

Comunicaciones digitales

Antonio Artés Rodríguez

Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad Carlos III de Madrid

Fernando Pérez González

Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad de Vigo

Jesús Cid Sueiro

Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad Carlos III de Madrid

Roberto López Valcarce

Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad de Vigo

Carlos Mosquera Nartallo

Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad de Vigo

Fernando Pérez Cruz

Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad Carlos III de Madrid

DERECHOS RESERVADOS, © 2012 Los autores

Este manuscrito electrónico es sólo para uso personal no comercial, y no puede ser publicado y/o redistribuido en cualquier forma ni ser transformado y/o utilizado parcialmente sin el permiso de los autores.

Para referenciar el manuscrito, por favor, emplee la página web
www.tsc.uc3m.es/~antonio/libro_comunicaciones

PRÓLOGO

Tras una larga gestación y una corta vida, el libro “Comunicaciones digitales” fue descatalogado en 2010. Tras volver el copyright a los autores analizamos las distintas alternativas a nuestro alcance, y decidimos publicar, tras corregir todas las erratas detectadas hasta la fecha, el manuscrito en la web para que pueda seguir siendo utilizado por todo aquel que lo desee.

Antonio Artés Rodríguez
Fernando Pérez González

Junio de 2012

PRÓLOGO DE LA EDICIÓN IMPRESA

El libro que tiene en sus manos es el resultado de un largo y azaroso proceso, casi siempre a punto de naufragar, que pretendía producir el texto del que nos hubiese gustado disponer para impartir docencia sobre comunicaciones digitales y que no encontrábamos. No imaginábamos, en aquel tiempo lejano, la magnitud del esfuerzo necesario para llevar a buen puerto este proyecto.

La estructura y el estilo narrativo del libro están orientados hacia su uso como manual de aprendizaje. Hemos intentado, sin abandonar el rigor, acomodar la extensión de cada tema, método o herramienta conforme a la dificultad de su aprendizaje según nos dicta nuestra experiencia. Esta orientación puede ocasionar que el lector eche en falta algún contenido que resulta común en otros textos con vocación de manual de referencia de comunicaciones digitales. Un apartado al final de cada capítulo trata de guiar al lector ofreciendo una serie de referencias donde poder profundizar en lo aquí expuesto.

En este libro se tratan la mayor parte de los contenidos sobre comunicaciones digitales que actualmente se imparten en una titulación como Ingeniería de Telecomunicación, y particularmente pretende posibilitar al alumno la comprensión de los actuales sistemas y estándares de comunicaciones. Tras un par de capítulos donde se repasan los resultados de señales y sistemas y probabilidad y procesos estocásticos más relevantes para las comunicaciones digitales, se aborda el estudio de los fundamentos de la modulación y la detección. A partir de aquí se procede de forma sistemática con el análisis de las modulaciones lineales monoportadora, el diseño de receptores para este tipo de modulaciones cuando el canal introduce distorsión, las modulaciones de fase y frecuencia, las modulaciones multiportadora y las modulaciones de espectro ensanchado y, por último, los límites establecidos por la Teoría de la Información. El libro concluye con el estudio de las técnicas de protección contra errores y las técnicas de sincronización. Se abarcan así las técnicas de modulación, codificación y diseño de receptores de la práctica totalidad de sistemas y estándares de comunicaciones digitales sobre medios conductores o transmisión inalámbrica, tales como UMTS, DVB, ADSL, Wi-Fi (IEEE 802.11x), WiMAX (IEEE 802.16x), Bluetooth o Zigbee (IEEE 802.15.4), por poner algunos ejemplos.

Además de algunas técnicas concretas empleadas en los sistemas actuales, como los códigos Reed-Muller, los barajadores convolucionales o las modulaciones PPM (*“Pulse Position Modulation”*) que no se estudian en este texto, en este libro no se abordan las comunicaciones inalámbricas en canales con desvanecimiento, las comunicaciones digitales ópticas ni las técnicas de codificación de fuente, que en ocasiones son tratadas en textos con

nombres similares al nuestro.

Pueden configurarse distintos cursos empleando este libro. Podemos programar un curso de introducción a las comunicaciones digitales con material seleccionado de los capítulos de señales y sistemas y probabilidad y procesos estocásticos en función del nivel de formación de los alumnos, el tema de modulación y detección en canales gausianos y el tema de límites en comunicaciones digitales. Podemos también programar un curso basándonos los temas de modulaciones lineales, la primera parte del capítulo de detección en canales con interferencia intersimbólica, las modulaciones de fase y frecuencia, las modulaciones multiportadora y las modulaciones de espectro ensanchado y parte de las técnicas de codificación para protección contra errores. Podemos programar un curso de técnicas de tratamiento digital de señales en comunicaciones con la segunda mitad del capítulo de detección en canales con interferencia intersimbólica, los receptores para modulaciones de espectro ensanchado y los receptores multiusuario y el capítulo de sincronización. También pueden programarse cursos en base a capítulos completos que exploren de forma sistemática el texto.

Este libro no habría visto la luz de no haber sido por algunos Profesores que contribuyeron a modernizar el estudio de las comunicaciones digitales en España mediante un uso sistemático de técnicas de tratamiento estadístico de señales y de quienes nos consideramos discípulos. A Aníbal R. Figueiras Vidal y Miguel Ángel Lagunas Hernández, nuestro sincero agradecimiento.

Agradecemos a Alberto Prieto, de la empresa Tredess 2010, José Luis Ledo, de Gsertel, Modesto Gómez y Justo Rodal, de Televés, y Fidel García Pedraja, primero en Telettra España y posteriormente en Alcatel el habernos ayudado a convertir en productos nuestros conocimientos. Un agradecimiento muy especial es para José Luis Fernández Carnero, de Televés, quien hace dieciséis años intuyó el potencial de las comunicaciones digitales y creyó en nosotros como investigadores.

Queremos agradecer la labor de revisión de partes de libro y las sugerencias realizadas por Emilio Parrado Hernández, José Luis Alba Castro, José Emilio Vila Forcén, Marcos Martín Fernández, Verónica Santalla del Río, Juan José Murillo Fuentes, Francisco Javier Payán Somet, Luis Pérez Freire, Ignacio Santamaría Caballero, Juan Ramón Troncoso Pastoriza, Mario de Prado Cumplido, Harold Molina Bulla, Joaquín Míguez Arenas, Luis Castedo Ribas, José Miguel Leiva Murillo, Santiago Zazo Bello, Pedro Comesaña Alfaro, Sergio Cruces Álvarez, Ángel María Bravo Santos, Óscar W. Márquez Flórez, María Julia Fernández-Getino García, Jaume Riba y Nuria González Prelcic, y muy especialmente a Marcelino Lázaro Teja, Ricardo Santiago Mozos y Eduardo Rodríguez Banga.

También queremos agradecer a Gregori Vázquez Grau, Javier Ramos López y Luis Castedo Ribas, como participantes que fueron en algunas de las etapas de este proyecto, su trabajo, sus sugerencias y, sobre todo, su generosidad.

A los alumnos de las asignaturas de “Teoría de la Comunicación”, “Comunicaciones Digitales” y “Transmisión en Banda Ancha” de las titulaciones de Ingeniería de Telecomunicación e Ingenierías Técnicas de Telecomunicación de la E.P.S. de la Universidad Carlos III de Madrid, y a los alumnos de las asignaturas de “Fundamentos de Comunicaciones Digitales” y “Transmisión Digital” de la Escola Técnica Superior de Enxeñeiros de Telecomunicación de Vigo, por sufrir y ayudar a mejorar múltiples y lamentables versiones de

partes de este libro, nuestro más sincero agradecimiento.

Este libro ha sido escrito principalmente en la parte de nuestro tiempo que le correspondía a nuestras familias. Por su paciencia y comprensión, el resultado de este esfuerzo va dedicado a ellas.

Antonio Artés Rodríguez
Fernando Pérez González

Benavente, marzo de 2007

ÍNDICE

1. Introducción	1
1.1. Comunicaciones digitales y analógicas	1
1.2. Elementos de un sistema de comunicaciones digitales	3
1.3. Canales	5
1.4. Estructura del libro	8
2. Señales y sistemas	9
2.1. Señales	9
2.1.1. Clasificación de señales	9
2.1.2. Medidas de señales	14
2.1.3. Señales de interés	16
2.1.4. Espacios de Hilbert para señales de energía finita	20
2.2. Sistemas	24
2.2.1. Clasificación de los sistemas	25
2.2.2. Sistemas lineales e invariantes	27
2.3. Representación de señales y sistemas mediante transformadas	31
2.3.1. Respuesta de los sistemas lineales e invariantes a las exponenciales complejas	31
2.3.2. Transformada de Fourier para señales y sistemas en tiempo continuo	34
2.3.3. Transformada de Fourier para señales y sistemas en tiempo discreto	46
2.3.4. Transformada Z para sistemas lineales e invariantes	51
2.3.5. Transformada Discreta de Fourier	64
2.3.6. Representación de señales paso banda	72
2.4. Muestreo, diezmado e interpolación	75
2.4.1. Muestreo de señales en tiempo continuo	75
2.4.2. Interpolación y diezmado de secuencias	82
2.4.3. Simulación de señales y sistemas	85
2.5. Lecturas adicionales	87
Problemas	87
3. Teoría de la probabilidad y procesos estocásticos	93
3.1. Probabilidad	93
3.1.1. Asignación de probabilidades a sucesos	95

3.2.	Variables aleatorias	96
3.2.1.	Distribución de probabilidades y función de densidad de probabilidad	97
3.2.2.	Esperanza matemática	99
3.2.3.	Distribuciones de interés	100
3.2.4.	Función de una variable aleatoria	106
3.2.5.	Variables aleatorias conjuntamente distribuidas	110
3.2.6.	Probabilidades condicionales	115
3.2.7.	Distribuciones mixtas	123
3.2.8.	Teorema central del límite	125
3.3.	Procesos estocásticos	126
3.3.1.	Caracterización de procesos estocásticos	128
3.3.2.	Estacionariedad	133
3.3.3.	Ergodicidad	138
3.3.4.	Sistemas lineales con entradas estocásticas	144
3.3.5.	Densidad espectral de potencia	148
3.3.6.	Procesos gausianos, señal y ruido	154
3.3.7.	Procesos gausianos complejos	157
3.3.8.	Modulación de procesos continuos	161
3.4.	Lecturas adicionales	167
	Problemas	167
3.A.	Teorema de Wiener-Kinchine	172
4.	Modulación y detección en canales gausianos	175
4.1.	Un modelo de comunicación digital	175
4.2.	Modulador	177
4.3.	Demodulador	185
4.3.1.	Correlacionador	186
4.3.2.	Filtro adaptado	189
4.3.3.	Canal discreto equivalente	194
4.4.	Decisor y codificador	195
4.4.1.	Desarrollo del decisor óptimo	195
4.4.2.	Cálculo de probabilidades de error	202
4.4.3.	Codificador	218
4.5.	Transmisión indefinida de símbolos	224
4.6.	Lecturas adicionales	231
	Problemas	232
4.A.	Procedimiento de ortogonalización de Gram-Schmidt	237
4.B.	Estadístico suficiente para la detección	243
5.	Modulaciones de amplitud	247
5.1.	PAM en banda base	247
5.1.1.	Espectro de la señal PAM en banda base	250
5.1.2.	Transmisión de PAM en banda base sobre canales gausianos	252

5.1.3. Canal discreto equivalente	253
5.2. El criterio de Nyquist	257
5.2.1. Pulsos en coseno alzado	259
5.2.2. Otras consecuencias del criterio de Nyquist	261
5.2.3. Probabilidades de error	263
5.3. Transmisión de PAM sobre canales lineales	263
5.3.1. El diagrama de ojo	271
5.4. PAM paso banda	274
5.4.1. Espectro de la señal PAM paso banda	282
5.4.2. Receptores para PAM paso banda	284
5.4.3. Características del ruido en el receptor	286
5.4.4. Canal discreto equivalente	288
5.4.5. Probabilidades de error	291
5.5. Implementación discreta de sistemas PAM	293
5.6. Lecturas adicionales	298
Problemas	298
6. Detección en canales con interferencia intersimbólica	305
6.1. El problema de la interferencia entre símbolos	306
6.1.1. Canal discreto equivalente	306
6.1.2. Medida de la interferencia entre símbolos	307
6.1.3. Cota del filtro adaptado	309
6.2. Detector de máxima verosimilitud de secuencias en presencia de ISI	311
6.2.1. Expresión del detector ML de secuencias	312
6.2.2. El algoritmo de Viterbi	313
6.2.3. Probabilidad de error del detector ML de secuencias	320
6.3. Igualación lineal	326
6.3.1. Igualador lineal bajo el criterio forzador de ceros	328
6.3.2. Igualador lineal bajo el criterio de error cuadrático medio	331
6.4. Igualador con realimentación de decisiones	337
6.4.1. Concepto de realimentación de decisiones	337
6.4.2. Estructura del igualador DFE	340
6.4.3. Igualador DFE bajo el criterio de error cuadrático medio	341
6.4.4. Consideraciones sobre el diseño del igualador DFE	345
6.5. Igualador fraccionario	347
6.6. Prestaciones asintóticas de los igualadores	354
6.6.1. Igualador lineal	354
6.6.2. Igualador con realimentación de decisiones	356
6.7. Ajuste del receptor	360
6.7.1. Esquemas no realimentados	361
6.7.2. Igualación adaptativa	364
6.8. Lecturas adicionales	373
Problemas	374

6.A. Probabilidad de error de símbolo del detector ML	381
6.B. Estimación lineal óptima	382
6.C. Minimización de la densidad espectral de potencia del error de igualación	385
6.D. Demostración del teorema de factorización espectral	386
7. Modulaciones de fase y frecuencia	389
7.1. Modulaciones de fase	389
7.1.1. Modulaciones QPSK con desplazamiento temporal	390
7.1.2. Receptores para modulaciones de fase	394
7.1.3. Modulaciones de fase diferencial	394
7.2. Modulaciones por desplazamiento de frecuencia	398
7.2.1. Señal transmitida FSK	399
7.2.2. Espectro de la señal FSK	401
7.2.3. Receptores para FSK	403
7.3. Modulación MSK	405
7.3.1. Señal transmitida MSK	406
7.3.2. Espectro de la señal MSK binaria	411
7.3.3. Receptores para MSK binaria	412
7.4. Modulaciones de fase continua	413
7.4.1. Señal transmitida CPM	414
7.4.2. Detector coherente ML para CPM	421
7.5. Lecturas adicionales	423
Problemas	424
7.A. Espectro de una señal multipulso sin memoria	428
7.B. Receptor Incoherente Óptimo	430
7.B.1. Receptor ML Incoherente para CPFSK ortogonal binaria	432
8. Modulaciones multipulso	435
8.1. Modulaciones multiportadora	435
8.1.1. Modulaciones multiportadora en tiempo continuo	437
8.1.2. Modulaciones multiportadora en tiempo discreto	442
8.1.3. Receptores para modulaciones multiportadora	450
8.1.4. Características del ruido en el receptor	451
8.1.5. Canal discreto equivalente en banda base	452
8.1.6. Eliminación de la ISI y la ICI en modulaciones multiportadora	456
8.1.7. La OFDM vista como un proceso en bloques	460
8.1.8. Igualación Lineal	463
8.2. Modulaciones de espectro ensanchado	464
8.2.1. Espectro ensanchado por secuencia directa	468
8.2.2. Espectro de la señal espectro ensanchado por secuencia directa	470
8.2.3. Receptores para modulaciones de espectro ensanchado por secuencia directa	471
8.2.4. Características del ruido en el receptor	473

8.2.5. Canal discreto equivalente	473
8.2.6. Inmunidad a las interferencias de banda estrecha	475
8.2.7. Espectro ensanchado por salto en frecuencia	477
8.2.8. Receptores RAKE	481
8.2.9. Diseño de pulsos para espectro ensanchado	487
8.3. Acceso múltiple	493
8.3.1. Señales multiusuario en CDMA	496
8.3.2. Diseño de secuencias de código para CDMA	501
8.3.3. Detección Multiusuario	510
8.4. Lecturas adicionales	517
Problemas	518
9. Límites fundamentales en las comunicaciones digitales	529
9.1. Modelos probabilísticos de canal	530
9.1.1. Canales digitales	532
9.1.2. Canal gausiano	536
9.1.3. Canal gausiano con entrada digital	539
9.2. Canales digitales	540
9.2.1. Información y entropía	540
9.2.2. Capacidad de canal	546
9.2.3. Teorema de codificación de canal	552
9.3. Canal gausiano	560
9.3.1. Información mutua y entropía diferencial	560
9.3.2. Capacidad del canal gausiano	563
9.3.3. Teorema de codificación de canal y curva de capacidad	567
9.3.4. Canal gausiano con entrada digital	572
9.4. Lecturas adicionales	575
Problemas	576
9.A. Justificación de la medida de entropía	581
9.B. Demostración de algunas desigualdades	584
9.C. Relación entre las medidas de variables aleatorias continuas y discretas	587
10. Codificación para protección contra errores	591
10.1. Introducción y definiciones	591
10.2. Códigos bloque	599
10.2.1. Códigos bloque lineales	600
10.2.2. Códigos cíclicos y su estructura algebraica	605
10.2.3. Códigos BCH	612
10.2.4. Códigos Reed-Solomon	616
10.2.5. Decodificación de los códigos BCH y RS	619
10.2.6. Prestaciones de los códigos bloque	622
10.3. Códigos convolucionales	627
10.3.1. Códigos convolucionales lineales	627

10.3.2. Decodificación de los códigos convolucionales	630
10.3.3. Prestaciones de los códigos convolucionales	633
10.4. Modulaciones codificadas en rejilla	646
10.4.1. TCM básicos	647
10.4.2. TCM con bits sin codificar	651
10.4.3. Otros TCM	657
10.5. Técnicas de codificación avanzada	660
10.5.1. Códigos turbo	661
10.5.2. Códigos LDPC	671
10.6. Lecturas adicionales	681
Problemas	682
11. Sincronización	687
11.1. Características de la señal recibida: el problema de la sincronización	687
11.2. Receptor ML óptimo	690
11.3. Lazo enganchado en fase (PLL)	697
11.3.1. Análisis del PLL	700
11.3.2. Otras consideraciones	705
11.4. Sincronización de símbolo	706
11.4.1. Esquemas realimentados	710
11.5. Recuperación de fase	714
11.5.1. Recuperación de fase dirigida por decisión	715
11.5.2. Recuperación de fase no asistida por los datos	716
11.6. Ajuste de frecuencia	721
11.6.1. Ajuste de errores de frecuencia grandes	722
11.6.2. Ajuste de errores de frecuencia pequeños	726
11.7. Sincronización de modulaciones multiportadora	729
11.7.1. Impacto de los errores de sincronización en modulaciones multiportadora	730
11.7.2. Sincronización pre-DFT	734
11.7.3. Sincronización post-DFT	737
11.8. Sincronización para modulaciones de espectro ensanchado	738
11.8.1. Adquisición	739
11.8.2. Seguimiento	741
11.8.3. Ajuste de fase y frecuencia	743
11.8.4. Salto en frecuencia	743
11.9. Lecturas adicionales	743
Problemas	744
11.A. Resultados asintóticos	753
11.B. Criterio ML para SNR reducida	755
11.C. Cicloestacionariedad y sincronización	756
11.D. Estimación gruesa de frecuencia	758

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

1.1. COMUNICACIONES DIGITALES Y ANALÓGICAS

¿Por qué *comunicaciones digitales*? Para comprender el sentido de la pregunta es necesario entender que muchas de las señales que deseamos comunicar están originalmente en formato analógico y que cabe, por tanto, transmitirlas usando alguna de las técnicas clásicas en *comunicaciones analógicas*, como la modulación de amplitud (“*amplitude modulation*”, AM) o la modulación de frecuencia (“*frequency modulation*”, FM). Un ejemplo puede ser una señal de voz que es captada por el micrófono de un teléfono móvil de primera generación y que, modulada en FM, se transmite por radio hasta la estación base. Como alternativa, se puede pensar en digitalizar la señal de voz y transmitir los bits resultantes utilizando cualquiera de las técnicas empleadas en este libro.

El concepto “*comunicaciones digitales*” suele evocar la idea de señales de voltaje que cambian entre dos niveles que representan el uno y el cero y que, aunque distorsionadas al ser transmitidas por el canal, pueden ser reconstruidas en el destino gracias a su carácter discreto. Como veremos, estas formas de onda no son precisamente las más eficientes para comunicar información y existen soluciones mejores; sin embargo, son un buen ejemplo de cómo la discretización ayuda a conseguir una comunicación fiable. De hecho, la diferencia fundamental entre comunicaciones digitales y analógicas es que en las primeras el número de formas de onda transmitidas posibles es finito, lo que no ocurre en el segundo caso. Podemos pensar, por tanto, que en un instante de tiempo dado el transmisor tiene a su disposición un conjunto finito y discreto de formas de onda que puede hacer corresponder con los bits a transmitir.

Ahora que hemos aclarado de qué estamos hablando cuando nos referimos a las comunicaciones digitales, retomemos la pregunta que nos hacíamos al principio e identifiquemos sus ventajas frente a las comunicaciones analógicas. Cabe señalar, en primer lugar, que en muchas ocasiones la propia naturaleza digital de la información hace que no quiera otra alternativa, por ejemplo, cuando se desea transmitir un fichero de texto. En otros casos es la naturaleza del canal, en sí más adecuado para la transmisión de señales digitales, la que aconseja el uso de técnicas de comunicaciones digitales. Esto ocurre, por ejemplo, en los

dispositivos de almacenamiento óptico, como el DVD (“*Digital Versatile Disc*”).

Una destacable ventaja de las comunicaciones digitales con respecto a las analógicas es el grado de abstracción que permite alcanzar, independizando la comunicación de la naturaleza de la información a enviar. Para un sistema de comunicaciones digitales se aplica el viejo dicho “*un bit es un bit*”, que puede entenderse como que su objetivo no es otro que comunicar de manera fiable cada bit, con independencia de qué representa¹. Fue Claude Shannon quien se encargó de demostrar en los años 40 que el problema de la transmisión de información se podía descomponer en dos sin pérdida teórica de prestaciones: primero se busca la forma más eficiente de representar como una secuencia binaria la señal a transmitir; después se busca la forma más eficiente de transmitir la secuencia binaria.

Otra gran ventaja de las comunicaciones digitales se conoce como el efecto regenerativo. Cuando se deseaba transmitir información a larga distancia (p.ej., a través de un cable submarino), la atenuación sufrida por la señal enviada obligaba a que los sistemas de comunicaciones analógicas incorporasen *repetidores*, esto es, dispositivos que captan, amplifican y retransmiten dicha señal. El inconveniente de los repetidores es que no sólo amplifican la señal, sino también el ruido, por lo que al final de una cadena con muchos repetidores la calidad de la señal en el extremo receptor podía ser muy pobre. Empleando comunicaciones digitales es posible emplear *repetidores regenerativos*, esto es, que reconstruyen la señal antes de retransmitirla. De este modo, si la calidad de un solo enlace es suficientemente buena, la reconstrucción puede tener lugar sin apenas errores, lo que hace que la información en el extremo receptor pueda extraerse sin una pérdida de calidad apreciable. Curiosamente, es el efecto regenerativo el que también propicia que se realicen copias de un medio de almacenamiento óptico a otro manteniendo la calidad.

Además, las comunicaciones digitales permiten aprovechar todo el potencial de los sistemas electrónicos digitales para alcanzar el objetivo de fabricar terminales más baratos y pequeños. Gracias al formato digital, es posible emplear técnicas de tratamiento digital de señales que dotan a los sistemas de nuevas funcionalidades, entre las que destaca la flexibilidad. Un terminal de comunicaciones digitales moderno contiene una enorme cantidad de software; de hecho, se tiende hacia terminales definidos mediante software, que puedan actualizarse automáticamente para incorporar nuevas versiones del estándar bajo el que operan, o incluso de diferentes estándares, dependiendo del uso que se dé al terminal. Asimismo, el formato digital permite aplicar sobre las señales ciertas operaciones que en el caso analógico no están resueltas satisfactoriamente, como ocurre con la criptografía, gracias a la cual se consigue conferir privacidad a la comunicación.

Finalmente, los sistemas digitales permiten construir fácilmente mecanismos de multiplexación temporal y encaminamiento, que resultarían muy complejos con sistemas analógicos.

Pero no todo van a ser ventajas: así, las señales obtenidas al digitalizar una señal analógica necesitan más ancho de banda para poder ser transmitidas con un nivel similar de calidad. Por fortuna, en la práctica se han conseguido desarrollar algoritmos de *codificación de fuen-*

¹En realidad, cuando se trata de tarificar, los operadores de telefonía móvil bien saben que un bit no es un bit: enviar un bit de un mensaje de texto cuesta más de 500 veces más que un bit de voz.

te tan eficientes que la situación ha dado la vuelta, siendo posible en la actualidad emplear una fracción del ancho de banda ocupado por la señal analógica; no obstante, estos algoritmos demandan una elevada potencia de cálculo que encarece el coste de los terminales. A ello hay que añadir, por supuesto, el coste de los conversores analógico/digital y digital/analógico. Sólo gracias a los rápidos avances en las tecnologías de circuitos integrados se han podido reducir estos costes.

Otra desventaja de las comunicaciones digitales es la necesidad de sincronizar perfectamente los relojes empleados en transmisión y recepción. Como comprobaremos en este texto (Capítulo 11), ello ha obligado a concebir ingeniosos algoritmos de sincronización.

1.2. ELEMENTOS DE UN SISTEMA DE COMUNICACIONES DIGITALES

La Figura 1.1 es un diagrama de bloques que contiene los elementos fundamentales de un sistema de comunicaciones digitales. La fuente de información puede ser, como ya hemos indicado, analógica o digital. En el primer caso podemos tener, por ejemplo, la señal captada por un micrófono o por una cámara; en el segundo, la fuente podría ser un servidor web. La misión del bloque denominado *codificación de fuente* es la de representar la información de fuente con la menor cantidad de bits posible; es por ello que en ocasiones se habla de *compresión* de la información. Para lograr este propósito el codificador de fuente elimina la redundancia presente en la señal a su entrada. Piénsese, por ejemplo, en una señal de televisión, en la que el locutor apenas varía de posición de un cuadro de la imagen al siguiente; en tal caso es más eficiente transmitir sólo la información que nos dice cómo varía la imagen en un cuadro con respecto al anterior que el cuadro completo. Naturalmente, cuanta más redundancia, mayor compresión se puede alcanzar.

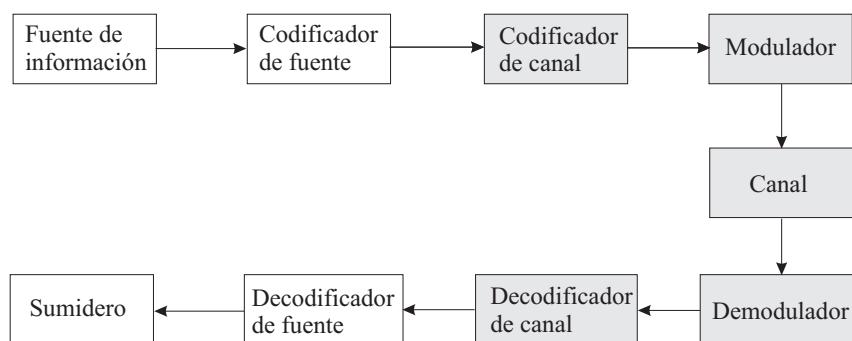


Figura 1.1. Diagrama de bloques de un sistema de comunicaciones digitales.

El bloque denominado *codificación de canal* protege los bits fruto de la compresión contra errores producidos en el canal. Es fácil entender que cuanta más redundancia se haya eliminado más “importante” será cada bit, en el sentido de que si se recibe erróneamente, sus efectos se propagarán cuando se “descomprima” la señal recibida. ¿Cómo protege los bits el codificador de canal? Añadiendo redundancia. Ciertamente, en este punto el lector

puede hallarse un tanto desconcertado: hemos eliminado redundancia y ahora volvemos a introducirla. Pero hay que pensar que se trata de otro tipo de redundancia, destinada a evitar que se produzcan errores en el canal. Una forma sencilla, aunque poco eficiente, de código de canal consiste en repetir cada bit un número impar n de veces y en el decodificador decidir por mayoría: si en los n bits recibidos hay más unos que ceros, se decide que se transmitió un uno; en caso contrario, un cero. En el Capítulo 10 comprobaremos que existen formas de construir códigos de canal mucho mejores, en el sentido de que la probabilidad de equivocación por bit transmitido es menor.

La secuencia de bits que sale del codificador de canal debe ser ahora transformada en formas de onda que se adapten a las características del canal. Por ejemplo, si el canal es limitado en banda, no se gana nada transmitiendo potencia fuera de ella. El cometido del *modulador digital* es hacer corresponder las formas de onda de un conjunto finito y discreto con los bits que se tienen a su entrada. En el caso más sencillo que recordábamos en el apartado anterior, la transmisión de un bit de valor uno se corresponde con una forma de onda rectangular de un determinado nivel de voltaje, mientras que el cero se corresponde con otro nivel distinto. Pero se pueden concebir esquemas más eficientes sin más que considerar un número mayor de niveles posibles, haciendo la correspondencia entre varios bits y una forma de onda. Por ejemplo, los bits de entrada al modulador se pueden agrupar de tres en tres para transmitir un pulso rectangular que pueda tomar uno de entre $2^3 = 8$ niveles posibles. La clave de un buen diseño está en elegir adecuadamente las formas de onda para que su número sea lo mayor posible (y así enviar más bits por cada forma de onda transmitida) y sean lo suficientemente distintas como para que al ser deterioradas en el canal se puedan seguir distinguiendo en el receptor.

El *canal* se corresponde con el medio físico sobre el que transmitimos la señal que sale del modulador. Por ejemplo, el canal puede ser el cable de pares de la línea telefónica, o el espacio libre en el caso de señales de radio. Por desgracia, todos los medios físicos deterioran la señal transmitida al menos de dos maneras: por un lado distorsionan la forma de onda y por otro corrompen la señal incorporando ruido. En última instancia son estos efectos indeseables los que dan sentido a muchas de las técnicas que estudiaremos en este libro.

Los bloques de la figura denominados *demodulador digital*, *decodificador de canal* y *decodificador de fuente* simplemente realizan las funciones inversas al modulador digital, codificador de canal y codificador de fuente, respectivamente. Por ejemplo, el demodulador digital debe convertir la forma de onda recibida en un grupo de bits, para lo que suele buscar aquella forma de onda transmitida que más se parece a la recibida.

Por lo que respecta al bloque denominado *sumidero* éste implica la vuelta al mundo analógico en aquellos casos en que la señal a transmitir es de esta naturaleza, y la presentación o almacenamiento en aquellos casos en que la fuente es digital. Por ejemplo, en el caso de una señal de voz, el bloque sumidero convierte los bits de entrada en una señal audible.

Los bloques codificador de fuente, codificador de canal y modulador componen el *transmisor*, mientras que el demodulador, el decodificador de canal y el decodificador de fuente componen el *receptor*. En aplicaciones en que se necesita mantener una comunicación digital bidireccional, es frecuente encapsular transmisor y receptor en un único equipo que

se conoce como *módem*, término que procede de la combinación de las palabras “modulador” y “demodulador”. El ejemplo más conocido es el módem telefónico, empleado para comunicar información digital sobre el cable de pares telefónico.

Los algoritmos de codificación y decodificación de fuente son fuertemente dependientes de las características de la señal de entrada, por lo que suelen ser descritos en textos enfocados a aplicaciones específicas. Por otra parte, dado que nuestro objetivo es la comunicación fiable (con una baja probabilidad de error) de bits independientemente de su naturaleza, el ámbito del presente texto será exclusivamente el de los bloques sombreados en la Figura 1.1.

1.3. CANALES

La existencia de un canal es la razón que justifica la existencia de un sistema de comunicaciones, y la forma en que un canal degrada la señal que ponemos a su entrada es la guía para el diseño del sistema de comunicaciones. Por esta razón, conviene que nos detengamos a analizar, al menos, los tipos de canales más importantes.

Un primer tipo de canales son aquellos en que el medio físico empleado para la transmisión es un conductor eléctrico, tal como el par de hilos de cobre que conectan un terminal telefónico con la central o centralita a la que está asociado, el cable coaxial que conecta el módem de una red de cable con su distribuidor correspondiente, los ocho hilos de un cable de pares trenzados de los utilizados para conectar un ordenador al conmutador de la *red de área local* o los cuatro hilos paralelos de un cable USB (“Universal Serial Bus”).

Los principales mecanismos de degradación que introduce este medio son la atenuación de la señal puesta a su entrada y la adición del denominado *ruido térmico*. La atenuación va a depender, entre otros factores, de la longitud de los hilos o el cable, pero no de la longitud en unidades de medida como el metro, sino en longitudes de onda de la señal que lo atraviesa (supuesto que es una sinusoida), lo que implica que sinusoides de distintas frecuencias van a sufrir distintas atenuaciones. Para una señal en general, este efecto se va a traducir en una distorsión de su forma de onda. El segundo efecto, el ruido térmico o ruido de Johnson, se produce por el movimiento desordenado de los electrones en un material conductor y es de naturaleza aleatoria. Es, en la mayoría de los casos, el factor que limita más severamente la fiabilidad de la comunicación.

Un segundo tipo de canal es el denominado *canal radioeléctrico* o *canal radio*, que engloba todas aquellas transmisiones electromagnéticas en el espacio libre. Suele dividirse en *canal radio fijo* (si tanto la antena transmisora como la receptora están en una ubicación física fija) y *canal radio móvil* (si al menos una de las antenas está en movimiento). Ejemplos de estos canales son los radioenlaces fijos en HF (“High Frequency”, de 3 a 30 MHz), el canal radio móvil en el sistema de telefonía móvil GSM en las bandas de 900 o 1.800 MHz o el canal entre un satélite de comunicaciones y un receptor terrestre en la banda Ka (entre 18 y 40 GHz).

Los mecanismos de propagación electromagnética son distintos en bandas distintas de frecuencia, pero en espacio libre el efecto es sólo una atenuación (aunque puede ser distinta

a frecuencias distintas). El principal mecanismo de distorsión de la forma de onda es debido a las múltiples reflexiones y refracciones que pueden sufrir las ondas electromagnéticas en su propagación, lo que se conoce con el nombre de *propagación multirayecto*, que provoca que en la antena receptora aparezcan réplicas de la onda original a distintos retardos y con distintas amplitudes. Adicionalmente, en el canal radio móvil (o en canales fijos si cambian las condiciones de propagación), todos estos efectos varían con el tiempo, lo que origina un nuevo problema que no vamos a considerar en este texto y que se suele denominar *transmisión en canales con desvanecimiento*. A los lectores interesados les recomendamos como primera opción la consulta de los capítulos correspondientes en algunos libros generales de comunicaciones digitales como [61].

En el canal radioeléctrico no hemos mencionado la presencia del ruido térmico porque no aparece en la propagación radioeléctrica, lo que no quiere decir que lo vayamos a poder evitar, ya que en el momento de realizar la conversión electromagnética a eléctrica en la antena, encontramos el primer elemento metálico, por no mencionar toda la circuitería eléctrica o electrónica posterior. Aunque en términos absolutos la magnitud del ruido térmico que introduce la antena puede ser muy pequeña, la señal que recibe esta misma antena también puede ser muy pequeña, por lo que el ruido térmico vuelve a ser el factor limitante más importante también en este canal.

La aparición del ruido térmico en el canal radioeléctrico pone de manifiesto que rara vez nos encontraremos con un canal compuesto por un único medio físico (en este caso, propagación radioeléctrica y circuitos eléctricos o electrónicos). Un ejemplo extremo de esta situación puede ser el canal telefónico en banda vocal que ha sido profusamente utilizado en décadas pasadas: imaginemos que queremos realizar una comunicación entre Madrid y Buenos Aires empleando módems de canal telefónico; además del par de hilos entre el módem y la central probablemente la señal atraviese un gran número de medios de transmisión como enlaces vía radio terrestres, satelitales, cables submarinos, cables coaxiales terrestres, etc., además de posibles conversiones analógico-digital y digital-analógico. Para lograr una caracterización útil de este tipo de canales compuestos se suele agrupar todas las distorsiones sobre la forma de onda como un único sistema lineal o no lineal y todas las fuentes de ruido aditivo en una única, generalmente representada como ruido térmico.

Un tercer tipo de canal, que no vamos a considerar en este texto, son los canales ópticos, tanto guiados (fibras ópticas) como no guiados. El principal motivo de su ausencia en este texto es que, en general, requiere un desarrollo distinto (como demuestra la existencia de numerosos libros dedicados exclusivamente a las comunicaciones ópticas) debido, entre otras razones, al poco desarrollo de los dispositivos que permiten realizar ópticamente operaciones como las que vamos a considerar y, además, porque el ruido presente en los dispositivos fotónicos, de tipo impulsivo, es de naturaleza radicalmente distinta al ruido térmico.

De lo expuesto hasta ahora podría deducirse que todos los codificadores de canal y moduladores se aplican para comunicaciones que podríamos denominar “instantáneas”, pero no es así. El cuarto tipo de canal que vamos a considerar es el *canal magnético*, que encontramos en discos duros y cintas magnéticas. Téngase en cuenta que, desde el punto de vista del diseño del sistema de comunicación importa poco que el retardo entre la entrada al canal (grabación en el caso del canal magnético) y la salida (lectura en el caso del canal magné-

tico) sea de microsegundos o de años (siempre que no exista realimentación del receptor al transmisor). Este canal, al igual que los canales radioeléctrico y de medio conductor, introduce una distorsión a la forma de onda (aunque los mecanismos que generan esta distorsión sean de naturaleza distinta) y un ruido que, aunque no es el ruido térmico, presenta unas propiedades muy similares a ruido térmico filtrado. Resulta impensable hoy en día producir discos duros o sistemas de almacenamiento en cinta magnética sin emplear técnicas como las que se describen en este texto.

Otro interesante ejemplo de canal no instantáneo es el que aparece en los sistemas de *marcado de agua digital*. El marcado de agua digital se refiere a un conjunto de técnicas utilizadas para enviar información “escondida” en un objeto multimedia. Por ejemplo, una marca de agua puede incrustarse de forma invisible en una imagen digital; dicha marca puede contener información sobre el propietario legal de la imagen, anotaciones relativas a la misma o datos que garanticen su integridad. En estos casos, el canal es la propia imagen en donde se desea esconder la marca, que por su parte hace las veces de señal transmitida. La comunicación se ve dificultada por el hecho de que, para garantizar la invisibilidad, la energía de la imagen (nivel de ruido) suele ser mucho mayor que el de la marca (nivel de señal), por lo que se suelen emplear técnicas de protección contra errores como las que describiremos en este libro para conseguir comunicar la cantidad de información deseada.

Además de las fuentes intrínsecas de degradación que introducen los canales y que hemos analizado hasta ahora puede existir además otro tipo de interferencias de fuentes no naturales que es necesario tener en cuenta en algunos canales concretos. Si esa interferencia está provocada por otras comunicaciones simultáneas solemos hablar de *interferencia radioeléctrica* o interferencia a secas en el caso del canal radioeléctrico y *diafonía* en el caso de canal de medio conductor. Si además esta interferencia está producida por otras comunicaciones de las mismas características realizadas por otros usuarios se denomina *interferencia multiusuario*.

Otras interferencias suelen denominarse *ruido generado por el ser humano* si la fuente de la interferencia es alguna máquina o aparato eléctrico o electromecánico (por ejemplo, las interferencias generadas por los tubos fluorescentes de iluminación o por las bujías de los motores de explosión en el canal radio, o los transitorios que generan los arranques de motores en la línea eléctrica considerada como canal). En algunos ámbitos como el militar también existen interferencias que se realizan de forma deliberada para degradar un sistema de comunicaciones por parte del enemigo, que en este contexto recibe el nombre de “*jammer*”. En general, aunque las principales fuentes de degradación siguen siendo el ruido térmico y la distorsión de la forma de onda, la presencia de estas interferencias condiciona el diseño de los sistemas de comunicación y fuerza el empleo de técnicas para su mitigación. Estas técnicas incluyen, por ejemplo, el empleo de modulaciones resistentes a interferencias (véase el Apartado 8.2.6), de receptores multiusuario (véase el Apartado 8.3.3), o de canceladores de interferencias.

1.4. ESTRUCTURA DEL LIBRO

En el contexto de las redes de ordenadores, en que se establece un modelo de capas para la comunicación, nuestro texto se centra en la llamada *capa física*, cuyo cometido no es otro que la transmisión fiable de bits de un extremo a otro. Es por ello que en dicho modelo la capa física es aquélla sobre la que descansan todas las demás; se necesitan unas buenas prestaciones de la capa física para que el rendimiento del sistema completo sea aceptable.

Los Capítulos 2 y 3 repasan los conceptos fundamentales de señales y sistemas, y teoría de la probabilidad, respectivamente, y que son necesarios para la comprensión del resto del libro. Aquellos lectores que tengan conocimientos previos en estos temas pueden saltarse su lectura, aunque se recomienda un rápido vistazo para hacerse con la notación empleada.

El Capítulo 4 sirve para sentar las bases de la modulación y detección, empleados en capítulos posteriores. Ello se consigue con la llamada “formulación en espacio de señales” que permite que el análisis de un sistema de comunicaciones digitales se pueda abstraer de las formas de onda empleadas. La extensión de dicha formulación a la transmisión indefinida de información sirve de preludio al Capítulo 5, que se ocupa de las modulaciones de amplitud, describiendo las técnicas que clásicamente se han utilizado para transmitir datos sobre canales paso bajo y paso banda. Un concepto fundamental que aparece en el contexto de este tipo de modulaciones es el de *interferencia intersimbólica*, que se debe a la dispersión temporal sobre las formas de onda transmitidas introducida por el medio físico. El Capítulo 6 se dedica precisamente a discutir técnicas para mitigar la interferencia intersimbólica y posibilitar así la comunicación.

Las limitaciones de algunos canales se traducen en distorsiones no lineales que dificultan el empleo de modulaciones de amplitud. Una alternativa consiste en la utilización de modulaciones de fase y frecuencia, que se discuten en el Capítulo 7. La combinación de modulaciones de frecuencia con modulaciones de amplitud da lugar a las llamadas *modulaciones multiportadora* que recientemente se han convertido en el formato más extendido por sus excelentes propiedades en canales dispersivos y su relativa facilidad de implementación. El estudio de estas modulaciones se aborda en el Capítulo 8. Una alternativa, también descrita en el Capítulo 8, es el empleo de modulaciones de espectro ensanchado.

El estudio de todos estos formatos de modulación plantea de forma natural cuáles son los límites fundamentales de las comunicaciones digitales. Estos límites, sorprendentemente obtenidos por Shannon en los años cuarenta, constituyen parte de la base de la *teoría de la información*, que se presenta en el Capítulo 9, donde, además, se introduce la codificación de canal como forma pragmática de acercarse a dichos límites. La codificación de canal es precisamente el tema sobre el que versa el Capítulo 10, en el que se discuten tanto las técnicas de codificación clásicas, los códigos bloque y los códigos convolucionales, como las modulaciones codificadas en rejilla o técnicas avanzadas de codificación como los códigos turbo o los códigos LDPC. Finalmente, el Capítulo 11 se ocupa de una importante cuestión a veces soslayada en los libros de texto: la sincronización. Ésta se refiere a la recuperación en el receptor de algunos parámetros empleados por el transmisor, como el reloj de símbolo o la frecuencia de la portadora, y sin cuyo conocimiento las prestaciones se ven seriamente afectadas.

CAPÍTULO 2

SEÑALES Y SISTEMAS

En este capítulo se ofrece una revisión de los conceptos fundamentales de señales y sistemas con algunas extensiones de la teoría básica que son de interés en el estudio de los sistemas de comunicaciones como son el espacio de Hilbert de las señales de energía finita o la representación de señales paso banda.

2.1. SEÑALES

Una señal es una representación matemática de la evolución de una magnitud física (o una medida) respecto de algún o algunos parámetros; generalmente tiempo o espacio. Esta magnitud física puede ser voltaje, intensidad eléctrica, presión, temperatura, intensidad lumínica, etc.; e incluso puede que ni tan siquiera tenga un sentido físico claro, como la cotización bursátil de una empresa determinada, o la población mundial. Lo realmente interesante del estudio de las señales es que suponen una abstracción respecto a la magnitud física concreta, pasando esta a ser considerada como una función matemática, $x(\cdot)$, que tiene como variables independientes los parámetros con respecto a los cuales varía. A lo largo de todo el texto vamos a considerar que existe un único parámetro y que este es el tiempo.

A continuación vamos a abordar los siguientes aspectos relacionados con el estudio de las señales: criterios que nos permiten su clasificación, medidas que podemos realizar sobre ellas, algunas señales concretas especialmente útiles y una representación algebraica de las señales que va a ser de interés en capítulos posteriores. Además, emplearemos este apartado para ir introduciendo la notación que se utilizará a lo largo de todo el texto.

2.1.1. Clasificación de señales

Un primer paso en el estudio de las señales consiste en su clasificación de acuerdo con determinados criterios. Veamos a continuación los criterios más importantes.

Señales en tiempo continuo y en tiempo discreto. Si la variable independiente puede tomar cualquier valor real decimos que la señal es en tiempo continuo y la denotamos como

$x(t)$ ($t \in \mathbb{R}$, siendo \mathbb{R} el cuerpo de los números reales). Si la variable independiente toma solo valor en los números enteros decimos que la señal es en tiempo discreto (también denominada secuencia) y la denotamos como $x[n]$ ($n \in \mathbb{Z}$, siendo \mathbb{Z} el anillo de los números enteros).

Ejemplo 2.1

Un ejemplo de señal en tiempo continuo es

$$x(t) = t$$

y un ejemplo de señal en tiempo discreto es

$$x[n] = n$$

que representamos en la Figura 2.1.

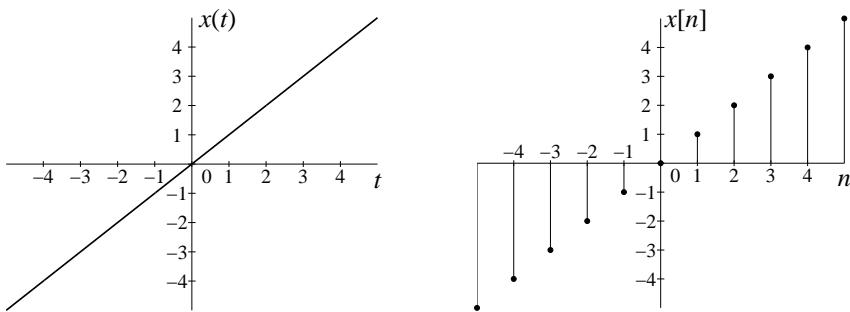


Figura 2.1. Ejemplos de señales en tiempo continuo y en tiempo discreto.

Nótese que la diferencia entre ambas señales no está en su descripción analítica (el valor de la señal es igual al valor de la variable independiente), sino en que $x(0,5)$ es igual a 0,5 y $x[0,5]$ no existe, no está definido.

En algunos casos las secuencias se obtienen a partir de muestras de señales en tiempo continuo, pero en otros la propia magnitud física que representa la señal es de naturaleza discreta. Al fin y al cabo, una secuencia no es sino una lista de números ordenados.

Señales analógicas y digitales. Si la señal puede tomar uno entre un conjunto finito de valores decimos que la señal es digital y la denotamos con letras mayúsculas como $X(t)$ o $X[n]$ (según sea en tiempo continuo o en tiempo discreto). Si la señal puede tomar uno de entre un conjunto infinito de valores decimos que la señal es analógica y la denotamos con letras minúsculas como $x(t)$ o $x[n]$.

Comúnmente se asocia el término “señal digital” a señales en tiempo discreto y digitales, pero no hay que confundir una propiedad que afecta a la variable independiente (tiempo continuo o tiempo discreto) con una propiedad que afecta a los valores que toma la señal propiamente dicha (analógica o digital).

Ejemplo 2.2

La Figura 2.2 representa ejemplos de señales digitales en tiempo continuo y en tiempo discreto que sólo pueden tomar los valores 1 y -1 . Las señales del ejemplo anterior eran señales analógicas.

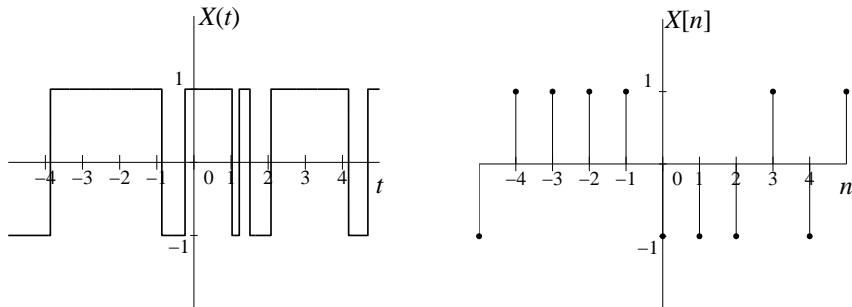


Figura 2.2. Ejemplos de señales digitales en tiempo continuo y de tiempo discreto.

Señales deterministas y aleatorias. Este criterio de clasificación, comúnmente citado en numerosos textos, es un criterio falso porque no puede aplicarse a ninguna señal concreta, sino al modelo matemático que empleamos para representar las señales. Estrictamente hablando, no podemos hablar de señales deterministas y señales aleatorias, sino de un modelo determinista y un modelo aleatorio o estocástico para representar el conocimiento que poseemos sobre las señales.

Bajo un modelo determinista, si suponemos que conocemos $x(t)$ (o $x[n]$) estamos suponiendo que conocemos la amplitud de $x(t)$ para todos los valores de t ; por ejemplo, sabemos que $x(75,4)$ es igual a $2,1$ y no cualquier otro, y así con todos los valores de t . Bajo un modelo estocástico, si suponemos que conocemos $x(t)$ (o $x[n]$) estamos suponiendo que conocemos las propiedades estadísticas de $x(t)$ para todos los valores de t , pero no el valor concreto de $x(t)$; por ejemplo, sabemos que el valor medio (esperanza matemática) de $x(75,4)$ es igual a $-0,5$, o que la varianza de $x(75,4)$ es igual a $1,1$, o que el valor $x(75,4)$ tiene una descripción probabilística gaussiana de media $-0,5$ y varianza $1,1$, pero no sabemos con certeza el valor de la señal en ese instante.

El modelo realmente importante dentro de las comunicaciones es el modelo estocástico, pues es el único capaz de representar la información que puede contener una señal. Como veremos a lo largo del texto, información es equivalente a incertidumbre sobre el valor concreto que toma una señal, un parámetro, etc. Sin embargo, el tratamiento empleando el modelo estocástico resulta por lo general más complicado y farragoso, por lo que allí donde se pueda se recurrirá a un modelo determinista. En este capítulo vamos a considerar únicamente el modelo determinista, tratando el modelo estocástico en el capítulo siguiente.

Señales periódicas y aperiódicas. Una señal es periódica si los valores que toma se repiten de forma cíclica. Matemáticamente podemos expresarlo de la siguiente forma: una señal

$x(t)$ (o $x[n]$) es periódica con periodo T (o N) si existe un valor $T \in \mathbb{R}$ (o $N \in \mathbb{Z}$) para el que se cumple que

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t + T) \quad \forall t \\ (x[n] &= x[n + N] \quad \forall n) \end{aligned} \tag{2.1}$$

El menor valor de T (o N) para el que se cumple (2.1) se denomina *periodo fundamental* y se denota como T_0 (o N_0). Si una señal no es periódica se dice que es aperiódica.

Señales reales y complejas. Una señal compleja es aquella que toma valores en el cuerpo de los complejos, $x(t) \in \mathbb{C}$ o $x[n] \in \mathbb{C}$. Una señal real es aquella que sólo toma valores en el cuerpo de los reales; $x(t) \in \mathbb{R}$ o $x[n] \in \mathbb{R}$. Salvo que se especifique lo contrario, siempre que nos refiramos a una señal sin especificar si es real o compleja entenderemos que es una señal compleja.

Definimos las partes real e imaginaria de una señal como (omitimos la definición para secuencias por ser idéntica)

$$\mathcal{R}e\{x(t)\} \doteq \frac{x(t) + x^*(t)}{2} \tag{2.2}$$

$$\mathcal{I}m\{x(t)\} \doteq \frac{x(t) - x^*(t)}{2j} \tag{2.3}$$

donde $j = \sqrt{-1}$ y $*$ indica complejo conjugado. Puede comprobarse que las partes real e imaginaria son señales reales. A partir de las partes real e imaginaria reconstruimos la señal como

$$x(t) = \mathcal{R}e\{x(t)\} + j\mathcal{I}m\{x(t)\} = \frac{x(t) + x^*(t)}{2} + j\frac{x(t) - x^*(t)}{2j} = x(t) \tag{2.4}$$

y podemos interpretar una señal real como aquella cuya parte imaginaria es idénticamente nula.

Otra descomposición de una señal compleja en dos señales reales se realiza (como realizaríamos la descomposición de un número complejo) mediante su módulo, $|x(t)|$, definido como

$$|x(t)| \doteq \sqrt{x(t)x^*(t)} = \sqrt{\mathcal{R}e^2\{x(t)\} + \mathcal{I}m^2\{x(t)\}} \tag{2.5}$$

y su fase, $\angle x(t)$, definida como

$$\angle x(t) \doteq \arctan \frac{\mathcal{I}m\{x(t)\}}{\mathcal{R}e\{x(t)\}} \tag{2.6}$$

de la forma

$$x(t) = |x(t)|e^{j\angle x(t)} = |x(t)| \cos(\angle x(t)) + j|x(t)| \sin(\angle x(t)) \tag{2.7}$$

Señales pares e impares. Una señal $x(t)$ (o $x[n]$) es par si cumple

$$\begin{aligned} x(t) &= x(-t) \quad \forall t \\ (x[n] &= x[-n] \quad \forall n) \end{aligned} \tag{2.8}$$

Una señal $x(t)$ (o $x[n]$) es impar si cumple

$$\begin{aligned} x(t) &= -x(-t) \quad \forall t \\ (x[n] &= -x[-n] \quad \forall n) \end{aligned} \tag{2.9}$$

De manera análoga a las partes real e imaginaria de una señal, podemos definir las partes par, $\mathcal{E}v\{x(t)\}$, e impar, $\mathcal{O}d\{x(t)\}$, de una señal como (omitimos la definición para secuencias por ser idéntica)

$$\mathcal{E}v\{x(t)\} = \frac{x(t) + x(-t)}{2} \tag{2.10}$$

$$\mathcal{O}d\{x(t)\} = \frac{x(t) - x(-t)}{2} \tag{2.11}$$

y expresar cualquier señal en función de sus partes par e impar

$$x(t) = \mathcal{E}v\{x(t)\} + \mathcal{O}d\{x(t)\} \tag{2.12}$$

Podemos comprobar fácilmente que la parte par de una señal es a su vez una señal par y que la parte impar es una señal impar.

Señales hermíticas y antihermíticas. Otro tipo de simetría similar a la paridad o imparidad es la hermiticidad. Una señal $x(t)$ (o $x[n]$) es hermítica si cumple

$$\begin{aligned} x(t) &= x^*(-t) \quad \forall t \\ (x[n] &= x^*[-n] \quad \forall n) \end{aligned} \tag{2.13}$$

lo que implica que la parte real es par y la imaginaria es impar. Una señal $x(t)$ (o $x[n]$) es antihermítica si cumple

$$\begin{aligned} x(t) &= -x^*(-t) \quad \forall t \\ (x[n] &= -x^*[-n] \quad \forall n) \end{aligned} \tag{2.14}$$

lo que implica que la parte real es impar y la imaginaria par.

Podemos definir las partes hermítica, $\mathcal{H}e\{x(t)\}$, y antihermítica, $\mathcal{A}h\{x(t)\}$, de una señal como (omitimos la definición para secuencias por ser idéntica)

$$\mathcal{H}e\{x(t)\} = \frac{x(t) + x^*(-t)}{2} \tag{2.15}$$

$$\mathcal{A}h\{x(t)\} = \frac{x(t) - x^*(-t)}{2} \tag{2.16}$$

y expresar cualquier señal en función de sus partes hermítica y antihermítica

$$x(t) = \mathcal{H}e\{x(t)\} + \mathcal{A}h\{x(t)\} \quad (2.17)$$

Aun a costa de parecer un triste remedio de un famoso diálogo de los hermanos Marx, podemos cruzar algunas de las clasificaciones anteriores y establecer aseveraciones como “la parte par de la parte hermítica de una señal compleja es una señal real”, o “la parte antihermítica de la parte impar de la parte imaginaria de una señal es idénticamente nula”.

2.1.2. Medidas de señales

Empleando los criterios vistos hasta ahora podemos clasificar una señal determinada, pero no podemos distinguir entre dos señales que cumplan los mismos criterios. Un paso más allá en el estudio de señales consiste en representar una señal mediante un conjunto de medidas sobre ella. Veamos a continuación las medidas más importantes.

Valor medio. Es la media temporal de la amplitud de la señal y será, en general, un número complejo. Formalmente se define como

- Señales en tiempo continuo

- Aperiódicas

$$\bar{x} = \langle x(t) \rangle \doteq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt \quad (2.18)$$

- Periódicas

$$\bar{x} = \langle x(t) \rangle \doteq \frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} x(t) dt \quad (2.19)$$

donde $\int_{(T_0)}$ denota integración a lo largo de un intervalo de duración T_0 , sea cual sea el inicio de este intervalo.

- Señales en tiempo discreto

- Aperiódicas

$$\bar{x} = \langle x[n] \rangle \doteq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x[n] \quad (2.20)$$

- Periódicas

$$\bar{x} = \langle x[n] \rangle \doteq \frac{1}{N_0} \sum_{n \in \{N_0\}} x[n] \quad (2.21)$$

donde $\sum_{n \in \{N_0\}}$ denota suma a lo largo de un intervalo de duración N_0 , sea cual sea el inicio de este intervalo.

Valor de pico. Es el valor máximo del módulo de la señal

- Señales en tiempo continuo

$$x_p \doteq \max_t |x(t)| \quad (2.22)$$

- Señales en tiempo discreto

$$x_p \doteq \max_n |x[n]| \quad (2.23)$$

Energía. Es una medida cuadrática de naturaleza real y no negativa definida como

- Señales en tiempo continuo

$$E_x = \mathcal{E}\{x(t)\} \doteq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad (2.24)$$

- Señales en tiempo discreto

$$E_x = \mathcal{E}\{x[n]\} \doteq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 \quad (2.25)$$

Si E_x es una cantidad finita, decimos que $x(t)$ (o $x[n]$) es una señal de energía finita. Si E_x excede toda cota, decimos que $x(t)$ (o $x[n]$) es una señal de energía infinita.

Potencia. Es una medida cuadrática de naturaleza real y no negativa que resulta de interés para señales de energía infinita y representa la energía por unidad de tiempo. Se define como

- Señales en tiempo continuo

- Aperiódicas

$$P_x = \mathcal{P}\{x(t)\} = \langle |x(t)|^2 \rangle \doteq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt \quad (2.26)$$

- Periódicas

$$P_x = \mathcal{P}\{x(t)\} = \langle |x(t)|^2 \rangle \doteq \frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} |x(t)|^2 dt \quad (2.27)$$

- Señales en tiempo discreto

- Aperiódicas

$$P_x = \mathcal{P}\{x[n]\} = \langle |x[n]|^2 \rangle \doteq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2 \quad (2.28)$$

- Periódicas

$$P_x = \mathcal{P}\{x[n]\} = \langle |x[n]|^2 \rangle \doteq \frac{1}{N_0} \sum_{n \in \{N_0\}} |x[n]|^2 \quad (2.29)$$

2.1.3. Señales de interés

Analizaremos a continuación algunas señales concretas que serán de utilidad a lo largo del texto.

Delta de Dirac. La función delta de Dirac, $\delta(t)$, también conocida como función impulso se emplea para modelar fenómenos físicos en tiempo continuo y corta duración. Estrictamente hablando ni tan siquiera es una función matemática, sino una distribución o una función generalizada. Definimos la función delta de Dirac como la que cumple la igualdad

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - t_0) dt = x(t_0) \quad (2.30)$$

para cualquier señal $x(t)$ continua y cualquier instante t_0 . Esta definición admite la interpretación de una descomposición de la señal $x(t)$ mediante funciones delta reescribiéndola como

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \quad (2.31)$$

Una interpretación más intuitiva de la función $\delta(t)$ puede realizarse a partir de sus propiedades:

1. Toma valor cero fuera del instante cero

$$\delta(t) = 0 \quad \forall t \neq 0$$

2. El área bajo la función es igual a 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

3. Es una función par

$$\delta(t) = \delta(-t)$$

También puede definirse la función delta como

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(t) \quad (2.32)$$

siendo $\delta_\epsilon(t)$ la señal representada en la Figura 2.3. En general, cualquier señal que cumpla las dos últimas propiedades de las reseñadas anteriormente y disponga de un parámetro que permita controlar su duración hasta hacerla instantánea puede dar origen a $\delta(t)$.

La función delta de Dirac se representa tal y como muestra la Figura 2.4, dada la imposibilidad de dibujar una función de área 1 y duración instantánea.

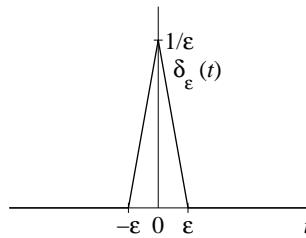


Figura 2.3. Señal que origina una función delta de Dirac cuando el valor del parámetro ϵ tiende a cero.

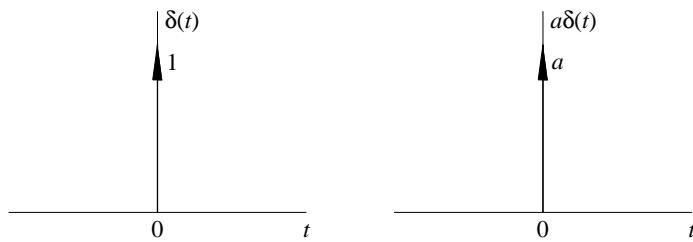


Figura 2.4. Representación de $\delta(t)$ y su versión escalada, $a\delta(t)$.

Delta de Kronecker. Es el equivalente en tiempo discreto de la delta de Dirac pero, al contrario que ésta, su definición no plantea ningún problema

$$\delta[n] \doteq \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases} \quad (2.33)$$

También puede emplearse para la descomposición de secuencias de la forma

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k] \quad (2.34)$$

Funciones escalón. Se definen a partir de las funciones delta como

$$u(t) \doteq \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ 1 & \text{para } t > 0 \end{cases} \quad (2.35)$$

$$u[n] \doteq \sum_{k=-\infty}^n \delta[k] = \begin{cases} 0 & \text{para } n < 0 \\ 1 & \text{para } n \geq 0 \end{cases} \quad (2.36)$$

Sinusoides complejas. Una sinusoida compleja en tiempo continuo se define mediante la fórmula

$$x(t) = e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \operatorname{sen} \omega t \quad (2.37)$$

donde ω es un parámetro de naturaleza real denominado frecuencia. ω controla la rapidez de las oscilaciones de la señal y se mide en radianes por segundo. Valores distintos de ω dan lugar a señales distintas, y a mayor valor de ω , mayor rapidez en la variación de la amplitud de la señal.

Una representación alternativa del parámetro de frecuencia se obtiene mediante su expresión en ciclos por segundo o hercios mediante la igualdad $f = \omega/2\pi$

$$x(t) = e^{j2\pi ft} = \cos 2\pi ft + j\operatorname{sen} 2\pi ft \quad (2.38)$$

Las sinusoides complejas en tiempo continuo son siempre señales periódicas, siendo su periodo fundamental $T_0 = 2\pi/\omega = 1/f$.

Se dice que dos sinusoides de frecuencias ω_1 y ω_2 poseen una relación armónica si se cumple que $\omega_2 = k\omega_1$, siendo k un número entero. En ese caso decimos que la sinusode de frecuencia ω_2 es el k -ésimo armónico de la sinusode de frecuencia ω_1 .

Una sinusode compleja en tiempo discreto se define de manera análoga mediante la fórmula

$$x[n] = e^{j\omega n} = \cos \omega n + j\operatorname{sen} \omega n \quad (2.39)$$

Existen, sin embargo, dos diferencias fundamentales respecto a las sinusoides complejas en tiempo continuo:

1. Una sinusode compleja en tiempo discreto no es siempre una señal periódica. Para que una sinusode compleja sea periódica de periodo N ha de verificarse que $e^{j\omega n} = e^{j\omega(n+N)}$ para todo n . Como $e^{j\omega(n+N)} = e^{j\omega n}e^{j\omega N}$, ha de cumplirse que $e^{j\omega N} = 1 = e^{j2\pi k}$ o, lo que es lo mismo, que la frecuencia sea un múltiplo racional de 2π ($2\pi k/N$, con k y N números enteros) para que la sinusode sea una señal periódica.
2. Valores distintos de ω no generan siempre señales distintas. Si generamos una señal con un valor de ω igual a ω_0 y otra con un valor de ω igual a $(\omega_0 + 2\pi k)$ siendo k un número entero, comprobamos que ambas señales son la misma, puesto que $e^{j(\omega_0+2\pi k)n} = e^{j\omega_0 n}e^{j2\pi kn} = e^{j\omega_0 n}$.

Este hecho nos da un margen de variación efectiva de 2π del parámetro ω en las sinusoides complejas discretas, que suele tomarse como $(-\pi, \pi]$.

Exponenciales reales. Una exponencial real en tiempo continuo se define mediante la fórmula

$$x(t) = e^{\alpha t} \quad (2.40)$$

donde α es un parámetro real. Si α es mayor que cero, la señal es monótona creciente y si α es menor que cero, monótona decreciente. Cuanto mayor es el valor absoluto de α , más rápidamente crecerá o decrecerá la función.

Una exponencial real en tiempo discreto se define mediante la fórmula

$$x[n] = r^n \quad (2.41)$$

donde r es un parámetro real. Si r es mayor que uno, la señal es monótona creciente, si r es positivo y menor que uno, monótona decreciente; y si r es negativo no es monótona ni creciente ni decreciente.

Exponentiales complejas. Una exponencial compleja en tiempo continuo se define como el resultado de multiplicar una exponencial real por una sinusode compleja

$$x(t) = e^{\alpha t} e^{j\omega t} = e^{(\alpha+j\omega)t} = e^{st} \quad (2.42)$$

donde $s = \alpha + j\omega$.

De manera análoga definimos una exponencial compleja en tiempo discreto como el resultado de multiplicar una exponencial real por una sinusode compleja

$$x[n] = r^n e^{j\omega n} = (re^{j\omega})^n = z^n \quad (2.43)$$

donde $z = re^{j\omega}$.

Función sinc. Otra función que aparece comúnmente en análisis de señales y sistemas es la función sinc, definida como

$$\text{sinc}(t) \doteq \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \quad (2.44)$$

y que podemos ver (parcialmente) representada en la Figura 2.5. Es una función par de dura-

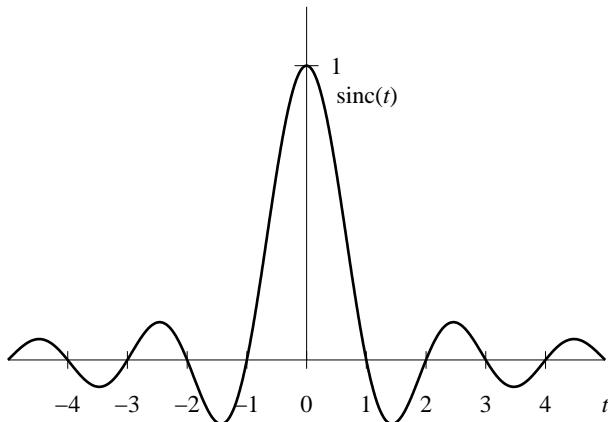


Figura 2.5. Función sinc

ción infinita cuyos cruces por cero se producen en todos los números enteros a excepción del cero, donde toma su valor máximo, 1. Conforme t tiende a infinito la función va decreciendo en amplitud como $1/t$.

Su versión en tiempo discreto se obtiene sin más que sustituir t por an , donde a es un parámetro de escala. En el caso en que $a = 1$ tenemos $\text{sinc}(n) = \delta[n]$.

Función pulso. Otra función de uso frecuente, definida como

$$\Pi(t) \doteq \begin{cases} 1 & \text{para } |t| < 1/2 \\ 0 & \text{para } |t| > 1/2 \end{cases} \quad (2.45)$$

Su versión en tiempo discreto es mucho menos frecuente.

2.1.4. Espacios de Hilbert para señales de energía finita

Las señales admiten una representación como vectores dentro de un espacio vectorial. Esta representación nos permite dotar de una estructura algebraica a las señales que consideremos en cualquier problema y nos abre la posibilidad de aplicar una gran cantidad de herramientas de análisis y síntesis desarrolladas para espacios vectoriales.

Analicemos en primer lugar la estructura de espacio vectorial para comprobar si las señales pueden ser consideradas como vectores. Un espacio vectorial V es un conjunto de elementos que denominamos vectores que poseen las siguientes propiedades:

1. Existe una ley de composición interna, que denominamos suma y representamos por el signo $+$ que, aplicada a dos vectores \mathbf{x} e \mathbf{y} ($\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$) de la forma $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, da como resultado otro vector del espacio ($\mathbf{x} + \mathbf{y} \in V$), cumpliendo además las siguientes propiedades:
 - 1.1. Conmutativa: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V; \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$.
 - 1.2. Asociativa: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V; \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$.
 - 1.3. Existencia de elemento neutro: $\exists \mathbf{0} \in V / \forall \mathbf{x} \in V; \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$.
 - 1.4. Existencia de elemento inverso: $\forall \mathbf{x} \in V \exists (-\mathbf{x}) / \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.
2. Existe una ley de composición externa que denominamos producto con un conjunto C de elementos denominados escalares (que deben tener la estructura de cuerpo) que, aplicada a un escalar α ($\alpha \in C$) y a un vector \mathbf{x} ($\mathbf{x} \in V$) de la forma $\alpha\mathbf{x}$, da como resultado otro vector del espacio ($\alpha\mathbf{x} \in V$), cumpliendo además las siguientes propiedades:
 - 2.1. Asociativa: $\forall \alpha, \beta \in C; \forall \mathbf{x} \in V; \alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$.
 - 2.2. Existencia de elemento neutro: $\exists 1 \in C / \forall \mathbf{x} \in V; 1\mathbf{x} = \mathbf{x}$.
 - 2.3. Distributiva con respecto a la suma: $\forall \alpha \in C; \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V; \alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$.
 - 2.4. Distributiva con respecto al producto por un escalar: $\forall \alpha, \beta \in C; \forall \mathbf{x} \in V; (\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$.

Si consideramos el caso general de una señal compleja (tanto en tiempo continuo como en tiempo discreto), la ley de composición interna del espacio vectorial es la suma punto a punto de la señal. Verificando sus propiedades, vemos que cumple que la suma de señales es otra señal; que es irrelevante el orden en que realicemos la suma (esto es, que es conmutativa); que es asociativa; que el elemento neutro es la señal idénticamente nula ($x(t) = 0$), y que el elemento inverso de una señal es la misma señal cambiada de signo; en definitiva, la suma cumple las propiedades de la ley de composición interna. Los escalares son números complejos (que tienen la estructura de cuerpo al igual que los números reales) y la ley de composición externa es la multiplicación de una señal por un número complejo. Podemos verificar fácilmente que también esta operación cumple todas las propiedades requeridas y,

por tanto, podemos concluir que las señales cumplen todos los requisitos para ser consideradas como vectores de un espacio vectorial.

La estructura de espacio vectorial genérico como el que hemos expuesto es, sin embargo, demasiado simple como para tener utilidad. Una estructura más elaborada la encontramos en los espacios vectoriales de Hilbert o, simplemente, *espacios de Hilbert*. Esta estructura nos va a permitir, por ejemplo, reinterpretar algunas de las medidas de señales expuestas en el Apartado 2.1.2.

Un espacio de Hilbert es, básicamente, un espacio vectorial con producto escalar¹. El producto escalar es una aplicación de pares de vectores en el campo de los escalares (los complejos en nuestro caso), $f:(V, V) \rightarrow C$, que denotamos como $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ y que cumple las siguientes propiedades:

1. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle^*$
2. $\langle (\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}), \mathbf{z} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \beta \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$
3. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$
4. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$

A partir del producto escalar definimos una norma para el espacio vectorial como

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \quad (2.46)$$

y, a partir de la norma, una medida de distancia entre vectores

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad (2.47)$$

Incluso podemos medir el ángulo θ entre dos vectores \mathbf{x} e \mathbf{y} como

$$\theta = \arccos \left(\frac{\operatorname{Re}\{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle\}}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} \right) \quad (2.48)$$

Para la señales y, en general, para cualquier espacio vectorial genérico no existe una única posibilidad de definición de producto escalar: podemos escoger como producto escalar cualquier función que cumpla los requisitos establecidos anteriormente. Cada definición de producto escalar da lugar a un espacio de Hilbert distinto, con métrica y norma distinta. Vamos a exponer a continuación la estructura de dos espacios de Hilbert para señales de energía finita, uno para señales en tiempo discreto y otro para señales en tiempo continuo que denominaremos, respectivamente, l_2 y L_2 .

El espacio l_2 se define mediante el siguiente producto escalar

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] \quad (2.49)$$

¹Estrictamente, es un espacio vectorial con producto escalar que cumple la propiedad de completitud. La propiedad de completitud se cumple cuando toda sucesión de Cauchy es convergente en la métrica inducida por el producto escalar. Si no posee esta propiedad el espacio vectorial recibe el nombre de espacio pre-Hilbert.

y nos da una medida del parecido o similitud entre dos señales. El producto escalar de dos señales cuya variación con el tiempo sea similar será “grande” y el de dos señales cuya variación con el tiempo sea distinta será “pequeño”. Cuando el producto escalar de dos señales es igual a cero decimos que las señales son *ortogonales*, lo que indica que forman entre ellas un ángulo de 90° (según podemos comprobar a partir de (2.48)).

Una medida derivada del producto escalar es la *función de ambigüedad temporal*, $r_x[k]$, que algunos autores denominan función de autocorrelación determinista (y que no debe confundirse con la función de autocorrelación de procesos estocásticos que veremos en el Capítulo 3). Se define como el producto escalar de una señal con ella misma desplazada una cantidad k (que denotaremos como \mathbf{x}_k),

$$r_x[k] = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_k \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x^*[n-k] \quad (2.50)$$

y da una idea de la variabilidad y concentración de la energía de la señal: una señal que fluctúe rápidamente tendrá una función de ambigüedad temporal que varíe rápidamente con respecto a k , y una señal cuya energía esté concentrada en un corto espacio de tiempo tendrá una función de ambigüedad temporal estrecha. Nótese además que $r_x[0] = \mathcal{E}\{x[n]\}$.

La norma inducida por (2.49) resulta ser la raíz cuadrada de la energía de la señal

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2} = \sqrt{\mathcal{E}\{x[n]\}} \quad (2.51)$$

y la distancia es la bien conocida distancia euclídea,

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n] - y[n]|^2} \quad (2.52)$$

Como propiedades de interés de la norma podemos citar la desigualdad de Cauchy-Schwarz, que establece

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] \right| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2} \cdot \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |y[n]|^2} \quad (2.53)$$

cumpliéndose la igualdad sólo si $y[n]$ es una versión escalada en amplitud de $x[n]$ ($y[n] = Kx[n]$, para algún $K \in \mathbb{R}$).

El producto escalar también permite encontrar de forma sencilla la representación de una señal en una base del espacio vectorial. El ejemplo más claro lo encontramos en la descomposición de una secuencia mediante la función delta de Kronecker, (2.34). El conjunto de señales $\{\delta[n-k], k = -\infty, \dots, 0, \dots, \infty\}$ forma una base ortonormal del espacio vectorial l_2 ; esto es, se cumple que

$$\langle \delta_k, \delta_i \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n-k]\delta[n-i] = \delta[k-i] \quad (2.54)$$

Las coordenadas de una señal $x[n]$ en cualquier base, y en esta en particular, se obtienen como producto escalar de la señal $x[n]$ con cada uno de los elementos de la base; en nuestro caso

$$x_k = \langle \mathbf{x}, \delta_k \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \delta[n - k] = x[k] \quad (2.55)$$

Una vez obtenidas las coordenadas, $x[n]$ se representa como

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \delta[n - k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - k]$$

que es exactamente la ecuación (2.34). Bajo esta interpretación queda claro que los valores $x[k]$ de (2.34) son algo más que un cambio de variable (n por k), pues no representan una señal (un vector) sino que son simplemente las coordenadas (escalares) de $x[n]$ en una base del espacio vectorial formada por funciones delta.

El espacio L_2 se define de manera análoga a l_2 sin más que cambiar sumatorios por integrales. El producto escalar es

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt \quad (2.56)$$

y tiene el mismo sentido que en l_2 : nos da una medida del parecido o similitud entre dos señales.

La función de ambigüedad temporal posee ahora una variable independiente de naturaleza continua, τ , y se define como

$$r_x(\tau) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_\tau \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x^*(t - \tau) dt \quad (2.57)$$

La norma inducida por (2.56) también resulta ser la raíz cuadrada de la energía de la señal

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt} = \sqrt{\mathcal{E}\{x(t)\}} \quad (2.58)$$

y la distancia es

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t) - y(t)|^2 dt} \quad (2.59)$$

La desigualdad de Cauchy-Schwarz toma la forma

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt \right| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt} \cdot \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt} \quad (2.60)$$

cumpliéndose la igualdad sólo si $y(t) = Kx(t)$, para algún K .

El conjunto de funciones delta de Dirac $\{\delta(t - \tau), \tau \in (-\infty, \infty)\}$ es una base para el espacio L_2 . La obtención de las coordenadas de una señal $x(t)$ respecto a esta base se

realiza mediante (2.30) y la representación de la señal en función de los elementos de la base mediante (2.31).

Para señales de potencia no nula los espacios descritos no tienen utilidad porque, en general, los sumatorios o integrales que definen el producto escalar van a ser divergentes. En este caso podemos plantear otros productos escalares que dan lugar a espacios de Hilbert distintos introduciendo restricciones como, por ejemplo, limitar el intervalo de integración o suma, definir el espacio vectorial sólo para aquellas señales que cumplen determinados requisitos, etc.

2.2. SISTEMAS

Un sistema es una representación matemática de una entidad física que ante el estímulo de una o varias magnitudes físicas (señales) ofrece como respuesta otras magnitudes (señales). Las señales que estimulan al sistema se denominan entradas del sistema y las señales con que responde el sistema se denominan salidas del sistema. Si las señales de entrada y salida son en tiempo continuo decimos que el sistema es en tiempo continuo, y si las señales de entrada y salida son en tiempo discreto decimos que el sistema es en tiempo discreto. Aquí vamos a considerar únicamente el caso en que tenemos una única entrada, $x(t)$ o $x[n]$, y una única salida, $y(t)$ o $y[n]$.

Aunque no existe total unanimidad en la literatura, se suelen denominar como *filtros* a los sistemas que diseñamos y construimos con un propósito determinado. En este texto emplearemos el término filtro con este propósito, aunque en ocasiones nos refiramos a los filtros con el nombre genérico de sistemas.

Un sistema queda definido mediante la transformación \mathcal{T} que realiza de la entrada para obtener la salida

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{T}\{x(t)\} \\ (y[n] &= \mathcal{T}\{x[n]\}) \end{aligned} \tag{2.61}$$

y este apartado está dedicado al estudio de esta transformación. En un caso general, esta no es una tarea fácil porque si bien en algunos casos somos capaces de encontrar una expresión analítica sencilla que relaciona la entrada con la salida del sistema, en otros no, como se muestra en los dos ejemplos siguientes.

Ejemplo 2.3

Considere el caso de un generador de tensión conectado a una resistencia de valor R ohmios. El sistema va a consistir en la resistencia, que transforma la tensión que proporciona el generador, $x(t)$, en la corriente que atraviesa la resistencia, $y(t)$. El sistema queda definido mediante la ecuación

$$y(t) = \mathcal{T}\{x(t)\} = \frac{1}{R}x(t)$$

Ejemplo 2.4

Considere una conversación telefónica entre dos personas. El sistema va a consistir en todos los elementos que realizan la transmisión en uno de los sentidos, transformando la presión sonora

presente en el micrófono de la primera persona, $x(t)$, en la presión sonora a la salida del auricular de la segunda persona, $y(t)$. Para encontrar la relación entre $x(t)$ e $y(t)$ debemos expresar en primer lugar la relación entre la presión sonora presente en el micrófono y la tensión en bornas del micrófono, a continuación la relación entre esta tensión y la tensión a la salida del terminal telefónico, y así hasta el altavoz presente en el auricular de la segunda persona. Con tiempo y paciencia puede que llegásemos a encontrar la relación entre $x(t)$ e $y(t)$, pero lo peor es que todos esos cálculos valdrían sólo para una conversación específica entre estas dos personas concretas, porque un cambio tan simple como es el establecimiento de una nueva llamada entre estas dos personas trae como consecuencia que la compañía telefónica puede haber cambiado el circuito que emplea para conectar estos dos abonados, y hay que volver a repetir el cálculo.

Este último ejemplo pone de manifiesto que es necesaria una abstracción de los principios físicos que gobiernan el comportamiento del sistema y recurrir, como hemos realizado con las señales, a un tratamiento sistemático.

Para ello vamos en primer lugar a establecer una clasificación de los sistemas para, posteriormente, centrarnos en el estudio de los sistemas que cumplen dos propiedades: linealidad e invarianza temporal. Siempre que sea posible, abordaremos de forma conjunta el estudio de los sistemas en tiempo continuo y en tiempo discreto.

2.2.1. Clasificación de los sistemas

Los sistemas pueden clasificarse en función de que cumplan o no determinadas propiedades. Las más importantes son:

Memoria. Se dice que un sistema es *sin memoria* cuando la salida en un determinado instante no depende de valores pasados ni futuros de la entrada. Se dice que el sistema tiene memoria cuando incumple esta propiedad.

Ejemplo 2.5

El sistema definido por la ecuación

$$y(t) = x^2(t) \quad (2.62)$$

es un sistema sin memoria. El sistema definido por la ecuación

$$y[n] = x[n - 1] \quad (2.63)$$

es un sistema con memoria

Causalidad. Se dice que un sistema es *causal* (o no anticipativo) cuando la salida en un determinado instante no depende de valores futuros de la entrada. Se dice que el sistema es no causal cuando incumple esta propiedad. Formalmente podemos expresarlo de la siguiente manera: *un sistema es causal si y sólo si dadas cualesquiera dos señales de entrada $x_1(t)$ y $x_2(t)$ que cumplen $x_1(t) = x_2(t) \forall t < t_0$, sus salidas correspondientes, $y_1(t)$ e $y_2(t)$ cumplen $y_1(t) = y_2(t) \forall t < t_0$.*

Para sistemas en tiempo discreto la definición es idéntica sin más que cambiar $x_1(t)$, $x_2(t)$, t_0 , $y_1(t)$ e $y_2(t)$ por, respectivamente, $x_1[n]$, $x_2[n]$, n_0 , $y_1[n]$ e $y_2[n]$.

De manera análoga, definimos un sistema como anticausal (o anticipativo) cuando la salida en un determinado instante no depende de valores pasados de la entrada. Su definición formal se obtiene a partir de la de causalidad sin más que cambiar “<” por “>”.

Ejemplo 2.6

El sistema definido por (2.62) es causal y anticausal al mismo tiempo. El sistema definido por (2.63) es causal y no anticausal. El sistema definido por la ecuación

$$y[n] = nx[n+1] \quad (2.64)$$

es anticausal y no es causal. El sistema definido por la ecuación

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t+1} x(\tau) d\tau \quad (2.65)$$

no es ni causal ni anticausal.

Un aspecto importante relacionado con la causalidad, es que cuando la variable independiente de las señales es el tiempo, todos los sistemas físicamente realizables son causales.

Invertibilidad. Se dice que un sistema es *invertible* cuando siempre es posible recuperar la entrada al sistema conociendo la salida. Formalmente: *un sistema es invertible si y sólo si dadas cualesquiera dos señales de entrada $x_1(t)$ y $x_2(t)$ distintas en al menos un punto, sus salidas correspondientes $y_1(t)$ e $y_2(t)$ son distintas en al menos un punto*. La definición para sistemas en tiempo discreto es análoga.

Ejemplo 2.7

El sistema definido por la Ecuación (2.63) es invertible, y el sistema que obtiene la entrada en función de la salida queda definido por la ecuación

$$x[n] = y[n+1]$$

El sistema definido por la Ecuación (2.62) no es invertible porque no se puede recuperar el signo de la señal de entrada.

Estabilidad. Aunque existen diversos criterios de estabilidad, el más utilizado en el estudio de sistemas es el denominado “entrada acotada, salida acotada” (“*Bounded Input Bounded Output*”, BIBO). Este criterio establece que un sistema es estable si para cualquier entrada acotada la salida está acotada. Formalmente: *si la señal de entrada al sistema, $x(t)$, cumple $|x(t)| < A$ para un valor de A finito, el sistema es estable BIBO si y sólo si existe un valor real finito B tal que $|y(t)| < B$* . La definición para sistemas en tiempo discreto es análoga. Cuando un sistema no es estable se dice que es inestable.

Ejemplo 2.8

El sistema definido por la Ecuación (2.62) es estable BIBO y un valor de B para el que se cumple la definición es A^2 . El sistema definido por la Ecuación (2.65) no es estable BIBO como demostramos fácilmente haciendo que la entrada sea $x(t) = 1$.

Linealidad. Un sistema es lineal si cumple las propiedades de aditividad y homogeneidad. Formalmente: *un sistema es lineal si y sólo si dadas cualesquiera dos señales de entrada $x_1(t)$ y $x_2(t)$ cuyas salidas respectivas son $y_1(t)$ e $y_2(t)$, cuando presentamos a la entrada del sistema la señal $z(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$, con α y β escalares de valor arbitrario, la salida del sistema es $\mathcal{T}\{\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\} = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$.* La definición para sistemas en tiempo discreto es análoga.

Ejemplo 2.9

El sistema definido por la Ecuación (2.63) es lineal, como podemos comprobar fácilmente haciendo $\mathcal{T}\{\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]\} = \alpha x_1[n - 1] + \beta x_2[n - 1] = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$.

El sistema definido por la Ecuación (2.62) no es lineal, ya que existe algún valor de t y/o algún par de funciones $x(t)$ e $y(t)$ para los que $\mathcal{T}\{\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\} = \alpha^2 x_1^2(t) + \beta^2 x_2^2(t) + 2\alpha\beta x_1(t)x_2(t) \neq \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$.

Invarianza. Un sistema es *invariante*, o mejor *invariante en el tiempo*, si el comportamiento del sistema no depende del instante en que se le aplique la excitación. Formalmente: *un sistema es invariante si y sólo si dada una entrada $x(t)$ y su salida correspondiente $y(t)$, se cumple que $\mathcal{T}\{x(t - t_0)\} = y(t - t_0)$ para cualquier valor de t_0 .* La definición para sistemas en tiempo discreto es análoga. Cuando un sistema no es invariante se dice que es *variante* o *variante en el tiempo*.

Ejemplo 2.10

El sistema definido por la Ecuación (2.62) es invariante ya que $\mathcal{T}\{x(t - t_0)\} = x^2(t - t_0) = y(t - t_0)$. El sistema definido por la Ecuación (2.64) es variante ya que existe algún valor de n y/o alguna función $x[t]$ para los que $\mathcal{T}\{x[n - n_0]\} = nx[n - n_0 + 1] \neq y[n - n_0] = (n - n_0)x[n - n_0 + 1]$.

2.2.2. Sistemas lineales e invariantes

Un tipo de sistemas de particular interés son aquellos que cumplen las dos últimas propiedades de las mencionadas anteriormente: linealidad e invarianza. Estos sistemas, independientemente de su complejidad, quedan representados mediante una señal, la respuesta del sistema a la señal impulso; además, la respuesta del sistema ante cualquier otra entrada puede obtenerse mediante una operación, denominada convolución, entre la señal de entrada y la respuesta al impulso del sistema.

Sistemas lineales e invariantes en tiempo discreto

En un sistema lineal e invariante $\mathcal{L}\{\cdot\}$, la salida puede expresarse, aplicando la propiedad de linealidad, como

$$\begin{aligned}
 y[n] &= \mathcal{L}\{x[n]\} \\
 &= \mathcal{L}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k]\right\} \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \mathcal{L}\{\delta[n-k]\} \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h_k[n]
 \end{aligned} \tag{2.66}$$

donde

$$h_k[n] = \mathcal{L}\{\delta[n-k]\} \tag{2.67}$$

Aplicando ahora la propiedad de invarianza, tenemos que $h_k[n] = h_0[n - k]$, que, sustituido en (2.66), nos permite expresar la salida del sistema como

$$\begin{aligned}
 y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h_k[n] \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h_0[n-k] \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k]
 \end{aligned} \tag{2.68}$$

donde $h[n] = \mathcal{L}\{\delta[n]\}$ es la señal denominada respuesta al impulso del sistema lineal e invariante, $\mathcal{L}\{\cdot\}$. La respuesta al impulso permite caracterizar el comportamiento del sistema ante cualquier entrada, calculando la salida mediante (2.68), operación que denominamos *convolución* y denotamos con el símbolo $*$ de la forma

$$x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] \tag{2.69}$$

Sistemas lineales e invariantes en tiempo continuo

De manera análoga al caso en tiempo discreto, en un sistema lineal e invariante en tiempo continuo $\mathcal{L}\{\cdot\}$, la salida puede expresarse, aplicando la propiedad de linealidad, como

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}\{x(t)\} \\ &= \mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \mathcal{L}\{\delta(t - \tau)\} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h_{\tau}(t) d\tau \end{aligned} \quad (2.70)$$

donde

$$h_{\tau}(t) = \mathcal{L}\{\delta(t - \tau)\} \quad (2.71)$$

Aplicando la propiedad de invarianza, tenemos que $h_{\tau}(t) = h_0(t - \tau)$, que, sustituido en (2.70), nos permite expresar la salida del sistema como

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h_{\tau}(t) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h_0(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.72)$$

donde $h(t) = \mathcal{L}\{\delta(t)\}$ es la señal denominada respuesta al impulso del sistema lineal e invariante, $\mathcal{L}\{\cdot\}$. Como en el caso en tiempo discreto, la salida del sistema se calcula mediante la convolución de la señal de entrada con la respuesta al impulso, definiéndose la convolución para tiempo continuo como

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (2.73)$$

Propiedades de la operación de convolución

Aunque la convolución es la operación que nos permite calcular la salida de un sistema lineal e invariante, podemos considerarla en sí misma como una operación que, a partir de dos señales, ofrece como resultado otra señal. Independientemente de que se trate de su versión para tiempo discreto o tiempo continuo, esta operación tiene las siguientes propiedades:

Comutativa. Considerando dos señales x e y (suprimimos los paréntesis o corchetes para tratar de forma simultánea los casos discreto y continuo), se cumple

$$x * y = y * x$$

Asociativa. Considerando tres señales x , y y z , se cumple

$$x * \{y * z\} = \{x * y\} * z$$

Elemento neutro. El elemento neutro de la convolución es la señal delta. Considerando la señal x , se cumple

$$x * \delta = \delta * x = x$$

Elemento inverso. Aunque no existe siempre, el elemento inverso de una señal x respecto a la convolución es la señal x_i que cumple

$$x * x_i = x_i * x = \delta$$

Propiedades de los sistemas lineales e invariantes

Supuesto que un sistema cumple las propiedades de linealidad e invarianza, repasemos ahora las cuatro restantes propiedades o criterios de clasificación que utilizábamos en el Apartado 2.2.1. Las demostraciones se proponen como ejercicio. Las formularemos únicamente para el caso discreto, siendo su definición análoga para el caso continuo.

Memoria. Un sistema lineal e invariante (en lo sucesivo, al referirnos genéricamente a un sistema, supondremos que cumple las propiedades de linealidad e invarianza) es sin memoria si y sólo si su respuesta al impulso $h[n]$ toma la forma

$$h[n] = K\delta[n] \quad (2.74)$$

donde K es una constante, en general compleja.

Causalidad. Un sistema es causal si y sólo si su respuesta al impulso $h[n]$ cumple

$$h[n] = 0 \quad \forall n < 0 \quad (2.75)$$

De manera análoga, un sistema es anticausal si y sólo si su respuesta al impulso $h[n]$ cumple

$$h[n] = 0 \quad \forall n > 0 \quad (2.76)$$

Invertibilidad. Un sistema es invertible si y sólo si existe la inversa respecto a la convolución de su respuesta al impulso, $h[n]$. Esto es, si existe un $h_i[n]$ que cumple

$$h_i[n] * h[n] = \delta[n] \quad (2.77)$$

Siendo $h_i[n]$ la respuesta al impulso de su sistema inverso.

