Teoría de Grafos: Ejercicios

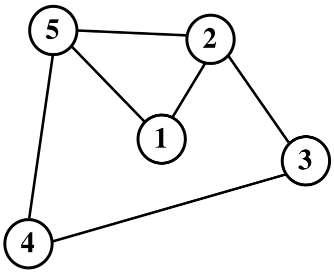
1. Dado el grafo $G = (V, E)$ donde $V = \{a, b, c, d, e\}$ y $E = \{ab, bc, be, cd, de, ad\}$, construir una representación gráfica de G.

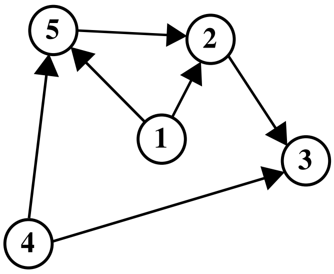
2. Dado el pseudomultigrafo dirigido $G = (V, E)$ donde $V = \{a, b, c, d, e\}$ y

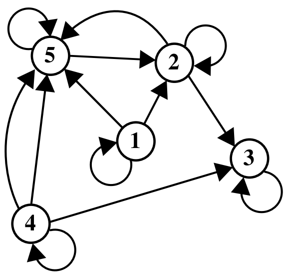
$$E = \{aa, ab, bc, ba, be, cd, de, ee, ad, ad\},$$

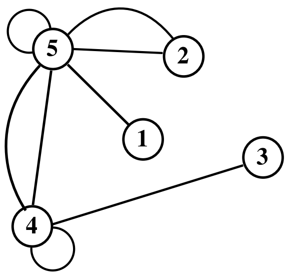
   construir una representación gráfica de G.

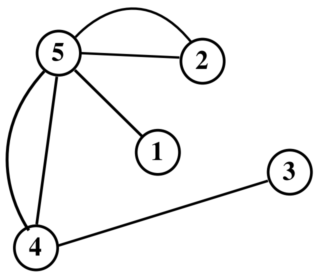
3. Decir de qué tipo es cada uno de los grafos dados por las siguientes representaciones gráficas:



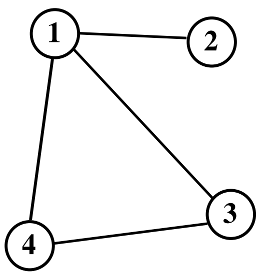


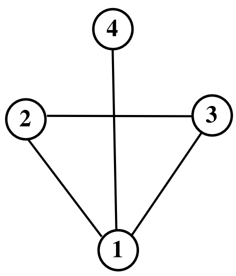




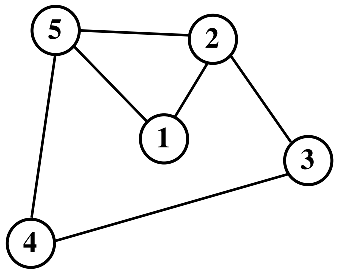


4. Construir dos isomorfismos distintos entre los grafos dados por las siguientes representaciones gráficas:

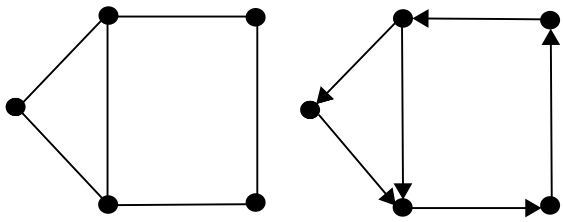




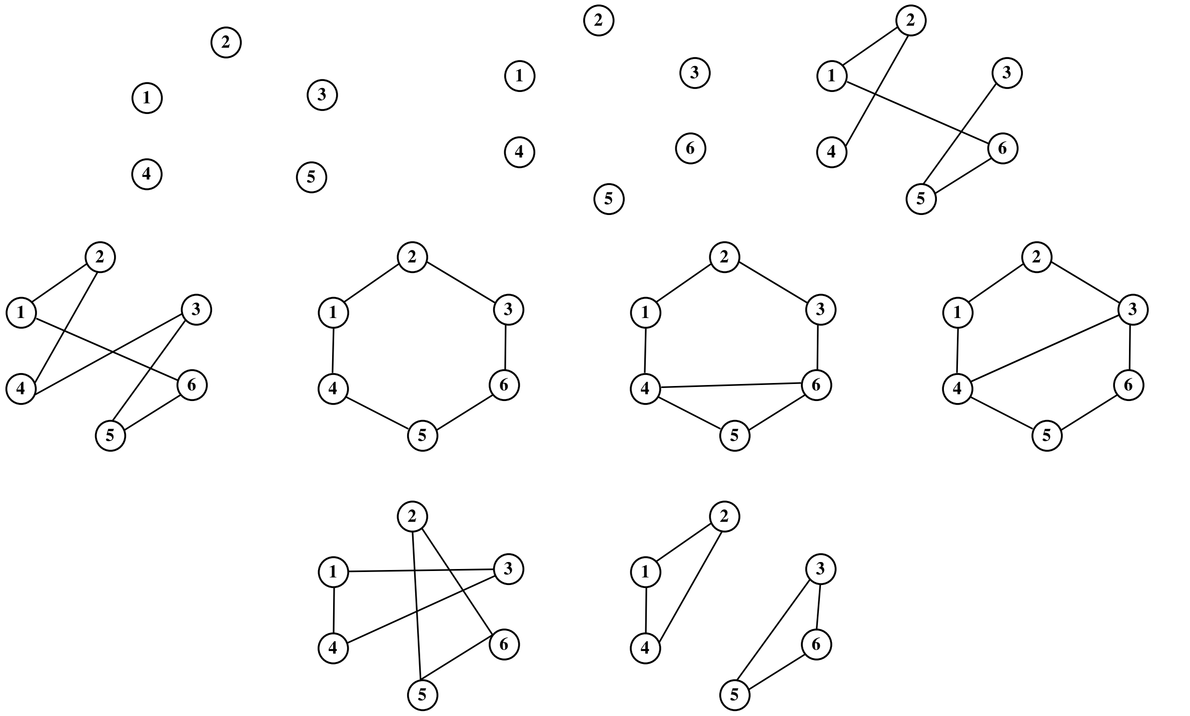
5. Escribir la lista de incidencia, lista de adyacencia, matriz de incidencia y matriz de adyacencia del siguiente grafo:



