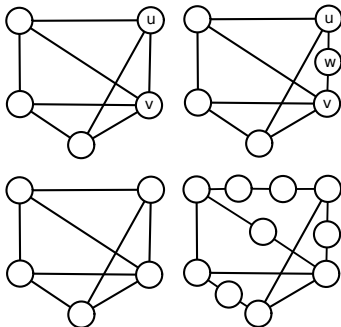
Sea M un mapa conexo, que representa al grafo $G = (V, E)$. Entonces

$$\#V - \#E + \#R = 2.$$

Como consecuencia, podemos determinar si un grafo no es plano:

- Si es conexo y $\#E > 3\#V - 6$.
- Si es conexo, no contiene un clique de tres vértices y $\#E > 2\#V - 4$.

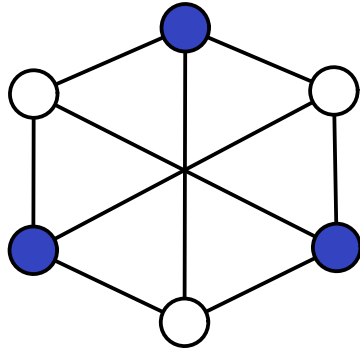
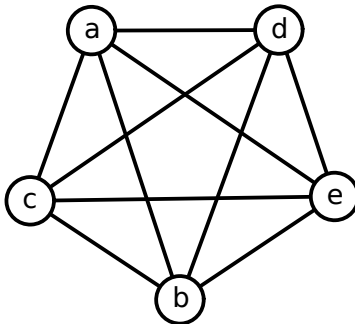
Subdivisión elemental

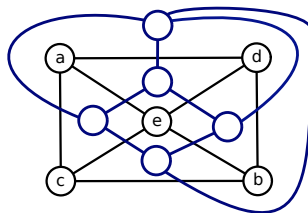


Una **subdivisión elemental** de un grafo G a partir de una arista $\{u, v\}$ es un nuevo grafo en el que la arista $\{u, v\}$ se sustituye por dos aristas $\{u, w\}, \{w, v\}$, donde w es un nuevo vértice.

Una **subdivisión** de un grafo G es un grafo resultante de hacer un número finito de subdivisiones elementales a G (puede ser 0).

Un grafo G es plano si y solo si no contiene ningún subgrafo que sea isomorfo a una subdivisión de K_5 o $K_{3,3}$.

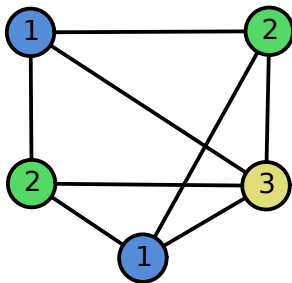




Dos regiones son **adyacentes** si tienen una arista en común.

El **pseudomultigrafo dual** G_M de un mapa M es el pseudomultigrafo (plano) construido del siguiente modo:

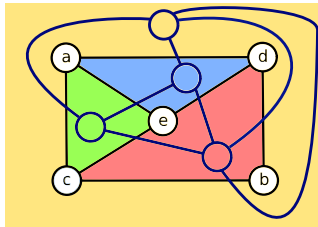
- 1 Los vértices de G_M son las regiones de M .
- 2 Para cada arista $e \in E$, definimos una arista de G_M que conecta las dos regiones adyacentes a e .



Una **coloración** de G con k colores es una aplicación $\gamma: V \rightarrow C$ de modo que si $u, v \in V$ son vértices adyacentes, entonces $\gamma(u) \neq \gamma(v)$.

Una **coloración de las regiones** de un mapa es una aplicación $\gamma: R \rightarrow C$ de modo que si $r, s \in R$ son regiones adyacentes, entonces $\gamma(r) \neq \gamma(s)$.

Teorema de los cuatro colores



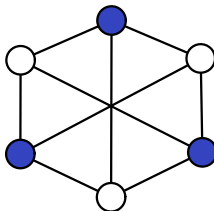
Teorema (K. Appel, W. Haken, J. Koch)

Todo grafo plano admite una coloración con a lo sumo cuatro colores.

Corolario

Todo mapa admite una coloración de las regiones con a lo sumo cuatro colores de modo que dos regiones adyacentes tengan distinto color.

Grafos bipartitos



Un grafo se dice que es **bipartito** si admite una coloración con dos colores.

Un grafo se dice **bipartito completo** si es bipartito y todo vértice del primer color es adyacente a todo vértice del segundo color.

Los denotaremos K_{n_1, n_2} (siendo n_1, n_2 el número de vértices de cada color).

Teorema

Un grafo es bipartito si y solo si no tiene ciclos con longitud impar.

Denominamos **número cromático** de un grafo G al menor número de colores que son necesarios para colorearlo.

Dado un grafo G y $n \in \mathbb{N}$. Denotaremos $p(G, n)$ al número de coloraciones distintas con n colores que admite el grafo G . $p(G, x)$ es un polinomio y se denomina **polinomio cromático**.

Teorema

Sea G un grafo y u, v dos vértices adyacentes. Sea e el lado que los une. Entonces

$$p(G_e, n) = p(G, n) + p(G'_e, n),$$

donde G_e es el subgrafo de G obtenido al eliminar e de G y G'_e es el grafo obtenido al identificar en G_e los vértices u y v .