Estabilidad. Un sistema es estable BIBO si y sólo si su respuesta al impulso, $h[n]$, cumple

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty \quad (2.78)$$

2.3. REPRESENTACIÓN DE SEÑALES Y SISTEMAS MEDIANTE TRANSFORMADAS

En muchas ocasiones no es fácil (e incluso no es posible) describir el comportamiento de las señales en función de su variación temporal, o el comportamiento de un sistema lineal e invariante a partir de los valores que toma su respuesta al impulso. Una representación alternativa y complementaria de las señales y los sistemas que puede ayudarnos en esta labor es la proporcionada por lo que denominamos genéricamente como *transformadas*.

En este apartado vamos a estudiar su uso, comenzando por justificar el uso de las transformadas de núcleo exponencial para, posteriormente, describir y analizar la Transformada de Fourier tanto para tiempo continuo como para secuencias, la Transformada Z, la Transformada Discreta de Fourier; finalizando con la representación de las señales que denominaremos como *paso banda* haciendo uso de otra transformada, la de Hilbert.

2.3.1. Respuesta de los sistemas lineales e invariantes a las exponentiales complejas

Si un sistema lineal e invariante con respuesta al impulso $h(t)$ se excita con una exponencial compleja, $x(t) = e^{st}$, a la salida obtenemos

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau \\ &= e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau \\ &= e^{st} H(s) \end{aligned} \tag{2.79}$$

que no es sino la misma señal de entrada multiplicada por el escalar $H(s)$. En análisis matemático, cuando un operador ofrece como resultado ante una función la misma función multiplicada por un escalar decimos que esa función es una *autofunción* del operador y el escalar es el *autovalor* asociado a dicha autofunción. Así, las exponenciales complejas son autofunciones de todos los sistemas lineales e invariantes. Para cada valor distinto del parámetro s obtenemos distintas autofunciones, cada una de ellas con su correspondiente autovalor asociado, $H(s)$.

Si consideramos dos sistemas lineales e invariantes distintos, con respuestas al impulso $h_1(t)$ y $h_2(t)$, ambos tienen al conjunto de las exponenciales complejas como autofunciones (como el resto de los sistemas lineales e invariantes), pero los autovalores asociados, $H_1(s)$ y $H_2(s)$ son distintos. Podemos, pues, pensar en representar cada sistema lineal e invariante mediante el conjunto de los autovalores asociados a las exponenciales complejas. Dicho conjunto, teniendo en cuenta que el parámetro s puede tomar cualquier valor dentro del plano complejo, podemos considerarlo como una función compleja sobre el plano complejo.

Esta función, $H(s)$, recibe el nombre de *función de transferencia en el dominio s o de Laplace*.

La función de transferencia $H(s)$ queda determinada de manera unívoca a partir de la respuesta al impulso del sistema, $h(t)$, mediante la ecuación

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-st} dt \quad (2.80)$$

extraída de (2.79). Esto significa que tanto $H(s)$ como $h(t)$ contienen la misma información sobre el sistema, existiendo además una fórmula que nos permite recuperar $h(t)$ a partir de $H(s)$ de manera unívoca. Esta fórmula es

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} H(s) e^{st} ds \quad (2.81)$$

donde σ es cualquier valor para el que la integral (2.80) es convergente cuando $s = \sigma + j\omega$.

Analicemos brevemente lo que hemos conseguido hasta ahora. Un sistema lineal e invariante queda unívocamente determinado mediante una señal, su respuesta al impulso, y a partir de esta señal obtenemos otra representación del sistema que consiste en una función sobre el plano complejo. La pregunta que cabe realizar ahora es la siguiente: si la función sobre el plano complejo (la función de transferencia en el dominio de Laplace) la hemos obtenido a partir de una señal, ¿qué nos impide aplicar esta misma operación, (2.80), a cualquier señal, sea o no respuesta al impulso de un sistema lineal e invariante?. La respuesta es muy simple: no hay ninguna razón que lo impida, pero, ¿para qué?. Vamos a verlo.

La Transformada de Laplace para una señal en tiempo continuo $x(t)$ se define como²

$$X(s) \doteq \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \quad (2.82)$$

siendo s la variable independiente en el dominio transformado de Laplace, de naturaleza compleja, cuyas partes real e imaginaria denotamos, respectivamente, como σ y ω ($s = \sigma + j\omega$). La Ecuación (2.82) también se conoce como ecuación de análisis de la Transformada de Laplace. En general nos referimos a $X(s)$ como la Transformada de Laplace de la señal $x(t)$ pero, como hemos visto anteriormente, en el caso en que la señal a la que calculamos la transformada sea la respuesta al impulso de un sistema, el resultado de la transformada recibe el nombre de *función de transferencia*. La Transformada Inversa de Laplace (o ecuación de síntesis de la Transformada de Laplace) se obtiene a partir de (2.82) y es

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) e^{st} ds \quad (2.83)$$

²En parte de la literatura esta definición de la Transformada de Laplace se conoce como “bilateral”, en contraposición a la Transformada de Laplace denominada “unilateral”, definida como

$$X(s) \doteq \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

tomando σ cualquier valor para el que la integral (2.82) es convergente.

Hasta aquí la definición. Veamos ahora qué sucede al calcular la Transformada de Laplace de la salida de un sistema lineal e invariante, $y(t)$,

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-st} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} (x(t) * h(t)) e^{-st} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau e^{-st} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) e^{-st} dt d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} h(t') e^{-s(t'+\tau)} dt' d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-s\tau} \int_{-\infty}^{\infty} h(t') e^{-st'} dt' d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-s\tau} H(s) d\tau \\
 &= H(s) \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-s\tau} d\tau \\
 &= H(s)X(s)
 \end{aligned} \tag{2.84}$$

Este resultado, conocido como propiedad de convolución, nos dice que la Transformada de Laplace transforma una operación con señales poco “intuitiva” como la convolución (en el sentido que es difícil predecir a simple vista cómo será el resultado de la convolución de dos señales) en una más sencilla como el producto. Conociendo la función de transferencia de un sistema podemos predecir fácilmente cómo se comportará ante una entrada determinada.

En tiempo discreto realizamos un desarrollo análogo, introduciendo una exponencial compleja, $x[n] = z^n$, en un sistema lineal e invariante con respuesta al impulso $h[n]$

$$\begin{aligned}
 y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[n - k] \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{n-k} \\
 &= z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{-k} \\
 &= z^n H(z)
 \end{aligned} \tag{2.85}$$

donde $H(z)$ es una función compleja sobre el plano complejo z que denominamos *función de transferencia en el dominio Z*.

Para una señal genérica en tiempo discreto $x[n]$ definimos su Transformada Z como³

$$X(z) \doteq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad (2.86)$$

siendo z la variable independiente en el dominio transformado Z, de naturaleza compleja, cuyos módulo y fase denotamos, respectivamente, como r y ω ($z = r e^{j\omega}$). La Transformada Z Inversa (o ecuación de síntesis de la Transformada Z) se obtiene a partir de (2.86) y es

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1} dz \quad (2.87)$$

donde \oint denota la integración a lo largo de un contorno circular de radio r y centrado en el origen, en el sentido contrario a las agujas del reloj, siendo r cualquier valor para el que el sumatorio (2.86) es convergente.

La Transformada Z también posee la propiedad de convolución; esto es, la salida de un sistema lineal e invariante, $y[n]$, puede expresarse en el dominio z como

$$Y(z) = X(z)H(z) \quad (2.88)$$

siendo $X(z)$ la Transformada Z de la señal de entrada y $H(z)$ la función de transferencia del sistema. La demostración de esta propiedad, similar a (2.84), se deja como ejercicio para el lector.

Como regla general que emplearemos a lo largo del texto, cuando hablemos de una señal en el dominio natural o temporal nos referiremos a su expresión cuando la variable independiente es el tiempo, $x(t)$ o $x[n]$, según corresponda. También nos referiremos a $x(t)$ o $x[n]$ como forma de onda. Cuando hablemos de una señal en el dominio transformado nos referiremos a su expresión cuando la variable independiente es s , z u ω (que veremos a continuación), según el contexto. Cuando hablemos de una señal sin más nos referimos a la propia señal independientemente de la naturaleza de su variable independiente.

2.3.2. Transformada de Fourier para señales y sistemas en tiempo continuo

La interpretación y manipulación de las transformadas de Laplace y Z resulta engorrosa en la mayoría de los casos por tratarse de funciones complejas sobre el plano complejo. Dado que estas funciones se obtiene a partir de otra, $x(t)$ o $x[n]$, cuya variable independiente es de naturaleza real (tiempo continuo) o entera (tiempo discreto), podemos decir que la expresión de una señal en los dominios de Laplace o Z es redundante. En otras palabras, si en el

³En parte de la literatura esta definición de la Transformada Z se conoce como “bilateral”, en contraposición a la Transformada Z denominada “unilateral”, definida como

$$X(z) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

dominio natural nos basta con una variable independiente real o entera para representar toda la señal, en el dominio transformado no nos hace falta una variable independiente compleja para realizar el mismo cometido.

Para señales en tiempo continuo podemos particularizar la Transformada de Laplace en cualquier recta en el plano y obtener así una reducción de la dimensionalidad de la variable independiente de compleja a real. Si la particularizamos en la recta imaginaria, $s = j\omega$, obtenemos la *Transformada de Fourier en tiempo continuo*, que definimos para una señal $x(t)$ como

$$X(j\omega) \doteq X(s) \Big|_{s=j\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.89)$$

y es una función compleja de la variable real ω . A la variable ω se le da el nombre de frecuencia. Por extensión del nombre que recibe en análisis funcional la descomposición de operadores en función de sus autovectores y autovalores, *descomposición espectral*, a $X(j\omega)$ se le suele denominar espectro de $x(t)$ o representación espectral de $x(t)$.

La transformada inversa (o ecuación de síntesis de la transformada) se obtiene particularizando (2.83) para $\sigma = 0$,

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2.90)$$

Si la señal sobre la que aplicamos la Transformada de Fourier es la respuesta al impulso de un sistema lineal e invariante, $h(t)$, el resultado $H(j\omega)$ es la *función de transferencia en dominio de Fourier*, también denominada *función de trasferencia en el dominio de la frecuencia o respuesta en frecuencia* del sistema.

Se dice que existe la Transformada de Fourier de una señal $x(t)$ si la integral (2.89) es convergente para todo valor de ω . Lamentablemente, no existe ninguna condición necesaria y suficiente que garantice su existencia; esto es, no existe ninguna propiedad tal que si la señal la cumple existe su transformada, y si no la cumple no existe su transformada. Somos capaces, eso sí, de encontrar muchas condiciones suficientes (que nos aseguran la existencia de la transformada) como, por ejemplo, que la señal sea de energía finita o que sea absolutamente integrable.

La condición de existencia limita en gran medida la aplicación de la Transformada de Fourier, ya que señales tan comunes como las de amplitud constante o las sinusoides no poseen transformada. Si relajamos el criterio de existencia y permitimos que para un valor de frecuencia la integral diverja (esto es, permitimos la existencia de funciones delta en el dominio transformado) obtenemos lo que se conoce como *Transformada de Fourier Generalizada*, que nos permite obtener una representación en el dominio transformado de señales como las sinusoides complejas, las señales periódicas, la función escalón o las señales de amplitud constante. Salvo indicación en contrario, de ahora en adelante, cuando nos refiramos a la Transformada de Fourier entenderemos que se trata de la Transformada de Fourier Generalizada.

La definición de la Transformada de Fourier por sí misma no nos dice gran cosa si no somos capaces de relacionar de forma intuitiva su forma de onda con su representación

$\delta(t) \xrightarrow{TF} 1$ $\delta(t - t_0) \xrightarrow{TF} e^{-j\omega_0 t}$ $\frac{1}{\pi t} \xrightarrow{TF} -2ju(\omega) - j$ $\text{sinc}(t) \xrightarrow{TF} \Pi\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$ $e^{-at}u(t) \xrightarrow[Re\{a\}>0]{TF} \frac{1}{a + j\omega}$	$1 \xrightarrow{TF} 2\pi \delta(\omega)$ $e^{j\omega_0 t} \xrightarrow{TF} 2\pi \delta(\omega - \omega_0)$ $u(t) \xrightarrow{TF} \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$ $\Pi(t) \xrightarrow{TF} \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$ $te^{-at}u(t) \xrightarrow[Re\{a\}>0]{TF} \frac{1}{(a + j\omega)^2}$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \xrightarrow{TF} \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$ $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\frac{2\pi k}{T}t} \xrightarrow{TF} 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$	

Cuadro 2.1. Pares transformados básicos.

espectral. En el Cuadro 2.1 podemos encontrar las transformadas de algunas funciones elementales pero, adicionalmente, conviene realizar los siguientes comentarios:

- La transformada de una señal real es, en general, una función compleja. Véase como ejemplo la transformada de una delta desplazada del origen de tiempos.
- Si la amplitud de la forma de onda varía lentamente, el módulo de su transformada tomará valores mayores para frecuencias cercanas a 0. Un caso extremo lo constituyen las señales de amplitud constante cuya transformada toma valor distinto de cero únicamente en la frecuencia 0.
- Si la amplitud de la forma de onda varía rápidamente, el módulo de su transformada tomará valores grandes para frecuencias lejanas de 0. La transformada de una sinusoida compleja es una función delta situada a la frecuencia de la sinusoida; si mayor es la frecuencia de la sinusoida, más rápidamente variará su amplitud y la función delta estará situada a frecuencia más alta.
- El valor de la amplitud de la forma de onda en un instante determinado influye en todas las frecuencias y, análogamente, el valor de la transformada en una frecuencia determinada influye en la amplitud de la forma de onda en todos los instantes. Como ejemplo, podemos comprobar cómo la transformada de una función que toma valor distinto de cero sólo en un punto, la función delta, tiene componentes espectrales en

todas las frecuencias, o cómo la transformada inversa de una función delta toma valor no nulo en todos los instantes de tiempo.

En función de los valores que toma $X(j\omega)$ (o $H(j\omega)$) se establecen las siguientes definiciones sobre señales (o sistemas):

- Si $X(j\omega)$ (o $H(j\omega)$) toma valor distinto de cero únicamente en un intervalo de longitud finita de frecuencia, se dice que la señal (o sistema) es de banda limitada. En caso contrario, se dice que es de banda ilimitada.
- Si $X(j\omega) = 0$ (o $H(j\omega) = 0$) para $|\omega| > \omega_0$ se dice que la señal (o sistema) es paso bajo con frecuencia de corte ω_0 (equivalentemente, se dice que es paso bajo con ancho de banda ω_0).
- Si $X(j\omega) = 0$ (o $H(j\omega) = 0$) para $\omega_1 > |\omega| > \omega_2$ ($\omega_1 < \omega_2$) se dice que la señal (o sistema) es paso banda con frecuencia de corte inferior ω_1 , frecuencia de corte superior ω_2 y ancho de banda $\omega_2 - \omega_1$.
- Si $X(j\omega) = 0$ (o $H(j\omega) = 0$) para $\omega_1 > |\omega| > \omega_2$ ($\omega_1 > \omega_2$) se dice que la señal (o sistema) es de banda eliminada, con frecuencia de corte inferior de la banda eliminada ω_2 , frecuencia de corte superior de la banda eliminada ω_1 y ancho de la banda eliminada $\omega_1 - \omega_2$.
- Si $X(j\omega) = 0$ (o $H(j\omega) = 0$) para $\omega_0 > |\omega|$ se dice que la señal (o sistema) es paso alto con frecuencia de corte ω_0 . Nótese que ni las señales (o sistemas) de banda eliminada ni paso alto son de banda limitada.

Propiedades de la Transformada de Fourier en tiempo continuo

A continuación enunciaremos las propiedades más importantes de la Transformada de Fourier en tiempo continuo, haciendo mayor hincapié en las implicaciones en el estudio de señales y sistemas de cada propiedad que en su demostración matemática.

Para evitar su continua repetición, en cada una de las propiedades emplearemos la siguiente notación

$$\begin{aligned} x(t) &\xleftrightarrow{\text{TF}} X(j\omega) \\ y(t) &\xleftrightarrow{\text{TF}} Y(j\omega) \end{aligned}$$

Linealidad.

$$\alpha x(t) + \beta y(t) \xleftrightarrow{\text{TF}} \alpha X(j\omega) + \beta Y(j\omega) \quad (2.91)$$

Supone la proporcionalidad entre las amplitudes en los dominios natural y transformado y la conservación de propiedades tales como la distributividad respecto a la suma. La demostración se obtiene fácilmente a partir de la definición de la transformada.

Propiedad de convolución.

$$x(t) * y(t) \xleftrightarrow{TF} X(j\omega)Y(j\omega) \quad (2.92)$$

Las implicaciones de esta propiedad son las ya discutidas para la Transformada de Laplace: si $Y(j\omega)$ es la función de transferencia de un sistema lineal e invariante, la salida del sistema en el dominio de la frecuencia es el producto de la entrada por la función de transferencia. Su demostración se obtiene particularizando la propiedad de convolución de la Transformada de Laplace, (2.84).

Desplazamiento temporal.

$$x(t - t_0) \xleftrightarrow{TF} e^{-j\omega t_0} X(j\omega) \quad (2.93)$$

Un desplazamiento temporal de la señal no afecta al módulo de la transformada. Afecta sólo a la fase, sumando un término de valor $-\omega t_0$. La propiedad se demuestra de forma directa aplicando (2.89) a $x(t - t_0)$.

Derivación.

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{TF} j\omega X(j\omega) \quad (2.94)$$

Una derivación en el tiempo supone una atenuación en frecuencias bajas (cercanas a cero) y un realce en frecuencias altas. Podemos incluso considerar el derivador como un sistema lineal e invariante cuya función de transferencia es $H(j\omega) = j\omega$. La demostración de la propiedad se realiza tomando la derivada de (2.90).

Integración.

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xleftrightarrow{TF} \frac{X(j\omega)}{jw} + \pi X(j0)\delta(\omega) \quad (2.95)$$

Es la propiedad contraria a la derivación. Nótese el término $\pi X(j0)\delta(\omega)$ que aparece cuando el valor de la transformada a frecuencia cero, que se corresponde con la integral $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$, es distinto de cero.

Cambio de escala.

$$x(at) \xleftrightarrow{TF} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right) \quad (2.96)$$

siendo a un valor real. Si comprimimos una señal en el tiempo ($a > 1$), expandimos su espectro, y viceversa. Esto indica que hay un compromiso duración-ancho de banda, que no es sino una manifestación del Principio de Incertidumbre. Basado en esta propiedad puede comprobarse que si una señal es de duración temporal finita, su ancho de banda es infinito y, contrariamente, si una señal tiene ancho de banda finito, su forma de onda tiene duración infinita.

Dualidad.

$$X(jt) \xleftrightarrow{TF} 2\pi x(-\omega) \quad (2.97)$$

Esta propiedad nos dice que ambos dominios son (salvo factores de escala e inversiones de la variable independiente), intercambiables. Compruebe en los ejemplos de transformadas de el Cuadro 2.1 cómo algunos de los pares son duales de otros. La demostración de esta propiedad se realiza cambiando t por ω en (2.90).

Producto.

$$x(t)y(t) \xleftrightarrow{TF} \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * Y(j\omega) \quad (2.98)$$

La aplicación de esta propiedad al estudio de sistemas no lineales sin memoria (interpretando $y(t)$ como $\mathcal{T}\{x(t)\}/x(t)$ y calculando su Transformada de Fourier) nos ayuda a comprender el tipo de transformación que realizan en el dominio de la frecuencia sobre una señal dada. También nos ayuda a comprender el efecto que supone la observación de una señal durante un tiempo limitado (interpretando $y(t)$ como una señal de valor 1 en el intervalo de observación y 0 fuera de este). Esta propiedad se obtiene de la aplicación de la propiedad de dualidad a la propiedad de convolución.

Modulación.

$$e^{j\omega_0 t} x(t) \xleftrightarrow{TF} X(j(\omega - \omega_0)) \quad (2.99)$$

Esta propiedad es fundamental en comunicaciones por ser la base de las modulaciones lineales. Nos dice que multiplicar una señal por una sinusoides compleja implica un desplazamiento en frecuencia de valor el de la sinusoides. Se obtiene como caso particular de la propiedad del producto.

Derivación en frecuencia.

$$-jt x(t) \xleftrightarrow{TF} \frac{dX(j\omega)}{d\omega} \quad (2.100)$$

Puede obtenerse como caso particular de la propiedad del producto o bien aplicando la propiedad de dualidad a la propiedad de derivación en el tiempo.

Simetría.

$$x(-t) \xleftrightarrow{TF} X(-j\omega) \quad (2.101)$$

La aplicación de esta propiedad a señales pares e impares (o a las partes par e impar de una señal) nos dice que si una señal es par ($x(t) = x(-t)$), su transformada también lo es ($X(j\omega) = X(-j\omega)$), y que si una señal es impar ($x(t) = -x(-t)$), su transformada también lo es ($X(j\omega) = -X(-j\omega)$). Se obtiene cambiando t por $-t$ en (2.89).

Conjugación.

$$x^*(t) \xleftrightarrow{TF} X^*(-j\omega) \quad (2.102)$$

La aplicación de esta propiedad a señales reales e imaginarias puras (o a las partes real e imaginaria de una señal) nos dice que si una señal es real ($x(t) = x^*(t)$), su transformada es hermítica ($X(j\omega) = X^*(-j\omega)$), y que si una señal es imaginaria pura ($x(t) = -x^*(-t)$), su transformada es antihermítica ($X(j\omega) = -X^*(-j\omega)$). También nos dice que la parte real de una señal compleja se transforma en la parte hermítica de la transformada, y que la parte imaginaria de una señal compleja se transforma en la parte antihermítica de la transformada.

Combinando esta propiedad con la anterior podemos establecer aseveraciones como: la transformada de una señal real y par es real y par, o la transformada de una señal real e impar es imaginaria pura e impar. Se obtiene aplicando (2.89) a $x^*(t)$.

Conservación del producto escalar o Relación de Parseval.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)Y^*(j\omega) d\omega \quad (2.103)$$

Se demuestra a partir de la propiedad de conservación del producto escalar en el espacio vectorial de señales de energía finita.

Conservación de la energía o Teorema de Rayleigh.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega \quad (2.104)$$

se obtiene como caso particular de la Relación de Parseval y generalmente es confundido con esta. Esta propiedad permite interpretar el módulo al cuadrado de la Transformada de Fourier, $|X(j\omega)|^2$, como una densidad de energía: la parte izquierda de la igualdad (2.104) es la medida de la energía de $x(t)$ y, por tanto, la parte derecha de la igualdad también lo es; si la energía se obtiene mediante integración de una función, esa función puede interpretarse como densidad de energía. Como la variable independiente de esa función es la frecuencia, $|X(j\omega)|^2$ se denomina *densidad espectral de energía*.

Podemos comprobar además que la densidad espectral de energía es la Transformada de Fourier de la función de ambigüedad temporal definida en (2.57).

Todas estas propiedades se encuentran enumeradas en el Cuadro 2.2.

Transformada de Fourier de señales periódicas

Un caso especial en la representación espectral de las señales en tiempo continuo lo constituyen las señales periódicas. Salvo para el caso trivial de una señal idénticamente nula (que puede ser considerada como periódica con el periodo que se desee), la aplicación directa de la ecuación de análisis de la Transformada de Fourier, (2.89), sobre una señal periódica da como resultado una integral divergente.

Linealidad	$\alpha x(t) + \beta y(t) \xrightarrow{TF} \alpha X(j\omega) + \beta Y(j\omega)$
Convolución	$x(t) * y(t) \xrightarrow{TF} X(j\omega)Y(j\omega)$
Desplazamiento temporal	$x(t - t_0) \xrightarrow{TF} e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$
Derivación	$\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{TF} j\omega X(j\omega)$
Integración	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xrightarrow{TF} \frac{X(j\omega)}{j\omega} + \pi X(j0)\delta(\omega)$
Cambio de escala	$x(at) \xrightarrow{TF} \frac{1}{ a } X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$
Dualidad	$X(jt) \xrightarrow{TF} 2\pi x(-\omega)$
Producto	$x(t)y(t) \xrightarrow{TF} \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * Y(j\omega)$
Modulación	$e^{j\omega_0 t} x(t) \xrightarrow{TF} X(j(\omega - \omega_0))$
Derivación en frecuencia	$-jt x(t) \xrightarrow{TF} \frac{dX(j\omega)}{d\omega}$
Simetría	$x(-t) \xrightarrow{TF} X(-j\omega)$
Conjugación	$x^*(t) \xrightarrow{TF} X^*(-j\omega)$
Relación de Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)Y^*(j\omega) d\omega$
Teorema de Rayleigh	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) ^2 d\omega$

Cuadro 2.2. Propiedades de la Transformada de Fourier en tiempo continuo.

Para solventar este problema recurrimos al *Desarrollo en Serie de Fourier para señales en tiempo continuo*, que nos permite representar una señal periódica como combinación lineal de sinusoides complejas relacionadas armónicamente. A partir de aquí aplicamos la transformada sobre cada una de las sinusoides y obtenemos la transformada que estábamos buscando.

El Desarrollo en Serie de Fourier de una señal $x(t)$ periódica con periodo T se define mediante el siguiente par de ecuaciones

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{(T)} x(t) e^{-j\frac{2\pi k}{T}t} dt \quad (2.105)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\frac{2\pi k}{T}t} \quad (2.106)$$

denominadas, respectivamente, *ecuaciones de análisis y síntesis del Desarrollo en Serie de Fourier para tiempo continuo*. Los valores a_k se denominan *coeficiente del Desarrollo en Serie de Fourier* y son, en general, de naturaleza compleja.

Aplicando la Transformada de Fourier sobre (2.106) obtenemos

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j \frac{2\pi k}{T} t} \xleftrightarrow{TF} 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right) \quad (2.107)$$

Representación de señales y sistemas en el dominio de Fourier para tiempo continuo

La Transformada de Fourier de una señal es, como hemos dicho anteriormente, una función compleja con una variable independiente real. Como tal función compleja podemos representarla en función de sus partes real e imaginaria (coordenadas cartesianas) como

$$X(j\omega) = \mathcal{R}e\{X(j\omega)\} + j\mathcal{I}m\{X(j\omega)\} \quad (2.108)$$

o en función de su módulo y fase (coordenadas polares) como

$$X(j\omega) = |X(j\omega)| e^{j \triangleleft X(j\omega)} \quad (2.109)$$

De estas dos formas alternativas, generalmente se prefiere emplear la representación en módulo y fase. Una de las razones para ello es que la representación de la salida de un sistema lineal e invariante en coordenadas polares toma la forma

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= X(j\omega)H(j\omega) = |X(j\omega)| e^{j \triangleleft X(j\omega)} |H(j\omega)| e^{j \triangleleft H(j\omega)} \\ &= |X(j\omega)| |H(j\omega)| e^{j(\triangleleft X(j\omega) + \triangleleft H(j\omega))} \end{aligned} \quad (2.110)$$

lo que nos permite analizar separadamente los términos de módulo y fase

$$|Y(j\omega)| = |X(j\omega)| |H(j\omega)| \quad (2.111)$$

$$\triangleleft Y(j\omega) = \triangleleft X(j\omega) + \triangleleft H(j\omega) \quad (2.112)$$

Si intentamos realizar la misma descomposición en partes real e imaginaria obtenemos

$$\mathcal{R}e\{Y(j\omega)\} = \mathcal{R}e\{X(j\omega)\} \mathcal{R}e\{H(j\omega)\} - \mathcal{I}m\{X(j\omega)\} \mathcal{I}m\{H(j\omega)\} \quad (2.113)$$

$$\mathcal{I}m\{Y(j\omega)\} = \mathcal{R}e\{X(j\omega)\} \mathcal{I}m\{H(j\omega)\} + \mathcal{I}m\{X(j\omega)\} \mathcal{R}e\{H(j\omega)\} \quad (2.114)$$

donde se mezclan la partes real e imaginaria de la señal de entrada y de la función de transferencia del sistema.

Otra de las razones que aconsejan el empleo de la representación polar es que el cuadrado del módulo de la transformada tiene una interpretación directa como densidad espectral de energía de la señal, como vimos al presentar el Teorema de Rayleigh, (2.104).

Al módulo de la Transformada de Fourier se le suele denominar *características de amplitud* de la señal (o del sistema, si se trata de una función de transferencia) y, a la fase, *característica de fase*.

Volviendo a (2.111) y (2.112), un sistema contribuye de forma multiplicativa en la característica de amplitud de la señal y aditivamente en la característica de fase. Comencemos analizando la contribución a la característica de fase de un sistema lineal e invariante.

Cuando la característica de fase de un sistema es de la forma

$$\angle H(j\omega) = -t_0\omega \quad (2.115)$$

siendo t_0 una constante real, decimos que el sistema es de *fase lineal*. La interpretación en el dominio natural del efecto que produce un sistema lineal e invariante de fase lineal es clara si escogemos una característica de amplitud como $|H(j\omega)| = 1$, porque la salida será $y(t) = x(t - t_0)$, como vimos al analizar la propiedad de desplazamiento temporal de la Transformada de Fourier, (2.93).

La característica de fase lineal es deseable en los sistemas que aparecen en una cadena de transmisión, porque implica una “coherencia” temporal. Para medir las desviaciones respecto a la característica de fase lineal se emplea el *retardo de grupo*, definido como

$$\tau(\omega) = -\frac{d \angle H(j\omega)}{d\omega} \quad (2.116)$$

Si un sistema es de fase lineal, su retardo de grupo es constante e igual a t_0 y, según lo expuesto anteriormente, podemos decir que la señal tardaría t_0 segundos en “atravesar” el sistema. Si el retardo de grupo no es constante podemos decir que cada componente frecuencial de una señal, $X(j\omega_0)$, tardaría un tiempo $\tau(\omega_0)$ en atravesar el sistema. Si la señal de entrada al sistema fuese una función delta, que tiene concentrada toda su energía en el instante $t = 0$, al atravesar un sistema de retardo de grupo no constante se dispersaría la energía porque cada componente frecuencial tarda un tiempo distinto en atravesarlo. Un ejemplo que puede ayudarnos a comprender la influencia que puede tener la variación de la característica de fase de una señal es el siguiente.

Ejemplo 2.11

Sea un sistema cuyas características de amplitud y fase son

$$|H(j\omega)| = 1 \quad \text{y} \quad \angle H(j\omega) = \begin{cases} -\pi/2 & \omega > 0 \\ \pi/2 & \omega < 0 \end{cases} \quad (2.117)$$

Si tenemos a la entrada del sistema la función delta ($x(t) = \delta(t)$), a la salida tenemos

$$y(t) = h(t) = \frac{1}{\pi t} \quad (2.118)$$

que pone de manifiesto los efectos que puede tener un sistema de fase no lineal sobre la forma de onda de una señal.

Analicemos ahora la contribución sobre la característica de amplitud de un sistema lineal e invariante. En primer lugar, sería conveniente expresar la contribución del sistema en forma aditiva (como es la de la fase) en lugar de multiplicativa, como está expresada en (2.111). Para lograrlo podemos emplear logaritmos, que transforman sumas en productos. Tomando el logaritmo en ambos lados de (2.111) obtenemos

$$\log |Y(j\omega)| = \log |X(j\omega)| + \log |H(j\omega)| \quad (2.119)$$

Dentro de las medidas logarítmicas, la más empleada es $20 \log_{10}$ que, cuando se aplica a magnitudes adimensionales como la función de transferencia tiene como unidad de medida el *decibelio* ó *dB*. Aplicándola a (2.119) tenemos

$$20 \log_{10} |Y(j\omega)| = 20 \log_{10} |X(j\omega)| + 20 \log_{10} |H(j\omega)| \quad (2.120)$$

y decimos que el sistema tiene una ganancia de 0 dB a una frecuencia determinada si su característica de amplitud es igual a 1, o que tiene una ganancia de -20 dB (o una atenuación de 20 dB) si su característica de amplitud es igual a 0,1. Por ser adimensional, no podemos decir que la característica de amplitud es x dB a una frecuencia determinada, pero sí que a esa frecuencia la señal es y dB mayor o menor que la característica de amplitud a otra frecuencia.

Antes de continuar con el análisis de la característica de magnitud de los sistemas lineales e invariantes conviene definir un tipo especial de sistemas que emplearemos como referencia. Son los *filtros ideales*. Si en la Página 37 nos hemos referido a los sistemas con limitación de banda y, dentro de ellos a los sistemas paso bajo, paso alto, paso banda y banda eliminada, ahora definimos un *filtro paso bajo* como un sistema paso bajo cuya función de transferencia toma únicamente los valores 0 y 1; es decir, la función de transferencia toma la forma

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_0 \\ 0 & |\omega| > \omega_0 \end{cases} \quad (2.121)$$

y decimos que ω_0 es la frecuencia de corte, o que el ancho de banda del filtro es ω_0 . A las frecuencias $|\omega| < \omega_0$ se les denomina banda de paso y a las frecuencias $|\omega| > \omega_0$, banda eliminada. Los filtros ideales paso alto, paso banda y banda eliminada se definen de la misma forma. La denominación de *ideales* les viene tanto de su comportamiento (ganancia de 0 dB en la banda de paso y de $-\infty$ dB en la banda atenuada) como de la imposibilidad de realización (su respuesta al impulso es una función no causal y de duración ilimitada).

Los filtros que físicamente podemos realizar se aproximan en mayor o menor medida a los ideales, pero no existe una frecuencia a partir de la cual su característica de magnitud sea exactamente 0 (atenuación de ∞ dB), aunque sí muy pequeña. Existen, sin embargo, diversos criterios que nos permiten establecer una medida de ancho de banda, entendiendo que no se trata de una limitación estricta de la banda de paso del sistema. Los más empleados son (consideramos los criterios para filtros paso bajo, siendo su extensión al resto de tipos inmediata):

Ancho de banda 3 dB. Toma como frecuencia de corte la frecuencia más pequeña para la que el cuadrado de la característica de amplitud está 3 dB por debajo de su valor máximo. En este y en el resto de criterios se emplean medidas de energía y, dado que la densidad espectral de energía de la salida es la de la entrada multiplicada por la característica de amplitud al cuadrado del sistema, todas las medidas estarán referidas al cuadrado de la característica de amplitud.

Ancho de banda 6 dB. Igual que el anterior, pero con una referencia de 6 dB.

Ancho de banda del $p\%$. Toma como frecuencia de corte aquella en la que se cumple

$$\frac{\int_{-\omega_0}^{\omega_0} |H(j\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega} = \frac{p}{100} \quad (2.122)$$

Valores típicos de p son 90, 95 ó 99.

Ancho de banda equivalente de ruido. La frecuencia de corte se define como

$$\omega_0 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega}{\max_{\omega} |H(j\omega)|^2} \quad (2.123)$$

y representa el ancho de un filtro ideal con ganancia máxima $\max_{\omega} |H(j\omega)|^2$ en la banda de paso cuya energía de su respuesta al impulso fuese la del filtro que estamos caracterizando.

Ancho de banda de primer nulo. Si la característica de amplitud toma valor 0 para alguna frecuencia, consideramos ω_0 como la más pequeña (en valor absoluto) de estas frecuencias.

Por último, para representar gráficamente las características de amplitud y fase de sistemas con respuesta impulsional real suelen emplearse los denominados *diagramas de Bode*, que utilizan también escala logarítmica para la frecuencia, de la forma en que se muestra en la Figura 2.6. Esta representación no es posible si el sistema tiene respuesta impulsional

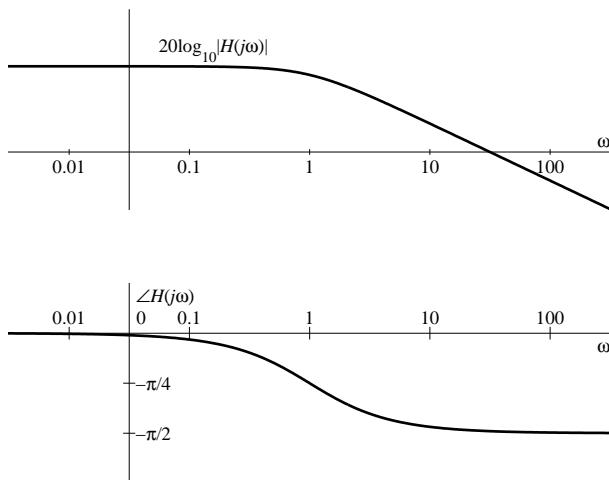


Figura 2.6. Ejemplo de diagrama de Bode de un sistema.

compleja porque, en ese caso, el comportamiento en frecuencias positivas no define totalmente al sistema.

2.3.3. Transformada de Fourier para señales y sistemas en tiempo discreto

Si para señales en tiempo continuo obteníamos la Transformada de Fourier como particularización de la Transformada de Laplace en $s = j\omega$, la obtención de la *Transformada de Fourier en tiempo discreto* ó *Transformada de Fourier para secuencias* se realiza particularizando la Transformada Z en la circunferencia de radio unidad, $z = e^{j\omega}$. Concretamente, la Transformada de Fourier en tiempo discreto de una señal $x[n]$ se define como

$$X(e^{j\omega}) \doteq X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \quad (2.124)$$

y es una función compleja de la variable real ω .

La transformada inversa (o ecuación de síntesis de la transformada) se obtiene particularizando (2.87) para $r = 1$,

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (2.125)$$

Las transformadas de Fourier en tiempo continuo y tiempo discreto son en realidad dos formas distintas de la misma transformada; una de ellas para señales con variable independiente continua y la otra para señales con variable independiente discreta⁴. Dada esta igualdad, nos limitaremos principalmente en este apartado a ir señalando las diferencias que existan entre ambas transformadas.

La primera de ellas es la periodicidad de la Transformada de Fourier en tiempo discreto. Las expresiones $e^{j\omega_0 n}$ y $e^{j(\omega_0 + 2\pi k)n}$ con k un número entero cualquiera son, como discutimos en la Página 18, expresiones distintas de la misma secuencia y, por tanto, el valor de la transformada a una frecuencia ω_0 será igual al de la frecuencia $\omega_0 + 2\pi k$. Esto implica que la Transformada de Fourier de cualquier secuencia sea siempre una función periódica de periodo 2π .

Se dice que existe la Transformada de Fourier de una señal $x[n]$ si el sumatorio (2.124) es convergente para todo valor de ω . Al igual que en tiempo continuo, no existe ninguna condición necesaria y suficiente que garantice su existencia aunque sí encontramos muchas condiciones suficientes como, por ejemplo, que la señal sea de energía finita o que sea absolutamente sumable. En tiempo discreto también vamos a permitir la existencia de funciones delta en el dominio transformado y, salvo indicación en contrario, cuando hablaremos de Transformada de Fourier estaremos refiriéndonos a la Transformada de Fourier Generalizada.

En el Cuadro 2.3 podemos encontrar las transformadas de algunas funciones elementales. Podemos comprobar que todas las transformadas que aparecen en el cuadro son funciones periódicas de periodo 2π . Nótese también cómo cambia el sentido de “frecuencias

⁴Esto no sucede con las transformadas de las que derivan cada una de ellas, Laplace y Z, que son *per se* transformadas distintas.

altas” de tiempo continuo a tiempo discreto, porque en este último caso una frecuencia 2π es equivalente a frecuencia 0, y la frecuencia “más alta” que tenemos en tiempo discreto es π : lo más rápido que podemos hacer cambiar la amplitud de una secuencia consiste en alternar su signo de muestra a muestra.

$\delta[n] \xrightarrow{TF} 1$ $\delta[n - n_0] \xrightarrow{TF} e^{-j\omega n_0}$ $a \text{sinc}[an] \xrightarrow{TF}_{0 < a < 1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{\omega - 2\pi k}{2a\pi}\right)$	$1 \xrightarrow{TF} 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$ $e^{j\omega_0 n} \xrightarrow{TF} 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k)$
$u[n] \xrightarrow{TF} \frac{1}{1 - e^{j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$ $a^n u[n] \xrightarrow[a < 1]{TF} \frac{1}{1 - ae^{j\omega}}$ $(n+1)a^n u[n] \xrightarrow[a < 1]{TF} \frac{1}{(1 - ae^{j\omega})^2}$ $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN] \xrightarrow{TF} \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k \frac{2\pi}{N}\right)$ $\sum_{n \in \langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \xrightarrow{TF} 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta\left(\omega - k \frac{2\pi}{N}\right)$	

Cuadro 2.3. Pares transformados básicos.

Por lo demás, las definiciones realizadas sobre limitación de banda para señales y sistemas en tiempo continuo y las discusiones sobre la forma más adecuada de representar señales y sistemas en el dominio transformado, siguen siendo válidas para tiempo discreto.

Propiedades de la Transformada de Fourier en tiempo discreto

Antes de entrar a detallar las propiedades de la Transformada de Fourier en tiempo discreto, conviene recordar las propiedades que existían para tiempo continuo y no existen para tiempo discreto y las nuevas propiedades que aparecen en tiempo discreto.

La propiedad más importante que se “ pierde” es la propiedad de dualidad, porque ahora la naturaleza de la variable independiente en el dominio natural es discreta y en dominio transformado, continua. Además de esta, las propiedades de derivación e integración son sustituidas por sus equivalentes en tiempo discreto: diferenciación y acumulación. La pro-

piedad de cambio de escala también desaparece como tal porque una operación de escalado en tiempo discreto puede implicar hasta cuatro operaciones: muestreo, supresión de ceros, reinserción de ceros y reconstrucción de valores. La razón es que los procesos de escalado de la variable independiente en tiempo discreto implican, además del propio escalado, pérdida o necesidad de información. De estas cuatro operaciones, dos serán tratadas aquí como propiedades (inserción y supresión de ceros), y las otras dos (muestreo y reconstrucción) merecen una atención específica y serán tratadas en el Apartado 2.4.

Veamos ahora las restantes, comentando únicamente sus diferencias respecto a sus equivalentes en tiempo continuo. Para evitar su continua repetición, en cada una de las propiedades emplearemos la siguiente notación

$$\begin{aligned} x[n] &\xleftrightarrow{\text{TF}} X(e^{j\omega}) \\ y[n] &\xleftrightarrow{\text{TF}} Y(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

Linealidad.

$$\alpha x[n] + \beta y[n] \xleftrightarrow{\text{TF}} \alpha X(e^{j\omega}) + \beta Y(e^{j\omega}) \quad (2.126)$$

Propiedad de convolución.

$$x[n] * y[n] \xleftrightarrow{\text{TF}} X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega}) \quad (2.127)$$

Desplazamiento temporal.

$$x[n - n_0] \xleftrightarrow{\text{TF}} e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega}) \quad (2.128)$$

Observe cómo el término $e^{-j\omega n_0}$ que multiplica a $X(e^{j\omega})$ es una función periódica de periodo 2π (aunque su periodo fundamental es $2\pi/n_0$) por ser n_0 un número entero.

Diferenciación.

$$x[n] - x[n - 1] \xleftrightarrow{\text{TF}} (1 - e^{-j\omega}) X(e^{j\omega}) \quad (2.129)$$

Esta propiedad se demuestra a partir de las de desplazamiento temporal y linealidad.

Acumulación.

$$\sum_{k=-\infty}^n x[n] \xleftrightarrow{\text{TF}} \frac{X(e^{j\omega})}{1 - e^{j\omega}} + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k) \quad (2.130)$$

Inserción de ceros. Si a partir de la secuencia $x[n]$ generamos otra secuencia $x_{0L}[n]$ insertando $L - 1$ ceros entre dos valores de $x[n]$ de la forma

$$x_{0L}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - kL] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{L}\right] & \text{si } n = \dot{L} \\ 0 & \text{si } n \neq \dot{L} \end{cases} \quad (2.131)$$

donde \dot{L} indica múltiplo entero de L , se cumple que

$$x_{0L}[n] \xleftrightarrow{TF} X(e^{j\omega L}) \quad (2.132)$$

Comparando esta propiedad con la de escalado de la Transformada de Fourier para señales en tiempo continuo, vemos que el sentido es el mismo en el caso en que el factor de escala a sea igual a $1/L$: una expansión del eje temporal. El único término que ha desaparecido es el factor $1/|a|$, porque en tiempo discreto no ha variado la energía de la secuencia al insertar los ceros. La demostración de esta propiedad se realiza aplicando la ecuación de análisis de la transformada a (2.131).

Supresión de ceros. Si a partir de la secuencia $x_{0L}[n]$ que cumple

$$x_{0L}[n] = 0 \quad \forall n \neq \dot{L} \quad (2.133)$$

y cuya Transformada de Fourier es $X_{0L}(e^{j\omega})$ generamos otra secuencia $x[n] = x_{0L}[nL]$, se cumple que

$$x[n] \xleftrightarrow{TF} X_{0L}(e^{j\omega/L}) \quad (2.134)$$

Es la propiedad contraria a la anterior y supone una compresión del eje temporal.

Producto.

$$x[n]y[n] \xleftrightarrow{TF} \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) \underset{2\pi}{\circledast} Y(e^{j\omega}) \doteq \frac{1}{2\pi} \int_{(2\pi)} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \quad (2.135)$$

La operación denotada como $\underset{2\pi}{\circledast}$ y definida en esta ecuación se denomina *convolución periódica* de periodo 2π , cuya única diferencia con la convolución no periódica vista hasta ahora es el intervalo de integración. Podemos comprobar que si intentamos realizar una convolución no periódica entre dos señales periódicas, en general, la integral diverge.

Modulación.

$$e^{j\omega_0 n} x[n] \xleftrightarrow{TF} X(e^{j(\omega-\omega_0)}) \quad (2.136)$$

Derivación en frecuencia.

$$-jn x[n] \xleftrightarrow{TF} \frac{d X(e^{j\omega})}{d\omega} \quad (2.137)$$

Simetría.

$$x[-n] \xleftrightarrow{TF} X(e^{-j\omega}) \quad (2.138)$$

Conjugación.

$$x^*[n] \xleftrightarrow{TF} X^*(e^{-j\omega}) \quad (2.139)$$

Las discusiones sobre existencia de simetrías realizadas en el caso en tiempo continuo para esta propiedad y la anterior siguen siendo válidas para tiempo discreto.

Conservación del producto escalar o Relación de Parseval.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{(2\pi)} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega}) d\omega \quad (2.140)$$

Conservación de la energía o Teorema de Rayleigh.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{(2\pi)} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (2.141)$$

El módulo al cuadrado de la Transformada de Fourier, también en tiempo discreto, admite la interpretación como densidad espectral de energía.

Todas estas propiedades se encuentran enumeradas en el Cuadro 2.4.

Transformada de Fourier de secuencias periódicas

Para calcular la Transformada de Fourier de secuencias periódicas evitando la divergencia de la ecuación de análisis recurrimos al *Desarrollo en Serie de Fourier para secuencias*, que nos permite representar una señal periódica como una combinación lineal de un número finito de de sinusoides complejas relacionadas armónicamente. A partir de aquí aplicamos la transformada sobre cada una de las sinusoides y obtenemos la transformada de la secuencia.

El Desarrollo en Serie de Fourier de una señal $x[n]$ periódica con periodo N se define mediante el siguiente par de ecuaciones

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n \in \langle N \rangle} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \quad (2.142)$$

$$x[n] = \sum_{k \in \langle N \rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \quad (2.143)$$

denominadas, respectivamente, ecuaciones de análisis y síntesis del Desarrollo en Serie de Fourier para secuencias. Al igual que sucede con la transformada del mismo nombre, los desarrollos en serie de Fourier para tiempo continuo y tiempo discreto son dos formulaciones del mismo desarrollo en serie. Al igual que la Transformada de Fourier para señales en

Linealidad	$\alpha x[n] + \beta y[n] \xrightarrow{TF} \alpha X(e^{j\omega}) + \beta Y(e^{j\omega})$
Convolución	$x[n] * y[n] \xrightarrow{TF} X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
Desplazamiento temporal	$x[n - n_0] \xrightarrow{TF} e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$
Diferenciación	$x[n] - x[n - 1] \xrightarrow{TF} (1 - e^{-j\omega}) X(e^{j\omega})$
Acumulación	$\sum_{k=-\infty}^n x[k] \xrightarrow{TF} \frac{X(e^{j\omega})}{1 - e^{j\omega}} + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$
Inserción de ceros	$x_{0L}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - kL] \xrightarrow{TF} X(e^{j\omega L})$
Supresión de ceros	$x[n] = x_{0L}[nL] \xrightarrow{TF} X_{0L}(e^{j\omega/L})$
Producto	$x[n]y[n] \xrightarrow{TF} \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) \otimes Y(e^{j\omega})$
Modulación	$e^{j\omega_0 n} x[n] \xrightarrow{TF} X(e^{j(\omega - \omega_0)})$
Derivación en frecuencia	$-jn x[n] \xrightarrow{TF} \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
Simetría	$x[-n] \xrightarrow{TF} X(e^{-j\omega})$
Conjugación	$x^*[n] \xrightarrow{TF} X^*(e^{-j\omega})$
Relación de Parseval	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{(2\pi)} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega}) d\omega$
Teorema de Rayleigh	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] ^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{(2\pi)} X(e^{j\omega}) ^2 d\omega$

Cuadro 2.4. Propiedades de la Transformada de Fourier en tiempo discreto.

tiempo discreto, los coeficientes a_k del Desarrollo en Serie de Fourier para secuencias son periódicos, pero con periodicidad N .

Aplicando la Transformada de Fourier sobre (2.143) obtenemos

$$x[n] = \sum_{n \in \langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \xrightarrow{TF} 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k \frac{2\pi}{N}) \quad (2.144)$$

2.3.4. Transformada Z para sistemas lineales e invariantes

La Transformada Z, definida mediante sus ecuaciones de análisis, (2.86), y síntesis, (2.87), (que reproducimos nuevamente por comodidad)

$$X(z) \doteq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} \quad (2.86)$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1} dz \quad (2.87)$$

es útil sobre todo para el estudio de sistemas lineales e invariantes. Antes de entrar a analizar la caracterización de estos sistemas, vamos a examinar un concepto de vital importancia en la Transformada Z: la *región de convergencia* (“Region Of Convergence”, ROC).

A diferencia de la Transformada de Fourier, la Transformada Z existe siempre⁵ pero, en general, no sobre todo el plano complejo z . Definimos la región de convergencia como el conjunto de todos los valores de z (región del plano z) para los que el sumatorio de la ecuación de análisis, (2.86), es convergente. Los valores de z para los que $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \infty$ se denominan *polos* de $X(z)$. La ROC cumple las siguientes propiedades:

Propiedad 1. La ROC es un anillo en el plano z centrado en el origen.

Propiedad 2. La Transformada de Fourier de una secuencia $x[n]$ existe si la ROC incluye la circunferencia de radio unitario.

Propiedad 3. Por definición, la ROC no contiene ningún polo de $X(z)$.

Propiedad 4. Si $x[n]$ es una secuencia de duración finita, la ROC es todo el plano z con la posible excepción de $z = 0$ y/o $z = \infty$.

Propiedad 5. Si $x[n]$ es una secuencia de *lado derecho* ($x[n] = 0 \forall n < N_1 < \infty$) la ROC es la región exterior a una circunferencia, tal y como se muestra en las Figuras 2.7(a) y 2.7(b) (la ROC es el área sombreada). El punto $z = \infty$ puede o no pertenecer a la ROC. La Transformada de Fourier existe en un caso como el mostrado en la Figura 2.7(a) porque la ROC incluye la circunferencia unidad y no existe en un caso como el mostrado en la Figura 2.7(b).

Propiedad 6. Si $x[n]$ es una secuencia de *lado izquierdo* ($x[n] = 0 \forall n > N_1 > -\infty$) la ROC es la región interior a una circunferencia, tal y como se muestra en la Figura 2.7(c). El punto $z = 0$ puede o no pertenecer a la ROC.

Propiedad 7. Si $x[n]$ es una secuencia que se extiende desde $-\infty$ a ∞ sin anularse (secuencia indefinida que no es ni de lado derecho ni de lado izquierdo) la ROC es una región anular acotada por dos circunferencias, tal y como se muestra en la Figura 2.7(d).

Propiedad 8. La ROC es una región conexa (no puede estar compuesta, por ejemplo, por dos anillos).

A modo de resumen, podemos decir que la ROC es una región anular acotada por las circunferencias en que se sitúan los polos de $X(z)$.

El Cuadro 2.5 muestra la Transformada Z de algunas funciones elementales, donde $x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)$ denota que $X(z)$ es la Transformada Z de la secuencia $x[n]$. Observe cómo una única expresión analítica de $X(z)$ puede corresponder con secuencias distintas, dependiendo de la ROC que escojamos o, visto de otra forma, cómo secuencias distintas

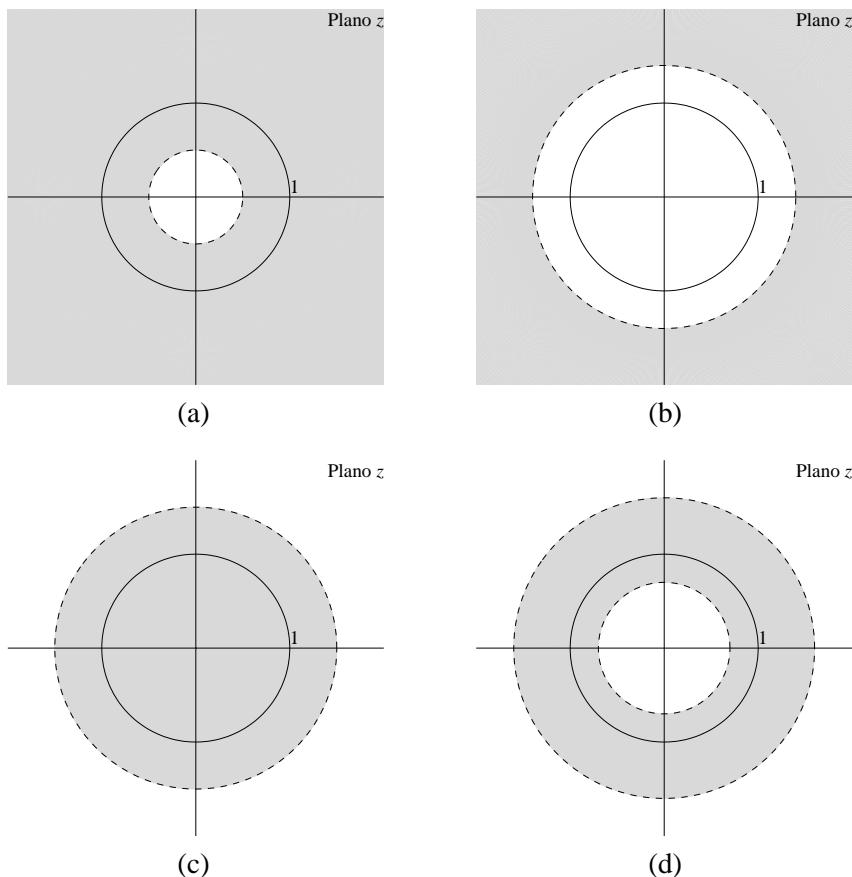


Figura 2.7. Ejemplos de ROC: exterior a una circunferencia incluyendo la circunferencia unidad (a), exterior a una circunferencia sin incluir la circunferencia unidad (b), interior a una circunferencia (c), y anular (d).

pueden dar la misma expresión analítica de $X(z)$, pero en ROC distintas. Este hecho nos da a entender que para especificar la Transformada Z de una secuencia no es suficiente con especificar la expresión analítica de la transformada, sino también su ROC.

El Cuadro 2.6 muestra las propiedades más importantes de la Transformada Z, donde empleamos la notación

$$\begin{aligned} x[n] &\xleftrightarrow{Z} X(z) \quad \text{ROC} = R_x \\ y[n] &\xleftrightarrow{Z} Y(z) \quad \text{ROC} = R_y \end{aligned}$$

Observe cómo muchas de las operaciones que expresan las propiedades conllevan un cambio

⁵Estrictamente es siempre que su crecimiento o decrecimiento sea, como mucho, exponencial. Todas las señales de interés en comunicaciones cumplen esta propiedad.

Par transformado	ROC
$\delta[n] \xrightarrow{Z} 1$	Todo el plano z
$\delta[n - n_0] \xrightarrow{Z} z^{-n_0}$	Todo el plano z excepto $z = 0$ si $n_0 > 0$ ó $z = \infty$ si $n_0 < 0$
$u[n] \xrightarrow{Z} \frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z > 1$
$-u[-n - 1] \xrightarrow{Z} \frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z < 1$
$a^n u[n] \xrightarrow{Z} \frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z > a $
$-a^n u[-n - 1] \xrightarrow{Z} \frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z < a $
$na^n u[n] \xrightarrow{Z} \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z > a $
$-a^n u[-n - 1] \xrightarrow{Z} \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z < a $
$e^{j\omega_0 n} u[n] \xrightarrow{Z} \frac{1}{1 - e^{j\omega_0} z^{-1}}$	$ z > 1$

Cuadro 2.5. Pares transformados básicos.

de la ROC.

Podemos comprobar cómo todas estas propiedades de la Transformada Z se reducen a sus correspondientes propiedades de la Transformada de Fourier para secuencias si hacemos $z = e^{j\omega}$.

Propiedades de la función de transferencia

En la Página 30 analizamos cuatro propiedades que podían o no cumplir los sistemas lineales atendiendo a las características de la respuesta al impulso. Veamos ahora las implicaciones de estas propiedades sobre la función de transferencia en el dominio z .

Memoria. Un sistema lineal e invariante (en lo sucesivo, al referirnos genéricamente a un sistema, supondremos que cumple las propiedades de linealidad e invarianza) sin memoria tiene una función de transferencia

$$H(z) = K \quad (2.145)$$

donde K es una constante, en general compleja y su ROC es todo el plano z . La demostración de esta propiedad se obtiene tomando la Transformada Z de (2.74).

Causalidad. En un sistema causal, la ROC de su función de transferencia será la región exterior de una circunferencia incluyendo $z = \infty$, porque un sistema es causal si y sólo si su respuesta al impulso $h[n]$ cumple $h[n] = 0, \forall n < 0$. El radio de esta circunferencia

Propiedad	Definición	ROC
Linealidad	$\alpha x[n] + \beta y[n] \xleftrightarrow{Z} \alpha X(z) + \beta Y(z)$	Al menos, $R_x \cap R_y$
Convolución	$x[n] * y[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)Y(z)$	Al menos, $R_x \cap R_y$
Desplazamiento temporal	$x[n - n_0] \xleftrightarrow{Z} z^{-n_0}X(z)$	R_x , con la posible adición o sustracción de $z = 0$ ó $z = \infty$
Inserción de ceros	$x_{0L}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n - kL] \xleftrightarrow{Z} X(z^L)$	$R_x^{1/L}$
Supresión de ceros	$x[n] = x_{0L}[nL] \xleftrightarrow{Z} X_{0L}(z^{1/L})$	R_x^L
Multiplicación por una exponencial compleja	$z_0^n x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z/z_0)$	$ z_0 R_x$
Derivación	$n x[n] \xleftrightarrow{Z} -z \frac{dX(z)}{dz}$	R_x
Simetría	$x[-n] \xleftrightarrow{Z} X(1/z)$	$1/R_x$
Conjugación	$x^*[n] \xleftrightarrow{Z} X^*(z^*)$	R_x
Teorema del valor inicial	Si $x[n] = 0 \quad \forall n < 0, x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$	
Teorema del valor final	Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x[n]$ es finito, su valor es $\lim_{n \rightarrow \infty} x[n] = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})X(z)$	

Cuadro 2.6. Propiedades de la Transformada Z.

será el módulo del polo de $H(z)$ más alejado del origen pues, como hemos mencionado anteriormente, la ROC está acotada por las circunferencias en que se sitúan los polos de $X(z)$.

De manera análoga, la ROC de la función de transferencia de un sistema anticausal será la región interior a una circunferencia incluyendo $z = 0$. El radio de esta circunferencia será el módulo del polo de $H(z)$ más cercano al origen.

Invertibilidad. Si un sistema es invertible, la función de transferencia de su sistema inverso será

$$H_i(z) = \frac{1}{H(z)} \quad (2.146)$$

como podemos comprobar sin más que tomar la transformada de (2.77). Lamentablemente, que podamos obtener $H_i(z)$ no significa que un sistema sea invertible: si, para alguna frecuencia ω_0 se cumple que $H(e^{j\omega_0}) = 0$ (denominados *ceros de transmisión*), todo el

contenido de la señal de entrada al sistema en esa frecuencia se pierde a su salida, y es imposible de recuperar la señal original.

Estabilidad. Un sistema es estable BIBO si y sólo si la ROC de su función de transferencia contiene la circunferencia unidad. La convergencia de la ecuación de análisis de la Transformada Z, (2.86), en la circunferencia unidad se cumple si y sólo si

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]z^{-n}| \Big|_{z=e^{j\omega}} < \infty \quad (2.147)$$

de donde, operando, llegamos a

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]e^{-j\omega n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty \quad (2.148)$$

que es exactamente la condición de estabilidad BIBO para sistemas lineales e invariantes, (2.78).

A continuación haremos uso de estas propiedades en una familia concreta de sistemas lineales e invariantes.

Sistemas definidos por ecuaciones en diferencias con coeficientes constantes

Un caso particular de sistemas ampliamente utilizados son aquellos cuya relación entre entrada y salida queda definida por una ecuación en diferencias con coeficientes constantes, porque su función de transferencia en el dominio z va a ser una función racional. En este apartado vamos a caracterizar la función de transferencia de estos sistemas⁶.

En un caso general, la ecuación en diferencias que define el sistema toma la forma

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (2.149)$$

donde $x[n]$ e $y[n]$ son, respectivamente, la entrada y la salida del sistema. Para asegurar la linealidad e invarianza temporal del sistema es suficiente imponer adicionalmente condiciones iniciales nulas, ($x[-\infty] = y[-\infty] = 0$), lo que nos garantiza, además, la causalidad del sistema. Alternativamente podemos imponer condiciones finales nulas, ($x[\infty] = y[\infty] = 0$), lo que también nos garantiza linealidad e invarianza a costa de la anticausalidad del sistema. Hablamos de una realización del sistema como lineal, invariante y causal o, simplemente, *realización causal* de (2.149) si imponemos condiciones iniciales nulas, y hablamos de una *realización anticausal* de (2.149) si imponemos condiciones finales nulas.

⁶Para no repetir continuamente el término “sistemas definidos por ecuaciones en diferencias con coeficientes constantes”, cuando en este apartado nos refiramos genéricamente a “sistemas”, estaremos hablando de este tipo particular de sistemas.

Para calcular la función de transferencia del sistema, calculamos la Transformada Z de ambos lados de (2.149), teniendo en cuenta que

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z) \quad (2.150)$$

$$y[n] \xleftrightarrow{Z} Y(z) \quad (2.151)$$

aplicando sucesivamente las propiedades de desplazamiento temporal y linealidad de la Transformada Z obtenemos

$$\sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \xleftrightarrow{Z} \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} X(z) \quad (2.152)$$

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] \xleftrightarrow{Z} \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) \quad (2.153)$$

y de aquí, finalmente

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} X(z) \quad (2.154)$$

de donde obtenemos la función de transferencia como

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (2.155)$$

La función de transferencia, $H(z)$, toma la forma de un cociente de polinomios en z , donde los coeficientes de la entrada y sus versiones retrasadas en la ecuación diferencial (2.149), b_k , son los coeficientes del polinomio del numerador de $H(z)$ y los coeficientes de la salida y sus versiones retrasadas en la ecuación diferencial (2.149), a_k , son los coeficientes del polinomio del denominador de $H(z)$. Este hecho nos permite calcular la función de transferencia de este tipo de sistemas de forma directa sin más que identificar dichos coeficientes. Las funciones que toman la forma de cociente de polinomios, como $H(z)$ en (2.155), se denominan *funciones racionales*.

Sin embargo, aunque la obtención de la expresión de la función de transferencia se realice de forma automática empleando los coeficientes a_k y b_k , el cociente de polinomios no permite un análisis fácil del comportamiento del sistema. Para realizar este análisis debemos descomponer cada uno de estos polinomios a partir de sus raíces, como

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = \frac{b_0}{a_0} \frac{\prod_{k=1}^M (1 - d_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - c_k z^{-1})} \quad (2.156)$$

donde c_k y d_k son las raíces de los polinomios del denominador y numerador, respectivamente. Estas constantes son los ceros (d_k) y polos (c_k) de la función de transferencia del sistema en el dominio z . Es necesario recordar que, en general, las constantes a_k , b_k , c_k y d_k son números complejos, pero aun en el caso en que los coeficientes de la ecuación en diferencias a_k y b_k sean constantes reales (sistema real), las raíces c_k y d_k pueden tomar valores complejos.

Una conclusión importante que podemos extraer de (2.156) es que la función de transferencia queda, a excepción de una ganancia b_0/a_0 , únicamente determinada por la ubicación de sus polos y ceros. Estos polos y ceros pueden representarse en lo que se conoce como un *diagrama de polos y ceros*, tal y como se muestra en la Figura 2.8.

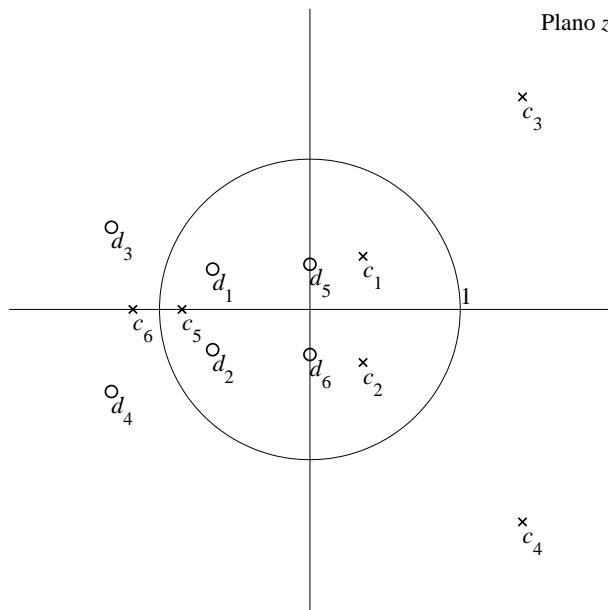


Figura 2.8. Ejemplo de diagrama de polos y ceros.

Sobre el diagrama de polos y ceros podemos determinar rápidamente si las realizaciones causal o anticausal del sistema son estables o no. Si optamos por la realización causal (condiciones iniciales nulas) del sistema, tenemos que su ROC (como la de todo sistema causal) es la región exterior a la circunferencia que contiene al polo de mayor magnitud; esto es

$$|z| > \max_k |c_k| \quad (2.157)$$

Como la condición para que un sistema lineal e invariante sea estable es que la ROC contenga la circunferencia de radio unidad, para que esto suceda, todos los polos, c_k , deben estar dentro del círculo de radio unidad. La realización causal del ejemplo de la Figura 2.8 se corresponde con un sistema inestable.

Si optamos por la realización anticausal (condiciones finales nulas) del sistema, tenemos que su ROC (como la de todo sistema anticausal) es la región interior a la circunferencia que

contiene al polo de menor magnitud; esto es

$$|z| < \min_k |c_k| \quad (2.158)$$

En este caso, la estabilidad de la realización queda garantizada si todos los polos, c_k , están fuera del círculo de radio unidad. La realización causal del ejemplo de la Figura 2.8 se corresponde con un sistema inestable.

Afortunadamente, salvo que existan polos sobre la circunferencia unidad, somos capaces de encontrar una realización estable del sistema descomponiendo $H(z)$ como la combinación de dos sistemas

$$H(z) = H_c(z)H_a(z) \quad (2.159)$$

admitiendo el primero de ellos, $H_c(z)$, una realización causal estable y el segundo, $H_a(z)$, una realización anticausal estable. $H_c(z)$ debe contener todos los polos de módulo menor que la unidad y $H_a(z)$ los polos de módulo mayor que la unidad. Los ceros del sistema podemos repartirlos entre $H_c(z)$ y $H_a(z)$ como mejor nos parezca. En el ejemplo de la Figura 2.8, $H_c(z)$ contendría los polos c_1, c_2 y c_5 , y $H_a(z)$ contendría los polos c_3, c_4 y c_6 .

Sobre el diagrama de polos y ceros también podemos determinar rápidamente si un sistema tiene inverso y, caso de tenerlo, su función de transferencia. Si el sistema posee inverso, este, de acuerdo con (2.146), es

$$H_i(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{a_0}{b_0} \frac{\prod_{k=1}^N (1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^M (1 - d_k z^{-1})} \quad (2.160)$$

cuyo diagrama de polos y ceros es el de $H(z)$ intercambiando polos por ceros. Para que exista el sistema inverso debe existir la inversa de $h[n]$ respecto a la convolución, $h_i[n]$ tal que $h_i[n] * h[n] = \delta[n]$ y, para que esto suceda, la ROC de $H(z)H_i(z)$ debe contener la circunferencia unidad⁷. Esto quiere decir que siempre que $H(z)$ no contenga ni polos ni ceros sobre la circunferencia unidad seremos capaces de encontrar realizaciones (causales y/o anticausales) para $H(z)$ y $H_i(z)$ de tal manera que uno sea el sistema inverso del otro.

Un tipo de sistemas de gran interés en comunicaciones es el que admite una realización causal estable con inversa también causal y estable. Para que esto suceda, todos los polos y ceros de la función de transferencia deben estar dentro de la circunferencia unidad. Este tipo de sistemas se conocen con el nombre de *sistemas de fase mínima*, los denotaremos como $H_{min}(z)$, y volveremos sobre ellos más adelante.

Analicemos ahora las características de amplitud y fase de la función de transferencia,

⁷Esta condición se da siempre que la intersección de las ROC de $H(z)$ y $H(z)$ sea no nula, ya que entonces podemos encontrar realizaciones de las respuestas al impulso de ambos sistemas y, al realizar la convolución entre ellas se produce la cancelación de polos con ceros y una ROC para $H(z)H_i(z)$ que es todo el plano complejo.

(2.156), descomponiendo cada término en la misma en forma polar

$$\begin{aligned} |H(z)|e^{j\angle H(z)} &= \left| \frac{b_0}{a_0} \right| e^{j\angle\left(\frac{b_0}{a_0}\right)} \frac{\prod_{k=1}^M |1 - d_k z^{-1}| e^{j\angle(1-d_k z^{-1})}}{\prod_{k=1}^N |1 - c_k z^{-1}| e^{j\angle(1-c_k z^{-1})}} \\ &= \left| \frac{b_0}{a_0} \right| \frac{\prod_{k=1}^M |1 - d_k z^{-1}|}{\prod_{k=1}^N |1 - c_k z^{-1}|} e^{j\angle\left(\frac{b_0}{a_0}\right)} \frac{\prod_{k=1}^M e^{j\angle(1-d_k z^{-1})}}{\prod_{k=1}^N e^{j\angle(1-c_k z^{-1})}} \quad (2.161) \end{aligned}$$

de donde, haciendo $z = e^{j\omega}$, podemos identificar las características de amplitud y fase de la respuesta en frecuencia como

$$|H(e^{j\omega})| = \left| \frac{b_0}{a_0} \right| \left(\prod_{k=1}^M |1 - d_k e^{-j\omega}| \right) \left(\prod_{k=1}^N |1 - c_k e^{-j\omega}|^{-1} \right) \quad (2.162)$$

$$\angle H(e^{j\omega}) = \angle\left(\frac{b_0}{a_0}\right) + \sum_{k=1}^M \angle(1 - d_k e^{-j\omega}) - \sum_{k=1}^N \angle(1 - c_k e^{-j\omega}) \quad (2.163)$$

Finalmente, expresamos la característica de amplitud de la respuesta en frecuencia, (2.162), en dB

$$20 \log_{10} |H(e^{j\omega})| = 20 \log_{10} \left| \frac{b_0}{a_0} \right| + \sum_{k=1}^M 20 \log_{10} |1 - d_k e^{-j\omega}| - \sum_{k=1}^N 20 \log_{10} |1 - c_k e^{-j\omega}| \quad (2.164)$$

De este análisis podemos obtener dos conclusiones:

1. Las características de amplitud y fase de la función de transferencia pueden descomponerse como la suma de características de amplitud y fase de sistemas de orden 1 ($H(z) = (1 - az^{-1})$ ó $H(z) = (1 - az^{-1})^{-1}$).

De hecho, podemos emplear (2.156) para descomponer el sistema general como una conexión en serie de sistemas de orden 1

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{b_0}{a_0} \left(\prod_{k=1}^M (1 - d_k z^{-1}) \right) \left(\prod_{k=1}^N \frac{1}{(1 - c_k z^{-1})} \right) \\ &= \frac{b_0}{a_0} \prod_{k=1}^M H_{dk}(z) \prod_{k=1}^N H_{ck}(z) \quad (2.165) \end{aligned}$$

en el dominio temporal,

$$h[n] = \frac{b_0}{a_0} h_{d1}[n] * \dots * h_{dM}[n] * h_{c1}[n] * \dots * h_{cN}[n] \quad (2.166)$$

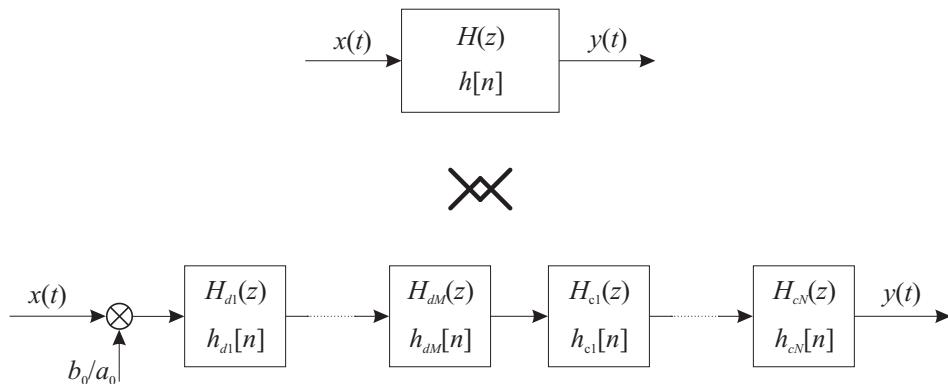


Figura 2.9. Descomposición de un sistema genérico como conexión en serie de sistemas de orden 1.

y que podemos ver de manera gráfica en la Figura 2.9.

2. La única diferencia entre los polinomios de orden 1 del numerador (ceros de $H(z)$) y los del denominador (polos de $H(z)$), es que contribuyen aditiva o sustractivamente a las características de amplitud y fase del sistema.

A la vista de todo lo anterior, bastará con caracterizar el comportamiento de un sistema de orden 1 para poder analizar las características de un sistema genérico, pues estas no son sino la suma de las características de sistemas de orden 1.

En otras palabras, bastará con analizar el comportamiento de un sistema lineal e invariante caracterizado por la ecuación diferencial

$$y[n] - ay[n - 1] = x[n] \quad (2.167)$$

o, alternativamente

$$y[n] = x[n] - ax[n - 1] \quad (2.168)$$

para poder analizar un sistema genérico. Escogeremos (2.167), cuya función de transferencia resulta ser

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad (2.169)$$

con un polo en $z = a$ y un cero en $z = 0$. Existen dos posibles ROC; una de ellas es la región exterior a la circunferencia de radio $|a|$, mostrada en la Figura 2.10(a), que conduce a una realización causal del sistema con una respuesta al impulso (ver Cuadro 2.5)

$$h[n] = a^n u[n] \quad (2.170)$$

La otra posible ROC es la región interior a la circunferencia de radio $|a|$, mostrada en la Figura 2.10(b), que conduce a una realización anticausal del sistema con una respuesta al impulso (ver Cuadro 2.5)

$$h[n] = -a^n u[-n - 1] \quad (2.171)$$

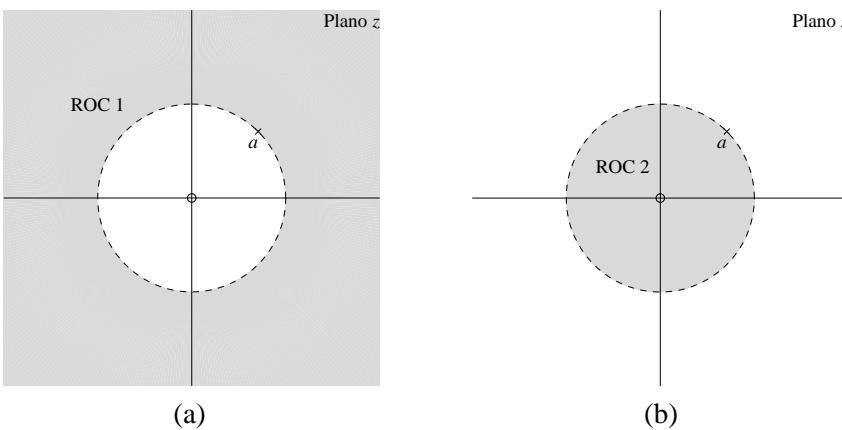


Figura 2.10. Posibles ROC para un sistema de orden 1: realización causal (a) y realización anticausal (b).

Dependiendo del valor que tome $|a|$, una ($|a| \neq 1$) o las dos ($|a| = 1$) realizaciones pueden dar lugar a sistemas inestables.

Para la realización estable (si la hubiese), su característica de amplitud es, expresando a en forma polar como $a = re^{j\theta}$,

$$\begin{aligned}
 20 \log_{10} |H(e^{j\omega})| &= 20 \log_{10} |1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}|^{-1} \\
 &= -20 \log_{10} |1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}| \\
 &= -10 \log_{10}(1 + r^2 - 2r \cos(\omega - \theta))
 \end{aligned} \tag{2.172}$$

Su característica de fase es

$$\triangleleft H(e^{j\omega}) = \triangleleft(1 - re^{j\theta}e^{-j\omega})^{-1} = -\triangleleft(1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}) = -\arctan\left(\frac{r \sin(\omega - \theta)}{1 - r \cos(\omega - \theta)}\right) \quad (2.173)$$

Y su retardo de grupo

$$\tau(\omega) = \frac{r \cos(\omega - \theta) - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\omega - \theta)} \quad (2.174)$$

que están representados en la Figura 2.11 para un valor genérico de θ y varios valores de r menores que 1. Para determinar la respuesta de un sistema con un orden genérico no hay sino que sumar características como las mostradas en esta figura.

Un tipo de sistema de gran importancia es el denominado *paso todo*, que denotamos como $H_{all}(z)$ y que, en su forma más simple, tiene una función de transferencia

$$H_{all}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - a z^{-1}} \quad (2.175)$$

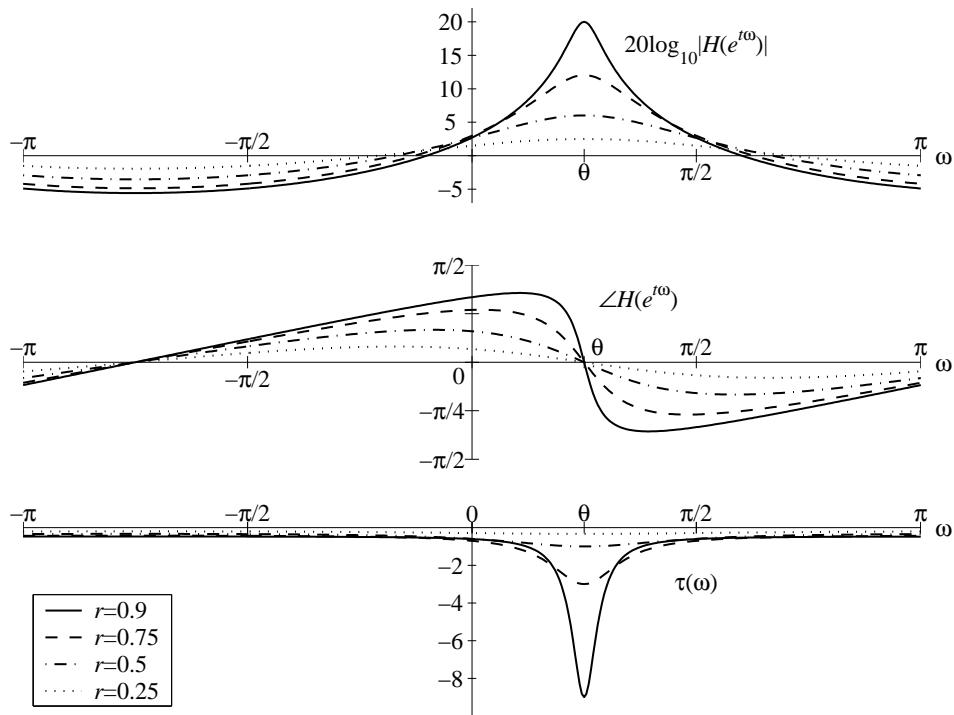


Figura 2.11. Característica de amplitud, característica de fase y retardo de grupo de un sistema de orden 1.

que posee una característica de amplitud constante

$$|H(e^{j\omega})| = \left| \frac{e^{-j\omega} - a^*}{1 - ae^{-j\omega}} \right| = \left| e^{-j\omega} \frac{1 - a^* e^{j\omega}}{1 - ae^{-j\omega}} \right| = |e^{-j\omega}| \frac{|1 - a^* e^{j\omega}|}{|1 - ae^{-j\omega}|} = 1 \quad (2.176)$$

que es la que le da el nombre. Un sistema paso todo compensa la influencia del polo en a sobre la característica de amplitud con un cero en $1/a^*$. Podemos construir sistemas paso todo del orden que deseemos sin más que combinar sistemas de orden 1 como (2.175).

Si combinamos un sistema paso todo con un sistema de fase mínima podemos representar cualquier sistema con función de transferencia racional de la forma

$$H(z) = H_{min}(z)H_{all}(z) \quad (2.177)$$

Para demostrar que cualquier sistema de estas características puede descomponerse de esta forma pensemos en un sistema que tiene todos sus polos y ceros dentro de la circunferencia unidad excepto un polo que está fuera, en una posición $z = a$. Ese polo que está fuera de la circunferencia unidad se asigna al sistema paso todo de la forma (2.175), que a su vez genera un cero en $z = 1/a^*$. Para anular la influencia de este cero, el sistema de fase mínima coloca un polo en $z = 1/a^*$. Si a estaba fuera de la circunferencia unidad, $1/a^*$ estaría dentro. Visto de otra forma, por cada polo que aparece fuera de la circunferencia unidad en una posición

$z = a$, multiplicamos y dividimos por $(z^{-1} - a^*)$ la función de transferencia, lo que no la deja inalterada. $(z^{-1} - a^*)$ junto con el polo en $z = a$ se asigna al sistema paso todo y $(z^{-1} - a^*)^{-1}$ al sistema de fase mínima.

Esta descomposición nos permite, en sistemas que no admitan un inverso causal y estable, realizar una compensación de la característica de amplitud, que resulta de interés en determinadas aplicaciones como la siguiente. Imaginemos que enviamos una señal por un canal de comunicaciones, y a la salida nos llega la señal distorsionada por un sistema $H(z)$ que no es de fase mínima. Si queremos recuperar la señal que se envió debemos encontrar el sistema inverso pero, ya que eso es imposible, podemos al menos compensar la característica de amplitud que introduce el canal si descomponemos $H(z)$ de la forma (2.177) y, en lugar del sistema inverso empleamos $(H_{min}(z))^{-1}$. En ese caso, la combinación de $H(z)$ con $(H_{min}(z))^{-1}$ da como resultado

$$\frac{H(z)}{H_{min}(z)} = \frac{H_{min}(z)H_{all}(z)}{H_{min}(z)} = H_{all}(z) \quad (2.178)$$

Que, si bien no es la identidad, al menos es un sistema paso todo.

Como vemos, los sistemas de fase mínima son de gran interés en comunicaciones. Vamos a enunciar algunas propiedades adicionales a las ya mencionadas.

De entre todos los posibles sistemas que tienen una característica de amplitud $|H(e^{j\omega})|$ determinada, existe uno que es de fase mínima, $H_{min}(z)$, ya que podemos añadirle todos los sistemas paso todo que deseemos sin cambiar $|H(e^{j\omega})|$. Un sistema de fase mínima, en comparación con el resto de sistemas, cumple que:

- Su retardo de grupo es el más pequeño para cualquier frecuencia.
- Su característica de fase continua, $\angle H_{min}(e^{j\omega})$, es la de menor variación, ya que es el de menor retardo de grupo para cualquier frecuencia. El nombre de sistema de fase mínima proviene de esta propiedad.
- Es el sistema que introduce una menor dispersión de energía (o una mayor concentración de energía). Concretamente, esta propiedad se expresa como

$$\sum_{k=0}^n |h_{min}[k]|^2 \geq \sum_{k=0}^n |h[k]|^2 \quad \forall n \geq 0 \quad (2.179)$$

2.3.5. Transformada Discreta de Fourier

Ninguna de las transformadas vistas hasta ahora puede aplicarse a una señal de la que no dispongamos su expresión analítica porque, en primer lugar, necesitamos conocer el valor de la señal en todos los instantes temporales desde $-\infty$ hasta $+\infty$ y, en segundo lugar, porque aunque conocemos y tengamos la capacidad suficiente para guardar en algún sitio el valor de la señal en todos sus instantes temporales, es necesario calcular el valor de la transformada en un número infinito de valores de frecuencia.

Existe un caso en que la limitación no viene por la primera de las razones mencionadas, sino por la segunda. Se trata de las secuencias de longitud finita; secuencias de las que conocemos que su valor es cero fuera de intervalo de duración finita que supondremos, sin pérdida de generalidad, que es $0 \leq n < N$. Para determinar esta secuencia necesitamos conocer únicamente N valores, $x[0], \dots, x[N - 1]$, pero para determinar su Transformada de Fourier, $X_N(e^{j\omega})$, es necesario aplicar la fórmula

$$X_N(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\omega n} \quad (2.180)$$

para cada valor de ω entre 0 y 2π ; es decir, para infinitos valores de frecuencia. Afortunadamente, en este caso el cálculo de la transformada para un único valor de frecuencia se realiza con un número finito de operaciones (N multiplicaciones y $N - 1$ sumas, concretamente).

Ahora bien, para señales en tiempo continuo demostramos que no era necesaria la Transformada de Laplace para representar únicamente la señal en el dominio transformado, sino que bastaba con emplear ω en lugar de $s = \sigma + j\omega$ como única variable independiente (la Transformada de Fourier en tiempo continuo). Para secuencias demostramos que no era necesaria la Transformada Z para lograr el mismo objetivo, sino que bastaba con emplear ω tomando valores en un intervalo de longitud 2π (la Transformada de Fourier en tiempo discreto) en lugar de $z = r e^{j\omega}$. Si en secuencias de longitud finita tenemos únicamente N grados de libertad para especificar la secuencia, ¿realmente hacen falta los infinitos valores de frecuencia contenidos entre 0 y 2π para representar únicamente la secuencia en el dominio transformado? Obviamente, la respuesta es no.

Para representar únicamente la secuencia de longitud finita van a ser necesarios exactamente N valores de la Transformada de Fourier, (2.180), pero para determinar cuáles serán estos valores hay que preguntarse la razón por la que eran necesarios infinitos valores en la Transformada de Fourier. La Transformada de Fourier de una señal puede interpretarse como una representación de la señal empleando una base de sinusoides complejas, de la misma forma que la señal en el dominio natural puede interpretarse como una representación de la señal empleando una base de funciones delta ((2.31) para tiempo continuo y (2.34) para tiempo discreto), y la operación en sí de la Transformada de Fourier puede interpretarse como un cambio de base. Las sinusoides complejas forman una base para las señales de duración ilimitada⁸ porque, en tiempo continuo, dos sinusoides de frecuencia distinta son ortogonales

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_1 t} (e^{j\omega_2 t})^* dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega_1 - \omega_2)t} dt = \begin{cases} \infty & \text{si } \omega_1 = \omega_2 \\ 0 & \text{si } \omega_1 \neq \omega_2 \end{cases} \quad (2.181)$$

y son un conjunto generador del espacio de señal, como demuestra la ecuación de síntesis de la Transformada de Fourier. Si no incluimos las sinusoides de todas las frecuencias posibles no se cumple la propiedad de conjunto generador. Para tiempo discreto obtenemos el mismo

⁸En realidad no son una base para *todas* las señales de duración ilimitada, sino para aquellas que cumplen determinadas propiedades matemáticas que resultan irrelevantes en la práctica.

resultado si restringimos los valores de frecuencia a los contenidos entre 0 y 2π . Los N valores de frecuencia que buscamos o, equivalentemente, las N sinusoides que buscamos, deben ser ortogonales y generar cualquier secuencia de longitud N .

Si empleamos los valores de frecuencia $\omega_k = k(2\pi/N)$, con $k = 0, \dots, (N - 1)$, tenemos que las sinusoides de dichas frecuencias son ortogonales en un intervalo de longitud N ,

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{jk(2\pi/N)n} \left(e^{jr(2\pi/N)n}\right)^* = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(k-r)(2\pi/N)n} = \begin{cases} N & \text{si } k - r = \dot{N} \\ 0 & \text{si } k - r \neq \dot{N} \end{cases} \quad (2.182)$$

y son capaces de generar cualquier señal sobre el intervalo $0 \leq n < N$, como demuestra la ecuación de síntesis del Desarrollo en Serie de Fourier para secuencias, (2.143). Tomando muestras de $X_N(e^{j\omega})$ en estos valores de frecuencia tendremos únicamente determinada la secuencia $x[n]$ de longitud finita.

La secuencia de valores $X[k] \doteq X_N(e^{jk(2\pi/N)})$, con $k = 0, \dots, (N - 1)$ es la que denominamos *Transformada Discreta de Fourier* (“Discrete Fourier Transform”, DFT) de longitud N de la secuencia $x[n]$, que definimos formalmente como

$$X[k] = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n} & 0 \leq k < N \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (2.183)$$

y que nos permiten reconstruir la secuencia $x[n]$ como

$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{jk(2\pi/N)n} & 0 \leq n < N \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (2.184)$$

También nos referimos a (2.183) como ecuación de análisis de la DFT y a (2.184) como ecuación de síntesis de la DFT, DFT inversa o IDFT. La relación entre $x[n]$ y $X[k]$ la denominaremos como

$$x[n] \xrightarrow[N]{DFT} X[k] \quad (2.185)$$

Sobre la definición de la DFT conviene realizar los siguientes comentarios:

- La evaluación de la DFT se realiza comúnmente de forma numérica, sin necesidad de recurrir a expresiones analíticas de las señales. Para calcular los N valores $X[k]$ a partir de $x[n]$ es necesario realizar del orden de N^2 multiplicaciones y sumas complejas. Existen además una familia de algoritmos (procedimientos numéricicos) que se conocen con el nombre genérico de *Transformada Rápida de Fourier* (“Fast Fourier Transform”, FFT) que emplean del orden de $N \log_2 N$ multiplicaciones complejas para el cálculo de la DFT. A pesar de su nombre, no debemos confundir la FFT con una transformada, pues es simplemente un procedimiento numérico rápido (más bien, todo un conjunto de procedimientos) para el cálculo de la DFT.

- Bajo las restricciones empleadas, el resultado de la DFT coincide con muestras de la Transformada de Fourier de la secuencia, pero no debe confundirse con esta. Esta identidad se sigue manteniendo si la longitud de la secuencia es menor ($x[n] = 0$ para todo $n < 0$ y $n \geq N_0$, con $N_0 < N$).

Además, nada nos impide aplicar la ecuación de análisis de la DFT sobre una secuencia de longitud mayor que N , o a una secuencia que, siendo de longitud menor o igual que N , toma valores distintos de cero en otro intervalo distinto al $0 \leq n < N$, o incluso a una secuencia de longitud ilimitada. Al fin y al cabo, sólo se trata de una transformación, (2.183), que aplicamos sobre la secuencia que deseemos. Sin embargo, en estos casos deja de ser cierta la equivalencia entre DFT y Transformada de Fourier porque existen valores de la secuencia (los que están fuera del intervalo $0 \leq n < N$) que son tenidos en cuenta para el cálculo de la Transformada de Fourier y no para el cálculo de la DFT. Obviamente, en estos casos, la ecuación de síntesis no da como resultado la secuencia original.

- Existe un alto paralelismo entre el Desarrollo en Serie de Fourier para secuencias ((2.142) y (2.143), Página 50) que puede llevarnos a confundir los coeficientes del desarrollo en serie, a_k , con los valores $X[k]$ que proporciona la DFT. De hecho, las ecuaciones de análisis y síntesis de ambas son prácticamente idénticas si exceptuamos el factor $1/N$, que en el desarrollo en serie se encuentra en la ecuación de análisis y en la DFT en la ecuación de síntesis.

Aunque las ecuaciones sean prácticamente idénticas, existe una diferencia fundamental: en el desarrollo en serie se realiza una extensión periódica fuera del intervalo de 0 a $N - 1$, tanto de los valores de amplitud de la señal como de los coeficientes del desarrollo en serie, mientras que en la DFT, fuera del intervalo de 0 a $N - 1$, se supone que tanto $x[n]$ como $X[k]$ son nulos. Esto trae como consecuencia que la señal que reconstruye el Desarrollo en Serie de Fourier sea una secuencia de energía infinita y la que reconstruye la DFT sea una secuencia de energía finita, o que el espectro de la señal que reconstruye el desarrollo en serie esté compuesto por funciones delta y el que reconstruye la DFT sea un espectro continuo de valores acotados.