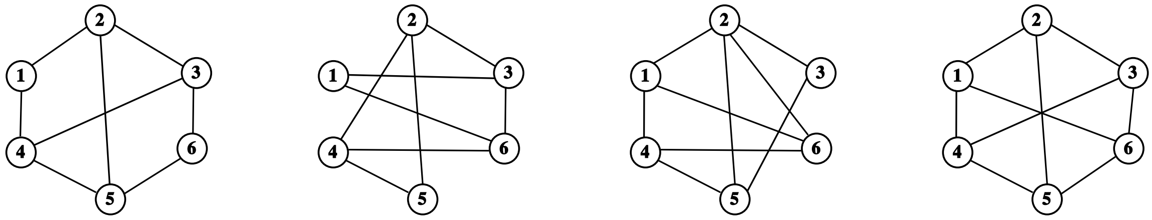
6. Hallar la matriz de adyacencia del grafo y digrafo dados por las siguientes representaciones gráficas:



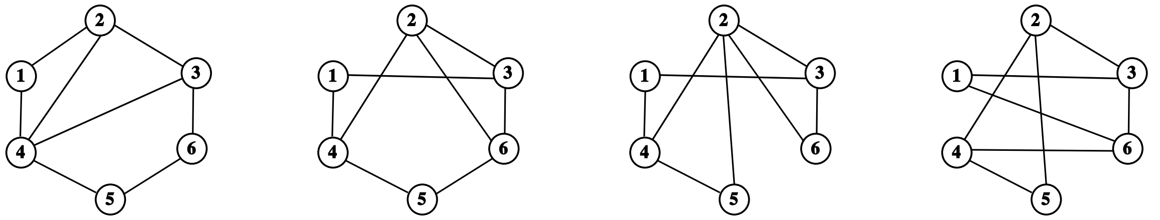
7. Estudiar cuáles de los grafos dados por las siguientes representaciones gráficas son isomorfos entre sí. Para los que sean isomorfos, dar el isomorfismo y para los que no, razonarlo.



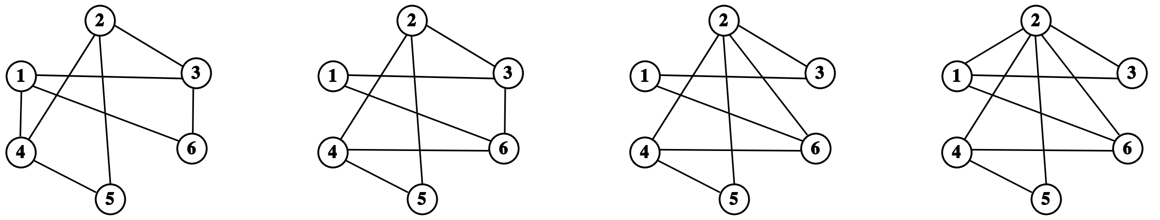
8. Estudiar cuáles de los grafos dados por las siguientes representaciones gráficas son isomorfos entre sí. Para los que sean isomorfos, dar el isomorfismo y para los que no, razonarlo.



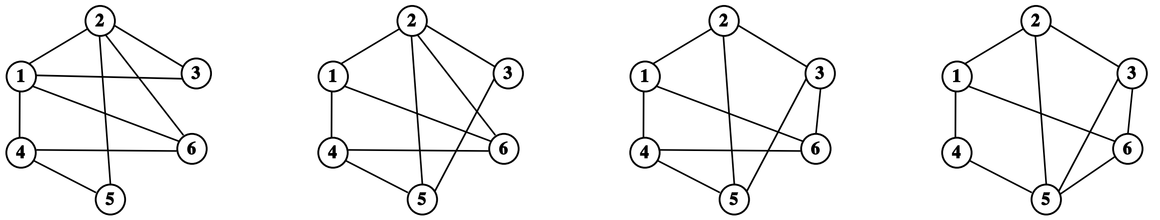
9. Estudiar cuáles de los grafos dados por las siguientes representaciones gráficas son isomorfos entre sí. Para los que sean isomorfos, dar el isomorfismo y para los que no, razonarlo.



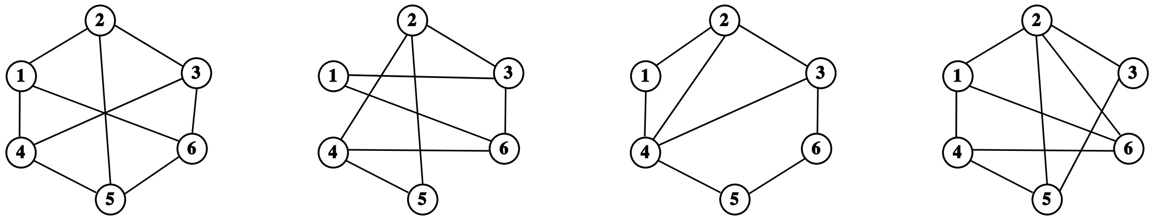
10. Estudiar cuáles de los grafos dados por las siguientes representaciones gráficas son isomorfos entre sí. Para los que sean isomorfos, dar el isomorfismo y para los que no, razonarlo.



