Planteamiento del problema

Sea un sistema de ecuaciones lineales

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1,\\
a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2,\\
\ldots\\
a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n,
\end{aligned}
$$

- $a_{11}, \ldots, a_{nn}, b_1, \ldots, b_n$ son los coeficientes del sistema, conocidos.
- Matriz del sistema: $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in M_{mxn}$
- Vector de términos independientes: $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$
- Vector de variables: $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

Planteamiento del problema

Este tipo de sistemas aparecen en multitud de aplicaciones como:

- Procesamiento de señales
- Simulación
- Análisis y procesamiento de datos espaciales

En la asignatura de Álgebra, hemos estudiado cómo resolverlos mediante métodos directos:

- Regla de Cramer
- Método de Gauss

Los métodos directos producen inconvenientes cuando se aplican a sistemas de grandes dimensiones, pues requieren muchas operaciones y son sensibles a errores de redondeo.

Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Los métodos iterativos están especialmente indicados en la resolución de este tipo de sistemas, o en aquellos en las que las matrices son dispersas (poseen muchos ceros). En este tema, estudiaremos cómo resolver sistemas de ecuaciones lineales mediante:

1. Métodos directos:
   1. Método de Gauss
   2. Método de Gauss con pivoteo parcial
2. Métodos iterativos:
   1. Método de Jacobi
   2. Método de Gauss-Seidel

Métodos directos: Gauss con pivoteo parcial

El método de Gauss consiste en transformar el sistema en uno equivalente, de modo que la matriz del sistema sea triangular superior: es decir, que

$$a_{ij} = 0, \quad i > j$$

$[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$. Si $a_{11} \neq 0$, la primera fila pivote es la F_1. Las modificaciones en la matriz ampliada son:

$$F_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} F_1, \;\; F_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} F_1, \;\; \ldots$$

Después, hacemos lo mismo con la fila siguiente, hasta lograr la matriz triangular superior. Este proceso se denomina **eliminación gaussiana**.

Ejemplo Gauss

Ejemplo 1:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \underset{F_3-5F_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -12 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_4-3F_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -12 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -2 \end{array}\right)$$

Ejemplo Gauss

Una vez que tenemos el sistema con matriz triangular superior:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -12 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -2 \end{array}\right)$$

Basta resolverlo de "abajo hacia arriba": **sustitución regresiva**

$$-8x_4 = -2 \rightarrow x_4 = 1/4$$

$$-12x_3 = -2 \rightarrow x_3 = 1/6$$

$$2x_2 + 4x_4 = 2 \rightarrow x_2 = 1/2(2 - 4 \cdot 1/4) = 1/2$$

$$x_1 = 1 - 3x_3 = 1/2$$

Ejemplo pivoteo parcial

El **pivoteo parcial** consiste en aplicar este método eligiendo la fila pivote como aquella cuyo elemento pivote sea el de mayor valor absoluto de su columna. Una vez elegida, se intercambian las filas como sea necesario.

Ejemplo 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & | & 1 \\ 1 & 2 & 0 & | & 2 \\ 2 & 0 & 4 & | & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & | & 4 \\ 1 & 2 & 0 & | & 2 \\ 1 & 3 & 3 & | & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & | & 4 \\ 0 & 2 & -2 & | & 0 \\ 0 & 3 & 1 & | & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & | & 4 \\ 0 & 3 & 1 & | & -1 \\ 0 & 2 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & | & 4 \\ 0 & 3 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & -8/3 & | & 2/3 \end{pmatrix}$$

Métodos Iterativos

Los métodos directos que hemos estudiado tienen inconvenientes si se aplican a sistemas de ecuaciones de grandes dimensiones, porque requieren muchas operaciones y son sensibles a errores de redondeo.

Los métodos iterativos están especialmente inidicados en la resolución de este tipo de sistemas, o en aquellos en las que las matrices son dispersas (poseen muchos ceros).