Propiedades de la Transformada Discreta de Fourier

A continuación enunciamos algunas de las propiedades de la DFT, haciendo mayor hincapié en aquellas que suponen una novedad respecto a sus correspondientes propiedades de la Transformada de Fourier.

Además de (2.185), denotamos

$$y[n] \xleftarrow[N]{DFT} Y[k]$$

y, en aquellas operaciones en que se vea involucrada más de una secuencia, suponemos que N es mayor o igual que la longitud de cualquiera de las dos.

Linealidad.

$$\alpha x[n] + \beta y[n] \xrightarrow[N]{DFT} \alpha X[k] + \beta Y[k] \quad (2.186)$$

Convolución circular.

$$x[n] \textcircled{N} y[n] \xrightarrow[N]{DFT} X[k]Y[k] \quad (2.187)$$

Si multiplicamos punto a punto las DFT de dos secuencias el resultado en el dominio natural no es una convolución como la conocemos hasta ahora, periódica o no periódica, sino lo que denominamos *convolución circular* de módulo N , que denotamos con el símbolo \textcircled{N} y representa la operación

$$x[n] \textcircled{N} y[n] \doteq \begin{cases} \sum_{l=0}^{N-1} x[l] y[((n-l))_N] & 0 \leq n < N \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (2.188)$$

donde $(())_N$ representa la operación módulo N , cuyo resultado va a estar siempre en el rango $0 \leq n < N^9$. La convolución que conocíamos hasta ahora la denominamos *convolución lineal* en contraposición a la convolución circular.

Desplazamiento circular.

$$x[((n-n_0))_N] \xrightarrow[N]{DFT} e^{-jk(2\pi/N)n_0} X[k] \quad (2.189)$$

El efecto de multiplicar la DFT de una secuencia por $e^{-jk(2\pi/N)n_0}$, lo que sería el equivalente en la Transformada de Fourier de multiplicar $X(e^{j\omega})$ por $e^{-j\omega n_0}$, no se traduce en un desplazamiento *lineal* (más bien, no puede traducirse en un desplazamiento lineal porque el resultado de la DFT inversa va a ser cero fuera del intervalo $0 \leq n < N$), sino en un desplazamiento *circular*, donde la variable independiente se opera módulo N .

Inserción de ceros. Si a partir de la secuencia $x[n]$ de longitud N generamos otra secuencia $x_{0L}[n]$ de longitud NL insertando $L - 1$ ceros entre dos valores de $x[n]$ de la forma

$$x_{0L}[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \delta[n - kL] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{L}\right] & \text{si } n = \dot{L} \text{ y } 0 \leq n < NL \\ 0 & \text{si } n \neq \dot{L} \end{cases} \quad (2.190)$$

se cumple que

$$x_{0L}[n] \xrightarrow[NL]{DFT} X[((k))_N] \quad (2.191)$$

El resultado de la inserción de ceros en la Transformada de Fourier es una compresión del espectro por un factor L . Como en la DFT de NL puntos muestreamos en las frecuencias $k(2\pi/NL)$, el resultado de la inserción de ceros va a ser el mismo resultado pero replicado L veces.

⁹Como recordatorio, el resultado de la operación $((l))_m$, siendo l y m números enteros, es el resto de la división entera de l por m . Por ejemplo, $((3))_5 = 3$, $((5))_5 = 0$, $((6))_5 = 1$, $((104))_5 = 4$, etc.

Supresión de ceros. Si a partir de la secuencia $x_{0L}[n]$ de longitud NL que cumple

$$x_{0L}[n] = 0 \quad \text{si } n \neq \dot{L} \text{ ó } n < 0 \text{ ó } n \geq NL \quad (2.192)$$

y cuya DFT es $X_{0L}[k]$ generamos otra secuencia $x[n] = x_{0L}[nL]$, se cumple que

$$x[n] \xrightarrow[N]{DFT} X_{0L}[k] \quad (2.193)$$

Dualidad.

$$X[n] \xleftrightarrow[N]{DFT} Nx[((-n))_N] \quad (2.194)$$

Volvemos a recuperar esta propiedad que teníamos en la Transformada de Fourier en tiempo continuo y que perdimos en la Transformada de Fourier de secuencias, porque aquí la naturaleza de las variables independientes de los dominios natural y transformados es la misma (variables enteras)

Producto.

$$x[n]y[n] \xleftrightarrow[N]{DFT} \frac{1}{N}X[k] \circledast Y[k] \quad (2.195)$$

Nos vuelve a aparecer otra operación de convolución circular, ahora en el dominio transformado, que se realiza de idéntica forma a (2.188)

Modulación.

$$e^{jk_0(2\pi/N)n}x[n] \xleftrightarrow[N]{DFT} X[((k - k_0))_N] \quad (2.196)$$

Para que una modulación se traduzca en un desplazamiento (circular) en la DFT, la frecuencia de la sinusoides ha de ser un múltiplo entero de $2\pi/N$.

Simetría.

$$x[((-n))_N] \xleftrightarrow[N]{DFT} X[((-k))_N] \quad (2.197)$$

Conjugación.

$$x^*[n] \xleftrightarrow[N]{DFT} X^*((-k))_N \quad (2.198)$$

Las definiciones de paridad, imparidad, hermiticidad y antihermiticidad se refieren ahora a operaciones módulo N sobre la variable independiente. Por lo demás, se siguen conservando las propiedades de simetría de la Transformada de Fourier porque, al fin y al cabo, los coeficientes de la DFT no son sino muestras de aquélla.

Todas estas propiedades se encuentran enumeradas en el Cuadro 2.7.

Linealidad	$\alpha x[n] + \beta y[n] \xrightarrow[N]{DFT} \alpha X[k] + \beta Y[k]$
Convolución circular	$x[n] \circledast y[n] \xrightarrow[N]{DFT} X[k]Y[k]$
Desplazamiento circular	$x[((n - n_0))_N] \xrightarrow[N]{DFT} e^{-jk(2\pi/N)n_0} X[k]$
Inserción de ceros	$x_{0L}[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]\delta[n - kL] \xrightarrow[NL]{DFT} X[((k))_N]$
Supresión de ceros	$x[n] \xrightarrow[N]{DFT} X_{0L}[k]$
Dualidad	$X[n] \xrightarrow[N]{DFT} Nx[((-n))_N]$
Producto	$x[n]y[n] \xrightarrow[N]{DFT} \frac{1}{N}X[k] \circledast Y[k]$
Modulación	$e^{jk_0(2\pi/N)n}x[n] \xrightarrow[N]{DFT} X[((k - k_0))_N]$
Simetría	$x[((-n))_N] \xrightarrow[N]{DFT} X[((-k))_N]$
Conjugación	$x^*[n] \xrightarrow[N]{DFT} X^*(((-k))_N)$

Cuadro 2.7. Propiedades de la Transformada Discreta de Fourier.

Convolución lineal y convolución circular

La convolución lineal y la convolución circular de dos secuencias de longitud finita no proporcionan, en general, el mismo resultado. En determinadas situaciones, como la que describiremos a continuación, la realización de una convolución lineal mediante una convolución circular conlleva ventajas computacionales (menor número de operaciones), pero para poder aprovecharlas es necesario establecer las condiciones en que ambas operaciones son equivalentes.

Imaginemos que queremos calcular la convolución lineal de dos secuencias, cada una de ellas de longitud 1.000. Para calcular la convolución aplicamos la Fórmula (2.69), donde debemos realizar 1.000 multiplicaciones y sumas para calcular el resultado en un único instante. Dado que la convolución de dos secuencias de longitud finita es otra de longitud igual a la suma de las longitudes de las secuencias menos uno, aproximadamente deberemos de calcular 2.000.000 de multiplicaciones (eliminando las multiplicaciones por cero, podríamos quedarnos aproximadamente en 1.000.000, pero no menos). Si en lugar de calcular la convolución lineal queremos calcular la convolución circular de longitud 1.000, podríamos aplicar el siguiente procedimiento, que aprovecha la propiedad de convolución circular de la DFT:

Paso 1. Calculamos las DFT de longitud 1.000 de ambas secuencias. Aplicando algún algo-

ritmo de tipo FFT, esto supone realizar aproximadamente $2 \cdot N \log_2 N \approx 2 \cdot 1.000 \cdot 10 = 20.000$ multiplicaciones y sumas.

Paso 2. Multiplicamos punto a punto el resultado de las dos DFT, lo que supone una carga computacional de 1.000 multiplicaciones.

Paso 3. Calculamos la DFT inversa al resultado de la multiplicación para obtener la convolución circular. Este paso supone aproximadamente 10.000 multiplicaciones y sumas.

En total, para realizar la convolución circular emplearíamos aproximadamente 31.000 multiplicaciones y sumas, más de 30 veces menos que para realizar una convolución lineal.

Merece la pena, a tenor de la diferencia en el coste computacional, establecer las condiciones en que ambas operaciones son equivalentes.

Podemos demostrar que si tenemos dos secuencias de longitud finita, $x_1[n]$ que es idénticamente nula fuera del intervalo $0 \leq n < N_1$ y $x_2[n]$ que es idénticamente nula fuera del intervalo $0 \leq n < N_2$, su convolución lineal

$$x_3[n] = x_1[n] * x_2[n] \quad (2.199)$$

es idénticamente nula fuera del intervalo $0 \leq n < N_1 + N_2 - 1$, y la convolución circular con longitud N ($N > N_1, N_2$) de ambas secuencias puede expresarse como

$$x_{3c}[n] = x_1[n] \circledast x_2[n] = \begin{cases} x_{3p}[n] & 0 \leq n < N \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (2.200)$$

con

$$x_{3p}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_3[n - rN] \quad (2.201)$$

que no es otra cosa sino la superposición, en el intervalo $0 \leq n < N$, de réplicas del resultado de la convolución lineal de ambas secuencias desplazadas un número entero de veces N .

Si N es mayor o igual que $N_1 + N_2 - 1$, las réplicas de la convolución lineal ($x_3[n - rN]$) no se solapan en los mismos instantes temporales en $x_{3p}[n]$ y, por tanto, al aplicar (2.200), $x_{3c}[n]$ va a ser exactamente la convolución lineal, $x_3[n]$.

Si N es menor que $N_1 + N_2 - 1$, las réplicas de la convolución lineal ($x_3[n - rN]$) se solapan en los instantes temporales $rN \leq n < (r - 1)N + N_1 + N_2 - 1$ de $x_{3p}[n]$ y, al aplicar (2.200), $x_{3c}[n]$ va a ser distinto de $x_3[n]$ en los instantes $0 \leq n < N_1 + N_2 - N - 1$ e igual en los instantes $N_1 + N_2 - N - 1 \leq n < N$.

En resumen, si empleamos una DFT de longitud mayor o igual que $N_1 + N_2 - 1$, el resultado de la convolución lineal y de la convolución circular son idénticos y podemos emplear el método basado en la propiedad de convolución circular de la DFT para calcularla. Si volvemos al ejemplo anterior, para realizar la convolución de dos secuencias de 1.000 puntos cada una mediante convolución circular necesitaríamos aproximadamente 62.000 multiplicaciones y sumas, que aún es casi 20 veces menor de las que necesitaríamos para realizar la convolución lineal.

2.3.6. Representación de señales paso banda

Las señales paso banda ($X(j\omega) = 0$ para $\omega_1 > |\omega| > \omega_2$ con $\omega_1 < \omega_2$) son muy frecuentes en comunicaciones, y en muchos casos el cociente entre el ancho de banda ($\omega_2 - \omega_1$) y la frecuencia central de la banda ($(\omega_1 + \omega_2)/2$) es muy pequeño, lo que denotamos como *banda estrecha*. Adicionalmente, dichas señales suelen ser reales de tiempo continuo por tratarse de señales que van a ser enviadas por un medio físico o que son recibidas de un medio físico.

En estas situaciones tenemos una característica de amplitud de la señal como la que se muestra en la parte superior de la Figura 2.12 y, por múltiples razones que van desde la obtención de una mejor representación gráfica hasta la representación en tiempo discreto con el menor número de muestras, nos gustaría tener una señal que fuese una representación única de ella (que contuviese la misma información) y que fuese paso bajo, tal y como se muestra en la parte inferior de la Figura 2.12. Esta señal paso bajo se denomina el *equivalente paso bajo* y la denotaremos como $x_{eq}(t)$.

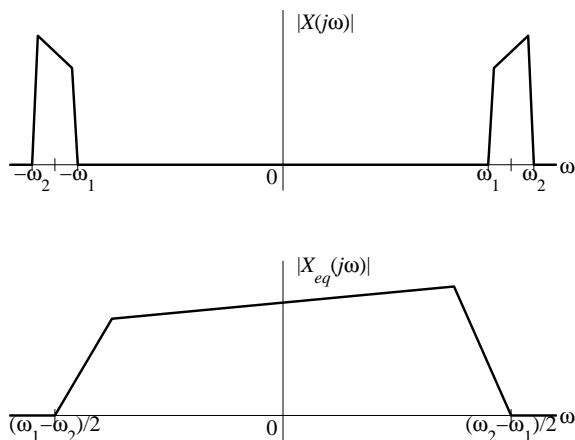


Figura 2.12. Característica de amplitud de una señal de banda estrecha (arriba) y de su equivalente paso bajo (abajo).

La obtención del equivalente paso bajo $x_{eq}(t)$ de una señal $x(t)$ puede realizarse con un esquema como el que muestra la Figura 2.13, denominado *demodulador en cuadratura*¹⁰, que realiza una operación de modulación por una sinusoides compleja de frecuencia $-\omega_0$ (cuando la frecuencia de modulación es negativa, el proceso se suele denominar demodulación), $e^{-j\omega_0 t}x(t)$, con el objeto de desplazar la frecuencia ω_0 a frecuencia 0 y un filtrado posterior que nos elimina la componente espectral de frecuencias negativas.

La señal $x_{eq}(t)$ es, en general, compleja aunque la señal $x(t)$ de la que proviene sea real. Para que $x_{eq}(t)$ fuese real la componente de frecuencia positiva de $X(j\omega)$ debería ser hermí-

¹⁰El nombre de demodulador en cuadratura proviene de su realización empleando señales reales, donde la operación de demodulación propiamente dicha (la multiplicación por la exponencial compleja) se divide en dos demodulaciones, una empleando un coseno y la otra un seno o, lo que es lo mismo, dos sinusoides en cuadratura.

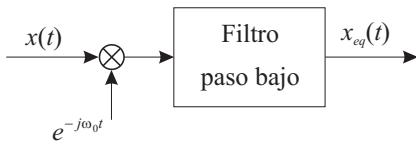


Figura 2.13. Demodulador en cuadratura.

tica respecto a ω_0 (característica de amplitud para frecuencias positivas par y característica de fase para frecuencias positivas impar tomando el origen de frecuencias como ω_0), pero bien sea porque la componente de frecuencia positiva de $X(j\omega)$ no es hermítica respecto a ninguna frecuencia o bien sea porque, aún siéndolo, ω_0 no es igual a la frecuencia central de la banda $((\omega_1 + \omega_2)/2)$, la señal $x_{eq}(t)$ va a ser tratada como una señal compleja.

A la parte real de $x_{eq}(t)$ se le suele denominar *componente en fase* de $x(t)$ y denotar como $x_I(t)$; a la parte imaginaria, *componente en cuadratura* de $x(t)$ y denotar como $x_Q(t)$. Al módulo de $x_{eq}(t)$ se le suele denominar *envolvente* de $x(t)$.

Una forma alternativa de obtener $x_{eq}(t)$ consiste en suprimir en primer lugar las componentes de frecuencias negativas y, posteriormente, realizar la demodulación. El sistema encargado de suprimir las componentes de frecuencias negativas se denomina *divisor de fase* y tiene una función de transferencia

$$H_{ps}(j\omega) = \begin{cases} \sqrt{2} & \omega > 0 \\ 0 & \omega < 0 \end{cases} \quad (2.202)$$

donde la ganancia $\sqrt{2}$ para frecuencias positivas tiene como objeto conservar la energía (o potencia) de la señal. La salida del divisor de fase, $x(t) * h_{ps}(t)$, se denomina *señal analítica* o *prenvolvente* de $x(t)$ y se denota como $x_a(t)$. A partir de la envolvente obtenemos el equivalente paso bajo como $x_{eq}(t) = e^{-j\omega_0 t} x_a(t)$.

Comúnmente, el divisor de fase se realiza empleando un *Transformador de Hilbert*, que es el sistema descrito en el Ejemplo 2.11. Posee una función de transferencia

$$H_h(j\omega) = \begin{cases} -j & \omega > 0 \\ j & \omega < 0 \end{cases} \quad (2.203)$$

y una respuesta al impulso

$$h_h(t) = \frac{1}{\pi t} \quad (2.204)$$

La señal analítica se construye como una señal compleja cuya parte real es la propia $x(t)$ y la parte imaginaria es la salida del Transformador de Hilbert o Transformada de Hilbert de $x(t)$, es decir, $x_h(t) = x(t) * h_h(t)$,

$$x_a(t) = x(t) + jx_h(t) \quad (2.205)$$

que podemos demostrar fácilmente que es la señal analítica que obteníamos anteriormente porque

$$X_a(j\omega) = X(j\omega) + jX_h(j\omega) = \begin{cases} X(j\omega) + j(-jX(j\omega)) = 2X(j\omega) & \omega > 0 \\ X(j\omega) + j(jX(j\omega)) = 0 & \omega < 0 \end{cases} \quad (2.206)$$

Que un sistema lineal e invariante reciba el nombre de *transformador* y la salida de ese sistema reciba el nombre de *transformada* no debe extrañarnos, porque la expresión de $x_h(t)$ es

$$x_h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \frac{1}{\pi(t - \tau)} d\tau \quad (2.207)$$

que no difiere tanto de la Transformada de Fourier en tiempo continuo si intercambiamos t por ω , τ por t y $h_h(t - \tau)$ por una exponencial compleja (que depende tanto de t como de ω). De hecho, tanto la Transformada de Fourier en tiempo continuo como el transformador de Hilbert, como cualquier propia convolución con una señal predeterminada pertenecen a un grupo de transformaciones en L_2 denominadas *transformaciones de núcleo integral*.

Algunas propiedades del Transformador de Hilbert son las siguientes:

- La Transformada de Hilbert de una señal par es impar, y de una señal impar, par.
- Aplicando dos veces la Transformada de Hilbert a una señal, obtenemos la misma señal cambiada de signo.
- La energía de una señal se mantiene a la salida del Transformador de Hilbert.
- Una señal y su Transformada de Hilbert son ortogonales.

El procedimiento empleado para obtener el equivalente paso bajo de señales se puede extender a sistemas, sin más que sustituir la señal $x(t)$ por la respuesta al impulso del sistema paso banda, $h(t)$. En este caso no tiene sentido hablar de sistema analítico, o envolvente del sistema, pero sí de un sistema paso bajo equivalente con una respuesta al impulso $h_{eq}(t)$ y una función de transferencia $H_{eq}(j\omega)$.

Por último, debemos mencionar que podemos realizar un tratamiento equivalente para tiempo discreto, sustituyendo $x(t)$ por $x[n]$, $x_{eq}(t)$ por $x_{eq}[n]$, y así sucesivamente. La mayor diferencia que puede aparecer respecto a lo aquí expresado es la definición de los sistemas involucrados, donde hay que recordar que las funciones de transferencia serán funciones periódicas con periodo 2π . Concretamente, el Transformador de Hilbert para tiempo discreto tiene una función de transferencia

$$H_h(e^{j\omega}) = \begin{cases} -j & 0 < \omega < \pi \\ j & -\pi < \omega < 0 \end{cases} \quad (2.208)$$

periódica con periodo 2π

y una respuesta al impulso

$$h_h[n] = \begin{cases} \frac{2 \operatorname{sen}^2(\pi n/2)}{\pi n} & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases} \quad (2.209)$$

2.4. MUESTREO, DIEZMADO E INTERPOLACIÓN

Hasta ahora hemos hablado en tiempo continuo y tiempo discreto como de dos mundos separados y paralelos, pero existen procedimientos para obtener una secuencia a partir de una señal en tiempo continuo que denominamos genéricamente *conversores continuo-discreto* y procedimientos para reconstruir una señal en tiempo continuo a partir de una secuencia que denominamos genéricamente *conversores discreto-continuo*.

Entre los conversores continuo-discreto revisten gran importancia los basados en un muestreo periódico de la señal en tiempo continuo, donde la secuencia se obtiene de la forma

$$x[n] \doteq x(nT_s) \quad (2.210)$$

donde T_s es el *periodo de muestreo* y $1/T_s = f_s$ es la *frecuencia de muestreo* expresada en muestras por segundo. También podemos expresar la frecuencia de muestreo en radianes por segundo como $w_s = 2\pi/T_s$.

El problema fundamental del muestreo es la determinación de las condiciones que garantizan que la secuencia $x[n]$ representa únicamente a la señal $x(t)$, porque el muestreo es, en general, un proceso no invertible. Al tomar muestras de una señal en tiempo continuo, estamos desecharando infinitos valores de la señal entre muestra y muestra o, visto de otra forma, existe un número infinito de señales que toman los mismos valores en los instantes nT_s .

Además de este problema fundamental existe un pequeño problema matemático: la expresión (2.210) es una definición, (\doteq), pero no una igualdad en sentido estricto (bidireccional). La consecuencia de este hecho es que no podemos establecer una equivalencia directa entre una señal en tiempo continuo y la secuencia que obtenemos de ella mediante muestreo. Así, deberemos proceder por similitud de valores numéricos y expresiones analíticas a la hora de establecer relaciones entre, por ejemplo, las Transformadas de Fourier de $x(t)$ y $x[n]$.

Este último problema será abordado en el Apartado 2.4.3, dedicando los primeros al problema del muestreo en sí; primero para tiempo continuo y posteriormente para secuencias.

2.4.1. Muestreo de señales en tiempo continuo

Ya que no podemos abordar directamente la obtención de una secuencia a partir de muestras de una señal en tiempo continuo, la señal que ha de servir de “soporte” para los valores de las muestras

$$x(nT_s) \quad n = -\infty, \dots, \infty \quad (2.211)$$

será una señal en tiempo continuo $x_p(t)$ que denominamos *señal muestreada*. Esta señal se genera con la ayuda de una *señal muestreadora*, que es un tren de deltas separadas el periodo de muestreo

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \quad (2.212)$$

y el proceso de muestreo lo expresamos como

$$x_p(t) = x(t)p(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s) \quad (2.213)$$

donde $x_p(t)$ es una señal en tiempo continuo que contiene, como deseábamos, únicamente las muestras de la señal $x(t)$.

Este tipo de muestreo se denomina *muestreo ideal* porque es físicamente imposible generar y manipular una señal que sea un tren de funciones delta.

Para determinar bajo qué condiciones $x_p(t)$ determina unívocamente a $x(t)$ calculamos la Transformada de Fourier de $x_p(t)$ haciendo uso de la propiedad de multiplicación y de la transformada de un tren de deltas que aparece en el Cuadro 2.1

$$\begin{aligned} X_p(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * \left(\frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T_s}\right) \right) \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j\omega) * \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T_s}\right) \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(j\omega - jk\frac{2\pi}{T_s}\right) \end{aligned} \quad (2.214)$$

El espectro de la señal muestreada, $X_p(j\omega)$, está compuesto, de acuerdo con (2.214), de réplicas del espectro de la señal original, $X(j\omega)$, escaladas por $1/T_s$ y desplazadas a todos los múltiplos enteros de la frecuencia de muestreo $\omega_s = 2\pi/T_s$, tal y como se muestra en la Figura 2.14 para una señal paso bajo. De (2.214) podemos deducir también que $X_p(j\omega)$ es una función periódica con periodo ω_s . La Figura 2.14 nos es útil además para establecer las condiciones en que es posible reconstruir $x(t)$ a partir de $x_p(t)$. Si la señal a muestrear tiene un espectro como el mostrado en la Figura 2.14(a), y empleamos una frecuencia de muestreo lo suficientemente alta como para que las distintas réplicas de $X(j\omega)$ no se solapen al construir $X_p(j\omega)$ según (2.214), nos encontramos en una situación como la que muestra la Figura 2.14(b) donde, al tener cada réplica aislada, podemos recuperar $X(j\omega)$ con una operación tan simple como un filtrado. Si, por el contrario, las réplicas de $X(j\omega)$ se solapan al construir $X_p(j\omega)$, nos encontramos en una situación como la que muestra la Figura 2.14(c) (la línea más gruesa representa el resultado de la suma expresada en (2.214)), donde será imposible determinar, en las zonas del espectro en que se ha producido el solape, qué parte

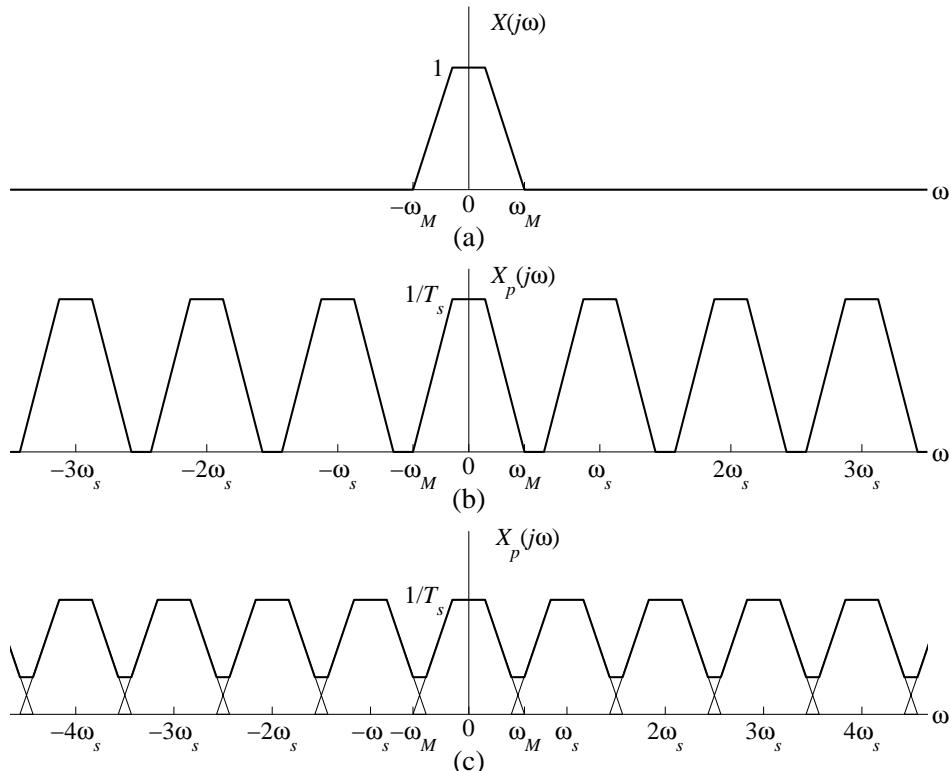


Figura 2.14. Espectro de la señal original (a), y espectros de la señal muestreada a distintas frecuencias de muestreo: sin solape espectral (b) y con solape espectral (c).

pertenece a una réplica y qué parte a otra. En consecuencia, no podremos reconstruir $X(j\omega)$. En este caso decimos que se ha producido *solape espectral* en el proceso de muestreo, o que existe *distorsión por “aliasing”* o, simplemente *“aliasing”*.

La condición, por tanto, para que podamos recuperar $x(t)$ a partir de $x_p(t)$ es que no exista *“aliasing”*. Como condición previa a esta, la señal $x(t)$ ha de ser limitada en banda, y esta limitación de banda es el conocimiento *a priori* que *“compensa”* la pérdida de infinitos valores entre muestra y muestra de la señal $x(t)$. Téngase en cuenta que la limitación de banda es una restricción tan fuerte como la no consideración de los valores de la señal entre instantes de muestreo consecutivos, porque estamos expresando que el contenido espectral de la señal es nulo en un rango ilimitado de frecuencias.

El conocimiento *a priori* de la banda de frecuencias que ocupa la señal es necesario para establecer tanto el periodo de muestreo que nos garantiza la ausencia de *“aliasing”* como el mecanismo de recuperación de la señal $x(t)$. Para señales paso bajo como la mostrada en la Figura 2.14(a) que cumplen

$$X(j\omega) = 0 \quad \forall |\omega| > \omega_M \quad (2.215)$$

podemos garantizar la ausencia de *“aliasing”* siempre que empleemos una frecuencia de

muestreo mayor del doble de ω_M ($\omega_s > 2\omega_M$) o, equivalentemente, un periodo de muestreo T_s

$$T_s < \frac{\pi}{\omega_M} \quad (2.216)$$

Este resultado es conocido como *teorema de muestreo de Nyquist*, y la frecuencia $2\omega_M$ como *frecuencia de Nyquist*.

A pesar de la popularidad de la frecuencia de Nyquist no debemos perder de vista las condiciones bajo las que está establecida (señales reales paso bajo), siendo el criterio general para la reconstrucción perfecta de la señal original $x(t)$ la ausencia de “aliasing” en el proceso de muestreo.

La reconstrucción de la señal se lleva a cabo, como hemos mencionado anteriormente, mediante un procedimiento de filtrado. Si hacemos pasar la señal muestreada $x_p(t)$, que posee un espectro como el que muestra la Figura 2.15(a), por un filtro $H_r(j\omega)$ paso bajo ideal de ganancia T_s y una frecuencia de corte ω_c igual a la mitad de la frecuencia de muestreo, $\omega_c = \omega_s/2 = \pi/T_s$, (Figura 2.15(b)), la salida de dicho filtro será una señal $x_r(t)$ cuyo espectro se muestra en la Figura 2.15(c) y que coincidirá con $x(t)$ si en el proceso de muestreo no se ha producido “aliasing”.

El filtro $H_r(j\omega)$ se denomina *filtro reconstructor* o *filtro interpolador* y posee una respuesta al impulso

$$h_r(t) = T_s \frac{\omega_c}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_c t}{\pi}\right) = \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right) \quad (2.217)$$

La señal $x_r(t)$ se denomina *señal reconstruida* o *señal interpolada* y su expresión analítica es

$$\begin{aligned} x_r(t) &= x_p(t) * h_r(t) \\ &= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s) \right) * \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \operatorname{sinc}\left(\frac{t - nT_s}{T_s}\right) \end{aligned} \quad (2.218)$$

La interpretación de (2.218) puede ayudarnos a comprender el mecanismo de reconstrucción de $x_r(t)$:

- La función

$$\operatorname{sinc}\left(\frac{t - n_0 T_s}{T_s}\right)$$

toma valor cero en todos los instantes nT_s excepto en $n_0 T_s$ donde toma valor 1, y esto garantiza que $x_r(nT_s) = x(nT_s)$.

- Para cualquier valor de $t \neq nT_s$, la señal $x_r(t)$ se reconstruye empleando *todos* los valores $x(nT_s)$, aunque las muestras más cercanas a dicho instante tendrán más influencia en el valor de $x_r(t)$ que las más lejanas, de acuerdo con la forma de la función sinc.

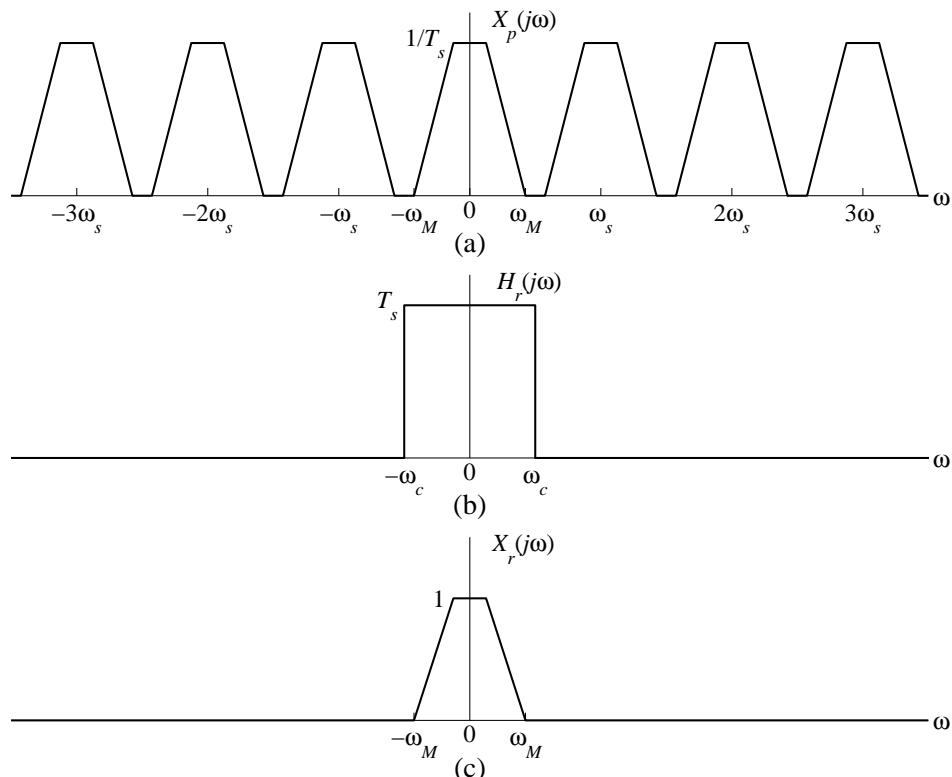


Figura 2.15. Proceso de reconstrucción de la señal: espectro de la señal muestreada (a), función de transferencia del filtro reconstructor (b) y espectro de la señal a la salida del filtro reconstructor (c).

A modo de resumen, el proceso completo de muestreo y reconstrucción es el que lleva a cabo el sistema que muestra la Figura 2.16.

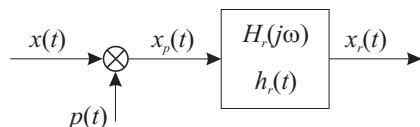


Figura 2.16. Sistema para muestreo y reconstrucción.

Muestreos periódicos no ideales: el muestreo instantáneo

Ante la imposibilidad de generar las funciones delta necesarias para el muestreo ideal surgen diversas alternativas, de las que vamos a analizar la más común: el *muestreo instantáneo*.

El principal problema para la puesta en práctica del muestreo ideal no es capturar el valor de la señal en los instantes nT_s , que puede realizarse prácticamente empleando unos circuitos denominados de *muestreo y retención* o “*sample & hold*”, sino dar un soporte físico adecuado a la señal $x_p(t)$. Para lograrlo, el muestreo instantáneo hace pasar la señal $x_p(t)$ por un sistema de respuesta al impulso $p_i(t)$, cuyo efecto es la sustitución de las funciones delta por la señal $p_i(t)$.

Un ejemplo que pone de manifiesto las diferencias entre los muestreos ideal e instantáneo podemos verlo en la Figura 2.17.

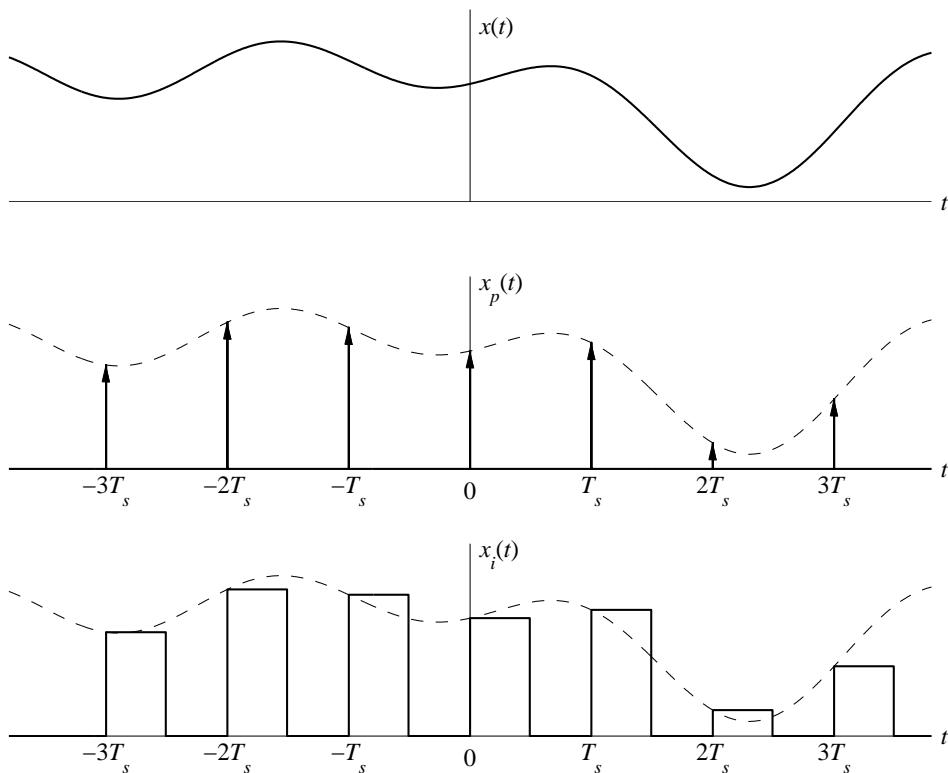


Figura 2.17. Comparación de los distintos tipos de muestreo: señal original $x(t)$, señal resultante del muestreo ideal $x_p(t)$ y señal resultante del muestreo instantáneo $x_i(t)$.

La señal resultante del muestreo instantáneo toma la forma

$$\begin{aligned}
 x_i(t) &= x_p(t) * p_i(t) \\
 &= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s) \right) * p_i(t) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) p_i(t - nT_s)
 \end{aligned} \tag{2.219}$$

y su transformada es

$$X_i(j\omega) = X_p(j\omega)P_i(j\omega) = P_i(j\omega) \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(j\omega - j\frac{2\pi k}{T_s}\right) \quad (2.220)$$

donde cada réplica está ponderada por la función $P_i(j\omega)$. Esto provoca una distorsión en la señal conocida como *distorsión de apertura*.

El filtro reconstructor debe corregir la distorsión de apertura, por lo que su función de transferencia ha de tomar la forma

$$H_r(j\omega) = \frac{T_s}{P_i(j\omega)} \Pi\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right) \quad (2.221)$$

Como condición adicional para poder recuperar la señal original debemos asegurar que $P_i(j\omega)$ no toma valor cero en ninguna frecuencia perteneciente al intervalo $(-\omega_s/2, \omega_s/2)$.

Muestreo de señales paso banda

Para muestrear señales paso banda que son además de banda estrecha, la frecuencia de Nyquist nos proporciona un valor de frecuencia de muestreo muy grande en comparación con el ancho de banda de la señal. En estos casos, podemos muestrear por debajo de dicha frecuencia sin que exista “aliasing”, tal como se muestra en el ejemplo de la Figura 2.18 empleando dos frecuencias de muestreo distintas.

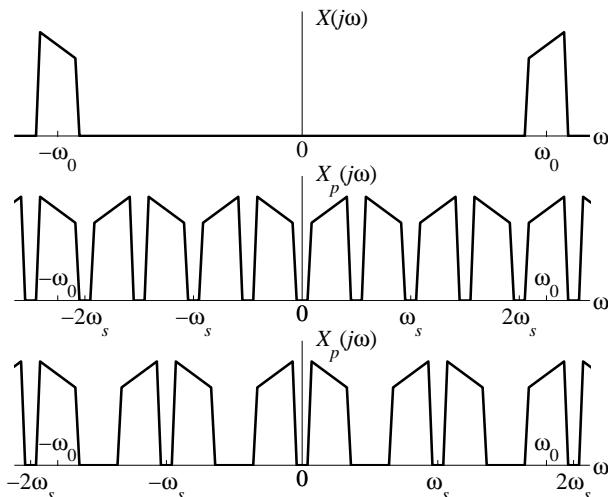


Figura 2.18. Muestreo paso banda: espectro de la señal original (arriba), espectro de la señal muestreada sin inversión de espectro (centro) y espectro de la señal muestreada con inversión de espectro(abajo).

Dependiendo de la frecuencia de muestreo que elijamos, las réplicas más cercanas a frecuencia 0 pueden estar invertidas (la componente de frecuencias positivas en frecuencias

negativas y viceversa), tal y como se muestra en la gráfica inferior de la Figura 2.18. Si sucede esto, se dice que el proceso de muestreo ha generado una *inversión de espectro*.

Si la reconstrucción de señales paso bajo muestreadas se realizaba empleando un filtro que dejaba pasar la banda de frecuencias en las que conocíamos *a priori* que se encontraba la señal original, aquí hacemos exactamente lo mismo, aunque el filtro a emplear sea distinto. Si la señal original se encuentra entre las frecuencias $k_0\omega_s$ y $(k_0 + 1/2)\omega_s$, o entre $(k_0 - 1/2)\omega_s$ y $k_0\omega_s$, siendo k_0 un número entero, el filtro de reconstrucción será un filtro paso banda ideal con esa banda de paso.

El muestreo paso banda también puede realizarse sobre la señal analítica (en ese caso, por ser compleja la señal analítica, es equivalente a muestrear dos señales reales de forma simultánea), empleando una frecuencia de muestreo ω_0/k_0 , siendo k_0 un número entero. La única precaución que debemos adoptar para realizar un muestreo paso banda en cualquiera de sus variantes es que, como en el caso de señales paso bajo, en el proceso de muestreo no se produzca “aliasing”.

También podemos sustituir el muestreo ideal por uno no ideal. De entre los dos tipos de muestreo no ideales considerados, el más apropiado para señales paso banda es el muestreo instantáneo, donde ahora cobra más importancia si cabe la distorsión de apertura y su compensación.

Por último debemos añadir que aunque el muestreo paso banda pueda parecer un mero ejercicio académico, existen dispositivos comerciales que ponen en práctica esta técnica.

2.4.2. Interpolación y diezmado de secuencias

Las técnicas de muestreo también pueden aplicarse a secuencias, siendo múltiples las razones que pueden conducirnos a su empleo. Por mencionar alguna, la representación con el menor número de muestras posibles de una secuencia que deseamos almacenar, o el empleo de circuitería más simple para el tratamiento de secuencias si existen requisitos de tiempo real.

El muestreo de secuencias no difiere grandemente del muestreo de señales en tiempo continuo salvo, quizás, en la facilidad de realización del muestreo ideal o los cambios de escala que podemos realizar sobre la secuencia.

La señal muestreadora en tiempo discreto es un tren de deltas de la forma

$$p[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kM] \quad (2.222)$$

siendo M , de valor entero, el periodo de muestreo y $\omega_s = 2\pi/M$ la frecuencia de muestreo. La secuencia muestreada $x_p[n]$ se obtiene como

$$x_p[n] = x[n] p[n] = x[n] \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kM] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[kM] \delta[n - kM] \quad (2.223)$$

cuya Transformada de Fourier es

$$\begin{aligned}
 X_p(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) \underset{2\pi}{\circledast} P(e^{j\omega}) \\
 &= \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) \underset{2\pi}{\circledast} \left(\frac{2\pi}{M} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta \left(\omega - k \frac{2\pi}{M} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{M} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(e^{j\omega}) \underset{2\pi}{\circledast} \delta \left(\omega - k \frac{2\pi}{M} \right) \\
 &= \frac{1}{M} \sum_{k \in \langle M \rangle} X \left(e^{j(\omega - k \frac{2\pi}{M})} \right)
 \end{aligned} \tag{2.224}$$

donde la diferencia más apreciable con su versión en tiempo continuo, (2.214), es que aquí nos hacen falta únicamente M réplicas de $X(e^{j\omega})$ para formar la función periódica $X_p(e^{j\omega})$ de periodo $2\pi/M$, ya que $X(e^{j\omega})$ es ya una función periódica de periodo 2π .

Al igual que en tiempo continuo, en el muestreo de secuencias también puede existir “aliasing”, y para poder recuperar la secuencia original $x[n]$ debemos garantizar que no se produce “aliasing” en el proceso de muestreo. Para secuencias reales paso bajo con frecuencia de corte ω_M , bastará con garantizar que $\omega_s = 2\pi/M$ es mayor del doble de ω_M , que es el teorema de muestreo de Nyquist para secuencias.

La reconstrucción de la secuencia $x[n]$ se lleva a cabo mediante filtrado con un filtro paso bajo ideal $H_r(e^{j\omega})$ con ganancia M y una frecuencia de corte ω_c igual a la mitad de la frecuencia de muestreo, $\omega_c = \omega_s/2 = \pi/M$. La respuesta al impulso del filtro interpolador toma la forma

$$h_r[n] = \text{sinc} \left(\frac{n}{M} \right) \tag{2.225}$$

y la secuencia reconstruida, $x_r[n]$,

$$x_r[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[kM] \text{sinc} \left(\frac{n - kM}{M} \right) \tag{2.226}$$

La secuencia $x_p[n]$ tiene la misma estructura que una secuencia en que se han insertado $M - 1$ ceros entre muestra y muestra, (2.131). Estos ceros pueden suprimirse sin que ello suponga ninguna pérdida de información (de hecho, si se produjese alguna pérdida de información, esta se producirá en el proceso de muestreo por la existencia de “aliasing”) mediante una operación de supresión de ceros de la forma

$$x_d[n] = x_p[nM] \tag{2.227}$$

donde $x_d[n]$ se conoce con el nombre de secuencia *diezmada*, cuya transformada es, de acuerdo con la propiedad de supresión de ceros de la Transformada de Fourier,

$$X_d(e^{j\omega}) = X_p(e^{j\omega/M}) = \frac{1}{M} \sum_{k \in \langle M \rangle} X \left(e^{j(\frac{\omega}{M} - k \frac{2\pi}{M})} \right) \tag{2.228}$$

El proceso de obtención de $x_d[n]$ a partir de $x[n]$ se denomina *diezmado* a un ritmo natural M y, en realidad, es algo tan simple y directo como

$$x_d[n] = x[nM] \quad (2.229)$$

aunque es necesario todo el análisis anterior para determinar las condiciones en que $x_d[n]$ determina de manera unívoca $x[n]$ y para establecer la igualdad entre sus transformadas expresada en (2.228).

Un sistema que realiza el proceso de diezmado para una secuencia genérica $x[n]$ es el mostrado en la Figura 2.19, que se conoce con el nombre de *diezmador*. Para evitar el “aliasing” emplea un filtro paso bajo de frecuencia de corte π/M previo al proceso de diezmado propiamente dicho, que se realiza en el bloque etiquetado como $\downarrow M$. Únicamente

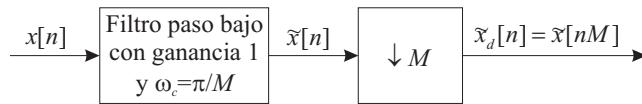


Figura 2.19. Esquema general de un diezmador por M .

en el caso en que la secuencia $x[n]$ sea paso bajo con frecuencia de corte menor o igual que π/M la secuencia $\tilde{x}[n]$ será igual a $x[n]$.

El proceso contrario (que no necesariamente inverso) al diezmado es el que denominamos *interpolación* a un ritmo natural L . En este proceso, representado en la Figura 2.20, a

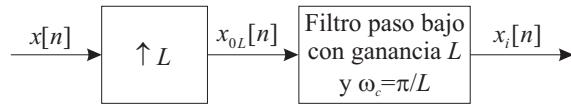


Figura 2.20. Esquema general de un interpolador por L .

una secuencia $x[n]$ (que puede provenir o no de un proceso de diezmado) se le aplica una inserción de ceros a ritmo L según (2.131), obteniendo la secuencia

$$x_{0L}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - kL] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{L}\right] & \text{si } n = \dot{L} \\ 0 & \text{si } n \neq \dot{L} \end{cases} \quad (2.131)$$

cuya transformada es, teniendo en cuenta la propiedad de inserción de ceros de la Transformada de Fourier, (2.132),

$$X_{0L}(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega L}) \quad (2.230)$$

que es una función periódica de periodo $2\pi/L$, igual que una secuencia que hubiese sido muestreada con un periodo de muestreo L .

Finalmente, esta secuencia $x_{0L}[n]$ es filtrada paso bajo como si se tratase de una secuencia muestreada para obtener la secuencia interpolada $x_i[n]$ cuya expresión es

$$x_i[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{0L}[kL] \operatorname{sinc}\left(\frac{n-kL}{L}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \operatorname{sinc}\left(\frac{n-kL}{L}\right) \quad (2.231)$$

Si con un diezmador conseguimos una reducción de la tasa de muestras o ritmo de la secuencia por un factor entero M y mediante un interpolador un incremento de la tasa de muestras por un factor entero L , podemos conseguir un cambio de ritmo por un factor racional L/M aplicando, sucesivamente, un interpolador por L y un diezmador por M . Nótese cómo el interpolador debe ir en primer lugar para asegurar que, de existir alguna pérdida de información (como es el caso en que $L/M < 1$), esta sea mínima. En esta combinación podemos suprimir uno de los filtros, el del interpolador o el del diezmador, resultando una estructura de procesado como la que muestra la Figura 2.21.

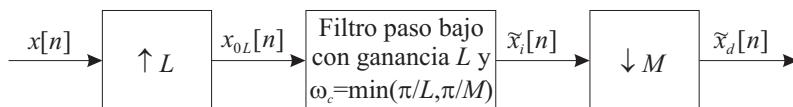


Figura 2.21. Combinación de un interpolador por L y un diezmador por M .

2.4.3. Simulación de señales y sistemas

En el inicio del apartado anterior mencionábamos que deseábamos construir una secuencia $x[n]$ a partir de una señal en tiempo continuo $x(t)$ de la forma (2.210) empleando unos sistemas denominados conversores continuo-discreto y volver a reconstruir una señal en tiempo continuo empleando conversores discreto-continuo. Sin embargo, debido a problemas matemáticos no era posible establecer una igualdad (bidireccional) entre la secuencia y la señal en tiempo continuo y debíamos conformarnos con un sistema de muestreo y reconstrucción como el mostrado en la Figura 2.16 en el que la variable independiente de la señal muestreada seguía siendo de naturaleza continua.

Es ahora, una vez expuestos los fundamentos de las técnicas de muestreo y reconstrucción, cuando estamos en disposición de abordar la definición de los conversores continuo-discreto y discreto-continuo y establecer las equivalencias entre $x[n]$ y $x(t)$. Para ello, vamos a insertar dos bloques nuevos en el diagrama de muestreo y reconstrucción anterior (Figura 2.16), tal y como se muestra en la Figura 2.22. El primero de ellos, etiquetado como “conversor de tren de impulsos a secuencia”, se encarga de construir la secuencia $x[n]$ a partir de los pesos de las funciones delta de $x_p(t)$, y el segundo, etiquetado como “conversor de secuencia a tren de impulsos”, realiza el paso contrario. El conversor continuo discreto se define como la combinación de un muestreador seguido de un conversor de tren de impulsos

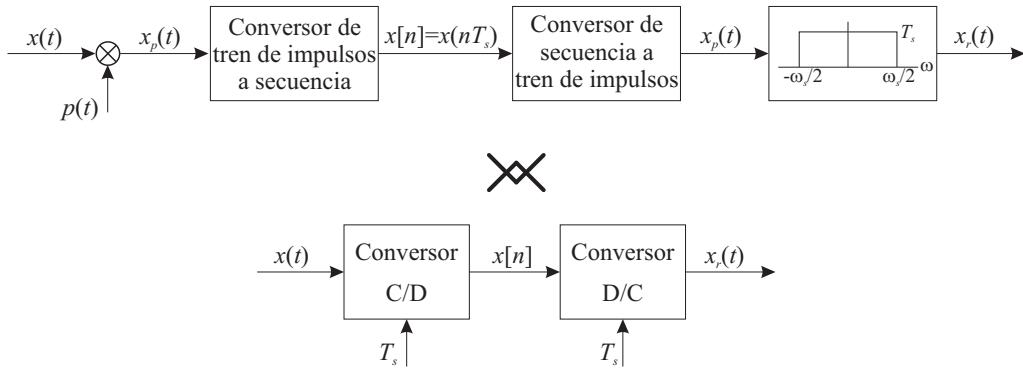


Figura 2.22. Sistema para muestreo y reconstrucción y conversores continuo-discreto (C/D) y discreto-continuo (D/C).

a secuencia y el conversor discreto-continuo se define como la combinación de un conversor de secuencia a tren de impulsos seguido de un filtro reconstructor de una señal muestreada.

Para determinar la equivalencia entre $x[n]$ y $x(t)$ comenzamos calculando la Transformada de Fourier de $x_p(t)$ de forma distinta a como lo hicimos en (2.214). Empleando una de las expresiones de $x_p(t)$ de (2.213),

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s) \quad (2.232)$$

calculamos su transformada empleando el par transformado $\delta(t - nT_s) \xleftrightarrow{TF} e^{-j\omega nT_s}$ para cada uno de los términos del sumatorio, obteniendo

$$X_p(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) e^{-j\omega nT_s} \quad (2.233)$$

que no es sino el Desarrollo en Serie de Fourier con periodo ω_s de la función periódica $X_p(j\omega)$ expresada en (2.214).

Por otra parte, tenemos que la Transformada de Fourier de la secuencia $x[n]$ obtenida a partir de $x(t)$ es, cambiando ω por Ω para evitar confusiones entre tiempo discreto y tiempo continuo,

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) e^{-j\Omega n} \quad (2.234)$$

de donde, comparando con la expresión de $X_p(j\omega)$ obtenida en (2.233), podemos obtener la equivalencia

$$\Omega \equiv \omega T_s \quad (2.235)$$

que nos permite establecer la igualdad

$$X(e^{j\Omega}) = X_p(j\Omega/T_s) \quad (2.236)$$

Empleando la relación entre $X(j\omega)$ y $X_p(j\omega)$ expresada en (2.214), (2.236) se transforma en

$$X(e^{j\Omega}) = X_p(j\Omega/T_s) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(j\left(\frac{\Omega - k2\pi}{T_s}\right)\right) \quad (2.237)$$

La equivalencia (2.235) y las ecuaciones (2.236) y (2.237), expresadas en palabras, vienen a decir que la frecuencia de muestreo en tiempo continuo se transforma en la frecuencia 2π de la secuencia construida a partir de la señal en tiempo continuo.

Este resultado nos abre las puertas para la realización en tiempo discreto de sistemas en tiempo continuo y viceversa y, más concretamente, la realización en tiempo discreto de la práctica totalidad de transmisores y receptores de comunicaciones digitales.

2.5. LECTURAS ADICIONALES

Existen excelentes textos sobre señales y sistemas entre los que destaca, sin duda, el libro de Oppenheim, Willsky y Nawab [55], que considera los casos en tiempo continuo y discreto. De entre los dedicados al análisis de señales y sistemas en tiempo discreto queremos destacar los libros de Oppenheim, Schafer y Buck [54] y el de Proakis y Manolakis [62]. El libro de Papoulis [57] trata, al igual que [55], los casos en tiempo continuo y discreto.

Para profundizar en la Transformada de Fourier se recomiendan los libros clásicos de Bracewell [12] y Papoulis [56]. Una visión algebraica de las señales y los sistemas se encuentra en el libro de Franks [26], texto que también se recomienda para profundizar en la representación de señales paso banda.

PROBLEMAS

P2.1 Calcule los valores medio y de pico, la energía y la potencia de las siguientes señales:

- 1.1. $x(t) = 1$
- 1.2. $x(t) = u(t)$
- 1.3. $x(t) = e^{-t}$
- 1.4. $x(t) = \cos(\omega_0 t)$
- 1.5. $x(t) = \Pi(\frac{t}{\alpha})$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)
- 1.6. $x[n] = \delta[n]$
- 1.7. $x[n] = e^{j\omega_0 n}$

P2.2 Calcule la función de ambigüedad temporal de la señal $\text{sinc}(t)$ y a partir de esta demuestre que dos señales $\text{sinc}(t)$ desplazadas entre sí un número entero distinto de cero son ortogonales.

P2.3 Determine si cumplen los criterios de memoria, causalidad, invertibilidad, estabilidad BIBO, linealidad e invarianza temporal los siguientes sistemas definidos mediante su relación entrada salida:

- 3.1. $y(t) = x(-t)$
- 3.2. $y(t) = \cos(100t) x(t)$
- 3.3. $y[n] = 2x[n] + 1$
- 3.4. $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$

P2.4 Calcule el resultado de las siguientes operaciones de convolución:

- 4.1. $\Pi(t) * \Pi(t - 10)$
- 4.2. $u(t) * e^{-10t}$
- 4.3. $(u[n] - u[n - 5]) * \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right)$
- 4.4. $(-2)^n u[-n] * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - 10k]$

P2.5 Calcule la Transformada de Fourier de las siguientes señales:

- 5.1. $x(t) = e^{-|t|}$
- 5.2. $x(t) = t\Pi(t)$
- 5.3. $x(t) = \text{sinc}^2(t)$
- 5.4. $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(t - 5k)$

P2.6 La señal $x(t)$ posee una Transformada de Fourier

$$X(j\omega) = |\omega|\Pi(\omega)$$

Sin calcular la Transformada Inversa de Fourier, determine:

- 6.1. Si $x(t)$ es una señal par.
- 6.2. Si $x(t)$ es una señal impar.
- 6.3. Si $x(t)$ es una señal real.
- 6.4. Si $x(t)$ es una señal imaginaria pura.
- 6.5. $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$
- 6.6. $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$

P2.7 Calcule los anchos de banda 3 dB, equivalente de ruido y de primer nulo de la señal $x(t) = \Pi(t)$.

P2.8 Calcule la Transformada de Fourier de las siguientes señales:

- 8.1. $x[n] = u[n + 2] - u[n - 5]$
- 8.2. $x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n - 2]$

8.3. $x[n] = n4^n u[3 - n]$

8.4. $x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{10}\right)$

P2.9 Determine las señales cuyas Transformadas de Fourier son las siguientes:

9.1. $X(e^{j\omega}) = \Pi\left(\frac{4\omega}{\pi} - 2\right)$ (para $-\pi < \omega \leq \pi$)

9.2. $X(e^{j\omega}) = e^{j\omega/4}$ (para $-\pi < \omega \leq \pi$)

9.3. $X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k+1} \delta\left(\omega - \frac{\pi k}{4}\right)$

9.4. $X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{7}e^{2j\omega}}$

P2.10 Calcule la Transformada Z de las siguiente señales, indicando su región de convergencia:

10.1. $x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) u[n]$

10.2. $x[n] = 2^n u[n + 5]$

10.3. $x[n] = n u[n]$

10.4. $x[n] = 3^{-n} u[n] + 3^n u[-n]$

P2.11 Obtenga las siguientes propiedades de la Transformada de Fourier de tiempo discreto a partir de sus propiedades equivalentes de la Transformada Z sustituyendo z por $e^{j\omega}$:

11.1. Simetría.

11.2. Conjugación.

11.3. Modulación.

11.4. Inserción de ceros.

11.5. Supresión de ceros.

P2.12 Considere el sistema definido por la ecuación en diferencias

$$y[n] = \frac{1}{2}y[n - 1] - \frac{1}{4}y[n - 2] + x[n] + \frac{1}{2}x[n - 1] - \frac{1}{4}x[n - 3]$$

12.1. Obtenga su función de transferencia en el dominio Z.

12.2. Dibuje su diagrama de polos y ceros y determine una realización estable del mismo.

12.3. Obtenga la respuesta al impulso de la realización estable determinada en el apartado anterior.

12.4. Dibuje la respuesta en frecuencia (amplitud y fase) del sistema.

P2.13 Considere las siguientes secuencias:

13.1. $x_1[n]$, tal que $x_1[n] = 0$ fuera del intervalo $0 \leq n < N$, cuya Transformada de Fourier es $X_1(e^{j\omega})$.

- 13.2. $x_2[n]$, tal que $x_2[n] = 0$ fuera del intervalo $\frac{N}{2} \leq n < \frac{3N}{2}$, cuya Transformada de Fourier es $X_2(e^{j\omega})$.

Demuestre las siguientes aseveraciones:

- 13.1. Si hacemos

$$x_3[n] = e^{-j\omega_1 n} x_1[n]$$

se cumple

$$X_3[k] = X_1(e^{j\omega}) \mid \omega = \frac{2\pi}{N}k + \omega_1$$

siendo $X_3[k]$ la DFT de longitud N de $x_3[n]$.

- 13.2. Si hacemos

$$x_3[n] = \begin{cases} x_2[n+N] & 0 \leq n < \frac{N}{2} \\ x_2[n] & \frac{N}{2} \leq n < N \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

se cumple

$$X_3[k] = X_2(e^{j\omega}) \mid \omega = \frac{2\pi}{N}k$$

siendo $X_3[k]$ la DFT de longitud N de $x_3[n]$.

- P2.14 Considera la señal paso banda

$$x(t) = \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) \cos(\omega_1 t) + \operatorname{sinc}^2\left(\frac{t}{2T}\right) \sin(\omega_1 t)$$

con $\omega_1/T \gg 2\pi$. Obtenga su equivalente paso bajo e identifique las partes en fase y cuadratura.

- P2.15 Las fluctuaciones en la frecuencia de oscilación de los relojes empleados en los procesos de muestreo y reconstrucción de señales en tiempo continuo afectan a la calidad de dichos procesos. En este ejercicio vamos a evaluar la influencia de este fenómeno.

Un modelo simplificado de señal muestreadora con este efecto es el siguiente

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - nT_s - \Delta \operatorname{sen} n \frac{2\pi}{m}\right)$$

donde T_s es el periodo nominal de muestreo, y Δ y m son los parámetros que definen las fluctuaciones. T_s y Δ son números reales, y m es un número entero. Obsérvese que $p(t)$ es una señal periódica.

Se pide:

- 15.1. Dibuje la señal $p(t)$ y determinar su periodo en función de los parámetros m y T_s .

- 15.2. Calcule la Transformada de Fourier de $p(t)$ para $m = 4$ y $0 \leq \Delta < T_s/2$.

- 15.3. Empleamos $p(t)$ para muestrear una señal $x(t)$ cuyo ancho de banda es W rad/s, mediante

$$x_p(t) = p(t) x(t)$$

. Determine el máximo valor de T_s que garantiza la reconstrucción perfecta de $x(t)$ a partir de $x_p(t)$ en las siguientes situaciones:

15.3.1. $m = 4$ y $0 < \Delta < T_s/2$.

15.3.2. $m = 4$ y $\Delta = 0$.

- P2.16 En el proceso de producción de un “*Compact Disc*” (CD) de audio, las fases de grabación y mezclado de las distintas fuentes sonoras se realizan generalmente con las señales muestreadas a 48 KHz ó a un múltiplo entero de esta frecuencia, mientras que el estándar de CD de audio especifica una frecuencia de muestreo de 44,1 KHz. Mediante la conexión en serie de combinaciones de interpoladores y muestreadores como los mostrados en la Figura 2.21, diseñe un sistema para cambiar la frecuencia de muestreo de 96 a 44,1 KHz empleando el menor número de interpoladores y diezmadores y con valores de L y M inferiores siempre a 10.

CAPÍTULO 3

TEORÍA DE LA PROBABILIDAD Y PROCESOS ESTOCÁSTICOS

La teoría de la probabilidad es, junto con la teoría de señales, uno de los dos pilares matemáticos sobre los que se asienta el análisis de sistemas de comunicaciones digitales. En este capítulo se presentan nociones básicas de probabilidad y procesos aleatorios. Se revisan los conceptos de variable aleatoria y procesos estocásticos y sus propiedades, en particular aquellas de interés en comunicaciones digitales.

3.1. PROBABILIDAD

Presentar de forma intuitiva el término “probabilidad” no es difícil porque se encuentra ya en el lenguaje cotidiano y es utilizado habitualmente por personas aún sin conocimientos matemáticos; sin embargo, su definición precisa y, sobre todo, su interpretación, se ha mantenido esquiva a lo largo del tiempo y todavía es objeto de discusión. El concepto de probabilidad está ligado a la realización (física o mental) de un experimento “aleatorio”, entendiéndose por tal un experimento cuyo resultado es desconocido (es decir, no predecible) por un observador. Suele ponerse el ejemplo del lanzamiento de un dado (no en vano la teoría de la probabilidad surgió originalmente en el campo de los juegos de azar): el resultado puede ser cualquier número entero entre 1 y 6, pero es *a priori* impredecible ni siquiera por el lanzador. La probabilidad es una medida de la incertidumbre que, para un observador, tiene el resultado de un experimento, y es, por tanto, una medida subjetiva: así, por ejemplo, el contenido de un mensaje enviado a través de un canal de comunicaciones digitales es completamente desconocido por el receptor antes de iniciarse la comunicación, pero no por el transmisor, que puede predecirlo con exactitud en la medida en que “conoce” el mensaje transmitido.

El desconocimiento puede ser total o parcial. Si consideramos el experimento “lanzar dos dados y sumar sus puntos”, cualquier resultado entre 2 ($1 + 1$) y 12 ($6 + 6$) es posible, pero también sabemos que el 7 es un resultado más “esperable” que el 2. Lo sabemos por la naturaleza del experimento (el 7 resulta de muchas combinaciones posibles de resultados

de cada dado, $1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4 = 4 + 3 = 5 + 2 = 6 + 1 = 7$, mientras que solamente una combinación produce el resultado 2, esto es, $1 + 1$) o por información estadística (por ejemplo, porque hayamos observado que realizaciones previas del mismo experimento en las mismas condiciones dieron 7 con más frecuencia que 2). También, el receptor del mensaje enviado por un transmisor puede desconocer completamente su contenido, pero tal desconocimiento puede reducirse al observar la señal que ha recibido. Se reducirá totalmente si puede reconocer el mensaje a partir de la señal recibida, o parcialmente, si la señal enviada por el transmisor ha sido enmascarada por efectos de ruido y distorsión durante la transmisión.

La probabilidad es pues, esencialmente, una medida de incertidumbre sobre el resultado del experimento y es, por tanto, dependiente de la cantidad de información disponible por el observador en cada momento. Para acercarnos a una definición más formal, se precisan varios elementos:

- Un espacio muestral, Ω , que es el conjunto de todos los resultados posibles del experimento aleatorio. En el ejemplo anterior de lanzar dos dados y sumar su resultado, $\Omega = \{2, 3, \dots, 12\}$.
- Un conjunto de sucesos, $\Phi = \{S, S \subset \Omega\}$. Un suceso es cualquier subconjunto de Ω ¹. Ejemplos de sucesos en el ejemplo de los dados son que la suma sea: 2, un número impar, un número menor que 8, etc. En total hay 2^{11} posibles sucesos.

Definimos ahora una medida de probabilidad Pr como toda función que, aplicada sobre cualquier suceso $S \subset \Omega$, devuelve un número real $Pr\{S\}$ que verifica las siguientes propiedades

$$P1. \quad 0 \leq Pr\{S\} \leq 1$$

$$P2. \quad Pr\{\emptyset\} = 0$$

$$P3. \quad Pr\{\Omega\} = 1$$

P4. Dado un conjunto finito (o infinito numerable) de sucesos $S_i \in \Phi$ disjuntos ($S_i \cap S_j = \emptyset$), se verifica

$$Pr \left\{ \bigcup_i S_i \right\} = \sum_i Pr\{S_i\} \quad (3.1)$$

¹Con frecuencia, Φ es el conjunto de todos los subconjuntos de Ω , que suele denotarse como $\Phi = 2^\Omega$. Sin embargo, desde un punto de vista matemático no es imprescindible que todos los subconjuntos de Ω estén en Φ , aunque en todo caso, deben cumplirse dos condiciones: (1) el complementario de un suceso debe ser también un suceso, y (2) cualquier unión finita o infinita numerable de sucesos debe ser un suceso. Cuando se verifican estas condiciones, se dice que Φ tiene estructura de σ -álgebra.

3.1.1. Asignación de probabilidades a sucesos

Puesto que toda función que verifica las propiedades anteriores es una medida de probabilidad, ¿quiere esto decir que cualquiera de estas funciones es una medida útil de incertidumbre sobre el resultado de cierto experimento? La respuesta es no.

Supongamos que el experimento aleatorio puede repetirse un número indefinido de veces, y que el resultado de cada experimento es independiente de los demás. Diremos que una probabilidad Pr es un buen modelo de incertidumbre para dicho experimento en la medida en que sea capaz de predecir con exactitud la frecuencia con la que se repiten los diferentes sucesos del experimento.

Es decir, Pr es una buena medida de incertidumbre sobre el resultado del experimento si dado cualquier suceso $S \subset \Omega$, tras N repeticiones del experimento, denominando N_s al número de veces que se produce algún resultado que está en S , el cociente N_s/N converge a $Pr\{S\}$ cuando N tiende a infinito.

Lo anterior permite aplicar una construcción matemática, la probabilidad, a la medida de regularidades en procesos físicos impredecibles, pero dicha aplicación no está exenta de dificultades. De hecho, la verificación experimental del ajuste de un modelo probabilístico a un experimento aleatorio es imposible, pues en la práctica no puede repetirse un experimento infinitas veces. Más aún, en ocasiones no es posible siquiera repetir el experimento, y la asignación de probabilidades debe apoyarse en ciertos supuestos acerca del modo en que se producen los resultados del experimento.

Ejemplo 3.1

Consideré el experimento consistente en lanzar un dado no cargado y mirar el resultado: un número entero entre 1 y 6. ¿Cómo asignar probabilidades al suceso “5”? La física del problema sugiere que, siendo un dado no cargado esencialmente simétrico, no hay razón para pensar que uno de los resultados tenga mayores oportunidades de producirse que el otro, lo que nos invita a hacer la asignación $Pr\{1\} = Pr\{2\} = \dots = Pr\{6\} = 1/6$. En apoyo de esta asignación está el hecho de que ha resultado ser razonablemente acertada con otros muchos dados anteriormente. Si, además, tenemos la oportunidad de ensayar el lanzamiento de este dado cierto número N de veces, podremos comprobar si, efectivamente, la frecuencia de “5” o de cualquier otro resultado se parece a $1/6$. Si es así, podemos confiar en la bondad de esta asignación. Pero, en todo caso, piénsese que ninguna de estas evidencias es definitiva a favor del modelo equiprobable frente a todos los posibles. Además, un dado real nunca es perfectamente simétrico, no todos los dados son exactamente iguales, e incluso la prueba con repeticiones del experimento puede cuestionarse: los lanzamientos causan desgastes del dado, de modo que cada nueva realización no es una repetición del experimento en las mismas condiciones que las anteriores. Con todo, el modelo equiprobable es simple y casi siempre bastante preciso, y puede aceptarse.

Nótese que, para definir una medida de probabilidad es preciso, en principio, asignar una probabilidad a todos los sucesos en Ω de acuerdo con las propiedades 1 a 4. En realidad, cuando cualquier suceso se puede construir por unión contable de los sucesos “atómicos” (es decir, los sucesos constituidos por un único resultado), la propiedad 4 simplifica enormemente el proceso de asignación.

Ejemplo 3.2

La asignación de probabilidades a los 6 resultados posibles del lanzamiento del dado permite

calcular un valor de probabilidad para cualquier otro suceso. Así, por ejemplo, suponiendo que la probabilidad de cada posible resultado es $1/6$, la probabilidad de que se obtenga un número par será

$$Pr\{\{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}\} = Pr\{2\} + Pr\{4\} + Pr\{6\} = \frac{1}{2} \quad (3.2)$$

En general, si el espacio muestral Ω es finito o infinito numerable, la asignación de una probabilidad a cada posible resultado (de acuerdo con las restricciones de que sean no negativas y sumen uno) permite calcular la probabilidad de cualquier otro suceso, por aplicación de la propiedad 4. Por el contrario, si Ω es infinito no numerable, este procedimiento no puede aplicarse, como veremos.

3.2. VARIABLES ALEATORIAS

Estrictamente hablando, variable aleatoria es toda aplicación de Ω en la recta real, que asigna a cada posible resultado un número. Dado el resultado $\xi \in \Omega$, la variable aleatoria X tomará un valor $X(\xi) \in \mathbb{R}$. En la práctica, la notación suele simplificarse y, de forma general, escribiremos X , omitiendo el argumento.

Mediante el uso de variables aleatorias, el espacio muestral original se proyecta sobre un subconjunto de la recta real, que llamaremos espacio muestral imagen.

Ejemplo 3.3

Un transmisor envía una secuencia de dígitos binarios (ceros y unos), $\{s[n], n = 0, \dots, N - 1\}$, a un receptor distante a través de un canal de comunicaciones digitales. A consecuencia de imperfecciones del canal, la secuencia de dígitos binarios detectada en recepción, $\{d[n], n = 0, \dots, N - 1\}$, es posiblemente diferente a la transmitida. Para evaluar el rendimiento de la comunicación, considere el experimento consistente en comparar las secuencias transmitida y recibida y determinar cuál de los resultados siguientes se ha producido: ξ_0 = “Hay errores de transmisión”, o bien ξ_1 = “No hay errores de transmisión”. Puede definirse la variable aleatoria Z dada por $Z(\xi_0) = 0$ y $Z(\xi_1) = 1$. De este modo, $Pr\{Z = 1\}$ es la probabilidad de que se haya producido algún error en la transmisión.

Si llamamos Ω' al espacio muestral imagen (es decir, $\Omega' = \{X(\xi), \xi \in \Omega\} \subset \mathbb{R}$), podemos distinguir entre:

- Variables aleatorias discretas: Ω' es discreto (es decir, finito o infinito numerable).
- Variables aleatorias continuas: Ω' es continuo, o contiene algún subconjunto continuo.

La diferencia entre variables aleatorias discretas y continuas es sustancial. Como hemos visto anteriormente, si el espacio muestral imagen es finito o infinito numerable, para caracterizar la variable aleatoria en términos probabilísticos es suficiente con asignar un valor de probabilidad a cada posible resultado (que, de acuerdo con la definición anterior, es también un suceso) respetando las propiedades 1 a 3, y calcular las probabilidades de los demás sucesos aplicando la propiedad 4. Lo último es posible porque puede construirse cualquier suceso mediante la unión contable de sucesos atómicos (esto es, sucesos formados por un

solo resultado posible). Sin embargo, si Ω' es continuo, aquellos sucesos que contengan un conjunto infinito y no numerable de resultados posibles no pueden construirse como unión contable de sucesos atómicos y, por tanto, no es posible calcular su probabilidad a partir de las probabilidades de los sucesos atómicos. Además, ¡la mayoría de los sucesos atómicos tienen probabilidad nula!

Cuando Ω' es continuo, suele preferirse caracterizar la variable aleatoria X a partir de los sucesos de la forma $\{X \leq x\}$. La función que devuelve la probabilidad de este suceso para cada valor de x se denomina función de distribución acumulada o, simplemente, *función de distribución*

$$F_X(x) \doteq Pr\{X \leq x\} \quad (3.3)$$

La función de distribución tiene las siguientes propiedades, que se deducen directamente de su definición:

P 1. $0 \leq F_X(x) \leq 1$

P 2. $F_X(\infty) = 1$

P 3. $F_X(-\infty) = 0$

P 4. $F_X(x)$ es una función monótona creciente ($F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$ si $x_1 < x_2$).

3.2.1. Distribución de probabilidades y función de densidad de probabilidad

Dada una variable aleatoria discreta X , se define su distribución de probabilidades (o simplemente distribución), que llamaremos $p_X(x)$, como aquella que, para cada posible valor x de X , devuelve su probabilidad. Así, por ejemplo,

$$p_X(3) = Pr\{X = 3\} \quad (3.4)$$

Obviamente, si X puede tomar los valores $\{x_i, 0 \leq i \leq M - 1\}$, resulta

$$\sum_{i=0}^{M-1} p_X(x_i) = 1 \quad (3.5)$$

Probabilidad y distribución de probabilidades son esencialmente lo mismo, aunque la primera se aplica a sucesos y la segunda a números. Si la variable es discreta, conociendo su distribución puede calcularse la probabilidad de cualquier suceso. Por el contrario, si la variable aleatoria es continua, la distribución de probabilidades no resulta útil, y suele recurrirse a la función de distribución acumulada o bien a su derivada, que se conoce como *función de densidad de probabilidad* (abreviadamente, fdp)

$$f_X(x) \doteq \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (3.6)$$

Las siguientes propiedades son una consecuencia inmediata de esta definición, y de las propiedades de la función de distribución enunciadas anteriormente:

$$\text{P 1. } f_X(x) \geq 0$$

$$\text{P 2. } F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(\alpha) d\alpha$$

$$\text{P 3. } \int_{-\infty}^{\infty} f_X(\alpha) d\alpha = 1$$

Además, la densidad de probabilidad define completamente una variable aleatoria, en el sentido de que permite calcular la probabilidad de cualquier suceso. Por ejemplo, la probabilidad del suceso $\{a < X \leq b\}$ se puede calcular teniendo en cuenta que el conjunto $\{X \leq b\}$ admite la partición

$$\{X \leq b\} = \{X \leq a\} \cup \{a < X \leq b\} \quad (3.7)$$

luego, en virtud de la Propiedad 4,

$$Pr\{X \leq b\} = Pr\{X \leq a\} + Pr\{a < X \leq b\} \quad (3.8)$$

y, por tanto,

$$Pr\{a < X \leq b\} = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(x) dx \quad (3.9)$$

De forma general, la probabilidad del suceso $\{X \in S\}$ se puede calcular como

$$Pr\{X \in S\} = \int_S f_X(x) dx \quad (3.10)$$

La propiedad (3.9) puede ayudarnos a interpretar la función $f_X(x)$: partiendo de la definición de derivada,

$$f_X(x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{F_X(x + \Delta) - F_X(x)}{\Delta} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{Pr\{x < X \leq x + \Delta\}}{\Delta} \quad (3.11)$$

la expresión final explica la denominación de “densidad de probabilidad” para $f_X(x)$.

Resumiendo, las variables aleatorias discretas pueden caracterizarse mediante su distribución de probabilidades, y las continuas mediante su función de densidad de probabilidad. Para completar el paralelismo entre variables discretas y continuas, puede definirse la función de probabilidad acumulada (o de distribución) de una variable discreta, dada por $F_X(x) = Pr\{X \leq x\} = \sum_{x_i \leq x} p_X(x_i)$. La función de distribución cumple $F_X(x_{\max}) = 1$, donde x_{\max} es el máximo valor posible de X (estrictamente hablando, el valor supremo).

Asimismo, las probabilidades pueden expresarse a partir de la función de distribución. Suponiendo $x_0 < x_1 < \dots < x_{M-1}$, puede escribirse $p_X(x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1})$.

3.2.2. Esperanza matemática

La media o esperanza matemática de la variable aleatoria discreta X de espacio muestral $\Omega = \{x_i, 0 \leq i \leq M - 1\}$ se define como

$$\mu_X = E\{X\} \doteq \sum_{i=0}^{M-1} x_i p_X(x_i) \quad (3.12)$$

La esperanza matemática también tiene una interpretación frecuencial. Supongamos, por ejemplo, que se observan N realizaciones $x^j, j = 0, \dots, N - 1$ de la variable aleatoria X ; el promedio de todas ellas será

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x^j \quad (3.13)$$

Agrupando los sumandos iguales, resulta

$$\bar{X} = \sum_{i=0}^{M-1} \frac{N_i}{N} x_i \quad (3.14)$$

siendo N_i el número de sumandos iguales a x_i . Dado que el cociente N_i/N se aproxima a $p_X(x_i)$ a medida que aumenta N , el promedio se aproxima a la media.

La esperanza matemática puede aplicarse a cualquier función de X ,

$$E\{g(X)\} = \sum_{i=0}^{M-1} g(x_i) p_X(x_i) \quad (3.15)$$

existiendo algunos casos particulares de especial interés:

- Valor cuadrático medio: $E\{X^2\}$
- Varianza: $\sigma_X^2 = E\{(X - \mu_X)^2\} = E\{X^2\} - \mu_X^2$
- Momento de orden n : $E\{X^n\}$
- Momento central de orden n : $E\{(X - \mu_X)^n\}$

De modo análogo se define la esperanza matemática de una variable aleatoria continua:

$$\mu_X = E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \quad (3.16)$$

y, en general,

$$E\{g(X)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx \quad (3.17)$$

Los casos particulares definidos anteriormente también son de aplicación a variables continuas.

3.2.3. Distribuciones de interés

A modo de ejemplo, se presentan en este apartado modelos de probabilidades y densidades de probabilidad muy comunes, y de especial interés en comunicaciones digitales.

Variables aleatorias discretas

Bernoulli. Una variable aleatoria X se dice de Bernoulli si su espacio muestral tiene solamente dos elementos: $\Omega = \{0, 1\}$, con probabilidades

$$\begin{aligned} p_X(0) &= 1 - p \\ p_X(1) &= p \end{aligned} \quad (3.18)$$

o, de forma más compacta:

$$p_X(k) = p^k(1 - p)^{1-k} \quad (3.19)$$

La ocurrencia o no de cierto suceso S en un experimento aleatorio puede modelarse como una variable de Bernoulli dada por

- $X(\text{"Se ha producido S"}) = 1$
- $X(\text{"No se ha producido S"}) = 0$

Así, por ejemplo, esta variable aleatoria resulta útil en comunicaciones para analizar sucesos del tipo “Se ha transmitido un bit de valor 1” o bien “El mensaje recibido contiene errores”.

Binomial. Supongamos que cierto experimento aleatorio se repite n veces (independientes), y desea evaluarse el número de veces que se produce cierto suceso S de probabilidad $Pr\{S\} = p$. Considerando la variable aleatoria X que toma el valor k si el suceso S se ha producido k veces, puede demostrarse (véase Problema P3.4) que, en tal caso, X es una variable aleatoria de espacio muestral $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, n\}$, con distribución de probabilidades

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \quad k = 0, \dots, n \quad (3.20)$$

siendo

$$\binom{n}{k} \doteq \frac{n!}{k!(n - k)!} \quad (3.21)$$

Su media es np (véase también Problema P3.4). Las distribuciones de esta forma se denominan binomiales. Nótese que la distribución binomial se reduce a la de Bernoulli cuando $n = 1$.

Nombre	Expresión	Rango	Media	Varianza
Bernoulli	$p_X(k) = p^k(1-p)^{1-k}$	$k \in \{0, 1\}$	p	$p(1-p)$
Binomial	$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$0 \leq k \leq n$	np	$np(1-p)$
Geométrica	$p_X(k) = p(1-p)^k$	$k \geq 0$	$(1-p)/p$	$(1-p)/p^2$
Poisson	$p_X(k) = e^{-\lambda} \lambda^k / k!$	$k \geq 0$	λ	λ

Cuadro 3.1. Resumen de las propiedades de distribuciones de variables aleatorias discretas. En todas las ecuaciones, p es un número real comprendido entre 0 y 1 y λ un número real positivo.

Geométrica. El espacio muestral de la distribución geométrica es el conjunto de todos los enteros no negativos. La distribución de probabilidades viene dada por

$$p_X(k) = (1-p)^k p \quad k \geq 0 \quad (3.22)$$

donde p es un parámetro de la distribución.

La distribución geométrica surge, por ejemplo, cuando se desea evaluar la primera vez que se produce un suceso S de probabilidad p en una sucesión infinita de realizaciones independientes de cierto experimento aleatorio. Su valor medio (que es el tiempo medio de aparición del suceso) puede calcularse como

$$E\{X\} = \sum_{k=0}^{\infty} kp_X(k) = p(1-p) \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} \quad (3.23)$$

Sabiendo que $k(1-p)^{k-1} = -\frac{d}{dp}(1-p)^k$, podemos escribir

$$\begin{aligned} E\{X\} &= -p(1-p) \frac{d}{dp} \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^k \\ &= -p(1-p) \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{p} - 1 \right) \\ &= \frac{1-p}{p} \end{aligned} \quad (3.24)$$

La distribución geométrica es útil en comunicaciones digitales para estimar el tiempo medio transcurrido antes de producirse un error en una transmisión digital.

Poisson. La variable aleatoria de Poisson también toma valores enteros no negativos, y su función de probabilidad se define como

$$p_X(k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \quad k \geq 0 \quad (3.25)$$

Su media y su varianza coinciden con λ (véase Problema P3.1).

La distribución de Poisson es una buena aproximación de la distribución binomial para $\lambda = np$, y para los valores de k del orden de λ .

En el Cuadro 3.1 se resumen estos ejemplos de distribuciones discretas, que se representan, para algunos valores de sus parámetros, en la Figura 3.1.

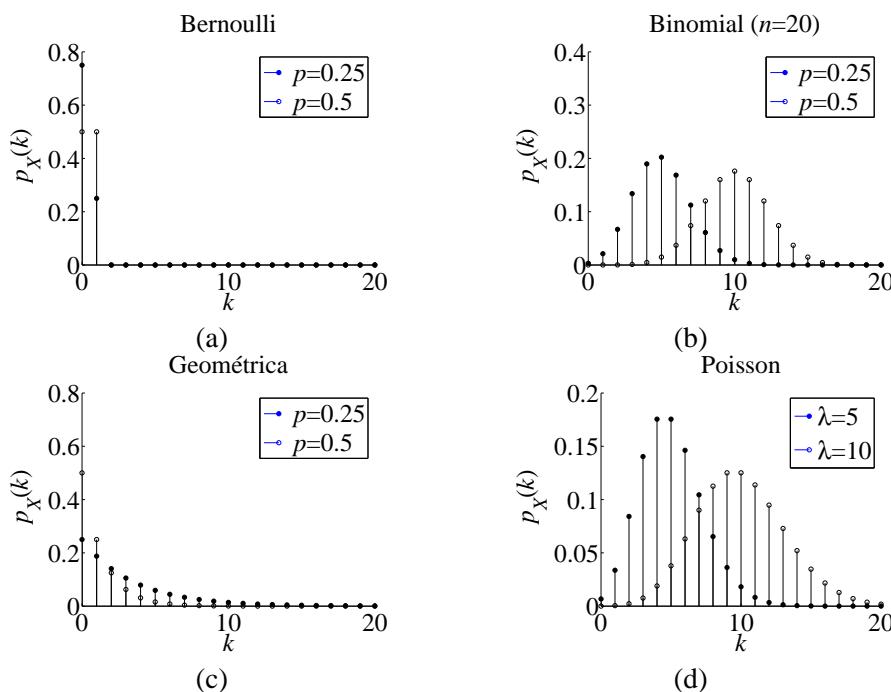


Figura 3.1. Algunas distribuciones discretas.

Variables aleatorias continuas

Uniforme. Una variable continua X se denomina uniforme si su función de densidad de probabilidad tiene la forma

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x < b \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (3.26)$$

Su media es

$$\mu_X = E\{X\} = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{a+b}{2} \quad (3.27)$$

y su varianza

$$\begin{aligned} E\{(X - \mu_X)^2\} &= \frac{1}{b-a} \int_a^b (x - \mu_X)^2 dx = \frac{1}{b-a} \left(\frac{(b-\mu_X)^3}{3} - \frac{(a-\mu_X)^3}{3} \right) \\ &= \frac{1}{12}(b-a)^2 \end{aligned} \quad (3.28)$$

Gausiana. Una variable continua X se dice gausiana o normal si su función de densidad de probabilidad tiene la forma

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (3.29)$$

Su media coincide con el valor del parámetro μ , y su varianza con σ^2 .

La distribución gausiana es un buen modelo para muchos procesos aleatorios presentes en la naturaleza. En particular, es un buen modelo del ruido en numerosos dispositivos eléctricos y electrónicos, y en sistemas de comunicaciones digitales. Su abundancia puede explicarse como una consecuencia del teorema central del límite, que se presentará en el Apartado 3.2.8.

La variable gausiana de media cero y varianza unidad se conoce como una variable normal unitaria. La probabilidad de que supere un valor x se calcula como

$$Pr\{X \geq x\} = \int_x^\infty f_X(\tau) d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau \quad (3.30)$$

La integral en la ecuación anterior no tiene solución analítica, sin embargo se dispone de la solución en forma de una función tabulada, conocida por función Q , que se define como

$$Q(x) \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau \quad (3.31)$$

Una alternativa al uso de tablas o aproximaciones numéricas de la función Q consiste en el establecimiento de cotas superiores e inferiores de la misma. Las cotas superiores más utilizadas son

$$Q(x) \leq \frac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad x \geq 0 \quad (3.32)$$

y

$$Q(x) < \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad x \geq 0 \quad (3.33)$$

y una inferior es

$$Q(x) > \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) e^{-\frac{x^2}{2}} \quad x \geq 0 \quad (3.34)$$

La Figura 3.2 muestra estas cotas junto a la función Q , donde podemos apreciar que tanto (3.33) como (3.34) son muy ajustadas para valores grandes de x . Observe además que el término dominante para valores grandes de x en las tres cotas es el mismo, $e^{-\frac{x^2}{2}}$.

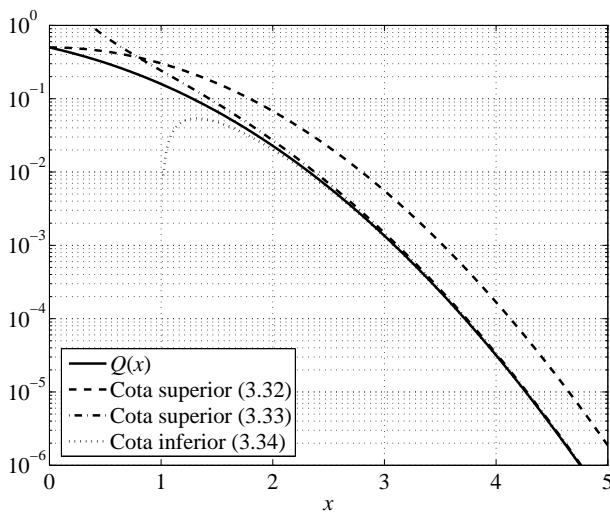


Figura 3.2. Función $Q(x)$ y varias cotas de la misma.

En la literatura podemos encontrar otras funciones relacionadas de manera directa con la función Q : una es la denominada *función error*, $\text{erf}(x) = 1 - 2Q(\sqrt{2}x)$ ($x \geq 0$), y otra es la *función error complementaria*, $\text{erfc}(x) = 1 - \text{erf}(x) = 2Q(\sqrt{2}x)$ ($x \geq 0$).

La función de distribución (acumulada) de una variable normal unitaria se expresa en función de Q como

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau = 1 - Q(x) \quad (3.35)$$

y también en función de erf y erfc para valores de x no negativos como $F_X(x) = 1 - Q(x) = \frac{1}{2}(\text{erf}(x/\sqrt{2}) + 1) = 1 - \frac{1}{2}\text{erfc}(x/\sqrt{2})$.

No es difícil aplicar la función Q al cálculo de probabilidades asociadas a variables gaussianas de media y varianza arbitrarias. Así, por ejemplo, dada una variable gaussiana X de media μ y varianza σ^2 , se comprueba que

$$\Pr\{X \geq x\} = Q\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \quad (3.36)$$

Weibull. Una variable Weibull de parámetros $c \geq 0$ y $\lambda \geq 0$ se caracteriza por una función de densidad de probabilidad

$$f_X(x) = c\lambda^c x^{c-1} e^{-(\lambda x)^c}, \quad x \geq 0 \quad (3.37)$$

que es la derivada de una función de distribución de expresión más sencilla:

$$F_X(x) = 1 - e^{-(\lambda x)^c}, \quad x \geq 0 \quad (3.38)$$

(originalmente, Weibull propuso esta distribución partiendo de (3.38)).

En el caso $c = 2$ y $\lambda = 1/\sqrt{R}$, la fdp en (3.37) se simplifica en una distribución conocida como Rayleigh

$$f_X(x) = \frac{2x}{R} e^{-\frac{x^2}{R}}, \quad x \geq 0 \quad (3.39)$$

Alternativamente, podemos definir una variable aleatoria de tipo Rayleigh a partir de dos variables gaussianas: si X_0 y X_1 son gaussianas independientes² de media cero y varianza σ^2 , la variable dada por $Y = \sqrt{X_0^2 + X_1^2}$ sigue una distribución Rayleigh con $R = 2\sigma^2$ (véase Problema P3.7). Variables de este tipo las encontramos con frecuencia en ciertos detectores en comunicaciones digitales.

Lognormal. La función densidad de probabilidad lognormal de parámetros μ y σ se define por

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}x} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x > 0 \quad (3.40)$$

Gamma. La variable aleatoria de tipo gamma de parámetros b y $\lambda > 0$ se define por

$$f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(b)} \lambda^b x^{b-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0 \quad (3.41)$$

donde $\Gamma(b) = \int_0^\infty \tau^{b-1} e^{-\tau} d\tau$ es la función Gamma.

Hay dos casos particulares de especial interés:

- **Distribución exponencial.** Es la distribución Gamma de parámetro $b = 1$, resultando

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0 \quad (3.42)$$

La distribución exponencial se utiliza frecuentemente para el modelado de la duración media de paquetes de datos.

- **Distribución Chi-cuadrado (χ^2).** Se dice que una variable aleatoria tiene una distribución χ^2 con r grados de libertad si se ajusta a una distribución Gamma con los parámetros $\lambda = 1/2$ y $b = r/2$. En este caso, la fdp en (3.41) se reduce a

$$f_X(x) = \frac{2^{-\frac{r}{2}}}{\Gamma(r/2)} x^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \quad 0 \leq x < \infty \quad (3.43)$$

También podemos definir una variable aleatoria de tipo χ^2 con r grados de libertad como la suma de los cuadrados de r variables aleatorias normales unitarias independientes: sean X_0, \dots, X_{r-1} variables aleatorias gaussianas de media nula y varianza unidad independientes entre sí; si definimos la variable aleatoria como $Y = X_0^2 + \dots + X_{r-1}^2$, esta posee una distribución χ^2 con r grados de libertad. A partir de aquí podemos también definir la distribución χ , que sería la que posee la variable $Z = \sqrt{Y}$. Note que

²El concepto de independencia de variables aleatorias se trata con detalle un poco más adelante, en la Página 120.

la distribución χ con dos grados de libertad ($r = 2$) es un caso particular de una distribución de Rayleigh. En los apartados siguientes aprenderemos el método general para obtener la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria que es función de otra.