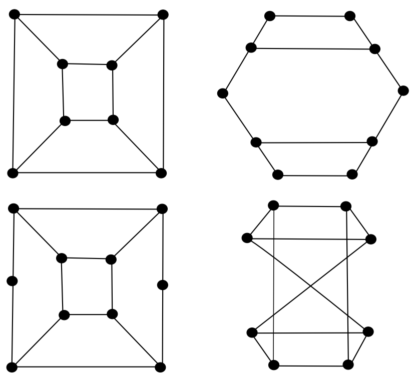
11. Estudiar cuáles de los grafos dados por las siguientes representaciones gráficas son isomorfos entre sí. Para los que sean isomorfos, dar el isomorfismo y para los que no, razonarlo.



12. Estudiar cuáles de los grafos dados por las siguientes representaciones gráficas son isomorfos entre sí. Para los que sean isomorfos, dar el isomorfismo y para los que no, razonarlo.



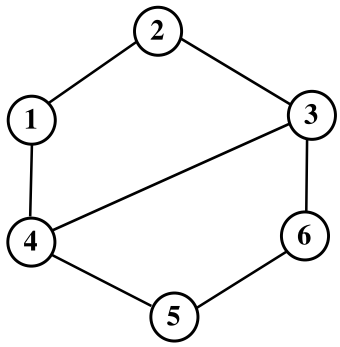
13. Estudiar cuáles de los grafos dados por las siguientes representaciones gráficas son isomorfos entre sí. Para los que sean isomorfos, dar el isomorfismo y para los que no, razonarlo.



14. Determinar si las siguientes secuencias de enteros corresponden a secuencias de grados de un grafo y construir un grafo con dicha secuencia en caso de que sea posible.

   a) $(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$
   b) $(3, 3, 3, 3, 2, 2)$
   c) $(5, 3, 3, 3, 2, 2)$
   d) $(4, 4, 3, 3, 2, 2)$
   e) $(4, 4, 4, 4, 4, 3, 3)$
   f) $(6, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
   g) $(5, 3, 2, 2, 2, 2)$
   h) $(5, 3, 2, 2, 1, 1)$
   i) $(6, 6, 2, 1, 1, 1, 1)$
   j) $(6, 6, 4, 4, 2, 2, 2)$
   k) $(4, 4, 2, 2, 2, 2)$
   l) $(6, 5, 4, 3, 2, 1, 1)$
   m) $(6, 5, 3, 2, 2, 1, 1)$
   n) $(6, 6, 4, 4, 3, 2, 1)$
   ñ) $(6, 6, 4, 4, 3, 3, 2)$
   o) $(4, 4, 2, 2, 0, 0)$
   p) $(6, 6, 4, 4, 2, 2, 0)$

15. Hallar todos los subgrafos (no isomorfos entre sí) del grafo representado por la siguiente figura:



16. Hallar la matriz de adyacencia del grafo completo K_p, para $p \geq 1$.

17. Encontrar un subgrafo $2-$regular de K_4 no isomorfo a K_3 y otro que si lo sea.

18. Encontrar dos subgrafos $3-$regulares de K_6 no isomorfos a K_4 y otro que si lo sea.

19. De todos los grafos con 5 vértices y 7 aristas, ¿cuántos se pueden construir de modo que no sean isomorfos entre sí?

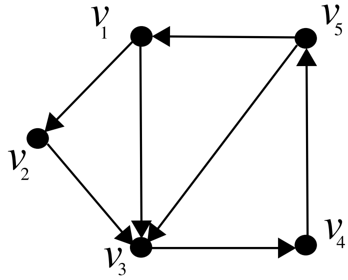
20. De todos los grafos con 6 vértices y 6 aristas, ¿cuántos se pueden construir de modo que no sean isomorfos entre sí?

21. Probar que todo grafo regular de orden impar tiene un número par de vértices.

22. Sea G un grafo regular de grado k con n vértices. ¿Cuántas aristas tiene?

23. Sea G un grafo regular de grado k con n aristas. ¿Cuántos vértices tiene?

24. Estudiar si en el digrafo representado por la siguiente figura existe algún camino entre v_2 y v_5. Responder primero utilizando matrices de adyacencia, y después, sin hacer uso de tales matrices.



25. Estudiar si son conexos o desconexos los siguientes grafos, indicando el número de componentes conexas de cada uno de ellos y el grado de cada uno de sus vértices:

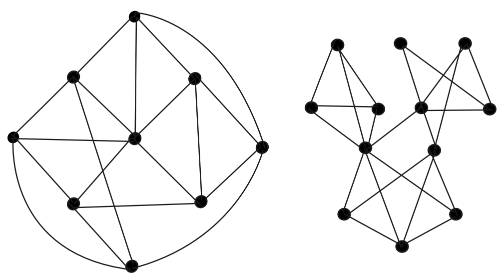
    a) $G = (V, E)$ donde $V = \{A, B, C, D\}$ y $E = \{AB, AD, BC, BD, CD\}$.

    b) $G = (V, E)$ donde $V = \{A, B, C, D, E\}$ y $E = \{AB, AC, BC, DE, \}$.