Consisten en definir una sucesión de puntos $\mathbf{x_0}$, $\mathbf{x_1}$, ... que converjan a la sucesión del sistema. Se basan en la versión para variables n-dimensionales del método del punto fijo. Para ello utilizamos que $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \leftrightarrow (\mathbf{M} - \mathbf{N})\mathbf{x} = \mathbf{b} \leftrightarrow \mathbf{Mx} = \mathbf{Nx} + \mathbf{b}$$

con lo cual

$$x = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{Nx} + \mathbf{b}) = \mathbf{F}(x)$$

Método de Jacobi

El **método de Jacobi** consiste en que la expresión para la función de punto fijo $\mathbf{F}(x)$ la obtenemos despejando de cada ecuación una incógnita.
Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 2x - y \quad &= \quad 9 \\ x + 6y - 2z \quad &= \quad 15 \\ 4x - 3y + 8z \quad &= \quad 1 \end{aligned}$$

Despejamos x de la primera ecuación, y de la segunda, z de la tercera:

$$\begin{aligned} 2x &= y + 9 \\ 6y &= -x + 2z + 15 \\ 8z &= -4x + 3y + 1 \end{aligned}$$

Y partiendo de un punto inicial $\mathbf{x_0} = (x_0, y_0, z_0)$ calculamos el siguiente mediante estas ecuaciones.

Método de Jacobi

Partiendo de $\mathbf{x_0} = (x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$, $\mathbf{x_1}$ se calcula:

$$\begin{aligned} 2x_1 &= y_0 + 9 = 9 \\ 6y_1 &= -x_0 + 2z_0 + 15 = 15 \\ 8z_1 &= -4x_0 + 3y_0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

con lo cual $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1, z_1) = (4.5, 2.5, 0.125)$
De forma análoga vamos calculando más puntos de la sucesión:

- $\mathbf{x}_2 = (5.75, 1.7916667, -1.1875)$
- $\mathbf{x}_3 = (5.3958333, 1.14583333, -2.078125)$
- $\mathbf{x}_4 = (5.07291667, 0.90798611, -2.14322917)$

que convergen a la solución real, que en este caso, es $(5, 1, -2)$

Método de Gauss-Seidel

$$\begin{aligned} 2x &= y + 9 \\ 6y &= -x + 2z + 15 \\ 8z &= -4x + 3y + 1 \end{aligned}$$

Partiendo de $\mathbf{x_0} = (x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$, $\mathbf{x_1}$ se calcula:

$$\begin{aligned} 2x_1 &= y_0 + 9 = 9 \Rightarrow x_1 = 4.5 \\ 6y_1 &= -x_1 + 2z_0 + 15 = -4.5 + 15 \Rightarrow y_1 = 1.75 \\ 8z_1 &= -4x_1 + 3y_1 + 1 = -4 * 4.5 + 3 * 1.75 + 1 \Rightarrow z_1 = -1.46875 \end{aligned}$$

con lo cual

- $\mathbf{x}_1 = (4.5, 1.75, -1.46875)$
- $\mathbf{x}_2 = (5.375, 1.11458333, -2.14453125)$
- $\mathbf{x}_3 = (5.05729167, 0.94227430, -2.05029297)$
- $\mathbf{x}_4 = (4.97113715, 0.98804615, -1.99005127)$

que convergen más rápidamente que con Jacobi a la solución real $(5, 1, -2)$

Métodos Iterativos

Analíticamente, los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel utilizan las matrices, creadas a partir de **A**:

- **D** es la matriz diagonal con la misma diagonal que **A**
- **L** es una matriz triangular inferior (tiene ceros en la diagonal y por encima) construida a partir de **A**.
- **U** es la matriz triangular superior (ceros en la diagonal y por debajo) construida a partir de **A**.

Es decir:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & -2 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Métodos Iterativos

Entonces, para el método de Jacobi:

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}, \ \mathbf{N} = -(\mathbf{L} + \mathbf{U})$$

con lo cual

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{L} + \mathbf{U} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$$

y el sistema $\mathbf{Mx} = \mathbf{Nx} + \mathbf{b}$ es equivalente a resolver

$$\mathbf{Dx} = -(\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

Así, la sucesión se construye partiendo de un valor inicial $\mathbf{x}_0$ y definiendo

$$\mathbf{Dx}_{k+1} = -(\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x}_k + \mathbf{b}, \ k \geq 0$$

(es el sistema que obtuvimos antes despejando las incógnitas)

Métodos Iterativos

Para el método de Gauss-Seidel:

$$\mathbf{M} = \mathbf{D} + \mathbf{L}, \;\; \mathbf{N} = -\mathbf{U}$$

con lo cual el sistema $\mathbf{Mx} = \mathbf{Nx} + \mathbf{b}$ es equivalente a resolver

$$(\mathbf{D} + \mathbf{L})\mathbf{x} = -\mathbf{Ux} + \mathbf{b}$$

Así, la sucesión se construye partiendo de un valor inicial $\mathbf{x}_0$ y definiendo

$$(\mathbf{D} + \mathbf{L})\mathbf{x}_{k+1} = -\mathbf{Ux}_k + \mathbf{b}, \;\; k \geq 0$$

Equivale a despejar las ecuaciones, como hicimos antes, pero usar en la parte derecha de la ecuación los valores para las variables que vamos calculando previamente.
Por eso este método es más rápido que el de Jacobi.