En el Cuadro 3.2 se resumen estas distribuciones continuas, indicando la media y varianza de cada una de ellas en función del valor de sus parámetros. En las Figuras 3.3(a-h) se representan algunos ejemplos.

Nombre	$f_X(x)$	Rango	Media	Varianza
Uniforme	$\frac{1}{b-a}$	$a \leq x < b$	$\frac{1}{2}(a+b)$	$\frac{1}{12}(b-a)^2$
Gausiana	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$x \in \mathbb{R}$	μ	σ^2
Weibull	$c\lambda^c x^{c-1} e^{-(\lambda x)^c}$	$x \geq 0$	$\frac{1}{\lambda}\Gamma\left(1 + \frac{1}{c}\right) \doteq m$	$\frac{1}{\lambda^2}\Gamma\left(1 + \frac{2}{c}\right) - m^2$
Rayleigh	$\frac{2}{R}xe^{-\frac{x^2}{R}}$	$x \geq 0$	$\frac{\sqrt{\pi R}}{2}$	$(1 - \frac{\pi}{4})R$
Log-Normal	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}x}e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}$	$x \geq 0$	$e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$	$e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$
Gamma	$\frac{1}{\Gamma(b)}\lambda^b x^{b-1} e^{-\lambda x}$	$x \geq 0$	$\frac{b}{\lambda}$	$\frac{b}{\lambda^2}$
Exponencial	$\lambda e^{-\lambda x}$	$x \geq 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
χ^2	$\frac{2^{-r/2}}{\Gamma(r/2)}x^{r/2-1}e^{-x/2}$	$x \geq 0$	r	$2r$

Cuadro 3.2. Algunas funciones de densidad de probabilidad. El parámetro μ y los parámetros de la distribución uniforme son números reales arbitrarios. El resto deben ser números reales positivos.

3.2.4. Función de una variable aleatoria

Cualquier transformación sobre una variable aleatoria es, a su vez, otra variable aleatoria, caracterizable por su función de probabilidad o de densidad de probabilidad, según se trate de una variable discreta o continua, respectivamente.

Si X es una variable discreta de espacio muestral $\Omega_X = \{x_0, \dots, x_{M-1}\}$, $Y = g(X)$ es otra variable aleatoria de dominio $\Omega_Y = \{y_0 = g(x_0), \dots, y_{M-1} = g(x_{M-1})\}$. Además, si la transformación g es invertible, resulta

$$p_Y(y_i) = Pr\{Y = y_i\} = Pr\{X = x_i\} = p_X(x_i) \quad (3.44)$$

Si la transformación no es uno a uno (porque para uno o más x_i se verifica que $g(x_i) = g(x_k)$ con $k \neq i$), se comprueba fácilmente que

$$p_Y(y_i) = \sum_{k|g(x_k)=y_i} p_X(x_k) \quad (3.45)$$

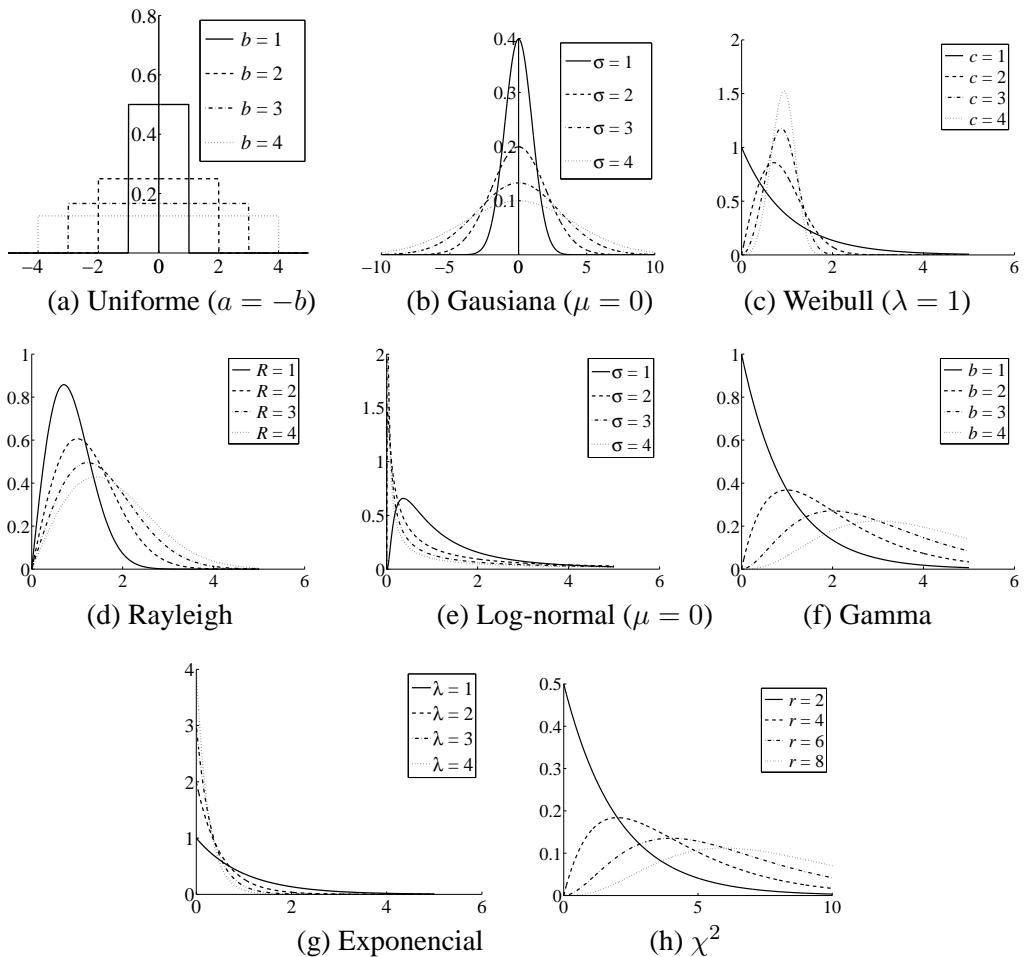


Figura 3.3. Algunas distribuciones continuas.

El análisis en el caso continuo es algo más complejo. Sea X una variable aleatoria continua e $Y = g(X)$. Entonces, puede escribirse

$$F_Y(y) = \Pr\{Y \leq y\} = \Pr\{g(X) \leq y\} \quad (3.46)$$

Supongamos, en primer lugar, que g es una función estrictamente creciente. En tal caso, puede definirse la función inversa $x = h(y) = g^{-1}(y)$, y (3.46) se reescriben como

$$F_Y(y) = \Pr\{X \leq h(y)\} = F_X(h(y)) \quad (3.47)$$

Por el contrario, si g es estrictamente decreciente, un razonamiento análogo conduce a

$$F_Y(y) = \Pr\{Y \leq y\} = \Pr\{X \geq h(y)\} = 1 - F_X(h(y)) \quad (3.48)$$

Derivando las Ecuaciones (3.47) o (3.48), según se trate de una función creciente o decreciente, resulta

$$f_Y(y) = f_X(h(y)) \left| \frac{dh(y)}{dy} \right| \quad (3.49)$$

Ejemplo 3.4

Si X es una variable aleatoria gaussiana de media μ y varianza σ^2 , la variable $Y = e^X$ tiene una distribución

$$f_Y(y) = f_X(\ln(y)) \left| \frac{1}{y} \right| = \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(y)-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad y > 0 \quad (3.50)$$

y, por tanto, es una variable lognormal.

Sabiendo que, para $y = g(x)$,

$$\left| \frac{dh(y)}{dy} \right| = \left| \frac{dg(x)}{dx} \right|^{-1} \quad (3.51)$$

(3.49) puede reescribirse como

$$f_Y(y) = f_X(x) \left| \frac{dg(x)}{dx} \right|^{-1} \Bigg|_{x=h(y)} \quad (3.52)$$

Esta expresión puede generalizarse para funciones g con tramos crecientes y decrecientes, de modo análogo al caso discreto: la fdp resulta de la suma

$$f_Y(y) = \sum_{x|g(x)=y} f_X(x) \left| \frac{dg(x)}{dx} \right|^{-1} \quad (3.53)$$

Ejemplo 3.5

Considere la variable aleatoria X con fdp $f_X(x)$ y la variable aleatoria $Y = g(X) = X^2$. La función $g(x)$ tiene como derivada $\frac{dg(x)}{dx} = 2x$ y un tramo decreciente ($x < 0$) y un tramo creciente ($x > 0$). En el tramo decreciente la función inversa es $x = h(y) = -\sqrt{y}$ y en el tramo creciente es $x = h(y) = \sqrt{y}$. Aplicando (3.53) obtenemos

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{-2x} \Bigg|_{x<0} + \frac{f_X(x)}{2x} \Bigg|_{x \geq 0} = \frac{f_X(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} + \frac{f_X(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} \quad (3.54)$$

Si X es una variable aleatoria gaussiana de media μ y varianza σ^2 ,

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}y\sigma} \left(e^{-\frac{(\sqrt{y}+\mu)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(\sqrt{y}-\mu)^2}{2\sigma^2}} \right) \quad (3.55)$$

Esperanza matemática

De acuerdo con la definición de esperanza matemática, la media de $Y = g(X)$ puede calcularse por dos procedimientos: como esperanza matemática de Y

$$E\{Y\} = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy \quad (3.56)$$

o bien como esperanza matemática de $g(X)$,

$$E\{g(X)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx \quad (3.57)$$

Cabe preguntarse si ambos procedimientos conducen al mismo resultado. Para simplificar, supondremos que g es una función estrictamente creciente. Llamando $h = g^{-1}$ a su inversa, y haciendo el cambio de variable $y = g(x)$, la integral (3.57) puede escribirse como

$$E\{g(X)\} = \int_{-\infty}^{\infty} y f_X(h(y)) \left(\frac{dg}{dx}(h(y)) \right)^{-1} dy \quad (3.58)$$

Sabiendo que

$$\left(\frac{dg}{dx}(h(y)) \right)^{-1} = \frac{dh(y)}{dy} \quad (3.59)$$

resulta

$$E\{g(X)\} = \int_{-\infty}^{\infty} y f_X(h(y)) \frac{dh(y)}{dy} dy \quad (3.60)$$

Por último, en virtud de (3.49) y teniendo en cuenta que, si g es estrictamente creciente, su inversa también lo es, de modo que $f_X(h(y)) \frac{dh(y)}{dy} = f_X(h(y)) | \frac{dh(y)}{dy} | = f_Y(y)$, resulta

$$E\{g(X)\} = E\{Y\} \quad (3.61)$$

Por tanto, el valor medio es independiente de la variable que se utilice para su cálculo. Esta propiedad es válida para cualquier función g , no necesariamente creciente, aunque la demostración general es algo farragosa, y se omite en este texto. La conclusión es válida, asimismo, para el caso discreto.

Un caso particular de interés es aquel en el que la relación entre las variables es lineal. Supongamos, por ejemplo, que la variable aleatoria continua X tiene media μ_X y varianza σ_X^2 , y se define la variable $Y = aX + b$, siendo a y b constantes conocidas. De acuerdo con (3.61), la media de Y es

$$\begin{aligned} \mu_Y &= E\{Y\} = E\{aX + b\} = \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b) f_X(x) dx = a \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx + b \\ &= a\mu_X + b \end{aligned} \quad (3.62)$$

y su varianza

$$E\{(Y - \mu_Y)^2\} = E\{(aX + b - a\mu_X - b)^2\} = E\{a^2(X - \mu_X)^2\} = a^2\sigma_X^2 \quad (3.63)$$

3.2.5. Variables aleatorias conjuntamente distribuidas

Considere el experimento consistente en lanzar dos dados y observar el resultado. Si estamos interesados en el valor que toma cada dado (como sucede, por ejemplo, en el juego del “Backgammon”), el “resultado” es la combinación de los resultados de cada dado, y su probabilidad puede medirse recurriendo a la probabilidad de la ocurrencia simultánea de dos resultados específicos. Por ejemplo, si X_1 es el resultado de lanzar el dado 1 y X_2 el resultado de lanzar el dado 2, podemos calcular las probabilidades de la configuración “ $X_1 = 6$ ”, “ $X_2 = 4$ ” como $Pr\{\text{“}X_1 = 6\text{”, “}X_2 = 4\text{”}\}$. De forma general, podemos definir la función de probabilidad conjunta $p_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$ que, para cada posible valor de x_1 y x_2 , devuelve la probabilidad del suceso “ $X_1 = x_1$ y $X_2 = x_2$ ”.

Variables discretas

De forma general, dada una colección de variables aleatorias $X = \{X_i, i = 0, \dots, N - 1\}$ de espacios muestrales $E_i \in \mathbb{R}$, respectivamente, se define la función de probabilidad conjunta de las variables en X como aquella función que devuelve, para cada configuración posible de valores de las variables, su probabilidad de ocurrencia simultánea. De forma general, denotaremos esta función como $p_{X_0, \dots, X_{N-1}}(x_0, \dots, x_{N-1})$. Asimismo, puede construirse el vector aleatorio

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{bmatrix}$$

en cuyo caso la función de probabilidad conjunta admite la representación $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$.

A partir de esta definición, no es difícil demostrar que la función de probabilidad asociada a un subconjunto de las variables en \mathbf{X} se puede obtener a partir de la probabilidad conjunta, mediante suma sobre todos los valores posibles de las otras variables. Esta operación suele denominarse *marginalización*. Así, por ejemplo,

$$p_{X_0, \dots, X_{N-2}}(x_0, \dots, x_{N-2}) = \sum_{x_{N-1} \in E_{N-1}} p_{X_0, \dots, X_{N-1}}(x_0, \dots, x_{N-2}, x_{N-1}) \quad (3.64)$$

o

$$p_{X_i}(x_i) = \sum_{x_0 \in E_0} \cdots \sum_{x_{i-1} \in E_{i-1}} \sum_{x_{i+1} \in E_{i+1}} \cdots \sum_{x_{N-1} \in E_{N-1}} p_{X_0, \dots, X_{N-1}}(x_0, \dots, x_{N-2}, x_{N-1}) \quad (3.65)$$

La media $\mu_{\mathbf{X}}$ de un vector aleatorio \mathbf{X} tiene una definición similar al de una variable escalar

$$\mu_{\mathbf{X}} = E\{\mathbf{X}\} = \sum_{x_0 \in E_0} \cdots \sum_{x_{N-1} \in E_{N-1}} \mathbf{x} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \quad (3.66)$$

Podemos observar que la media es un vector cuya componente i -ésima, $\mu_{\mathbf{X},i}$, viene dada por

$$\mu_{\mathbf{X},i} \doteq \sum_{x_0 \in E_0} \cdots \sum_{x_{N-1} \in E_{N-1}} x_i p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \sum_{x_i} x_i p_{X_i}(x_i) = E\{X_i\} \quad (3.67)$$

Es decir, $E\{\mathbf{X}\}$ es un vector de componentes $E\{X_i\}$.

De modo similar al caso escalar, el operador de esperanza matemática puede aplicarse a cualquier función de \mathbf{X} . En particular, se define la *matriz de covarianzas* de \mathbf{X} como

$$\mathbf{C} \doteq E\{(\mathbf{X} - \mu_{\mathbf{X}})(\mathbf{X} - \mu_{\mathbf{X}})^T\} = \sum_{x_0 \in E_0} \cdots \sum_{x_{N-1} \in E_{N-1}} (\mathbf{x} - \mu_{\mathbf{X}})(\mathbf{x} - \mu_{\mathbf{X}})^T p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \quad (3.68)$$

donde el superíndice T denota vector transpuesto. Se comprueba que la componente (i,j) de \mathbf{C} tiene la forma

$$\begin{aligned} C_{ij} &= \text{cov}(X_i, X_j) = E\{(X_i - \mu_{\mathbf{X},i})(X_j - \mu_{\mathbf{X},j})\} \\ &= \sum_{x_i} \sum_{x_j} (x_i - \mu_{\mathbf{X},i})(x_j - \mu_{\mathbf{X},j}) p_{X_i, X_j}(x_i, x_j) \end{aligned} \quad (3.69)$$

y se denomina covarianza cruzada o, simplemente, covarianza, de las variables X_i y X_j . Resulta inmediato comprobar que C_{ii} coincide con la varianza de X_i .

La matriz de covarianzas tiene dos propiedades importantes, que se deducen directamente de su definición:

P 1. Es simétrica: $\mathbf{C} = \mathbf{C}^T$

P 2. Es semidefinida positiva, dado que, para todo \mathbf{v} , se verifica que

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^T \mathbf{C} \mathbf{v} &= \mathbf{v}^T E\{(\mathbf{X} - \mu_{\mathbf{X}})(\mathbf{X} - \mu_{\mathbf{X}})^T\} \mathbf{v} \\ &= E\{\mathbf{v}^T (\mathbf{X} - \mu_{\mathbf{X}})(\mathbf{X} - \mu_{\mathbf{X}})^T \mathbf{v}\} \\ &= E\{((\mathbf{X} - \mu_{\mathbf{X}})^T \mathbf{v})^2\} \geq 0 \end{aligned} \quad (3.70)$$

Como consecuencia de estas propiedades, todos los autovalores de \mathbf{C} son no-negativos. Además, existe una base ortonormal de autovectores, $\{\mathbf{q}_i, i = 0, \dots, N-1\}$, con $\mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_j = \delta_{i-j}$ y $0 \leq i, j \leq N-1$, de modo que \mathbf{C} se puede factorizar como

$$\mathbf{C} = \mathbf{Q} \Delta \mathbf{Q}^T \quad (3.71)$$

donde $\mathbf{Q} \doteq (\mathbf{q}_0 | \dots | \mathbf{q}_{N-1})$ es una matriz ortogonal ($\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$) formada por los autovectores, y Δ es una matriz diagonal tal que Δ_{ii} es el autovalor correspondiente al autovector \mathbf{q}_i .

Variables continuas

La función de distribución conjunta de las variables $\{X_i, i = 0, \dots, N - 1\}$, se define como

$$F_{\mathbf{X}}(x_0, \dots, x_{N-1}) \doteq \Pr\{X_0 \leq x_0, \dots, X_{N-1} \leq x_{N-1}\} \quad (3.72)$$

y la función de densidad de probabilidad conjunta se define como

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \doteq \frac{\partial^N F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}{\partial x_0 \cdots \partial x_{N-1}} \quad (3.73)$$

Cuando $N = 1$, las definiciones anteriores se reducen a las ya conocidas para el caso escalar. Puede interpretarse la función de densidad de probabilidad como un valor proporcional a la probabilidad de que las componentes del vector aleatorio caigan dentro de los intervalos $[x_0, x_0 + dx_0], \dots, [x_{N-1}, x_{N-1} + dx_{N-1}]$.

$$P\{x_0 \leq X_0 \leq x_0 + dx_0, \dots, x_{N-1} \leq X_{N-1} \leq x_{N-1} + dx_{N-1}\} = f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})d\mathbf{x} \quad (3.74)$$

Partiendo de la fdp conjunta de \mathbf{X} , se puede calcular la función de distribución conjunta

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{x_0} \cdots \int_{-\infty}^{x_{N-1}} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{z})d\mathbf{z} \quad (3.75)$$

Asimismo, de forma general, la probabilidad de que una variable aleatoria caiga dentro de una región $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^N$ se puede calcular como

$$\Pr\{\mathbf{X} \in \mathcal{S}\} = \int_{\mathcal{S}} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})d\mathbf{x} \quad (3.76)$$

La propiedad dada por la Ecuación (3.64) también tiene una extensión directa al caso continuo, que ofrecemos sin demostración:

$$f_{X_0, \dots, X_{N-2}}(x_0, \dots, x_{N-2}) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})dx_{N-1} \quad (3.77)$$

Asimismo, se define la media de un vector aleatorio \mathbf{X} como

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}} \doteq E\{\mathbf{X}\} = \int_{\mathbb{R}^N} \mathbf{x} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})d\mathbf{x} \quad (3.78)$$

que es un vector de componentes $E\{X_i\}$.

La matriz de covarianzas se define por

$$\mathbf{C} \doteq E\{(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}})(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}})^T\} = \int_{\mathbb{R}^N} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}})(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}})^T f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})d\mathbf{x} \quad (3.79)$$

sus componentes son las covarianzas de las componentes de \mathbf{X} ,

$$C_{ij} = \text{Cov}(X_i, X_j) = E\{(X_i - \mu_{\mathbf{X},i})(X_j - \mu_{\mathbf{X},j})\} \quad (3.80)$$

y conserva las mismas propiedades que la matriz de covarianzas de un conjunto de variables discretas.

Variable gausiana multidimensional. Una función de densidad de probabilidad conjunta de especial interés en comunicaciones es la gausiana N -dimensional, dada por

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \sqrt{\det(\mathbf{C})}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})} \quad (3.81)$$

donde $\boldsymbol{\mu}$ es la media, \mathbf{C} la matriz de covarianzas y $\det(\mathbf{C})$ su determinante.

Ejemplo 3.6

La Figura 3.4 representa la función de densidad de probabilidad de una variable gausiana bidimensional de media

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (3.82)$$

y matriz de covarianzas

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0,6 \\ 0,6 & 0,7 \end{pmatrix} \quad (3.83)$$

Los cortes horizontales representan curvas de nivel elípticas. Los cortes longitudinal y transversal señalan las dos direcciones principales (de los ejes de las elipses). Puede demostrarse que estas direcciones se corresponden con las de los autovectores de la matriz de covarianzas y que, en este ejemplo, están dados, aproximadamente, por $\mathbf{q}_1 \approx (0,615, -0,788)^T$ y $\mathbf{q}_2 \approx (0,788, 0,615)^T$.

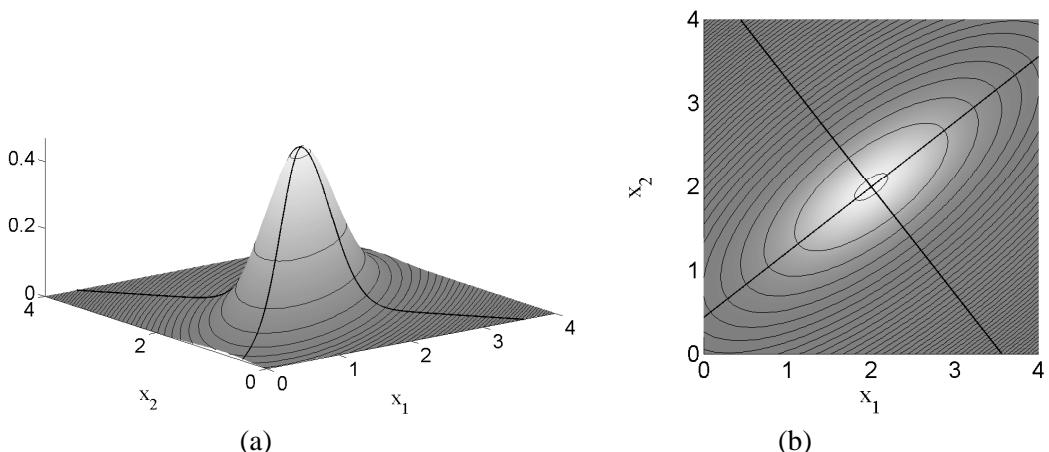


Figura 3.4. La Figura (a) representa la densidad de probabilidad de la variable gausiana bidimensional descrita en el Ejemplo 3.6. Los cortes transversales representan curvas de nivel elípticas. Se representan, asimismo, los cortes (por la media de la distribución) en las direcciones de los autovectores de la matriz de covarianzas. Desde la perspectiva azimutal de la Figura (b) se aprecia claramente que las direcciones de los autovectores se corresponden con los ejes principales de las secciones elípticas.

Si \mathbf{X} es un vector aleatorio gausiano, cualquier subconjunto de las componentes de \mathbf{X} posee una distribución gausiana. Así, por ejemplo,

$$f_{X_0, \dots, X_{N-2}}(x_0, \dots, x_{N-2}) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) dx_{N-1} \quad (3.84)$$

es una gausiana, cuyas media y matriz de covarianzas son las componentes correspondientes de $\boldsymbol{\mu}$ y \mathbf{C} .

Variables complejas. Cualquier variable aleatoria compleja $X = X_r + jX_i$ puede considerarse un conjunto de dos variables aleatorias reales, X_r y X_i , de modo que, para todo $x = x_r + jx_i \in \mathbb{C}$, $f_X(x) = f_{X_r, X_i}(x_r, x_i)$.

En particular, en virtud de (3.81) la densidad de probabilidad de una variable gausiana compleja de media nula y matriz de covarianzas

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \sigma_r^2 & \sigma_{ri} \\ \sigma_{ri} & \sigma_i^2 \end{pmatrix} \quad (3.85)$$

se puede expresar como

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_r^2\sigma_i^2 - \sigma_{ri}^2}} e^{\left(-\frac{1}{2}\frac{\sigma_i^2 x_r^2 + \sigma_r^2 x_i^2 - 2\sigma_{ri} x_r x_i}{\sigma_r^2\sigma_i^2 - \sigma_{ri}^2}\right)} \quad (3.86)$$

Funciones de variables aleatorias

Dado un vector aleatorio $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^N$, y un conjunto de N funciones de \mathbb{R}^N en \mathbb{R} , $\{g_0, g_1, \dots, g_{N-1}\}$, puede obtenerse otro vector aleatorio $\mathbf{Y} = \mathbf{g}(\mathbf{X}) \in \mathbb{R}^N$, tal que $\mathbf{g}(\mathbf{X}) \doteq (g_0(\mathbf{X}), g_1(\mathbf{X}), \dots, g_{N-1}(\mathbf{X}))$. Si \mathbf{g} es invertible y h_i denota la componente i -ésima de la función inversa de \mathbf{g} , el vector \mathbf{h} se construye a partir de $\{h_0, h_1, \dots, h_{N-1}\}$ de modo similar al vector \mathbf{g} .

Si \mathbf{X} es una variable discreta, (3.44) se generaliza de modo inmediato

$$p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = p_{\mathbf{X}}(\mathbf{h}(\mathbf{y})) \quad (3.87)$$

Si \mathbf{X} es continua con fdp conjunta $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$, puede demostrarse que

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = |\det(\mathbf{J})| f_{\mathbf{X}}(\mathbf{h}(\mathbf{y})) \quad (3.88)$$

siendo \mathbf{J} la matriz Jacobiana de la transformación \mathbf{h} , dada por

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_0(\mathbf{y})}{\partial y_0} & \dots & \frac{\partial h_0(\mathbf{y})}{\partial y_{N-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_{N-1}(\mathbf{y})}{\partial y_0} & \dots & \frac{\partial h_{N-1}(\mathbf{y})}{\partial y_{N-1}} \end{pmatrix} \quad (3.89)$$

y $\det(\mathbf{J})$ su determinante.

Ejemplo 3.7

Sea $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^N$ un vector aleatorio e $\mathbf{Y} = \mathbf{AX} + \mathbf{b}$, siendo \mathbf{A} una matriz cuadrada invertible y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^N$ un vector constante. La matriz Jacobiana de la transformación es $\mathbf{J} = \mathbf{A}^{-1}$ y la fdp de \mathbf{Y} se puede calcular aplicando directamente la expresión (3.88)

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = |\det(\mathbf{A}^{-1})| f_{\mathbf{X}}(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{b})) \quad (3.90)$$

3.2.6. Probabilidades condicionales

Hemos dicho que la probabilidad es una medida de la incertidumbre acerca del resultado de un experimento, y por tanto es subjetiva, en la medida en que depende de la información disponible por el observador que pueda tener alguna relación con el mismo. Por tanto, si el observador recibe nueva información, la “cantidad de incertidumbre” puede cambiar.

Se precisa, por tanto, alguna medida de la probabilidad de cierto suceso A condicionada por el conocimiento sobre la ocurrencia de otro suceso B . Matemáticamente, esto se escribe $Pr\{A|B\}$ y se define como

$$Pr\{A|B\} \doteq \frac{Pr\{A \cap B\}}{Pr\{B\}} \quad (3.91)$$

Cabe preguntarse si esta definición matemática expresa efectivamente lo que se desea medir. Supongamos que, tras realizar un número N (*suficientemente grande*) de veces el experimento aleatorio asociado a los sucesos A y B , se producen N_B ocurrencias de B y N_{AB} ocurrencias simultáneas de A y B . Si las probabilidades de los sucesos son consistentes con las observaciones, debe ser buena la aproximación $Pr\{A|B\} \approx N_{AB}/N_B$ (es decir, la probabilidad debe aproximarse a la proporción de veces que se ha observado A entre todas las observaciones en las que ha sucedido B). ¿Lo es? Sí, puesto que

$$Pr\{A|B\} = \frac{Pr\{A, B\}}{Pr\{B\}} \approx \frac{N_{AB}/N}{N_B/N} = \frac{N_{AB}}{N_B} \quad (3.92)$$

Por otra parte, de (3.91) se deduce que

$$Pr\{A \cap B\} = Pr\{A|B\}Pr\{B\} = Pr\{B|A\}Pr\{A\} \quad (3.93)$$

Esta expresión puede generalizarse para la intersección de n sucesos con la denominada *regla de la cadena de la probabilidad condicional*

$$Pr\{A_0 \cap A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}\} = Pr\{A_0\}Pr\{A_1|A_0\} \dots Pr\{A_{n-1}|A_1, A_2, \dots, A_{n-2}\} \quad (3.94)$$

Del mismo modo que hemos definido la función de probabilidad de una variable aleatoria a partir de las probabilidades de los sucesos atómicos (sucesos constituidos por un solo resultado posible), se define la función de probabilidad condicional de X dado Y (o mejor, de X dado $Y = y$) como

$$p_{X|Y}(x|y) \doteq \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)} \quad (3.95)$$

que, para cada valor de x y de y , devuelve la probabilidad condicionada correspondiente.

Asimismo, se define la función de densidad de probabilidad condicional de la variable continua X dada la variable continua Y

$$f_{X|Y}(x|y) \doteq \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \quad (3.96)$$

Ejemplo 3.8

Un ejemplo de probabilidades condicionales utilizado en transmisión digital es el modelo de *Canal binario simétrico* (Figura 3.5). Este modelo define las probabilidades con las que ocurren



Figura 3.5. Modelo de canal binario simétrico. El transmisor envía un bit $S=0$ ó 1 a través del canal. El receptor observa un bit $R=0$ ó 1, que, con probabilidad p , difiere de S .

los “0” y los “1” a la salida de un canal de comunicaciones, supuesto conocido el valor de los bits a su entrada. De esta forma se definen las variables aleatorias S y R asociadas al bit transmitido y recibido, respectivamente, relacionadas a través de las siguientes probabilidades

$$\begin{aligned} Pr\{R = 0|S = 0\} &= 1 - p \\ Pr\{R = 1|S = 0\} &= p \\ Pr\{R = 0|S = 1\} &= p \\ Pr\{R = 1|S = 1\} &= 1 - p \end{aligned} \quad (3.97)$$

Se observa que la probabilidad de que el canal produzca un error es p , independientemente del valor del bit transmitido, y de ahí el apelativo “simétrico”.

Teorema de la probabilidad total

El teorema de la probabilidad total permite calcular las probabilidades de cualquier suceso como suma de probabilidades condicionadas a los sucesos de una partición de cierto espacio muestral.

El teorema afirma que, si $A \subset \Omega$ es un suceso y $\{B_i, i = 0, \dots, N - 1\}$ una partición del espacio de sucesos, de modo que $B_i \cap B_j = \emptyset$, y $\bigcup_{i=0}^{N-1} B_i = \Omega$,

$$Pr\{A\} = \sum_{i=0}^{N-1} Pr\{A|B_i\}Pr\{B_i\} \quad (3.98)$$

La demostración es sencilla: por definición de probabilidad condicional,

$$\sum_{i=0}^{N-1} Pr\{A|B_i\}Pr\{B_i\} = \sum_{i=0}^{N-1} Pr\{A \cap B_i\} \quad (3.99)$$

Dado que los sucesos $\{A \cap B_i\}$ son disjuntos, puede aplicarse (3.1), de modo que

$$\sum_{i=0}^{N-1} Pr\{A \cap B_i\} = P \left\{ \bigcup_{i=0}^{N-1} (A \cap B_i) \right\} = P \left\{ A \cap \bigcup_{i=0}^{N-1} B_i \right\} = P\{A \cap \Omega\} = P\{A\} \quad (3.100)$$

El teorema de la probabilidad total tiene algunas extensiones inmediatas de interés:

- Si los sucesos son realizaciones de las variables aleatorias X e Y de espacios muestrales $\{x_i, i = 0, \dots, N-1\}$ e $\{y_i, i = 0, \dots, M-1\}$, respectivamente, la distribución de probabilidades de X se puede calcular como

$$p_X(x_i) = \sum_{j=0}^{M-1} p_{X|Y}(x_i|y_j)p_Y(y_j), \quad i = 0, \dots, N-1 \quad (3.101)$$

- Si la variable X es continua e Y discreta con espacio muestral $\{y_i, i = 0, \dots, M-1\}$, podemos aplicar el teorema sobre los sucesos de la forma $\{X \leq x\}$, obteniéndose

$$F_X(x) = \sum_{j=0}^{M-1} F_{X|Y}(x|y_j)p_Y(y_j) \quad (3.102)$$

y, derivando respecto de x ,

$$f_X(x) = \sum_{j=0}^{M-1} f_{X|Y}(x|y_j)p_Y(y_j) \quad (3.103)$$

- Si la variable X es discreta e Y continua, la suma anterior debe reemplazarse por una integral sobre todo su dominio

$$p_X(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X|Y}(x_i|y)f_Y(y)dy, \quad i = 0, \dots, N-1 \quad (3.104)$$

- Por último, si X e Y son continuas

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)dy \quad (3.105)$$

Ejemplo 3.9

Consideremos el canal binario simétrico descrito por las probabilidades condicionales en (3.97). Si la probabilidad de transmitir un “1” es q y la de transmitir un “0” es $1 - q$, las probabilidades de recibir un “0” y un “1” son

$$\begin{aligned} Pr\{R = 0\} &= Pr\{R = 0|S = 0\}Pr\{S = 0\} + Pr\{R = 0|S = 1\}Pr\{S = 1\} \\ &= (1-p)(1-q) + pq = 1 - p - q + 2pq \\ Pr\{R = 1\} &= Pr\{R = 1|S = 0\}Pr\{S = 0\} + Pr\{R = 1|S = 1\}Pr\{S = 1\} \\ &= p(1-q) + (1-p)q = p + q - 2pq \end{aligned} \quad (3.106)$$

(Obviamente, en este caso también podía haberse calculado $Pr\{R = 1\}$ como $1 - Pr\{R = 0\}$). Un ejercicio que se deja al lector, es comprobar que las probabilidades de los bits recibidos no dependen del canal en caso de que las probabilidades de transmitir un “1” y un “0” (q y $1 - q$ respectivamente) sean ambas igual a $1/2$.

Teorema de Bayes

El teorema de Bayes permite calcular las probabilidades de un suceso A condicionadas a otro B a partir de las probabilidades de B condicionadas a A .

El teorema afirma que, dados dos sucesos $A \subset \Omega$ y $B \subset \Omega$,

$$Pr\{A|B\} = \frac{Pr\{B|A\}Pr\{A\}}{Pr\{B\}} \quad (3.107)$$

De modo análogo al teorema de la probabilidad total, algunas extensiones del teorema de Bayes son inmediatas:

- Dadas dos variables aleatorias discretas X e Y

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{Y|X}(y|x)p_X(x)}{p_Y(y)} \quad (3.108)$$

- Si X es continua e Y discreta

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{Y|X}(y|x)f_X(x)}{p_Y(y)} \quad (3.109)$$

- Si X e Y son continuas

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{Y|X}(y|x)f_X(x)}{f_Y(y)} \quad (3.110)$$

El teorema de Bayes es consecuencia directa de la definición de probabilidad condicional, y su demostración es sencilla. Pese a su simplicidad, constituye una de las piedras angulares de la teoría de la probabilidad, y tiene una enorme utilidad práctica. La razón estriba en que, con frecuencia, Y es una variable observable, que representa el efecto de una causa asociada a la magnitud X que no es directamente observable, y se dispone de un modelo (probabilístico) de la forma en la que X “causa” Y : en definitiva, $p_{Y|X}$ es conocida. Dado que Y es observado y X no, en la práctica se plantea la necesidad de calcular $p_{X|Y}$. El teorema de Bayes resuelve el problema.

Ejemplo 3.10

Supongamos que el transmisor del canal binario simétrico descrito por las probabilidades condicionales en (3.97) envía un mensaje de un solo dígito binario que puede tomar valores “1” ó “0”, S . Al receptor llega el bit $R = 1$. ¿Cuál es la probabilidad de que S también tenga valor 1?

Aplicando la regla de Bayes, resulta

$$Pr\{S = 1|R = 1\} = \frac{Pr\{R = 1|S = 1\}Pr\{S = 1\}}{Pr\{R = 1\}} \quad (3.111)$$

Utilizando (3.97) y (3.106), resulta

$$Pr\{S = 1|R = 1\} = \frac{(1-p)q}{p(1-q) + (1-p)q} \quad (3.112)$$

Si los símbolos transmitidos son equiprobables ($q = 1/2$), la expresión anterior se reduce a

$$Pr\{S = 1|R = 1\} = 1 - p \quad (3.113)$$

Ejemplo 3.11

Supongamos que se transmite un símbolo $S \in \{0, 1\}$ a través de un canal de comunicaciones, que introduce ruido aditivo y gausiano, de modo que al receptor llega

$$R = S + N \quad (3.114)$$

siendo N ruido gausiano de media 0 y varianza 1, independiente del símbolo S . Supongamos que los símbolos son equiprobables, de modo que $Pr\{S = 0\} = Pr\{S = 1\} = 1/2$.

Tras la observación de R ($R = r$), la función de probabilidad de S puede calcularse como

$$p_{S|R}(s|r) = \frac{f_{R|S}(r|s)p_S(s)}{f_R(r)} \quad (3.115)$$

Si N es gausiana de media 0 y varianza 1, de acuerdo con (3.114),

$$f_{R|S}(r|s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r-s)^2}{2}} \quad (3.116)$$

y, de acuerdo con el teorema de la probabilidad total,

$$\begin{aligned} f_R(r) &= p_S(0)f_{R|S}(r|0) + p_S(1)f_{R|S}(r|1) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{r^2}{2}} + e^{-\frac{(r-1)^2}{2}} \right) \end{aligned} \quad (3.117)$$

De modo que

$$p_{S|R}(s|r) = \frac{e^{-\frac{(r-s)^2}{2}}}{e^{-\frac{s^2}{2}} + e^{-\frac{(r-1)^2}{2}}} \quad (3.118)$$

Así, por ejemplo, para $r = 1$, resulta

$$p_{S|R}(1|1) = \frac{1}{e^{-\frac{1}{2}} + 1} \approx 0,62 \quad (3.119)$$

Por tanto, aunque se reciba un valor $R = 1$, existe una probabilidad no despreciable de que $S = 0$ a causa del ruido.

Independencia de sucesos

Cuando la ocurrencia de B no altera la incertidumbre sobre A , se dice que A y B son estadísticamente independientes. Matemáticamente, esto se expresa como

$$Pr\{A|B\} = Pr\{A\} \quad (3.120)$$

Aunque existe cierta asimetría en la definición, pues parece indicar que B no tiene influencia sobre A , pero no lo contrario, observe que, si se verifica (3.120), entonces

$$Pr\{B|A\} = \frac{Pr\{A|B\}Pr\{B\}}{Pr\{A\}} = Pr\{B\} \quad (3.121)$$

lo que indica que A tampoco tiene influencia sobre B . Por otra parte, combinando (3.93) y (3.120) se deduce que

$$Pr\{A, B\} = Pr\{A|B\}Pr\{B\} = Pr\{A\}Pr\{B\} \quad (3.122)$$

Por su simetría, la (3.122) suele utilizarse como definición equivalente de independencia. A partir de ella se pueden deducir (3.120) y (3.121) de modo inmediato.

Independencia de variables aleatorias

Por extensión de la independencia de sucesos, diremos que dos variables aleatorias X e Y son independientes si $p_{X|Y}(x|y) = p_X(x)$ para cualesquiera valores $x \in \Omega_X$ de X e $y \in \Omega_Y$ de Y ³.

En general, diremos que N variables aleatorias discretas X_i , $i = 0, \dots, N - 1$ son independientes si su función de probabilidad puede factorizarse en la forma

$$p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \prod_{i=0}^{N-1} p_{X_i}(x_i) \quad (3.123)$$

Si las variables son continuas, diremos que son independientes si

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \prod_{i=0}^{N-1} f_{X_i}(x_i) \quad (3.124)$$

Integrando a ambos lados de la ecuación anterior respecto de cualesquiera variables en todo su dominio de integración, se comprueba que la independencia de todas las variables aleatorias X_i , $i = 0, \dots, N - 1$, implica la independencia de cualquier subconjunto de ellas. En particular, las variables son independientes dos a dos: X_i es independiente de X_j , para todo $j \neq i$, $0 \leq i, j \leq N - 1$.

³Estrictamente hablando, para cualquier valor de y de probabilidad no nula y para cualquier valor de x .

Por otra parte, también por integración de la Ecuación (3.124), resulta

$$\int_{-\infty}^{x_0} \cdots \int_{-\infty}^{x_{N-1}} f_{\mathbf{X}}(z) dz_0 \cdots dz_{N-1} = \prod_{i=0}^{N-1} \int_{-\infty}^{x_i} f_{X_i}(z_i) dz_i \quad (3.125)$$

luego

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \prod_{i=0}^{N-1} F_{X_i}(x_i) \quad (3.126)$$

Por tanto, si las variables continuas X_i , $i = 0, \dots, N - 1$, son independientes, su función de distribución también es factorizable como un producto de funciones de una sola variable. Lo mismo sucede con la función de probabilidad acumulada en el caso discreto.

Por último, multiplicando ambos lados de (3.124) por $x_0 \cdots x_{N-1}$, e integrando el resultado, se demuestra que

$$E \left\{ \prod_{i=0}^{N-1} X_i \right\} = \prod_{i=0}^{N-1} E\{X_i\} \quad (3.127)$$

expresión que también es válida para variables discretas.

De forma general, si \mathbf{X} e \mathbf{Y} son vectores aleatorios independientes (de dimensiones posiblemente diferentes), cualquier función de \mathbf{X} es independiente de cualquier función de \mathbf{Y} .

Ejemplo 3.12

Supongamos que, para aumentar la fiabilidad de una comunicación, el transmisor del canal binario simétrico descrito por las probabilidades condicionales en (3.97) envía tres veces el bit S , componiendo el mensaje $\mathbf{S} = (S, S, S)$, recibiéndose $\mathbf{R} = (1, 1, 0)$. Suponiendo que los efectos del canal son independientes de un bit a otro, es decir

$$p_{\mathbf{R}|S}((1, 1, 0)|S) = p_{R_0|S}(1|S)p_{R_1|S}(1|S)p_{R_2|S}(0|S) \quad (3.128)$$

resulta

$$p_{\mathbf{R}|S}((1, 1, 0)|S) = Sp(1-p)^2 + (1-S)(1-p)p^2 \quad (3.129)$$

Esta expresión permite determinar, tras observar \mathbf{R} , la probabilidad de que $S = 1$, ya que

$$p_{S|\mathbf{R}}(1|(1, 1, 0)) = \frac{p_{\mathbf{R}|S}((1, 1, 0)|1)p_S(1)}{p_{\mathbf{R}}(1, 1, 0)} \quad (3.130)$$

Sabiendo que

$$p_{\mathbf{R}}(1, 1, 0) = p_{\mathbf{R}|S}((1, 1, 0)|1)p_S(1) + p_{\mathbf{R}|S}((1, 1, 0)|0)p_S(0) \quad (3.131)$$

podemos combinar las tres ecuaciones anteriores, obteniendo

$$p_{S|\mathbf{R}}(1|(1, 1, 0)) = \frac{q(1-p)}{q(1-p) + (1-q)p} \quad (3.132)$$

En particular, para $q = 1/2$ (que se corresponde con una transmisión de símbolos equiprobables), se obtiene $p_{S|\mathbf{R}}(1|(1, 1, 0)) = 1-p$. Gracias a la redundancia introducida, el receptor puede saber que, pese a haberse producido un error en el tercer bit, la probabilidad de que $S = 1$ es mayor que la de $S = 0$ (suponiendo, claro está, que $p < 1/2$).

Suma de variables independientes

Supongamos que X_1 y X_2 son variables aleatorias independientes, y sea

$$Y = X_1 + X_2 \quad (3.133)$$

Podemos calcular la fdp de Y aplicando el teorema de la probabilidad total,

$$f_Y(y) = \int f_{Y|X_1}(y|x_1)f_{X_1}(x_1)dx_1 \quad (3.134)$$

Ahora bien, en virtud de la independencia de X_1 y X_2 ,

$$f_{Y|X_1}(y|x_1) = f_{X_2|X_1}(y-x_1|x_1) = f_{X_2}(y-x_1) \quad (3.135)$$

por tanto

$$f_Y(y) = \int f_{X_2}(y-x_1)f_{X_1}(x_1)dx_1 = f_{X_1}(y)*f_{X_2}(y) \quad (3.136)$$

De forma general, la fdp de la suma de n variables aleatorias independientes será la convolución de sus funciones de densidad de probabilidad.

Ejemplo 3.13

Si X_1 y X_2 son variables gausianas de medias nulas y varianzas σ_1^2 y σ_2^2 , se tiene, aplicando (3.136), que

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2}z^2\right)} e^{\left(-\frac{1}{2\sigma_2^2}(y-z)^2\right)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}((\sigma_1^2+\sigma_2^2)z^2 - 2\sigma_1^2yz + \sigma_1^2y^2)\right)} dz \end{aligned} \quad (3.137)$$

Tras algunas manipulaciones algebraicas sobre el exponente, la expresión anterior puede escribirse como

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left(z - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}y\right)^2 - \frac{y^2}{2\sigma_1^2+2\sigma_2^2}\right)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{\left(-\frac{y^2}{2\sigma_1^2+2\sigma_2^2}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left(z - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}y\right)^2\right)} dz \end{aligned} \quad (3.138)$$

Identificando el integrando como una función gausiana (salvo por una constante), resulta

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} e^{\left(-\frac{y^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}\right)} \quad (3.139)$$

Por tanto, la suma de dos variables gausianas independientes también es gausiana de media nula y varianza igual a la suma de las varianzas individuales. En general, aunque X_1 y X_2 no sean independientes, su suma es también gausiana (véase Problema P3.10).

Independencia e Incorrelación

Se dice que las variables aleatorias X e Y están incorrelacionadas si $\text{cov}(X, Y) = 0$. Incorrelación e independencia son conceptos relacionados: si X e Y son variables independientes de medias μ_X y μ_Y , entonces, aplicando (3.127), obtenemos

$$\text{cov}(X, Y) = E\{(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\} = E\{X - \mu_X\}E\{Y - \mu_Y\} = 0 \quad (3.140)$$

por tanto, si X e Y son independientes, también están incorrelacionadas. Lo contrario no es cierto de forma general (véase Problema P3.11), aunque sí en algunos casos particulares de interés. Por ejemplo, si las variables X e Y conjuntamente gausianas están incorrelacionadas, su matriz de covarianzas es diagonal, de modo que

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x, y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y} e^{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}-\frac{(y-\mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} e^{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y} e^{-\frac{(y-\mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2}} = f_X(x)f_Y(y) \end{aligned} \quad (3.141)$$

y, por tanto, X e Y son también independientes.

Por último, si las variables $\{X_i, i = 0, \dots, N-1\}$, de medias μ_i y varianzas σ_i^2 , están incorrelacionadas y consideramos la variable suma:

$$S = \sum_{i=0}^{N-1} X_i \quad (3.142)$$

la varianza de S es

$$\sigma_S^2 = \sum_{i=0}^{N-1} \sigma_i^2 \quad (3.143)$$

Por tanto, la varianza de una suma de variables aleatorias incorrelacionadas es igual a la suma de sus varianzas.

3.2.7. Distribuciones mixtas

Considere la variable aleatoria X cuyo valor depende a su vez del resultado de la variable binaria B , de modo que

- Si $B = 0$, X es una variable binaria de valores 0 y 1 equiprobables.
- Si $B = 1$, X es una variable gausiana de media 0 y varianza 1.

Observe que, en función del valor de B , X es una variable aleatoria continua o discreta. Por esta razón, la caracterización de la variable X no es inmediata. En principio, podemos escribir:

$$p_{X|B}(x|0) = \frac{1}{2} \quad x = 0, 1 \quad (3.144)$$

$$f_{X|B}(x|1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad x \in \mathbb{R} \quad (3.145)$$

pero, en tal caso, se precisan dos modelos: uno discreto, dado por la función de probabilidad $p_{X|B}(x|0)$, y otro continuo, dado por la función de densidad de probabilidad $f_{X|B}(x|1)$. ¿Es posible caracterizar X mediante un único modelo probabilístico?

Para responder a esta pregunta, hay que tener en cuenta que, en principio, X puede tomar valores en un rango continuo (a lo largo de la recta real) y por tanto no puede caracterizarse mediante una función discreta de probabilidad. Busquemos, por tanto, una densidad de probabilidad, $f_X(x)$. Para ello, aplicando el teorema de probabilidad total, resulta

$$f_X(x) = f_{X|B}(x|0)p_B(0) + f_{X|B}(x|1)p_B(1) \quad (3.146)$$

Observe que, mientras que $f_{X|B}(x|1)$ es conocido, $f_{X|B}(x|0)$ no lo es. Sin embargo, por definición de densidad de probabilidad, podemos escribir

$$f_{X|B}(x|0) = \frac{dF_{X|B}(x|0)}{dx} \quad (3.147)$$

siendo

$$F_{X|B}(x|0) = Pr\{X \leq x|B = 0\} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1/2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases} \quad (3.148)$$

Es decir, la distribución acumulada de X dado $B = 0$ es una función escalonada y, por tanto, discontinua, cuya derivada, de acuerdo con lo visto en el capítulo anterior, es una función generalizada:

$$f_{X|B}(x|0) = \frac{1}{2}\delta(x) + \frac{1}{2}\delta(x - 1) \quad (3.149)$$

luego

$$f_X(x) = \left(\frac{1}{2}\delta(x) + \frac{1}{2}\delta(x - 1) \right) p_B(0) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}p_B(1) \quad (3.150)$$

La Figura 3.6 representa la función de densidad de probabilidad y la función de distribución, para este caso.

De forma general, es posible caracterizar variables aleatorias discretas mediante funciones de densidad de probabilidad definidas sobre espacios continuos, siempre que incluyan en su dominio el conjunto muestral de la variable. Así, por ejemplo, si la variable A toma valores $\{a_1, a_2, \dots, a_N\} \in \mathbb{R}$ con probabilidades p_1, p_2, \dots, p_N , respectivamente, su función de densidad de probabilidad viene dada por

$$f_A(a) = \sum_{i=1}^N p_i \delta(a - a_i) \quad (3.151)$$

El uso de funciones de densidad de probabilidad para caracterizar variables discretas permite, como hemos visto, caracterizar variables mixtas, que pueden ser condicionalmente continuas o discretas.

Ejemplo 3.14

En algunos procesos de transmisión digital se presentan efectos esporádicos de ruido aditivo y gausiano: si denotamos el ruido en cierto instante mediante la variable R , podemos expresar esto matemáticamente diciendo que:

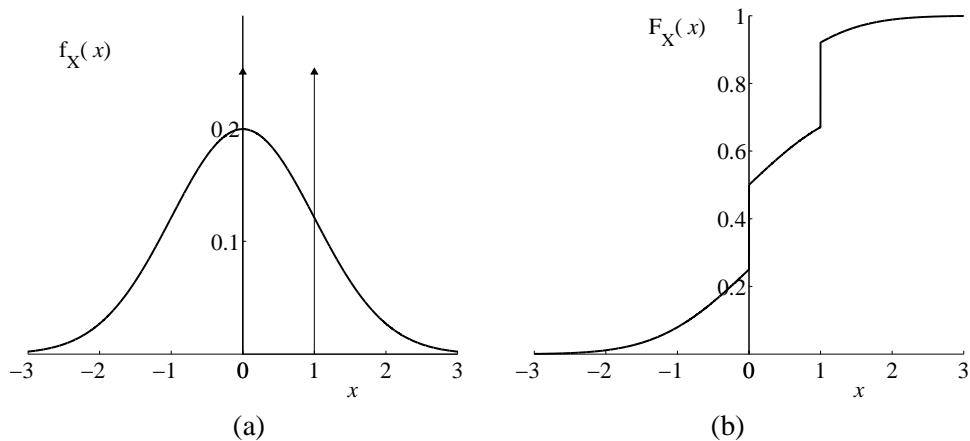


Figura 3.6. Función de densidad de probabilidad mixta (a) y su función de distribución (b).

- Con probabilidad p , $R = 0$
- Con probabilidad $1 - p$, R es una muestra de ruido gausiano de media 0 y varianza σ^2

Por analogía con el caso discutido al comienzo de este apartado, se comprueba que

$$f_R(r) = p\delta(r) + (1 - p) \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \right) \quad (3.152)$$

Una consecuencia importante de caracterizar las variables discretas mediante funciones de densidad de probabilidad es que muchas conclusiones obtenidas para variables continuas a partir de propiedades de su densidad de probabilidad, pueden extenderse de modo inmediato a variables discretas.

3.2.8. Teorema central del límite

Dado un conjunto de variables aleatorias, X_1, X_2, \dots, X_N , independientes e idénticamente distribuidas (esto es, con la misma fdp), de media μ y varianza σ^2 , su suma

$$S_N = \sum_{i=1}^N X_i \quad (3.153)$$

es una variable aleatoria de media $N\mu$ y varianza $N\sigma^2$. El teorema central del límite demuestra que, si las variables X_i son continuas, la fdp de su suma tiende a una gausiana, de modo que, para valores grandes de N , es válida la aproximación

$$f_{S_N}(s) \approx \frac{1}{\sqrt{N\sigma^2 2\pi}} e^{-\frac{(s-N\mu)^2}{2N\sigma^2}} \quad (3.154)$$

También suele expresarse en función de la suma normalizada: la variable $Y_N = (S_N - N\mu)/(\sqrt{N}\sigma)$ tiende a una gausiana de media 0 y varianza 1:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} f_{Y_N}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \quad (3.155)$$

Si las variables X_i tienen distribuciones diferentes, de medias μ_i y varianzas σ_i^2 (en cuyo caso S_N es una variable de media $\mu = \sum_{i=1}^N \mu_i$ y varianza $\sigma^2 = \sum_{i=1}^N \sigma_i^2$), el teorema también se cumple siempre que las varianzas σ^2 sean comparables (es decir, si σ_i^2/σ^2 tiende a 1 a medida que N aumenta). Si las variables son discretas, la convergencia de las fdp no se produce, pero sí convergen las funciones de distribución.

El término “central” se debe a que la convergencia se produce en torno a la media de la distribución. En la práctica, la convergencia lejos de la media es mucho más lenta, y son necesarios valores mayores de N para que la aproximación (3.154) sea válida (véase Figura 3.7).

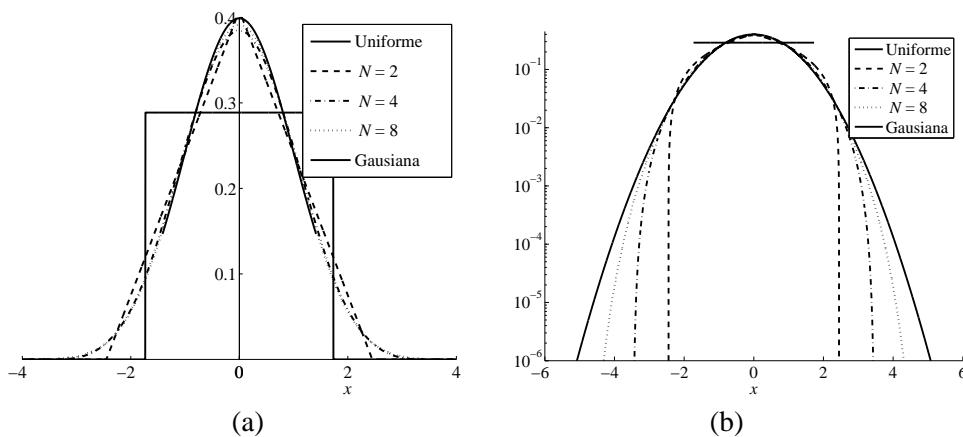


Figura 3.7. Convergencia de la suma de variables uniformes hacia una gausiana. La Figura (a) representa la fdp de una suma de N variables aleatorias independientes y de varianza unidad, para N igual a 2, 4 y 8. La Figura (b) representa las mismas distribuciones en escala logarítmica, poniendo de manifiesto que, en términos relativos, la convergencia es más lenta lejos de la media de la distribución.

El teorema central del límite explica la abundancia de procesos gausianos en la naturaleza, como los procesos de ruido en comunicaciones digitales, que son, con frecuencia, resultado de la contribución de numerosas fuentes de ruido independientes.

3.3. PROCESOS ESTOCÁSTICOS

Considere que el experimento “lanzar el dado y observar el resultado” se realiza repetidas veces. Podemos entonces construir la secuencia de variables aleatorias $\{X[n], n = 0, 1, \dots\}$ tal que, para un valor de n , $X[n]$ es la variable aleatoria asociada a la repetición

n -ésima del experimento. Una secuencia de variables aleatorias es un caso particular de *proceso estocástico*, y cada posible resultado una *realización del proceso estocástico*.

Un proceso estocástico es, en realidad, algo más general que una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas descrita anteriormente: se denomina proceso estocástico *en tiempo discreto* a toda secuencia $X[n]$ de variables aleatorias, donde n puede tomar, en principio, cualquier valor entero. Asimismo, diremos que $X(t)$ es un proceso estocástico *en tiempo continuo* si, para cada valor de $t \in \mathbb{R}$, $X(t)$ es una variable aleatoria⁴.

Es importante observar que el carácter continuo en el tiempo de un proceso estocástico no hace referencia a las variables aleatorias que lo forman, sino a su variable independiente. Así, por ejemplo, las variables $X(t)$ de un proceso en tiempo continuo pueden ser discretas, continuas o mixtas, o incluso pueden ser discretas para algunos valores de t y continuas para otros.

Ejemplo 3.15

La Figura 3.8 muestra 3 realizaciones del proceso en tiempo discreto $X[n] = a_n$, en el que las variables aleatorias a_n son independientes y siguen una distribución exponencial de parámetro $\lambda_n = 1/(n+1)$. $X[n]$ es un proceso en tiempo discreto de variables continuas.

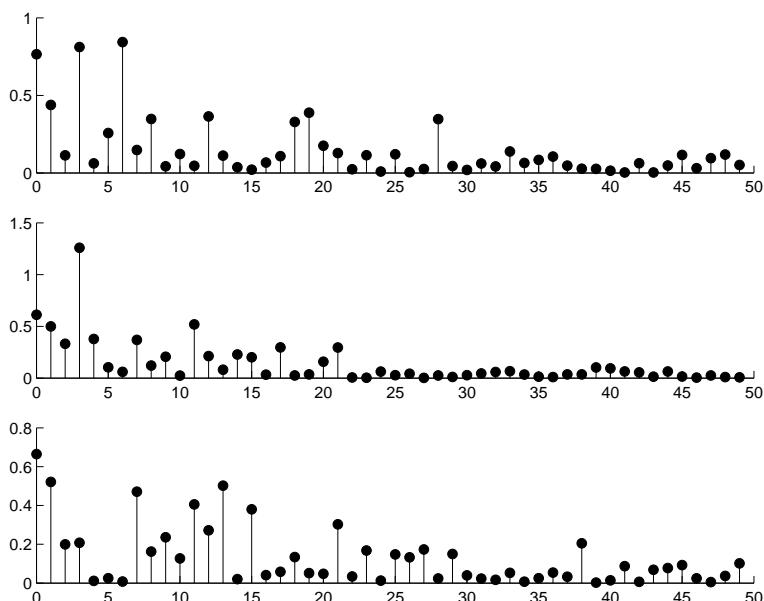


Figura 3.8. 3 realizaciones del proceso $X[n]$ descrito en el Ejemplo 3.15

⁴Obsérvese que utilizaremos la notación $X(t)$ (o $X[n]$) para representar al mismo tiempo el proceso estocástico y la variable aleatoria de dicho proceso en el instante t (o n). El contexto indicará, en cada momento, si nos referimos a uno o a otra.

Los procesos estocásticos constituyen, junto con las variables aleatorias, las *herramientas para modelar la incertidumbre inherente a todo proceso de comunicación* (de no existir incertidumbre en el receptor, no existiría la necesidad de la comunicación).

Pensemos, por ejemplo, que queremos transmitir una alocución que registramos con la ayuda de un micrófono. Antes de que se produzca, desconocemos la forma de onda exacta que registrará el micrófono y, por lo tanto, no podemos diseñar adecuadamente el sistema de transmisión (ancho de banda necesario, potencia de la señal, etc.). En este caso consideramos el proceso $X(t)$ como cualquier alocución que podría registrar el micrófono, y la señal concreta que registramos, $x(t)$, una realización de $X(t)$. Ejemplos como este podemos encontrarlos fácilmente en cualquier sistema de comunicaciones analógicas o digitales. En lo sucesivo, siempre que necesitemos distinguir los procesos de sus realizaciones denotaremos, como ahora, los procesos en mayúscula ($X(t)$) y sus realizaciones en minúscula ($x(t)$).

Los procesos estocásticos, para las comunicaciones, no son un fin en sí mismo, sino un modelo que nos permite tratar y analizar señales que no conocemos, pero de las que podemos obtener información probabilística. En general, los procesos estocásticos son un modelo útil para cualquier señal en tiempo continuo o en tiempo discreto que desconocemos total o parcialmente (recordemos que conocer una señal implica saber la totalidad de sus valores desde $t = -\infty$ hasta $t = \infty$). Sin embargo, la obtención de la información probabilística antes mencionada es en sí un problema en el que puede ayudarnos el propio modelo de procesos estocásticos. Con frecuencia disponemos de una única realización, $x(t)$, a partir de la cual debemos obtener la información probabilística (en otras palabras, no podemos “lanzar el dado” tantas veces como queramos). Bajo ciertas hipótesis que veremos más adelante (estacionariedad y ergodicidad del proceso), podemos emplear los valores de una realización $x(t)$ entre $t = -\infty$ y $t = \infty$ como distintas realizaciones de la variable aleatoria $X(t)$ para un valor concreto de t con el propósito de realizar medidas sobre $X(t)$.

3.3.1. Caracterización de procesos estocásticos

Ejemplo 3.16

Imaginemos que, para estimar el tiempo de vida medio de una bombilla, su fabricante decide encender 10.000 bombillas simultáneamente, y esperar a que todas ellas se fundan. Podemos definir, en tal caso, el proceso estocástico X tal que, $X(t)$ representa el número de bombillas que permanecen encendidas en el instante t .

Tenemos, por tanto, un proceso estocástico en tiempo continuo de variables discretas (que sólo pueden tomar valores enteros entre 0 y 10.000). Además, por la naturaleza del problema, podemos esperar que cada una de las variables aleatorias $X(t)$ se caracterice por una función de probabilidad diferente: por ejemplo, el valor medio de $X(t)$, es decir, el número medio de bombillas que permanecen encendidas, decrecerá con el tiempo, t . También podemos asegurar que $X(t_0)$ es estadísticamente dependiente de todas las variables $X(t)$, anteriores y posteriores: para comprobarlo, basta advertir que el conocimiento del número de bombillas encendidas en un instante de tiempo proporciona una cota superior del número de bombillas encendidas en cualquier instante posterior, e inferior del número de bombillas encendidas en cualquier instante anterior.

El ejemplo anterior pone de manifiesto que, para caracterizar estadísticamente un proceso estocástico, no es suficiente con caracterizar cada una de las variables aleatorias del

proceso, sino también su dependencia estadística.

Un proceso en tiempo discreto, $X[n]$, puede caracterizarse únicamente conociendo, para cualquier valor de N y cualquier conjunto arbitrario de N instantes temporales $\{n_0, \dots, n_{N-1}\}$, su *función de distribución de orden N*, que se define como

$$F_{X[n_0], \dots, X[n_{N-1}]}(x_0, \dots, x_{N-1}) = Pr\{X[n_0] \leq x_0, \dots, X[n_{N-1}] \leq x_{N-1}\} \quad (3.156)$$

Alternativamente, si $X[n_0]$ es una variable aleatoria discreta para cualquier valor de n_0 , el proceso queda determinado mediante su *distribución de probabilidad de orden N* para cualquier valor de N y cualquier conjunto arbitrario de N instantes temporales $\{n_0, \dots, n_{N-1}\}$,

$$p_{X[n_0], \dots, X[n_{N-1}]}(x_0, \dots, x_{N-1}) = Pr\{X[n_0] = x_0, \dots, X[n_{N-1}] = x_{N-1}\} \quad (3.157)$$

o bien, si $X[n_0]$ es una variable aleatoria continua para cualquier valor de n_0 , el proceso queda determinado mediante su *función de densidad de probabilidad de orden N* para cualquier valor de N y cualquier conjunto arbitrario de N instantes temporales $\{n_0, \dots, n_{N-1}\}$,

$$f_{X[n_0], \dots, X[n_{N-1}]}(x_0, \dots, x_{N-1}) = \frac{\partial^n F_{X[n_0], \dots, X[n_{N-1}]}(x_0, \dots, x_{N-1})}{\partial x_0 \cdots \partial x_{N-1}} \quad (3.158)$$

Nótese que si el proceso es complejo, (3.156), (3.157) y (3.158) son funciones de $2N$ variables aleatorias.

Si el proceso es en tiempo continuo, $X(t)$, el proceso se determina mediante la *función de distribución de orden N* para cualquier valor de N y cualquier conjunto arbitrario de N instantes temporales $\{t_0, \dots, t_{N-1}\}$,

$$F_{X(t_0), \dots, X(t_{N-1})}(x_0, \dots, x_{N-1}) = P\{X(t_0) \leq x_0, \dots, X(t_{N-1}) \leq x_{N-1}\} \quad (3.159)$$

o, alternativamente, mediante su *distribución de probabilidad de orden N*,

$$p_{X(t_0), \dots, X(t_{N-1})}(x_0, \dots, x_{N-1}) = Pr\{X(t_0) = x_0, \dots, X(t_{N-1}) = x_{N-1}\} \quad (3.160)$$

para procesos de carácter discreto y la *función de densidad de probabilidad de orden N*,

$$f_{X(t_0), \dots, X(t_{N-1})}(x_0, \dots, x_{N-1}) = \frac{\partial^n F_{X(t_0), \dots, X(t_{N-1})}(x_0, \dots, x_{N-1})}{\partial x_0 \cdots \partial x_{N-1}} \quad (3.161)$$

para procesos de carácter continuo.

En la práctica esta caracterización es poco útil porque, en algunos casos, el conocimiento que tenemos del proceso es limitado y, en general, la manipulación es sumamente engorrosa. Afortunadamente, en muchos casos, bien es posible hacer algunas hipótesis que simplifican esta caracterización, o bien solamente se precisa realizar una caracterización parcial.

En este texto nos interesan, en particular, los procesos caracterizables por sus funciones de media y autocorrelación, que se definen a continuación. Supondremos, en general, procesos estocásticos que pueden tomar valores complejos:

Media. La media de un proceso estocástico continuo $X(t)$ se define como

$$\mu_X(t) \doteq E\{X(t)\} \quad (3.162)$$

y admitirá la expresión

$$\mu_X(t) = \int_{\mathbb{C}} x f_{X(t)}(x) dx \quad (3.163)$$

o bien

$$\mu_X(t) = \sum_{x_k \in \Omega} x_k p_{X(t)}(x_k) \quad (3.164)$$

dependiendo de que, en el instante t , $X(t)$ sea una variable aleatoria continua o discreta, respectivamente.

Nótese que, en general, la media depende del tiempo. Para un proceso discreto, la media se define de modo análogo:

$$\mu_X[n] \doteq E\{X[n]\} \quad (3.165)$$

Autocorrelación. La autocorrelación del proceso estocástico $X(t)$ (o $X[n]$) se define como

$$R_X(t_1, t_2) \doteq E\{X(t_1)X^*(t_2)\} \quad (3.166)$$

$$(R_X[n_1, n_2] \doteq E\{X[n_1]X^*[n_2]\})$$

Correlación cruzada. La correlación cruzada entre los procesos estocásticos $X(t)$ e $Y(t)$ (o $X[n]$ e $Y[n]$) se define como

$$R_{XY}(t_1, t_2) \doteq E\{X(t_1)Y^*(t_2)\} \quad (3.167)$$

$$(R_{XY}[n_1, n_2] \doteq E\{X[n_1]Y^*[n_2]\})$$

Covarianza. La covarianza cruzada entre los procesos estocásticos $X(t)$ e $Y(t)$ (o $X[n]$ e $Y[n]$) de medias $\mu_X(t)$ y $\mu_Y(t)$ (o $\mu_X[n]$ y $\mu_Y[n]$), respectivamente, se define como

$$C_{XY}(t_1, t_2) \doteq E\{(X(t_1) - \mu_X(t_1))(Y(t_2) - \mu_Y(t_2))^*\} \quad (3.168)$$

$$(C_{XY}[n_1, n_2] \doteq E\{(X[n_1] - \mu_X[n_1])(Y[n_2] - \mu_Y[n_2])^*\})$$

Análogamente, la autocovarianza (o, simplemente, covarianza) del proceso $X(t)$ (o $X[n]$) de media $\mu_X(t)$ (o $\mu_X[n]$) se define como

$$C_X(t_1, t_2) \doteq E\{(X(t_1) - \mu_X(t_1))(X(t_2) - \mu_X(t_2))^*\} \quad (3.169)$$

$$(C_X[n_1, n_2] \doteq E\{(X[n_1] - \mu_X[n_1])(X[n_2] - \mu_X[n_2])^*\})$$

Nótese que $C_X(t_1, t_1)$ y $C_X[n_1, n_1]$ coinciden con las varianzas de $X(t_1)$ y $X[n_1]$, respectivamente. Autocovarianza y autocorrelación pueden relacionarse de modo inmediato mediante

$$C_X(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) - \mu_X(t_1)\mu_X^*(t_2) \quad (3.170)$$

$$(C_X[n_1, n_2] = R_X[n_1, n_2] - \mu_X[n_1]\mu_X^*[n_2])$$

Ejemplo 3.17

Una señal determinista puede considerarse un proceso estocástico “degenerado” cuyas realizaciones toman siempre los mismos valores. Por ejemplo sea el proceso $X(t)$ que toma, con probabilidad 1, el valor

$$X(t) = r(t) \quad (3.171)$$

para todo instante de tiempo t , siendo $r(t)$ una función determinista. En tal caso, en cada instante de tiempo, $X(t)$ solo puede tomar un valor posible, y podemos escribir

$$f_{X(t)}(x) = \delta(x - r(t)) \quad (3.172)$$

y, en general,

$$f_{X(t_0), \dots, X(t_{N-1})}(x_0, \dots, x_{N-1}) = \delta\left(\sum_{i=0}^{N-1} |x_i - r(t_i)|\right) \quad (3.173)$$

Asimismo, resulta inmediato comprobar que su media es $\mu(t) = r(t)$, su autocorrelación es $R_X(t_1, t_2) = r(t_1)r(t_2)$ y su autocovarianza es nula.

Ejemplo 3.18

Sea el proceso estocástico $X(t)$ dado por

$$X(t) = Ae^{-t}u(t) \quad (3.174)$$

siendo $u(t)$ la función escalón y A una variable aleatoria real y gausiana de media 0 y varianza unidad. En cada instante de tiempo, podemos considerar $X(t)$ como resultado de multiplicar una variable aleatoria gausiana por una constante determinista de la forma $e^{-t}u(t)$ y, por tanto, $X(t)$ es otra variable gausiana de media nula y varianza

$$\sigma_X^2(t) = E\{X^2(t)\} = E\{(Ae^{-t}u(t))^2\} = E\{A^2\}e^{-2t}u(t) = e^{-2t}u(t) \quad (3.175)$$

Asimismo, podemos comprobar que, pese al carácter aleatorio de $X(t)$, sus muestras en diferentes instantes de tiempo mantienen una relación determinista: conocido el valor que toma una realización $x(t)$ en cualquier instante de tiempo $t_1 \geq 0$, todos los valores de $x(t)$ quedan completamente determinados. Por ejemplo, si $x(t_1) = x_1$, resulta $A = x_1e^{t_1}$ y, por tanto, $x(t) = x_1e^{t_1-t}u(t)$, para todo t . En consecuencia,

$$f_{X(t_2)|X(t_1)}(x_2|x_1) = \delta(x_2 - x_1e^{t_1-t_2}), \quad t_1, t_2 > 0 \quad (3.176)$$

A partir de esta expresión resulta

$$\begin{aligned} f_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2) &= f_{X(t_2)|X(t_1)}(x_2|x_1)f_{X(t_1)}(x_1) \\ &= \delta(x_2 - x_1e^{t_1-t_2}) \frac{1}{e^{-t_1}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_2^2}{2e^{-2t_1}}}, \quad t_1, t_2 > 0 \end{aligned} \quad (3.177)$$

Dejamos al lector como ejercicio el cálculo de las densidades de probabilidad conjuntas para t_1 o t_2 negativos, así como las densidades de orden 3 y superior, siguiendo análogo procedimiento al empleado en la ecuación anterior.

La autocorrelación del proceso se calcula de forma sencilla mediante

$$R_X(t_1, t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)\} = e^{-t_1-t_2}u(t_1)u(t_2) \quad (3.178)$$

y, al ser $X(t)$ de media nula, coincide con su autocovarianza.

Ejemplo 3.19

El carácter aleatorio del proceso estocástico del Ejemplo 3.18 viene dado por una sola variable aleatoria. Consideremos ahora el proceso discreto $X[n]$ formado por variables aleatorias independientes con distribución de Bernoulli, tal que

$$p_{X[n]}(x) = p^x(1-p)^{1-x}, \quad x = 0, 1 \quad (3.179)$$

La función de probabilidad conjunta tendrá la forma

$$p_{X[n_0], \dots, X[n_{N-1}]}(x_0, \dots, x_{N-1}) = \prod_{i=0}^{N-1} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} = p^{\sum_{i=0}^{N-1} x_i} (1-p)^{N-\sum_{i=0}^{N-1} x_i} \quad (3.180)$$

La media del proceso es

$$\mu_X[n] = E\{X[n]\} = p \quad (3.181)$$

su autocorrelación

$$R_X[n_1, n_2] = E\{X[n_1]X[n_2]\} = \begin{cases} p & \text{si } n_1 = n_2 \\ p^2 & \text{si } n_1 \neq n_2 \end{cases} \quad (3.182)$$

y la autocovarianza

$$C_X[n_1, n_2] = p(1-p)\delta[n_1 - n_2] \quad (3.183)$$

A diferencia del proceso anterior, el proceso $X[n]$ involucra a un conjunto infinito de variables aleatorias independientes, y la relación entre muestras del proceso ya no es determinista.

Ejemplo 3.20

Veamos ahora un ejemplo de proceso aleatorio donde el valor del proceso en cada instante puede depender del valor de un conjunto arbitrariamente grande de variables aleatorias. Sea el proceso discreto $Y[n]$ dado por

$$Y[n] = \begin{cases} Y[n-1] + X[n-1] & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad (3.184)$$

siendo $X[n]$ el proceso binario del Ejemplo 3.19. Observe que, a partir de la relación recursiva (3.184), podemos obtener la expresión alternativa

$$Y[n] = \left(\sum_{i=0}^{n-1} X[i] \right) u[n] \quad (3.185)$$

donde $u[n]$ es el escalón unitario. Obsérvese que $Y[n]$ coincide con el número de “unos” del proceso X entre 0 y $n-1$. En consecuencia, su distribución es de tipo binomial: de acuerdo con (3.20), para $n \geq 0$ podemos escribir

$$p_{Y[n]}(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad k = 0, \dots, n \quad (3.186)$$

y, de acuerdo con el Cuadro 3.1, la media del proceso es

$$\mu_Y[n] = E\{Y[n]\} = npu[n] \quad (3.187)$$

y su varianza

$$C_Y[n, n] = np(1 - p)u[n] \quad (3.188)$$

Haciendo uso de (3.185), la autocorrelación de $Y[n]$ se puede expresar en función de la autocorrelación de $X[n]$,

$$R_Y[n_1, n_2] = E\{Y[n_1]Y[n_2]\} = \sum_{i=0}^{n_1-1} \sum_{j=0}^{n_2-1} R_X[i, j] \quad (3.189)$$

Aplicando (3.182) resulta, para $n_2 > n_1$,

$$\begin{aligned} R_Y[n_1, n_2] &= \sum_{i=0}^{n_1-1} \sum_{j=0}^{n_2-1} (p^2 + (p - p^2)\delta[i - j]) = \\ &= n_1 n_2 p^2 + n_1(p - p^2) \end{aligned} \quad (3.190)$$

Obviamente, si $n_1 > n_2$, se obtiene

$$R_Y[n_1, n_2] = n_1 n_2 p^2 + n_2(p - p^2) \quad (3.191)$$

Por último, la autocovarianza resulta igual a

$$C_Y[n_1, n_2] = R_Y[n_1, n_2] - \mu_Y(n_1)\mu_Y(n_2) = \min\{n_1, n_2\}(p - p^2) \quad (3.192)$$

La Figura 3.9 muestra un fragmento (40 muestras) de 5 realizaciones del proceso estocástico $Y[n]$, con $p = 0,5$. A medida que crece el valor de n , la dispersión entre los valores de $Y[n]$ en diferentes realizaciones tiende a aumentar.

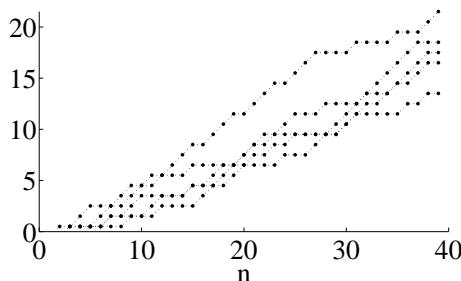


Figura 3.9. 5 realizaciones del proceso estocástico del Ejemplo 3.20

3.3.2. Estacionariedad

Cuando, en el Apartado 2.2, estudiábamos los sistemas había dos propiedades que, de cumplirse, simplificaban enormemente el análisis: la de linealidad y la de invarianza temporal. El cumplimiento de esta última significaba que el comportamiento del sistema era independiente de cual fuese el origen de tiempos o, lo que es lo mismo, que las propiedades del sistema se conservaban a lo largo del tiempo. En los procesos estocásticos existe una propiedad análoga que, de cumplirse, también simplifica su análisis: la estacionariedad.

Se dice que un proceso estocástico $X(t)$ (o $X[n]$) es *estacionario en sentido estricto* si sus propiedades estadísticas no varían con un desplazamiento en el tiempo, es decir, si, para cualquier valor de $\tau \in \mathbb{R}$ (o $k \in \mathbb{Z}$), el proceso $Y(t) = X(t + \tau)$ (o $Y[n] = X[n + k]$) tiene las mismas propiedades estadísticas que $X(t)$ (o $X[n]$), de modo que, para cualquier valor de N , cualquier valor de τ (o k), cualesquiera instantes de muestreo t_0, \dots, t_{N-1} (o n_0, \dots, n_{N-1}) y cualesquiera valores $x_0, \dots, x_{N-1} \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} F_{X(t_0), \dots, X(t_{N-1})}(x_0, \dots, x_{N-1}) &= F_{Y(t_0), \dots, Y(t_{N-1})}(x_0, \dots, x_{N-1}) \quad (3.193) \\ (F_{X[n_0], \dots, X[n_{N-1}]}(x, \dots, x_{N-1}) &= F_{Y[n_0], \dots, Y[n_{N-1}])(x_0, \dots, x_{N-1})) \end{aligned}$$

En la práctica, la estacionariedad estricta es difícil de comprobar y excesivamente restrictiva. En ocasiones, es suficiente garantizar la invarianza de algunos estadísticos, en particular de primer y segundo orden. Cuando solamente se imponen condiciones de estacionariedad a la media y la autocorrelación, entonces se dice que el proceso es *estacionario en sentido amplio*. Así, si $X(t)$ (o $X[n]$) es estacionario en sentido amplio, entonces, para cualesquiera valores de t, t_1, t_2 y τ (o n, n_1, n_2 y k) se verifica que

$$E\{X(t)\} = E\{X(t + \tau)\} \quad (3.194)$$

$$(E\{X[n]\} = E\{X[n + k]\})$$

y

$$R_X(t_1, t_2) = R_X(t_1 + \tau, t_2 + \tau) \quad (3.195)$$

$$(R_X[n_1, n_2] = R_X[n_1 + k, n_2 + k])$$

Por tanto, si un proceso es estacionario en sentido amplio, su media es constante y su autocorrelación solamente depende de la diferencia entre t_1 y t_2 (o n_1 y n_2). En tal caso, denotaremos la autocorrelación simplemente como

$$R_X(\tau) \doteq R_X(t + \tau, t) \quad (3.196)$$

$$(R_X[k] \doteq R_X[n + k, n])$$

Ejemplo 3.21

Volvamos sobre los ejemplos del apartado anterior.

- El proceso determinista $X(t) = r(t)$ del Ejemplo 3.17 no es, en general, estacionario, pues su media coincide con $r(t)$ y, por tanto, puede variar con el tiempo siempre que $r(t)$ tenga alguna variación temporal. Por el contrario, si $r(t)$ es una señal constante e igual a c , entonces su media es $\mu_X(t) = c$ y su autocorrelación $R_X(t_1, t_2) = c^2$, que no dependen del tiempo; por tanto, $X(t)$ es estacionario en sentido amplio. Además, en virtud de (3.173), resulta

$$f_{X(t_0), \dots, X(t_{N-1})}(x_0, \dots, x_{N-1}) = \prod_{i=0}^{N-1} \delta(x_i - c) \quad (3.197)$$

que tampoco depende del tiempo. En consecuencia, $X(t)$ es estrictamente estacionario.

- El proceso $X(t)$ del Ejemplo 3.18 no es estacionario en sentido amplio (y, por tanto, tampoco en sentido estricto), puesto que su autocorrelación (en la Ecuación 3.178) no puede expresarse como función de la diferencia $t_1 - t_2$.
- El proceso binario independiente $X[n]$ del Ejemplo 3.19 es estacionario en sentido estricto, puesto que su función de probabilidad conjunta, (3.180), no depende de los instantes de tiempo elegidos. En consecuencia, también es estacionario en sentido amplio, como puede comprobarse observando que ni la media en (3.181) ni la autocorrelación en (3.182) dependen del tiempo.
- El proceso discreto $Y[n]$ del Ejemplo 3.20 no es estacionario puesto que su media, (3.187), varía con el tiempo.

La autocorrelación de un proceso estocástico estacionario tiene tres propiedades de interés:

1. Es una función hermítica: $R_X(\tau) = R_X^*(-\tau)$ (o $R_X[k] = R_X^*[-k]$). Esta propiedad es consecuencia inmediata de la definición.
2. Su valor en el origen coincide con el valor cuadrático medio del proceso: $R_X(0) = E\{|X(t)|^2\}$ (o $R_X[0] = E\{|X[n]|^2\}$).
3. Tiene módulo máximo en el origen: para todo τ (o k), se verifica que $|R_X(\tau)| \leq R_X(0)$ (o $|R_X[k]| \leq R_X[0]$).

La tercera propiedad puede demostrarse sabiendo que, para cualquier valor de $a \in \mathbb{C}$,

$$E\{|X(\tau) - aX(0)|^2\} \geq 0 \quad (3.198)$$

Desarrollando el módulo de la diferencia, se obtiene

$$2\operatorname{Re}\{a^*R_X(\tau)\} \leq R_X(0) + |a|^2R_X(0) \quad (3.199)$$

En particular, para

$$a = \frac{R_X(\tau)}{|R_X(\tau)|} \quad (3.200)$$

resulta $|a| = 1$ y, sustituyendo en (3.199)

$$|R_X(\tau)| \leq R_X(0) \quad (3.201)$$

Observe que la estacionariedad en sentido estricto implica la estacionariedad en sentido amplio, pero no a la inversa: existen procesos estacionarios en sentido amplio que no lo son en sentido estricto, como demuestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.22

Sea $X[n]$ un proceso estocástico estacionario de media nula y $Y[n] = (-1)^n X[n]$. Resulta sencillo comprobar que

$$E\{Y[n]\} = (-1)^n E\{X[n]\} = 0 \quad (3.202)$$

y

$$R_Y[n_1, n_2] = (-1)^{n_1+n_2} R_X[n_2 - n_1] \quad (3.203)$$

Dado que $(-1)^{n_1+n_2} = (-1)^{n_2-n_1}$, resulta

$$R_Y[n_1, n_2] = (-1)^{n_2-n_1} R_X[n_2 - n_1] \quad (3.204)$$

que sólo depende de $n_2 - n_1$. Por tanto, $Y[n]$ es estacionario en sentido amplio. Sin embargo, podemos comprobar que, por ejemplo,

$$E\{Y^3[n]\} = (-1)^n E\{X^3[n]\} \quad (3.205)$$

que, en general, depende de n . Por ejemplo, si, para todo n , $X[n]$ sigue la distribución discreta

$$p_X[k] = \frac{3}{4}\delta[k-1] + \frac{1}{4}\delta[k+3] \quad (3.206)$$

resultan $E\{X[n]\} = 0$ y $E\{X[n]^3\} = -3/2$, luego

$$E\{Y^3[n]\} = -\frac{3}{2}(-1)^n \quad (3.207)$$

que depende de n . Por tanto, $X[n]$ no es estrictamente estacionario.

En lo sucesivo, y salvo que se indique lo contrario, utilizaremos el término “estacionariedad” para referirnos a la estacionariedad en sentido amplio, que es la de mayor interés en comunicaciones digitales.

Procesos conjuntamente estacionarios. Se dice que dos procesos estacionarios $X(t)$ e $Y(t)$ (o $X[n]$ e $Y[n]$) son conjuntamente estacionarios en sentido estricto si sus propiedades estadísticas conjuntas no varían con un desplazamiento en el tiempo, es decir, si, para cualesquiera valores de N y N' , cualquier valor de τ (o k), cualesquiera instantes t_0, \dots, t_{N-1} y $t'_0, \dots, t'_{N'-1}$ (o n_0, \dots, n_{N-1} y $n'_0, \dots, n'_{N'-1}$) y cualesquiera valores $x_0, \dots, x_{N+N'-1} \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} F_{X(t_0), \dots, X(t_{N-1}), Y(t'_0), \dots, Y(t'_{N'-1})}(x_0, \dots, x_{N+N'-1}) &= \\ F_{X(t_0+\tau), \dots, X(t_{N-1}+\tau), Y(t'_0+\tau), \dots, Y(t'_{N'-1}+\tau)}(x_0, \dots, x_{N+N'-1}) &\quad (3.208) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (F_{X[n_0], \dots, X[n_{N-1}], Y[n'_0], \dots, Y[n'_{N'-1}]}(x_0, \dots, x_{N+N'-1}) &= \\ F_{X[n_0+k], \dots, X[n_{N-1}+k], Y[n'_0+k], \dots, Y[n'_{N'-1}+k]}(x_0, \dots, x_{N+N'-1})) & \end{aligned}$$

Asimismo, diremos que $X(t)$ e $Y(t)$ son conjuntamente estacionarios en sentido amplio si ambos son estacionarios en sentido amplio y para cualesquiera valores de t_1, t_2 y τ (o n_1, n_2 y k) se verifica que

$$R_{XY}(t_1, t_2) = R_{XY}(t_1 + \tau, t_2 + \tau) \quad (3.209)$$

$$(R_{XY}[n_1, n_2] = R_{XY}[n_1 + k, n_2 + k])$$

que nos permite describir la función de correlación cruzada mediante una única variable

$$R_{XY}(\tau) \doteq R_{XY}(t + \tau, t) \quad (3.210)$$

$$(R_{XY}[k] \doteq R_{XY}[n + k, n])$$

Procesos cicloestacionarios. Existe un tipo de procesos no estacionarios que aparece frecuentemente en comunicaciones (en general, relacionados con operaciones de modulación o demodulación) en la que los estadísticos varían de forma cíclica. A este tipo de procesos se les conoce como *cicloestacionarios*. De nuevo se define la cicloestacionariedad en sentido estricto y en sentido amplio.

Se dice que un proceso $X(t)$ (o $X[n]$) es cicloestacionario en sentido estricto con periodo T (o N) si y sólo si, para cualquier valor de M , cualesquiera instantes de tiempo t_0, \dots, t_{M-1} (o n_0, \dots, n_{M-1}) y cualesquiera valores $x_0, \dots, x_{M-1} \in \mathbb{C}$, se verifica

$$F_{X(t_0), \dots, X(t_{M-1})}(x_0, \dots, x_{M-1}) = F_{X(t_0+T), \dots, X(t_{M-1}+T)}(x_0, \dots, x_{M-1}) \quad (3.211)$$

$$(F_{X[n_0], \dots, X[n_{M-1}]}(x_0, \dots, x_{M-1}) = F_{X[n_0+N], \dots, X[n_{M-1}+N]}(x_0, \dots, x_{M-1}))$$

De igual forma, se dice que un proceso es cicloestacionario en sentido amplio con periodo T (o N) si y sólo si, para todo $t \in \mathbb{R}$ (o $n \in \mathbb{Z}$),

$$E\{X(t)\} = E\{X(t+T)\} \quad (3.212)$$

$$(E\{X[n]\} = E\{X[n+N]\})$$

y para todos $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ (o $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$),

$$R_X(t_1, t_2) = R_X(t_1 + T, t_2 + T) \quad (3.213)$$

$$(R_X[n_1, n_2] = R_X[n_1 + N, n_2 + N])$$

Obsérvese que, de acuerdo con estas definiciones, si $X(t)$ es un proceso cicloestacionario en tiempo continuo de periodo T , el proceso discreto dado por $X_d[n] = X(nT + t_0)$, siendo t_0 una constante arbitraria, es estacionario. Es decir, cualquier proceso discreto construido tomando muestras de $X(t)$ con periodo T es estacionario. De igual manera, si diezmamos a ritmo N un proceso cicloestacionario en tiempo discreto obtendremos un proceso estacionario.

Procesos blancos. Un caso particular de procesos estocásticos estacionarios de especial interés son aquellos en los que la autocorrelación de las muestras del proceso en dos instantes cualesquiera (diferentes) es cero. Así, se dice que un proceso estocástico estacionario en tiempo discreto $X[n]$ es blanco si su función de autocorrelación tiene la forma

$$R_X[n] = \eta\delta[n] \quad (3.214)$$

siendo η una constante no negativa. A partir de (3.214) podemos determinar que su media es nula y su valor cuadrático medio es

$$E\{|X[n]|^2\} = R_X[0] = \eta \quad (3.215)$$

Alternativamente, un proceso estocástico estacionario continuo $X(t)$ es blanco si su función de autocorrelación tiene la forma

$$R_X(t) = \eta\delta(t) \quad (3.216)$$

en cuyo caso η es también una constante no negativa. Observe que, por la naturaleza de la función delta de Dirac, los procesos blancos continuos no tienen valor cuadrático medio finito. Del mismo modo que la función delta de Dirac constituye una idealización útil para el análisis y la caracterización de los sistemas lineales, los procesos blancos nos resultarán útiles en el análisis de procesos estocásticos, y en particular de su comportamiento ante transformaciones lineales. En los capítulos siguientes veremos que los procesos blancos, tanto en tiempo continuo como en tiempo discreto, tienen interés práctico en comunicaciones, en particular para la caracterización de los procesos de ruido.

3.3.3. Ergodicidad

En este capítulo hemos analizado algunas medidas sobre procesos estocásticos (media, autocorrelación, etc.) y en el capítulo anterior medidas sobre señales (valor medio, energía, potencia, etc.). Teniendo en cuenta que una realización $x(t)$ (o $x[n]$) de un proceso $X(t)$ (o $X[n]$) es una señal, ¿existe alguna relación entre medidas equivalentes (por ejemplo, media y valor medio) de procesos y señales? o, en otras palabras, ¿existe alguna relación entre el operador esperanza matemática y el promedio temporal?