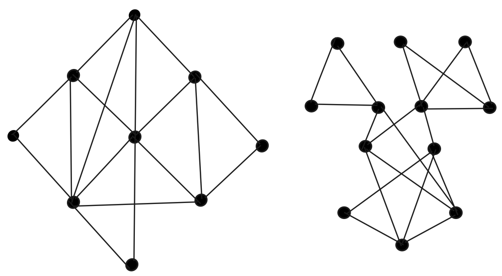
26. Probar que en un grafo conexo $G = (V, E)$ se verifica que:

$$Card(V) - 1 \leq Card(E).$$

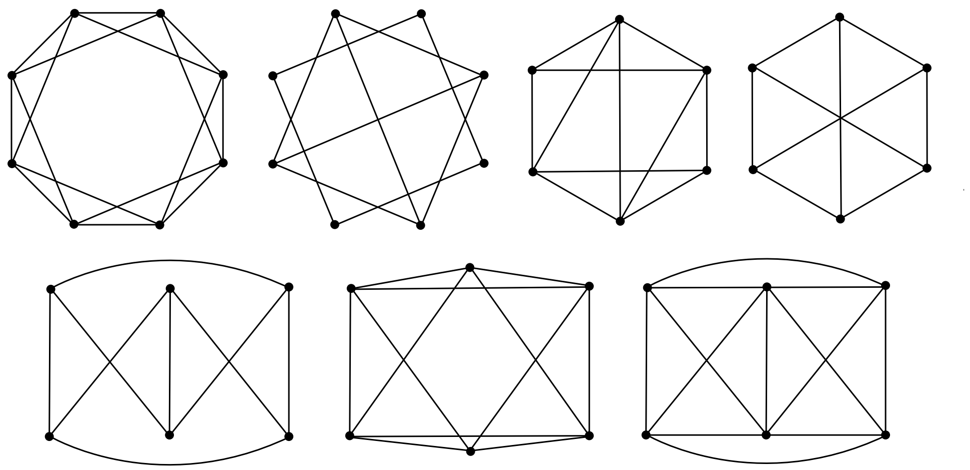
27. Obtener para cada uno de los siguientes grafos si son eulerianos o hamiltonianos. En caso de ser eulerianos, dar además un circuito euleriano.



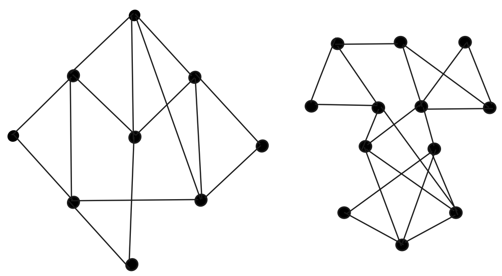
28. Obtener para cada uno de los siguientes grafos si son eulerianos o hamiltonianos. En caso de ser eulerianos, dar además un circuito euleriano.



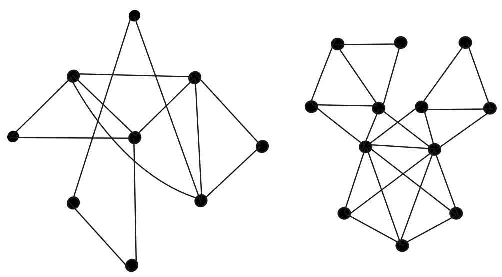
29. Obtener para cada uno de los siguientes grafos si son eulerianos o hamiltonianos. En caso de ser eulerianos, dar además un circuito euleriano.



30. Obtener para cada uno de los siguientes grafos si son eulerianos o hamiltonianos. En caso de ser eulerianos, dar además un circuito euleriano.



31. Obtener para cada uno de los siguientes grafos si son eulerianos o hamiltonianos. En caso de ser eulerianos, dar además un circuito euleriano.

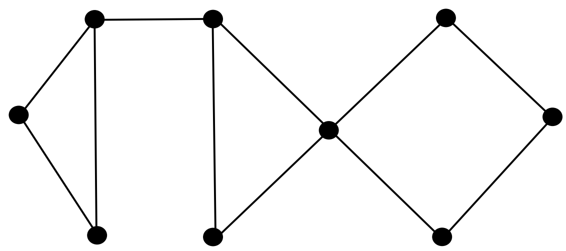


32. Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo.

    Se llama *punto de corte* a un vértice v de G tal que el subgrafo G_v de G con vértices en $V - \{v\}$ y cuyas aristas son las de E que tienen vértices en $V - \{v\}$ no es conexo.

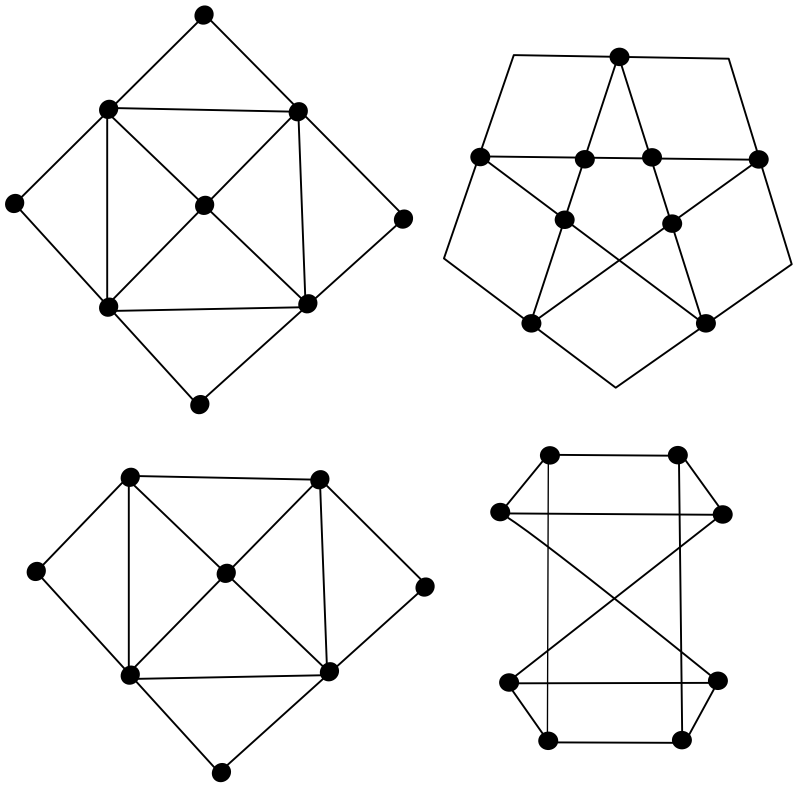
    Se llama *itsmo* a una arista e de E tal que el subgrafo $(V, E - \{e\})$ no es conexo.