Ejemplo de Métodos iterativos

Ejemplo 4: Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{lcl} 2x - y & = & 9 \\ x + 6y - 2z & = & 15 \\ 4x - 3y + 8z & = & 1 \end{array}, \text{ con } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & -2 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

tenemos:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Partimos de un valor inicial

$$\mathbf{x}_0 = (0, 0, 0)$$

Ejemplo de Métodos iterativos

El método de Jacobi consiste en definir

$$\mathbf{D}\mathbf{x}_{k+1} = -(\mathbf{L}+\mathbf{U})\mathbf{x}_k + \mathbf{b}, \ \ k \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$\begin{array}{rcl} 2x_{k+1} & = & y_k + 9 \\ 6y_{k+1} & = & -x_k + 2z_k + 15 \\ 8z_{k+1} & = & -4x_k + 3y_k + 1 \end{array}$$

Partiendo de $\mathbf{x}_0 = (0,0,0)$, $\begin{array}{rcl} 2x_1 & = & y_0 + 9 = 9 \\ 6y_1 & = & -x_0 + 2z_0 + 15 = 15 \\ 8z_1 & = & -4x_0 + 3y_0 + 1 = 1 \end{array}$

Ejemplo de Métodos iterativos

El método de Gauss-Seidel consiste en definir

$$(\mathbf{D}+\mathbf{L})\mathbf{x}_{k+1} = -\mathbf{U}\mathbf{x}_k + \mathbf{b}, \;\; k \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$\begin{array}{lcl} 2x_{k+1} & = & y_k + 9 \\ x_{k+1} + 6y_{k+1} & = & 2z_k + 15 \\ 4x_{k+1} - 3y_{k+1} + 8z_{k+1} & = & 1 \end{array}$$

Partiendo de $\mathbf{x}_0 = (0,0,0)$, $\begin{array}{lcl} 2x_1 & = & y_0 + 9 \\ 6y_1 & = & -x_1 + 2z_0 + 15 \\ 8z_1 & = & -4x_1 + 3y_1 + 1 \end{array}$

Convergencia de los métodos iterativos

Decimos que una matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})$ es diagonalmente dominante si

$$|a_{kk}| > \sum_{j=1, j\neq k}^{n} |a_{kj}|, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Teorema

Dado el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$*:*

- *Si* $\mathbf{A}$ *es diagonalmente dominante, o*
- *si* $\mathbf{A}^\top$ *es diagonalmente dominante, o*
- *si* $\mathbf{A}$ *es simétrica y definida positiva*

entonces existe una única solución del sistema y los métodos iterativos producen una sucesión de vectores que converge a dicha solución.

Sistemas no lineales

Supongamos ahora que queremos resolver un sistema de ecuaciones no lineal

$$\begin{aligned} &f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ &f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ &\ldots \\ &f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \end{aligned}$$

Denotamos $F = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$.
Queremos aplicar el método de Newton a estos sistemas. Para ello partimos de un vector $\mathbf{x_0}$ y tomamos

$$\mathbf{x_{n+1}} = \mathbf{x_n} - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}_n)F(\mathbf{x}_n)$$

donde $\mathbf{J}$ es la matriz Jacobiana de F. La ecuación equivale al sistema lineal:

$$\boxed{\mathbf{J}(\mathbf{x_n})(\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n) = -F(\mathbf{x}_n)}$$

Ejemplo de sistemas no lineales

Consideremos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x^3 - y^2 &= 0, \\ x^2 + 2y^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Calculamos la matriz Jacobiana:

$$\begin{pmatrix} 3x^2 & -2y \\ 2x & 4y \end{pmatrix}$$

Tomamos $x_0 = (1,1)$. Calculamos $x_d = x_1 - x_0$ como la solución del sistema

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} x_d = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Resolviendo, $x_d = (-1/4, -3/8)$, por lo que $x_1 = x_0 + x_d = (3/4, 5/8)$. Repitiendo el proceso, ahora con x_1, obtenemos $x_2 = (2/3, 43/80)$.

Ejemplo de sistemas no lineales