Para procesos estacionarios en sentido estricto las respuestas a estas preguntas son afirmativas si el proceso es *ergódico*. Si un proceso es ergódico, bajo ciertas restricciones sobre la función g de medida, podemos asegurar que

$$\langle g(x(t)) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T g(x(t)) dt = E\{g(X(t))\} \quad (3.217)$$

$$\left(\langle g(x[n]) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N g(x[n]) = E\{g(X[n])\} \right)$$

Pero, al igual que sucedía con la propiedad de estacionariedad en sentido estricto, la propiedad de ergodicidad es de escasa utilidad por su farragosa definición y difícil verificación, por lo que trataremos únicamente el análisis de la ergodicidad en las medidas de primer y segundo orden (media y autocorrelación, respectivamente). Como en la propiedad de la estacionariedad, si un proceso cumple las propiedades de ergodicidad en la media y en la autocorrelación se denomina *ergódico en sentido amplio*. Note que para que un proceso sea ergódico es necesario que sea estacionario en sentido estricto y que para que sea ergódico en sentido amplio debe ser, al menos, estacionario en sentido amplio.

Ergodicidad en la media. Suponga que la media de un proceso estocástico estacionario $X[n]$ es desconocida, y solamente se dispone de una realización. ¿Es posible estimar la media del proceso a partir de los valores de una realización?

Para responder a esta pregunta, supongamos, por ahora, que $X[n]$ es un proceso de muestras independientes de media μ_X y varianza σ_X^2 . Considere la variable aleatoria

$$S_N = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N X[n] \quad (3.218)$$

que puede interpretarse como una estimación de la media del proceso.

Observe que S_N es, a su vez, una variable aleatoria de la misma media que el proceso

$$E\{S_N\} = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N E\{X[n]\} = \mu_X \quad (3.219)$$

Sin embargo, su varianza (que puede interpretarse como el valor cuadrático medio del error de estimación de la media) es, de acuerdo con (3.143),

$$E\{|S_N - \mu_X|^2\} = \sum_{n=-N}^N \frac{\sigma_X^2}{(2N+1)^2} = \frac{\sigma_X^2}{2N+1} \quad (3.220)$$

Por tanto, S_N es una variable aleatoria cuya varianza se reduce asintóticamente a cero a medida que aumenta N . Esto indica que, aun disponiendo de una sola realización del proceso, promediando un buen número de observaciones, es posible obtener una buena estimación de su media. Por ello, se dice que $X[n]$ es un proceso ergódico en la media.

La ergodicidad no es exclusiva de los procesos independientes; de forma general, diremos que un proceso estacionario en tiempo discreto $X[n]$ de media μ_X y función de covarianza $C_X[k]$ es ergódico en la media si y sólo si

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N X[n] = \mu_X \quad (3.221)$$

y la varianza de S_N ,

$$\begin{aligned} E\{|S_N - \mu_X|^2\} &= E\left\{ \left| \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N X[n] - \mu_X \right|^2 \right\} \\ &= \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-N}^N E\{(X[n] - \mu_X)(X[m] - \mu_X)^*\} \\ &= \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-N}^N C_X[n-m] \end{aligned} \quad (3.222)$$

tiende a cero cuando N tiende a infinito. Observando que (3.222) es una suma en la que el valor $C_X[k]$, con $k \geq 0$, aparece $2N + 1 - k$ veces (desde $n = k - N$, $m = -N$ hasta $n = N$, $m = N - k$) y los valores $C[k]$ con $k < 0$ aparecen $2N + 1 + k$ veces, puede reescribirse como

$$\begin{aligned} E\{|S_N - \mu_X|^2\} &= \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{k=-2N+1}^{2N-1} (2N+1-|k|)C_X[k] \\ &= \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{k=-2N+1}^{2N-1} \left(1 - \frac{|k|}{2N+1}\right) C_X[k] \end{aligned} \quad (3.223)$$

Una condición suficiente para que (3.223) tienda a 0 cuando N tiende a infinito y de formulación más sencilla es la siguiente:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_X[k]| < \infty \quad (3.224)$$

Se deja como ejercicio la demostración de que el cumplimiento de (3.224) implica que (3.223) tiende a 0 cuando N tiende a infinito.

Los procesos en tiempo continuo se comportan de forma similar. Un proceso estacionario en tiempo continuo $X(t)$ de media μ_X y función de covarianza $C_X(\tau)$ es *ergódico en la media* si y sólo si

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt = \mu_X \quad (3.225)$$

y

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|\tau|}{2T}\right) C_X(\tau) d\tau = 0 \quad (3.226)$$

siendo condición suficiente para esta última que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |C_X(\tau)| d\tau < \infty \quad (3.227)$$

Ejemplo 3.23

Consideremos el proceso estacionario dado por $X[n] = R[n] + 0,8R[n - 1]$, siendo $R[n]$ un proceso de ruido blanco y gausiano de varianza unidad. Resulta inmediato comprobar que $X[n]$ es un proceso estacionario de media nula y autocovarianza (que, al ser X de media nula, coincide con la autocorrelación)

$$\begin{aligned} C_X[k] &= E\{(R[n] + 0,8R[n - 1])(R[n + k] + 0,8R[n + k - 1])\} \\ &= 1,64\delta[k] + 0,8\delta[k - 1] + 0,8\delta[k + 1] \end{aligned} \quad (3.228)$$

Dado que la autocovarianza se anula para $|k| > 1$, podemos concluir que el proceso es ergódico en la media. La Figura 3.10 representa las primeras muestras (desde $n = 0$ hasta $n = 50$) de 4 realizaciones. En la parte inferior se representa el promedio de 50 realizaciones. A la derecha de cada gráfica se representa el promedio de las 50 muestras representadas de cada gráfica. Como consecuencia de la estacionariedad, la señal promedio se aproxima a una señal constante en torno a la media del proceso, que es cero. Como consecuencia de la ergodicidad del proceso, los promedios de cada señal también se aproximan a la media.

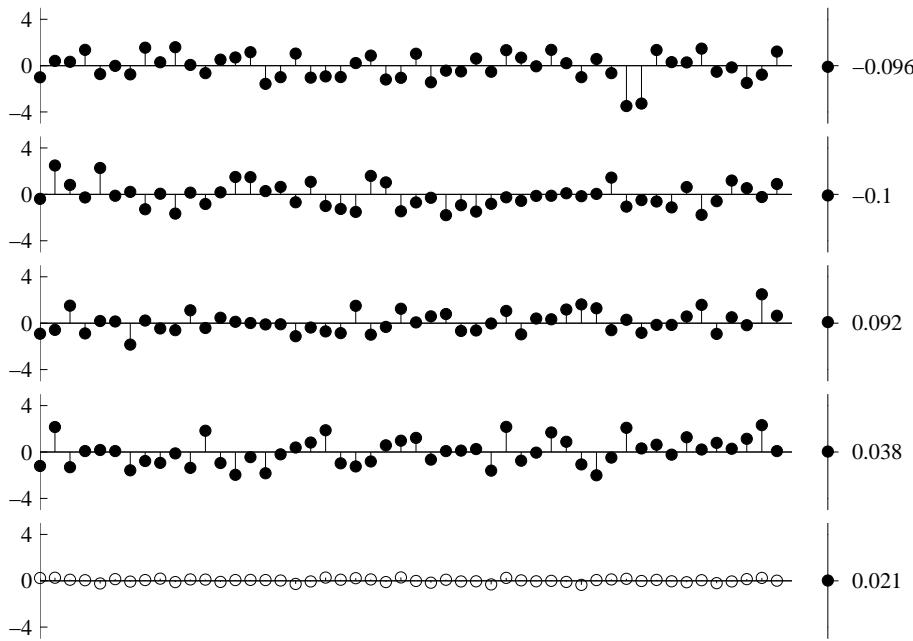


Figura 3.10. 4 realizaciones del proceso estocástico del Ejemplo 3.23 (arriba), el promedio de 50 realizaciones (abajo) y los promedios de las muestras representadas (derecha). En virtud de la estacionariedad, la señal promedio se aproxima a una constante de valor igual a la media del proceso. En virtud de la ergodicidad, los promedios temporales también se aproximan a la media.

Ejemplo 3.24

Consideremos el proceso estacionario $X(t)$ dado por

$$X(t) = A + \cos(\omega t + \phi) \quad (3.229)$$

siendo ω una constante, y A y ϕ variables aleatorias independientes, la primera gausiana de media nula y varianza 1, y la segunda uniforme entre 0 y 2π . Podemos comprobar que $X(t)$ es estacionario, calculando su media

$$E\{X(t)\} = E\{A\} + E\{\cos(\omega t + \phi)\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\omega t + \phi) d\phi = 0 \quad (3.230)$$

que no depende del tiempo, y su autocorrelación.

$$R_X(\tau) = E\{X(t)X(t + \tau)\} = E\{A^2\} + E\{\cos(\omega t + \phi) \cos(\omega(t + \tau) + \phi)\} \quad (3.231)$$

El primer término es la unidad, mientras que el segundo se resuelve a partir de la identidad trigonométrica

$$\cos(\omega t + \phi) \cos(\omega(t + \tau) + \phi) = \frac{1}{2} \cos(\omega(2t + \tau) + 2\phi) + \frac{1}{2} \cos(\omega\tau) \quad (3.232)$$

de donde resulta

$$R_X(\tau) = E\{X(t)X(t + \tau)\} = 1 + \frac{1}{2} \cos(\omega\tau) \quad (3.233)$$

(3.233) indica que la autocovarianza de $X(t)$ (que, de nuevo, coincide con la autocorrelación) no tiende a anularse al crecer $|\tau|$ y por tanto no se cumple (3.226): el proceso $X(t)$ no es ergódico en la media.

La Figura 3.11 representa 4 realizaciones del proceso. En la parte inferior se representa el promedio de 50 realizaciones. A la derecha de cada gráfica se representa el promedio de cada realización en el intervalo representado. Como consecuencia de la estacionariedad, la señal promedio se aproxima a una señal constante en torno a la media del proceso, que es cero. Sin embargo, $X(t)$ no es ergódico y, como consecuencia, los promedios temporales no se aproximan a la media.

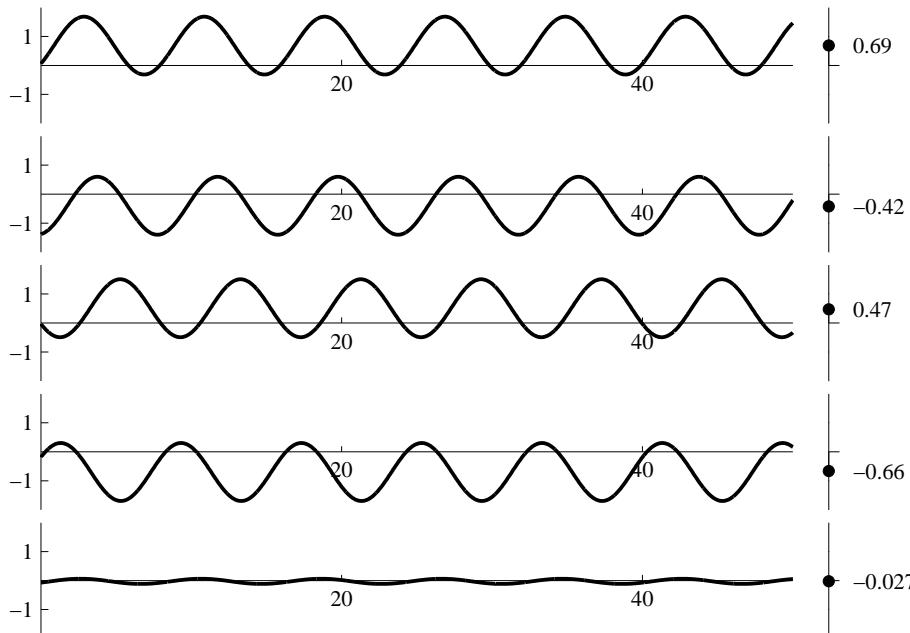


Figura 3.11. 4 realizaciones del proceso estocástico del Ejemplo 3.24 (arriba), el promedio de 50 realizaciones (abajo) y los promedios de las muestras representadas (derecha). En virtud de la estacionariedad, la señal promedio se aproxima a una constante de valor igual a la media del proceso. Los promedios temporales, por el contrario, no se aproximan a la media

Ergodicidad en la autocorrelación. De forma similar se define la ergodicidad en la autocorrelación. Un proceso es ergódico en la autocorrelación si su función de autocorrelación coincide con el promedio temporal equivalente. Para procesos ergódicos en la autocorrelación en tiempo discreto, esta coincidencia se expresa como

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N X[k+n]X^*[k] = R_X[k] \quad (3.234)$$

y, para procesos ergódicos en la autocorrelación en tiempo continuo, como

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t + \tau) X^*(t) dt = R_X(\tau) \quad (3.235)$$

El cumplimiento de la ergodicidad en la autocorrelación se garantiza mediante el cumplimiento de la ergodicidad en la media del proceso $Z_k[n] = X[n + k]X^*[n]$ (o $Z_\tau(t) = X(t + \tau)X^*(t)$) para cualquier valor de k (o τ), y que implica el cumplimiento de (3.234) (o (3.235)).

Cicloergodicidad. La definición de ergodicidad deja fuera a un importante grupo de procesos dentro de las comunicaciones como son los procesos cicloestacionarios. Existe, sin embargo, una extensión del concepto de ergodicidad denominada *cicloergodicidad* que nos permite relacionar las medidas estadísticas con los promedios temporales para los procesos cicloestacionarios.

Un proceso cicloestacionario y cicloergódico de periodo T_0 (N_0) cumple, bajo ciertas restricciones sobre la función g de medida, que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T g(x(t + t')) e^{j \frac{2\pi k t'}{T_0}} dt' = E\{g(X(t))\} \quad (3.236)$$

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n'=-N}^N g(x[n + n']) e^{j \frac{2\pi k n'}{N_0}} = E\{g(X[n])\} \right)$$

Obsérvese, por una parte, la similitud de estas ecuaciones con (3.217) y, por otra, que el resultado del término de la izquierda en las igualdades sigue dependiendo de t (o n).

Desarrollando (3.236) se puede comprobar que la forma de obtener una medida (por ejemplo, la media) en un instante t_0 del proceso cicloestacionario $X(t)$ a partir de una realización del mismo $x(t)$ es empleando de los valores $\{x(t_0 + kT_0) : k \in \mathbb{Z}\}$.

Ergodicidad y caracterización de procesos y señales

El carácter ergódico de un proceso podemos interpretarlo de dos formas distintas: por una parte, nos permite caracterizar estadísticamente un proceso a partir de una única realización del mismo y, por otra, las propiedades temporales de las realizaciones de un proceso a partir de su caracterización probabilística.

Si un proceso es ergódico en sentido estricto y empleamos un conjunto de funciones $\{g_{\Omega, N}\}$ que formen una base del espacio de las funciones de distribución de orden N , aplicando (3.217) sobre una realización $x(t)$ (o $x[n]$) y este conjunto de funciones obtenemos una expansión de la función de distribución de orden N . Repitiendo este procedimiento para cualquier valor de N obtenemos una caracterización única del proceso $X(t)$ (o $X[n]$).

Si el proceso es ergódico en sentido amplio, el valor medio (Apartado 2.1.2, Página 14) de una realización $x(t)$ (o $x[n]$) da como resultado la media del proceso, μ_X , y la función de

ambigüedad temporal, (2.50) (Página 22) o (2.57) (Página 23), de una realización da como resultado la función de autocorrelación del proceso.

Por otra parte, si un proceso es ergódico, su media coincide con el valor medio de cualquiera sus realizaciones, y su función de autocorrelación coincide con la función de ambigüedad temporal de cualquiera de sus realizaciones. De especial interés resulta el valor de la función de autocorrelación en el origen, $R_X(0)$ (o $R_X[0]$), o valor cuadrático medio del proceso, que coincide con la potencia de cualquiera de sus realizaciones

$$R_X(0) = E\{|X(t)|^2\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt = \mathcal{P}\{x(t)\} = P_X \quad (3.237)$$

$$\left(R_X[0] = E\{|X[n]|^2\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2 = \mathcal{P}\{x[n]\} = P_X \right)$$

Esto implica que cualquier realización de un proceso estacionario ergódico es una señal de potencia media no nula (recuerde que $|R_X(\tau)| \leq R_X(0)$ y $|R_X[k]| \leq R_X[0]$) y, por tanto, de energía infinita. Nos referiremos, por tanto, al valor de la función de autocorrelación en el origen indistintamente como valor cuadrático medio o potencia del proceso.

Más adelante analizaremos otras implicaciones cuando tratemos la caracterización de procesos en el dominio de la frecuencia, en el Apartado 3.3.5.

En lo sucesivo y salvo mención en contra, supondremos que todos los procesos estacionarios son ergódicos y todos los procesos cicloestacionarios son cicloergódicos.

3.3.4. Sistemas lineales con entradas estocásticas

Sea $X(t)$ un proceso estocástico en tiempo continuo y sea el proceso estocástico definido como

$$Y(t) = X(t) * h(t) \quad (3.238)$$

de modo que una realización de $Y(t)$, $y(t)$, se obtiene presentando una realización de $X(t)$, $x(t)$, a la entrada de un sistema lineal e invariante de respuesta al impulso $h(t)$.

En general, la caracterización estadística de $Y(t)$ no es sencilla, salvo en casos particulares (como el gausiano), pero sí pueden conocerse algunos estadísticos de primer y segundo orden.

Por ejemplo, si $\mu_X(t)$ es la media del proceso de entrada, la media del proceso de salida es

$$\mu_Y(t) = E\{Y(t)\} = E\{h(t) * X(t)\} \quad (3.239)$$

Obsérvese que, por la linealidad del operador de convolución,

$$\begin{aligned} E\{h(t) * X(t)\} &= E\left\{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) * X(t - \tau) d\tau\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) * E\{X(t - \tau)\} d\tau \\ &= h(t) * E\{X(t)\} \end{aligned} \quad (3.240)$$

luego

$$\mu_Y(t) = h(t) * \mu_X(t) \quad (3.241)$$

Si $X(t)$ es estacionario, $\mu_X(t) = \mu_X$, luego $\mu_Y(t)$ también es constante e igual a

$$\mu_Y = \mu_X \int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt \quad (3.242)$$

La correlación cruzada de la entrada y la salida es

$$\begin{aligned} R_{YX}(t_1, t_2) &= E\{Y(t_1)X^*(t_2)\} = E\left\{X^*(t_2) \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau)h(t_1 - \tau)d\tau\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1 - \tau)R_X(\tau, t_2)d\tau \\ &= h(t_1) * R_X(t_1, t_2) \end{aligned} \quad (3.243)$$

Por último, la autocorrelación de la salida es

$$\begin{aligned} R_Y(t_1, t_2) &= E\{Y(t_1)Y^*(t_2)\} = E\left\{Y(t_1) \int_{-\infty}^{\infty} h^*(\tau)X^*(t_2 - \tau)d\tau\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h^*(\tau)R_{YX}(t_1, t_2 - \tau)d\tau \\ &= R_{YX}(t_1, t_2) * h^*(t_2) \end{aligned} \quad (3.244)$$

Combinando (3.243) y (3.244), resulta

$$R_Y(t_1, t_2) = h(t_1) * R_X(t_1, t_2) * h^*(t_2) \quad (3.245)$$

En la ecuación anterior, hay dos operaciones de convolución. Debemos efectuar la primera sobre la variable t_1 y la segunda sobre la variable t_2 . Las Ecuaciones (3.241) y (3.245) ponen de manifiesto que tanto la media como la autocorrelación de la salida dependen exclusivamente de la media y la autocorrelación de la entrada, respectivamente, así como de la respuesta al impulso del sistema.

Procesos cicloestacionarios. Por las propiedades de la convolución, podemos escribir,

$$R_Y(t_1 + T, t_2 + T) = h(t_1) * R_X(t_1 + T, t_2 + T) * h^*(t_2) \quad (3.246)$$

Si $X(t)$ es cicloestacionario con periodo T , se verifica que $R_X(t_1 + T, t_2 + T) = R_X(t_1, t_2)$, luego

$$R_Y(t_1 + T, t_2 + T) = R_Y(t_1, t_2) \quad (3.247)$$

y, por tanto, $Y(t)$ también es cicloestacionario con el mismo periodo.

Procesos estacionarios. Del mismo modo, si $X(t)$ es estacionario, (3.247) se verifica para cualquier valor de T y, en consecuencia, $Y(t)$ también es estacionario. En tal caso, podemos

expresar la autocorrelación como función de una sola variable. Llamando $\tau = t_1 - t_2$, la correlación cruzada de la entrada y la salida es

$$\begin{aligned}
 R_{YX}(t_1, t_2) &= h(t_1) * R_X(t_1 - t_2) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1 - t) R_X(t - t_2) dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2 + \tau - t) R_X(t - t_2) dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau - t) R_X(t) dt \\
 &= h(\tau) * R_X(\tau)
 \end{aligned} \tag{3.248}$$

De acuerdo con este resultado, $R_{YX}(t_1, t_2)$ depende solamente de $\tau = t_1 - t_2$. Por tanto, X e Y son conjuntamente estacionarios.

Por último, la autocorrelación de la salida es

$$\begin{aligned}
 R_Y(\tau) &= R_Y(t_1, t_2) = R_{YX}(t_1, t_2) * h^*(t_2) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} h^*(t) R_{YX}(t_1 - t_2 + t) dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} h^*(t) \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau + t - t') R_X(t') dt' dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} R_X(t') \int_{-\infty}^{\infty} h^*(t) h(\tau + t - t') dt dt' \\
 &= R_X(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau) \\
 &= R_X(\tau) * r_h(\tau)
 \end{aligned} \tag{3.249}$$

donde $r_h(\tau)$ es la función de ambigüedad temporal de $h(t)$ definida en (2.57).

Todos estos resultados se extienden de modo inmediato al caso discreto: si $X[n]$ es un proceso estocástico discreto e $Y[n] = X[n] * h[n]$, se verifica

$$\mu_Y[n] = h[n] * \mu_X[n] \tag{3.250}$$

Si $X[n]$ es estacionario, $\mu_X[n] = \mu_X$, y

$$\mu_Y = \mu_X \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \tag{3.251}$$

Asimismo, de forma general se verifica que

$$R_{YX}[n_1, n_2] = h[n_1] * R_X[n_1, n_2] \tag{3.252}$$

$$R_Y[n_1, n_2] = h[n_1] * R_X[n_1, n_2] * h^*[n_2] \tag{3.253}$$

Si $X[n]$ es cicloestacionario de periodo N , $Y[n]$ también lo es, y con el mismo periodo. Si $X[n]$ es estacionario, $Y[n]$ también es estacionario, $X[n]$ e $Y[n]$ son conjuntamente estacionarios y

$$R_{YX}[k] = h[k] * R_X[k] \quad (3.254)$$

$$R_Y[k] = R_X[k] * r_h[k] \quad (3.255)$$

donde $r_h[n] = h[n] * h^*[-n]$ es la función de ambigüedad temporal de $h[n]$ (definida en (2.50)).

Ejemplo 3.25

Sea $R[n]$ un proceso de ruido blanco de varianza unidad. El proceso estacionario $Y[n]$ resultado de pasar $R[n]$ por un filtro lineal e invariante y causal, dado por la ecuación en diferencias

$$Y[n] = 0,6 \cdot Y[n - 1] + R[n] \quad (3.256)$$

es estacionario. Dado que la respuesta al impulso de este sistema es $h[n] = 0,6^n u[n]$, la media del proceso será, de acuerdo con (3.250)

$$\mu_Y[n] = h[n] * \mu_R[n] = 0 \quad (3.257)$$

y su autocorrelación

$$R_Y[k] = R_R[k] * r_h[k] = h[k] * h[-k] = \frac{0,6^{|k|}}{0,64} \quad (3.258)$$

También pueden extenderse todos los resultados anteriores al análisis de procesos generados mediante *modulación de pulsos en amplitud* que es la base de las modulaciones de amplitud que estudiaremos en el Capítulo 5. Denominamos de este modo a aquellos procesos continuos $Y(t)$ que se obtienen a partir de un proceso discreto $X[n]$ de entrada mediante una transformación de la forma⁵

$$Y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n]h(t - nT) \quad (3.259)$$

Por ejemplo, si $\mu_X[n]$ es la media del proceso de entrada, la media del proceso de salida es

$$\mu_Y(t) = E\{Y(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu_X[n]h(t - nT) \quad (3.260)$$

⁵Los procesos generados de este modo pueden interpretarse como procesos de salida de sistemas lineales e invariantes en el tiempo con entradas discretas: son lineales porque, en virtud de (3.259), si $X_1[n]$ y $X_2[n]$ producen las salidas $Y_1(t)$ y $Y_2(t)$, respectivamente, entonces $a_1X_1[n] + a_2X_2[n]$ produce como salida $a_1Y_1(t) + a_2Y_2(t)$; son invariantes en el sentido de que $X[n - n_0]$ produce como salida $Y(t - n_0T)$. La señal $h(t)$ es la respuesta al impulso $\delta[n]$.

Si $X[n]$ es estacionario, $\mu_X(t) = \mu_X$ y

$$\mu_Y(t) = \mu_X \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t - nT) \quad (3.261)$$

por tanto, $\mu_Y(t)$ es periódica y de periodo T .

La correlación cruzada de la entrada y la salida es

$$\begin{aligned} R_{YX}(t_1, n_2) &\doteq E\{Y(t_1)X^*[n_2]\} = E\left\{X^*[n_2] \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]h(t_1 - kT)\right\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_X[k, n_2]h(t_1 - kT) \end{aligned} \quad (3.262)$$

Por último, la autocorrelación de la salida es

$$\begin{aligned} R_Y(t_1, t_2) &= E\{Y(t_1)Y^*(t_2)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} E\{X[n]X^*[l]\} h(t_1 - nT)h^*(t_2 - lT) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} R_X[n, l]h(t_1 - nT)h^*(t_2 - lT) \end{aligned} \quad (3.263)$$

Si $X[n]$ es un proceso estacionario, la autocorrelación de $Y(t)$ se puede expresar como

$$R_Y(t_1, t_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} R_X[n - l]h(t_1 - nT)h^*(t_2 - lT) \quad (3.264)$$

y se comprueba fácilmente que $R_Y(t_1, t_2) = R_Y(t_1 + T, t_2 + T)$. Como, además, de acuerdo con (3.261), $\mu_Y(t)$ tiene periodo T , podemos concluir que $Y(t)$ es un proceso cicloestacionario de periodo T .

3.3.5. Densidad espectral de potencia

En el capítulo anterior hemos visto las ventajas del análisis de Fourier para caracterizar señales y el comportamiento de sistemas lineales e invariantes. Por este motivo, resulta de interés aplicar el análisis de Fourier a procesos estocásticos. Cómo hacerlo no es algo inmediato.

Dado que las realizaciones de un proceso estocástico son señales, resulta tentador definir la Transformada de Fourier de un proceso estocástico $X(t)$ como un nuevo proceso cuyas realizaciones son las Transformadas de Fourier de las realizaciones de $X(t)$, $x(t)$. Sin embargo, hay una dificultad insalvable en esta definición: como hemos analizado anteriormente, las realizaciones de los procesos estocásticos estacionarios y cicloestacionarios son señales de potencia media finita y no nula y energía infinita y, por tanto, no poseen Transformada de Fourier (las condiciones para la existencia de la Transformada de Fourier podemos encontrarlas en la Página 35 y siguientes).

Sin embargo, en general, la Transformada de Fourier de un proceso estocástico truncado (limitado en el tiempo) sí puede calcularse. Sea $X(t)$ un proceso estocástico de media $\mu_X(t)$ y autocorrelación $R_X(t_1, t_2)$. Consideremos el proceso truncado $X_T(t)$ dado por

$$X_T(t) = \begin{cases} X(t) & \text{si } |t| \leq T \\ 0 & \text{si } |t| > T \end{cases} \quad (3.265)$$

La Transformada de Fourier de $X_T(t)$, dada por

$$X_T(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X_T(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-T}^{T} X(t)e^{-j\omega t} dt \quad (3.266)$$

es, a su vez, un proceso estocástico de media

$$E\{X_T(j\omega)\} = \int_{-T}^{T} \mu_X(t)e^{-j\omega t} dt \quad (3.267)$$

y valor cuadrático medio

$$E\{|X_T(j\omega)|^2\} = E\left\{\left|\int_{-T}^{T} X(t)e^{-j\omega t} dt\right|^2\right\} \quad (3.268)$$

Si el proceso es estacionario o cicloestacionario, el valor cuadrático medio crece indefinidamente con T hasta hacerse infinito, pero podemos evitar este efecto normalizando (3.268) respecto a la longitud del intervalo de integración, $2T$.

Si consideramos una realización del proceso $X_T(t)$, $x_T(t)$, el módulo al cuadrado de su Transformada de Fourier, de acuerdo con la interpretación del Teorema de Rayleigh, recibe el nombre de densidad espectral de energía. La Ecuación (3.268) admite la interpretación de una densidad espectral de energía media y, normalizada por el intervalo de integración, puede interpretarse como una densidad espectral de potencia media. Esto nos lleva a definir formalmente la *densidad espectral de potencia* o dep (“power spectral density”, psd) de un proceso estocástico como

$$S_X(j\omega) \doteq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E\{|X_T(j\omega)|^2\}}{2T} \quad (3.269)$$

Obsérvese que, por definición, la dep es siempre real y no negativa: para todo ω ,

$$S_X(j\omega) \geq 0 \quad (3.270)$$

Asimismo, por las propiedades de la Transformada de Fourier, la dep de un proceso estocástico real es una función par.

Nuestro objetivo ahora es determinar qué relación existe entre la dep tal y como se ha definido y las medidas que hemos empleado para caracterizar los procesos estocásticos, y

más concretamente, la relación de la dep con la función de autocorrelación. Desarrollando la expresión (3.268)

$$\begin{aligned} E\{|X_T(j\omega)|^2\} &= E\left\{\int_{-T}^T X(t_1)e^{-j\omega t_1}dt_1 \int_{-T}^T X^*(t_2)e^{j\omega t_2}dt_2\right\} \\ &= \int_{-T}^T \int_{-T}^T E\{X(t_1)X^*(t_2)\}e^{-j\omega(t_1-t_2)}dt_1dt_2 \\ &= \int_{-T}^T \int_{-T}^T R_X(t_1, t_2)e^{-j\omega(t_1-t_2)}dt_1dt_2 \end{aligned} \quad (3.271)$$

luego

$$S_X(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-T}^T R_X(t_1, t_2)e^{-j\omega(t_1-t_2)}dt_1dt_2 \quad (3.272)$$

y, haciendo el cambio de variable $\tau = t_1 - t_2$, resulta

$$S_X(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-T-t_2}^{T-t_2} R_X(t_2 + \tau, t_2)e^{-j\omega\tau}d\tau dt_2 \quad (3.273)$$

Bajo ciertas restricciones sobre la función de autocorrelación, podemos simplificar esta expresión hasta llegar a

$$S_X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{R}_X(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \quad (3.274)$$

donde

$$\bar{R}_X(\tau) \doteq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T R_X(t + \tau, t)dt \quad (3.275)$$

resultado que se conoce como Teorema de Wiener-Khinchine, y que se encuentra desarrollado en el Apéndice 3.A.

Analizaremos ahora este resultado para los tipos de procesos de mayor interés: cicloestacionarios y estacionarios.

Procesos cicloestacionarios. Si el proceso $X(t)$ es cicloestacionario de periodo T_0 , la función de autocorrelación $R_X(t + \tau, t)$ es una función periódica de t y, por tanto, el promedio en (3.275) se puede calcular sobre un único periodo,

$$\bar{R}_X(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} R_X(t + \tau, t)dt \quad (3.276)$$

Procesos estacionarios. Si el proceso $X(t)$ es estacionario se cumple que $R_X(t + \tau, t) = R_X(\tau)$ y, por tanto $\bar{R}_X(\tau) = R_X(\tau)$, de modo que

$$S_X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \quad (3.277)$$

Por tanto, la densidad espectral de potencia de un proceso estacionario $X(t)$ es igual a la Transformada de Fourier de su función de autocorrelación.

De acuerdo con esta definición, nótese que

$$R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (3.278)$$

de modo que

$$E\{|X(t)|^2\} = R_X(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(j\omega) d\omega \quad (3.279)$$

Si además el proceso es ergódico, la ecuación anterior indica que la potencia media de cualquier realización del proceso puede obtenerse mediante integración de $S_X(j\omega)$ sobre todo el rango de frecuencias, lo que también justifica la denominación de “densidad espectral de potencia” para S_X .

Aún más, la propiedad de ergodicidad nos garantiza que

$$S_X(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left| \int_{-T}^T x(t) e^{-j\omega t} dt \right|^2 \quad (3.280)$$

siendo $x(t)$ una realización de $X(t)$, y la dep es también una medida de la distribución de la potencia a diferentes frecuencias de cualquier realización. También podemos deducir que, para las componentes espectrales en las que la dep sea nula, el contenido espectral de cualquier realización también lo será.

Procesos discretos. Expresiones completamente análogas a las anteriores resultan en el caso discreto: sea $X[n]$ un proceso estocástico de autocorrelación $R_X[n_1, n_2]$, y sea el proceso truncado $X_N[n]$ dado por

$$X_N[n] = \begin{cases} X[n] & \text{si } |n| \leq N \\ 0 & \text{si } |n| > N \end{cases} \quad (3.281)$$

Se define la densidad espectral de potencia de $X[n]$ como

$$S_X(e^{j\omega}) \doteq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} E\{|X_N(e^{j\omega})|^2\} \quad (3.282)$$

donde $X_N(e^{j\omega})$ es la Transformada de Fourier de $X_N[n]$. Siguiendo el mismo procedimiento que en el caso continuo, se puede llegar a la expresión alternativa

$$S_X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{R}_X[k] e^{-j\omega k} \quad (3.283)$$

siendo

$$\bar{R}_X[k] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N R_X[n+k, n] \quad (3.284)$$

que, para procesos cicloestacionarios de periodo N_0 se reduce a

$$\bar{R}_X[k] = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} R_X[n+k, n] \quad (3.285)$$

y, para procesos estacionarios,

$$\bar{R}_X[k] = R_X[k] \quad (3.286)$$

Procesos blancos. Si $X(t)$ (o $X[n]$) es un proceso estacionario blanco de autocorrelación $R_X(\tau) = \eta\delta(\tau)$ (o $R_X[k] = \eta\delta[k]$), su densidad espectral de potencia es constante a todas las frecuencias.

$$S_X(j\omega) = \eta \quad (3.287)$$

$$(S_X(e^{j\omega}) = \eta) \quad (3.288)$$

Densidad espectral de potencia a la salida de sistemas lineales

Resulta interesante analizar la densidad espectral de potencia de procesos estocásticos que pasan a través de filtros lineales. Si retomamos la expresión para la autocorrelación de salida obtenida en (3.245), podemos escribir

$$R_Y(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)h^*(\tau_2)R_X(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \quad (3.289)$$

La autocorrelación promedio es

$$\begin{aligned} \bar{R}_Y(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T R_Y(t + \tau, t) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)h^*(\tau_2)R_X(t + \tau - \tau_1, t - \tau_2)d\tau_1 d\tau_2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)h^*(\tau_2) \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T R_X(t + \tau - \tau_1, t - \tau_2)dt d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)h^*(\tau_2) \bar{R}_X(\tau + \tau_2 - \tau_1)d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \bar{R}_X(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau) \end{aligned} \quad (3.290)$$

Y aplicando la propiedad de convolución a (3.290), obtenemos

$$S_Y(j\omega) = S_X(j\omega)|H(j\omega)|^2 \quad (3.291)$$

De modo análogo, si $Y[n]$ es el proceso discreto de salida cuando otro proceso discreto $X[n]$ pasa a través de un sistema lineal e invariante en el tiempo de respuesta al impulso $h[n]$, la densidad espectral de potencia de $Y[n]$ se puede expresar como

$$S_Y(e^{j\omega}) = S_X(e^{j\omega})|H(e^{j\omega})|^2 \quad (3.292)$$

Por último, si $Y(t)$ es un proceso generado modulando pulsos en amplitud mediante $X[n]$, dado por (3.259), la dep de $Y(t)$ se puede relacionar con la de $X[n]$. Para ello, calcularemos en primer lugar

$$\bar{R}_Y(\tau) = \lim_{T' \rightarrow \infty} \frac{1}{2T'} \int_{-T'}^{T'} R_Y(t + \tau, t) dt \quad (3.293)$$

Sustituyendo R_Y por la expresión obtenida en (3.263), y considerando solamente los valores de T' múltiplos de T , podemos escribir

$$\begin{aligned} \bar{R}_Y(\tau) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2NT} \int_{-NT}^{NT} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} R_X[k, l] h(t + \tau - kT) h^*(t - lT) dt \\ &\quad (3.294) \end{aligned}$$

Descomponiendo la integral en suma de integrales por tramos de longitud T , obtenemos

$$\begin{aligned} \bar{R}_Y(\tau) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2NT} \sum_{m=-N}^{N-1} \int_{mT}^{(m+1)T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} R_X[k, l] h(t + \tau - kT) h^*(t - lT) dt \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2NT} \sum_{m=-N}^{N-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} R_X[k, l] \int_0^T h(t + \tau + (m - k)T) \times \\ &\quad \times h^*(t + (m - l)T) dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_0^T h(t + \tau + kT) h^*(t + lT) dt \times \\ &\quad \times \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{m=-N}^{N-1} R_X[m - k, m - l] \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \bar{R}_X[l - k] \int_0^T h(t + \tau + kT) h^*(t + lT) dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{R}_X[m] \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_0^T h(t + \tau + (l - m)T) h^*(t + lT) dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{R}_X[m] \int_{-\infty}^{\infty} h(t + \tau - mT) h^*(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{R}_X[m] r_h(\tau - mT) \quad (3.295) \end{aligned}$$

siendo $r_h(t) = h(t) * h^*(-t)$ la función de ambigüedad temporal de $h(t)$. Esta expresión se reduce a

$$\bar{R}_Y(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_X[m] r_h(\tau - mT) \quad (3.296)$$

cuando $X[n]$ es estacionario.

La densidad espectral de potencia es la Transformada de Fourier de (3.295), de donde

$$\begin{aligned} S_Y(j\omega) &= \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{R}_X[m] |H(j\omega)|^2 e^{-j\omega m T} \\ &= \frac{1}{T} S_X(e^{j\omega T}) |H(j\omega)|^2 \end{aligned} \quad (3.297)$$

Muestreo de procesos estacionarios

Sea $X(t)$ un proceso estacionario con función de autocorrelación $R_X(\tau)$, y definamos el proceso discreto $Y[n] \doteq X(nT)$, resultante de muestrear $X(t)$ con periodo T , y con función de autocorrelación $R_Y[n_1, n_2]$. Entonces, $R_Y[n_1 + k, n_1] = R_X(n_1 T + kT, n_1 T) = R_X(kT) = R_Y[k]$, para cualquier entero k . Como consecuencia, el proceso $Y[n]$ es estacionario y su función de autocorrelación es el resultado de muestrear la correspondiente a $X(t)$ con periodo T . Por tanto, las transformadas de ambas funciones de autocorrelación están relacionadas a través de (2.237) que para el presente caso resulta en

$$S_Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_X \left(j \frac{\omega}{T} - j \frac{2\pi k}{T} \right) \quad (3.298)$$

3.3.6. Procesos gausianos, señal y ruido

Como se ha mencionado anteriormente, la caracterización de un proceso a partir de su media y su función de autocorrelación no es completa, y podemos encontrar procesos que posean funciones de distribución distintas y cuyas media y función de autocorrelación sean idénticas. Se argumentó también que la caracterización completa de procesos es poco práctica por lo engorroso de la manipulación de las funciones de distribución de cualquier orden. Sin embargo, existe una familia de procesos cuya caracterización completa es sencilla y que, además, aparece frecuentemente debido al teorema central del límite: los procesos gausianos.

Diremos que un proceso $X(t)$ ($X[n]$) real⁶ es gausiano si, para cualquier valor de N y cualquier conjunto arbitrario de N instantes temporales $\{t_0, \dots, t_{N-1}\}$ ($\{n_0, \dots, n_{N-1}\}$), la función de densidad de probabilidad de orden N ,

$$f_{X(t_0), \dots, X(t_{N-1})}(x_0, \dots, x_{N-1})$$

$$(f_{X[n_0], \dots, X[n_{N-1}]}(x_0, \dots, x_{N-1}))$$

es gausiana.

Los procesos gausianos poseen, entre otras, las siguientes propiedades:

⁶En el apartado siguiente consideraremos extensamente los procesos gausianos complejos.

- P 1. La caracterización completa del proceso puede obtenerse a partir de su media y su función de autocorrelación. Esta propiedad es consecuencia de la definición unívoca de una variable aleatoria gausiana mediante su media y varianza.
- P 2. Si un proceso gausiano es estacionario en sentido amplio, también lo es en sentido estricto. La razón es la misma que la de la propiedad anterior⁷.
- P 3. La salida de un sistema lineal e invariante, cuando la entrada es otro proceso gausiano, es también un proceso gausiano. Esta propiedad es consecuencia de que cualquier combinación lineal de variables aleatorias gausianas es otra variable aleatoria gausiana.
- P 4. Si un proceso gausiano posee media nula, es ergódico si cumple (3.227) (o (3.224)).

Podemos definir además los procesos conjuntamente gausianos: dos procesos gausianos $X(t)$ e $Y(t)$ ($X[n]$ e $Y[n]$) son conjuntamente gausianos si para cualesquiera valores de N y M y cualesquiera conjuntos arbitrarios de instantes temporales $\{t_0, \dots, t_{N-1}\}$ y $\{\tau_0, \dots, \tau_{M-1}\}$ ($\{n_0, \dots, n_{N-1}\}$ y $\{k_0, \dots, k_{M-1}\}$), la función de densidad de probabilidad de orden $N + M$

$$f_{X(t_0), \dots, X(t_{N-1}), Y(\tau_0), \dots, Y(\tau_{M-1})}(x_0, \dots, x_{N-1}, y_0, \dots, y_{M-1}) \\ (f_{X[n_0], \dots, X[n_{N-1}], Y[k_0], \dots, Y[k_{M-1}]}(x_0, \dots, x_{N-1}, y_0, \dots, y_{M-1}))$$

es gausiana.

En procesos conjuntamente gausianos incorrelación e independencia estadística son propiedades equivalentes, puesto que las funciones de densidad de probabilidad conjuntas son gausianas multidimensionales.

Ruido gausiano y blanco

Por ruido entendemos toda perturbación de carácter aleatorio sobre una señal o proceso que resulta de interés. En un procedimiento de medida el ruido es el conjunto de perturbaciones y errores de medida que nos impiden conoceer de forma exacta la señal de interés, que es la magnitud que deseamos conocer. En un sistema de comunicaciones la señal que deseamos conocer en el receptor es el mensaje que fue transmitido y el ruido es el conjunto de perturbaciones se suman a la señal en su paso por el canal.

Uno de los tipos de ruido más importante es el denominado *ruido térmico*, que está presente en todo circuito eléctrico o electrónico y afecta a la señal de interés de forma aditiva. Este ruido está provocado por el movimiento desordenado de los electrones en un conductor y posee una dep aproximadamente plana para las frecuencias habituales en sistemas de comunicaciones.

Un buen modelo para el ruido térmico son los procesos gausianos blancos. Gausiano porque el ruido térmico es la contribución de muchas perturbaciones del mismo tipo (la corriente generada por el movimiento de cada electrón) y resulta de aplicación el teorema

⁷Esta propiedad no se cumple para procesos gausianos complejos, como veremos en el siguiente apartado.

central del límite, y blanco por poseer una dep aproximadamente plana. Adicionalmente, se supone también su ergodicidad. El valor de la dep suele denotarse como $N_0/2$ y sus unidades son W/Hz, como veremos más adelante. Así, queda definido mediante

$$S_X(j\omega) = \frac{N_0}{2} \quad (3.299)$$

y su función de autocorrelación es

$$R_X(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau) \quad (3.300)$$

lo que indica que su potencia es infinita. No obstante, al atravesar cualquier sistema de banda limitada su potencia se torna finita (aunque, naturalmente, pierde el carácter de blanco).

Cuando a la entrada de un sistema lineal e invariante de función de transferencia $H(j\omega)$ tenemos ruido gausiano y blanco, la dep a la salida es

$$S_Y(j\omega) = \frac{N_0}{2} |H(j\omega)|^2 \quad (3.301)$$

y la potencia de ruido a la salida se obtiene integrando $S_Y(j\omega)$. Si el sistema es un filtro (paso bajo o paso banda) ideal de ancho de banda W , la potencia de ruido a la salida es

$$R_Y(0) = \sigma_Y^2 = \frac{1}{2\pi} \frac{N_0}{2} 2W = \frac{N_0 W}{2\pi} \quad (3.302)$$

que es igual a $\sigma_Y^2 = N_0 W'$ si expresamos el ancho de banda en Hz, $W' = W/2\pi$, y donde verificamos que las dimensiones de $N_0/2$ son W/Hz.

Relación señal a ruido

Comúnmente, el ruido distorsiona la señal de forma aditiva:

$$Y(t) = X(t) + N(t) \quad (3.303)$$

donde $X(t)$ es el proceso o señal de interés, $Y(t)$ es la observación de que disponemos y $N(t)$ es la componente de ruido, que se supone independiente de $X(t)$ y de media nula. Por simplicidad supondremos que todos los procesos son estacionarios y ergódicos.

La función de autocorrelación de $Y(t)$ es

$$R_Y(\tau) = E\{(X(t) + N(t))(X(t) + N(t))^*\} \quad (3.304)$$

$$= R_X(\tau) + R_N(\tau) + 2\operatorname{Re}\{R_{XN}(\tau)\} = R_X(\tau) + R_N(\tau) \quad (3.305)$$

que, evaluada para $\tau = 0$, es

$$R_Y(0) = \sigma_Y^2 = R_X(0) + R_N(0) = \sigma_X^2 + \sigma_N^2 \quad (3.306)$$

lo que nos dice que la potencia de $Y(t)$ es la suma de las potencias de la señal y del ruido. Una medida de la calidad de la observación $Y(t)$ es el cociente entre estas últimas. Esta

medida se conoce como relación señal a ruido (“*Signal to Noise Ratio*”, SNR), y puede expresarse en unidades naturales

$$\text{SNR} = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_N^2} \quad (3.307)$$

o en unidades logarítmicas como $10 \log_{10} \text{SNR}$ cuya unidad de medida es el decibelio o dB.

La definición de relación señal a ruido para procesos en tiempo discreto es totalmente análoga.

3.3.7. Procesos gausianos complejos

Una de las mayores dificultades que encontraremos a la hora de analizar rigurosamente el efecto del ruido gausiano o calcular el espectro de potencia de la señal transmitida en sistemas de comunicaciones paso banda es la existencia de procesos estocásticos complejos. En este apartado introducimos algunos conceptos de utilidad y demostramos algunas propiedades interesantes que serán útiles en capítulos posteriores, por ejemplo, para caracterizar estadísticamente el ruido en los receptores digitales.

A lo largo de este apartado consideraremos únicamente procesos complejos de media cero (la extensión a procesos de media no nula es inmediata). También emplearemos la notación siguiente: si $Z(t)$ es un proceso complejo, entonces $Z_r(t)$ y $Z_i(t)$ denotarán sus partes real e imaginaria respectivamente, de modo que $Z(t) = Z_r(t) + jZ_i(t)$.

Diremos que un proceso complejo $Z(t)$ es gausiano si $Z_r(t)$ y $Z_i(t)$ son procesos conjuntamente gausianos. Mientras para que un proceso gausiano real sea estacionario en sentido estricto basta con que lo sea en sentido amplio, para procesos gausianos complejos la estacionariedad en sentido estricto no se deduce de la estacionariedad en sentido amplio.

Por definición, para que $Z(t)$ de media cero sea estacionario en sentido amplio basta con que

$$R_Z(t + \tau, t) = E\{Z(t + \tau)Z^*(\tau)\} = R_Z(\tau) \quad (3.308)$$

donde $R_Z(\tau)$ es la función de autocorrelación de $Z(t)$. Para que $Z(t)$ sea estacionario en sentido estricto hace falta que *todos* sus estadísticos de segundo orden sean invariantes en el tiempo. Esto equivale a decir que $Z_r(t)$ y $Z_i(t)$ sean conjuntamente estacionarios en sentido amplio, para lo cual debe cumplirse que

$$R_{Zr}(t + \tau, t) = E\{Z_r(t + \tau)Z_r(t)\} = R_{Zr}(\tau) \quad (3.309)$$

$$R_{Zi}(t + \tau, t) = E\{Z_i(t + \tau)Z_i(t)\} = R_{Zi}(\tau) \quad (3.310)$$

$$R_{Zr,Zi}(t + \tau, t) = E\{Z_r(t + \tau)Z_i(t)\} = R_{Zr,Zi}(\tau) = R_{Zi,Zr}(-\tau) \quad (3.311)$$

Las Condiciones (3.309)-(3.311) son suficientes para que se verifique (3.308), pero no a la inversa. Sin embargo, definiendo la *función de autocorrelación complementaria*

$$Q_Z(t + \tau, t) \doteq E\{Z(t + \tau)Z(\tau)\} \quad (3.312)$$

es fácil deducir las relaciones

$$\begin{aligned} R_Z(t + \tau, t) &= R_{Zr}(t + \tau, t) + R_{Zi}(t + \tau, t) - jR_{Zr,Zi}(t + \tau, t) + jR_{Zi,Zr}(t + \tau, t) \\ Q_Z(t + \tau, t) &= R_{Zr}(t + \tau, t) - R_{Zi}(t + \tau, t) + jR_{Zr,Zi}(t + \tau, t) + jR_{Zi,Zr}(t + \tau, t) \end{aligned} \quad (3.313)$$

y, a partir de estas, las siguientes:

$$R_{Zr}(t + \tau, t) = \frac{1}{2}\mathcal{Re}\{R_Z(t + \tau, t) + Q_Z(t + \tau, t)\} \quad (3.314)$$

$$R_{Zi}(t + \tau, t) = \frac{1}{2}\mathcal{Re}\{R_Z(t + \tau, t) - Q_Z(t + \tau, t)\} \quad (3.315)$$

$$R_{Zr,Zi}(t + \tau, t) = \frac{1}{2}\mathcal{Im}\{R_Z(t + \tau, t) + Q_Z(t + \tau, t)\} \quad (3.316)$$

$$R_{Zi,Zr}(t + \tau, t) = \frac{1}{2}\mathcal{Im}\{-R_Z(t + \tau, t) + Q_Z(t + \tau, t)\} \quad (3.317)$$

Por tanto, es posible expresar R_{Zr} , R_{Zi} , $R_{Zr,Zi}$ y $R_{Zi,Zr}$ como funciones de R_Z y Q_Z , y viceversa. Si las primeras no dependen de t , tampoco lo harán las segundas, y viceversa. En consecuencia, las condiciones,

$$R_Z(t + \tau, t) = R_Z(\tau) \quad (3.318)$$

$$Q_Z(t + \tau, t) = Q_Z(\tau) \quad (3.319)$$

son necesarias y suficientes para que $Z(t)$ sea estrictamente estacionario.

De modo análogo, se deduce que, dado un valor T , las condiciones

$$R_Z(t + \tau, t) = R_Z(t + T + \tau, t + T) \quad (3.320)$$

$$Q_Z(t + \tau, t) = Q_Z(t + T + \tau, t + T) \quad (3.321)$$

son necesarias y suficientes para que $Z(t)$ sea estrictamente cicloestacionario.

Simetría circular

En lo sucesivo, resultará de interés el análisis de procesos cuya función complementaria es nula, es decir

$$Q_Z(t + \tau, t) = 0 \quad (3.322)$$

Un proceso gausiano complejo que cumple la Condición (3.322) se dice que es *circularmente simétrico*. La simetría circular es, obviamente, una condición suficiente para que un proceso estacionario gausiano en sentido amplio lo sea también en sentido estricto.

Haciendo uso de las relaciones (3.313), se obtiene que la Condición (3.322) es equivalente a

$$R_{Zr}(t + \tau, t) = R_{Zi}(t + \tau, t) \quad (3.323)$$

$$R_{Zr,Zi}(t + \tau, t) = -R_{Zi,Zr}(t + \tau, t) \quad (3.324)$$

Asimismo, la función de autocorrelación se simplifica a

$$R_Z(t + \tau, t) = 2R_{Zr}(t + \tau, t) - 2jR_{Zr,Zi}(t + \tau, t) \quad (3.325)$$

Ejemplo 3.26

Sea $Z(t)$ un proceso gausiano estacionario con partes real e imaginaria incorrelacionadas, siendo $R_{Zr}(\tau) = R_{Zi}(\tau) = \eta\delta(\tau)$. En virtud de las relaciones (3.313), se deduce que

$$R_Z(t + \tau, t) = 2\eta\delta(\tau) \quad (3.326)$$

$$Q_Z(t + \tau, t) = 0 \quad (3.327)$$

Por tanto, $Z(t)$ es circularmente simétrico.

Dado un proceso gausiano circularmente simétrico $Z(t) = Z_r(t) + jZ_i(t)$, es inmediato deducir a partir de la Condición (3.323) que las varianzas (autocorrelación en $\tau = 0$) de $Z_r(t)$ y $Z_i(t)$ son idénticas. Además, teniendo en cuenta que $R_Z(t, t) = E\{|Z(t)|^2\}$ tiene que ser necesariamente real, a partir de (3.324) podemos deducir que $R_{Zr,Zi}(t, t) = -R_{Zi,Zr}(t, t) = 0$, lo que demuestra que $Z_r(t)$ y $Z_i(t)$ están incorrelacionados para cualquier instante de tiempo (y, por tanto, son independientes, por ser gausianos). Esto implica que las curvas de nivel de la función de densidad de probabilidad conjunta $f_{Z_r(t),Z_i(t)}(z_r, z_i)$ son circulares, y de ahí la denominación *simetría circular*.

Observemos, no obstante, que la incorrelación de $Z_r(t)$ y $Z_i(t)$ no implica que $Z_r(t_1)$ y $Z_i(t_2)$ con $t_1 \neq t_2$ estén incorrelacionados. Para que eso suceda $R_Z(t_1, t_2)$ ha de ser real (algo que se da, por ejemplo, cuando $Z(t)$ es blanco).

En los apartados siguientes analizaremos la (ciclo)estacionariedad de un proceso complejo obtenido mediante transformación de otro proceso gausiano (ciclo)estacionario. Para ello, prestaremos atención al comportamiento de las funciones de autocorrelación y la función complementaria.

Filtrado complejo lineal e invariante de un proceso complejo

Sea $Z(t)$ un proceso complejo obtenido al filtrar con un filtro $h(t)$ (posiblemente complejo) otro proceso complejo $X(t)$, de tal modo que

$$Z(t) = X(t) * h(t) \quad (3.328)$$

Observamos que, si $X(t)$ es gausiano, entonces $Z(t)$ se obtiene a partir de combinaciones lineales de variables gausianas, y por tanto es un proceso gausiano.

Por otra parte, en el Apartado 3.3.4 ya vimos que, de acuerdo con (3.245) la autocorrelación de la salida del filtro puede expresarse como

$$R_Z(t_1, t_2) = h(t_1) * R_X(t_1, t_2) * h^*(t_2) \quad (3.329)$$

Siguiendo un procedimiento completamente análogo al del Apartado 3.3.4 se puede encontrar una expresión equivalente para Q_Z ,

$$Q_Z(t_1, t_2) = h(t_1) * Q_X(t_1, t_2) * h(t_2) \quad (3.330)$$

Como consecuencia directa de las expresiones (3.329) y (3.330), se deducen las siguientes propiedades:

- Si $X(t)$ es (ciclo)estacionario en sentido amplio, $Z(t)$ también lo es.
- Si $X(t)$ es (ciclo)estacionario en sentido estricto, $Z(t)$ también lo es.
- Si $X(t)$ es circularmente simétrico, $Z(t)$ también lo es.

Si $X(t)$ es estrictamente estacionario, entonces se pueden deducir las relaciones

$$R_Z(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau) \quad (3.331)$$

$$Q_Z(\tau) = Q_X(\tau) * h(\tau) * h(-\tau) \quad (3.332)$$

(la primera, por aplicación directa de (3.249); la segunda se obtiene siguiendo un procedimiento completamente análogo al que condujo a esta) y, aplicando Transformadas de Fourier

$$S_Z(j\omega) = S_X(j\omega)|H(j\omega)|^2 \quad (3.333)$$

$$T_Z(j\omega) = T_X(j\omega)H(j\omega)H(-j\omega) \quad (3.334)$$

donde T_X y T_Z son las Transformadas de Fourier de Q_X y Q_Z , respectivamente.

Observe que, en virtud de (3.334), la simetría circular de $X(t)$ es la única que garantiza que $Z(t)$ es circularmente simétrico para cualquier filtro $h(t)$. No obstante, aunque $X(t)$ no sea circularmente simétrico, $Z(t)$ puede serlo, dependiendo de la forma del filtro.

Supongamos, por ejemplo, que $X(t)$ es real. En tal caso, $Q_X(\tau) = R_X(\tau)$ y la condición necesaria y suficiente para que $Z(t)$ sea circularmente simétrico se puede escribir como

$$S_X(j\omega)H(j\omega)H(-j\omega) = 0 \quad (3.335)$$

Ejemplo 3.27

Si $S_X(j\omega)$ no es nulo a ninguna frecuencia (por ejemplo, si $X(t)$ es un proceso blanco) y el filtro $h(t)$ es real, $H(j\omega)$ tiene simetría par, por lo que la condición (3.335) no se cumplirá y el proceso $Z(t)$ no será circularmente simétrico (en este caso $Z(t)$ sería real). Lo mismo puede decirse si $h(t)$ es puramente imaginario.

Si el filtro $h(t)$ es de la forma:

$$h(t) = h_B(t)e^{j\omega_c t} \quad (3.336)$$

donde $h_B(t)$ es un filtro paso bajo (en general complejo), entonces si el proceso $X(t)$ es blanco, puede verse que el proceso $Z(t)$ será circularmente simétrico sólo si el ancho de banda del filtro $h_B(t)$ es menor que ω_c (véase Figura 3.12). Esta condición se suele verificar en la práctica; aquí hemos demostrado que además es necesaria para que el proceso $Z(t)$ sea circularmente simétrico.

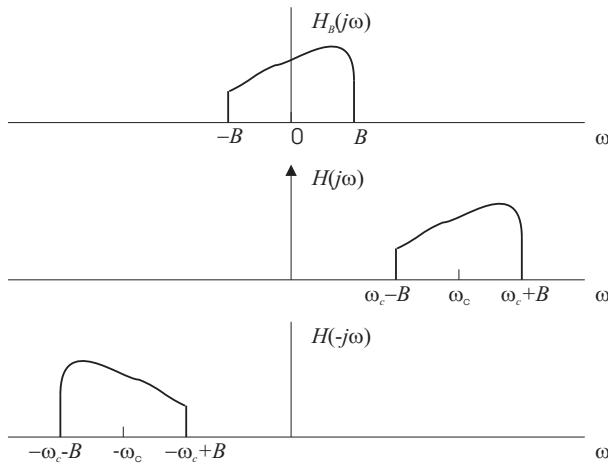


Figura 3.12. La figura representa los filtros $H(j\omega)$ y $H(-j\omega)$ para el caso en el que ω_c es mayor que el ancho de banda del filtro $H_B(j\omega)$. El producto de ambas es nulo a todas las frecuencias

Procesos gausianos complejos en tiempo discreto

Aunque nos hemos centrado en el análisis de procesos en tiempo continuo, la discusión de los apartados anteriores es extensible *mutatis mutandis* a procesos en tiempo discreto. En particular, dado un proceso $Z[k]$, se dice que es circularmente simétrico si

$$E\{Z[k+m]Z[k]\} = 0, \text{ para todo } m, k. \quad (3.337)$$

Si $Z[k]$ procede del muestreo periódico de un proceso gausiano complejo circularmente simétrico será también un proceso circularmente simétrico.

3.3.8. Modulación de procesos continuos

En este apartado consideramos la modulación de procesos continuos mediante exponenciales complejas o sinusoides. Como comprobaremos en el Capítulo 5, este análisis será de enorme utilidad para determinar el espectro de potencia de señales paso banda.

Modulación compleja de procesos gausianos complejos

Sean dos procesos gausianos complejos $Z(t)$ y $X(t)$, relacionados de la siguiente forma:

$$Z(t) = X(t)e^{j\omega_c t} \quad (3.338)$$

para una frecuencia ω_c genérica (no nula). De nuevo $Z_r(t)$ y $Z_i(t)$ denotan respectivamente las partes real e imaginaria de $Z(t)$, con definiciones similares para $X(t)$. Observe que, dado que $Z(t)$ resulta de multiplicar un proceso gausiano por una función determinista, se deduce la propiedad

P 1. Si $X(t)$ es gausiano, $Z(t)$ también lo es.

Supongamos que el proceso $X(t)$ es estacionario en sentido estricto. Aunque pueda resultar sorprendente a primera vista, en general el proceso $Z(t)$ no será estacionario en sentido estricto, como demuestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.28

Sea $X(t)$ un proceso real blanco y gausiano, con función de autocorrelación $R_X(\tau) = \eta\delta(\tau)$. De (3.338) se deduce que

$$Z_r(t) = X(t) \cos(\omega_c t); \quad Z_i(t) = X(t) \sin(\omega_c t) \quad (3.339)$$

de modo que, calculando las autocorrelaciones de las partes real e imaginaria tenemos

$$R_{Zr}(t + \tau, t) = E\{Z_r(t + \tau)Z_r(t)\} = \eta \cos^2(\omega_c t)\delta(\tau) \quad (3.340)$$

$$R_{Zi}(t + \tau, t) = E\{Z_i(t + \tau)Z_i(t)\} = \eta \sin^2(\omega_c t)\delta(\tau) \quad (3.341)$$

y es inmediato ver que tanto (3.340) como (3.341) dependen de t , por lo que los procesos $Z_r(t)$ y $Z_i(t)$ no son estacionarios y, por tanto, $Z(t)$ no es estacionario en sentido estricto. Sin embargo, como puede comprobar el lector, el proceso $Z(t)$ sí es estacionario en sentido amplio.

A la vista del ejemplo anterior, podemos formularnos la siguiente pregunta: *¿qué condiciones debe cumplir $X(t)$ para que $Z_r(t)$ y $Z_i(t)$ sean conjuntamente (ciclo)estacionarios?* Para resolverla, analizaremos las funciones de correlación y complementaria de $Z(t)$ que, de acuerdo con (3.338) podemos expresar como

$$R_Z(t + \tau, t) = R_X(t + \tau, t)e^{j\omega_c \tau} \quad (3.342)$$

$$Q_Z(t + \tau, t) = Q_X(t + \tau, t)e^{j\omega_c(2t + \tau)} \quad (3.343)$$

Cicloestacionariedad. Si $X(t)$ es estrictamente cicloestacionario, tanto R_X como Q_X son funciones periódicas (respecto a la variable t) con periodo T . Por tanto, en virtud de (3.342), R_Z también es periódica. Sin embargo, para que Q_Z sea periódica es necesario que el término exponencial en (3.343) sea periódico con periodo múltiplo de T , es decir, que $\omega_c T / \pi$ sea un número entero. Se concluye, por tanto, la propiedad

P 2. Si $X(t)$ es un proceso gausiano estrictamente cicloestacionario y de periodo T , la condición $k = \omega_c T / \pi$, siendo k un número entero, es suficiente para la cicloestacionariedad estricta de $Z(t)$ con periodo kT .

Podemos obtener una condición más sencilla observando que, si $X(t)$ es circularmente simétrico, entonces Q_Z también es nulo y, por tanto, periódico de cualquier periodo, pudiendo concluirse la siguiente

P 3. Si $X(t)$ es un proceso gausiano circularmente simétrico estrictamente cicloestacionario y de periodo T , $Z(t)$ también lo es.

Estacionariedad. En virtud de (3.342), si $X(t)$ es estacionario en sentido amplio, $Z(t)$ también lo es. Asimismo, si $X(t)$ es estrictamente estacionario, podemos escribir

$$R_Z(t + \tau, t) = R_X(\tau)e^{j\omega_c \tau} \quad (3.344)$$

$$Q_Z(t + \tau, t) = Q_X(\tau)e^{j\omega_c(2t+\tau)} \quad (3.345)$$

Se observa que la dependencia de t se mantiene en la segunda ecuación, razón por la cual, en general, $Z(t)$ no es estrictamente estacionario, aunque $X(t)$ lo sea. En consecuencia, la simetría circular de $X(t)$ es condición necesaria y suficiente para que $Z(t)$ sea estrictamente estacionario.

P 4. Si $X(t)$ es un proceso gausiano estacionario en sentido estricto, para que $Z(t)$ sea estrictamente estacionario es condición necesaria y suficiente que $X(t)$ sea circularmente simétrico.

Densidad espectral de potencia. Dado que la hipótesis de (ciclo)estacionariedad no es en general aplicable a $Z(t)$, aunque $X(t)$ lo sea, calcularemos el espectro de potencia empleando (3.274), calculando en primer lugar el promedio de la autocorrelación

$$\bar{R}_Z(\tau) = \lim_{T' \rightarrow \infty} \frac{1}{2T'} \int_{-T'}^{T'} R_X(t + \tau, t) e^{j\omega_c \tau} dt = \bar{R}_X(\tau) e^{j\omega_c \tau} \quad (3.346)$$

y, en segundo lugar, calculando la Transformada de Fourier, resultando

$$S_Z(j\omega) = S_X(j\omega - j\omega_c) \quad (3.347)$$

Proyección real de procesos cicloestacionarios modulados

Consideremos ahora el proceso estocástico $Z_r(t)$ dado por

$$Z_r(t) = \mathcal{R}e\{Z(t)\} \quad (3.348)$$

siendo

$$Z(t) = X(t)e^{j\omega_c t} \quad (3.349)$$

donde $X(t)$ es un proceso complejo (no necesariamente gausiano), estrictamente cicloestacionario y de periodo T .

Densidad espectral de potencia. Para calcular la densidad espectral de potencia, partiremos de (3.314), aplicando (3.342) y (3.343), de modo que

$$R_{Zr}(t + \tau, t) = \frac{1}{2}\mathcal{R}e\{R_Z(t + \tau, t) + Q_Z(t + \tau, t)\} \quad (3.350)$$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{R}e\{R_X(t + \tau, t)e^{j\omega_c \tau} + Q_X(t + \tau, t)e^{j\omega_c(2t+\tau)}\} \quad (3.351)$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\bar{R}_{Zr}(\tau) &= \lim_{T' \rightarrow \infty} \frac{1}{2T'} \int_{-T'}^{T'} R_{Zr}(t + \tau, t) dt \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\bar{R}_X(\tau) e^{j\omega_c \tau}\} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ e^{j\omega_c \tau} \lim_{T' \rightarrow \infty} \frac{1}{2T'} \int_{-T'}^{T'} Q_X(t + \tau, t) e^{2j\omega_c t} dt \right\} \end{aligned} \quad (3.352)$$

Se observa que el primer término de la suma no plantea ningún problema; el último merece algo más de atención. En concreto, recordando que, para un proceso $X(t)$ estrictamente cicloestacionario con periodo T , su función complementaria es periódica ($Q_X(t + \tau, t) = Q_X(t + T + \tau, t + T)$) y, por tanto se puede expandir en serie de Fourier en la forma

$$Q_X(t + \tau, t) = \sum_k Q_X(k, \tau) e^{j\frac{2\pi k t}{T}} \quad (3.353)$$

donde $Q_X(k, \tau)$ es el k -ésimo coeficiente de la serie, podemos escribir,

$$\begin{aligned}\bar{R}_{Zr}(\tau) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\bar{R}_X(\tau) e^{j\omega_c \tau}\} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ e^{j\omega_c \tau} \sum_k Q_X(k, \tau) \lim_{T' \rightarrow \infty} \frac{1}{2T'} \int_{-T'}^{T'} e^{j\frac{2\pi k t}{T} + 2j\omega_c t} dt \right\} \end{aligned} \quad (3.354)$$

Teniendo en cuenta la relación

$$\lim_{T' \rightarrow \infty} \frac{1}{2T'} \int_{-T'}^{T'} e^{j\alpha t} dt = \delta(\alpha) \quad (3.355)$$

resulta⁸

$$\bar{R}_{Zr}(\tau) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\bar{R}_X(\tau) e^{j\omega_c \tau}\} + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ e^{j\omega_c \tau} \sum_k Q_X(k, \tau) \delta \left(\frac{2\pi k}{T} + 2\omega_c \right) \right\} \quad (3.356)$$

Aplicando la Transformada de Fourier con respecto a la variable τ y llamando $T_X(k, \omega)$ a la Transformada de Fourier de $Q_X(k, \tau)$ resulta, finalmente,

$$\begin{aligned}S_{Zr}(j\omega) &= \frac{1}{4} S_X(j\omega - j\omega_c) + \frac{1}{4} S_X^*(-j\omega - j\omega_c) + \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum_k (T_X(k, j\omega - j\omega_c) + T_X^*(k, -j\omega - j\omega_c)) \delta \left(\frac{2\pi k}{T} + 2\omega_c \right)\end{aligned} \quad (3.357)$$

⁸La función $\delta(\cdot)$ en (3.355) es una extensión de la delta de Kronecker para argumentos reales, no necesariamente enteros, pero debe distinguirse de la delta de Dirac en el sentido en que, a diferencia de esta, toma valor finito en el origen. No obstante, si hubiésemos elegido una representación de $Q_X(t + \tau, t)$ en (3.353) en términos de su Transformada de Fourier con respecto a la variable t , veríamos que las sumas en k se transformarían en integrales sobre un periodo T y que las deltas serían de Dirac. Por esta razón, y sin menoscabo de estas puntualizaciones, mantenemos la notación $\delta(\cdot)$.

Está claro ahora que si $2\omega_c$ no es múltiplo entero de $2\pi/T$ entonces los dos últimos términos en (3.358) son cero. Por el contrario, cuando $2\omega_c$ es múltiplo entero de $2\pi/T$, es decir, $2\omega_c = 2\pi k_0/T$, para un número entero k_0 , llegamos a

$$\begin{aligned} S_{Zr}(j\omega) &= \frac{1}{4} \{S_X(j\omega - j\omega_c) + S_X^*(-j\omega - j\omega_c)\} \\ &+ \frac{1}{4} \{T_X(k_0, j\omega - j\omega_c) + T_X^*(-k_0, -j\omega - j\omega_c)\} \end{aligned} \quad (3.358)$$

La función $T_X(k_0, j\omega)$ puede expresarse en forma integral como

$$\begin{aligned} T_X(k_0, j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} Q_X(k_0, \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^T Q_X(t + \tau, t) e^{-jk_0 \frac{2\pi t}{T}} dt e^{-j\omega\tau} d\tau \end{aligned} \quad (3.359)$$

Muchos libros de texto de comunicaciones digitales omiten los dos últimos términos en (3.358) sin mayores justificaciones. Destaquemos, en todo caso, que si no existe ningún k_0 entero que cumpla que $2\omega_c = 2\pi k_0/T$, entonces la densidad espectral de potencia se reduce a

$$S_{Zr}(j\omega) = \frac{1}{4} \{S_X(j\omega - j\omega_c) + S_X^*(-j\omega - j\omega_c)\} \quad (3.360)$$

Hay asimismo otros casos de interés que también conducen a (3.360):

1. Simetría circular. Si $X(t)$ es un proceso gausiano circularmente simétrico, la función complementaria $Q_X(t + \tau, t)$ es, por definición, nula y, por tanto, los dos últimos sumandos en (3.358) también lo son.
2. Estacionariedad. Si $X(t)$ es un proceso estacionario, la Ecuación (3.359) se reduce a

$$T_X(k_0, j\omega) = \frac{1}{2\pi T} \int_0^T e^{-jk_0 \frac{2\pi t}{T}} dt \int_{-\infty}^{\infty} Q_X(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau = 0 \quad (3.361)$$

3. Procesos de banda estrecha. Si $Z(t)$ es un proceso de banda estrecha, ($\omega_c \gg 2\pi/T$), entonces $k_0 \gg 0$ y, por tanto, $T_X(k_0, j\omega)$ es la Transformada de Fourier de uno de los coeficientes de alta frecuencia de $Q_X(t + \tau, t)$, que tienden a cero cuando k_0 tiende a infinito. Por tanto, para ω_c suficientemente grande, $T_X(k_0, j\omega - j\omega_c)$ en (3.359) es despreciable y (3.360) válida.
4. Procesos generados modulando pulsos en amplitud. Para procesos generados de la forma

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y[n] h(t - nT) \quad (3.362)$$

siendo $Y[n]$ un proceso estacionario complejo de media cero, y $h(t)$ un filtro posiblemente complejo.

En virtud de la relación (3.296) entre los procesos discreto y continuo involucrados en (3.362), podemos comprobar que la condición

$$E\{Y[k+i]Y[k]\} = 0, \text{ para todo } k, i \quad (3.363)$$

implica que la función complementaria $Q_X(t + \tau, t)$ es idénticamente nula e $Y[n]$ es circularmente simétrico, por lo que si se satisface (3.363), (3.360) es válida.

Cicloestacionariedad. En general, como ya hemos visto, la cicloestacionariedad estricta de $X(t)$ no implica la cicloestacionariedad estricta de $Z(t)$. Para procesos $X(t)$ gausianos circularmente simétricos, la Propiedad 3 (Página 162) garantiza la cicloestacionariedad estricta de $Z(t)$ y, por tanto, la de su parte real $Z_r(t)$.

Obsérvese que la simetría circular de $X(t)$ es condición suficiente para la cicloestacionariedad de $Z_r(t)$, pero no necesaria: la Propiedad 2 muestra que si $\omega_c = \pi k/T$, para cualquier número entero k , el proceso $Z(t)$ será estrictamente cicloestacionario, característica que heredará $Z_r(t)$.

Modulación real de procesos cicloestacionarios

En capítulos posteriores será también de utilidad el análisis de procesos del tipo

$$Z_r(t) = X(t) \cos(\omega_c t) \quad (3.364)$$

siendo $X(t)$ un proceso cicloestacionario real de periodo T . Para calcular su densidad espectral de potencia podemos observar que este puede considerarse un caso particular de (3.348) y (3.349) con $X(t)$ real y, por tanto, tomaremos las expresiones del apartado anterior como referencia.

Es conveniente recordar que si $X(t)$ es real, entonces $Q_X(t + \tau, t) = R_X(t + \tau, t)$ y, por tanto, también $T_X(j\omega) = S_X(j\omega)$, de modo que el espectro de potencia es, adaptando la Ecuación (3.358),

$$\begin{aligned} S_{Zr}(j\omega) &= \frac{1}{4} \{S_X(j\omega - j\omega_c) + S_X^*(-j\omega - j\omega_c)\} \\ &+ \frac{1}{4} \{S_X(k_0, j\omega - j\omega_c) + S_X^*(-k_0, j\omega + j\omega_c)\} \end{aligned} \quad (3.365)$$

siendo $S_X(k, j\omega)$ la Transformada de Fourier de $R_X(k, \tau) = Q_X(k, \tau)$.

$$\begin{aligned} S_X(k_0, j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_X(k, \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^T R_X(t + \tau, t) e^{-jk_0 \frac{2\pi t}{T}} dt e^{-j\omega\tau} d\tau \end{aligned} \quad (3.366)$$

De nuevo, los dos últimos sumandos en (3.358) se anulan en los mismos supuestos que en el caso en que $X(t)$ es complejo. Obviamente, aquellos supuestos que implican $Q_X(t + \tau, t) = 0$ carecen de interés alguno cuando $X(t)$ es real.

3.4. LECTURAS ADICIONALES

Existen excelentes textos básicos para estudiantes de pregrado que introducen con gran claridad los conceptos fundamentales de la teoría de la probabilidad: probabilidad, variables aleatorias y distribuciones. [68] es un ejemplo. También hay numerosos manuales orientados a aplicaciones de ingeniería, que incluyen introducciones a procesos estocásticos, que abarcan y extienden la mayoría de los temas abordados en este capítulo. Así, por ejemplo, [58] o [78]. Un tratamiento exhaustivo de procesos cicloestacionarios podemos encontrarlo en [31] y [30]. [37] tiene una abundante colección de problemas, cuya resolución está también publicada en [36]. Otras colecciones de problemas pueden encontrarse en [16] y [51].

Existe, asimismo, material bibliográfico para manejar programas informáticos orientados al análisis estadístico, como [67].

Otras referencias de interés, aunque orientadas a otros aspectos de las comunicaciones y la ingeniería, pueden encontrarse en [44] y [48].

Los textos básicos de comunicaciones digitales que aparecen en la bibliografía de este libro suelen tener al menos un capítulo introductorio a los conceptos básicos esenciales para las aplicaciones de comunicaciones: [39] y [61] son dos buenos ejemplos.

PROBLEMAS

P3.1 Determine la media y la varianza de una variable de Poisson. Para ello, tenga en cuenta que, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, puede escribirse

$$e^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!}$$

P3.2 Considere el experimento “lanzar dos dados y sumar el resultado”. Suponiendo que todos los resultados de cada dado son equiprobables, y llamando S a la suma, determine:

- 2.1. La probabilidad de que S sea igual a 8
- 2.2. La probabilidad de que S sea igual a 8, sabiendo que S no es divisible por 3.

P3.3 Determine la probabilidad de que una variable aleatoria X supere, en valor absoluto, a la raíz cuadrada de su valor cuadrático medio, $E\{X^2\}$, en los siguientes casos

- 3.1. X es uniforme entre $-b$ y $b > 0$,
- 3.2. X es gausiana de media nula y varianza σ^2 ,
- 3.3. X es una variable Rayleigh de parámetro $R > 0$,
- 3.4. X es exponencial de parámetro $\lambda > 0$,
- 3.5. X es Weibull de parámetros $c > 0$ y $\lambda > 0$.

P3.4 Considere las variables aleatorias B_i independientes, de espacio muestral $\Omega = \{0, 1\}$, con $0 \leq i \leq n - 1$ y de función de probabilidad $p_{B_i}(x) = p^x(1 - p)^{1-x}$. Considere la variable aleatoria $S = \sum_{i=0}^{n-1} b_i$.

- 4.1. Demuestre que S es una variable aleatoria de tipo binomial.
- 4.2. Utilizando la relación que existe entre S y las variables B_i , determine su media y su varianza. Compruebe que estos valores coinciden con los correspondientes de una variable binomial.

P3.5 Considere las variables aleatorias S y N , independientes entre sí, gausianas, de media 0 y varianzas σ_s^2 y σ_n^2 , respectivamente, y sea

$$R = S + N$$

- 5.1. Determine $f_{S|R}(s|r)$.
- 5.2. Determine $E\{S|R\}$.

P3.6 Sea \mathbf{X} un vector aleatorio gausiano de media nula y matriz de covarianzas \mathbf{C} . Sea $\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_0 | \dots | \mathbf{q}_{N-1}]$ una matriz de autovectores de \mathbf{C} , de modo que

$$\mathbf{C} = \mathbf{Q}\Delta\mathbf{Q}^T$$

siendo Δ una matriz diagonal tal que Δ_{ii} es el autovalor correspondiente al autovector \mathbf{q}_i .

- 6.1. Determine la fdp de $\mathbf{V} = \mathbf{Q}^T \mathbf{X}$.
- 6.2. Compruebe que las componentes de \mathbf{V} están incorrelacionadas entre sí.

P3.7 Sean X_1 y X_2 variables aleatorias gausianas independientes y de media nula. Compruebe que la variable $Y = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$ es de tipo Rayleigh. Para ello

- 7.1. Determine la fdp de $S_i = X_i^2$, para $i = 1, 2$.
- 7.2. Determine la fdp de la suma $S = S_1 + S_2$.
- 7.3. Determine la fdp de $Y = \sqrt{S}$ a partir de la fdp de S .

P3.8 Sean X_0, \dots, X_n variables aleatorias de tipo exponencial con parámetro λ . Determine la función de densidad de probabilidad de

$$Y_n = \sum_{k=0}^n X_k$$

así como su media y su varianza.

P3.9 Sea \mathbf{X} un vector aleatorio de componentes gausianas independientes de media 0 y varianza unidad. Sabiendo que toda matriz simétrica \mathbf{C} puede descomponerse en la forma $\mathbf{C} = \mathbf{B}\mathbf{B}^T$, determine una transformación de \mathbf{X} que proporcione un vector aleatorio de media $\boldsymbol{\mu}$ y matriz de covarianzas \mathbf{C} .

P3.10 Sea $\mathbf{X} = [X_0, X_1]^T$ un vector aleatorio gausiano de media nula y matriz de covarianzas \mathbf{C} , y sea $Y = X_0 + X_1$. Demuestre que Y es una variable gausiana. Para ello,

- 10.1. Determine $f_{Y|X_0}(y|x_0)$.
- 10.2. Determine $f_Y(y)$.

P3.11 Sea X una variable aleatoria uniformemente distribuida en el intervalo $[0, 1]$ y sea

$$Y = X(1 - X)$$

- 11.1. Compruebe que X e Y están incorrelacionadas. Para ello, determine su covarianza cruzada y compruebe que es igual a cero.
- 11.2. Determine $f_{Y|X}(y|x)$. ¿Son X e y independientes?
- 11.3. Determine $f_Y(y)$.

Observe que, pese a estar incorrelacionadas, X e Y no son independientes.

P3.12 Calcule la media y autocorrelación del proceso

$$X(t) = A \cos(\omega t + \theta)$$

y determine si es estacionario o cicloestacionario (en tal caso, determine el periodo) y si es ergódico en la media en los siguientes supuestos:

- 12.1. A es una variable aleatoria gausiana real de media nula y varianza unidad y ω y θ son constantes reales no nulas.
- 12.2. A es una variable aleatoria gausiana real de media igual a 1 y varianza unidad y ω y θ son constantes reales no nulas.
- 12.3. A es una variable aleatoria gausiana compleja de media nula y matriz de covarianza identidad y ω y θ son constantes reales no nulas.
- 12.4. ω es una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $(0, 2\pi]$ y A y θ son constantes reales no nulas.
- 12.5. θ es una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $(0, 2\pi]$ y A y ω son constantes reales no nulas.
- 12.6. θ es una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $(0, \pi]$ y A y ω son constantes reales no nulas.
- 12.7. A es una variable aleatoria gausiana real de media nula y varianza unidad, ω y θ son variables aleatorias con distribución uniforme en el intervalo $(0, 2\pi]$, y las tres estadísticamente independientes.

P3.13 Modelamos una cadena infinitamente larga de repetidores digitales binarios como un proceso estocástico, donde $X[n]$ representa la información en el repetidor n -ésimo, $X[n] \in \{+1, -1\}$ y $Pr\{X[-\infty] = +1\} = 1/2$. En la transmisión del repetidor n -ésimo al siguiente se produce un error con probabilidad p ; esto es, $Pr\{X[n+1] \neq X[n]\} = p$.

- 13.1. Determine $p_{X[n]}(x)$.
- 13.2. Determine $p_{X[n_1],X[n_2]}(x_1, x_2)$ (Ayuda: calcule en primer lugar la probabilidad de que no se produzcan errores entre n_1 y n_2 , $Pr\{X[n_1] = X[n_2]\}$).
- 13.3. Calcule la media y la autocorrelación de $X[n]$ y determine si es el proceso es o no estacionario.
- 13.4. ¿Qué cambia de los resultados anteriores si hacemos $Pr\{X[-\infty] = +1\} = q \neq 1/2$?

P3.14 Sean $M(t)$ un proceso estocástico estacionario en sentido amplio de media igual a 1 y función de autocorrelación $R_M(\tau)$, y $N(t)$ un proceso gausiano estacionario independiente de $M(t)$, de media nula y función de autocorrelación $R_N(\tau) = N_0/2\delta(\tau)$. Determine la media, la función de autocorrelación y la densidad espectral de potencia del proceso $X(t) = M(t) \cos(2000t + \pi) + N(t)$.

P3.15 Sea $X[n]$ un proceso estacionario, y considere el proceso

$$Y[n] = X[n] + aX[n - 1]$$

- 15.1. Determine la función de autocorrelación de $Y[n]$.
- 15.2. Determine la densidad espectral de potencia de $Y[n]$.

P3.16 La entrada a un sistema lineal e invariante con respuesta al impulso $h(t) = e^{-t}u(t)$ es un proceso estocástico estacionario $X(t)$ de media nula y función de autocorrelación $R_X(\tau) = \delta(\tau)$. Determine la función de autocorrelación y la densidad espectral de potencia de la salida, $Y(t)$.

P3.17 Sea $X(t)$ un proceso cicloestacionario de periodo T . Considere el proceso

$$Y(t) = X(t - t_0)$$

donde t_0 es una variable aleatoria con distribución uniforme entre 0 y T' e independiente de $X(t)$.

- 17.1. Determine para qué valores de T' $Y(t)$ es un proceso estacionario.
- 17.2. De entre los valores de T' obtenidos en el apartado anterior, determine para cuál o cuáles coinciden las funciones de autocorrelación de $X(t)$ e $Y(t)$.

P3.18 Sea $A[n]$ una secuencia aleatoria de símbolos binarios independientes con un alfabeto $\{+1, -1\}$ y distribución de probabilidad $p_{A[n]}(+1) = 3/4$ y $p_{A[n]}(-1) = 1/4$. Calcule la media, función de autocorrelación y densidad espectral del proceso

$$X(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A[k] \operatorname{sinc}\left(\frac{t - kT}{T}\right)$$

A partir de $A[n]$ generamos otra secuencia de la forma $B[n] = A[n] + A[n - 1]$. Calcule la media, función de autocorrelación y densidad espectral del proceso

$$Y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B[k] \operatorname{sinc}\left(\frac{t - kT}{T}\right)$$

- P3.19 Sea $X[n]$ un proceso estacionario blanco de potencia media $\eta > 0$ e

$$Y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]h(t - kT)$$

siendo $h(t)$ un pulso rectangular de anchura $2T$ y altura unidad. Determine la autocorrelación y la densidad espectral de potencia del proceso discreto $W[n] = Y(nT - t_0)$, siendo $0 < t_0 < T$.

- P3.20 Sea $X(t)$ un proceso gausiano estrictamente cicloestacionario de periodo fundamental T , y considere el proceso dado por

$$Z(t) = X(t)e^{j\omega_c t}$$

Siendo $\omega_c T / 2\pi = m/n$, siendo m y n números enteros. Discuta el valor mínimo que puede tener el periodo fundamental de la cicloestacionariedad de $Z(t)$.

- P3.21 El proceso $X(t)$ se obtiene de filtrar un proceso gausiano, blanco y con densidad espectral de potencia 10 W/Hz con un filtro paso bajo ideal de ancho de banda 10 rad/s. A partir de $X(t)$ se obtienen, mediante operaciones sucesivas, las siguientes señales:

$$\begin{aligned} Y(t) &= X(t) \cos(100\pi t) \\ Z(t) &= Y(t) + N(t) \\ W(t) &= Z(t) * h(t) \\ W[n] &= W(n/50) \end{aligned}$$

donde $N(t)$ es un ruido gausiano y blanco estadísticamente independiente de $X(t)$ con densidad espectral de potencia 1 y $h(t)$ es la respuesta al impulso de un filtro paso banda ideal con ancho de banda 50π rad/s y frecuencia central 100π rad/s.

- 21.1. Calcule la media, varianza y función de autocorrelación de $Y(t)$, $Z(t)$, $W(t)$ y $W[n]$. Determine si cada uno de estos procesos es estacionario o no. En los casos en que no lo sea, determine si es cicloestacionario y, si lo es, determine su periodo. Calcule la densidad espectral de potencia de aquellos procesos estacionarios y cicloestacionarios.
- 21.2. Calcule la relación señal a ruido en $Z(t)$, $W(t)$ y $W[n]$.

APÉNDICES

3.A. TEOREMA DE WIENER-KHINCHINE

Demostraremos aquí que (3.273) se reduce a (3.274). Para ello supondremos en primer lugar que la correlación cruzada entre dos muestras $X(t)$ y $X(t + \tau)$ está acotada por un valor que solamente depende de la separación entre ellas, de modo que

$$|R_X(t + \tau, t)| \leq g(\tau) \quad (3.367)$$

Asimismo, supondremos que la correlación entre muestras decrece “suficientemente rápido” al aumentar su separación, de tal modo que

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) d\tau < \infty \quad (3.368)$$

lo que garantiza que $g(\tau)$, al ser no negativa, tiene Transformada de Fourier.

La integral doble (3.273) sobre el dominio cuadrado de anchura $2T$ puede expresarse en función de la integral sobre el dominio $-T \leq t_2 \leq T$, como

$$\begin{aligned} S_X(j\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-\infty}^{\infty} R_X(t_2 + \tau, t_2) e^{-j\omega\tau} d\tau dt_2 \\ &- \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{T-t_2}^{\infty} R_X(t_2 + \tau, t_2) e^{-j\omega\tau} d\tau dt_2 \\ &- \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-\infty}^{-T-t_2} R_X(t_2 + \tau, t_2) e^{-j\omega\tau} d\tau dt_2 \\ &= I_0(j\omega) - I_1(j\omega) - I_2(j\omega) \end{aligned} \quad (3.369)$$

donde hemos llamado, I_0 , I_1 e I_2 , a cada una de las tres integrales de la expresión anterior, siguiendo el orden en que aparecen. Demostraremos ahora que I_1 e I_2 se anulan. Para ello, podemos acotar el módulo de I_1 mediante

$$\begin{aligned} |I_1(j\omega)| &= \left| \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{T-t_2}^{\infty} R_X(t_2 + \tau, t_2) e^{-j\omega\tau} d\tau dt_2 \right| \\ &\leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{T-t_2}^{\infty} |R_X(t_2 + \tau, t_2)| d\tau dt_2 \\ &\leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{T-t_2}^{\infty} g(\tau) d\tau dt_2 \end{aligned} \quad (3.370)$$

Asimismo, podemos calcular el límite de la expresión anterior descomponiendo la integral en suma de dos integrales sobre regiones disjuntas,

$$\begin{aligned} |I_1(j\omega)| &\leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{T-t_2}^T g(\tau) d\tau dt_2 + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_T^{\infty} g(\tau) d\tau dt_2 \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{T-t_2}^T g(\tau) d\tau dt_2 + \lim_{T \rightarrow \infty} \int_T^{\infty} g(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.371)$$

El segundo término se anula porque se cumple (3.368) y el intervalo de integración tiende a 0. El primero se simplifica cambiando el orden de integración respecto de las variables τ y t_2 . Resulta, en tal caso,

$$|I_1(j\omega)| \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^T \int_{T-\tau}^T dt_2 g(\tau) d\tau = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_0^T \frac{\tau}{T} g(\tau) d\tau \quad (3.372)$$

cuyo límite existe, dado que si aplicamos (3.368)

$$L = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{\tau}{T} g(\tau) d\tau \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T g(\tau) d\tau \leq \infty \quad (3.373)$$

Además este límite es $L = 0$. Para comprobarlo, nos apoyaremos en la secuencia

$$s_k = \int_{2^k}^{2^{k+1}} g(\tau) d\tau \quad (3.374)$$

que, en virtud de (3.368)

$$\sum_{k=0}^{\infty} s_k = \int_0^{\infty} g(\tau) d\tau < \infty \quad (3.375)$$

luego

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = 0 \quad (3.376)$$

Acotaremos los términos de la integral cuyo límite queremos calcular para valores de T de la forma $T = 2^k$. Para ello, definimos la secuencia

$$a_k = \int_0^{2^k} \frac{\tau}{2^k} g(\tau) d\tau \quad (3.377)$$

de modo que

$$\begin{aligned} a_k &= \int_0^{2^{k-1}} \frac{\tau}{2^k} g(\tau) d\tau + \int_{2^{k-1}}^{2^k} \frac{\tau}{2^k} g(\tau) d\tau = \frac{1}{2} a_{k-1} + \int_{2^{k-1}}^{2^k} \frac{\tau}{2^k} g(\tau) d\tau \\ &\leq \frac{1}{2} a_{k-1} + \int_{2^{k-1}}^{2^k} g(\tau) d\tau \frac{1}{2} a_{k-1} + s_k \end{aligned} \quad (3.378)$$

Dado que a_k converge a L , a_{k-1} también converge a L , de modo que, en el límite cuando k tiende a infinito, debe cumplirse que

$$L \leq \frac{1}{2}L + \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \frac{1}{2}L \quad (3.379)$$

lo cual solamente es posible (siendo L no negativo) para $L = 0$. De un modo completamente análogo se concluye que $|I_2(j\omega)| = 0$. En consecuencia, (3.369) se reduce a

$$S_X(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-\infty}^{\infty} R_X(t_2 + \tau, t_2) e^{-j\omega\tau} d\tau dt_2 \quad (3.380)$$

donde podemos intercambiar la integral y el límite al estar acotada $R_X(t_2 + \tau, t_2)$ mediante (3.367) y (3.368), quedando finalmente

$$S_X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} R_X(t_2 + \tau, t_2) dt_2 e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (3.381)$$

y de aquí, sustituyendo la definición de $\bar{R}_X(\tau)$ según (3.275), obtenemos (3.274).

CAPÍTULO 4

MODULACIÓN Y DETECCIÓN EN CANALES GAUSIANOS

El problema fundamental en las comunicaciones digitales consiste en la recuperación de manera fiable de una secuencia digital (el mensaje) enviada a través de un canal de naturaleza continua y analógica. En este capítulo vamos a abordar este problema haciendo uso de los conceptos y métodos tratados en los capítulos precedentes; concretamente, la teoría de la probabilidad y la representación de señales deterministas y procesos estocásticos.