    Hallar los puntos de corte y los itmos del grafo representado en la figura.

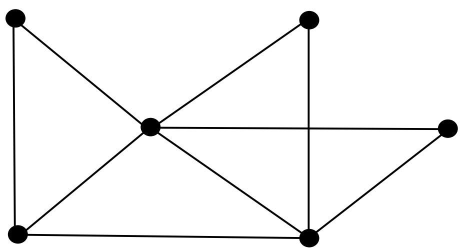


33. Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo con un itsmo. Probar que en tal caso G contiene algún vértice de grado impar.

34. Determinar cuáles de los grafos representados por las siguientes figuras se pueden dibujar sin levantar el lápiz del papel y sin pasar dos veces por la misma arista, en caso afirmativo, encontrar el modo de dibujarlos con las propiedades deseadas:

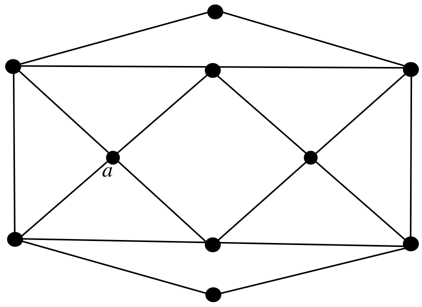


35. Una empresa de autopistas ha contratado a una empresa de seguridad para que patrulle la red de autopistas cuyo mapa está esquematizado en la siguiente representación gráfica:

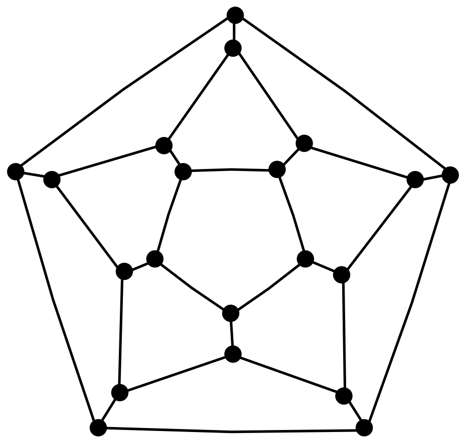


La empresa de seguridad quiere realizar el servicio con un solo vehículo y quiere determinar la existencia un recorrido de la red de modo que se vigilen los tramos de la autopista una única vez. ¿Existe tal recorrido? ¿Cuál es? ¿Es solución única?

36. Encontrar para el grafo de la figura siguiente un circuito euleriano usando el algoritmo visto en clase, con origen y fin en el vértice a:

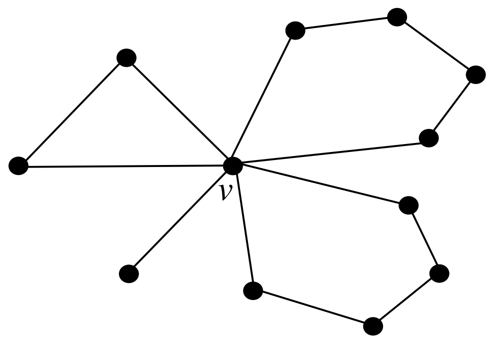


37. Encontrar un ciclo hamiltoniano para el grafo de la siguiente figura:



38. Probar que todo grafo completo es hamiltoniano.

39. Sea $G = (V, E)$ el grafo dado por la siguiente representación gráfica:



Sea G' el subgrafo de G cuyos vértices son $V - \{v\}$ y sus aristas son todas las de E que no tiene por extremo a v. ¿Cuántas componentes conexas tiene G'?

40. ¿Es hamiltoniano el grafo del problema anterior? Probar que todo grafo con un punto de corte no es hamiltoniano.

41. Sea K_n el grado completo de n vértices. Deducir para qué valores de n K_n es euleriano y para qué valores de n K_n es hamiltoniano.

42. Probar que un grafo regular, conexo, con un número par de vértices y un número impar de aristas, no es euleriano.

43. Sea G un grafo y M su matriz de adyacencia. Se suponen conocidos los siguientes resultados de teoría de grafos:

    a) El coeficiente $m^n_{i,j}$ de la matriz M^n es el número de caminos de longitud n con extremos v_i y v_j.
    b) Supongamos que G tiene p vértices. Sea $C = M^p + M^{p-1} + ... + M$. Existe un camino entre los vértices v_i y v_j si y solo si el coeficiente $c_{i,j}$ de la matriz C es no nulo.
    c) Si C es la matriz definida en el apartado anterior, el grafo G es conexo si y solo si todos los coeficientes de C son no nulos.

    ¿Serán ciertos estos resultados si se sustituye la palabra grafo por multigrafo?

44. La siguiente matriz de adyacencia corresponde a un grafo que representa, para una cierta zona,

los lugares de interés turístico y las vías de comunicación que los unen.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Encontrar, si es posible, un ciclo que pase por todos los lugares de interés.

b) Encontrar, si es posible, un circuito que pase por todas las vías de comunicación.

c) ¿Es plano el grafo que representa esa matriz?

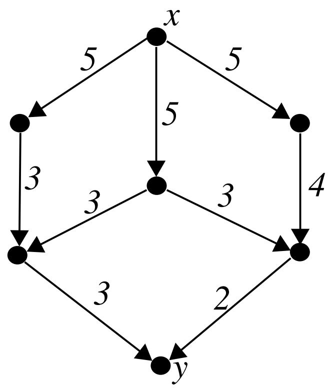
45. Probar que todo subgrafo conexo de un árbol es también un árbol.

