Ejercicios Tema 1. Primera Parte

1. En una primera medición, se estimó que la altura del Everest era de 8839 msnm. Mediciones posteriores han obtenido que la altura exacta es 8843 msm. ¿Cuál es el error relativo y absoluto de esa primera medición?

   Error absoluto: 4 msnm. Error relativo: 0.00045 o 0.045 %.

2. Un voltímetro ofrece un error relativo de 0.002. Si hemos obtenido una aproximación $a = 5.82$ V, ¿es posible que el voltaje real sea de 6V? Si el voltaje real es de 5.8317 V, ¿cuántas cifras decimales significativas tenía la primera medida?

   No, porque en dicho caso el error relativo sería del 0.3333. Cifras dec. significativas: 1.

3. Aplicar 3 pasos del método de la bisección para aproximar un cero de $3x^3 - 2x^2 - 0.1$ en el intervalo $[0, 1]$.¿Qué intervalo obtenemos?

   $x \approx 0.625$. $[0.625, 0.75]$

4. Aplicar 4 pasos del método de la bisección para aproximar un cero de $\sin(x)$ en el intervalo $[3, 3.5]$.¿Qué error cometemos en dicha aproximación?

   $x \approx 3.156250$. Error=0.03125

5. Aplicar 4 pasos del método de la bisección para aproximar un cero de $\cos(x)$ en el intervalo $[-2, -1.5]$.

   $x \approx -1.59375000000000$.

6. Si aplicamos 2 pasos del método de la bisección para aproximar un cero de $x^2 - 3x + 2$ en el intervalo $[0, 3]$, ¿tiene sentido?

   No deberíamos aplicar el método en ese intervalo, pues no tenemos garantizada la existencia de un raíz.

7. Aplicar 4 pasos del método de la bisección para aproximar un cero de $e^x + 3x$ en el intervalo $[-1, 1]$. Acotar el error cometido.

   Solución aproximada: -0.375000000000000.
   Cota del error: 0.125000000000000

8. La ecuación $e^x - 3x = 0$ tiene por solución $x = 0.61906129$. Comenzando con el intervalo $[0, 1]$, realizar seis iteraciones por el método de bisección para encontrar la raíz aproximada. ¿Cuántas cifras decimales significativas tiene dicha aproximación? ¿Cuántas iteraciones son necesarias para que la raíz obtenida tenga un error menor que 10^{-4}.

   El método de bisección da una aproximación de $x = 0.609375$, el error cometido es 0.00968628, luego tenemos 1 cifra significativa.
   Para un error menor que 10^{-4} necesitamos 9 iteraciones.

9. Probar que la ecuación $e^x + 2x = 0$ tiene una única raíz. Acotar dicha raíz mediante el método de la bisección con un error menor de 10^{-2}.

   Tiene como mucho una raíz porque la función $f(x) = e^x + 2 * x$ es creciente. Tiene una porque $f(-2) < 0 < f(0)$.
   Aproximación: -0.351562500000000

10. Probar que la función $f(x) = \cos x - 2x$ tiene un único cero. Acotarlo mediante el método de la bisección con un error menor de 10^{-2}.

    Tiene como mucho una raíz porque la función es decreciente. Tiene una porque $f(1) < 0 < f(0)$.
    Aproximación: 0.449218750000000

11. Sabiendo que existe una raíz de la ecuación $x^3 + x = 6$ entre 1.55 y 1.75, ¿cuántas iteraciones son necesarias hasta obtener mediante el método de bisección un intervalo de amplitud menor o igual que 10^{-3} que contenga la raíz? Calcular todas las iteraciones necesarias.

    Aproximación: 1.63398437500000. 8 iteraciones.

12. Aplicar el Método de bisección a $f(x) = x^3 - 16 = 0$, a fin de determinar la raíz cúbica de 16 con un error menor o igual que 0.125.

    Aproximación: 2.625

13. Aplicar el método de la bisección para obtener una solución de la ecuación $\cos x - \sin 2x = x$ (entre 0 y 1) con un error menor de 10^{-2}. ¿Cuántos pasos serían necesarios para que el error fuese menor que 10^{-5}?

    Aproximación: 0.332031250000000.
    Con error menor que 10^{-5}, 17 pasos.

14. Aplicar el método de la bisección para obtener una solución de la ecuación $xe^x = 2$ con dos cifras significativas.

    Aproximación: 0.853515625000000

15. Aplicar cinco pasos del Método de Newton-Raphson para encontrar un cero de $f(x) = x - e^{-x}$ partiendo de $x_0 = 1$.

Aproximación: 0.56714329

16. Aplicar tres pasos del Método de Newton-Raphson para encontrar una solución de $x = 3\sin(x)$ partiendo de $x_0 = 1$.

Aproximación: -2.14043082

17. Aplicar cuatro pasos del Método de Newton-Raphson para encontrar una raíz cúbica de 50 partiendo de $x_0 = 4$.

Aproximación: 3.68403149864039

18. Una aplicación de los métodos de cálculo de raíces es obtener los máximos y mínimos de una función, pues se corresponden con los ceros de la derivada. Calcular mediante 4 iteraciones del método de Newton-Raphson partiendo de $x_0 = -0.5$ la posición del mínimo de $f(x) = e^x + x^2/2$.

Aproximación: -0.567143290409784

19. Aplicar el Método de Newton-Raphson para calcular un cero de la función coseno partiendo de $x_0 = 1.5$, con un error menor que 10^-3.

Aproximación: 1.57079632679434

20. Aplicar cuatro pasos del método de Newton-Raphson para calcular aproximadamente una raíz de $x^2 - 3x + 2$, partiendo de:

    - $x_0 = 0$
    - $x_0 = 1.5$
    - $x_0 = 3$.

    - 0.999984740978103
    - No se puede
    - 2.00001525902190

21. Aplicar tres pasos del Método de la secante para encontrar un cero de $f(x) = x - e^{-x}$ partiendo de $x_0 = 1$ y $x_1 = 0$.

Aproximación: 0.567102080171874

22. Aplicar tres pasos del Método de la secante para encontrar una solución de $x = \sin(x)$ partiendo de $x_0 = 1$ y $x_1 = 2$

Aproximación: 0.508802044989435

23. Aplicar tres pasos del método del punto fijo para calcular un punto fijo de $F(x) = -\sin(x) + x + 1/2$ partiendo de $x0 = 0.4$.

Aproximación: 0.523371484876840

24. Estudiar si el método del punto fijo para la función $F(x) = -\sin(x) + x + 1/2$ converge para condiciones iniciales en el intervalo $[0, 1]$.

Converge

25. Calcular el error cometido al aplicar tres pasos del método del punto fijo para calcular un punto fijo de $F(x) = -\sin(x)+x+1/2$ partiendo de $x_0 = 0.5$. Comprobar las condiciones en el intervalo $[0, 1]$.

Aproximación: 0.523544837986821

$$|F'(x)| = 1 - cos(x) \leq 1 - cos(1)$$

pues $1 - cos(x)$ es creciente en $[0, 1]$, luego $K = 1 - cos(1) = 0.459697694131860$