Comenzaremos el capítulo considerando la transmisión de un único símbolo, para el cual plantearemos un modelo general de comunicación digital y analizaremos cada uno de sus elementos hasta encontrar la solución al problema de comunicación sobre un canal aditivo gausiano. Posteriormente ampliaremos este modelo considerando la transmisión de una secuencia de símbolos de longitud indefinida.

4.1. UN MODELO DE COMUNICACIÓN DIGITAL

La Figura 4.1 muestra un modelo general de un sistema de comunicación digital para la transmisión de un único símbolo que nos va a permitir analizar separada y ordenadamente los distintos problemas involucrados en una comunicación digital.

La entrada a este modelo es un símbolo B que puede tomar uno de entre M valores posibles $\{b_i, i = 0, \dots, M - 1\}$. También podemos decir que el símbolo B tiene un alfabeto $\{b_i, i = 0, \dots, M - 1\}$. Suponemos como hipótesis que la probabilidad de que aparezca a la entrada cada uno de los M posibles valores es la misma; esto es, $Pr\{B = b_i\} = p_B(b_i) = 1/M, i = 0, \dots, M - 1$.

El transmisor tiene como misión transformar este símbolo B en una señal $s(t)$ que resulte adecuada para su envío a través del medio físico que representa el canal. Esta transformación se lleva a cabo en dos pasos, realizados por el codificador y el modulador, cuyo funcionamiento describimos a continuación.

El codificador transforma el símbolo B en otro símbolo A haciendo la correspondencia $b_i \rightarrow a_i$. El símbolo a_i puede ser real, complejo o, en general, un vector N -dimensional

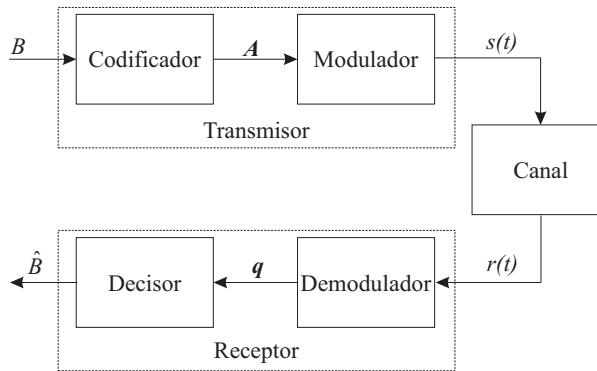


Figura 4.1. Modelo general de un sistema de comunicación digital.

de componentes reales de la forma

$$\mathbf{a}_i = \begin{bmatrix} a_{i0} \\ a_{i1} \\ \vdots \\ a_{i(N-1)} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

El alfabeto de \mathbf{A} , $\{\mathbf{a}_i, i = 0, \dots, M - 1\}$, recibe el nombre especial de *constelación*.

El modulador transforma el símbolo \mathbf{A} en una señal analógica en tiempo continuo $s(t)$ haciendo la correspondencia $\mathbf{a}_i \rightarrow s_i(t)$. Suponemos que cualquier $s_i(t)$ es idénticamente nula fuera del intervalo $0 \leq t < T$ y de energía finita.

El canal representa el medio físico de transmisión e introduce una perturbación sobre la señal transmitida $s(t)$. Por ahora, consideramos que esta perturbación consiste en la adición de ruido blanco y gausiano de densidad espectral de potencia $N_0/2$ W/Hz. La señal a la entrada del receptor toma, por tanto, la forma

$$r(t) = s(t) + n(t) \quad (4.2)$$

donde $n(t)$ representa el ruido de las características antes mencionadas. Este modelo de canal se conoce como *canal aditivo gausiano* o, simplemente, *canal gausiano*.

El receptor es el encargado de reconstruir un símbolo \hat{B} idealmente idéntico al de entrada, B , a partir de la señal $r(t)$. Debido a la perturbación que supone la adición de ruido, es imposible, en general, garantizar que ambos símbolos sean idénticos o, lo que es lo mismo, que consigamos una transmisión sin error. Para medir cuán cerca o lejos estamos de una transmisión sin error empleamos la probabilidad media de error de símbolo o, simplemente, *probabilidad de error de símbolo*, definida como

$$P_e = Pr\{\hat{B} \neq B\} \quad (4.3)$$

Esta medida nos proporciona, además, un criterio para el diseño del receptor: hacer mínima la probabilidad de error de símbolo. El receptor diseñado de acuerdo con este criterio decimos que es óptimo en el sentido de mínima probabilidad de error de símbolo.

La aplicación de este criterio de diseño no es una tarea fácil, y por ello realizamos esta labor en dos pasos: demodulación y detección o decisión, que describimos a continuación.

A partir de la señal a la entrada del receptor o señal recibida, $r(t)$, el demodulador se encarga de reconstruir un vector q que intentamos sea lo más parecido posible a A . Este “lo más parecido posible” ha de medirse en función del criterio de diseño; esto es, ha de determinarse una medida de distancia entre A y q para conseguir que el receptor en su conjunto sea óptimo en el sentido de mínima probabilidad de error de símbolo. Dada la naturaleza probabilística del criterio y la estadística gausiana de la perturbación, esta medida de distancia es la euclídea, como demostrarímos en apartados siguientes de este mismo capítulo, y precisamente esta medida de distancia euclídea nos va a permitir una interpretación geométrica a la hora de analizar en profundidad tanto el modulador como el demodulador.

Finalmente, el decisor ha de asignar, de acuerdo con el mismo criterio, un símbolo \hat{B} al vector de entrada q .

4.2. MODULADOR

En un principio puede parecer superflua la división del transmisor en codificador y modulador porque podríamos hacer una asignación directa entre el símbolo B y la señal $s(t)$ de la forma $b_i \rightarrow s_i(t)$. En este apartado vamos a justificar el porqué de esta separación, y para hacerlo vamos a proceder con un ejemplo, sin que ello suponga una pérdida de generalidad en las conclusiones que obtengamos.

Consideremos un sistema de comunicación binaria ($M = 2$) donde podemos escoger uno de entre cuatro conjuntos alternativos de señales $\{s_0(t), s_1(t)\}$ para realizar la transmisión. Pretendemos, mediante el análisis del comportamiento de estos conjuntos de señales, determinar cuál de ellos es el más adecuado para realizar la transmisión. En el primero de estos conjuntos, representado en la Figura 4.2, las señales son sendos pulsos de duración el intervalo de símbolo y polaridad opuesta. En el segundo, representado en la Figura 4.3, una

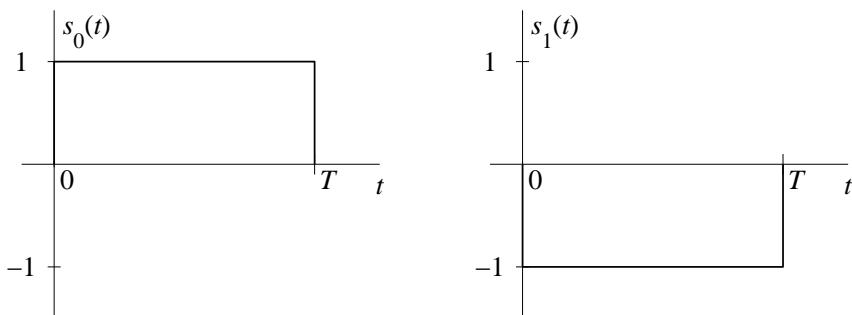


Figura 4.2. Primer conjunto de señales.

señal es un pulso y la otra es una señal idénticamente nula. En el tercero, representado en la Figura 4.4, las señales son sinusoides de idéntica frecuencia y polaridad opuesta. En el cuar-

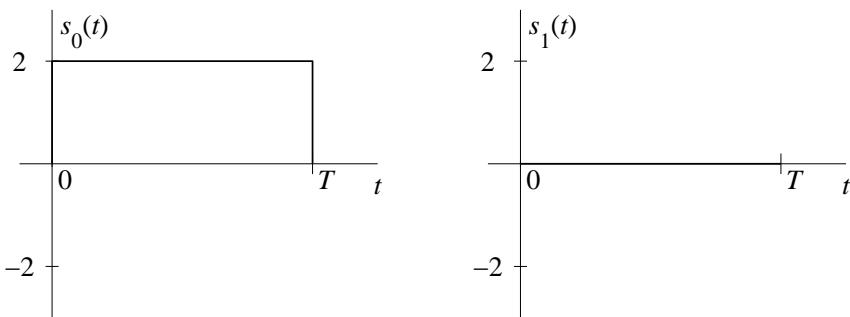


Figura 4.3. Segundo conjunto de señales.

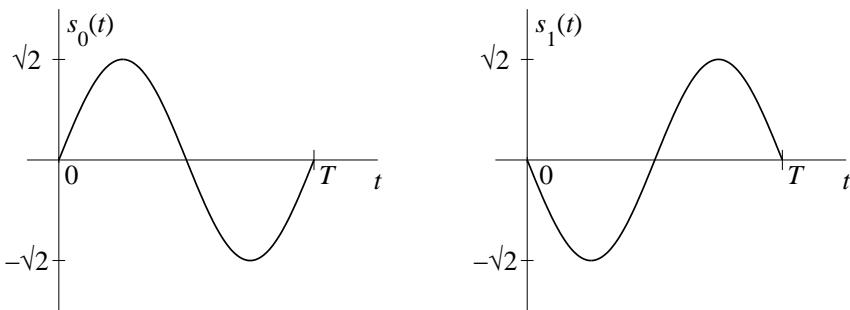


Figura 4.4. Tercer conjunto de señales.

to y último, representado en la Figura 4.5, las señales son sinusoides de idéntica frecuencia, una generada mediante la función seno y la otra mediante la función coseno.

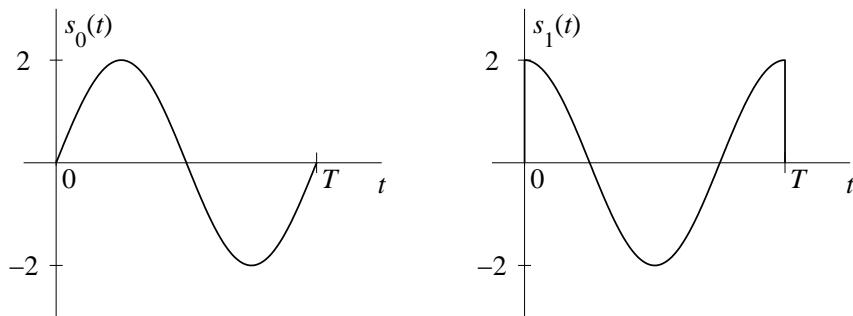
Para decidir qué conjunto de señales es el más apropiado hace falta recordar que el objetivo último es poder recuperar el símbolo enviado con la menor probabilidad de error, teniendo en cuenta que a estas señales se les suma ruido blanco y gausiano a su paso por el canal. Es lógico pensar que si mayor es la “separación” o “diferencia” entre $s_0(t)$ y $s_1(t)$ será más fácil discernir en el receptor entre ambas y, por tanto, será menor la probabilidad de error. Sin embargo, a simple vista no podemos decir si existe mayor “separación” entre $s_0(t)$ y $s_1(t)$ en cada uno de los conjuntos de señales: nos hace falta una medida de distancia entre señales.

Podemos obtener esta medida de distancia empleando el espacio de Hilbert de señales continuas de energía finita, L_2 , analizado en el Apartado 2.1.4. En este espacio, cada señal $s(t)$ se considera como un vector s y la distancia entre dos señales se define como

$$d(s_i, s_j) = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |s_i(t) - s_j(t)|^2 dt}$$

Aplicando esta medida, la distancia entre las dos señales de la Figura 4.2 es

$$d(s_0, s_1) = \sqrt{\int_0^T |1 - (-1)|^2 dt} = 2\sqrt{T}$$

**Figura 4.5.** Cuarto conjunto de señales.

Para el segundo conjunto de señales tenemos

$$d(s_0, s_1) = \sqrt{\int_0^T |2 - 0|^2 dt} = 2\sqrt{T}$$

Procediendo ahora con el tercer conjunto de señales, tenemos

$$\begin{aligned} d(s_0, s_1) &= \sqrt{\int_0^T \left| \sqrt{2} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) - \left(-\sqrt{2} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right) \right|^2 dt} \\ &= \sqrt{\int_0^T 8 \sin^2\left(\frac{2\pi t}{T}\right) dt} \\ &= 2\sqrt{T} \end{aligned}$$

Por último, el cálculo de distancia en el cuarto conjunto de señales da como resultado

$$\begin{aligned} d(s_0, s_1) &= \sqrt{\int_0^T \left| 2 \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) - \left(2 \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right) \right|^2 dt} \\ &= \sqrt{\int_0^T \left(4 - 8 \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right) dt} \\ &= 2\sqrt{T} \end{aligned}$$

De estas medidas de distancia podemos deducir que cualquiera de los cuatro conjuntos de señales se comportarán de igual manera ante la perturbación que introduce el canal. Esta respuesta, sin embargo, abre otras preguntas:

- ¿Qué tienen en común estos cuatro conjuntos de señales? o, dicho de otra forma, ¿podemos encontrar alguna forma de representar las señales que nos permita ver de manera más simple las prestaciones que vamos a obtener con un conjunto determinado?

- Estos cuatro conjuntos de señales se van a comportar de idéntica forma ante la perturbación pero, desde el punto de vista del transmisor, ¿va a suponer el mismo “esfuerzo” su transmisión a través del canal?.

Vamos a centrarnos en la segunda de las preguntas y posteriormente abordaremos la primera.

Una forma de medir el “esfuerzo” que supone para el transmisor enviar las señales a través del canal es medir la energía media que debe emplear el modulador para poner un símbolo a la entrada del canal, denominada *energía media por símbolo* y definida como

$$\begin{aligned}
 E_s &= E\{\mathcal{E}\{s(t)\}\} \\
 &= E\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|s(t)|^2 dt\right\} \\
 &= \sum_{i=0}^{M-1} Pr\{s(t) = s_i(t)\} \int_{-\infty}^{\infty} |s_i(t)|^2 dt \\
 &= \sum_{i=0}^{M-1} p_B(b_i) \int_{-\infty}^{\infty} |s_i(t)|^2 dt \\
 &= \sum_{i=0}^{M-1} \frac{1}{M} \int_0^T |s_i(t)|^2 dt
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Así, podemos decir ahora que el mejor conjunto de señales será aquel que consigue una mayor distancia entre señales con una menor energía media por símbolo.

Calculando la energía media por símbolo para el primer conjunto de señales obtenemos, teniendo en cuenta la hipótesis de símbolos equiprobables anteriormente establecida,

$$E_s = Pr\{s(t) = s_0(t)\} \int_0^T |1|^2 dt + Pr\{s(t) = s_1(t)\} \int_0^T |-1|^2 dt = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}T = T$$

Procediendo de igual forma para los restantes conjuntos de señales obtenemos, respectivamente, $2T$, T y $2T$.

Con estas medidas podemos establecer que los mejores conjuntos de señales son el primero y el tercero porque consiguen una distancia entre señales de $2\sqrt{T}$ empleando una energía media por símbolo de T , necesitando los segundo y cuarto el doble de energía por símbolo para conseguir la misma distancia entre señales.

Si necesitásemos evaluar otros conjuntos de señales que no presentasen la misma distancia entre señales, sería necesario emplear algún tipo de normalización que nos permita establecer su comparación. La más común de estas normalizaciones consiste en expresar la distancia entre señales en función de la energía media por símbolo. Sobre el primer conjunto de señales, esta distancia normalizada es

$$d(s_0, s_1) = 2\sqrt{T} = 2\sqrt{E_s}$$

y sobre el resto de conjuntos es, respectivamente, $\sqrt{2E_s}$, $2\sqrt{E_s}$ y $\sqrt{2E_s}$. Observe que los

conjuntos de señales 1 y 3 consiguen mayor distancia de separación entre señales que los conjuntos 2 y 4 para un mismo valor de E_s .

Volvamos a la primera de las preguntas planteadas anteriormente: ¿podemos encontrar alguna forma de representar las señales que nos permita ver de manera más simple las prestaciones que vamos a obtener con un conjunto determinado? La respuesta la encontramos en la misma estructura de espacio vectorial que nos ha permitido medir la distancia entre señales: si somos capaces de encontrar una base ortonormal que nos permita representar un determinado conjunto de señales podremos trabajar directamente con las coordenadas en esa base y evitar cualquier tipo de cálculo sobre las formas de onda.

Expresado formalmente, buscamos una representación para cada una de las señales del conjunto $\{s_i(t), i = 0, \dots, M - 1\}$ de la forma

$$s_i(t) = \sum_{j=0}^{N-1} s_{ij} \phi_j(t) = \sum_{j=0}^{N-1} a_{ij} \phi_j(t) \quad (4.5)$$

donde $\{\phi_j(t), j = 0, \dots, N - 1\}$ son los elementos de la base ortonormal que cumplen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_l(t) \phi_j(t) dt = \int_0^T \phi_l(t) \phi_j(t) dt = \delta[l - j] \quad (4.6)$$

y $\{s_{ij}, j = 0, \dots, N - 1\}$ son las coordenadas de la señal $s_i(t)$ en dicha base, que nosotros hacemos corresponder con los símbolos a_i . Esta correspondencia o interpretación de los símbolos a_i como coordenadas de las señales $s_i(t)$ es una de las razones que aconsejan la separación del transmisor en codificador y modulador.

Para obtener esta representación tenemos, en primer lugar, que encontrar los elementos de la base. Si disponemos del conjunto de señales $\{s_i(t), i = 0, \dots, M - 1\}$ podemos emplear el procedimiento de ortogonalización de Gram-Schmidt descrito en el Apéndice 4.A. Este procedimiento nos proporciona al mismo tiempo los elementos de la base y las coordenadas de cada una de las señales.

Aplicándolo al primero de los cuatro conjuntos de señales que estábamos analizando obtenemos que $s_0(t)$ y $s_1(t)$ se pueden expresar como

$$s_0(t) = \sqrt{T} \phi_0(t) \quad s_1(t) = -\sqrt{T} \phi_0(t)$$

siendo $\phi_0(t)$ la señal mostrada en la Figura 4.6. En esta misma figura podemos ver la constelación de señales representadas mediante sus coordenadas en la base. Es precisamente esta apariencia (puntos en el espacio) la que le dio el nombre de constelación al conjunto de símbolos $\{a_i, i = 0, \dots, M - 1\}$.

El hecho de haber obtenido un único elemento de la base, $\phi_0(t)$, tiene una justificación muy sencilla: como $s_1(t) = -s_0(t)$, un cambio de signo en la coordenada de $s_0(t)$ nos basta para generar $s_1(t)$. La amplitud de $\phi_0(t)$ es igual a $1/\sqrt{T}$ debido a la condición de ortonormalidad que hemos impuesto y que, como podemos deducir de (4.6), no es otra cosa sino una normalización de la energía ($\int_{-\infty}^{\infty} \phi_0^2(t) dt = 1$). Esta normalización nos permite

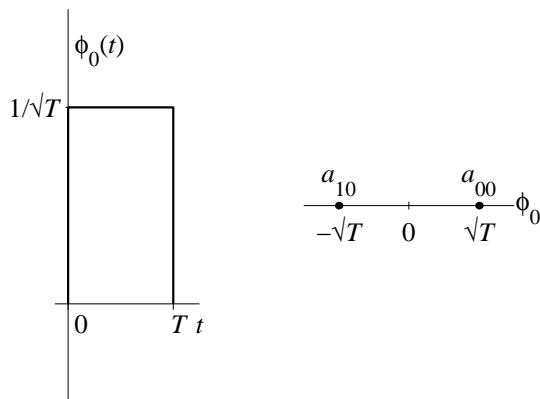


Figura 4.6. Resultado del procedimiento de ortogonalización de Gram-Schmidt aplicado al primer conjunto de señales.

además realizar las operaciones de cálculo de distancias y energía a partir de la constelación. La distancia entre $s_0(t)$ y $s_1(t)$ se calcula ahora como

$$d(s_0, s_1) = d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1) = \sqrt{(a_{01} - a_{11})^2} = \sqrt{(\sqrt{T} - (-\sqrt{T}))^2} = 2\sqrt{T}$$

y la energía media por símbolo como

$$E_s = E_A = E \{ \mathcal{E} \{ \mathbf{a}_i \} \} = p_A(\mathbf{a}_0) a_{01}^2 + p_A(\mathbf{a}_1) a_{11}^2 = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}T = T$$

y el resultado, como no podía ser de otra forma, es exactamente el mismo que hemos obtenido mediante el cálculo sobre las formas de onda.

Si procedemos de igual forma con el segundo conjunto de señales obtenemos el resultado que muestra la Figura 4.7. Comparándolo con el que hemos obtenido con el primer

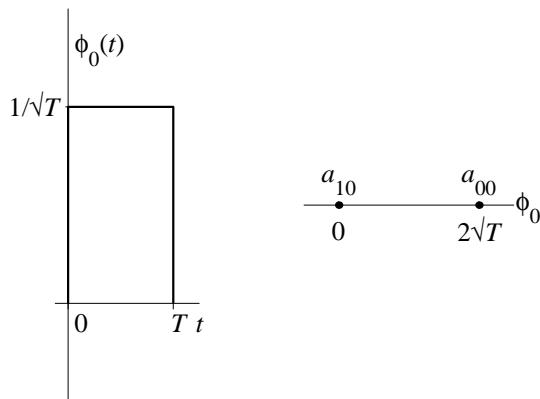


Figura 4.7. Resultado del procedimiento de ortogonalización de Gram-Schmidt aplicado al segundo conjunto de señales.

conjunto de señales comprobamos que el elemento de la base es la misma señal. También

comprobamos que la constelación puede considerarse como el desplazamiento en una cantidad \sqrt{T} de la obtenida con el primer conjunto de señales. Este desplazamiento hace que se mantenga la distancia entre señales, pero aumenta la energía media de la constelación, según hemos calculado anteriormente.

El resultado de la aplicación del procedimiento de ortogonalización de Gram-Schmidt al tercer conjunto de señales es el que muestra la Figura 4.8. Realizando la comparación

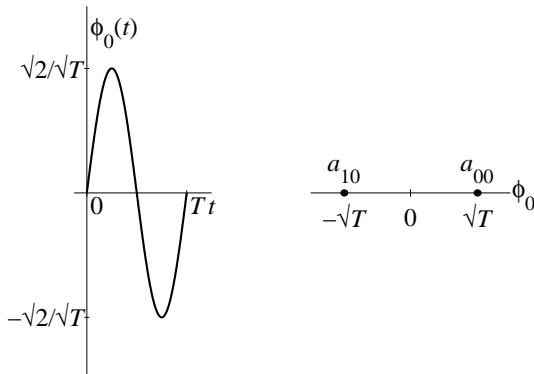


Figura 4.8. Resultado del procedimiento de ortogonalización de Gram-Schmidt aplicado al tercer conjunto de señales.

con el primer conjunto de señales podemos observar que el elemento de la base de señales es distinto, pero la constelación es la misma. Si la constelación es la misma, también son idénticas (como previamente hemos comprobado) la separación entre señales y la energía media por símbolo. A partir de este hecho podemos obtener una primera conclusión: la elección del conjunto de elementos de la base $\{\phi_j(t), j = 0, \dots, N - 1\}$ no va a afectar a la fiabilidad de la comunicación; la fiabilidad quedará fijada por la constelación.

Esta conclusión no es específica de los conjuntos de señales que estamos evaluando, sino que es una conclusión general para el diseño de transmisores. En una situación en que el objetivo no sea escoger entre distintos conjuntos de señales sino diseñar el transmisor desde el inicio, la constelación y los elementos de la base se diseñan de forma prácticamente independiente: la constelación atendiendo a criterios de fiabilidad de la comunicación y los elementos de la base atendiendo al comportamiento del canal (intentando que el canal físico se comporte como el modelo de ruido aditivo que hemos considerado).

Volviendo a los conjuntos de señales que estábamos considerando, el resultado de la aplicación del procedimiento de ortogonalización de Gram-Schmidt al cuarto es el que muestra la Figura 4.9 donde, a diferencia de los conjuntos anteriores, aparecen dos elementos en la base del espacio vectorial. Si anteriormente los símbolos de la constelación a_0 y a_1 podían ser interpretados como puntos sobre una recta, ahora serán puntos sobre un plano cuyos ejes representan las coordenadas sobre $\phi_0(t)$ y $\phi_1(t)$. Los símbolos a_0 y a_1 se expresan ahora como vectores de dimensión 2 cuyos valores son

$$\mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{01} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2T} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2T} \end{bmatrix}$$

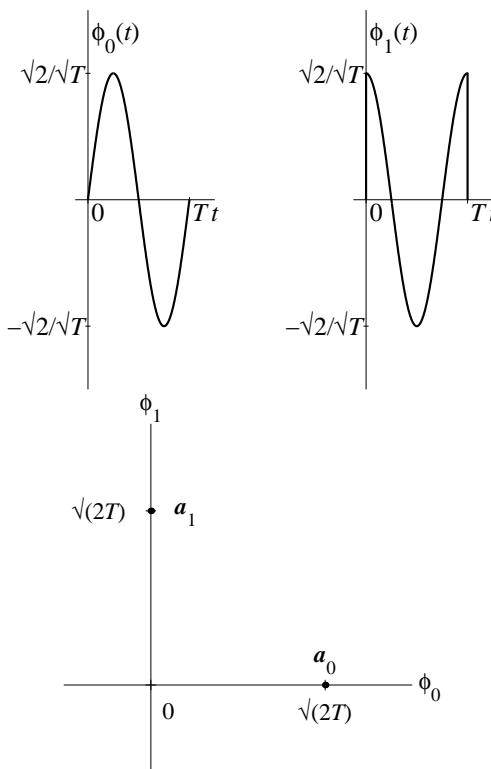


Figura 4.9. Resultado del procedimiento de ortogonalización de Gram-Schmidt aplicado al cuarto conjunto de señales.

La representación de este conjunto de señales deja claro que podemos realizar una interpretación geométrica de las mismas, donde la distancia entre señales se calcula como distancia entre dos puntos en un plano (o, en general, en un espacio de la dimensión que impongan los elementos de la base) tal y como muestra la Figura 4.10. Analíticamente, el cálculo de la distancia se realiza como

$$\begin{aligned}
 d(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1) &= d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1) = \|\mathbf{a}_0 - \mathbf{a}_1\| \\
 &= \sqrt{(a_{00} - a_{10})^2 + (a_{01} - a_{11})^2} \\
 &= \sqrt{\left(\sqrt{2T}\right)^2 + \left(-\sqrt{2T}\right)^2} = 2\sqrt{T}
 \end{aligned}$$

y la energía media por símbolo como

$$\begin{aligned}
 E_s &= E_A \\
 &= E\{\mathcal{E}\{\mathbf{a}_i\}\} = E\{\|\mathbf{a}_i\|^2\} \\
 &= p_A(\mathbf{a}_0)(a_{00}^2 + a_{01}^2) + p_A(\mathbf{a}_1)(a_{10}^2 + a_{11}^2) \\
 &= \frac{1}{2}2T + \frac{1}{2}2T = 2T
 \end{aligned}$$

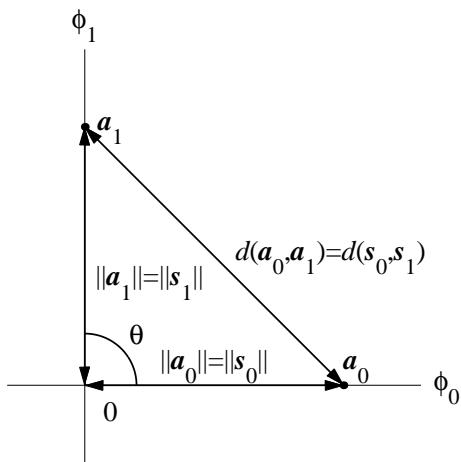


Figura 4.10. Interpretación geométrica de la constelación del cuarto conjunto de señales.

La interpretación geométrica de las señales viene derivada de la estructura de espacio vectorial que poseen las señales y, más concretamente, de la definición de producto escalar en el espacio vectorial. Continuando con la interpretación geométrica de las señales, la energía de un símbolo concreto \mathbf{a}_i no es sino el cuadrado de la distancia del símbolo al origen de coordenadas o, dicho de otra forma, es el cuadrado de la norma de \mathbf{a}_i , $\|\mathbf{a}_i\|^2$. También podemos medir el ángulo que forman las rectas que van desde el origen de coordenadas a los puntos de la constelación empleando (2.48) y, sobre todo, podemos realizar transformaciones geométricas de las señales para conseguir el efecto que deseemos.

La validez de lo hasta aquí planteado y discutido no se restringe a los cuatro conjuntos de señales que hemos empleado, sino que podemos aplicarlo al caso general de una constelación de M símbolos $\{\mathbf{a}_i, i = 0, \dots, M - 1\}$ y una base ortonormal de N señales $\{\phi_j(t), j = 0, \dots, N - 1\}$ que generan el conjunto de señales $\{s_i(t), i = 0, \dots, M - 1\}$ según la Ecuación (4.5).

La constelación se diseñará de tal forma que se consiga una separación máxima entre los símbolos que la componen intentando al mismo tiempo que la energía media por símbolo sea lo más pequeña posible. La elección del conjunto de elementos de la base, de acuerdo con el modelo de canal que estamos considerando, es irrelevante. En la práctica, el conjunto de señales de la base se escoge de tal forma que el canal físico concreto sobre el que queremos realizar la comunicación se comporte como el modelo que estamos considerando; si la función de transferencia del canal se anula a frecuencia 0, escogemos un conjunto de señales cuya componente continua sea nula, y así.

4.3. DEMODULADOR

Al demodulador le llega la señal $r(t) = s(t) + n(t)$, y su objetivo es recuperar un vector q lo más parecido posible al símbolo A que fue transmitido. En este apartado vamos a

desarrollar dos estructuras equivalentes para llevar a cabo esta labor. La primera está basada en operaciones de correlación y la segunda en operaciones de filtrado.

4.3.1. Correlacionador

La idea básica del demodulador por correlación es construir el vector \mathbf{q} como la proyección de la señal recibida $r(t)$ en el espacio de señal del modulador, definido mediante la base $\{\phi_j(t), j = 0, \dots, N - 1\}$. Las coordenadas de una señal respecto a una base determinada se obtienen, según (2.55), calculando el producto escalar de la señal con cada uno de los elementos de la base. En nuestro caso, la base tiene N elementos, y el vector \mathbf{q} toma la forma

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_{N-1} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Cada uno de los elementos q_j se calcula como

$$q_j = \langle \mathbf{r}, \phi_j \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} r(t) \phi_j(t) dt \quad (4.8)$$

y el demodulador en su conjunto posee la estructura que se muestra en la Figura 4.11(a). Po-

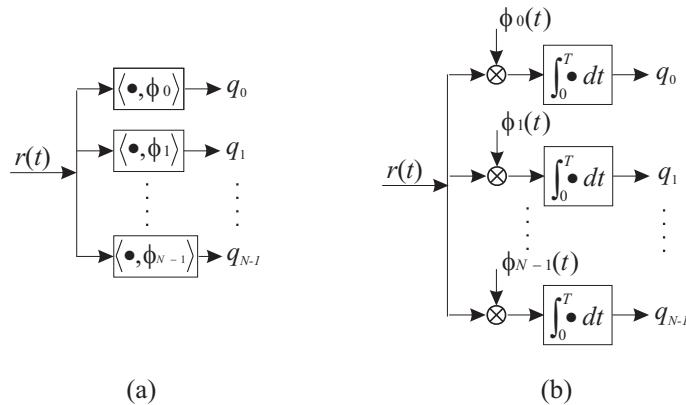


Figura 4.11. Estructura del demodulador; (a) genérica, (b) realización.

demos simplificar (4.8) teniendo en cuenta que ϕ_j es idénticamente nula fuera del intervalo $0 \leq t < T$, obteniendo

$$q_j = \int_0^T r(t) \phi_j(t) dt \quad (4.9)$$

y empleando (4.9) conseguimos una estructura del demodulador como la mostrada en la Figura 4.11(b), más cercana a la realización práctica.

La notación vectorial que estamos utilizando puede dar la impresión de una estructura del demodulador excesivamente compleja. Sin embargo, cuando particularizamos la estructura para los cuatro conjuntos de señales empleados en el apartado anterior vemos que no es así.

Para los dos primeros, el demodulador se traduce en un escalado de la señal recibida y una integración entre 0 y T , según se muestra en la Figura 4.12(a). Para el tercero

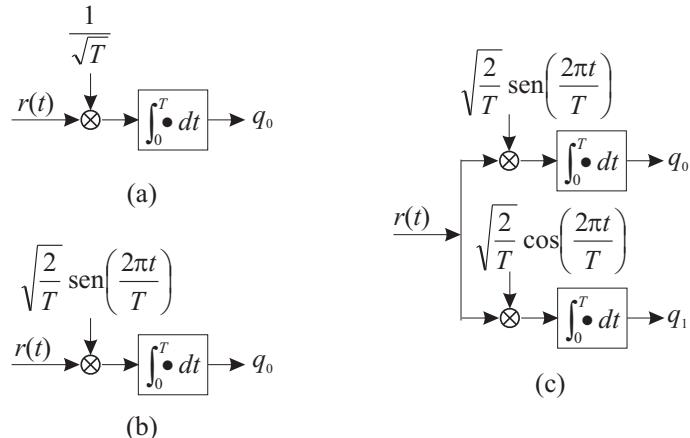


Figura 4.12. Estructura del demodulador para los cuatro conjuntos de señales analizados; (a) dos primeros conjuntos, (b) tercer conjunto, (c) cuarto conjunto.

demodulador multiplica la señal recibida por una señal sinusoidal e integra entre 0 y T (Figura 4.12(b)), y para el cuarto conjunto de señales ha de multiplicar por dos componentes sinusoidales e integrar (Figura 4.12(c)).

Analicemos ahora la salida del demodulador. Introduciendo la expresión analítica de $r(t)$ en (4.9) obtenemos

$$\begin{aligned}
 q_j &= \int_0^T r(t)\phi_j(t) dt \\
 &= \int_0^T (s(t) + n(t))\phi_j(t) dt \\
 &= \int_0^T \left(\sum_{k=0}^{N-1} A_k \phi_k(t) \right) \phi_j(t) dt + \int_0^T n(t)\phi_j(t) dt \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} A_k \int_0^T \phi_k(t)\phi_j(t) dt + n_j \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} A_k \delta[k - j] + n_j \\
 &= A_j + n_j
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

donde A_j es la coordenada j -ésima del símbolo \mathbf{A} que fue transmitido y n_j es la con-

tribución del ruido gausiano introducido por el canal. Todas las componentes q_j pueden expresarse de forma conjunta empleando notación vectorial como

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ \vdots \\ A_{N-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_0 \\ n_1 \\ \vdots \\ n_{N-1} \end{bmatrix} = \mathbf{A} + \mathbf{n} \quad (4.11)$$

Cada una de las componentes n_j del ruido debe ser considerada como una variable aleatoria. Dado que el proceso del que proviene, $n(t)$, es gausiano, tendrá una función de densidad de probabilidad gausiana. Su media puede calcularse como

$$E\{n_j\} = E\left\{\int_0^T n(t)\phi_j(t) dt\right\} = \int_0^T E\{n(t)\}\phi_j(t) dt = 0 \quad (4.12)$$

ya que $n(t)$ tiene media cero. La covarianza entre dos componentes de ruido resulta

$$\begin{aligned} E\{n_j n_k\} &= E\left\{\left(\int_0^T n(t)\phi_j(t) dt\right)\left(\int_0^T n(\tau)\phi_k(\tau) d\tau\right)\right\} \\ &= \int_0^T \int_0^T E\{n(t)n(\tau)\} \phi_j(t)\phi_k(\tau) dt d\tau \\ &= \int_0^T \int_0^T \frac{N_0}{2} \delta(t-\tau) \phi_j(t)\phi_k(\tau) dt d\tau \\ &= \frac{N_0}{2} \int_0^T \phi_j(t)\phi_k(t) dt \\ &= \frac{N_0}{2} \delta[j-k] \end{aligned} \quad (4.13)$$

de donde podemos obtener la varianza de cada componente sin más que hacer $j = k$ en (4.13). A la luz de estos resultados podemos concluir que las N componentes de ruido son variables gausianas incorrelacionadas de media nula y varianza $N_0/2$. Como una variable aleatoria gausiana queda únicamente determinada a partir de su media y varianza, la función de densidad de probabilidad de cada n_j es

$$f_{n_j}(n_j) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{n_j^2}{N_0}} \quad (4.14)$$

y como bajo estadística gausiana incorrelación implica independencia (Página 123), la función de densidad de probabilidad conjunta de \mathbf{n} es

$$f_{\mathbf{n}}(\mathbf{n}) = \prod_{j=0}^{N-1} f_{n_j}(n_j) = \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} e^{-\sum_{j=0}^{N-1} \frac{n_j^2}{N_0}} = \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} e^{-\frac{\|\mathbf{n}\|^2}{N_0}} \quad (4.15)$$

A partir de la función de densidad de probabilidad del ruido podemos obtener la de la salida del demodulador condicionada al símbolo transmitido sin más que tener en cuenta que

cada componente q_j de la señal recibida es la suma de A_j (que se trata como una constante, dado que queremos obtener la densidad condicionada al símbolo transmitido) y el ruido. La función de densidad de probabilidad de q_j condicionada a A_j (o, más concretamente, a que la componente j -ésima del símbolo transmitido, A_j , tome el valor a_{ij}) será gausiana de media a_{ij} y varianza $N_0/2$

$$f_{q_j|A_j}(q_j|a_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{(q_j-a_{ij})^2}{N_0}} \quad (4.16)$$

y la función de densidad de probabilidad conjunta de \mathbf{q} condicionada a \mathbf{A}

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{q}|\mathbf{A}}(\mathbf{q}|\mathbf{a}_i) &= \prod_{j=0}^{N-1} f_{q_j|A_j}(q_j|a_{ij}) = \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} e^{-\sum_{j=0}^{N-1} \frac{(q_j-a_{ij})^2}{N_0}} = \\ &= \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} e^{-\frac{\|\mathbf{q}-\mathbf{a}_i\|^2}{N_0}} \end{aligned} \quad (4.17)$$

En el desarrollo del demodulador hemos partido de la idea de recuperar las coordenadas de la señal recibida en la base del espacio de señal del transmisor, pero no nos hemos preguntado si la información que recuperamos de la señal recibida es toda la información relevante a la hora de tomar la decisión del símbolo que fue transmitido o existe información adicional que pueda ayudar a tomar esa decisión. La respuesta a esta pregunta es que el vector \mathbf{q} , tal y como se definió en (4.7) y (4.8), contiene toda la información relevante para decidir qué símbolo fue el transmitido. Estrictamente, se dice que el vector \mathbf{q} es un *estadístico suficiente para la detección* y la demostración de que realmente lo es se encuentra en el Apéndice 4.B.

4.3.2. Filtro adaptado

La estructura de espacio vectorial desarrollada para el modulador y demodulador es muy potente y permite realizar una interpretación geométrica de las señales que resulta de gran utilidad. Sin embargo, con esta interpretación se pierde el sentido de variación temporal e interpretación en la frecuencia propia del estudio de señales y sistemas que, a la par que ofrece una visión distinta del proceso de demodulación, nos permite descubrir propiedades adicionales del demodulador.

Consideremos un filtro con respuesta al impulso $h_k(t) = \phi_k(-t)$. Si introducimos a su entrada la señal $r(t)$ de entrada al demodulador, a la salida del filtro tenemos

$$y_k(t) = r(t) * h_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau)h_k(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau)\phi_k(-(t-\tau)) d\tau \quad (4.18)$$

Si muestreamos la salida $y_k(t)$ en $t = 0$, tenemos

$$y_k(0) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau)h_k(-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau)\phi_k(\tau) d\tau \quad (4.19)$$

que no otra cosa sino la salida del correlacionador, q_k , que habíamos calculado en (4.8).

En general, un filtro con respuesta al impulso $h(t) = x(-t)$ ¹ se dice que es un filtro adaptado a la señal $x(t)$.

Aplicando este resultado, podemos plantear una estructura del demodulador como la que muestra la Figura 4.13, conocida como *demodulador basado en filtros adaptados*.

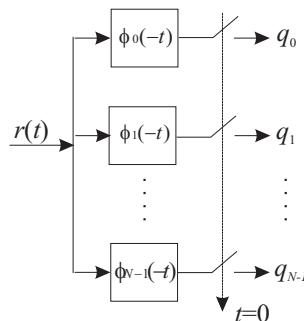


Figura 4.13. Estructura del demodulador basada en filtros adaptados.

En la Figura 4.14 podemos ver la señal de la base de los dos primeros conjuntos de señales analizados, $\phi_0(t)$, y la salida de su filtro adaptado cuando tiene a su entrada esa misma señal, $\phi_0(t) * \phi_0(-t)$. Observe cómo en el instante de muestreo ($t = 0$) la salida del filtro toma su valor máximo. En la Figura 4.15 podemos ver las mismas señales referidas al

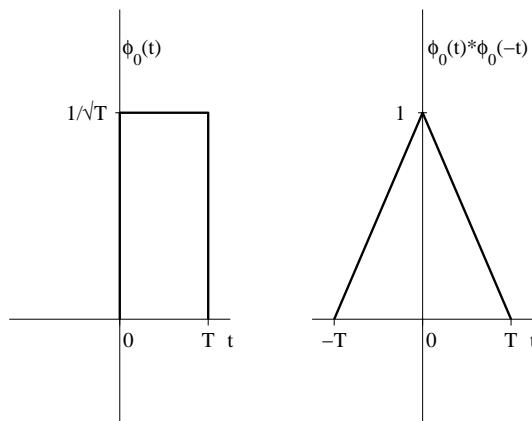


Figura 4.14. Elemento de la base de los dos primeros conjuntos de señales analizados y convolución de esta señal con la respuesta al impulso de su filtro adaptado.

tercer conjunto de señales analizadas. También se cumple que en el instante de muestreo la salida del filtro toma su valor máximo.

Puede argumentarse, y con razón, que el demodulador basado en filtros adaptados es irrealizable puesto que los filtros que utiliza son no causales ($\phi_k(-t) \neq 0$ para $t < 0$). Para

¹Para señales complejas, $h(t) = x^*(-t)$.

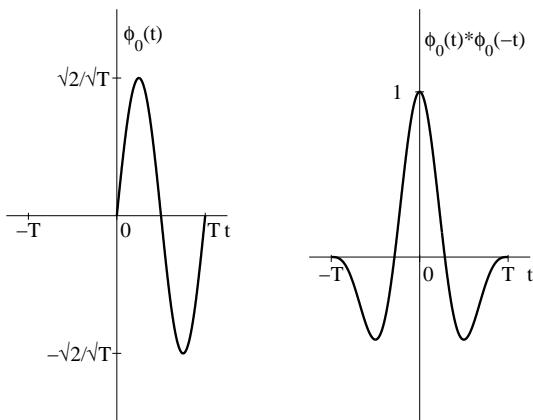


Figura 4.15. Elemento de la base del tercer conjunto de señales analizados y convolución de esta señal con la respuesta al impulso de su filtro adaptado.

obtener un demodulador realizable podemos seguir el siguiente razonamiento: las señales $\phi_k(t)$ son idénticamente nulas fuera del intervalo $[0, T]$ y, por tanto, sus correspondientes $\phi_k(-t)$ serán idénticamente nulos fuera del intervalo $(-T, 0]$; si retardamos T segundos la respuesta impulsional $\phi_k(-t)$, $\phi_k(T-t)$, y muestreamos en $t = T$ obtenemos el mismo resultado con un demodulador realizable. Este desplazamiento temporal no invalida ninguno de los desarrollos que se realizan en este apartado.

Propiedades del filtro adaptado

El demodulador basado en filtros adaptados no aporta por sí mismo otra novedad que no sea una realización distinta de las operaciones que debe llevar a cabo el demodulador de correlación. Ahora bien, con esta estructura es más fácil comprobar propiedades interesantes del demodulador.

Máxima relación señal a ruido. Es la propiedad más importante, que podemos enunciar de la siguiente manera: sea un esquema como el que muestra la Figura 4.16, donde $s(t)$

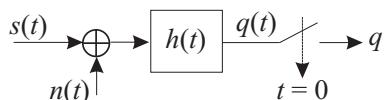


Figura 4.16. Modelo para la derivación del filtro adaptado.

es una señal conocida y $n(t)$ es ruido gausiano blanco y de media nula. El filtro que hace máxima la relación señal a ruido a la salida (medida en q) es el filtro adaptado a $s(t)$; es decir, aquel que tiene como respuesta al impulso $h(t) = s(-t)$.

Para demostrar esta propiedad, vamos a comenzar por definir qué entendemos por rela-

ción señal a ruido a la salida. La salida del filtro, $q(t)$, puede expresarse como

$$\begin{aligned} q(t) &= (s(t) + n(t)) * h(t) = s(t) * h(t) + n(t) * h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)h(t - \tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} n(\tau)h(t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (4.20)$$

y su valor en $t = 0$ como

$$q \doteq q(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)h(-\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} n(\tau)h(-\tau) d\tau \doteq s + n \quad (4.21)$$

La relación señal a ruido a la salida se define como

$$\left(\frac{S}{N}\right)_q \doteq \frac{E\{s^2\}}{E\{n^2\}} = \frac{s^2}{E\{n^2\}} \quad (4.22)$$

Desarrollando $E\{n^2\}$ obtenemos

$$\begin{aligned} E\{n^2\} &= E\left\{\left(\int_{-\infty}^{\infty} n(\tau)h(-\tau) d\tau\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} n(\theta)h(-\theta) d\theta\right)\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E\{n(\tau)n(\theta)\} h(-\tau)h(-\theta) d\tau d\theta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} \delta(\tau - \theta)h(-\tau)h(-\theta) d\tau d\theta \\ &= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} h^2(-\tau) d\tau \\ &= \frac{N_0}{2} \mathcal{E}\{h(t)\} \end{aligned} \quad (4.23)$$

que, sustituido en (4.22), nos da

$$\left(\frac{S}{N}\right)_q = \frac{s^2}{E\{n^2\}} = \frac{s^2}{\frac{N_0}{2} \mathcal{E}\{h(t)\}} = \frac{\left(\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)h(-\tau) d\tau\right)^2}{\frac{N_0}{2} \mathcal{E}\{h(t)\}} \quad (4.24)$$

Particularizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz (Apartado 2.1.4, Ecuación (2.60)) a las señales $s(t)$ y $h(-t)$ y elevando al cuadrado cada uno de los términos de la desigualdad (2.60), tenemos

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} s(t)h(-t) dt\right)^2 \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt\right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |h(-t)|^2 dt\right) \quad (4.25)$$

que nos sirve para acotar la relación señal a ruido como

$$\begin{aligned} \left(\frac{S}{N}\right)_q &= \frac{\left(\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)h(-\tau) d\tau\right)^2}{\frac{N_0}{2} \mathcal{E}\{h(t)\}} \leq \frac{\left(\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt\right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |h(-t)|^2 dt\right)}{\frac{N_0}{2} \mathcal{E}\{h(t)\}} = \\ &= \frac{2}{N_0} \frac{\mathcal{E}\{s(t)\} \mathcal{E}\{h(t)\}}{\mathcal{E}\{h(t)\}} = \frac{2}{N_0} \mathcal{E}\{s(t)\} \end{aligned} \quad (4.26)$$

donde la igualdad (y, por tanto, el máximo) se produce cuando $h(-t) = Ks(t)$, para cualquier valor no nulo de la constante K . De aquí concluimos que:

1. La relación señal a ruido a la salida se hace máxima cuando $h(t) = Ks(-t)$ para cualquier valor de K (exceptuando $K = 0$) y, particularmente, para el filtro adaptado, $h(t) = s(-t)$.
2. La relación señal a ruido a la salida del filtro adaptado no depende de la forma específica de $s(t)$, sino únicamente de su energía y de la densidad espectral de potencia del ruido a la entrada del filtro.

Esta demostración realizada para el modelo de la Figura 4.16 empleando una única señal $s(t)$ es aplicable al conjunto de señales del transmisor, $\{s_i(t), i = 1, \dots, M\}$ y al conjunto de señales de base, $\{\phi_j(t), j = 1, \dots, N\}$, con lo que se demuestra que la estructura de demodulador basado en filtros adaptados (o su equivalente de correlación) es la estructura que nos permite obtener la máxima relación señal a ruido en cada componente del vector q .

Propiedades del filtro adaptado en ausencia de ruido. Si en el modelo de la Figura 4.16 eliminamos el ruido ($n(t) = 0$), la salida $q(t)$ posee propiedades interesantes, como:

- P 1. *La transformada de Fourier de $q(t)$, $Q(j\omega)$, es la densidad espectral de energía de $s(t)$, $|S(j\omega)|^2$.*

Para demostrarlo determinamos en primer lugar la función de transferencia del filtro adaptado, $H(j\omega)$, que resulta ser, por la propiedad de simetría de la Transformada de Fourier, y dado que $h(t) = s(-t)$ es una señal real, $H(j\omega) = S^*(j\omega)$. A partir de esta, la transformada de Fourier de $q(t)$, $Q(j\omega)$

$$Q(j\omega) = S(j\omega) H(j\omega) = S(j\omega) S^*(j\omega) = |S(j\omega)|^2 \quad (4.27)$$

- P 2. *$q(t)$ es la función de ambigüedad temporal de $s(t)$, $r_s(t)$.*

Para demostrarlo podemos utilizar la propiedad anterior, aprovechando que la función de ambigüedad temporal, tal como quedó definida en (2.57), es la transformada inversa de la densidad espectral de energía. También podemos calcular la salida directamente como

$$q(t) = s(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)s(\tau - t) d\tau = r_s(t) \quad (4.28)$$

En las Figuras 4.14 y 4.15 podemos ver esta función de ambigüedad temporal de, respectivamente, los dos primeros y el tercer conjuntos de señales analizados. En estas figuras podemos comprobar que el valor de la función de ambigüedad temporal en 0, que coincide por definición con la energía de la señal, es igual a 1, lo que concuerda con la propiedad de ortonormalidad de los elementos de la base.

4.3.3. Canal discreto equivalente

Repasemos ahora algunas de las conclusiones del análisis de nuestro modelo de comunicación digital:

1. La fiabilidad de un esquema de comunicación, por lo que respecta al proceso de modulación, viene dada por las características de la constelación de señales y no por los elementos de la base de señales que empleemos en el proceso de modulación.
2. La relación señal a ruido a la salida del demodulador no depende de la forma concreta que toman cada uno de los elementos de la base de señales, sino de su energía y de la densidad espectral de potencia del ruido presente en el canal. Como la base es ortonormal (energía de cada elemento de la base igual a 1), la relación señal a ruido a la salida del demodulador depende únicamente de la densidad espectral de potencia del ruido.
3. La salida del demodulador es un vector q que toma la forma $q = A + n$ (Ecuación (4.11)), donde A es el símbolo transmitido y n es una componente de ruido con una función de densidad de probabilidad definida en (4.15).

Estas conclusiones nos permiten obtener una simplificación del modelo general de un sistema de comunicación representado en la Figura 4.1 englobando el modulador, canal y demodulador en un único elemento que denominamos *canal discreto equivalente*, según se muestra en la Figura 4.17. Este modelo va a ser de utilidad en el análisis del decisor porque

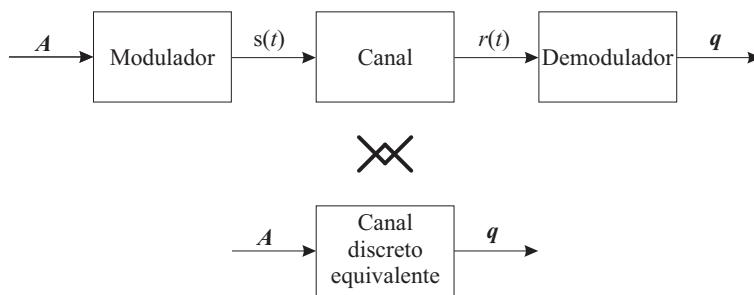


Figura 4.17. Definición del canal discreto equivalente.

nos permite “ocultar” la naturaleza física del canal y centrarnos en los aspectos que van a influir en la fiabilidad de la comunicación.

El canal discreto equivalente es, en general, vectorial y con dimensión la del espacio de señales del modulador, N . La relación entre su entrada y salida viene dada, para el modelo de canal aditivo gausiano, por $q = A + n$, según se representa en la Figura 4.18. Las componentes de ruido n_j son, de acuerdo con (4.15), variables aleatorias gausianas independientes de media cero y varianza $N_0/2$.

Volviendo a los cuatro conjuntos de señales considerados en apartados anteriores, los tres primeros tienen el mismo modelo de canal discreto equivalente, que resulta ser escalar

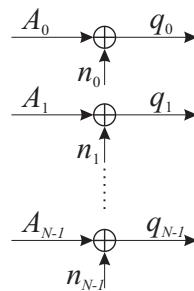


Figura 4.18. Canal discreto equivalente para canal aditivo gausiano.

($N = 1$) y su relación entrada/salida es tan simple como $q_0 = A_0 + n_0$. El cuarto es vectorial con dimensión 2. Otro aspecto relevante es que los conjuntos primero y tercero se van a comportar de idéntica forma ya que poseen el mismo modelo de canal discreto equivalente y la misma constelación; aspecto éste que ya habíamos señalado sin hacer uso del canal discreto equivalente.

4.4. DECISOR Y CODIFICADOR

Llegamos por fin a la parte más importante del sistema de comunicaciones: el decisor. El decisor debe asignar un símbolo \hat{B} al vector de entrada q de acuerdo con un criterio: hacer mínima la probabilidad de error de símbolo, según quedó definida en (4.3). El desarrollo del decisor bajo este criterio nos va a obligar a reconsiderar todo el análisis realizado hasta ahora porque, al fin y al cabo, todo el sistema de comunicaciones debe ser diseñado para cumplir el criterio de mínima probabilidad de error de símbolo, y el lugar donde debe medirse esta probabilidad de error es el decisor. Por este motivo nos hemos referido anteriormente al decisor como la parte más importante del sistema de comunicaciones.

Una vez que obtengamos el decisor abordaremos el diseño (o mas bien, criterios de diseño) del codificador y la evaluación analítica de la probabilidad de error.

4.4.1. Desarrollo del decisor óptimo

El cometido que ha de realizar el decisor es el siguiente: a cada posible valor del vector de entrada q el decisor debe asignarle un símbolo $\hat{B} = b_i$ de tal manera que la probabilidad media de error por símbolo sea lo más pequeña posible.

Comencemos analizando el significado de la probabilidad media de error por símbolo en el proceso de decisión. Cuando q toma un valor determinado q_0 , el decisor le asigna un símbolo $\hat{B} = b_i$; la probabilidad de error en esta decisión, que denotamos como $P_e(\hat{B} = b_i, q = q_0)$, es

$$P_e(\hat{B} = b_i, q = q_0) \doteq Pr(B \neq b_i | q = q_0) = 1 - Pr(B = b_i | q = q_0) = 1 - p_{B|q}(b_i | q_0) \quad (4.29)$$

o, dicho en palabras, la probabilidad de error en una decisión ($\hat{B} = b_i$) tomada a partir de una entrada determinada (\mathbf{q}_0) será igual a la probabilidad de que, siendo la entrada igual a \mathbf{q}_0 , el símbolo transmitido no sea igual al decidido. El valor $p_{B|\mathbf{q}}(b_i|\mathbf{q}_0)$ es, obviamente, la probabilidad de acertar cuando ante un valor de entrada \mathbf{q}_0 el decisor asigna el símbolo b_i ($\hat{B} = b_i$).

La probabilidad media de error cuando el decisor presenta a su salida el símbolo b_i , $P_e(\hat{B} = b_i)$, se obtiene eliminando de (4.29) la dependencia respecto al valor concreto de la entrada al decisor. Esto se consigue calculando el valor medio de (4.29) respecto a \mathbf{q}_0 de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 P_e(\hat{B} = b_i) &= Pr(B \neq b_i) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} Pr(B \neq b_i | \mathbf{q} = \mathbf{q}_0) f_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_0) d\mathbf{q}_0 \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} (1 - p_{B|\mathbf{q}}(b_i|\mathbf{q}_0)) f_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_0) d\mathbf{q}_0 \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_0) d\mathbf{q}_0 - \int_{-\infty}^{\infty} p_{B|\mathbf{q}}(b_i|\mathbf{q}_0) f_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_0) d\mathbf{q}_0 \\
 &= 1 - \int_{-\infty}^{\infty} p_{B|\mathbf{q}}(b_i|\mathbf{q}_0) f_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_0) d\mathbf{q}_0
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

Para determinar el procedimiento de decisión que hace mínima la probabilidad media de error seguimos el siguiente razonamiento:

- El mínimo de la probabilidad media de error cuando el decisor presenta a su salida el símbolo b_i se consigue haciendo máxima la integral que aparece en la última línea de (4.30).
- La función dentro de esta integral, $p_{B|\mathbf{q}}(b_i|\mathbf{q}_0) f_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_0)$, es siempre mayor o igual que cero por ser el producto de dos funciones no negativas ($0 \leq p_{B|\mathbf{q}}(b_i|\mathbf{q}_0) \leq 1$ y $0 \leq f_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_0)$). Esto implica que el máximo de la integral se consigue haciendo máxima la función dentro de la integral para cada posible valor de \mathbf{q}_0 .
- Dado que $f_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_0)$ no es función del símbolo decidido, el máximo de la función dentro de la integral se consigue haciendo máxima $p_{B|\mathbf{q}}(b_i|\mathbf{q}_0)$ y, por tanto, para conseguir la mínima probabilidad media de error el decisor ha de asignar el símbolo b_i ($\hat{B} = b_i$) a todos aquellos valores del vector de entrada \mathbf{q} , \mathbf{q}_0 , para los que se cumple que

$$p_{B|\mathbf{q}}(b_i|\mathbf{q}_0) > p_{B|\mathbf{q}}(b_j|\mathbf{q}_0)$$

para todo j distinto de i .

Este criterio o forma de proceder también podemos interpretarlo de la siguiente manera: ante un valor del vector de entrada \mathbf{q}_0 , el decisor ha de calcular el conjunto de probabilidades $\{p_{B|\mathbf{q}}(b_j|\mathbf{q}_0), j = 0, \dots, M-1\}$; la salida del decisor será el símbolo b_i que cumple

$$p_{B|\mathbf{q}}(b_i|\mathbf{q}_0) > p_{B|\mathbf{q}}(b_j|\mathbf{q}_0) \quad j = 0, \dots, M-1, j \neq i \tag{4.31}$$

es decir, el máximo de $p_{B|\mathbf{q}}(b_j|\mathbf{q}_0)$. En el caso en que dos símbolos distintos, b_i y b_l , obtengan el máximo, esto es,

$$p_{B|\mathbf{q}}(b_i|\mathbf{q}_0) = p_{B|\mathbf{q}}(b_l|\mathbf{q}_0) > p_{B|\mathbf{q}}(b_j|\mathbf{q}_0) \quad j = 0, \dots, M-1, j \neq i, l$$

el decisor podrá optar por uno de ellos de manera arbitraria sin que esta decisión tenga efecto alguno sobre la probabilidad media de error.

Este criterio de decisión se conoce con el nombre de *máximo a posteriori* o *MAP* (de “maximum *a posteriori*”). Su nombre viene de la denominación de $p_{B|\mathbf{q}}(b_j|\mathbf{q}_0)$ como probabilidades *a posteriori* por representar la probabilidad de los símbolos una vez realizada la transmisión, y en contraposición a las probabilidades $p_B(b_i)$ denominadas *a priori* por representar la probabilidad de los símbolos antes de realizar la transmisión.

La determinación de las probabilidades *a posteriori* puede realizarse mediante la regla de Bayes, (3.109),

$$p_{B|\mathbf{q}}(b_j|\mathbf{q}_0) = \frac{p_B(b_j) f_{\mathbf{q}|B}(\mathbf{q}_0|b_j)}{f_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_0)} \quad (4.32)$$

donde, teniendo en cuenta que $B = b_j$ implica que $\mathbf{A} = \mathbf{a}_j$ y viceversa, establecemos la igualdad

$$f_{\mathbf{q}|B}(\mathbf{q}_0|b_j) = f_{\mathbf{q}|\mathbf{A}}(\mathbf{q}_0|\mathbf{a}_j) \quad (4.33)$$

siendo la función de densidad de probabilidad $f_{\mathbf{q}|\mathbf{A}}(\mathbf{q}_0|\mathbf{a}_j)$ la obtenida en (4.17).

Introduciendo (4.32) y (4.33) en (4.31), el criterio MAP se reduce a encontrar el símbolo b_i que cumple

$$\frac{p_B(b_i) f_{\mathbf{q}|\mathbf{A}}(\mathbf{q}_0|\mathbf{a}_i)}{f_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_0)} > \frac{p_B(b_j) f_{\mathbf{q}|\mathbf{A}}(\mathbf{q}_0|\mathbf{a}_j)}{f_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_0)} \quad j = 0, \dots, M-1, j \neq i \quad (4.34)$$

que, como $f_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_0)$ es una cantidad no negativa e independiente del símbolo transmitido, es equivalente a

$$p_B(b_i) f_{\mathbf{q}|\mathbf{A}}(\mathbf{q}_0|\mathbf{a}_i) > p_B(b_j) f_{\mathbf{q}|\mathbf{A}}(\mathbf{q}_0|\mathbf{a}_j) \quad j = 0, \dots, M-1, j \neq i \quad (4.35)$$

Finalmente, si utilizamos la hipótesis de símbolos equiprobables ($Pr(B_j) = 1/M$, $j = 0, \dots, M-1$), podemos suprimir las probabilidades *a priori* de (4.35) y reducir el criterio MAP a encontrar el símbolo b_i que cumple

$$f_{\mathbf{q}|\mathbf{A}}(\mathbf{q}_0|\mathbf{a}_i) > f_{\mathbf{q}|\mathbf{A}}(\mathbf{q}_0|\mathbf{a}_j) \quad j = 0, \dots, M-1, j \neq i \quad (4.36)$$

o, lo que es igual, a encontrar el símbolo que hace máxima la función $f_{\mathbf{q}|\mathbf{A}}(\mathbf{q}_0|\mathbf{a}_i)$.

Esta particularización del criterio MAP para símbolos equiprobables² recibe el nombre de *criterio de máxima verosimilitud* o *criterio ML* (de “maximum likelihood”). El nombre viene de la propia función $f_{\mathbf{q}|\mathbf{A}}(\mathbf{q}_0|\mathbf{a}_i)$, denominada función de verosimilitud ya que

²Que es también el que podríamos aplicar si las probabilidades *a priori* fuesen desconocidas.

representa una medida de certidumbre o verosimilitud de que la hipótesis cierta sea que el símbolo transmitido fuese a_i cuando la entrada al decisor es q_0 .

Antes de desarrollar el criterio MAP (ó ML) para la función de verosimilitud de nuestro problema vamos a ilustrar con un ejemplo la aplicación de estos criterios a un caso concreto y, a partir de este ejemplo, introduciremos un concepto importante como es el de *regiones de decisión*.

Ejemplo 4.1

Consideremos un sistema de comunicación binario ($M = 2$) que emplea un espacio de señal unidimensional ($N = 1$). La Figura 4.19 muestra las curvas $p_B(b_0) f_{q|A}(q|a_0)$ (ahora tanto A como q son escalares) y $p_B(b_1) f_{q|A}(q|a_1)$ en función del valor de q obtenidas en el receptor de este sistema de comunicación.

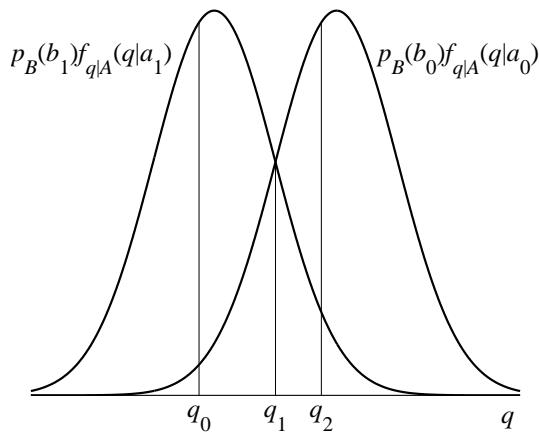


Figura 4.19. Aplicación del criterio MAP con símbolos equiprobables.

Si el valor de q en el receptor es el etiquetado como q_0 en la Figura 4.19, se cumple que

$$p_B(b_1) f_{q|A}(q_0|a_1) > p_B(b_0) f_{q|A}(q_0|a_0)$$

y, por tanto, el decisor MAP ofrecerá como salida b_1 . Si el valor de q en el receptor es el etiquetado como q_1 en la Figura 4.19, se cumple que

$$p_B(b_0) f_{q|A}(q_1|a_0) = p_B(b_1) f_{q|A}(q_1|a_1)$$

y el decisor MAP podrá ofrecer como salida b_0 o b_1 . Si el valor de q en el receptor es el etiquetado como q_2 en la Figura 4.19, se cumple que

$$p_B(b_0) f_{q|A}(q_2|a_0) > p_B(b_1) f_{q|A}(q_2|a_1)$$

y el decisor MAP ofrecerá como salida b_0 .

Como hemos visto en el ejemplo precedente, para tomar una decisión debemos calcular el valor de cada una de las funciones $p_B(b_j) f_{q|A}(q|a_j)$ para el valor de entrada al decisor $q = q_0$. Este cálculo puede ser realizado antes de transmitir símbolo alguno para todos los posibles valores de la entrada q y asignar de forma directa a cada posible valor de la entrada un símbolo b_i determinado.

Ejemplo 4.1 (Continuación)

Podemos comprobar que cuando el valor de q sea menor que el etiquetado como q_1 en la Figura 4.19, se cumple

$$p_B(b_1) f_{q|A}(q|a_1) > p_B(b_0) f_{q|A}(q|a_0)$$

y asignar directamente como salida el símbolo b_1 . De forma análoga podemos comprobar que

$$p_B(b_0) f_{q|A}(q|a_0) > p_B(b_1) f_{q|A}(q|a_1) \quad \forall q > q_1$$

y asignamos como salida el símbolo b_0 .

Así, en lugar de calcular las funciones $p_B(b_0) f_{q|A}(q|a_0)$ y $p_B(b_1) f_{q|A}(q|a_1)$ para el valor de entrada correspondiente, sólo hay que comparar la entrada con q_1 : si es menor, el decisor MAP ofrecerá como salida b_1 y si es mayor, b_0 .

Con este procedimiento estamos realizando una partición del espacio de entrada al decisor en regiones disjuntas $\{I_i, i = 0, \dots, M - 1\}$ ($I_0 = (q_1, \infty)$ e $I_1 = (-\infty, q_1)$ en el ejemplo precedente). A cada una de estas regiones le asignamos una decisión ($\hat{B} = b_i$) y por esta razón son llamadas *regiones de decisión*. El decisor queda unívocamente determinado mediante la relación

$$q \in I_i \Leftrightarrow \hat{B} = b_i \quad (4.37)$$

Si el espacio de entrada es unidimensional, los valores que separan las regiones de decisión (q_1 en el ejemplo precedente) se denominan *umbrales de decisión*. Si el espacio de entrada es multidimensional, las superficies (o curvas, si la dimensión es igual a 2) que separan las regiones de decisión se denominan *fronteras de decisión*.

En determinadas ocasiones los símbolos de entrada a nuestro sistema no son equiprobables y, en consecuencia, el criterio MAP no se reduce al ML. Veamos con el siguiente ejemplo la influencia de las probabilidades *a priori* de aparición de los símbolos.

Ejemplo 4.2

Consideremos el sistema de comunicación descrito en el Ejemplo 4.1, ahora con unas probabilidades *a priori* $p_B(b_1) = 2p_B(b_0)$. La Figura 4.20 muestra las curvas $p_B(b_0) f_{q|A}(q|a_0)$ y $p_B(b_1) f_{q|A}(q|a_1)$ en función del valor de q obtenidas en el receptor de este sistema de comunicación, donde se han representado los mismos tres valores de q (q_0 , q_1 y q_2) empleados en el Ejemplo 4.1 (Figura 4.19).

Al modificar las probabilidades *a priori*, de símbolos equiprobables a $p_B(b_1) = 2p_B(b_0)$, el umbral de decisión se ha trasladado de q_1 a q_3 , que es el valor de q para el que se produce la igualdad

$$p_B(b_0) f_{q|A}(q_3|a_0) = p_B(b_1) f_{q|A}(q_3|a_1)$$

Continuemos ahora con el criterio ML (ó MAP con símbolos equiprobables, como se desee nombrar) para la función de verosimilitud de nuestro problema. Introduciendo la función de densidad de probabilidad de la entrada al receptor, (4.17), en la formulación del decisor ML obtenemos que la salida será el símbolo b_i (o, equivalentemente, q_0 pertenece a I_i) que cumple

$$\frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} e^{-\frac{\|\mathbf{q}_0 - \mathbf{a}_i\|^2}{N_0}} > \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} e^{-\frac{\|\mathbf{q}_0 - \mathbf{a}_j\|^2}{N_0}} \quad j = 0, \dots, M - 1, j \neq i \quad (4.38)$$

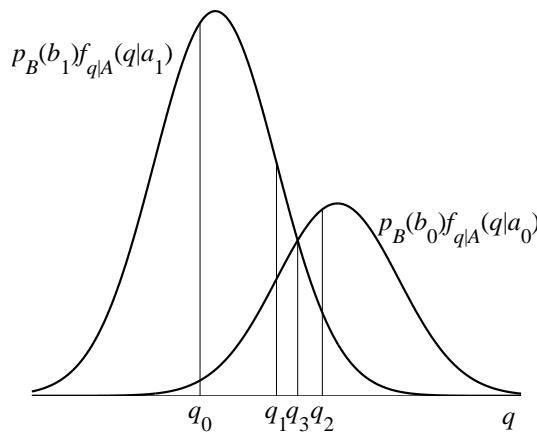


Figura 4.20. Aplicación del criterio MAP con símbolos no equiprobables.

Multiplicamos ambos términos de la desigualdad por $(\pi N_0)^{N/2}$ y obtenemos

$$e^{-\frac{\|\mathbf{q}_0 - \mathbf{a}_i\|^2}{N_0}} > e^{-\frac{\|\mathbf{q}_0 - \mathbf{a}_j\|^2}{N_0}} \quad j = 0, \dots, M-1, j \neq i \quad (4.39)$$

Teniendo en cuenta que la función exponencial es monótona creciente y, por tanto, cumple

$$e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$$

(4.39) es equivalente a

$$-\frac{\|\mathbf{q}_0 - \mathbf{a}_i\|^2}{N_0} > -\frac{\|\mathbf{q}_0 - \mathbf{a}_j\|^2}{N_0} \quad j = 0, \dots, M-1, j \neq i \quad (4.40)$$

de donde, reordenando los términos y multiplicando por N_0 , obtenemos

$$\|\mathbf{q}_0 - \mathbf{a}_i\|^2 < \|\mathbf{q}_0 - \mathbf{a}_j\|^2 \quad j = 0, \dots, M-1, j \neq i \quad (4.41)$$

Recordando que

$$\|\mathbf{q}_0 - \mathbf{a}_i\|^2 = \sum_{l=0}^{N-1} (q_{0l} - a_{il})^2 = (d(\mathbf{q}_0, \mathbf{a}_i))^2 \quad (4.42)$$

finalmente establecemos que la salida del decisor ML ante una entrada \mathbf{q}_0 es el símbolo b_i si se cumple

$$d(\mathbf{q}_0, \mathbf{a}_i) < d(\mathbf{q}_0, \mathbf{a}_j) \quad j = 0, \dots, M-1, j \neq i \quad (4.43)$$

lo que expresado en palabras quiere decir que el decisor ML se limita a escoger el símbolo más cercano al vector de entrada. Alternativamente, podemos decir que las regiones de decisión I_i estarán formadas por todos los puntos que se encuentran más cerca del símbolo \mathbf{a}_i que de cualquier otro de la constelación.

Un esquema de este decisor es el mostrado en la Figura 4.21.

En este punto es necesario realizar las siguientes precisiones:

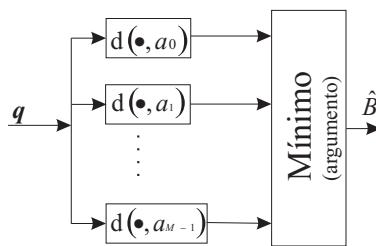


Figura 4.21. Estructura del decisor de máxima verosimilitud.

- Este último desarrollo que nos ha llevado a formular el decisor ML como un decisor de mínima distancia euclídea está basado en una función de densidad de probabilidad gausiana de la entrada al decisor, y esta función de densidad de probabilidad viene dada por la naturaleza del ruido presente en el canal. Otros tipos de ruido de canal que no puedan considerarse gausianos (por ejemplo, el ruido en comunicaciones por fibra óptica) conducirán a formulaciones distintas del decisor.
- La definición de la distancia entre señales que hemos realizado a lo largo de todo el capítulo (distancia euclídea) no es la única posible, y se ha adoptado sin una justificación estricta. Es precisamente ahora cuando podemos justificar, mediante la estadística gausiana, que se debe emplear esta medida de distancia y no otra.

Desde el punto de vista de la realización práctica del decisor, el cálculo de distancias puede simplificarse debido a que en realidad no estamos interesados en obtener la distancia del vector de entrada a cada uno de los símbolos, sino en obtener el símbolo que se encuentra a una distancia menor. Sustituyendo (4.42) en (4.41) tenemos

$$\sum_{l=0}^{N-1} (q_{0l} - a_{il})^2 < \sum_{l=0}^{N-1} (q_{0l} - a_{jl})^2 \quad j = 0, \dots, M-1, j \neq i \quad (4.44)$$

desarrollando los cuadrados

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{N-1} q_{0l}^2 + \sum_{l=0}^{N-1} a_{il}^2 - 2 \sum_{l=0}^{N-1} q_{0l} a_{il} &< \sum_{l=0}^{N-1} q_{0l}^2 + \sum_{l=0}^{N-1} a_{jl}^2 - 2 \sum_{l=0}^{N-1} q_{0l} a_{jl} \\ j = 0, \dots, M-1, j \neq i \end{aligned} \quad (4.45)$$

En cada uno de los términos, el primer sumatorio es la energía del vector de entrada y puede suprimirse porque es común a ambos, el segundo sumatorio es la energía del símbolo correspondiente y el tercer término es el producto escalar del vector de entrada con el símbolo correspondiente. Suprimiendo los términos comunes y reagrupando, (4.45) se transforma en

$$\sum_{l=0}^{N-1} q_{0l} a_{il} - \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{N-1} a_{il}^2 > \sum_{l=0}^{N-1} q_{0l} a_{jl} - \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{N-1} a_{jl}^2 \quad j = 0, \dots, M-1, j \neq i \quad (4.46)$$

o, equivalentemente,

$$\langle \mathbf{q}_0, \mathbf{a}_i \rangle - \frac{1}{2} \|\mathbf{a}_i\|^2 > \langle \mathbf{q}_0, \mathbf{a}_j \rangle - \frac{1}{2} \|\mathbf{a}_j\|^2 \quad j = 0, \dots, M-1, j \neq i \quad (4.47)$$

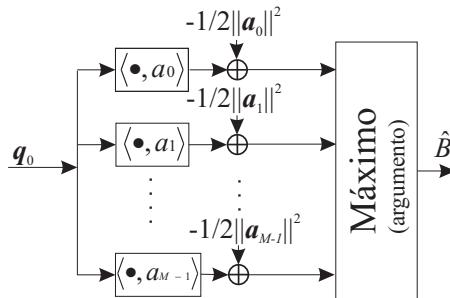


Figura 4.22. Realización del decisor de máxima verosimilitud empleando correlacionadores.

La Figura 4.22 muestra la estructura del decisor realizado de acuerdo con este desarrollo. Es interesante comprobar cómo las realizaciones del decisor mostradas en las Figuras 4.21 y 4.22 no son sino dos manifestaciones del mismo criterio, el de máxima verosimilitud. Lo que en definitiva se mide cuando se aplica este criterio es la semejanza entre la entrada al decisor y un conjunto de símbolos. Esta semejanza se puede medir mediante distancias (si menor es la distancia, más se parecen) como en la Figura 4.21 o mediante correlaciones (si la correlación es mayor, más se parecen) como en la Figura 4.22.

4.4.2. Cálculo de probabilidades de error

En el apartado precedente hemos demostrado que el decisor MAP es el que proporciona una menor probabilidad de error, pero no hemos obtenido la medida de dicha probabilidad de error que es, en definitiva, la que indica la fiabilidad del sistema de comunicación. Para calcularla vamos a ir analizando diversas situaciones de menor a mayor complejidad.

Decisor binario en espacio unidimensional

Vamos a considerar la constelación de la Figura 4.6 (Página 182), correspondiente al primer conjunto de señales analizados en el estudio del modulador. En ella, el símbolo a_0 tiene como coordenada \sqrt{T} y el símbolo $a_1, -\sqrt{T}$. La región de decisión I_0 estará formada por todos los valores de q más cercanos a a_0 que a a_1 , es decir, por todos los valores de q mayores que cero. Análogamente, la región de decisión I_1 estará formada por todos los valores de q menores que cero. El umbral de decisión es, por tanto, cero.

Supongamos ahora que el símbolo transmitido es a_0 . La función de densidad de probabilidad de la entrada al receptor, $f_{q|A}(q|a_0)$ es una gausiana de media \sqrt{T} y varianza $N_0/2$

$$f_{q|A}(q|a_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{(q-a_0)^2}{N_0}} = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{(q-\sqrt{T})^2}{N_0}} \quad (4.48)$$

que se encuentra representada en la Figura 4.23.

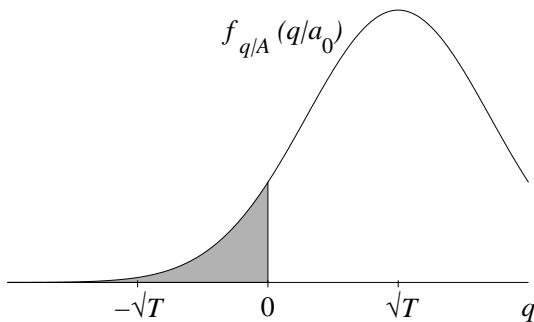


Figura 4.23. Función de densidad de probabilidad de la entrada al decisor cuando el símbolo transmitido es a_0 . El área sombreada representa la probabilidad de error.

Para que se produzca un error de decisión en estas condiciones, el valor de entrada al decisor, q , ha de ser menor que cero. La probabilidad de ocurrencia de este suceso ($q < 0$) es igual a la función de distribución de $q|a_0$ en el umbral de decisión, $F_{q|a_0}(0|a_0)$, o, lo que es lo mismo, la integral desde $-\infty$ hasta 0 de $f_{q|A}(q|a_0)$. Gráficamente, esta probabilidad es igual al área bajo $f_{q|A}(q|a_0)$ entre $-\infty$ y 0 , que se muestra sombreada en la Figura 4.23.

De igual manera, si suponemos que el símbolo transmitido es a_1 , la función de densidad de probabilidad de la entrada al receptor, $f_{q|A}(q|a_1)$ es una gaussiana de media $-\sqrt{T}$ y varianza $N_0/2$

$$f_{q|A}(q|a_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{(q-a_1)^2}{N_0}} = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{(q+\sqrt{T})^2}{N_0}} \quad (4.49)$$

que se encuentra representada en la Figura 4.24.

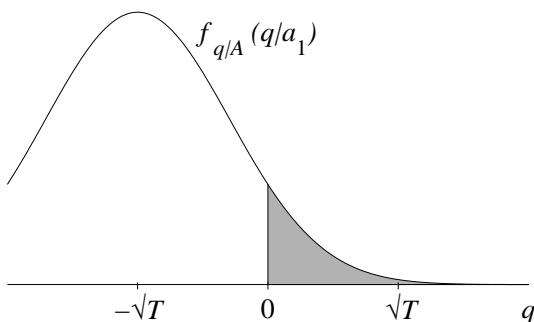


Figura 4.24. Función de densidad de probabilidad de la entrada al decisor cuando el símbolo transmitido es a_1 . El área sombreada representa la probabilidad de error.

La probabilidad de que se produzca un error de decisión será ahora la integral entre 0 e ∞ de $f_{q|A}(q|a_1)$, que se corresponde con el área bajo $f_{q|A}(q|a_1)$ entre 0 e ∞ tal y como se muestra en la Figura 4.24.

En general, la probabilidad de ocurrencia de un error de decisión condicionada a que el símbolo transmitido sea a_i , que denotaremos por $P_{e|a_i}$ y denominaremos, por simplicidad,

probabilidad de error condicionada a a_i , es igual a la integral de la función de densidad de probabilidad de la entrada al decisor fuera de la región de decisión I_i cuando el símbolo transmitido es a_i ,

$$P_{e|a_i} = \int_{q \notin I_i} f_{q|A}(q|a_i) dq \quad (4.50)$$

La probabilidad media de error P_e será la suma de las probabilidades de error condicionadas a cada uno de los símbolos ponderadas por la probabilidad de aparición de cada uno de estos símbolos (equiprobables, según hemos supuesto),

$$P_e = \sum_{i=0}^{M-1} p_A(a_i) P_{e|a_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} P_{e|a_i} \quad (4.51)$$

En nuestro caso, la probabilidad media de error será

$$P_e = \frac{1}{2} P_{e|a_0} + \frac{1}{2} P_{e|a_1} \quad (4.52)$$

Antes de proceder al cálculo de estas cantidades para nuestro problema podemos ver una justificación del carácter óptimo del criterio MAP más intuitiva que la presentada en la Página 196. Si superponemos las gráficas de las Figuras 4.23 y 4.24 (multiplicando ambas por 1/2) podemos ver (Figura 4.25(a)) una interpretación gráfica de la probabilidad media de error como el área total sombreada. Podemos comprobar que el valor del umbral de decisión

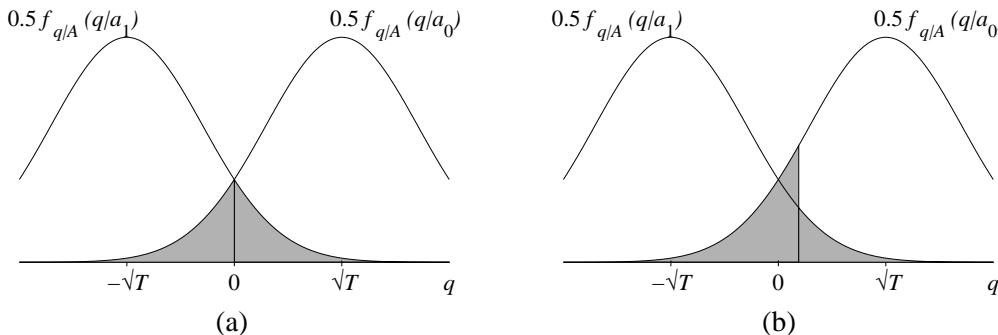


Figura 4.25. Probabilidad media de error en función del valor del umbral de decisión: (a) umbral de decisión igual a cero; (b) ejemplo con umbral de decisión distinto de cero.

que hace mínima la probabilidad media de error es el obtenido aplicando el criterio MAP. Esto es, el de cruce entre las funciones de densidad de probabilidad de la entrada al decisor condicionadas por cada uno de los símbolos. Si desplazamos el umbral de decisión hacia la derecha (Figura 4.25(b)) vemos como el área sombreada y, por tanto, la probabilidad media de error crece. Igual sucede si desplazamos el umbral de decisión hacia la izquierda.

Calculemos ahora $P_{e|a_0}$ y $P_{e|a_1}$. Como hemos mencionado anteriormente, $P_{e|a_0}$ se obtiene como

$$P_{e|a_0} = \int_{-\infty}^0 f_{q|A}(q|a_0) dq = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{(q-\sqrt{T})^2}{N_0}} dq \quad (4.53)$$

Esta integral no tiene solución analítica, pero podemos expresarla como una función Q , (3.31) (Página 103), que recordemos es

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau$$

Para expresar (4.53) como una función Q es necesario que el argumento de la exponencial dentro de la integral tome la forma $\tau^2/2$. Realizamos el cambio de variable $(q - \sqrt{T})^2/N_0 = \tau^2/2$ y (4.53) queda como

$$P_{e|a_0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\sqrt{2T/N_0}} e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau \quad (4.54)$$

Dado que $e^{-\tau^2/2}$ es una función par, (4.53) puede expresarse como

$$P_{e|a_0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{2T/N_0}}^\infty e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau = Q\left(\frac{\sqrt{T}}{\sqrt{N_0/2}}\right) \quad (4.55)$$

Podemos proceder de idéntica forma para calcular $P_{e|a_1}$, pero terminamos antes comprobando que $P_{e|a_0} = P_{e|a_1}$ dada la simetría del problema (véanse las Figuras 4.23 y 4.24). La probabilidad media de error es entonces

$$P_e = \frac{1}{2}P_{e|a_0} + \frac{1}{2}P_{e|a_1} = Q\left(\frac{\sqrt{T}}{\sqrt{N_0/2}}\right) \quad (4.56)$$

Analizando el argumento de la función Q en (4.56) podemos observar que \sqrt{T} es la distancia de a_1 (o a_2) al umbral de decisión o, lo que es lo mismo, la mitad de la distancia entre a_1 y a_2 . El valor $N_0/2$ es asimismo la varianza del ruido, por lo que, yendo de lo particular a lo general, podemos expresar la probabilidad media de error de una decisión binaria en un espacio unidimensional como

$$P_e = Q\left(\frac{d(a_0, a_1)}{2\sqrt{N_0/2}}\right) = Q\left(\frac{d(a_0, a_1)}{2\sigma_n}\right) \quad (4.57)$$

Decisor binario en espacio multidimensional

Para ilustrar este caso vamos a considerar la constelación de la Figura 4.9 (Página 184), correspondiente al cuarto conjunto de señales analizado en el estudio del modulador. En ella, los símbolos a_0 y a_1 son vectores de dimensión 2. El símbolo a_0 tiene como coordenadas $[\sqrt{2T} \ 0]^T$ (el superíndice T denota vector transpuesto) y el símbolo a_1 , $[0 \ \sqrt{2T}]^T$. Para determinar las regiones de decisión I_0 e I_1 calculamos la curva en el plano q equidistante de a_0 y a_1 (la frontera de decisión) que, como podemos comprobar en la Figura 4.26, es la recta $q_0 = q_1$. La región de decisión I_0 es el semiplano a la derecha de la recta $q_0 = q_1$ y la región de decisión I_1 el semiplano a la izquierda de esta recta.

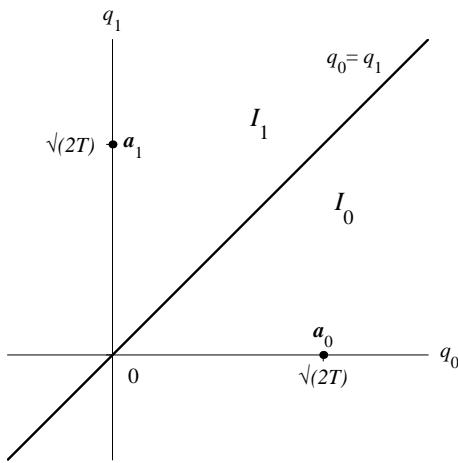


Figura 4.26. Frontera de decisión y regiones de decisión.

Si el símbolo transmitido es a_0 la función de densidad de probabilidad de la entrada al receptor, $f_{\mathbf{q}|\mathbf{A}}(\mathbf{q}|a_0)$ es una gausiana bidimensional de media $[\sqrt{2T} \ 0]^T$, componentes independientes y varianza de cada una de las componentes igual a $N_0/2$

$$f_{\mathbf{q}|\mathbf{A}}(\mathbf{q}|a_0) = \frac{1}{\pi N_0} e^{-\frac{\|q-a_0\|^2}{N_0}} = \frac{1}{\pi N_0} e^{-\frac{(q_0-\sqrt{2T})^2+q_1^2}{N_0}} \quad (4.58)$$

que se encuentra representada en la Figura 4.27. Para calcular $P_{e|a_0}$ debemos integrar esta

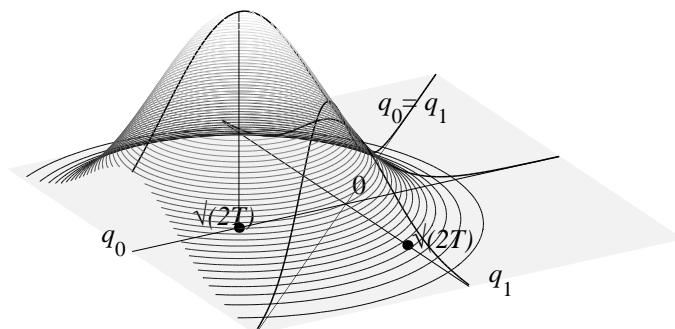


Figura 4.27. Función de densidad de probabilidad de la entrada al decisor cuando el símbolo transmitido es a_0 .

función de densidad de probabilidad en el semiplano definido por $q_1 > q_0$, pero si en el caso unidimensional tuvimos que recurrir a la función Q porque no existe una solución analítica, ahora lo vamos a tener aún más difícil. En lugar de resolver el cálculo de forma directa, vamos a reducir el problema a uno unidimensional: al fin y al cabo, si sólo tenemos dos símbolos podemos hacer pasar una recta por esos dos puntos del plano.

Realizamos el siguiente cambio de variables:

$$q'_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_0 - q_1) \quad (4.59)$$

$$q'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_0 + q_1 - \sqrt{2T}) \quad (4.60)$$

Si el símbolo transmitido es a_0 , q'_0 toma la forma

$$\begin{aligned} q'_0 |_{A=a_0} &= \frac{1}{\sqrt{2}}((a_{00} + n_0) - (a_{01} + n_1)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left((\sqrt{2T} + n_0) - (0 + n_1)\right) \\ &= \sqrt{T} + \frac{1}{\sqrt{2}}(n_0 - n_1) \end{aligned} \quad (4.61)$$

y q'_1

$$\begin{aligned} q'_1 |_{A=a_0} &= \frac{1}{\sqrt{2}}((a_{00} + n_0) + (a_{01} + n_1) - \sqrt{2T}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}((\sqrt{2T} + n_0) + (0 + n_1) - \sqrt{2T}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(n_0 + n_1) \end{aligned} \quad (4.62)$$

De forma análoga, si el símbolo transmitido es a_1 , q'_0 y q'_1 toman la forma

$$q'_0 |_{A=a_1} = -\sqrt{T} + \frac{1}{\sqrt{2}}(n_0 - n_1) \quad (4.63)$$

$$q'_1 |_{A=a_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(n_0 + n_1) \quad (4.64)$$

De las dos componentes, sólo q'_0 contiene información sobre el símbolo transmitido; q'_1 contiene ruido. Esto implica que hemos reducido la dimensión del espacio de señal de dos a una. Las coordenadas de los nuevos elementos de la constelación respecto a q'_0 , a'_0 y a'_1 , son, respectivamente, \sqrt{T} y $-\sqrt{T}$, exactamente las mismas que la constelación unidimensional considerada anteriormente.

Respecto al ruido, es fácil demostrar que $n_0 - n_1$ es independiente de $n_0 + n_1$, ya que la suma (o resta) de dos variables con función de densidad de probabilidad gausiana es otra variable aleatoria gausiana y $E\{(n_0 - n_1)(n_0 + n_1)\} = E\{n_0^2 - n_1^2\} = N_0/2 - N_0/2 = 0$. Esto implica que el valor de q'_1 es irrelevante para la decisión y q'_0 es un estadístico suficiente para la detección.

Para determinar la probabilidad de error debemos conocer los estadísticos de la componente de ruido, $1/\sqrt{2}(n_0 - n_1)$, ya que por ahora sólo sabemos que es gausiana. El valor medio es

$$E\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(n_0 - n_1)\right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}E\{n_0\} - \frac{1}{\sqrt{2}}E\{n_1\} = 0 \quad (4.65)$$

y la varianza

$$\begin{aligned}
 E \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(n_0 - n_1) \right)^2 \right\} &= \frac{1}{2} E\{n_0^2\} + \frac{1}{2} E\{n_1^2\} - E\{n_0 n_1\} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{N_0}{2} + \frac{1}{2} \frac{N_0}{2} - 0 \\
 &= \frac{N_0}{2}
 \end{aligned} \tag{4.66}$$

Por último, si la nueva constelación es la misma que en el caso unidimensional, y los estadísticos del ruido también (media cero y varianza $N_0/2$), también lo será la probabilidad de error,

$$P_e = Q \left(\frac{d(\mathbf{a}'_0, \mathbf{a}'_1)}{2\sqrt{N_0/2}} \right) = Q \left(\frac{2\sqrt{T}}{2\sqrt{N_0/2}} \right) = Q \left(\frac{\sqrt{T}}{\sqrt{N_0/2}} \right) \tag{4.67}$$

La distancia entre los símbolos de la nueva constelación es idéntica a la de la constelación original, $d(\mathbf{a}'_0, \mathbf{a}'_1) = d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1)$, por lo que es indistinto realizar la medida de distancia en el espacio original que en el transformado (de hecho, el transformado ni siquiera hay que calcularlo para evaluar la probabilidad media de error).