46. Podemos representar un grafo etiquetado de vértices $\{v_1, \ldots, v_n\}$ mediante su matriz de adyacencia del siguiente modo: En cada posición i, j de la matriz de adyacencia ponemos 0 si no hay un camino de v_i a v_j y la etiqueta $d(v_i, v_j)$ si lo hay.

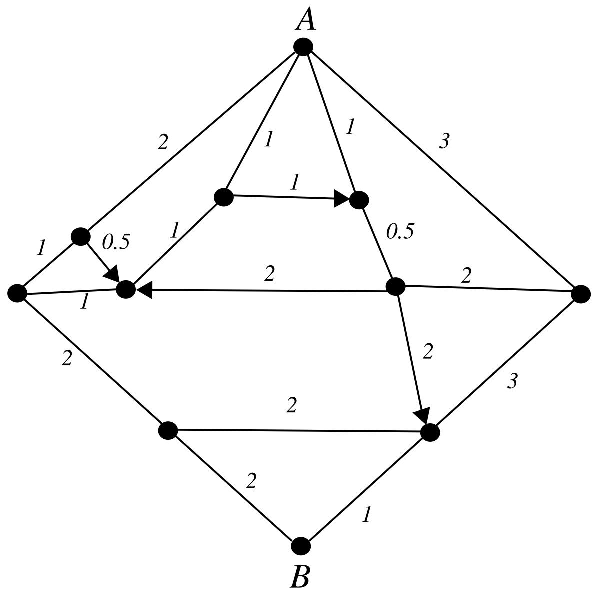
    Obtener mediante el algoritmo de Dijstra lel camino de longitud mínima (y su longitud) entre los vértices v_1 y v_8 del grafo G dado por la matriz de adyacencia:

$$M_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 20 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 3 & 2 & 8 & 0 & 10 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 8 & 6 & 4 & 0 & 6 & 9 \\ 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 9 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

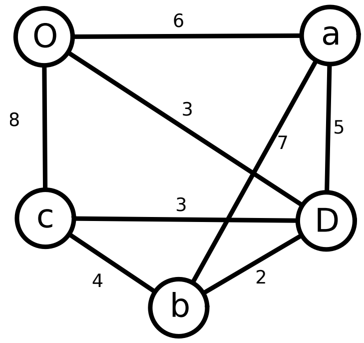
47. Obtener la distancia entre el vértice x y el vértice y en el digrafo etiquetado representado por la siguiente figura:



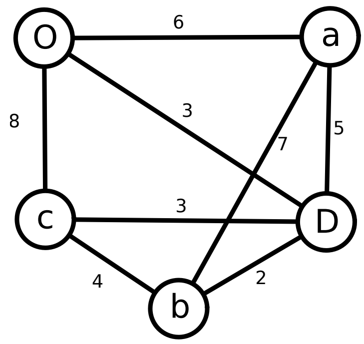
48. El siguiente mapa representa las calles de una ciudad entre dos puntos A y B. Cada etiqueta representa la longitud de la correspondiente calle. Según se indica en el mapa, algunas de las calles tienen dirección única. Encontrar la distancia entre A y B y entre B y A.



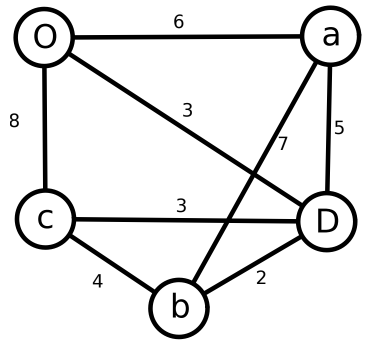
49. Obtener el árbol recubridor minimal mediante el algoritmo de Kruskal del siguiente grafo:



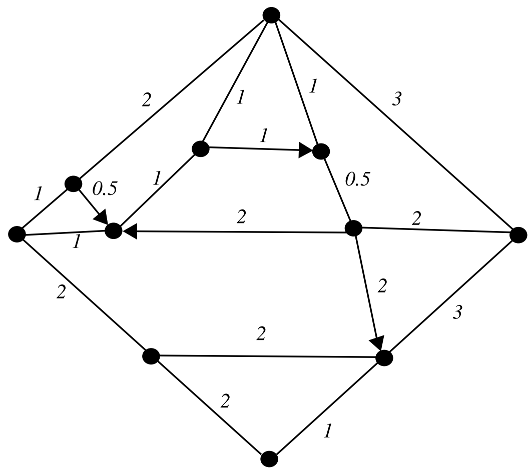
50. Obtener el árbol recubridor minimal mediante el algoritmo de Prim del siguiente grafo:



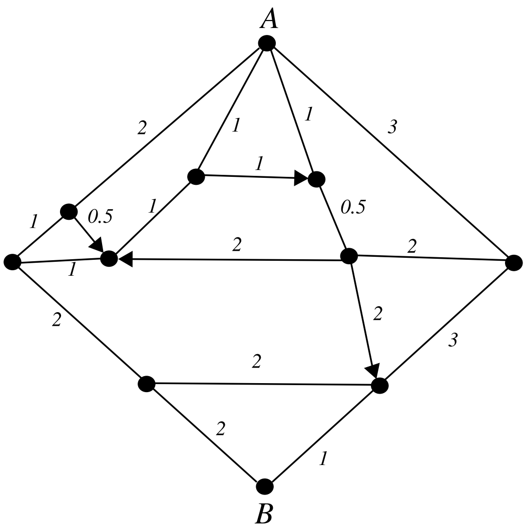
51. Obtener el flujo maximal entre O y D del siguiente grafo:



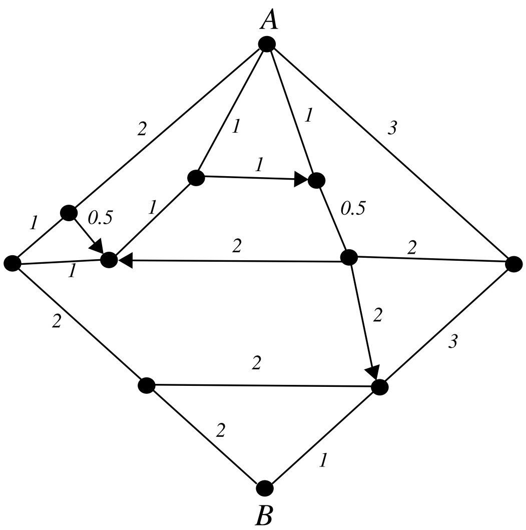
52. Obtener el árbol recubridor minimal mediante el algoritmo de Kruskal del siguiente grafo:



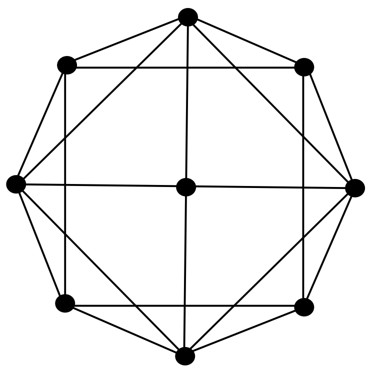
53. Obtener el árbol recubridor minimal mediante el algoritmo de Prim del siguiente grafo:



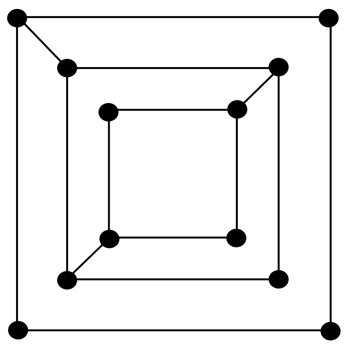
54. Obtener el flujo maximal entre A y B del siguiente grafo:



55. Demostrar que el grafo representado por la siguiente figura es plano, encontrar un mapa que lo represente y el pseudomultigrafo dual de tal mapa:



56. Encontrar el grado de cada una de las regiones del siguiente mapa:

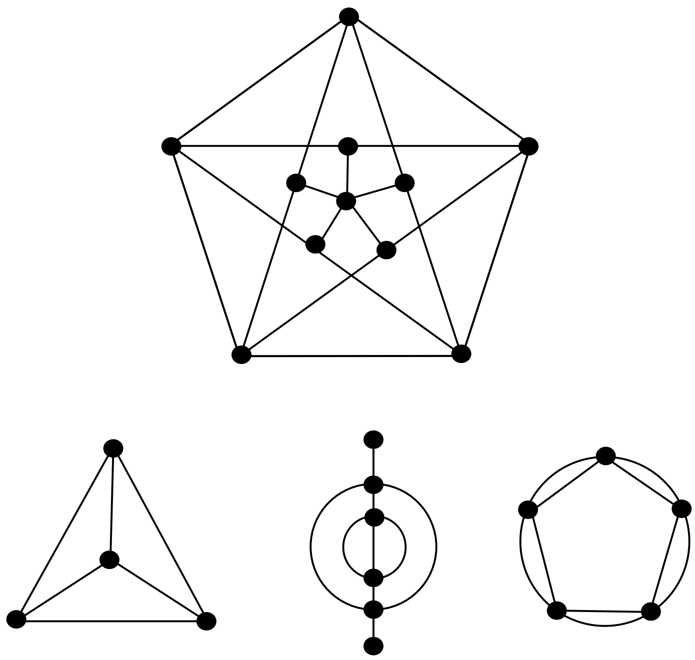


57. Estudiar si es plano el grafo representado por la siguiente figura:

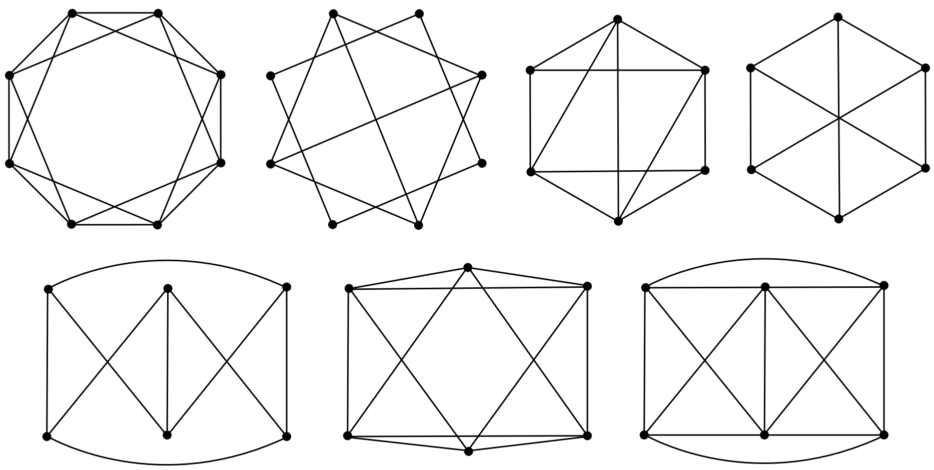
58. Para cada unos de los siguientes mapas, encontrar:

    a) Mínimo número de colores que se necesitan para colorearlos.

    b) Grafo dual de cada uno de ellos.