El desarrollo aquí realizado puede extenderse a cualquier constelación binaria en un espacio de una dimensión arbitraria, obteniendo que la probabilidad media de error es función de la distancia entre los puntos de la constelación y la varianza del ruido en cada una de las componentes del vector de entrada, y es igual a

$$P_e = Q \left(\frac{d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1)}{2\sqrt{N_0/2}} \right) \tag{4.68}$$

Decisor M-ario en espacio unidimensional

Para ilustrar este caso vamos a considerar la constelación mostrada en la Figura 4.28. Está compuesta por cuatro símbolos de coordenadas -3, -1, 1 y 3. Los umbrales de decisión están situados en -2, 0 y 2 y las regiones de decisión son, respectivamente, $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$, $(0, 2)$ y $(2, \infty)$.

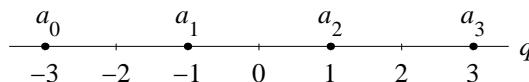


Figura 4.28. Constelación unidimensional de cuatro símbolos.

Para calcular la probabilidad de error cuando el símbolo transmitido es a_0 , $P_{e|a_0}$, integramos $f_{q|A}(q|a_0)$ (gausiana de media a_0 (-3) y varianza $N_0/2$) fuera de su región de decisión: esto es, entre -2 e ∞ (véase la Figura 4.29(a)). Este problema es idéntico al del cálculo de la probabilidad de error para constelaciones binarias en espacios unidimensionales tratado

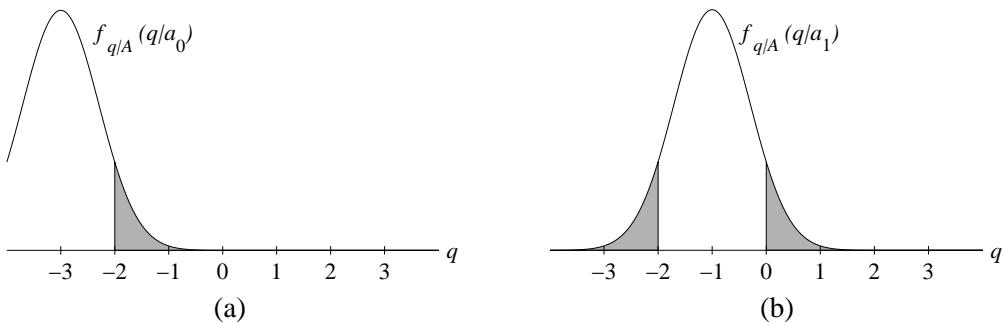


Figura 4.29. Función de densidad de probabilidad de la entrada al decisor y probabilidad de error cuando el símbolo transmitido es: (a) a_0 y (b) a_1 .

anteriormente, ya que se trata de integrar la cola de una gausiana. La probabilidad de error es

$$P_{e|a_0} = Q\left(\frac{d(a_0, a_1)}{2\sqrt{N_0/2}}\right) = Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) \quad (4.69)$$

El cálculo de la probabilidad de error cuando el símbolo transmitido es a_1 , $P_{e|a_1}$, es ligeramente distinto, porque hay que integrar las dos colas de $f_{q|A}(q|a_1)$ (gausiana de media a_1 (-1) y varianza $N_0/2$): desde $-\infty$ a -2 y desde 0 hasta ∞ (véase la Figura 4.29(b)). La integral de cada una de las colas podemos expresarla mediante la función Q , y $P_{e|a_1}$ resulta ser

$$P_{e|a_1} = Q\left(\frac{d(a_1, a_0)}{2\sqrt{N_0/2}}\right) + Q\left(\frac{d(a_1, a_2)}{2\sqrt{N_0/2}}\right) = 2Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) \quad (4.70)$$

Por simetría tenemos que $P_{e|a_2} = P_{e|a_1}$ y $P_{e|a_3} = P_{e|a_0}$, y la probabilidad media de error es

$$P_e = \sum_{i=0}^{M-1} p_A(a_i)P_{e|a_i} = \frac{3}{2}Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) \quad (4.71)$$

Obviamente, el mismo procedimiento aplicado a una constelación de cuatro símbolos puede emplearse en una constelación unidimensional con cualquier número de símbolos.

Decisor M-ario en espacio multidimensional

El caso general de cálculo de la probabilidad media de error en constelaciones multidimensionales es un problema complejo por las formas que pueden tomar las regiones de decisión. Para constelaciones binarias podíamos transformar el problema en unidimensional y así simplificar la resolución de la integral necesaria para el cálculo de la probabilidad de error, pero para constelaciones con más de dos símbolos, esto no siempre es posible. Como ejemplo, baste considerar las constelaciones bidimensionales y sus regiones de decisión asociadas que se muestran en la Figura 4.30, de uso común en sistemas de comunicaciones.

Sin embargo, en alguno de estos casos es aún posible calcular de manera sencilla la probabilidad media de error. Consideremos la constelación de la Figura 4.30(a). Para el

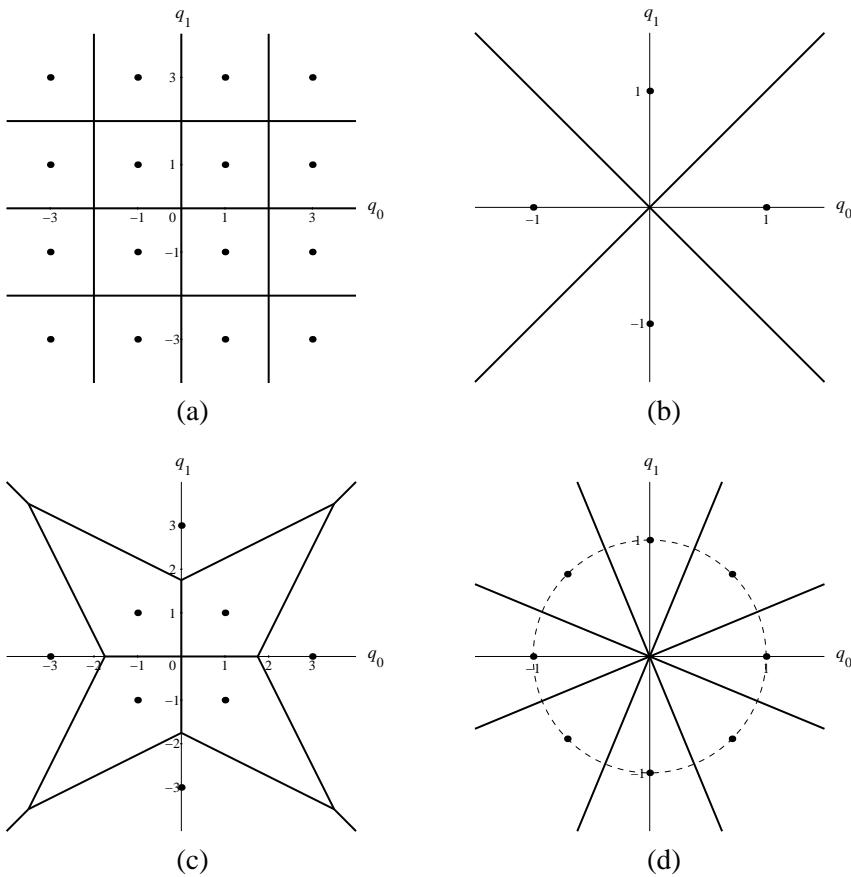


Figura 4.30. Ejemplos de constelaciones bidimensionales y sus fronteras de decisión asociadas.

cálculo de la probabilidad de error, las 16 regiones de decisión de la constelación podemos agruparlas en tres clases (mostradas en la Figura 4.31): la primera incluye las regiones I_0 , I_3 , I_{12} e I_{15} ; la segunda incluye las regiones I_1 , I_2 , I_4 e I_7 , I_8 , I_{11} , I_{13} e I_{14} ; la tercera incluye las regiones I_5 , I_6 , I_9 e I_{10} . Todos los símbolos a_i que tienen asociada una región de decisión de la misma clase van a tener la misma probabilidad de error $P_{e|a_i}$.

Comencemos calculando la probabilidad de error cuando el símbolo transmitido es a_0 , que tiene una región de decisión del primer tipo. En primer lugar expresamos la probabilidad de error en función de la probabilidad de acierto, que denotamos por $P_{a|a_0}$, como

$$P_{e|a_0} = \int_{\mathbf{q} \notin I_1} f_{\mathbf{q}|A}(\mathbf{q}|a_0) d\mathbf{q} = 1 - \int_{\mathbf{q} \in I_0} f_{\mathbf{q}|A}(\mathbf{q}|a_0) d\mathbf{q} = 1 - P_{a|a_0} \quad (4.72)$$

Para que se produzca una decisión correcta cuando el símbolo transmitido es a_0 debe suceder simultáneamente que q_0 sea menor que -2 y q_1 mayor que 2 . Como q_0 es estadísticamente independiente de q_1 (según demostramos en el análisis del demodulador), la probabilidad de que esto suceda es igual a la probabilidad de que q_0 sea menor que -2 multiplicado por

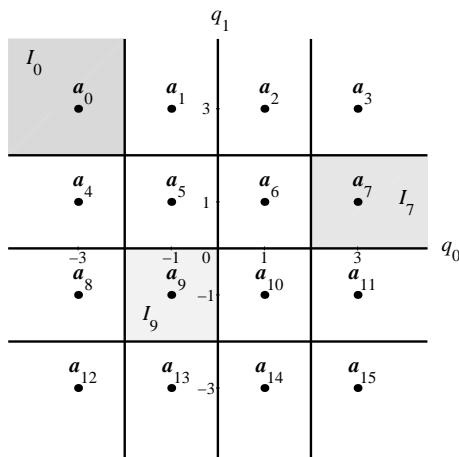


Figura 4.31. Constelación bidimensional de diecisésis símbolos.

la probabilidad de que q_1 sea mayor de 2. Matemáticamente,

$$\int_{\mathbf{q} \in I_0} f_{\mathbf{q}|\mathbf{A}}(\mathbf{q}|\mathbf{a}_0) d\mathbf{q} = \left(\int_{-\infty}^{-2} f_{q_0|\mathbf{A}}(q_0|\mathbf{a}_0) dq_0 \right) \left(\int_2^{\infty} f_{q_1|\mathbf{A}}(q_1|\mathbf{a}_0) dq_1 \right) \quad (4.73)$$

La primera de estas dos integrales podemos expresarla como una función Q mediante la transformación

$$\int_{-\infty}^{-2} f_{q_0|\mathbf{A}}(q_0|\mathbf{a}_0) dq_0 = 1 - \int_{-2}^{\infty} f_{q_0|\mathbf{A}}(q_0|\mathbf{a}_0) dq_0 = 1 - Q \left(\frac{d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1)}{2\sqrt{N_0/2}} \right) \quad (4.74)$$

e igualmente con la segunda integral

$$\int_2^{\infty} f_{q_1|\mathbf{A}}(q_1|\mathbf{a}_0) dq_1 = 1 - \int_{-\infty}^2 f_{q_1|\mathbf{A}}(q_1|\mathbf{a}_0) dq_1 = 1 - Q \left(\frac{d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_4)}{2\sqrt{N_0/2}} \right) \quad (4.75)$$

Sustituyendo (4.74) y (4.75) en (4.73)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{q} \in I_0} f_{\mathbf{q}|\mathbf{A}}(\mathbf{q}|\mathbf{a}_0) d\mathbf{q} &= \left(1 - Q \left(\frac{d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1)}{2\sqrt{N_0/2}} \right) \right) \left(1 - Q \left(\frac{d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_4)}{2\sqrt{N_0/2}} \right) \right) \\ &= \left(1 - Q \left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}} \right) \right)^2 \end{aligned} \quad (4.76)$$

y esta en (4.72)

$$P_{e|\mathbf{a}_0} = 1 - \left(1 - Q \left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}} \right) \right)^2 = 2Q \left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}} \right) - Q^2 \left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}} \right) \quad (4.77)$$

Ahora procedemos a calcular la probabilidad de error cuando el símbolo transmitido es \mathbf{a}_7 , que tiene una región de decisión del segundo tipo. La diferencia con el caso anterior es que en una de las dimensiones, q_1 , para el cálculo de la probabilidad de error hay que integrar las dos colas de la gausiana en lugar de una. Procediendo de la misma forma, obtenemos

$$P_{e|\mathbf{a}_7} = 1 - \left(1 - Q\left(\frac{d(\mathbf{a}_7, \mathbf{a}_3)}{2\sqrt{N_0/2}}\right) - Q\left(\frac{d(\mathbf{a}_7, \mathbf{a}_{11})}{2\sqrt{N_0/2}}\right) \right) \times \\ \left(1 - Q\left(\frac{d(\mathbf{a}_7, \mathbf{a}_6)}{2\sqrt{N_0/2}}\right) \right) \quad (4.78)$$

y sustituyendo los valores concretos de las distancias entre símbolos queda como

$$\begin{aligned} P_{e|\mathbf{a}_7} &= 1 - \left(1 - 2Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) \right) \left(1 - Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) \right) \\ &= 3Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) - 2Q^2\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) \end{aligned} \quad (4.79)$$

De manera similar procedemos a calcular la probabilidad de error cuando el símbolo transmitido es \mathbf{a}_9 , que tiene una región de decisión del tercer tipo. Ahora tenemos que tanto en q_0 como en q_1 hay que integrar las dos colas de la gausiana.

$$P_{e|\mathbf{a}_9} = 1 - \left(1 - Q\left(\frac{d(\mathbf{a}_9, \mathbf{a}_5)}{2\sqrt{N_0/2}}\right) - Q\left(\frac{d(\mathbf{a}_9, \mathbf{a}_{13})}{2\sqrt{N_0/2}}\right) \right) \times \\ \left(1 - Q\left(\frac{d(\mathbf{a}_9, \mathbf{a}_8)}{2\sqrt{N_0/2}}\right) - Q\left(\frac{d(\mathbf{a}_9, \mathbf{a}_{10})}{2\sqrt{N_0/2}}\right) \right) \quad (4.80)$$

y sustituyendo los valores concretos de las distancias entre símbolos queda como

$$P_{e|\mathbf{a}_9} = 1 - \left(1 - 2Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) \right)^2 = 4Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) - 4Q^2\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) \quad (4.81)$$

Finalmente, la probabilidad media de error es

$$\begin{aligned} P_e &= \sum_{i=0}^{M-1} p_{\mathbf{A}}(\mathbf{a}_i) P_{e|\mathbf{a}_i} \\ &= \frac{4}{16} P_{e|\mathbf{a}_0} + \frac{8}{16} P_{e|\mathbf{a}_7} + \frac{4}{16} P_{e|\mathbf{a}_9} \\ &= 3Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) - \frac{9}{4}Q^2\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) \end{aligned} \quad (4.82)$$

La clave para poder calcular la probabilidad media de error en esta constelación reside en la forma rectangular de las regiones de decisión. Este hecho, junto a la independencia

estadística de los componentes del vector \mathbf{q} , nos permite descomponer el problema como producto de problemas unidimensionales.

Analizando el resto de constelaciones representadas en la Figura 4.30 podemos comprobar como a una de éstas (Figura 4.30(b)) podemos aplicar un cambio de variables como el realizado para el cálculo de probabilidades de error en decisiones binarias en espacios multidimensionales que produzca una rotación de 45 grados y transforme las regiones de decisión en regiones como I_0 del ejemplo anterior (véase la Figura 4.31). Aplicando este procedimiento obtenemos una probabilidad de error para dicha constelación (se deja como ejercicio su comprobación) igual a

$$P_e = 1 - \left(1 - Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right)\right)^2 = 2Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right) - Q^2\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right) \quad (4.83)$$

En las constelaciones representadas en las Figuras 4.30(c) y 4.30(d) no existen transformaciones de este tipo que conduzcan a regiones de decisión rectangulares y, por tanto, para calcular la probabilidad media de error de forma exacta es necesario recurrir a la resolución de la integral de las funciones de densidad de probabilidad condicionadas fuera de las regiones de decisión por otros procedimientos.

Cota de la unión

Cuando el cálculo de la probabilidad media de error exacta resulta engorroso podemos recurrir a la determinación de cotas superiores de la misma. Una de las más utilizadas es la denominada *cota de la unión*, que se basa en el cálculo de las probabilidades de error por parejas de símbolos.

Para ilustrar el procedimiento del cálculo de la cota de la unión emplearemos la constelación mostrada en la Figura 4.30(b). En esta constelación, la probabilidad de error cuando el símbolo transmitido es \mathbf{a}_0 , $P_{e|\mathbf{a}_0}$, se obtiene integrando $f_{\mathbf{q}|\mathbf{a}_0}$ fuera de la región de decisión I_0 , que se corresponde con el área sombreada en la Figura 4.32(a). En lugar de proceder al cálculo de esta integral de forma directa, vamos a calcular en primer lugar la probabilidad de error que obtendríamos transmitiendo \mathbf{a}_0 y empleando un decisor binario para decidir entre \mathbf{a}_0 y \mathbf{a}_1 . Esta probabilidad de error, que denotamos como $P_e(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1)$, se obtiene integrando $f_{\mathbf{q}|\mathbf{a}_0}$ en el área sombreada en la Figura 4.32(b) y, como hemos visto al analizar el decisor binario en un espacio multidimensional, es

$$P_e(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1) = Q\left(\frac{d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1)}{2\sqrt{N_0/2}}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{N_0/2}}\right) = Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right) \quad (4.84)$$

Procedemos de igual forma a calcular $P_e(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_2)$ (Figura 4.32(c)) y $P_e(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_3)$ (Figura 4.32(d)),

$$P_e(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_2) = Q\left(\frac{d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_2)}{2\sqrt{N_0/2}}\right) = Q\left(\frac{2}{2\sqrt{N_0/2}}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N_0}}\right) \quad (4.85)$$

$$P_e(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_3) = Q\left(\frac{d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_3)}{2\sqrt{N_0/2}}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{N_0/2}}\right) = Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right) \quad (4.86)$$

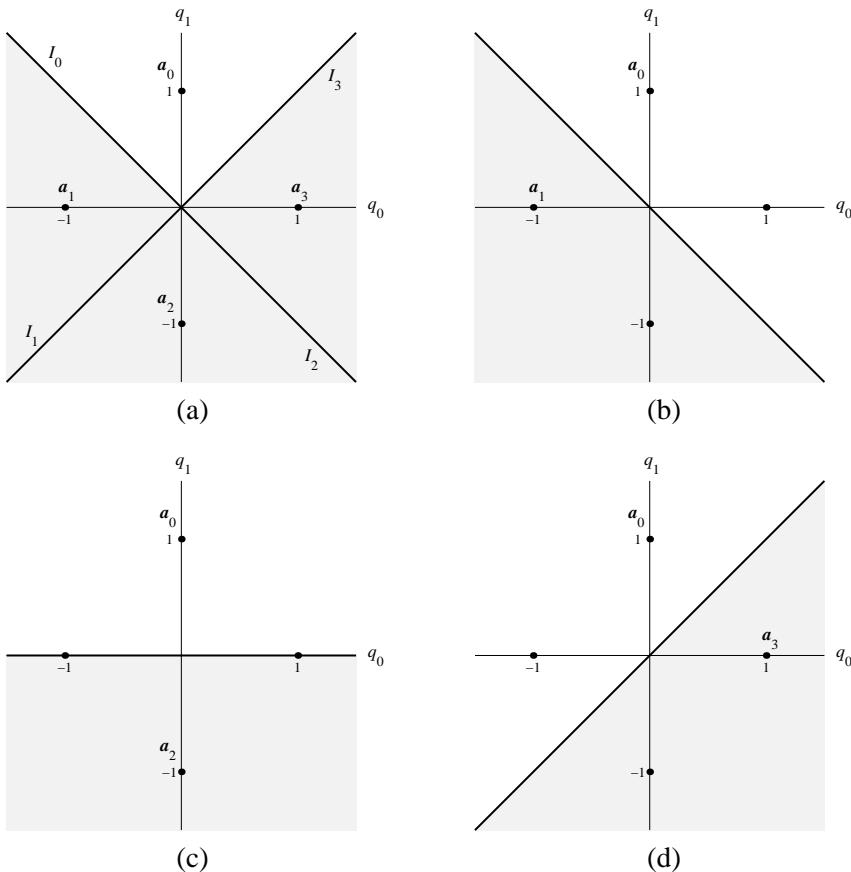


Figura 4.32. Cota de la unión: regiones de integración de $f_{\mathbf{q}|\mathbf{A}}$ para obtener $P_{e|\mathbf{a}_0}$ (a), $P_e(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1)$ (b), $P_e(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_2)$ (c) y $P_e(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_3)$ (d).

A partir de estas probabilidades de error con decisores binarios definimos la cota de la unión para $P_{e|\mathbf{a}_0}$ como

$$\begin{aligned}
 P_{e|\mathbf{a}_0} &\leq \sum_{j=1}^{M-1} P_e(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_j) = P_e(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1) + P_e(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_2) + P_e(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_3) \\
 &= 2Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right) + Q\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N_0}}\right) \quad (4.87)
 \end{aligned}$$

Procediendo de igual forma con el resto de símbolos de la constelación obtenemos la *cota de la unión para la probabilidad media de error* que, para una constelación genérica de

M símbolos equiprobables, es

$$P_e \leq \sum_{i=0}^{M-1} p_A(\mathbf{a}_i) \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{M-1} P_e(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{M-1} Q\left(\frac{d(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j)}{2\sqrt{N_0/2}}\right) \quad (4.88)$$

y, particularizada para el ejemplo que nos ocupa, dada la simetría de la constelación, da como resultado

$$P_e \leq \sum_{i=0}^{M-1} p_A(\mathbf{a}_i) \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{M-1} P_e(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = \frac{1}{4} 4 \left(2Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right) + Q\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N_0}}\right) \right) \quad (4.89)$$

Para comprender por qué la cota de la unión es una cota superior hay que tener en cuenta que $P_{e|\mathbf{a}_0}$ se obtiene integrando $f_{q|\mathbf{a}_0}$ en la región sombreada de la Figura 4.32(a) (esto es, fuera de I_0). En lugar de proceder a realizar esta integral hemos sumado tres integrales de $f_{q|\mathbf{a}_0}$ en las regiones sombreadas de, respectivamente, las Figuras 4.32(b), 4.32(c) y 4.32(d). La superposición de estas tres regiones, que podemos ver en la Figura 4.33, abar-

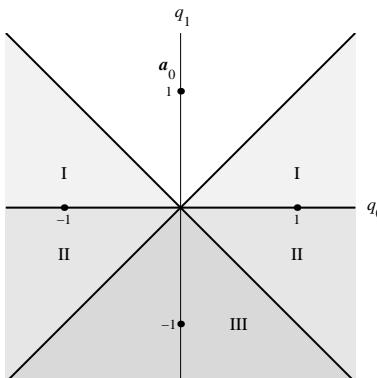


Figura 4.33. ¿Por qué es una cota superior?: al sumar las probabilidades de error individuales estamos integrando $f_{q|A}$ una vez en las regiones etiquetadas como I, dos veces en las regiones II y tres veces sobre la región III.

ca la totalidad del espacio fuera de I_0 y, en consecuencia, aseguramos que la suma de las probabilidades de error individuales $P_e(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1)$, $P_e(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_2)$ y $P_e(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_3)$ es, como mínimo, igual a $P_{e|\mathbf{a}_0}$. Además de esto, al sumar las tres probabilidades de error individuales existen regiones del plano en que estamos integrando $f_{q|A}$ dos veces (regiones etiquetadas como II en la Figura 4.33) e incluso tres veces (región etiquetada como III en la Figura 4.33) y, en consecuencia, la suma de las probabilidades de error individuales será mayor que $P_{e|\mathbf{a}_1}$. La igualdad en (4.87) la obtendremos únicamente en el caso extremo en que apliquemos la cota de la unión a constelaciones con dos símbolos.

Hemos comprobado que la cota de la unión es realmente una cota superior de la probabilidad de error, pero no sabemos exactamente si esta cota está cerca o lejos de la verdadera

probabilidad de error. Para la constelación analizada (Figura 4.30(b)) hemos calculado previamente la probabilidad de error exacta, (4.83), que está representada en la Figura 4.34 junto a la la proporcionada por la cota de la unión, (4.89), en función de $1/\sqrt{N_0}$. Podemos comprobar que para probabilidades de error pequeñas (por ejemplo, menores de 10^{-3} , que podemos considerar como el máximo error aceptable en muchos sistemas de comunicaciones) ambas curvas son indistinguibles. Esto nos lleva a concluir que la cota de la unión proporciona una buena medida de la probabilidad de error, mejor cuanto mayor sea la relación señal a ruido.

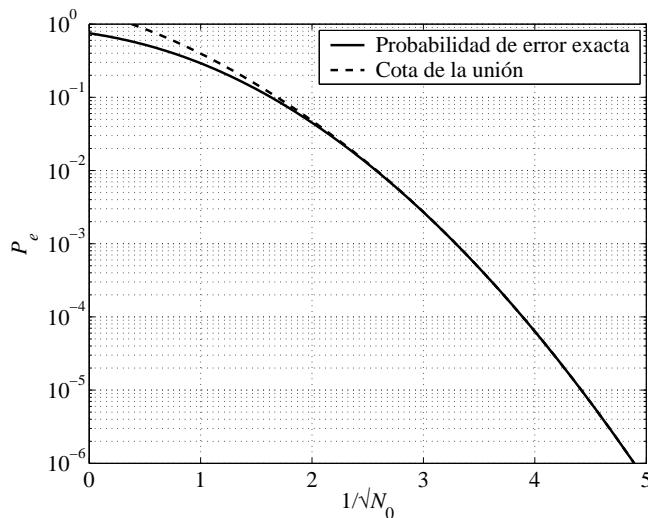


Figura 4.34. Probabilidad de error exacta y cota de la unión para la constelación de la Figura 4.30(b).

En constelaciones con un gran número de símbolos, la evaluación de la cota de la unión puede resultar engorrosa por el número de términos a considerar en (4.88), que crece aproximadamente con el cuadrado del número de símbolos de la constelación. Para una constelación de 4 símbolos hay que calcular 6 distancias (aprovechando que $d(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = d(\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_i)$) y hasta 6 evaluaciones de la función Q . Para una constelación de 16 símbolos el número de distancias a calcular sube hasta 120 y para una constelación de 32 símbolos, 496.

Ante este número de términos cabe preguntarse si todos son significativos o si podemos despreciar algunos de ellos. Tomemos como ejemplo la evaluación de (4.89), donde el argumento de una de las funciones Q es $\sqrt{2}$ veces mayor que el otro, y evaluemos la contribución de cada una de ellas a la probabilidad media de error para distintos valores de la potencia de ruido. Para un valor de $1/\sqrt{N_0}$ igual a 3 tenemos que $Q(3) \approx 1,3 \cdot 10^{-3}$ y $Q(\sqrt{2} \cdot 3) \approx 1,1 \cdot 10^{-5}$; es decir, dos órdenes de magnitud menor. Para un valor de $1/\sqrt{N_0}$ igual a 1 tenemos que $Q(1) \approx 0,16$ y $Q(\sqrt{2}) \approx 0,079$ y para un valor de $1/\sqrt{N_0}$ igual a 6 tenemos que $Q(6) \approx 9,9 \cdot 10^{-10}$ y $Q(\sqrt{2} \cdot 6) \approx 1,1 \cdot 10^{-17}$. Recuerde que, para valores altos del argumento, el decrecimiento de la función Q es exponencial (Página 103). Como anteriormente, si nuestro interés se centra en probabilidades de error relativamente pequeñas

$(< 10^{-3})$ los términos dominantes en el valor que toma la probabilidad de error van a ser los de menor argumento de la función Q y el resto podemos, al menos en una aproximación grosera, despreciarlos.

Esta última aseveración está en concordancia con el sentido que poseen cada uno de los términos de la cota de la unión de la probabilidad de error, ya que el argumento de la función Q es directamente proporcional a la distancia entre dos símbolos: en el caso en que se produzcan errores, estos se deberán con mayor probabilidad a confusiones con los símbolos más cercanos al transmitido, no con los más lejanos.

Para poner en práctica de forma sistemática esta aproximación al valor de la cota de unión de la probabilidad de error, definimos la *distancia mínima de una constelación*, d_{min} , como

$$d_{min} = \min_{\substack{j,i=0,\dots,M-1 \\ j \neq i}} \{d(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j)\} \quad (4.90)$$

y κ como el máximo del número de símbolos que se encuentran a d_{min} de un símbolo de la constelación³. Con estas definiciones, la aproximación queda como

$$P_e \approx \kappa Q \left(\frac{d_{min}}{2\sqrt{N_0/2}} \right) \quad (4.91)$$

e implícitamente supone que todos los símbolos de la constelación tienen κ símbolos a una distancia d_{min} y que se desprecia la contribución al error de los símbolos que no se encuentran a la distancia mínima.

El principal inconveniente que tiene el empleo de (4.91) es que no somos capaces de asegurar que sea una cota superior de la probabilidad de error, ya que no se consideran todos los términos de la cota de la unión. Otra aproximación que sí garantiza que es una cota superior de la probabilidad de error verdadera es

$$P_e \leq (M - 1) Q \left(\frac{d_{min}}{2\sqrt{N_0/2}} \right) \quad (4.92)$$

conocida como *cota holgada* o cota más holgada (“looser bound”) que la cota de la unión, que supone implícitamente que todos los símbolos de la constelación están a una distancia d_{min} del resto. Obviamente, esta aproximación es más pesimista que (4.91) y puede estar alejada de la verdadera probabilidad de error para constelaciones con un gran número de símbolos, pero al menos podemos garantizar que es una cota basada en d_{min} .

Como ejemplo, la Figura 4.35 muestra los resultados de estas aproximaciones para la constelación bidimensional de dieciséis símbolos de la Figura 4.30(a) junto a la probabilidad

³La definición de κ está tomada de los problemas de empaquetamiento de esferas y teoría de rejillas, donde se define como el número de hiperesferas (o esferas, o circunferencias, dependiendo de la dimensionalidad del espacio) que pueden estar en contacto con una dada siguiendo un determinado patrón de distribución (una rejilla). Recibe nombres como número de Newton, número de contacto, número de coordinación o número de besos (este último tomado del juego del billar, donde se dice que dos bolas se besan cuando están en contacto)[19]. Generalmente se denota por la letra τ , pero dado el uso frecuente de τ en este texto, se ha preferido renombrarlo como κ .

de error exacta, (4.82), y la proporcionada por la cota de la unión en función de $1/\sqrt{N_0}$. Puede verse claramente cómo (4.92) es una aproximación más conservadora que (4.91).

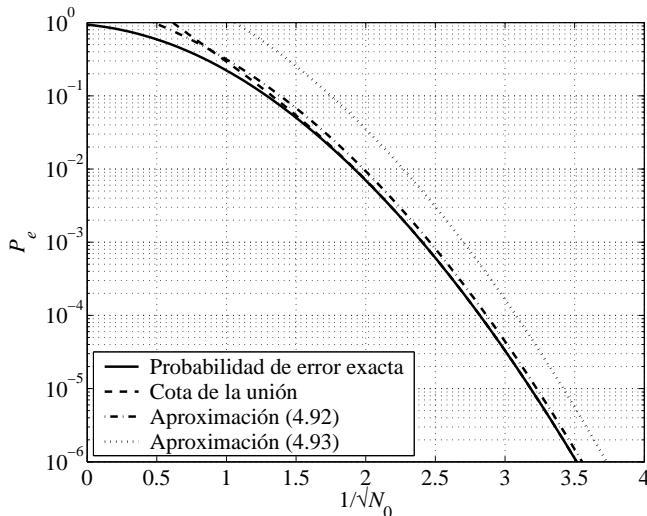


Figura 4.35. Probabilidad de error exacta, cota de la unión y dos aproximaciones de la cota de la unión para la constelación de la Figura 4.30(a).

4.4.3. Codificador

En el Apartado 4.2, al analizar el modulador del sistema de comunicaciones hemos justificado la necesidad de separar el transmisor en codificador y modulador, pero la descripción que allí hacíamos del codificador se reduce a decir que realiza una transformación de un símbolo B en otro símbolo A al que posteriormente dotamos de significado. Es ahora, una vez analizado el receptor y las prestaciones que podemos obtener con un sistema de comunicación, cuando estamos en disposición de establecer las condiciones que debe cumplir el codificador para conseguir una comunicación con la mayor fiabilidad posible.

Para conseguir la menor probabilidad de error el codificador ha de generar una constelación que tenga la mayor distancia mínima, d_{min} , con la menor energía media por símbolo, E_s . Estas condiciones son contradictorias, ya que si aumentamos la distancia mínima de una constelación para disminuir la probabilidad de error aumentaremos, en general, la energía media necesaria para transmitir un símbolo.

Para encontrar un punto de compromiso entre la distancia mínima y la energía media por símbolo vamos a analizar la influencia sobre estos parámetros de operaciones elementales como escalados, rotaciones y traslaciones realizadas sobre una constelación.

Consideremos en primer lugar una constelación binaria en un espacio unidimensional cuyos símbolos son $a_0 = a$ y $a_1 = -a$. La energía media de la constelación es igual a a^2 ,

la distancia mínima, $2a$, y la probabilidad de error que obtenemos en el receptor es

$$P_e = Q\left(\frac{d(a_0, a_1)}{2\sqrt{N_0/2}}\right) = Q\left(\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{N_0}}\right) \quad (4.93)$$

Para hacer explícita la relación de la probabilidad de error y la energía media por símbolo, multiplicamos y dividimos el argumento de la función Q en la expresión anterior por $\sqrt{E_s}$, y sustituimos una de ellas por su valor, a^2 , de la forma

$$P_e = Q\left(\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{N_0}}\right) = Q\left(\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{E_s}}\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) \quad (4.94)$$

De esta forma, el término que multiplica a $\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}$ en el argumento de la función Q (en este caso, $\sqrt{2}$) puede considerarse como un *factor de mérito* de la constelación, ya que para unas condiciones dadas (energía disponible para transmitir el símbolo y nivel de ruido medidos a la entrada del receptor), a mayor valor de este factor, menor probabilidad de error. Este factor es, en general, distinto para cada constelación, y no varía al aplicar un factor de escala real a los símbolos de la constelación.

Este factor tampoco varía si multiplicamos las coordenadas de todos los símbolos de una constelación N -dimensional por una matriz \mathbf{R} , transformando la constelación original en otra de la forma $\mathbf{a}'_i = \mathbf{R}\mathbf{a}_i$, siempre que \mathbf{R} sea una matriz de dimensión $N \times N$ cuyas filas constituyen una base ortonormal del espacio euclídeo de dimensión N . Las prestaciones que obtenemos empleando la constelación $\{\mathbf{a}_i, i = 0, \dots, M - 1\}$ son idénticas a las que obtenemos empleando $\{\mathbf{a}'_i, i = 0, \dots, M - 1\}$. Un caso particular de esta transformación que puede ayudarnos a comprender el efecto que supone sobre la constelación lo constituyen las rotaciones en un espacio bidimensional. En este caso, la matriz \mathbf{R} toma la forma

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (4.95)$$

y, aplicada sobre una constelación, produce un giro de θ radianes sobre la misma. La Figura 4.36(b) muestra la aplicación de esta transformación sobre la constelación de la Figura 4.36(a).

El escalado por un factor real a puede combinarse con las rotaciones (y, en general, con las transformaciones realizadas con la matriz \mathbf{R} anteriormente descrita) sin que cambie la probabilidad de error en recepción respecto a la constelación original (para una E_s/N_0 dada). Un ejemplo de esta combinación puede verse en la Figura 4.36(c). En general, podemos decir que cualquier combinación de escalados y rotaciones sobre la constelación no afecta a la fiabilidad del sistema de comunicación, sino que lo que marca estas prestaciones es la relación entre las distancias de unos símbolos a otros.

Otra transformación elemental que podemos realizar sobre los símbolos de la constelación es la translación. La aplicaremos a la constelación binaria unidimensional considerada anteriormente ($a_0 = a$ y $a_1 = -a$), a la que sumamos una cantidad b a cada uno de los

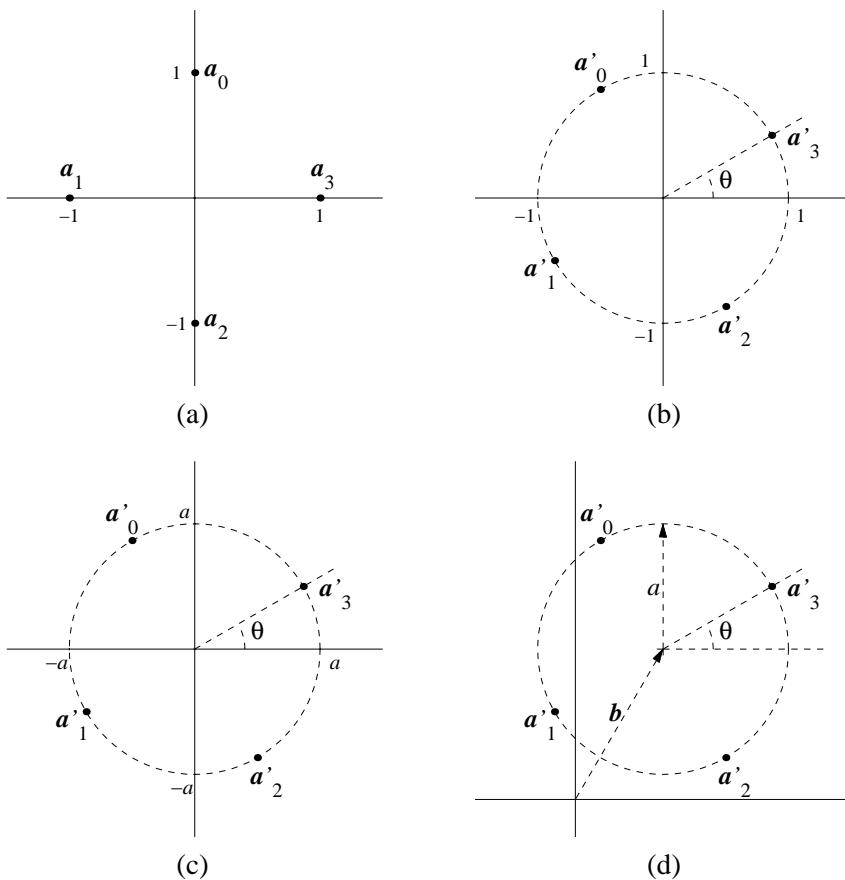


Figura 4.36. Transformaciones de la constelación: constelación original (a), rotación (b), rotación y escalado (c), rotación, escalado y traslación (d).

símbolos generando una nueva constelación de la forma $a'_i = a_i + b$. La energía media de la nueva constelación es igual a $(a^2 + b^2)$, la distancia mínima sigue siendo $2a$ y la probabilidad de error que obtenemos en el receptor es

$$P_e = Q\left(\frac{d(a_0, a_1)}{2\sqrt{N_0/2}}\right) = Q\left(\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{N_0}}\right) = Q\left(\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{E_s}}\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2a^2}{a^2+b^2}}\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) \quad (4.96)$$

que depende tanto de a como de b . El mayor argumento de la función Q y, por tanto, la menor probabilidad de error, se obtiene cuando b es igual a cero, porque el factor $\frac{a^2}{a^2+b^2}$ es siempre menor o igual que uno, y la igualdad se produce siendo b igual a cero. Ante este resultado cabe preguntarse cuál es la razón por la que el valor óptimo para b es cero, y la respuesta es que para $b = 0$, el valor medio de la constelación, $E\{a_i\}$, también conocido como *centro de masas* de la constelación, es cero. Si el valor medio de la constelación es cero, toda la energía que pone en juego el transmisor se dedica a transmitir información, y no

se consume energía en enviar el valor medio de la constelación, que no contiene información alguna.

Un ejemplo de traslación en constelaciones bidimensionales podemos verlo en la Figura 4.36(d). Como regla general, podemos decir que es deseable que cualquier constelación tenga valor medio nulo para aumentar la fiabilidad de la comunicación. Caso de no ser nulo el valor medio podemos cambiar la constelación $\{a_i, i = 0, \dots, M - 1\}$ por $\{a'_i = a_i - E\{a_i\}, i = 0, \dots, M - 1\}$ que mantiene las distancias entre los símbolos y hace mínima la energía media por símbolo.

Las transformaciones vistas hasta ahora dejan sin resolver el principal problema en el diseño o elección de constelaciones para un sistema de comunicación, que es la forma o patrón (técnicamente, *rejilla*) que se utiliza para distribuir los símbolos de la constelación en el espacio de señales. Este problema, conocido como *empaquetado de esferas*, no tiene aún solución general, aunque sí está resuelto para algunas dimensiones del espacio de señal.

Para comprender mejor el problema, vamos a emplear unas bolas de billar, que para nosotros adquieren el siguiente significado: cada bola de billar va a representar un símbolo de la constelación, que estará situado en el centro de la bola y el diámetro de la bola es d_{min} . Cuando están en contacto dos bolas los símbolos están a una distancia d_{min} y si no hay contacto los símbolos están a una distancia mayor que d_{min} .

Comencemos empleando tres bolas e imaginemos que el centro del tapete de la mesa es el origen de coordenadas; el problema del diseño de la constelación se traduce en intentar situar las tres bolas sobre el tapete y lo más cerca posible del centro de la mesa. La mejor solución es que las tres bolas estén en contacto y que el hueco que queda entre ellas coincida exactamente con el centro de la mesa, tal y como se muestra en la Figura 4.37(a). Si sepáramos una de las bolas aumentamos la energía media de la constelación y no disminuimos la distancia mínima entre símbolos, que estará marcada por las dos bolas que siguen en contacto; si desplazamos de forma conjunta las tres bolas a otro lugar del tapete que no sea el centro de la mesa también estaremos aumentando la energía media de la constelación sin aumentar la distancia mínima de la constelación.

Si queremos diseñar una constelación unidimensional las tres bolas deben estar sobre una línea, y el diseño de la constelación da como resultado el mostrado en la Figura 4.37(b): una bola en el centro de la mesa y las otras dos en contacto con esta, una a cada lado. Si quisiésemos diseñar otra constelación unidimensional con un mayor número de símbolos podríamos seguir con este procedimiento, y el resultado sería que todos los símbolos adyacentes estarían siempre a la misma distancia, d_{min} , o, en otras palabras, los símbolos estarían equiespaciados.

Diseñemos ahora una constelación bidimensional con siete símbolos empleando el mismo método. El resultado será el que muestra la Figura 4.37(c): una bola en el centro y seis alrededor de esta formando un hexágono. El espacio que queda entre las bolas es una medida de la eficacia del empaquetamiento; a menor espacio, más densamente estarán empaquetadas y menor será la energía media por símbolo para la misma distancia mínima de la constelación. Si dispusiésemos las bolas (en este caso, nueve) en una cuadrícula, tal y como se muestra en la Figura 4.37(d), el espacio entre ellas es mayor y, consecuentemente,

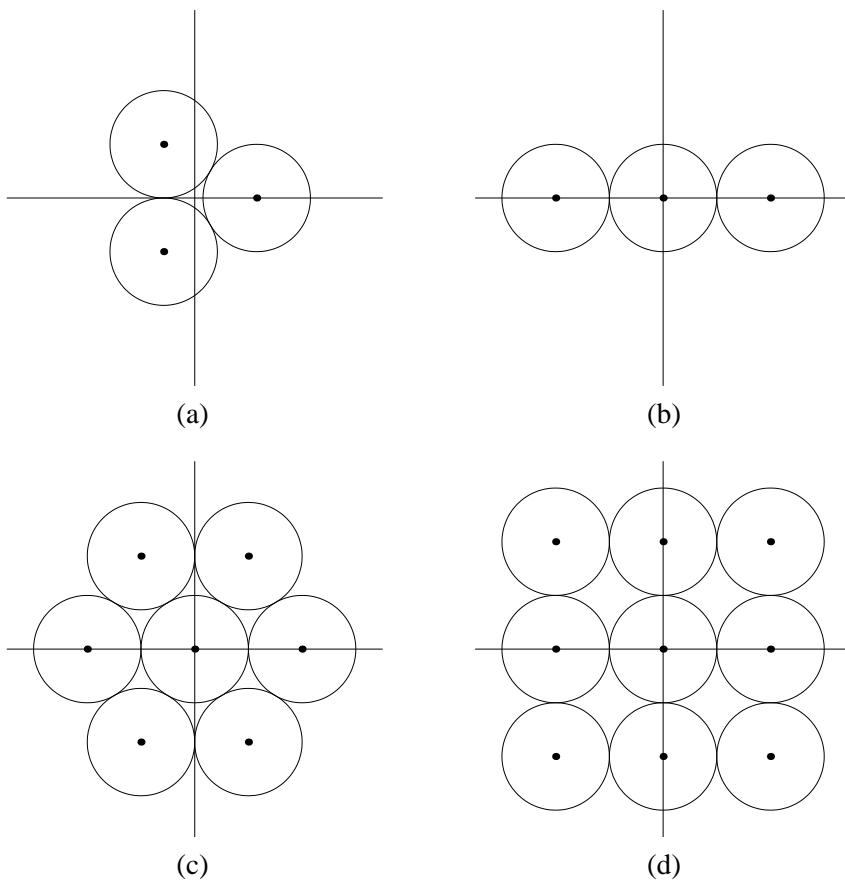


Figura 4.37. Empaquetado de esferas: tres esferas sobre un plano(a), tres esferas sobre una recta (b), siete esferas sobre un plano en disposición hexagonal (c), nueve esferas sobre un plano en disposición de cuadrícula (d).

la energía media por símbolo será mayor. Comparando las Figuras 4.37(c) y 4.37(d) vemos que si bien la configuración hexagonal es más densa, en la configuración en cuadrícula existe un menor número de símbolos a d_{min} , y ambos factores influyen sobre la probabilidad de error en recepción. La densidad del empaquetamiento influye en el argumento de la función Q porque modifica la energía media por símbolo necesaria para mantener una determinada d_{min} , y el número de símbolos que se encuentran a d_{min} de uno dado influye sobre el factor que multiplica a la función Q . Dado el decrecimiento exponencial de la función Q , en general tiene más influencia sobre la probabilidad de error el argumento de la función Q (la densidad del empaquetamiento) que el factor multiplicativo sobre la misma (el número de símbolos a d_{min}).

Para construir una constelación bidimensional de un número de símbolos M el procedimiento sería escoger los M símbolos en una disposición hexagonal que caben dentro de una circunferencia del menor radio posible y, a continuación, sustraer a cada símbolo el valor

medio de la constelación.

Para un mayor número de dimensiones procedemos de igual forma, cambiando ahora esferas por hiperesferas para dimensiones mayores que tres. Sin embargo, como hemos mencionado antes, para algunas dimensiones del espacio de señal no somos capaces de encontrar la forma más densa de empaquetamiento, que sí hemos encontrado para constelaciones unidimensionales (símbolos equidistantes) y bidimensionales (disposición hexagonal).

A pesar de lo anterior, resulta curioso comprobar que, en la práctica, las constelaciones bidimensionales con disposición hexagonal no se emplean casi nunca a pesar de ser las de mayor densidad de empaquetamiento. Las razones que justifican este hecho vienen derivadas del criterio adoptado a la hora de analizar y diseñar las constelaciones: hacer mínima la probabilidad de error en recepción expresada en función de $\sqrt{E_s/N_0}$. Este criterio es muy razonable, pero existen otros factores a tener en cuenta a la hora de escoger una determinada constelación. Entre los factores más importantes podemos citar:

Facilidad de realización del transmisor. Las coordenadas de los distintos símbolos deben poder expresarse con números de precisión finita (no irracionales) pues es necesario almacenarlos en algún sitio. En un empaquetamiento hexagonal como el de la Figura 4.37(c) tenemos coordenadas de símbolos como $[1 \ \sqrt{3}]^T$. Si realizamos un truncamiento de los valores de las coordenadas al primer decimal, la constelación de la Figura 4.37(c) se transforma en la de la Figura 4.38, donde se ha perdido la disposición a intervalos regulares de los símbolos y con ello parte de las ventajas del empaquetamiento hexagonal. Si las coordenadas de los símbolos fuesen, por ejemplo,

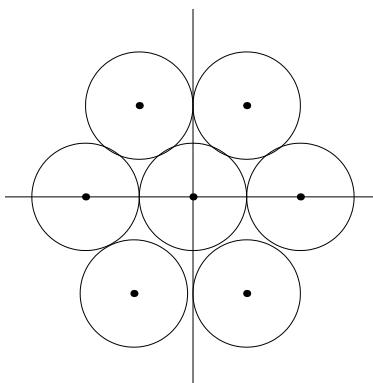


Figura 4.38. Constelación con empaquetamiento hexagonal y truncamiento de las coordenadas de los símbolos.

$[2\sqrt{3} \ \sqrt{3}]^T$ no tendríamos esa pérdida porque podríamos escalar la constelación por un factor $a = 1/\sqrt{3}$ y obtendríamos coordenadas enteras. Esta es la razón por la que la configuración más empleada en constelaciones bidimensionales es la cuadrícula.

Limitación de la energía de pico. En una constelación bidimensional de 16 símbolos como la de la Figura 4.30(a) (Página 210) la energía media por símbolo es 10, pero

la energía de los símbolos más alejados del origen de coordenadas (energía de pico) es 18. Puede darse el caso que el dispositivo encargado de amplificar la señal en el transmisor pueda proporcionar en un intervalo de duración T una energía de 10, pero no de 18, como sucede en algunos sistemas en que la potencia de los transmisores es un factor crítico. En estas situaciones suelen emplearse constelaciones con cociente energía de pico respecto a energía media iguales o cercanos a 1, como la mostrada en la Figura 4.30(d).

Facilidad de realización del receptor. Existen situaciones en que la complejidad del receptor es un factor determinante, hasta tal punto que es preferible sacrificar una menor probabilidad de error en recepción para conseguir una simplificación de la circuitería necesaria en el receptor. Un caso común en esta situación es que no se recupera el signo de las coordenadas del símbolo recibido, y esto fuerza a emplear constelaciones en que las coordenadas de los símbolos sean no negativas, denominadas comúnmente *constelaciones unipolares*. Si además existe limitación de la energía de pico, suelen emplearse las denominadas *constelaciones ortogonales*, en las que la dimensionalidad del espacio de señales, N , es igual al número de símbolos de la constelación, M , y los símbolos toman la forma $[\sqrt{E_s} \ 0 \dots]^T, [0 \ \sqrt{E_s} \ 0 \dots]^T, [0 \ 0 \ \sqrt{E_s} \ 0 \dots]^T$, etc.

4.5. TRANSMISIÓN INDEFINIDA DE SÍMBOLOS

El modelo de comunicación digital presentado en los apartados precedentes considera que se transmite un único símbolo B , cuando las necesidades reales son de sistemas que puedan transmitir una secuencia de símbolos de longitud indefinida que denotaremos de aquí en adelante por razones de brevedad como *transmisión indefinida de símbolos*. Para considerar una transmisión indefinida de símbolos sustituimos el modelo que representábamos en la Figura 4.1 por el representado en la Figura 4.39. El primer cambio que se advierte

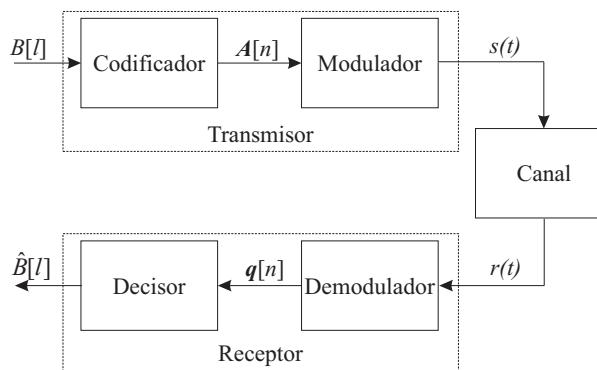


Figura 4.39. Modelo general de un sistema de comunicación digital para transmisión indefinida de símbolos.

es la sustitución del símbolo a transmitir, B , por una secuencia de símbolos $B[l]$. Para facilitar un interfaz común a cualquier sistema de comunicaciones que pudiésemos considerar,

cada uno de los símbolos que componen la secuencia $B[l]$ son ahora símbolos binarios que pueden tomar valor 0 ó 1; esto es, $B[l]$ será algo como “... 1000110101111 ...”. Si la fuente cuya información queremos transmitir tuviese otro alfabeto con distinto número de símbolos emplearíamos un *codificador de fuente* para transformar la secuencia de símbolos de salida de la fuente en una secuencia de símbolos binarios.

Seguimos considerando, como en el modelo anterior, que los símbolos son equiprobables ($Pr(B[l_0] = 0) = Pr(B[l_0] = 1) = 1/2$ para cualquier valor de l_0) pero, como ahora tenemos una secuencia en lugar de un símbolo aislado, nos hace falta suponer una relación probabilística entre los distintos símbolos de la secuencia. Esta es la independencia estadística: el valor que toma la secuencia para un l_0 determinado, $B[l_0]$, es independiente del valor que toma para otro l_1 , $B[l_1]$, si $l_0 \neq l_1$. En estas condiciones, como veremos en el Capítulo 9, cada símbolo contiene un *bit de información*.

Suponemos también que los símbolos de la secuencia $B[l]$ aparecen a la entrada del sistema a intervalos regulares de T_b segundos, por lo que a T_b se le denomina *intervalo de bit* o *periodo de bit*. También podemos decir que el sistema transmite $1/T_b$ bits por segundo, o que la *tasa de bit* de entrada al sistema es $1/T_b$.

De manera acorde, el símbolo A ha sido sustituido por una secuencia de símbolos $A[n]$. Cada símbolo de la secuencia $A[n]$, al igual que en el primer modelo, puede tomar uno de entre M valores posibles $\{a_i, i = 0, \dots, M - 1\}$ de la forma (4.1) o, lo que es lo mismo, pertenece a una constelación de M símbolos en un espacio N -dimensional. La restricción que imponemos ahora es que M sea una potencia de 2, $M = 2^m$, con m entero positivo.

El codificador transforma la secuencia $B[l]$ en la secuencia $A[n]$, generando un símbolo de $A[n]$ por cada m símbolos de $B[l]$ (de ahí la diferente notación de los índices temporales de ambas secuencias). Por el momento consideraremos que la transformación entre $B[l]$ y $A[n]$ se realiza símbolo a símbolo y sin memoria: a cada posible combinación de m unos y ceros se le asigna un símbolo a_i , tal y como se muestra en los ejemplos siguientes.

Ejemplo 4.3

Un ejemplo de codificador que, empleando un símbolo de $B[l]$ para generar otro de $A[n]$ ($m = 1$) en un espacio unidimensional ($N = 1$), realice la asignación

$$\begin{array}{rcl} 1 & \longrightarrow & 1 \\ 0 & \longrightarrow & -1 \end{array}$$

transformará la secuencia 0011100100 en $-1, -1, 1, 1, 1, -1, -1, 1, -1, -1$.

Ejemplo 4.4

Un segundo ejemplo de codificador que, empleando un símbolo de $B[l]$ para generar otro de $A[n]$ ($m = 1$) en un espacio bidimensional ($N = 2$), realice la asignación

$$\begin{array}{rcl} 1 & \longrightarrow & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ 0 & \longrightarrow & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

transformará la secuencia 0011100100 en $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Ejemplo 4.5

Un tercer ejemplo de codificador que, empleando dos símbolos de $B[l]$ para generar uno de $A[n]$ ($m = 2$) en un espacio unidimensional ($N = 1$), realice la asignación

$$\begin{array}{rcl} 11 & \longrightarrow & 3 \\ 10 & \longrightarrow & 1 \\ 00 & \longrightarrow & -1 \\ 01 & \longrightarrow & -3 \end{array}$$

transformará la secuencia 0011100100 en $-1, 3, 1, -3, -1$.

La tasa de símbolos a la salida del codificador es $1/(mT_b)$ símbolos por segundo o *baudios*, siendo el periodo de símbolo $T = mT_b$. Nótese como únicamente en el caso en que la constelación sea binaria coinciden bits por segundo y baudios. En general, una tasa de R baudios se corresponde con una velocidad binaria de mR bits por segundo.

El modulador transforma la secuencia de símbolos $A[n]$ en una señal analógica en tiempo continuo $s(t)$, que se actualiza cada periodo de símbolo, T , de la siguiente forma: como en el primer modelo, establecemos una correspondencia entre cada símbolo de la constelación, a_i , y una forma de onda $s_i(t)$, idénticamente nula fuera del intervalo $0 \leq t < T$ y de energía finita, y esta correspondencia se aplica a cada uno de los símbolos de la secuencia $A[n]$ de la siguiente forma: si $A[n_0] = a_i$, hacemos $s(t) = s_i(t - n_0T)$ en el intervalo $n_0T \leq t < (n_0 + 1)T$, tal y como se muestra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 4.6

Tomando el codificador del Ejemplo 4.4, un posible modulador (tomado del conjunto de señales de la Figura 4.5, Página 179) sería el que hiciese la asignación

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} &\longrightarrow s_0(t) = \begin{cases} 2 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) & 0 \leq t < T \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \\ \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} &\longrightarrow s_1(t) = \begin{cases} 2 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) & 0 \leq t < T \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \end{aligned}$$

que, con la secuencia de símbolos de entrada del Ejemplo 4.4, ofrece a su salida la señal que muestra la Figura 4.40.

Expresando las señales $s_i(t)$ en función de los elementos de la base del espacio de señales que generan, $\{\phi_j(t), j = 0, \dots, N - 1\}$, obtenemos una expresión compacta de la señal $s(t)$ que, en el caso en que la dimensionalidad del espacio sea igual a 1, toma la forma

$$s(t) = \sum_n A[n] \phi_0(t - nT) \quad (4.97)$$

y para una dimensión genérica N del espacio de señal

$$s(t) = \sum_n \mathbf{A}^T[n] \begin{bmatrix} \phi_0(t - nT) \\ \vdots \\ \phi_{N-1}(t - nT) \end{bmatrix} = \sum_n \sum_{j=0}^{N-1} A_j[n] \phi_j(t - nT) \quad (4.98)$$

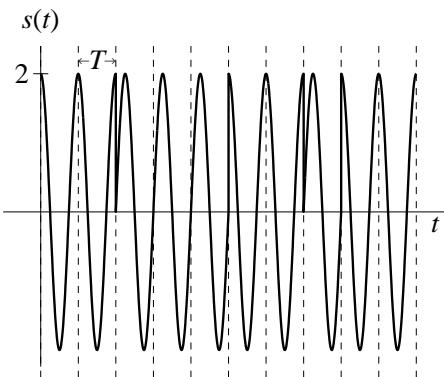


Figura 4.40. Señal a la salida del modulador del Ejemplo 4.6.

donde $A_j[n]$ es la componente j -ésima del símbolo $\mathbf{A}[n]$.

Como modelo de canal, consideramos el canal aditivo gausiano empleado anteriormente, $r(t) = s(t) + n(t)$, siendo $n(t)$ una componente de ruido gausiano y blanco de densidad espectral de potencia $N_0/2$. Bajo estas condiciones, la recepción con mínima probabilidad de error de uno de los símbolos de la secuencia es un problema estadísticamente independiente de la recepción de cualquier otro símbolo de la misma secuencia, porque se dan dos condiciones de forma simultánea:

Condición 1. En cada intervalo de tiempo $n_0T \leq t < (n_0 + 1)T$ interviene uno y sólo uno de los símbolos de la secuencia, $\mathbf{a}_i[n_0]$.

Condición 2. El ruido en un determinado instante, $n(t_0)$, es estadísticamente independiente del ruido en cualquier otro instante.

Si la recepción de cada símbolo es un problema independiente, el demodulador debe generar, a partir de la señal recibida, $r(t)$, una secuencia (de vectores) $\mathbf{q}[n]$ cuyos elementos contienen las coordenadas de $r(t - nT)$ en la base utilizada en el modulador, $\{\phi_j(t), j = 0, \dots, N - 1\}$. Cada vector $\mathbf{q}[n_0]$ de la secuencia $\mathbf{q}[n]$ puede obtenerse mediante una estructura de correlacionadores o mediante una estructura de filtros adaptados a partir del valor de $r(t)$ en el intervalo $n_0T \leq t < (n_0 + 1)T$. Como no existe solape entre los distintos intervalos, podemos emplear la misma estructura para cada uno de los vectores de la secuencia $\mathbf{q}[n]$, tal y como se muestra en la Figura 4.41. En definitiva, la diferencia con el modo de proceder en el modelo anterior es que allí correlacionábamos (o muestreábamos) una sola vez, y ahora repetimos esa operación en cada periodo de símbolo.

Cada vector de la secuencia $\mathbf{q}[n]$ es estadísticamente independiente del resto de vectores de la secuencia y contiene toda la información relevante (es un estadístico suficiente) para decidir sobre un símbolo de $\mathbf{A}[n]$. Esto es, $\mathbf{q}[n]$ toma la forma

$$\mathbf{q}[n] = \mathbf{A}[n] + \mathbf{n}[n] \quad (4.99)$$

donde $\mathbf{n}[n]$ es la componente de ruido, que es un proceso estocástico discreto multidimensional.

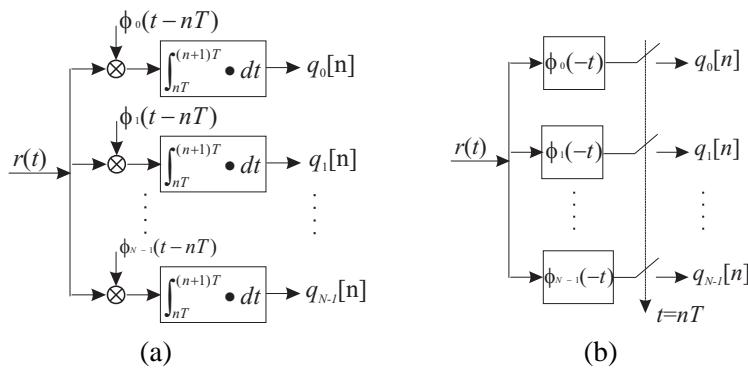


Figura 4.41. Estructuras del demodulador para transmisión indefinida de símbolos basadas en correlacionadores (a) y filtros adaptados (b).

sional gausiano cuyas muestras son estadísticamente independientes y con función de densidad de probabilidad como la expresada en (4.15).

En estas condiciones, el decisor óptimo es un decisor MAP (que también se reduce a un decisor ML por ser los símbolos equiprobables) operando símbolo a símbolo como el desarrollado para el modelo anterior, según se muestra en la Figura 4.42. La única diferencia apreciable con respecto al decisor del modelo anterior es que su salida son símbolos de la constelación $\{a_i, i = 0, \dots, M - 1\}$ en lugar de símbolos de entrada al sistema, por la diferencia en el tamaño de los alfabetos (binario frente a M -ario), que no existía en el modelo anterior. La secuencia de símbolos a la salida del decisor, $\hat{A}[n]$, es transformada en

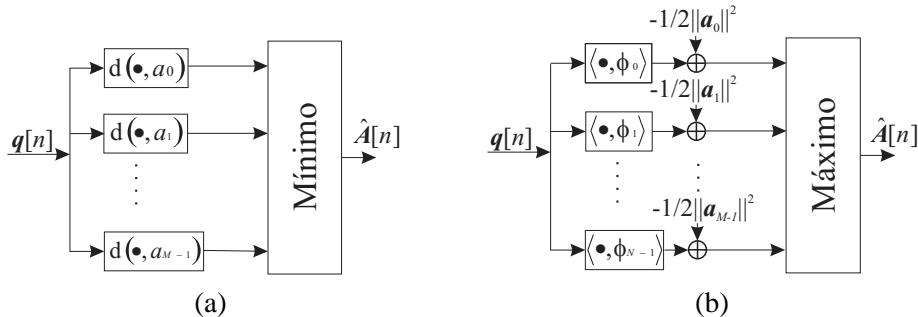


Figura 4.42. Realización del decisor de máxima verosimilitud para transmisión indefinida de símbolos empleando medidas de distancia (a) y correlacionadores (b).

una secuencia de símbolos binarios $\hat{B}[l]$ realizando la asignación inversa a la del codificador.

La diferencia en el tamaño de los alfabetos de B y A hace que la probabilidad media de error de símbolo no sea la misma medida en A que medida en B . La analizada en el modelo anterior, P_e , es la probabilidad media de error medida en los símbolos de la constelación, que continuaremos denominando *probabilidad media de error de símbolo*. La probabilidad media de error medida en B es la denominada *tasa de errores binarios o tasa de error de bit* (“*Bit Error Rate*”, BER).

Para ilustrar el método de cálculo de la BER y enfatizar las diferencias con respecto

a la P_e , vamos a utilizar la constelación unidimensional de cuatro símbolos de la Figura 4.28 (Página 208) de la que ya calculamos su P_e , (4.71). Como codificador, emplearemos el del Ejemplo 4.5. La relación resultante entre símbolos binarios de entrada al codificador y símbolos de la constelación es la mostrada en la Figura 4.43.

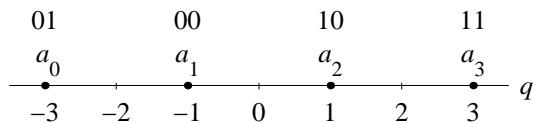


Figura 4.43. Constelación unidimensional de cuatro símbolos con la asignación de símbolos binarios realizada por el codificador del Ejemplo 4.5.

Supongamos en primer lugar que el símbolo transmitido fue a_0 , que se corresponde con una combinación de dígitos binarios o *palabra* 01. Si se produce un error y la salida del decisor es a_1 (00), tan solo uno de los dígitos binarios será incorrecto, pero si la salida del decisor es a_2 (10), los dos dígitos binarios serán incorrectos. Si a la hora de calcular $P_{e|a_0}$ no distinguíamos entre las situaciones en que la salida es a_1 , a_2 ó a_3 ahora sí debemos hacerlo porque su impacto sobre la *BER* es distinto. El cálculo exacto de la *BER* cuando el símbolo transmitido es a_0 , que denotaremos como BER_{a_0} , da como resultado

$$BER_{a_0} = \frac{1}{2} \left(Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) - Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right) \right) + \frac{2}{2} \left(Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right) - Q\left(\frac{5}{\sqrt{N_0/2}}\right) \right) + \frac{1}{2} Q\left(\frac{5}{\sqrt{N_0/2}}\right) \quad (4.100)$$

donde el primero de los sumandos representa la probabilidad de que la salida del decisor sea a_1 por el cociente entre el número de dígitos binarios erróneos que acarrea esa decisión y el número de dígitos binarios por símbolo de la constelación. El segundo y tercer sumandos de (4.100) poseen idéntico significado con respecto a, respectivamente, a_2 y a_3 .

Procediendo de idéntica forma en los casos en que el símbolo transmitido sea a_1 , a_2 y a_3 , obtenemos la *BER* como

$$BER = \sum_{i=0}^{M-1} Pr(a_i) BER_{a_i} \quad (4.101)$$

que para el caso considerado ofrece como resultado

$$BER = \frac{3}{4} Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) + \frac{1}{2} Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right) - \frac{1}{4} Q\left(\frac{5}{\sqrt{N_0/2}}\right) \quad (4.102)$$

En los casos en que este cálculo resulte tedioso por el número de términos involucrados, podemos recurrir a la siguiente aproximación: en el caso más favorable, un error de detección va a provocar un sólo dígito binario erróneo ($BER_{a_i} \geq \frac{1}{m} P_{e|a_i}$) y en el caso peor, un

error de detección va a provocar que los m dígitos binarios que componen la palabra asignada al símbolo que fue transmitido sean erróneos ($BER_{a_i} \leq P_{e|a_i}$). Esta aproximación nos lleva a acotar la BER como

$$\frac{1}{m}P_e \leq BER \leq P_e \quad (4.103)$$

Comparando la BER del caso analizado, (4.102), con la P_e de la constelación, (4.71), comprobamos que la BER se encuentra más cerca de su límite inferior establecido en (4.103) que de su límite superior (concretamente, si nos quedamos con el término dominante de (4.102) estamos en el límite inferior). Si calculamos la BER de manera exacta realizando la asignación que se muestra en la Figura 4.44 obtenemos

$$BER = \frac{5}{4}Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) - \frac{1}{4}Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right) \quad (4.104)$$

que se encuentra más cerca del límite superior que del inferior.

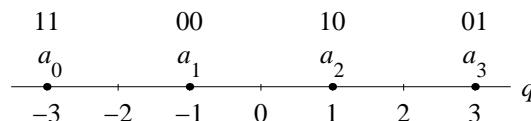


Figura 4.44. Constelación unidimensional de cuatro símbolos y su asignación de símbolos binarios.

La razón de este comportamiento está en que en la asignación de la Figura 4.43 los símbolos que se encuentran a menor distancia de uno dado (y que en el caso de que se produzca un error, ese será el error más probable) tienen asignadas palabras que difieren en un único dígito binario, mientras que esto no ocurre en la asignación de la Figura 4.44.

Como regla general para el diseño de codificadores, debemos asignar palabras que difieran en el menor número posible de dígitos binarios a los símbolos de la constelación que se encuentren más cercanos. Un tipo de codificación que lleva a la práctica esta regla es la denominada *codificación Gray*, en que los símbolos más cercanos a uno dado tienen palabras que difieren en un único dígito binario. La asignación de la Figura 4.43 es un ejemplo de codificación Gray pero, lamentablemente, no siempre existe un codificador Gray para una constelación dada (por citar un ejemplo, una constelación con empaquetamiento hexagonal y $m < 6$). Para codificadores Gray, podemos aproximar la BER como

$$BER \approx \frac{1}{m}P_e \quad (4.105)$$

El empleo de la BER como medida de fiabilidad de un sistema de comunicación en lugar de la probabilidad de error de símbolo nos permite comparar de forma directa sistemas de comunicación que empleen constelaciones con distinto número de símbolos. Si la P_e

era representada en función de E_s/N_0 , para representar adecuadamente la *BER* debemos expresarla en función de E_b/N_0 , donde E_b es la *energía media por bit*, definida como

$$E_b = \frac{1}{m} E_s \quad (4.106)$$

y de sentido evidente si consideramos que la máxima información que puede contener un símbolo de la constelación es m bits.

Como ejemplo, la Figura 4.45 representa la *BER* en función de $\sqrt{E_b/N_0}$ para las constelaciones de 4 y 16 símbolos de las Figuras 4.30(b) y 4.30(a), respectivamente. Se ha supuesto codificación Gray y se ha empleado la aproximación (4.105) para el cálculo de la *BER*. Las probabilidades medias de error de símbolo de estas constelaciones son las representadas en las Figuras 4.34 y 4.35 que, obviamente, no podían compararse de forma directa.

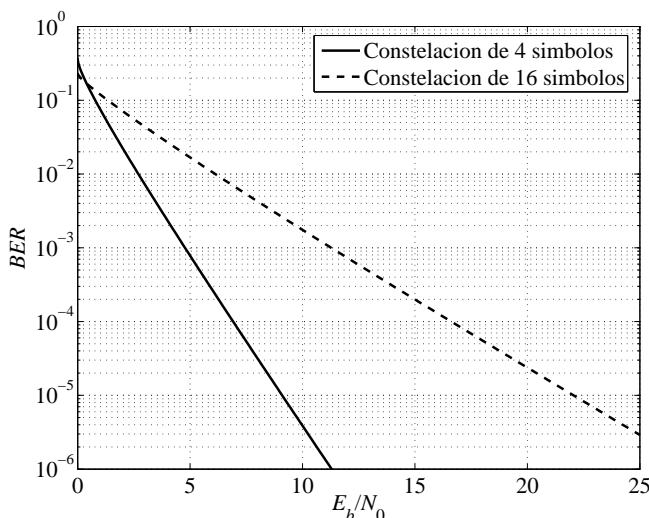


Figura 4.45. Comparación de las medidas de *BER* para las constelaciones de 4 y 16 símbolos de las Figuras 4.30(a) y 4.30(b) con codificación Gray.

A la vista de los resultados de la Figura 4.45 podría pensarse que la constelación de 4 símbolos es definitivamente superior a la de 16, y ciertamente lo es para el modelo de canal considerado. Incluso podemos generalizar este resultado diciendo que conforme mayor sea el número de puntos de la constelación, mayor será la *BER*. Sin embargo, en el Capítulo 5 veremos que al restringir el ancho de banda del canal, esta conclusión no es del todo exacta.

4.6. LECTURAS ADICIONALES

La mayor parte del contenido del capítulo es la teoría clásica de modulación y detección que puede encontrarse en muchos libros de comunicaciones digitales.

Los autores nos sentimos en deuda con un libro en particular, el de Wozencraft y Jacobs [95], y es la primera referencia que ofrecemos como ampliación de lo aquí expuesto. Otro

libro clásico de lectura recomendada es el de Van Trees [81]. Entre los libros de texto actuales que abordan los conceptos tratados en este capítulos recomendamos los de Proakis [61], Proakis y Salehi [63], Benedetto y Biglieri [7], Haykin [39], Wilson [94] y Simon, Hinedi y Lindsey [75].

El diseño de constelaciones viene razonablemente expuesto en los libros de Benedetto y Biglieri [7] y Barry, Lee y Messerschmitt [5], y un tratamiento mucho más profundo de este tema podemos encontrarlo en el libro de Conway y Sloane [19].

PROBLEMAS

P4.1 Considere la constelación de señales $\{s_i(t), i = 0, \dots, M - 1\}$, idénticamente nula fuera del intervalo $0 \leq t < T$, y de valor

$$s_i(t) = \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi(i+1)t}{T}\right)$$

dentro de este. Determine una base ortonormal para representar la constelación de señales, sus coordenadas con respecto a esta base, la distancia entre cualesquiera dos señales, la energía de cada señal de la constelación y la energía media de la constelación.

P4.2 Considere la constelación de señales

$$\mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Calcule la distancia entre cualesquiera dos señales de la constelación, la energía de cada señal y la energía media por símbolo supuestos símbolos equiprobables.

P4.3 Debido a un error de sincronismo, se muestrea la salida de un filtro adaptado a la señal $s(t)$ en un instante $t_0 \neq 0$, obteniendo $q(t_0) = s(t) * s^*(-t)|_{t=t_0}$. Demuestre que ese error de sincronismo provoca una pérdida de señal ($|q(0)| \geq |q(t_0)|$).

P4.4 Considere un sistema de comunicación que emplea la siguiente constelación de cuatro señales

$$\begin{aligned} s_0(t) &= \phi_0(t) + \phi_1(t) & s_1(t) &= \phi_0(t) - \phi_1(t) \\ s_2(t) &= -\phi_0(t) + \phi_1(t) & s_3(t) &= -\phi_0(t) - \phi_1(t) \end{aligned}$$

siendo $\phi_0(t)$ y $\phi_1(t)$ dos señales ortogonales de energía unitaria. En el receptor, el demodulador está realizado con filtros adaptados a cada una de las señales del transmisor, obteniendo un vector

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

donde $q_i = r(t) * s_i^*(-t)|_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau)s_i^*(-\tau) d\tau$.

- 4.1. Obtenga las funciones de densidad de probabilidad $f_{q|s_i(t)}(q|s_i(t))$.
 - 4.2. Demuestre que q es un estadístico suficiente para la detección de la señal transmitida.
 - 4.3. Desarrolle el decisor MAP a partir de q .
 - 4.4. ¿Qué diferencias y similitudes existen entre este receptor y uno basado en un demodulador que emplee filtros adaptados a los elementos de la base del espacio de señal, $\phi_0(t)$ y $\phi_1(t)$?
- P4.5 La entrada a un decisor binario es un escalar q que, cuando se transmite el símbolo a_0 , presenta una función de densidad de probabilidad uniforme en el intervalo $[-0,5, 0,5]$. Alternativamente, cuando se transmite el símbolo a_1 , presenta una función de densidad de probabilidad uniforme en el intervalo $[-1, 1]$. Se conoce, además, que las probabilidades “a priori” de los símbolos son $p(a_0) = 0,25$ y $p(a_1) = 0,75$.
- 5.1. Obtenga el decisor MAP y calcule su probabilidad de error.
 - 5.2. Obtenga el decisor ML y calcule su probabilidad de error.
- P4.6 Desarrolle el decisor MAP realizado mediante medidas de distancias similar a (4.43) para símbolos no equiprobables, partiendo de (4.35).
- P4.7 Considere la constelación mostrada en la Figura 4.28. Determine las regiones de decisión del decisor MAP en el caso en que las probabilidades *a priori* de los símbolos son $p(a_1) = p(a_2) = 0,3$ y $p(a_0) = p(a_3) = 0,2$. Calcule la probabilidad de error de este decisor en función de E_s/N_0 y compárela con la probabilidad de error de un decisor ML.
- P4.8 Desarrolle el decisor ML para ruido aditivo laplaciano; esto es, con

$$f_{\mathbf{n}}(\mathbf{n}) = \prod_{j=0}^{N-1} f_{n_j}(n_j) = \prod_{j=0}^{N-1} \frac{1}{2\beta} e^{-\frac{|n_j|}{\beta}} = \frac{1}{(2\beta)^N} e^{-\sum_{j=0}^{N-1} \frac{|n_j|}{\beta}}$$

de manera análoga al realizado en las expresiones (4.38) a (4.43) para ruido aditivo gausiano. Indique cómo sería la forma óptima de distribuir (o empaquetar) los símbolos de la constelación en el espacio de señales en este caso, y dibuje esta distribución para un espacio bidimensional.

- P4.9 Un sistema de comunicaciones emplea un espacio de señal unidimensional generado por un pulso $\phi_0(t)$ rectangular de duración $T = 1$ y una constelación binaria antipodal ($a_0 = -1$, $a_1 = 1$). La señal a la salida del modulador, $s(t)$, es transmitida con ganancias distintas, G_1 y G_2 , por dos canales gausianos, obteniendo en el receptor las señales $r_1(t) = G_1 s(t) + n_1(t)$ y $r_2(t) = G_2 s(t) + n_2(t)$, donde $n_1(t)$ y $n_2(t)$ son dos componentes de ruido gausiano y blanco de densidadpectral de potencia igual

a $N_0/2$ e independientes entre sí. El receptor combina $r_1(t)$ y $r_2(t)$ con ganancias K_1 y K_2 , respectivamente, obteniendo la señal $r(t)$ como

$$r(t) = K_1 r_1(t) + K_2 r_2(t) = K_1(G_1 s(t) + n_1(t)) + K_2(G_2 s(t) + n_2(t))$$

- 9.1. Diseñe el demodulador del receptor óptimo mediante filtro adaptado. Dibuje la constelación recibida.
- 9.2. Calcule las funciones de densidad de probabilidad de la salida del demodulador, q , condicionadas al símbolo transmitido, $f_{q|A}(q|a_0)$ y $f_{q|A}(q|a_1)$.
- 9.3. Diseñe el decisor MAP supuestos símbolos equiprobables y determine la probabilidad de error de símbolo, P_e .
- 9.4. Obtenga el valor de $K = K_1/K_2$ que hace mínima P_e en función del valor de las ganancias G_1 y G_2 .

P4.10 Considere el canal discreto equivalente descrito mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} q_0 &= A + n_0 \\ q_1 &= n_0 + n_1 \end{aligned}$$

donde A puede tomar valor 1 ó -1 con igual probabilidad y n_0 y n_1 son dos componentes de ruido con distribución gaussiana de media nula, varianza $N_0/2$, estadísticamente independientes entre sí y estadísticamente independientes de A

- 10.1. Determine las densidades de probabilidad de la salida del canal condicionadas a los símbolos de entrada, $f_{q_0,q_1|A}(q_0, q_1|1)$ y $f_{q_0,q_1|A}(q_0, q_1|-1)$.
- 10.2. Determine si q_0 es un estadístico suficiente para la detección.
- 10.3. Diseñe el decisor de mínima probabilidad media de error.

P4.11 Un sistema de comunicaciones ternario ($M = 3$) emplea la constelación de señales $s_0(t) = v(t)$, $s_1(t) = 0$ y $s_2(t) = -v(t)$, siendo $v(t)$ una señal de energía finita e idénticamente nula fuera del intervalo $0 \leq t < T$. El receptor emplea un demodulador basado en correlacionador que calcula el estadístico $u = \int_0^T r(t)s(t)dt$, siendo $r(t) = s(t) + n(t)$, y $n(t)$ ruido gaussiano blanco de densidad espectral de potencia $N_0/2$ W/Hz y estadísticamente independiente del símbolo transmitido. El decisor compara u con un umbral a , de modo que si $u > a$ se decide que la señal transmitida fue $s_0(t)$, si $u < -a$ se decide que fue $s_2(t)$ y si $-a < u < a$ se decide que fue $s_1(t)$.

- 11.1. ¿Puede ser óptimo el receptor descrito? Justifique su respuesta.
- 11.2. Calcule las probabilidades de error condicionadas a la transmisión de cada una de las señales, y calcule la probabilidad media de error en función de las probabilidades *a priori* de los símbolos y de E_s/N_0 .
- 11.3. Suponiendo que $a = E_s$, determine la distribución de probabilidades *a priori* que hace mínima la probabilidad media de error.

- 11.4. Si las señales son equiprobables *a priori*, determine el umbral a que hace mínima la probabilidad media de error.
- P4.12 Calcule la P_e de la constelación 64-QAM de la Figura 5.29 en función de E_s/N_0 .
- P4.13 Obtenga una cota superior de la P_e de las constelaciones de las Figuras 4.30(c) y 4.30(d) empleando la cota de la unión.
- P4.14 Considere la constelación de señales de un sistema de comunicaciones digitales mostrada en la Figura 4.46, equiprobables “*a priori*”.

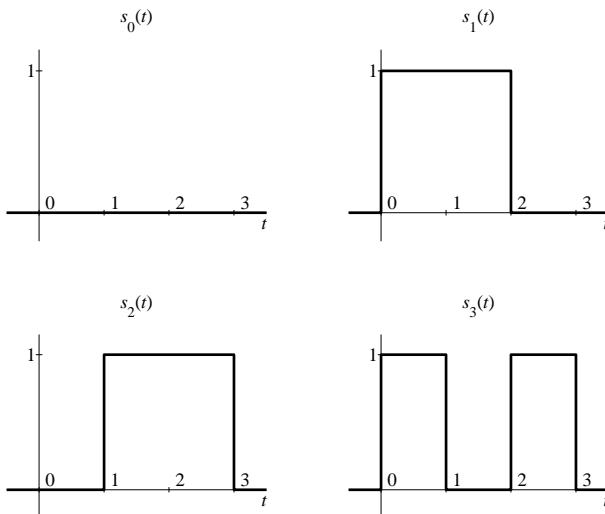


Figura 4.46. Constelación de señales del Problema P4.14.

- 14.1. Obtenga una base ortonormal para la constelación de señales con el mínimo número de elementos.
- 14.2. Obtenga las coordenadas de cada una de las señales en la base del apartado anterior, y dibuje las regiones de decisión asociadas correspondientes a un decisor MAP.
- 14.3. Empleando la cota de la unión, calcule la probabilidad media de error de símbolo, P_e , en función de E_s/N_0 .
- 14.4. ¿Podemos realizar alguna transformación de la constelación que, sin modificar las distancias entre los símbolos, mejore su inmunidad frente al ruido aditivo gaussiano? Si es así, realícela, dibuje las señales correspondientes a la constelación resultante y calcule la nueva P_e en función de E_s/N_0 .

- P4.15 Diseñe los codificadores Gray para las constelaciones de la Figura 4.30.

P4.16 Considere el sistema de comunicación digital que emplea el siguiente conjunto de señales en el transmisor

$$s_0(t) = \begin{cases} \cos(100\pi t) & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad s_1(t) = \begin{cases} -\cos(100\pi t) & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$s_2(t) = \begin{cases} \sin(100\pi t) & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad s_3(t) = \begin{cases} -\sin(100\pi t) & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

- 16.1. Determine una base ortonormal para este conjunto de señales y obtenga la constelación de señales con respecto a esta base.
- 16.2. Diseñe el receptor de mínima probabilidad de error del sistema, indicando explícitamente las regiones de decisión asociadas a cada símbolo en los siguientes supuestos:
 - 16.2.1. $p(\mathbf{a}_0) = p(\mathbf{a}_1) = p(\mathbf{a}_2) = p(\mathbf{a}_3) = 1/4$
 - 16.2.2. $p(\mathbf{a}_0) = p(\mathbf{a}_1) = 1/3, p(\mathbf{a}_2) = p(\mathbf{a}_3) = 1/6$

Ahora extendemos el conjunto de señales añadiendo las cuatro siguientes

$$s_4(t) = s_0(t) + s_2(t) \quad s_5(t) = s_0(t) + s_3(t)$$

$$s_6(t) = s_1(t) + s_2(t) \quad s_7(t) = s_1(t) + s_3(t)$$

- 16.3. Repita el Apartado a) con el conjunto completo de señales.
- 16.4. Calcule la cota de la unión de la probabilidad media de error de símbolo expresada en función de E_s/N_0 en el supuesto de símbolos equiprobables.
- 16.5. El sistema de comunicaciones se va a emplear para una transmisión indefinida de símbolos binarios. Diseñe el código Gray para la constelación de ocho símbolos y calcule la *BER* del sistema expresada en función de E_b/N_0 . Para el cálculo de la *BER* considere únicamente los errores que se producen entre símbolos adyacentes.

P4.17 Considere la constelación de símbolos de un sistema de comunicaciones digitales mostrada en la Figura 4.47. Los símbolos se consideran equiprobables.

- 17.1. Calcule la cota de la unión de la probabilidad media de error de símbolo expresada en función de E_s/N_0 , y obtenga el valor de a que hace mínima esta cota.
- 17.2. El sistema de comunicaciones se va a emplear para una transmisión indefinida de símbolos binarios. Diseñe el código Gray para la constelación y calcule la *BER* del sistema expresada en función de E_b/N_0 para el valor de a calculado en el apartado anterior.

P4.18 Considere la constelación de señales de un sistema de comunicaciones digitales mostrada en la Figura 4.48.

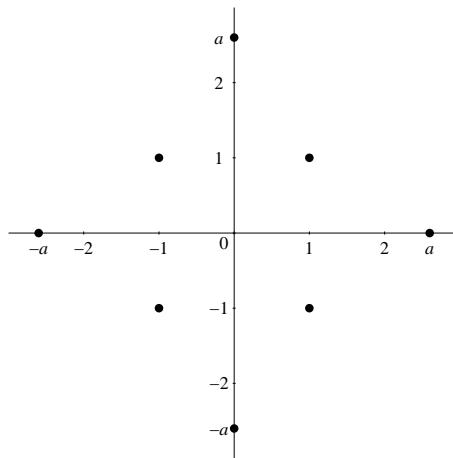


Figura 4.47. Constelación de símbolos del Problema P4.17.

- 18.1. Obtenga una base ortonormal para la constelación de señales con el mínimo número de elementos.
- 18.2. Obtenga las coordenadas de cada una de las señales en la base del apartado anterior.
- 18.3. Empleando la cota de la unión, calcule la probabilidad media de error de símbolo, P_e , en función de E_s/N_0 supuestos los símbolos equiprobables.
- 18.4. Para una transmisión indefinida de símbolos, diseñe un codificador de símbolos y calcule la BER que se obtiene con dicho codificador en función de E_b/N_0 supuestos los símbolos equiprobables.
- 18.5. Extendemos la constelación de 4 señales a M señales haciendo que los símbolos ocupen el intervalo 0 a M , y que la señal $s_i(t)$ tome un valor igual a $(M-1)/M$ en el intervalo de i a $(i+1)$ y $-1/M$ en el resto del intervalo de 0 a M . Calcule la BER de este nuevo sistema en función de E_b/N_0 cuando M tiende a infinito.

APÉNDICES

4.A. PROCEDIMIENTO DE ORTOGONALIZACIÓN DE GRAM-SCHMIDT

El conjunto de señales a la salida del modulador, $\{s_i(t), i = 0, \dots, M-1\}$, genera un subespacio del espacio de Hilbert de señales de energía finita L_2 que se definió en el Apartado 2.1.4. Si pudiésemos encontrar un conjunto de señales $\{\phi_j(t), j = 0, \dots, N-1\}$ ($N \leq M$) que formen una base ortonormal de este subespacio, podríamos representar cada una de las señales $s_i(t)$ mediante sus coordenadas en esta base. Aunque a simple vista pueda parecer que este cambio de representación no supone un gran avance, hay que tener en cuenta que lo que estamos haciendo es transformar toda una señal en tiempo continuo en

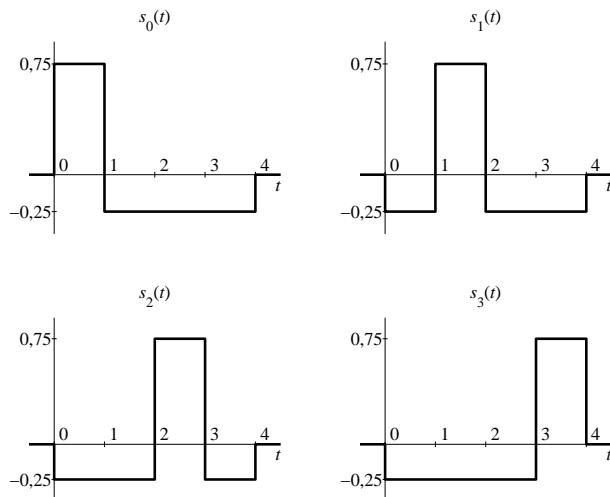


Figura 4.48. Constelación de señales del Problema 18.

unos pocos números. Como ejemplo, veamos con un poco de detalle cómo se simplifica el cálculo de la energía de una de las señales $s_i(t)$.

Cualquier señal $s_i(t)$ se puede expresar como combinación lineal de los elementos de la base⁴

$$s_i(t) = \sum_{j=0}^{N-1} s_{ij} \phi_j(t) \quad (4.107)$$

donde las coordenadas, s_{ij} , se obtienen como

$$s_{ij} = \langle \mathbf{s}_i, \phi_j \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s_i(t) \phi_j(t) dt \quad (4.108)$$

Además, por tratarse de una base ortonormal, se cumple que

$$\langle \phi_j, \phi_l \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_j(t) \phi_l(t) dt = \delta[j - l] \quad (4.109)$$

⁴A lo largo de este apéndice suponemos que todas las señales son reales.

El producto escalar entre dos señales $s_i(t)$ y $s_k(t)$ se calcula como

$$\begin{aligned}\langle s_i, s_k \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} s_i(t) s_k(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{N-1} s_{ij} \phi_j(t) \right) \left(\sum_{l=0}^{N-1} s_{kl} \phi_l(t) \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} s_{ij} s_{kl} \phi_j(t) \phi_l(t) dt \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} s_{ij} s_{kl} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_j(t) \phi_l(t) dt\end{aligned}$$

que, aplicando la propiedad de ortonormalidad de la base (Ecuación 4.109), se reduce a

$$\langle s_i, s_k \rangle = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} s_{ij} s_{kl} \delta[j - l] = \sum_{j=0}^{N-1} s_{ij} s_{kj} \quad (4.110)$$

La energía de una de las señales $s_i(t)$ se obtiene haciendo $s_i(t) = s_k(t)$ en la ecuación anterior, (4.110), obteniéndose

$$\mathcal{E}\{s_i(t)\} = \langle s_i, s_i \rangle = \sum_{j=0}^{N-1} s_{ij}^2 \quad (4.111)$$

Analizando el resultado, comprobamos que hemos reducido un tedioso cálculo de integrales a una suma de cuadrados.

La solución al problema de encontrar la base $\{\phi_j(t), j = 0, \dots, N - 1\}$ a partir del conjunto de señales $\{s_i(t), i = 0, \dots, M - 1\}$ podemos hallarla en cualquier texto básico de álgebra, empleando métodos como el denominado *procedimiento de ortogonalización de Gram-Schmidt*. No debemos perder nunca de vista que la dimensión infinita de L_2 no nos impide razonar como en el resto de espacios vectoriales.

El procedimiento de ortogonalización de Gram-Schmidt queda definido en la siguiente secuencia de pasos:

Paso 1. Si $s_0(t)$ tiene energía cero ($\mathcal{E}\{s_0(t)\} = 0$) reordenamos las señales para conseguir que $s_0(t)$ tenga energía no nula. El primer elemento de la base de señales, $\phi_0(t)$, se escoge como

$$\phi_0(t) = \frac{s_0(t)}{\sqrt{\mathcal{E}\{s_0(t)\}}} \quad (4.112)$$

De esta forma aseguramos que $\mathcal{E}\{\phi_0(t)\} = 1$ o, lo que es lo mismo, que tenemos el primer elemento de una base *ortonormal*. Tenemos además la primera coordenada de $s_0(t)$, s_{00} , que toma el valor $\sqrt{\mathcal{E}\{s_0(t)\}}$, ya que $s_0(t) = \sqrt{\mathcal{E}\{s_0(t)\}} \phi_0(t)$.