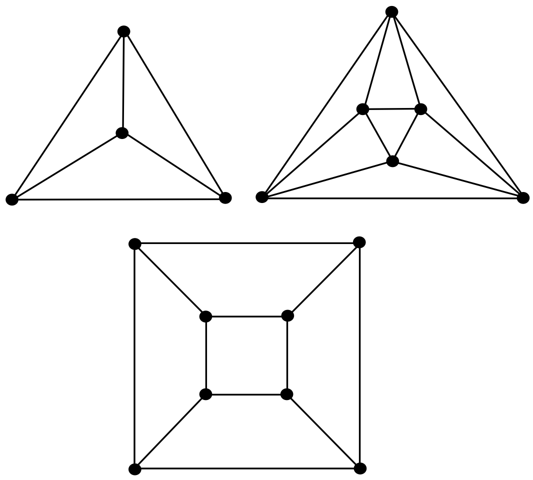


59. Encontrar, si es posible, una representación plana de cada uno de los grafos dados por las siguientes representaciones gráficas, en caso contrario, probar que contienen un subgrafo isomorfo a una partición de K_5 o de $K_{3,3}$:



60. Estudiar qué grafos completos son planos y cuáles no.

61. Hallar los pseudografos duales de los mapas que representan los siguientes poliedros regulares. ¿Se obtiene algún grafo que no está representado en tales mapas?



62. Los siguientes resultados sobre grafos son conocidos:

    a) Si un grafo G es euleriano, entonces todo vértice tiene grado par.

    b) Si un grafo G tiene un camino euleriano no cerrado, entonces tiene exactamente dos vértices de grado impar.

    c) Si todos los vértices de un grafo conexo tiene grado par, entonces dicho grafo es euleriano.

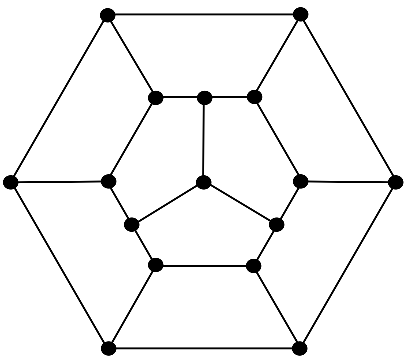
    d) Si un grafo conexo tiene exactamente dos vértices con grado impar, entonces admite un camino euleriano no cerrado.

    ¿Son válidos estos resultados sustituyendo la palabra grafo por multigrafo?

63. Probar que en todo grafo plano conexo existe al menos un vértice cuyo grado es, a lo más, cinco.

64. Hallar una condición necesaria y suficiente para que K_p sea bipartito.

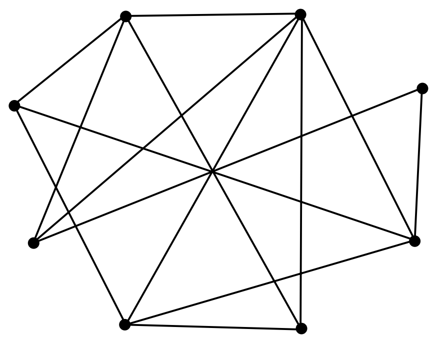
65. Probar que son necesarios al menos tres colores para colorear las regiones del siguiente mapa, de modo que regiones adyacentes tengan colores distintos:



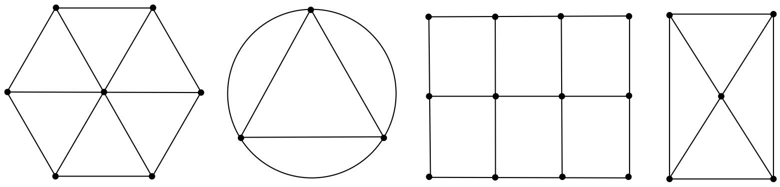
66. Probar que un multigrafo es bipartito si y solo si no contiene ciclos de longitud impar.

67. Dado un mapa, encontrar una condición necesaria y suficiente para que necesite más de tres colores para colorear sus regiones.

68. Estudiar si el grafo representado por la siguiente figura es plano y, en caso afirmativo, colorear un mapa que lo represente:



69. ¿Cuántos colores son necesarios para colorear las regiones de cada uno de los siguientes mapas?



Problemas

1. Responder razonadamente a las siguientes cuestiones relativas a grafos:

   a) ¿Puede existir un grafo con 15 vértices todos ellos de grado 5?

   b) Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo y plano con 8 vértices todos ellos de grado 3, ¿en cuántas regiones divide al plano un mapa asociado a dicho grafo?

2. Probar que en todo mapa conexo, si el número de aristas es menor o igual que 29, entonces hay algún vértice cuyo grado es menor o igual que 4. (Se sugiere utilizar, entre otras, la Fórmula de Euler).

3. *a*) Probar que para todo grafo $G = (V, E)$ se verifica que:

$$Card(E) \leq \frac{1}{2}Card(V)\Big(Card(V) - 1\Big)$$

   b) Sea $G = (V, E)$ un grafo tal que:

$$Card(E) = \frac{1}{2}Card(V)\Big(Card(V) - 1\Big)$$

   Probar que G es completo.

4. Probar que todo grafo conexo con menor número de aristas que de vértices debe ser un árbol.

5. Tenemos nueve paquetes informáticos instalados en ocho ordenadores del siguiente modo:

ORDENADORES:	1	2	3	4	5	6	7	8
PAQUETES:	1,2,6,9	2,7,8	4,6	3,5,8	6,7,9	1,2,3,4,6	8,9	1,2,6

   Queremos distribuir los ordenadores en salas, de modo que los que están en la misma sala no tengan ningún paquete en común. Demostrar que 5 salas son suficientes para tal distribución y que para tal distribución son necesarias, al menos, 5 salas.