Para una mejor comprensión del procedimiento, vamos a ir realizando todos estos pasos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.7

Considere las cuatro señales $\{s_0(t), s_1(t), s_2(t), s_3(t)\}$ que muestra la Figura 4.49, donde el intervalo de símbolo, T , toma valor 4.

Calculamos la energía de $s_0(t)$, que resulta

$$\mathcal{E}\{s_0(t)\} = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

y, con esto

$$\phi_0(t) = \frac{s_0(t)}{\sqrt{\mathcal{E}\{s_0(t)\}}} = \frac{s_0(t)}{2}$$

siendo $s_{00} = 2$, tal y como muestra la Figura 4.50

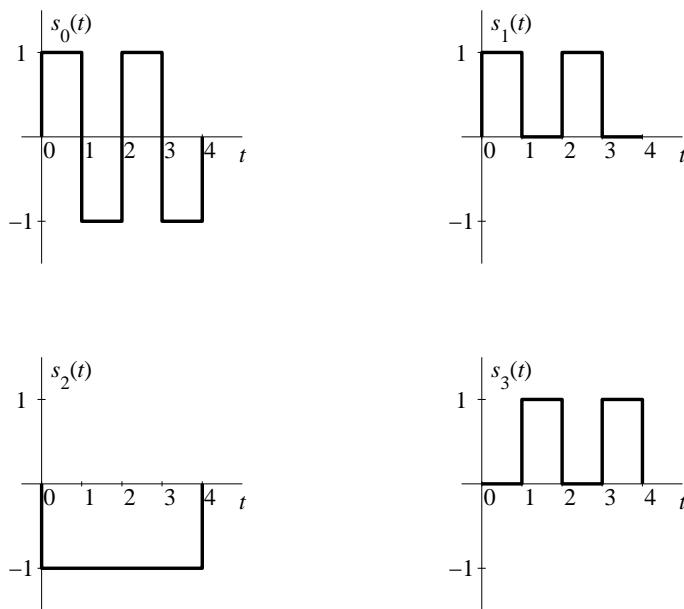


Figura 4.49. Conjunto de señales $s_i(t)$.

Paso 2. Ahora hay que comprobar si $s_1(t)$ es linealmente dependiente de $\phi_0(t)$, para lo cual definimos una función auxiliar $\theta_1(t)$ como

$$\theta_1(t) = s_1(t) - s_{10}\phi_0(t) \quad (4.113)$$

donde s_{10} , de acuerdo con (4.108), se calcula como

$$s_{10} = \langle \mathbf{s}_1, \phi_0 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)\phi_0(t)dt \quad (4.114)$$

La función $\theta_1(t)$ es ortogonal a $\phi_0(t)$, como podemos comprobar fácilmente

$$\langle \theta_1, \phi_0 \rangle = \langle \mathbf{s}_1, \phi_0 \rangle - s_{10}\langle \phi_0, \phi_0 \rangle = s_{10} - s_{10} = 0$$

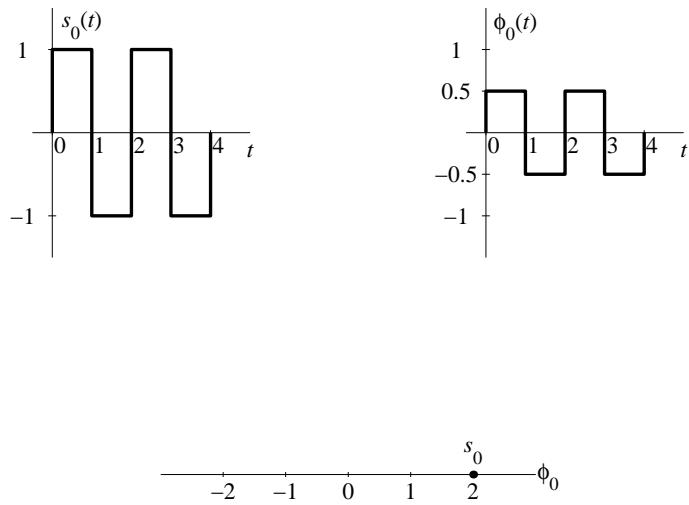


Figura 4.50. Primer paso del procedimiento de ortogonalización de Gram-Schmidt.

y es, por tanto, el vector que estábamos buscando como segundo elemento de la base (caso de que no sea una señal nula). Lo único que queda es asegurarnos de que su energía es igual a 1, para lo que hacemos

$$\phi_1(t) = \frac{\theta_1(t)}{\sqrt{\mathcal{E}\{\theta_1(t)\}}} \quad (4.115)$$

Ejemplo 4.7 (Continuación)

Calculamos s_{10}

$$s_{10} = \langle \mathbf{s}_1, \phi_0 \rangle = 0,5 + 0 + 0,5 + 0 = 1$$

y de ahí obtenemos $\theta_1(t)$, tal y como muestra la Figura 4.51. Calculamos la energía de $\theta_1(t)$

$$\mathcal{E}\{\theta_1(t)\} = 0,25 + 0,25 + 0,25 + 0,25 = 1$$

y, por tanto, $\phi_1(t) = \theta_1(t)$. La segunda coordenada de $s_1(t)$ es

$$s_{11} = \langle \mathbf{s}_1, \phi_1 \rangle = 0,5 + 0 + 0,5 + 0 = 1$$

En la Figura 4.51 podemos ver ya representadas $s_0(t)$ y $s_1(t)$ en función de $\phi_0(t)$ y $\phi_1(t)$.

Paso 3. Con el resto de señales del conjunto $\{s_i(t), i = 0, \dots, M - 1\}$ procedemos igual que con $s_2(t)$ en el paso anterior

$$\begin{aligned} \theta_2(t) &= s_2(t) - s_{20}\phi_0(t) - s_{21}\phi_1(t) \\ \phi_2(t) &= \frac{\theta_2(t)}{\sqrt{\mathcal{E}\{\theta_2(t)\}}} \\ \theta_3(t) &= s_3(t) - s_{30}\phi_0(t) - s_{31}\phi_1(t) - s_{32}\phi_2(t) \\ \phi_3(t) &= \frac{\theta_3(t)}{\sqrt{\mathcal{E}\{\theta_3(t)\}}} \end{aligned}$$

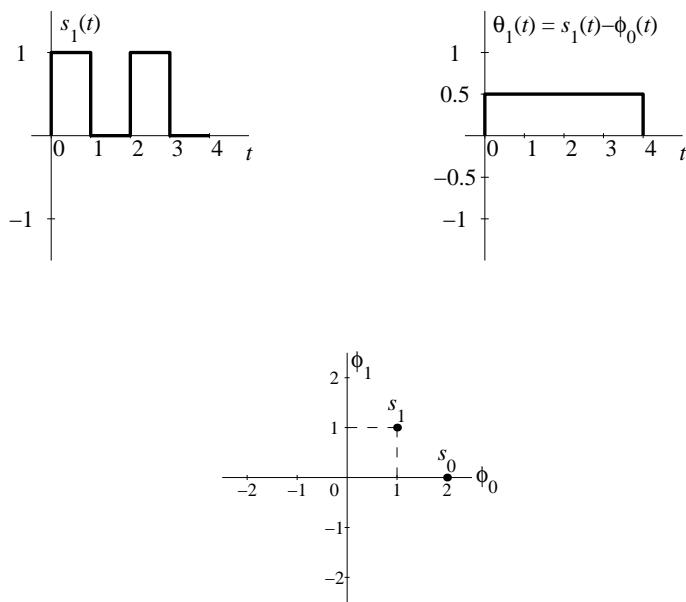


Figura 4.51. Segundo paso del procedimiento de ortogonalización de Gram-Schmidt.

Y así sucesivamente. En general, el procedimiento podemos expresarlo como

$$\theta_i(t) = s_i(t) - \sum_{j=0}^{i-1} s_{ij} \phi_j(t) \quad (4.116)$$

$$\phi_i(t) = \frac{\theta_i(t)}{\sqrt{\mathcal{E}\{\theta_i(t)\}}} \quad (4.117)$$

Hay que tener en cuenta que algunas de las señales $\theta_i(t)$ pueden ser idénticamente nulas. En ese caso no generan un nuevo elemento de la base del espacio vectorial.

Ejemplo 4.7 (Continuación)

Calculamos s_{20} y s_{21}

$$\begin{aligned} s_{20} &= \langle \mathbf{s}_2, \phi_0 \rangle = -0,5 + 0,5 - 0,5 + 0,5 = 0 \\ s_{21} &= \langle \mathbf{s}_2, \phi_1 \rangle = -0,5 - 0,5 - 0,5 - 0,5 = -2 \end{aligned}$$

y de ahí obtenemos $\theta_2(t)$, que resulta ser idénticamente nula. No generamos, por tanto, $\phi_2(t)$, y las coordenadas de $s_2(t)$ son 0 y -2. Procedemos de igual manera con $s_3(t)$, calculando s_{30} y s_{31}

$$\begin{aligned} s_{30} &= \langle \mathbf{s}_3, \phi_0 \rangle = 0 - 0,5 + 0 - 0,5 = -1 \\ s_{31} &= \langle \mathbf{s}_3, \phi_1 \rangle = 0 + 0,5 + 0 + 0,5 = 1 \end{aligned}$$

y obtenemos $\theta_3(t)$, que resulta ser también idénticamente nula. Como resultado final, tenemos la base formada por $\phi_0(t)$ y $\phi_1(t)$ que se representan en las Figuras 4.50 y 4.51 y la constelación de señales que muestra la Figura 4.52

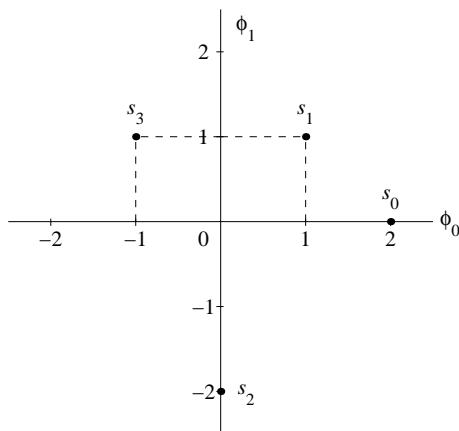


Figura 4.52. Constelación de señales resultante del procedimiento de ortogonalización de Gram-Schmidt.

Si ordenamos las señales $s_i(t)$ de forma distinta, el procedimiento de ortogonalización de Gram-Schmidt dará, en general, otra base distinta con coordenadas distintas para cada una de las señales. Sin embargo, ambos resultados son equivalentes y podemos pasar de uno a otro mediante un cambio de base.

Ejemplo 4.7 (Continuación)

Si ordenamos las señales como $\{s_2(t), s_0(t), s_1(t), s_3(t)\}$ y repetimos el procedimiento de ortogonalización, el resultado es el que muestra la Figura 4.53.

Observe como la nueva $\phi_0(t)$ es la antigua $\phi_1(t)$ cambiada de signo, y la nueva $\phi_1(t)$ coincide con la antigua $\phi_0(t)$. De acuerdo con esto, girando $\pi/2$ la constelación de señales de la Figura 4.52, obtenemos la de la Figura 4.53.

4.B. ESTADÍSTICO SUFICIENTE PARA LA DETECCIÓN

En el Apartado 4.3.1 hemos afirmado que la salida del correlacionador, el vector q , contiene toda la información sobre la señal recibida $r(t)$ que resulta relevante a la hora de tomar la decisión sobre el símbolo que fue transmitido. Nótese la magnitud de tal aseveración: de los infinitos valores que definen a la señal $r(t)$ (los valores de $r(t)$ en cada instante de tiempo) obtenemos un conjunto de N valores (el vector q), despreciando los infinitos valores restantes que nos harían falta para definir únicamente la señal $r(t)$.

En este apéndice vamos a demostrar la veracidad de esta afirmación, empleando para ello el *teorema de la irrelevancia* basado, a su vez, en el concepto de *estadístico suficiente*.

Supongamos que a partir de la señal recibida $r(t)$ obtenemos (mediante correlacionadores o mediante cualquier otro procedimiento) dos vectores q y q' y que queremos construir el receptor que, a partir de q y q' , hace mínima la probabilidad de error de símbolo según se definió en (4.3); esto es, el *receptor óptimo* a partir de q y q' . El teorema de la irrelevancia

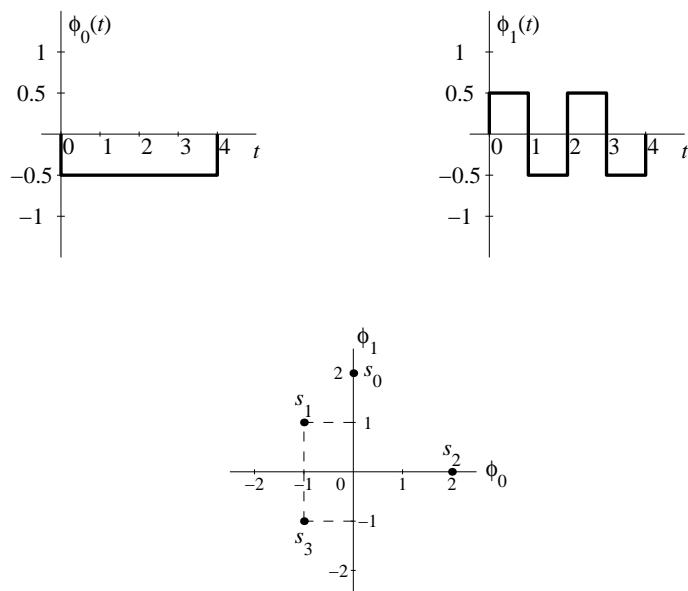


Figura 4.53. Resultado del procedimiento de ortogonalización de Gram-Schmidt cambiando el orden de la señales.

nos dice que para decidir qué símbolo a_i fue transmitido podemos despreciar q' si y sólo si se cumple que

$$f_{\mathbf{q}'|\mathbf{q}, \mathbf{A}}(\mathbf{q}'|\mathbf{q}, a_i) = f_{\mathbf{q}'|\mathbf{q}}(\mathbf{q}'|\mathbf{q}) \quad (4.118)$$

en cuyo caso decimos que el vector \mathbf{q} es un estadístico suficiente para la detección. Esta condición viene a decir que si ya conocemos el valor de \mathbf{q} , el conocimiento del valor de \mathbf{q}' no aporta ninguna información nueva con respecto al símbolo que fue transmitido.

El siguiente paso en la resolución de nuestro problema es suponer que el vector \mathbf{q} es la salida del correlacionador, y la clave de la demostración está en la forma de seleccionar q' para garantizar que \mathbf{q} es el estadístico suficiente no ya para la detección a partir de \mathbf{q} y \mathbf{q}' , sino a partir de $r(t)$.

Para ello reconstruimos, a partir de \mathbf{q} , una señal $r'(t)$ de la forma

$$r'(t) = \sum_{j=0}^{N-1} q_j \phi_j(t) \quad (4.119)$$

y, a partir de esta, definimos una señal $n'(t)$ como la diferencia entre la señal recibida y $r'(t)$

$$\begin{aligned}
 n'(t) &= r(t) - r'(t) \\
 &= (s(t) + n(t)) - \sum_{j=0}^{N-1} q_j \phi_j(t) \\
 &= \sum_{j=0}^{N-1} A_j \phi_j(t) + n(t) - \sum_{j=0}^{N-1} (A_j + n_j) \phi_j(t) \\
 &= n(t) - \sum_{j=0}^{N-1} n_j \phi_j(t)
 \end{aligned} \tag{4.120}$$

Construimos el vector \mathbf{q}' a partir de N' muestras de $n'(t)$ en instantes elegidos arbitrariamente

$$\mathbf{q}' = \begin{bmatrix} n'(t_0) \\ n'(t_1) \\ \vdots \\ n'(t_{N'-1}) \end{bmatrix} \tag{4.121}$$

Si logramos demostrar que \mathbf{q}' es irrelevante para la decisión sean cuales sean N' y los instantes $\{t_l, l = 0, \dots, N' - 1\}$ habremos demostrado que $n'(t)$ es irrelevante y que \mathbf{q} es un estadístico suficiente para la detección a partir de $r(t)$.

Los componentes de \mathbf{q}' poseen estadística gausiana por resultar de operaciones lineales sobre un proceso estocástico gausiano, $n(t)$, cuyos valores medios son

$$E\{n'(t_l)\} = E\left\{n(t_l) - \sum_{j=0}^{N-1} n_j \phi_j(t_l)\right\} = E\{n(t_l)\} - \sum_{j=0}^{N-1} E\{n_j\} \phi_j(t_l) = 0 - 0 = 0
 \tag{4.122}$$

ya que $n(t_l)$ y n_j tienen media cero.

La covarianza entre un elemento de $\mathbf{q}', n'(t_l)$ y un elemento de \mathbf{q}, q_k condicionado al

símbolo transmitido, \mathbf{A} , resulta ser

$$\begin{aligned}
 E\{n'(t_l)q_k\} &= E\left\{\left(n(t_l) - \sum_{j=0}^{N-1} n_j \phi_j(t_l)\right)(A_k + n_k)\right\} \\
 &= E\{n(t_l)A_k\} + E\{n(t_l)n_k\} \\
 &\quad - E\left\{\left(\sum_{j=0}^{N-1} n_j \phi_j(t_l)\right) A_k\right\} - E\left\{\left(\sum_{j=0}^{N-1} n_j \phi_j(t_l)\right) n_k\right\} \\
 &= A_k E\{n(t_l)\} + E\left\{n(t_l) \left(\int_0^T n(\tau) \phi_k(\tau) d\tau\right)\right\} \\
 &\quad - A_k \left(\sum_{j=0}^{N-1} E\{n_j\} \phi_j(t_l)\right) - \left(\sum_{j=0}^{N-1} E\{n_j n_k\} \phi_j(t_l)\right) \\
 &= 0 + \int_0^T E\{n(t_l)n(\tau)\} \phi_k(\tau) d\tau + 0 - \sum_{j=0}^{N-1} \frac{N_0}{2} \delta[j-k] \phi_j(t_l) \\
 &= \int_0^T \frac{N_0}{2} \delta(t_l - \tau) \phi_k(\tau) d\tau - \frac{N_0}{2} \phi_k(t_l) \\
 &= \frac{N_0}{2} \phi_k(t_l) - \frac{N_0}{2} \phi_k(t_l) = 0
 \end{aligned} \tag{4.123}$$

que resulta independiente del valor concreto de t_l (nótese que $\phi_j(t)$ es idénticamente nula fuera del intervalo $[0, T]$).

Al poseer tanto \mathbf{q} como \mathbf{q}' estadística gausiana y resultar incorrelacionadas cualquier componente de \mathbf{q} con cualquier componente de \mathbf{q}' como acabamos de demostrar, ambos vectores son estadísticamente independientes uno del otro y, en consecuencia, su función de densidad de probabilidad conjunta condicionada al símbolo transmitido puede escribirse como

$$f_{\mathbf{q}, \mathbf{q}' | \mathbf{A}}(\mathbf{q}, \mathbf{q}' | \mathbf{a}_i) = f_{\mathbf{q} | \mathbf{A}}(\mathbf{q} | \mathbf{a}_i) f_{\mathbf{q}' | \mathbf{A}}(\mathbf{q}' | \mathbf{a}_i) \tag{4.124}$$

Además, como puede deducirse de la definición de $n'(t)$, (4.120), \mathbf{q}' es independiente del símbolo transmitido, por lo que se cumple que $f_{\mathbf{q}' | \mathbf{A}}(\mathbf{q}' | \mathbf{a}_i) = f_{\mathbf{q}'}(\mathbf{q}')$, y (4.124) se reduce a

$$f_{\mathbf{q}, \mathbf{q}' | \mathbf{A}}(\mathbf{q}, \mathbf{q}' | \mathbf{a}_i) = f_{\mathbf{q} | \mathbf{A}}(\mathbf{q} | \mathbf{a}_i) f_{\mathbf{q}'}(\mathbf{q}') \tag{4.125}$$

A partir de este resultado resulta simple demostrar la irrelevancia de \mathbf{q}' sin más que tener en cuenta

$$f_{\mathbf{q}' | \mathbf{q}, \mathbf{A}}(\mathbf{q}' | \mathbf{q}, \mathbf{a}_i) = \frac{f_{\mathbf{q}, \mathbf{q}' | \mathbf{A}}(\mathbf{q}, \mathbf{q}' | \mathbf{a}_i)}{f_{\mathbf{q} | \mathbf{A}}(\mathbf{q} | \mathbf{a}_i)} = \frac{f_{\mathbf{q} | \mathbf{A}}(\mathbf{q} | \mathbf{a}_i) f_{\mathbf{q}'}(\mathbf{q}')}{f_{\mathbf{q} | \mathbf{A}}(\mathbf{q} | \mathbf{a}_i)} = f_{\mathbf{q}'}(\mathbf{q}') = f_{\mathbf{q}' | \mathbf{q}}(\mathbf{q}' | \mathbf{q}) \tag{4.126}$$

(la última igualdad se produce dada la independencia entre \mathbf{q} y \mathbf{q}') con lo que queda demostrado que \mathbf{q} , tal y como se definió en (4.7) y (4.8), es un estadístico suficiente para la detección.

CAPÍTULO 5

MODULACIONES DE AMPLITUD

Típicamente, las señales que se transmiten a través de los canales físicos se obtienen a partir de señales de voltaje o corriente, por lo que un mecanismo natural para enviar información consiste en alterar la amplitud de dichas señales de acuerdo con los símbolos a transmitir. Este procedimiento, conocido como *modulación de amplitud*, data de los tiempos del telégrafo y sigue siendo empleado en muchos sistemas de comunicaciones actuales. Las formas más básicas de modulación de amplitud se corresponden con nuestros dos primeros conjuntos de señales del Apartado 4.2: en el primer caso modificábamos la polaridad de los pulsos transmitidos; en el segundo, una de las señales era un pulso y la otra idénticamente nula, lo que es equivalente a multiplicar dicho pulso por cero.

Otra de las ideas clave presentadas en el capítulo anterior es la de transmisión indefinida de símbolos. La principal limitación que introdujimos allí fue la de que la duración de los pulsos empleados no excediese el intervalo de símbolo. No obstante, hay una buena razón para pensar que esta es una restricción poco deseable en muchas aplicaciones prácticas: los pulsos de duración finita ocupan un ancho de banda infinito, por lo que son poco recomendables en aplicaciones en las que se desea alcanzar un elevado régimen binario con un ancho de banda limitado. En este capítulo veremos cómo un diseño cuidadoso de los pulsos usados en transmisión y recepción, y el empleo de modulaciones de amplitud, permite alcanzar elevadas eficiencias.

Una extensión práctica imprescindible de las modulaciones en amplitud son las llamadas *modulaciones de amplitud en cuadratura*, que permiten, sin pérdida de eficiencia, transmitir la señal en una banda de frecuencias dada, paliando así los problemas de ciertos canales físicos, que se comportan mal a frecuencias muy bajas, o permitiendo la compartición del espectro.

5.1. PAM EN BANDA BASE

En este apartado nos ocuparemos de uno de los formatos de modulación más sencillos y sin embargo con mayor potencial, por cuanto, como veremos en el Capítulo 9, es susceptible de alcanzar la capacidad del canal gausiano establecida por Shannon. Los principios

básicos que dan lugar a esta modulación ya fueron formulados en el Apartado 4.5: se trata de transmitir una señal de la forma

$$s(t) = \sum_n A[n]g(t - nT) \quad (5.1)$$

siendo $A[n]$ una secuencia de símbolos reales y $g(t)$ un pulso que recibe el nombre de *pulso conformador* o, simplemente, *filtro transmisor* y que, sin pérdida de generalidad, supondremos normalizado en energía. Los símbolos $A[n]$, equiespaciados sobre la recta real, pertenecen a una constelación unidimensional, de la que en la Figura 5.1 se muestran algunos ejemplos. A menudo, la constelación de la Figura 5.1(a) recibe el nombre de *binaria antipodal*. Dado que la secuencia de información modula la amplitud de las versiones retardadas

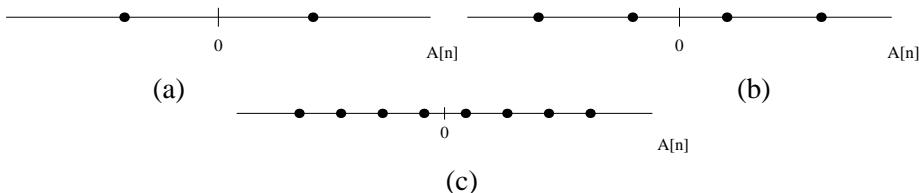


Figura 5.1. Constelaciones 2-PAM, 4-PAM y 8-PAM.

de $g(t)$, a menudo se usa el término *modulación de pulsos en amplitud* (“Pulse Amplitude Modulation”, PAM) o también *modulación por cambio de amplitud* (“Amplitude Shift Keying”, ASK). La señal $s(t)$ se dice que está en *banda base*, puesto que, como veremos en el Apartado 5.4, se suele trasladar con posterioridad a otras bandas de frecuencia. En la Figura 5.2 se representa de forma esquemática un modulador PAM en banda base.

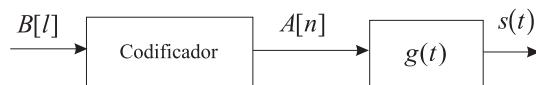


Figura 5.2. Arquitectura de un modulador PAM en banda base.

Observando (5.1) el lector podrá comprobar que coincide con (4.97) si identificamos $g(t)$ con $\phi_0(t)$. Sin embargo, una diferencia importante con el desarrollo del Apartado 4.5 estriba en que entonces limitábamos la duración de $\phi_0(t)$ a un máximo de un periodo de símbolo T , mientras que ahora consideraremos que $g(t)$ puede tener cualquier duración e incluso ser no causal¹ lo que, como veremos a lo largo del texto, dota de mucha mayor flexibilidad y eficiencia a este formato de modulación. En el siguiente ejemplo analizamos cuáles son las consecuencias de utilizar pulsos de duración mayor que T .

¹Como bien hemos visto en el Capítulo 2, la no causalidad implica utilizar información futura no disponible en el presente. No obstante, si la duración de la parte anticausal del filtro es finita, este se puede convertir en causal sin más que introducir un retardo que luego debe tenerse en cuenta en recepción.

Ejemplo 5.1

Supongamos que la secuencia de símbolos $\{A[n]\}$ es tal que una porción toma los siguientes valores $\dots, -1, -1, -1, +1, +1, +1, -1, +1, -1, +1, -1, \dots$, por lo que tenemos una modulación 2-PAM (ó 2-ASK). Consideremos dos tipos de pulsos conformadores:

$$a) g_a(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t}{T}\right).$$

$$b) g_b(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$$

En la Figura 5.3 se muestran los fragmentos correspondientes a la señal transmitida $s(t)$ para ambos casos, que hemos etiquetado como $s_a(t)$ y $s_b(t)$ respectivamente (el lector debe tener presente la existencia de símbolos anteriores y posteriores a los aquí indicados). La principal diferencia entre los dos tipos de pulsos se ve reflejada en la mayor complicación de la señal $s_b(t)$ en comparación con $s_a(t)$.

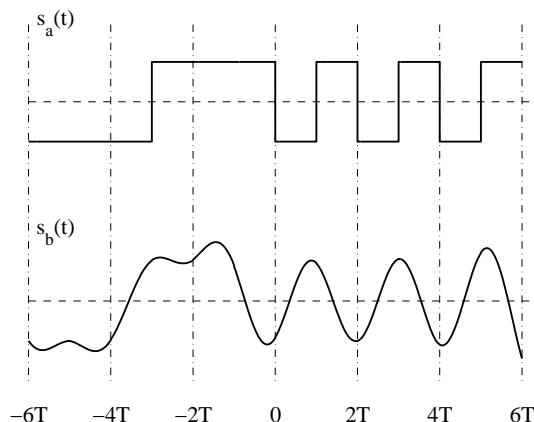


Figura 5.3. Fragmento de la señal PAM banda base para un pulso conformador rectangular (señal $s_a(t)$) y tipo sinc (señal $s_b(t)$).

En los dos casos la construcción de $s(t)$ se realiza a partir de (5.1): para cada n , se multiplica la n -ésima muestra de la secuencia $\{A[n]\}$ por la versión de $g(t)$ desplazada nT segundos hacia la derecha y se suman los resultados. Es importante observar que, mientras en el caso (a) no hay solape entre las diferentes versiones desplazadas y, por tanto, la suma se reduce a situar cada una en su lugar, en el caso (b) la suma final sobre n es crucial para obtener $s_b(t)$, que es la señal que realmente se transmite. En nuestro caso, como $g_b(t)$ es una sinc, esta tendrá duración infinita y, en consecuencia, es fácil ver que para obtener $s_b(t)$ en cualquier instante de tiempo debemos sumar tantas versiones desplazadas como símbolos hay en la secuencia $\{A[n]\}$. Este problema se resuelve en la práctica truncando la duración de $g(t)$ a unos cuantos períodos de símbolo; a su vez, el problema derivado de la no causalidad de $g(t)$ se solventa retrasando los pulsos $g(t)$ truncados de modo que resulten causales, lo que da lugar a un retardo equivalente en toda la transmisión.

Para entender mejor la aplicación de (5.1) en el caso (b), hemos truncado el pulso transmisor $g_b(t)$ a 6 períodos de símbolo y representamos cada una de las versiones desplazadas y multiplicadas por $A[n]$ en la Figura 5.4, junto con la suma final. Por supuesto, si truncásemos $g_b(t)$ a un número mayor de períodos de símbolo, tendríamos que el resultado se parecería más a la señal $s(t)$ que se obtendría con un $g_b(t)$ de duración infinita (véase Figura 5.3); a cambio, tendríamos que sumar más términos para determinar la señal $s(t)$ en un instante dado. A una solución de compromiso

semejante se debe llegar para implementar físicamente un transmisor de PAM si los pulsos son de duración ilimitada.

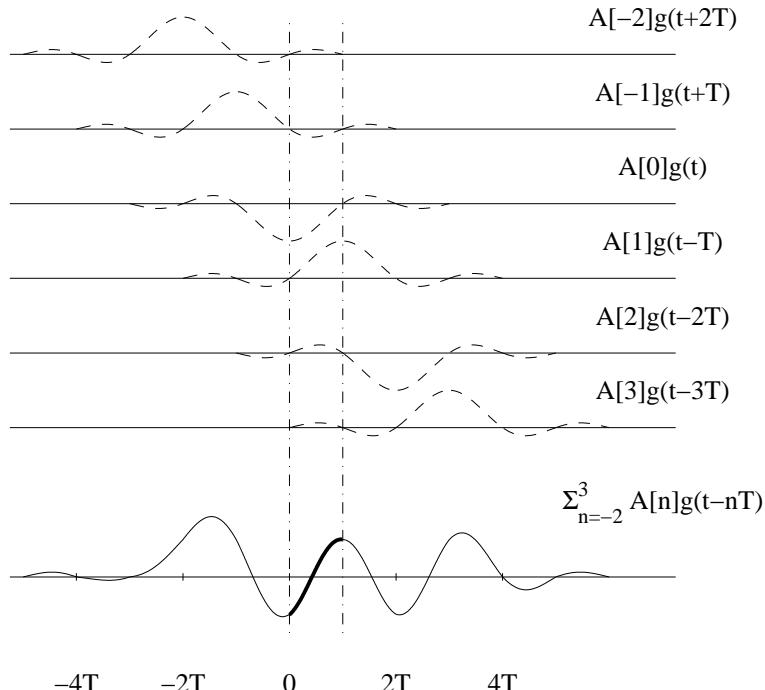


Figura 5.4. Versiones desplazadas y escaladas de $g(t)$ (línea discontinua) y suma de dichas versiones (línea continua) indicando en trazo grueso el tramo correspondiente a $t \in [0, T]$ en el que la suma coincide con $s(t)$.

5.1.1. Espectro de la señal PAM en banda base

Para determinar el espectro de la señal PAM en banda base, debemos tener presente que la señal transmitida no es estacionaria, sino cicloestacionaria². Recordemos que, en este caso, la densidad espectral de potencia se define como el promedio de la función de autocorrelación (teorema de Wiener-Kinchine, Ecuación (3.275)); en este caso, dicho promedio se efectúa sobre un periodo de la autocorrelación, esto es, T segundos. Este cálculo se efectúa en el Capítulo 3, Ecuación (3.297), y resulta directamente en

$$S_s(j\omega) = \frac{1}{T} S_A(e^{j\omega T}) |G(j\omega)|^2 \quad (5.2)$$

donde $S_A(e^{j\omega})$ es la densidad espectral de potencia de la secuencia de símbolos $A[n]$ y $G(j\omega)$ es la Transformada de Fourier de $g(t)$. La Ecuación (5.2) muestra claramente la posibilidad de conformar el espectro de la señal transmitida actuando sobre el filtro transmisor

²Siempre y cuando la secuencia de símbolos $\{A[n]\}$ sea estacionaria.

$g(t)$, que por esta razón recibe el nombre de *pulso conformador*, o sobre la autocorrelación de la secuencia de símbolos $A[n]$, introduciendo memoria, tal y como discutiremos en el Capítulo 10; véase asimismo el Problema P5.6.

Si la secuencia de símbolos transmitidos es blanca, entonces $S_A(e^{j\omega}) = E_s$, donde recordemos que E_s denotaba la energía de símbolo media, esto es, $E_s \doteq E\{|A[n]|^2\}$. En este caso, un vistazo a (5.2) nos permite comprender por qué el pulso transmisor también recibe el nombre de conformador, puesto que da forma al espectro de la señal $s(t)$.

Ejemplo 5.2

En la Figura 5.5 se representan los espectros de la señal transmitida del Ejemplo 5.1 en los casos (a) y (b), con líneas continua y discontinua respectivamente. Es interesante observar cómo los pulsos rectangulares empleados en el caso (a) conducen a un espectro tipo sinc al cuadrado, por lo que el ancho de banda ocupado es teóricamente infinito y en la práctica bastante grande, de modo que su utilidad en sistemas con limitación de ancho de banda es muy reducida. Este es el precio que pagamos por la sencillez del esquema de transmisión.

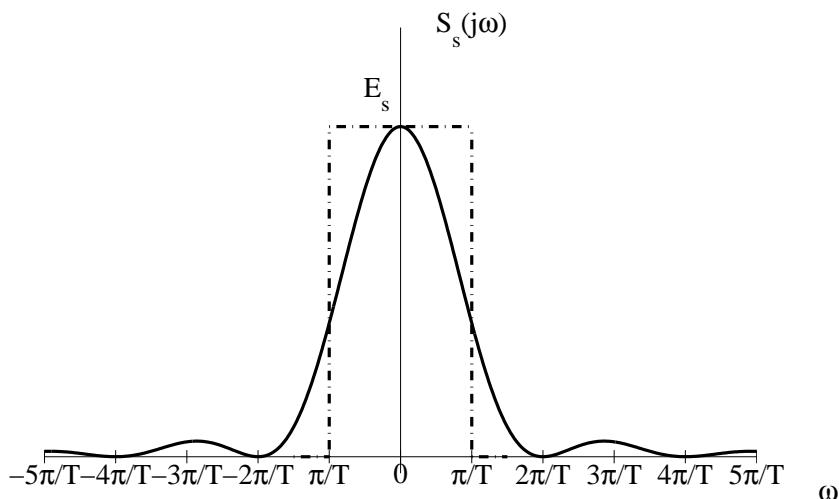


Figura 5.5. Espectro de la señal $s(t)$ para un pulso $g_a(t)$ rectangular (línea continua) y para un pulso $g_b(t)$ tipo sinc (línea discontinua).

Por otra parte, la complicación del transmisor en el caso (b) se convierte en un espectro con un ancho de banda mucho menor (y sin lóbulos secundarios). Más adelante veremos algunos inconvenientes de este tipo de pulsos y algunas mejoras. También es interesante razonar que, en caso de que truncemos el pulso $g(t)$, el espectro de la señal transmitida se alejará de la respuesta paso bajo ideal, tanto más cuanto menor sea la duración del pulso conformador.

A partir del espectro de potencia de $s(t)$ es inmediato calcular la potencia transmitida P como:

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_s(j\omega) d\omega \quad (5.3)$$

que, utilizando (5.2) y particularizando para el caso de una secuencia blanca, se convierte en

$$P = \frac{E_s}{2\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega \quad (5.4)$$

Obsérvese que, de acuerdo con el teorema de Rayleigh,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt = \mathcal{E}\{g(t)\} \quad (5.5)$$

donde $\mathcal{E}\{g(t)\}$ denota la energía del pulso conformador. Por tanto,

$$P = \frac{E_s \mathcal{E}\{g(t)\}}{T} \quad (5.6)$$

Para el caso de pulsos normalizados en energía, la ecuación previa se simplifica en

$$P = \frac{E_s}{T}. \quad (5.7)$$

Ejemplo 5.3

Para los pulsos del Ejemplo 5.1 es sencillo comprobar que $\mathcal{E}\{g(t)\} = 1$, por lo que se puede aplicar (5.7). Además, como la constelación empleada es $\{-1, +1\}$, $E_s = 1$, de modo que $P = 1/T$.

Una medida de prestaciones que sirve para comparar las diferentes modulaciones (no sólo las de amplitud) es la llamada *eficiencia espectral*, que se define como el cociente entre el régimen binario y el ancho de banda en Hz, por lo que sus unidades son bits/seg/Hz. Viendo que la PAM admite, en principio, infinitos niveles de amplitud y que el ancho de banda, que esencialmente depende del pulso conformador, puede fijarse a cualquier valor deseado, tal y como veremos más adelante en este capítulo, se deduce que la eficiencia espectral de la PAM puede hacerse en principio tan grande como se desee. No obstante, debe tenerse en cuenta que en un canal con ruido, el número de niveles “distinguibles” para el receptor no es ilimitado (debido a la limitación de potencia en el transmisor), lo que impone una cota a la eficiencia espectral. Esta cota está directamente relacionada con el *Límite de Shannon de la capacidad del canal*, que estudiaremos con detalle en el Capítulo 9.

5.1.2. Transmisión de PAM en banda base sobre canales gausianos

En este apartado consideramos la transmisión de señales PAM en banda base sobre canales gausianos con el objeto de proponer una primera arquitectura para el receptor. Nuestra intención es tratar de aprovechar los desarrollos del Capítulo 4 con los que obtuvimos una estructura de receptor basada en filtros adaptados. Sin embargo, aquí chocamos con la limitación *a priori* de que la duración de las funciones base (pulso conformador) es en general infinita, a diferencia de lo que ocurría en el Capítulo 4, donde consideramos duraciones iguales o inferiores a un periodo de símbolo. A pesar de esta notable diferencia, podemos

plantearnos bajo qué condiciones el demodulador basado en un banco de filtros adaptados (Figura 4.41(b)), que hallamos entonces, sigue siendo válido. En el caso de PAM en banda base podemos identificar el pulso transmisor con una única función base $\phi_0(t)$ en (4.98), ahora de duración ilimitada, de modo que el diagrama de bloques del demodulador se reduciría al que presentamos en la Figura 5.6. El hecho de que aparezca un solo filtro adaptado (y no un banco de filtros) es consecuencia de que con una función base es suficiente para describir la señal PAM en banda base transmitida. También es pertinente recordar que la realización mediante el filtro adaptado admite una implementación equivalente que emplea correlacionadores y un integrador (véase Figura 4.41(a)).

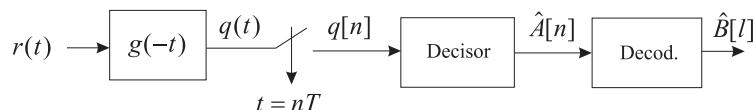


Figura 5.6. Arquitectura del receptor basado en el filtro adaptado al transmisor para PAM en banda base.

Vamos a analizar a continuación qué ocurre cuando transmitimos la señal PAM en banda base $s(t)$, definida según (5.1), a través de un canal que introduce ruido que, como en el Capítulo 4, denotaremos por $n(t)$, y en el receptor empleamos el esquema de la Figura 5.6. En este caso, la señal a la entrada del receptor es simplemente $r(t) = s(t) + n(t)$ y la señal a la salida del filtro adaptado es $q(t) = s(t) * g(-t) + n(t) * g(-t)$. Como en el Capítulo 4, supondremos que el ruido $n(t)$ es blanco, independiente de la señal transmitida y sigue una distribución gaussiana con densidad espectral de potencia $N_0/2$ W/Hz.

5.1.3. Canal discreto equivalente

En el Apartado 4.5 afrontábamos un problema en el que la recepción de cada símbolo era independiente de los demás; de forma análoga, podemos preguntarnos aquí por las condiciones que hacen que cada elemento $q[n_0]$ de la secuencia $q[n]$ sea estadísticamente independiente del resto de los elementos de dicha secuencia. Con este fin, es conveniente rescatar el concepto de canal discreto equivalente visto en el Apartado 4.3.3 y que, recordemos, permite reducir el problema de la transmisión y recepción a través de un canal continuo a un modelo más sencillo en el que sólo intervienen señales discretas. En primer lugar, observemos que la señal $q(t)$ a la salida del filtro adaptado del receptor toma la forma

$$\begin{aligned}
 q(t) &= \left(\sum_n A[n]g(t - nT) \right) * g(-t) + n(t) * g(-t) \\
 &= \sum_n A[n](g(t - nT) * g(-t)) + n(t) * g(-t) \\
 &= \sum_n A[n]p(t - nT) + z(t)
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

donde $p(t)$ es la respuesta combinada entre los pulsos transmisor y receptor

$$p(t) = g(t) * g(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) g(\tau - t) d\tau \quad (5.9)$$

que coincide en este caso la función de ambigüedad temporal ($r_g(t)$, Apartado 2.1.4) del pulso transmisor $g(t)$, y $z(t)$ es el ruido a la salida del filtro adaptado.

Muestreando $q(t)$ en los instantes $t = nT$ obtenemos la secuencia $q[n]$ (véase Figura 5.6)

$$q[n] \doteq q(t) \Big|_{t=nT} = \sum_k A[k]p((n-k)T) + z(nT) \quad (5.10)$$

lo que nos lleva a definir el comportamiento del canal discreto equivalente (Página 194) como

$$q[n] = \sum_k A[k]p[n-k] + z[n] = A[n] * p[n] + z[n] \quad (5.11)$$

siendo $p[n] \doteq p(nT)$ y $z[n] \doteq z(nT)$.

Expresado en palabras, (5.11) significa que la secuencia de observaciones a la salida del muestreador del receptor puede verse como el resultado de haber pasado la secuencia de símbolos transmitidos a través de un sistema lineal e invariante de respuesta al impulso $p[n]$, al que se agrega una secuencia de ruido $z[n]$, tal y como se representa en la Figura 5.7.

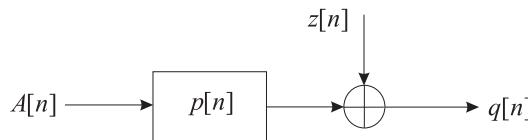


Figura 5.7. Canal discreto equivalente en banda base.

Puesto que la secuencia de ruido $z[n]$ se obtiene tras pasar $n(t)$ a través de un filtro lineal e invariante en el tiempo $g(-t)$ y muestrear el resultado, es inmediato comprobar que dicha secuencia se corresponde con la realización de un proceso estacionario con distribución gaussiana y media cero. La presencia del filtro receptor tendrá el efecto de colorear el ruido a su salida con la consecuencia de que, en general, el proceso $z[n]$ no será blanco. Más adelante, examinaremos esta cuestión; antes, reescribamos (5.11) como³

$$q[n] = A[n]p[0] + \sum_{k \neq n} A[k]p[n-k] + z[n] \quad (5.12)$$

³A lo largo del presente capítulo, supondremos, en aras de una mayor claridad, que $|p[0]| > |p[n]|$, para todo $n \neq 0$. Esta suposición se abandonará en el Capítulo 6 lo que, veremos, puede comportar notables ventajas. Véase también el Problema P5.5.

para comprobar que, en general, si pretendiésemos usar un decisor símbolo a símbolo⁴ sobre la secuencia de observaciones $q[n]$, los errores no sólo vendrían causados por el ruido, sino también por la interferencia provocada por los símbolos anteriores y posteriores al que intentamos decidir, representada por el segundo sumando de (5.12). Este término, $\sum_{k \neq n} A[k]p[n - k]$, se denomina *interferencia intersimbólica ó ISI* (“*InterSymbol Interference*”).

Tal y como manifestábamos al comienzo de este apartado, estamos interesados en determinar qué condiciones deben verificarse para que las decisiones sobre cada muestra de la secuencia $q[n]$ se puedan tomar de forma independiente o, lo que es equivalente, para que el esquema de la Figura 5.6 implemente el receptor ML (Apartado 4.4.1). En adelante supondremos que la secuencia de símbolos $A[n]$ tiene media nula⁵; de aquí se deduce que asimismo $q[n]$ tendrá media nula (recordemos que el ruido también verifica esta propiedad). Una condición necesaria para que las muestras de la secuencia $q[n]$ sean independientes, es que estén incorrelacionadas. A continuación, calcularemos la función de autocorrelación de $q[n]$, $R_q[n]$, y analizaremos cuándo se anula para todos los instantes diferentes del origen, esto es,

$$R_q[n] = E\{q[n + n]q[k]\} = K\delta[n] \quad (5.13)$$

para algún número real K distinto de 0. En nuestro caso es conveniente emplear la expresión (5.11) para calcular la autocorrelación

$$\begin{aligned} R_q[n] &= E \left\{ \left(\sum_l A[l]p[n + k - l] + z[n + k] \right) \cdot \left(\sum_m A[m]p[k - m] + z[k] \right) \right\} \\ &= \sum_l \sum_m E\{A[l]A[m]\}p[n + k - l]p[k - m] + E\{z[n + k]z[k]\} \end{aligned} \quad (5.14)$$

donde hemos utilizado el hecho de que los símbolos transmitidos son independientes del ruido y que este es de media nula. Cuando la secuencia de símbolos transmitidos es blanca, esto es, $E\{A[l]A[m]\} = E_s\delta[m - l]$, podemos simplificar más la expresión (5.14) para escribir

$$\begin{aligned} R_q[n] &= E_s \sum_l p[n + k - l]p[k - l] + R_z[n] \\ &= E_s \sum_l p[n + l]p[l] + R_z[n] \\ &= E_s(p[n] * p[-n]) + R_z[n] \end{aligned} \quad (5.15)$$

donde $R_z[n]$ es la función de autocorrelación de $z[n]$. Como vemos, para que $q[n]$ fuese blanca, sería suficiente con que $z[n]$ también lo fuese y que $p[n] * p[-n]$ se anulase para

⁴Un decisor símbolo a símbolo toma la decisión sobre el símbolo transmitido en un instante n_0 a partir de sólo una observación $q[n_1]$, donde, en general, $n_1 \geq n_0$.

⁵En el Apartado 4.4.3 vimos que esta era una condición de diseño para que una constelación fuese eficiente en potencia.

todo $n \neq 0$ ⁶. Obsérvese que esto se cumple si simultáneamente:

$$p[n] = K_1\delta[n]; \quad R_z[n] = K_2\delta[n] \quad (5.16)$$

para números reales $K_1 \neq 0$ y $K_2 > 0$.

Dado que el ruido sigue una distribución conjuntamente gausiana, lo mismo ocurrirá con las muestras de $q[n]$. Por tanto, si las condiciones (5.16) se satisfacen, las muestras de $q[n]$, estando incorrelacionadas, también serán estadísticamente independientes.

Examinemos el significado de las condiciones (5.16):

1. $p[n] = K_1\delta[n]$. El lector puede comprobar que esta condición conduce a forzar a que la interferencia intersimbólica (ISI) definida más arriba sea nula. Planteada sobre el pulso equivalente en tiempo continuo $p(t)$, la condición de ISI nula es $p(nT) = K_1\delta[n]$ o, dicho de otra forma, el muestreo a periodo de símbolo del pulso ($g(t) * g(-t)$) es cero excepto en el origen. En el apartado siguiente trataremos con más profundidad esta condición.
2. $R_z[n] = K_2\delta[n]$. Esta condición equivale a decir que el ruido $z[n]$ debe ser blanco, o que las muestras de la secuencia de ruido (gausiano) son estadísticamente independientes entre sí. También posponemos un análisis más detallado de esta condición para el Apartado 5.2.2.

Intuitivamente, la primera de las dos condiciones garantiza que en el instante n_0 -ésimo en la secuencia $q[n_0]$ sólo se tendrá influencia del símbolo $A[n_0]$; la segunda condición implica que no hay información acerca de la n_0 -ésima muestra de ruido en las muestras restantes. Todo ello hace que en $q[n_0]$ esté contenida toda la información disponible para tomar la decisión sobre el n_0 -ésimo símbolo transmitido. De hecho, es posible demostrar que $q[n_0]$ es un estadístico suficiente para el problema de decisión en el instante n_0 -ésimo, en el sentido de que disponer de aparentemente más información (por ejemplo, tomando más muestras por periodo de símbolo) no reduce la probabilidad de error⁷.

Veamos cómo debe ser el decisor de la Figura 5.6 para el caso en que se cumplen las condiciones (5.16). El decisor óptimo cuando la interferencia intersimbólica no es nula se estudia en el Capítulo 6. Si la secuencia recibida es de la forma $q[n] = K_1A[n] + z[n]$, con $z[n]$ muestras de ruido gausiano blanco con varianza K_2 , y si el símbolo transmitido en el instante n_0 es $a_0[n_0]$, podremos escribir la fdp de $q[n_0]$ como

$$f_{q|A}(q[n_0]|a_0[n_0]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi K_2}} \exp\left(-\frac{|q[n_0] - K_1a_0[n_0]|^2}{2K_2}\right) \quad (5.17)$$

⁶Esta última condición equivale en frecuencia a que $|P(e^{j\omega})|^2$ sea constante, lo que sólo ocurre si $p[n]$ es un sistema paso todo. Si se impone la condición de que $p[n]$ sea de duración finita, el único sistema paso todo es $p[n] = K_1\delta[n]$, con K_1 un número real no nulo.

⁷Sin embargo, cuando se tienen en cuenta otros efectos, como errores de sincronismo o portadora, muestrear con una tasa superior a la de símbolo suele ser muy ventajoso, tal y como se pondrá de manifiesto en el Capítulo 11. El *sobremuestreo* también puede ser útil de cara a la reducción de la complejidad del receptor, véase Problema P5.8.

por lo que el decisor de máxima verosimilitud elegirá aquel $\hat{A}[n_0]$ tal que la distancia cuadrática $|q[n_0] - K_1 \hat{A}[n_0]|^2$ o, equivalentemente, $|q[n_0]/K_1 - \hat{A}[n_0]|^2$, sea mínima. Como los símbolos de la constelación se sitúan sobre la recta real, Figura 5.1, dicha regla es equivalente a situar los umbrales de decisión justo en medio de cada par de símbolos adyacentes. Obsérvese que la implementación del decisor implica conocer K_1 , esto es, la respuesta del canal discreto equivalente en el origen, $p[0] = K_1$. En la práctica, $p[0]$ se puede estimar transmitiendo símbolos conocidos por el receptor, o midiendo la potencia de la señal recibida, que es proporcional a $p^2[0]$. La única excepción en que no es necesario averiguar K_1 , sino sólo su signo, es la constelación binaria antipodal, para la que el umbral se sitúa en el cero.

5.2. EL CRITERIO DE NYQUIST

En el apartado precedente hemos comprobado que la ausencia de interferencia entre símbolos garantiza que en un canal gausiano las muestras recibidas a la salida del canal discreto equivalente toman la forma $q[n] = p[0]A[n] + z[n]$, de modo que, dejando de lado el escalado por $p[0]$ (que se puede compensar de diferentes maneras en el receptor), la única fuente de error presente vendrá dada por el ruido $z[n]$. Además, hemos concluido que una ISI nula, junto con el carácter blanco de $z[n]$, constituyen una condición que, de satisfacerse, asegura que la toma de decisiones símbolo a símbolo es óptima desde el punto de vista de minimizar la probabilidad de error.

De acuerdo con lo anterior, parece razonable plantearse el diseño de $p(t)$ o, equivalentemente, $g(t)$, para que no exista interferencia entre símbolos. Este criterio de diseño se conoce como *criterio de Nyquist para la ausencia de ISI* que, olvidándose por completo de la componente de ruido $z[n]$, impone la condición de que la ISI sea nula. También se conoce con el nombre de *forzador de ceros* (Capítulo 6), y no hay que confundirlo con el criterio de Nyquist para el muestreo de señales en tiempo continuo visto en el Apartado 2.4⁸.

Como hemos visto, para que no exista ISI, la respuesta al impulso del canal discreto equivalente, $p[n]$, debe ser la función delta, $\delta[n]$, cosa que se cumple siempre que

$$p[n] = p(nT) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad (5.18)$$

Obsérvese que en (5.18) estamos además imponiendo que $p[0] = 1$. Aunque en sentido estricto esto último no es necesario para la ausencia de ISI, su cumplimiento hace que, si no existe ruido, las observaciones $q[n]$ coincidan exactamente con los símbolos enviados $A[n]$, como discutimos con anterioridad. En cualquier caso, aquí no profundizaremos en los métodos que permiten al receptor conocer o estimar el valor del factor $p[0]$.

⁸Harry Nyquist, uno de los pioneros de la Ingeniería de Telecomunicación, publicó en 1928 ambos resultados en el contexto de la transmisión de señales telegráficas (digitales, al fin y al cabo). El teorema del muestreo fue presentado de una forma más rigurosa y precisa por Shannon en su famoso artículo de 1948 (¡20 años más tarde!)[53].

Para llegar a una expresión alternativa es interesante trabajar con la señal en tiempo continuo que se obtiene al muestrear $p(t)$ a periodo de símbolo T . Fijémonos en que esta señal no es más que un tren de impulsos, por lo que (5.18) es equivalente a

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} p(nT)\delta(t - nT) = \delta(t) \quad (5.19)$$

que, a su vez, puede reescribirse como

$$p(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \delta(t) \quad (5.20)$$

Esta ecuación se puede reformular en el dominio de la frecuencia sin más que tener en cuenta que el producto de $p(t)$ por un tren de impulsos se transforma en una convolución de su respuesta en frecuencia, $P(j\omega)$, con la Transformada de Fourier de un tren de impulsos, que a su vez es otro tren de impulsos. La transformada de la $\delta(t)$ situada a la derecha del signo de igualdad es, simplemente, 1. Por tanto, (5.20) es equivalente a

$$\frac{1}{2\pi} P(j\omega) * \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right) = 1 \quad (5.21)$$

e, intercambiando la suma y la convolución en (5.21), y simplificando términos, tenemos

$$\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} P\left(j\omega - j\frac{2\pi k}{T}\right) = 1 \quad (5.22)$$

que es la expresión del criterio de Nyquist en el dominio de la frecuencia.

El criterio de Nyquist encuentra su aplicación más inmediata para un tipo particular de pulsos: los limitados en banda (véanse Ejemplos 5.1 y 5.2). En este caso, la función de transferencia de la respuesta combinada transmisor-canal-receptor, $P(j\omega)$, se anula para todo ω tal que $|\omega| > W$. Si estamos en una situación en la que $W < \pi/T$, es imposible que se cumpla (5.22), porque al superponer las versiones desplazadas en frecuencia de $P(j\omega)$ tal y como nos obliga el criterio de Nyquist en frecuencia, obtenemos un espectro como el que muestra la Figura 5.8. De ello podemos deducir que si el ancho de banda del canal está limitado a W rad/seg, entonces existe una velocidad máxima a la que se puede transmitir por dicho canal sin que exista ISI; dicha velocidad, en baudios (esto es, símbolos/seg), es $1/T = W/\pi$. Esta es la razón por la que decíamos en la Página 231 que ante dos constelaciones con distinto número de símbolos no siempre cabe elegir la de menor número de puntos, aunque su curva de *BER* sea mejor, tal y como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.4

Pretendemos establecer una comunicación a un régimen binario de 9,600 bits por segundo por un canal paso bajo con frecuencia de corte $2\pi \cdot 1,200$ radianes por segundo.

La tasa máxima de utilización del canal sin que exista ISI es $\frac{2\pi \cdot 1,200}{\pi} = 2,400$ baudios. Para conseguir la velocidad binaria deseada el codificador debe de asignar $\frac{9,600}{2,400} = 4$ dígitos binarios por cada símbolo de la constelación, por lo que el tamaño mínimo de la constelación es de $2^4 = 16$ símbolos.

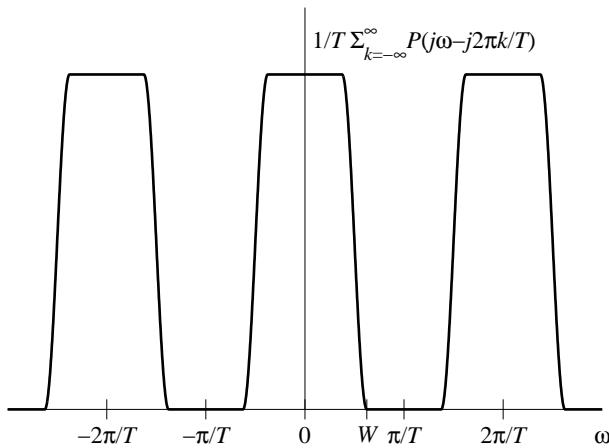


Figura 5.8. Claramente $\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(j\omega - j\frac{2\pi k}{T}) \neq 1$ en el caso en que $W < \pi/T$.

5.2.1. Pulsos en coseno alzado

Si utilizamos el canal paso bajo a su frecuencia máxima, W/π baudios, para que no exista ISI debemos garantizar que se cumpla

$$P(j\omega) = T \Pi\left(\frac{\omega}{2W}\right) = \begin{cases} T & |\omega| < W \\ 0 & |\omega| > W \end{cases} \quad (5.23)$$

y, en este caso,

$$p(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} \quad (5.24)$$

El lector puede comprobar como ejercicio el cumplimiento del criterio de Nyquist en el dominio del tiempo (5.18) sin más que calcular $p(nT)$ en (5.24), observando que la respuesta al impulso de $p(t)$ cruza por cero en los instantes múltiplos del periodo de símbolo, excepto en el origen, donde vale 1.

Si utilizamos el canal paso bajo por debajo de su frecuencia máxima, W/π baudios, tenemos más libertad para escoger la forma de onda $p(t)$. Una de estas formas de onda que cumplen el criterio de Nyquist de interferencia entre símbolos son los *pulsos en coseno alzado*, definidos como

$$p(t) = \left(\frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} \right) \left(\frac{\cos(\alpha\pi t/T)}{1 - (2\alpha t/T)^2} \right) \quad (5.25)$$

cuya Transformada de Fourier es

$$P(j\omega) = \begin{cases} T & 0 \leq |\omega| \leq (1 - \alpha)\pi/T \\ \frac{T}{2} \left[1 - \text{sen} \left(\frac{T}{2\alpha} \left(|\omega| - \frac{\pi}{T} \right) \right) \right] & (1 - \alpha)\pi/T \leq |\omega| \leq (1 + \alpha)\pi/T \\ 0 & |\omega| > (1 + \alpha)\pi/T \end{cases} \quad (5.26)$$

El factor α puede tomar valores entre 0 y 1 y se denomina *factor de caída* o “roll-off”. Para $\alpha = 0$, el pulso en coseno alzado se transforma en (5.24). A medida que aumentamos α , la amplitud de las colas del pulso en el dominio temporal se hace más pequeña conforme nos alejamos del origen de tiempos, tal y como puede verse en la Figura 5.9, y el ancho de banda crece, según puede comprobarse en la Figura 5.10. De hecho, el ancho de banda

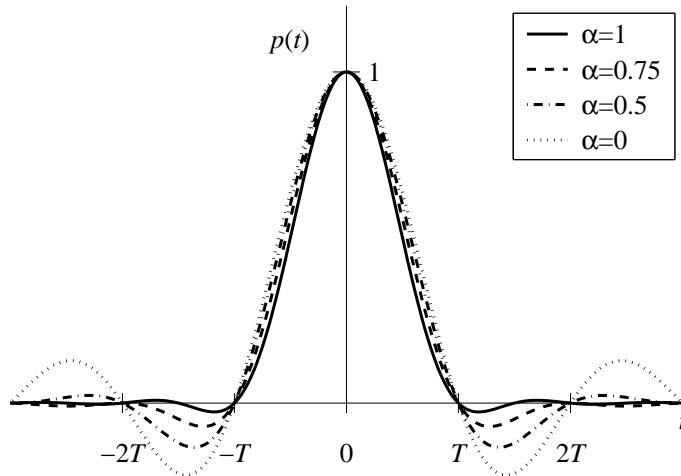


Figura 5.9. Pulso en coseno alzado para distintos valores de α .

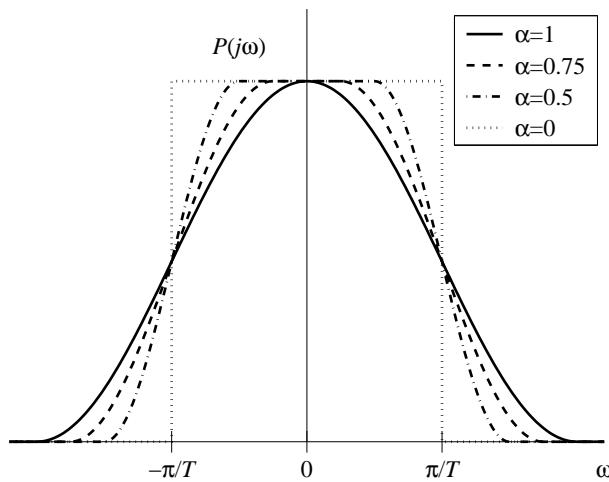


Figura 5.10. Transformada de Fourier del pulso en coseno alzado para distintos valores de α .

ocupado por los pulsos es $(1 + \alpha)\pi/T$ rad/seg (véase (5.26)), por lo que el ancho de banda se incrementa en $\alpha\pi/T$ con respecto al mínimo necesario para que no exista ISI (esto es, π/T). Dicho de otro modo, el ancho de banda aumenta en un factor de α con respecto al

mínimo dictado por el criterio de Nyquist. Por esta razón, el factor α expresado en tanto por ciento se denomina *exceso de ancho de banda*. Por ejemplo, para $\alpha = 0,25$, el exceso de ancho de banda es de un 25 %. En el Apartado 5.3.1 descubriremos algunas de las razones que aconsejan un aumento del ancho de banda.

Hasta ahora hemos visto que las condiciones impuestas por el criterio de Nyquist afectan al pulso $p(t)$ que combina la respuesta de los filtros transmisor y receptor, esto es, $p(t) = g(t) * g(-t)$. En realidad, nuestro interés está en conocer qué filtro deberíamos usar en transmisión para que se cumpla el criterio de Nyquist. Pero esto resulta sumamente sencillo si recurrimos al dominio de la frecuencia, ya que $P(j\omega) = G(j\omega) \cdot G^*(j\omega) = |G(j\omega)|^2$. Por tanto, el procedimiento para obtener $g(t)$ sería el siguiente: 1) diseñar un pulso $p(t)$ que cumpla el criterio de Nyquist para periodo T y calcular su respuesta en frecuencia $P(j\omega)$, y 2) hallar su raíz cuadrada para tener $G(j\omega) = \sqrt{P(j\omega)}$. La respuesta al impulso deseada sería simplemente la Transformada de Fourier inversa de $G(j\omega)$. Obsérvese que para que $g(t)$ tenga una respuesta real, cosa absolutamente imprescindible en PAM en banda base, $G(j\omega)$ debe ser hermítica.

En el caso de pulsos en coseno alzado, el cálculo de la raíz cuadrada en frecuencia se ve simplificado por el hecho de que $P(j\omega)$ es una función real no negativa. Procediendo como hemos indicado en el párrafo anterior obtenemos la respuesta al impulso del pulso transmisor $g(t)$

$$g(t) = \frac{4\alpha}{\pi\sqrt{T}} \frac{\cos\left((1+\alpha)\frac{\pi t}{T}\right) + T \frac{\sin\left((1-\alpha)\frac{\pi t}{T}\right)}{4\alpha t}}{1 - \left(\frac{4\alpha t}{T}\right)^2} \quad (5.27)$$

que es una función real y par por ser $G(j\omega)$ real y par. Teniendo en cuenta la forma en que ha sido generado, el pulso $g(t)$ definido en (5.27) recibe el nombre de *pulso en raíz de coseno alzado*. Finalmente, puede comprobarse que este pulso no cumple el criterio de Nyquist; la demostración se deja como ejercicio.

5.2.2. Otras consecuencias del criterio de Nyquist

Las importantes implicaciones del criterio de Nyquist no se reducen a la eliminación de la ISI: a continuación vamos a ver que también está relacionado con las propiedades de la autocorrelación del ruido a la entrada del decisor, $z[n]$. Para ello, calculemos la densidad espectral de potencia de dicho ruido, $S_z(e^{j\omega})$, en el caso particular en que el receptor es el filtro adaptado al transmisor, esto es, $g(-t)$. Primero, determinaremos la densidad espectral de potencia del ruido $z(t)$ a la salida del filtro adaptado $g(-t)$, que denotamos por $S_z(j\omega)$:

$$S_z(j\omega) = \frac{N_0}{2} |G^*(j\omega)|^2 = \frac{N_0}{2} |G(j\omega)|^2 \quad (5.28)$$

de donde es inmediato comprobar que aunque $n(t)$ es blanco, el ruido $z(t)$ aparece coloreado por el filtro adaptado del receptor.

Empleando ahora la expresión que relaciona el espectro de potencia de un proceso continuo con el de sus muestras (Ecuación (3.298)), tenemos

$$S_z(e^{j\omega}) = \frac{N_0}{2T} \sum_k \left| G\left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi k}{T}\right) \right|^2 \quad (5.29)$$

$$= \frac{N_0}{2T} \sum_k P\left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi k}{T}\right) \quad (5.30)$$

Aunque pueda resultar un tanto sorprendente a primera vista, el ruido a la entrada del decisor símbolo a símbolo puede ser blanco (aun cuando a la entrada del muestreador no lo es): basta con comprobar en (5.30) que su espectro de potencia será constante si y sólo si se cumple

$$\frac{1}{T} \sum_k P\left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi k}{T}\right) = \text{constante} \quad (5.31)$$

que, salvo por una constante, es equivalente a (5.22), ya que el hecho de escalar el eje de frecuencias no afecta a la condición. Consecuentemente, la satisfacción del criterio de Nyquist, aplicado en esta ocasión al cuadrado (en frecuencia) de la respuesta del filtro receptor, garantiza que el ruido $z[n]$ es blanco.

Resumiendo, si el filtro receptor está adaptado al pulso empleado en transmisión y el pulso $p(t) = g(t) * g(-t)$ satisface el criterio de Nyquist para periodo de símbolo T , podemos afirmar que dicho filtro, seguido de un muestreador con periodo T y un decisor símbolo a símbolo es óptimo desde el punto de vista de la minimización de la probabilidad de error.

Una de las propiedades interesantes del filtro adaptado es la de maximizar la relación señal a ruido a su salida. En el caso que acabamos de discutir, a la salida del muestreador a periodo de símbolo, la señal recibida es simplemente $q[n] = A[n] + z[n]$, de modo que dicha relación toma la forma

$$\left(\frac{S}{N}\right)_q = \frac{E\{A^2[k]\}}{\sigma_z^2} = \frac{E_s}{\sigma_z^2} \quad (5.32)$$

siendo σ_z^2 la varianza del ruido $z[n]$, que se puede calcular integrando su densidad espectral de potencia como

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_z(e^{j\omega}) d\omega \quad (5.33)$$

que, para nuestro caso particular en que se cumple (5.31), se traduce en

$$\sigma_z^2 = \frac{N_0}{2} \quad (5.34)$$

5.2.3. Probabilidades de error

El cálculo de las probabilidades de error de símbolo y de bit para el caso de ruido blanco con densidad espectral de potencia $N_0/2$ W/Hz es sencillo a partir de los resultados del Apartado 4.4.2 y del concepto de canal discreto equivalente. Por ejemplo, para el caso 2-PAM, podemos aplicar directamente dichos resultados sin más que tener en cuenta que si transmitimos un símbolo de amplitud $\sqrt{E_s}$, la fdp de la señal recibida será gaussiana de media $\sqrt{E_s}$ y varianza $\sigma_z^2 = N_0/2$, por lo que la probabilidad de error de símbolo en (4.93) es

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right) \quad (5.35)$$

que coincide con la *BER*. Para el caso cuaternario (4-PAM) con codificación Gray (Figura 4.43) podemos utilizar (4.102), adaptada a este caso, de modo que resulta posible escribir

$$BER = \frac{3}{4}Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{5N_0}}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\sqrt{\frac{18E_s}{5N_0}}\right) - \frac{1}{4}Q\left(\sqrt{\frac{10E_s}{N_0}}\right) \quad (5.36)$$

Esta expresión puede ponerse en función de la energía por bit, sin más que tener en cuenta que para este caso $E_b = E_s/2$.

Para constelaciones con un número mayor de símbolos suele recurrirse a cotas como la de la unión (4.88) o aproximaciones basadas en el número de vecinos más próximos, como (4.91), despreciando los “efectos de bordes”, esto es, el hecho de que excepto para los dos símbolos extremos, $\kappa = 2$.

5.3. TRANSMISIÓN DE PAM SOBRE CANALES LINEALES

Aunque la adición de ruido gausiano sigue siendo el mayor obstáculo para el establecimiento de una comunicación fiable, el canal aditivo gausiano es un modelo demasiado simplista como para tener verdadera utilidad práctica. Decíamos en el Capítulo 4 que el canal representa el medio físico de transmisión y que, frecuentemente, este canal se puede modelar mediante un sistema invariante en el tiempo que introduce distorsiones lineales. Además, el ruido aditivo gausiano seguirá estando presente, obteniendo un modelo como el que se muestra en la Figura 5.11. En lo sucesivo, nos referiremos a este tipo de canal como *canal lineal gausiano*, sobreentendiéndose la invarianza temporal y el carácter aditivo del ruido.

En este caso, podemos escribir la señal a la entrada al receptor como

$$r(t) = s(t) * h(t) + n(t) \quad (5.37)$$

donde $s(t)$ es la señal transmitida según (5.1), $h(t)$ es la respuesta al impulso del canal y $n(t)$, como en el apartado anterior, es ruido blanco y gausiano con densidad espectral de potencia $N_0/2$. Si $h(t) = \delta(t)$ tenemos el canal aditivo gausiano considerado en el apartado anterior y que a partir de aquí denominaremos simplemente *canal gausiano*.

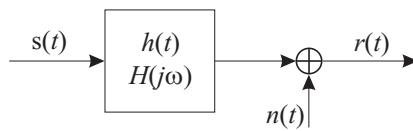


Figura 5.11. Canal lineal gausiano.

Para determinar el efecto que supone la introducción de distorsiones lineales en el canal podemos plantearnos qué ocurriría si continuásemos empleando el mismo demodulador que en el apartado anterior, reflejado en la Figura 5.6. En primer lugar, dado que el ruido sólo se ve afectado por el filtro receptor, si la respuesta en magnitud al cuadrado de este satisficiera el criterio de Nyquist, seguiríamos teniendo ruido blanco a la salida del muestreador del receptor (véase Apartado 5.2.2). Sin embargo, como razonaremos a continuación, en general, va a existir interferencia entre símbolos. Ahora podemos seguir reduciendo nuestro modelo de comunicaciones al canal discreto equivalente de la Figura 5.7, donde

$$p[n] \doteq p(nT) = (g(t) * h(t) * g(-t)) \Big|_{t=nT} \quad (5.38)$$

Sustituyendo esta nueva definición de $p[n]$ en (5.12) obtenemos una expresión de la secuencia recibida en términos de la ISI y el ruido discreto. Tal y como hemos discutido en el apartado precedente, la condición para que no exista ISI es (5.18), que encuentra su equivalente en el dominio de la frecuencia en (5.22). Por consiguiente, para que ahora no existiese ISI, la respuesta combinada $P(j\omega) = G(j\omega)H(j\omega)G^*(j\omega)$ del pulso transmisor, el canal y el filtro receptor debería cumplir (5.22). Esto implica que no es suficiente con que la respuesta combinada transmisor-receptor que, recordemos, es $|G(j\omega)|^2$, verifique la condición de Nyquist, sino que debemos prestar atención además a la respuesta del canal.

Ejemplo 5.5

Consideremos un canal con la forma $h(t) = \delta(t) + \beta\delta(t - \tau_1)$. Aunque muy sencillo, este canal modela el efecto conocido como *propagación multirayecto*, en el que la señal transmitida que alcanza el receptor llega por varios caminos diferentes, que experimentan atenuaciones y retardos distintos. En la forma dada, la señal que llega a través del llamado *camino directo* no sufre atenuación ni retardo alguno y es modelada con $\delta(t)$; la que se propaga a través del *camino secundario* se ve escalada en amplitud por un factor real β y experimenta un retardo τ_1 que, por simplicidad, supondremos en primer lugar que es exactamente de un periodo de símbolo, esto es, $\tau_1 = T$. En realidad, como la propagación de señales nunca es instantánea, el propio trayecto directo también suele estar afectado por un retardo de propagación, además de verse atenuado. Sin embargo, como estos efectos sobre la componente directa suelen ser corregidos en el receptor, podemos considerar β y τ_1 como respectivamente la ganancia y el retardo relativos a dicha componente. Conviene señalar que el considerado aquí es el más sencillo de los posibles canales con propagación multirayecto, ya que, en general, existirán otros caminos de propagación además del directo y el secundario.

La respuesta en frecuencia del canal es $H(j\omega) = 1 + \beta e^{-j\omega\tau_1} = 1 + \beta e^{-j\omega T}$. El pulso conformador y el filtro empleado en recepción son sendos pulsos en raíz de coseno alzado, con factor

de caída $\alpha = 0,35$. La respuesta al impulso combinada de transmisor, canal y receptor es

$$p(t) = r_g(t) + \beta r_g(t - T) \quad (5.39)$$

donde $r_g(t) = g(t) * g(-t)$ es la función de ambigüedad de un pulso en raíz de coseno alzado, por lo que dicha función en este caso es justamente un pulso en coseno alzado. Para determinar el canal discreto equivalente debemos muestrear $p(t)$:

$$p[n] = r_g(nT) + \beta r_g(nT - T) = \delta[n] + \beta\delta[n - 1] \quad (5.40)$$

donde $r_g(nT) = \delta[n]$ y $r_g(nT - T) = \delta[n - 1]$ se concluyen del hecho de que $r_g(t)$ cumple el criterio de Nyquist. Por lo que respecta al ruido $z[n]$, tal como hemos venido discutiendo, este será blanco con densidad espectral de potencia $N_0/2$.

A la vista de (5.40), podemos escribir que la secuencia a la entrada del decisor será de la forma $q[n] = A[n] + \beta A[n - 1] + z[n]$. Así, vemos que tenemos ISI debida únicamente al símbolo anterior al deseado y que el nivel de dicha ISI viene determinado por la ganancia de la componente secundaria, relativa a la directa.

Es interesante examinar qué ocurre en el dominio de la frecuencia, calculando primero $P(j\omega)$ y después verificando si se cumple el criterio de Nyquist. En la Figura 5.12, se representa en línea discontinua la respuesta en frecuencia de un pulso en coseno alzado con $\alpha = 0,35$, correspondiente a $R_g(j\omega)$. En línea continua se dibuja $P(j\omega)$ cuando $\beta = 0,5$. Obsérvese cómo el canal distorsiona la respuesta en frecuencia “ideal” del pulso en coseno alzado.

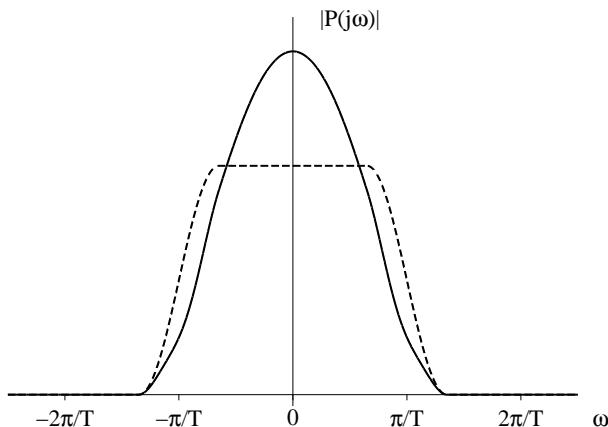


Figura 5.12. Espectro de un pulso en coseno alzado (línea discontinua) y espectro de $P(j\omega)$ (línea continua) que incluye la distorsión del canal, para el canal del Ejemplo 5.5.

La consecuencia de esta distorsión se observa en la Figura 5.13, donde se implementa gráficamente la combinación

$$\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} P \left(j\omega - j\frac{2\pi k}{T} \right) \quad (5.41)$$

que, recordemos, debería ser igual a 1 para que se cumpliese el criterio de Nyquist, cosa que no ocurre. Esta es una forma alternativa de percibir la existencia de ISI.

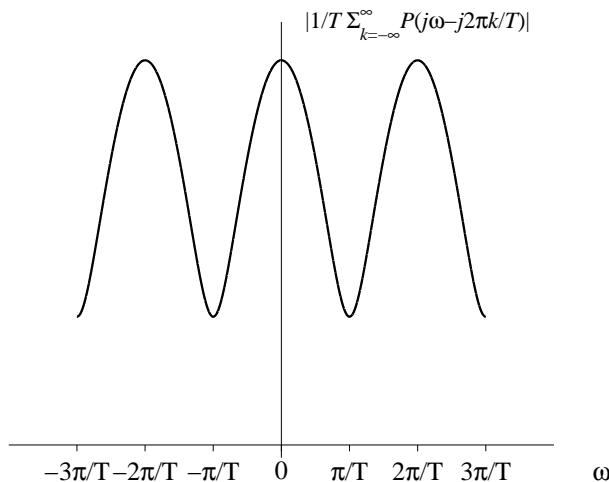


Figura 5.13. Suma de espectros de $P(j\omega)$ desplazados, tal como requiere el criterio de Nyquist en frecuencia, para el canal del Ejemplo 5.5.

Por desgracia, las cosas se complican en cuanto surgen situaciones menos “académicas” que en el ejemplo que acabamos de poner. En cuanto los retardos no son múltiplo del periodo de símbolo, el nivel de interferencia entre símbolos puede incrementarse notablemente, tal y como veremos en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 5.6

Consideremos el mismo canal del Ejemplo 5.5 en el que ahora $\tau_1 = T/2$, es decir, el retardo de la componente secundaria relativa a la directa es medio periodo de símbolo. Aunque aparentemente las cosas no han cambiado mucho, ahora tenemos que $r_g(nT - T/2)$ no se puede escribir como una combinación finita de impulsos discretos. Esto se debe a que $r_g((n - 1/2)T)$ no es nula para ningún valor de n , ya que se corresponde con el muestreo a periodo de símbolo de un coseno alzado desplazado $T/2$ a la derecha. Así que, ahora,

$$p[n] = \delta[n] + \beta r_g(nT - T/2) \quad (5.42)$$

por lo que

$$q[n] = A[n](1 + \beta r_g(-T/2)) + \sum_{\substack{k \\ k \neq n}} A[k]r_g(nT - T/2 - kT) + z[n] \quad (5.43)$$

de forma que ahora tenemos ISI debida a *todos* los símbolos transmitidos, anteriores y posteriores.

En las Figuras 5.14 y 5.15 se repiten las representaciones del Ejemplo 5.5, para el canal analizado.

Si nuestra intención es eliminar completamente la ISI (recordemos que esto era parte de la condición suficiente (5.16) para que el decisor símbolo a símbolo fuese óptimo), entonces podemos proceder del siguiente modo: 1) diseñamos un pulso $p(t)$ que cumpla la condición

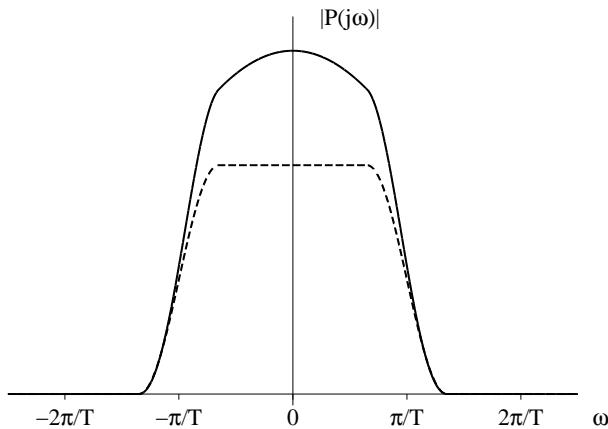


Figura 5.14. Espectro de un pulso en coseno alzado (línea discontinua) y espectro de $P(j\omega)$ (línea continua) que incluye la distorsión del canal, para el canal del Ejemplo 5.6.

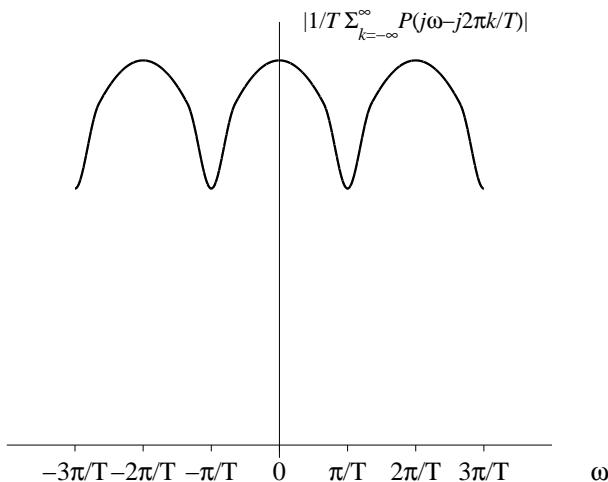


Figura 5.15. Suma de espectros de $P(j\omega)$ desplazados, tal como requiere el criterio de Nyquist en frecuencia, para el canal del Ejemplo 5.6.

de Nyquist para periodo T , y 2) calculamos

$$G(j\omega) = \begin{cases} \left(\frac{P(j\omega)}{H(j\omega)} \right)^{1/2}, & \text{si } H(j\omega) \neq 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (5.44)$$

con objeto de que el filtro receptor esté adaptado al usado en transmisión. Obsérvese que $H(j\omega)$ no será necesariamente real, por lo que la raíz cuadrada en (5.44) debe ser una función de variable compleja. Por construcción, el pulso $g(t)$ diseñado según (5.44) garantiza la ausencia de ISI en la señal recibida $q[n]$. Sin embargo, esta solución no está libre de problemas: en primer lugar, para aplicarla es necesario conocer la respuesta del canal $H(j\omega)$,

lo que casi nunca es fácil; y, en segundo lugar, el ruido $z[n]$ antes del decisor en general ya no será blanco. En efecto, sustituyendo (5.44) en (5.29) tendremos

$$S_z(e^{j\omega}) = \frac{N_0}{2T} \sum_k \frac{P(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi k}{T})}{|H(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi k}{T})|} \quad (5.45)$$

de modo que, aunque $P(j\omega)$ cumpla la condición de Nyquist, salvo que $H(j\omega)$ adopte una forma trivialmente especial (que el lector puede hallar como ejercicio), $S_z(e^{j\omega})$ ya no será plano. Este hecho se ilustra en el siguiente ejemplo

Ejemplo 5.7

Considérese el canal con propagación multirayecto del Ejemplo 5.5. Si diseñamos el filtro transmisor de acuerdo con (5.44), con $P(j\omega)$ un coseno alzado de factor de caída $\alpha = 0,35$ obtenemos un filtro cuya respuesta en magnitud se representa en la Figura 5.16.

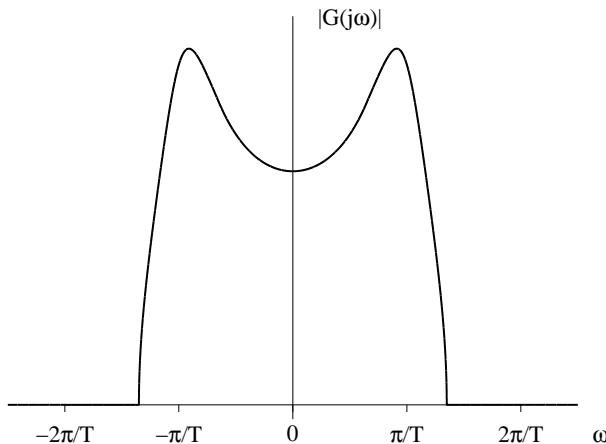


Figura 5.16. Respuesta en magnitud de $G(j\omega)$ diseñado para eliminar la ISI introducida por el canal del Ejemplo 5.5.

Si bien este filtro, empleado en transmisión y, reflejado, en recepción, consigue eliminar la ISI, su efecto es el de colorear el ruido a la entrada del decisor. En la Figura 5.17 se representa la densidad espectral de potencia de dicho ruido que, como se ve, dista mucho de ser plana.

En la discusión y ejemplos precedentes hemos encontrado un problema típico de las comunicaciones digitales y al que dedicaremos no poco espacio en el Capítulo 6: cuando el canal introduce distorsiones lineales, en general no es posible conseguir simultáneamente que en la secuencia $q[n]$ no exista ISI y que el ruido sea blanco⁹. En tal caso, el decisor símbolo a símbolo no será óptimo, lo que significa que este receptor no minimizará la probabilidad de error. De hecho, si quisiésemos realizar una decisión estadísticamente óptima sobre un único símbolo, digamos $A[n_0]$, deberíamos esperar a recibir *toda* la secuencia $q[n]$,

⁹Y lo que es peor, no garantizamos que el filtro receptor no amplifique la potencia de ruido.

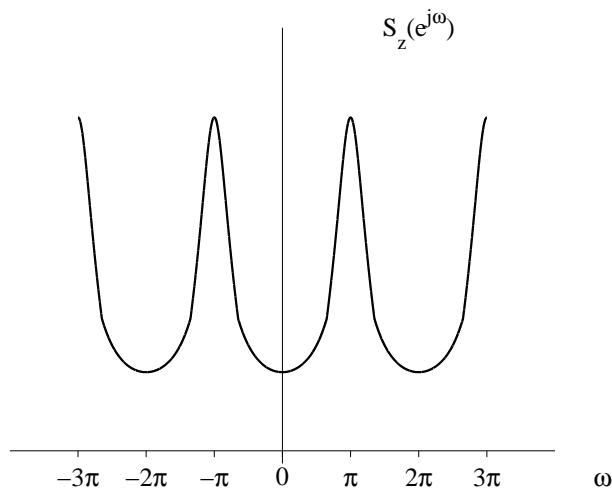


Figura 5.17. Densidad espectral de potencia del ruido discreto a la entrada del decisor símbolo a símbolo.

y utilizar *toda* la secuencia $q[n]$ para decidir sobre el valor de $A[n_0]$. De nuevo, referimos al Capítulo 6 para una discusión más detallada.

El lector puede llegar a pensar que todas estas dificultades son causadas por el hecho de emplear un filtro receptor que está adaptado al transmisor. A continuación vamos a comprobar que desgraciadamente no es así: consideremos un filtro receptor genérico $f(t)$ en el demodulador, tal y como representamos en la Figura 5.18.

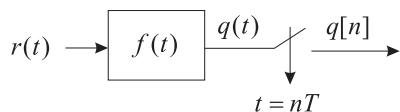


Figura 5.18. Estructura del demodulador para PAM en banda base con un filtro receptor genérico $f(t)$.

Naturalmente, el caso que veníamos tratando hasta el momento se corresponde con $f(t) = g(-t)$. El cálculo del canal discreto equivalente no difiere apenas de los realizados en apartados anteriores, de modo que (5.8) sigue siendo válida, con

$$p(t) = g(t) * h(t) * f(t) \quad (5.46)$$

y $z(t) = n(t) * f(t)$.

Y como ocurrió en el apartado anterior, podemos diseñar los filtros de interés para eliminar la ISI, con la libertad de que ahora el filtro receptor no está fijado por la elección del filtro transmisor. Así, dados $g(t)$ y $h(t)$, y partiendo de un pulso $p(t)$ que cumpla el criterio de Nyquist, basta con elegir $f(t)$ tal que $P(j\omega) = G(j\omega)H(j\omega)F(j\omega)$. Pero, por desgracia, el $F(j\omega)$ así obtenido no garantizará (salvo excepciones triviales) la aparición de ruido

blanco antes del decisor. Por consiguiente, todos los comentarios efectuados en el apartado anterior, relativos a la no optimalidad del demodulador símbolo a símbolo son válidos aquí.

No obstante, la mayor flexibilidad que supone la introducción de un filtro genérico $f(t)$ permite otras soluciones. Por ejemplo, si reescribimos la señal a la entrada del receptor, $r(t)$, como

$$r(t) = \sum_n A[n]g_r(t - nT) + n(t) \quad (5.47)$$

siendo $g_r(t) \doteq g(t) * h(t)$, podemos concluir que la forma de $r(t)$ es idéntica a la que tendríamos al transmitir sobre un canal gausiano (Apartado 5.1.2), con la diferencia de que ahora aparece $g_r(t)$ en lugar de $g(t)$. Esto es lógico, ya que ahora la señal transmitida encuentra el canal $h(t)$ antes de llegar al receptor. Así pues, continuando con el paralelismo establecido, el filtro del receptor, que en el Apartado 5.1.2 está adaptado a $g(t)$, ahora debería adaptarse a $g_r(t)$, es decir, a la respuesta conjunta transmisor-canal. Por tanto, en este caso, $f(t) = g_r(-t)$.

Este filtro adaptado tiene la propiedad de que maximiza la relación señal a ruido cuando se considera la transmisión de *un único símbolo*¹⁰. Para demostrarlo, supongamos que solamente se envía $A[0]$ por el canal, de modo que el receptor muestrea sólo en $t = 0$ obteniendo $q[0]$, que es la variable de decisión. En este caso, $s(t) = A[0]g(t)$ y

$$r(t) = A[0]g(t) * h(t) + n(t) = A[0]g_r(t) + n(t) \quad (5.48)$$

La señal a la salida del filtro receptor $f(t)$ toma la forma

$$q(t) = A[0]g_r(t) * f(t) + z(t) \quad (5.49)$$

con $z(t) = n(t) * f(t)$. Finalmente, la variable de decisión es

$$\begin{aligned} q[0] &\doteq q(t)|_{t=0} = A[0](g_r(t) * f(t))|_{t=0} + z[0] \\ &= A[0] \int_{-\infty}^{\infty} g_r(\tau)f(-\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} n(\tau)f(-\tau)d\tau \end{aligned} \quad (5.50)$$

con $z[0] = z(0)$. Como puede verse, estamos en una situación análoga a la de (4.21), Apartado 4.3.2, con la pequeña diferencia de que ahora la componente de señal también es aleatoria, debido a la presencia del símbolo desconocido $A[0]$. Con esta consideración y empleando (4.23), es inmediato concluir que

$$E\{q^2[0]\} = E_s \left(\int_{-\infty}^{\infty} g_r(\tau)f(-\tau)d\tau \right)^2 + \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f^2(-\tau)d\tau \quad (5.51)$$

con $E_s = E\{A^2[0]\}$. Como consecuencia, la relación señal a ruido toma una forma análoga a la de (4.24) y los argumentos ofrecidos en el Apartado 4.3.2 son válidos para demostrar que $f(t) = Kg_r(-t)$, con K cualquier número real no nulo, maximiza dicha relación.

¹⁰Obviamente, esta hipótesis no se cumple en un sistema real.

En los párrafos precedentes hemos considerado la transmisión/recepción de un sólo símbolo. El problema de hallar el filtro $f(t)$ que maximiza la relación señal a ruido cuando se considera la transmisión indefinida de símbolos es bastante más complejo, por lo que no lo abordaremos aquí.

El inconveniente de las soluciones anteriores es que, aunque maximizan una relación señal a ruido, consideran la ISI como parte de la componente de señal, lo que desde el punto de vista de la toma de decisiones símbolo a símbolo no parece una estrategia adecuada. De acuerdo con esto, podemos mencionar aquí un último criterio de diseño para $f(t)$ que será tratado con mayor profundidad en el Capítulo 6: tomando la ISI como un término indeseable para las decisiones símbolo a símbolo, podemos buscar aquel $f(t)$ que maximiza

$$\frac{E \left\{ (A[n]p[0])^2 \right\}}{E \left\{ \left(\sum_{k \neq n} A[k]p[n-k] + z[n] \right)^2 \right\}} \quad (5.52)$$

lo que equivale a maximizar la relación potencia del símbolo deseado recibido frente a ISI y ruido.

Como último comentario de este apartado, es interesante señalar que casi todas las opciones para el diseño de $f(t)$ obligan a conocer el canal $h(t)$, lo que, como ya hemos señalado, constituye un problema práctico que entraña muchas dificultades. Peor aún, en algunas aplicaciones la respuesta al impulso del canal varía con el tiempo. Todo ello dicta diseñar $f(t)$ de forma práctica utilizando un $h(t)$ “nominal” que sea representativo de los canales que se pueden llegar a encontrar, dejando la solución de los problemas restantes a bloques de procesado de señal que se implementan digitalmente después del muestreador del receptor y que veremos con más detenimiento en el Capítulo 6. Como consecuencia de lo anterior, muchos sistemas prácticos emplean simplemente el filtro adaptado al pulso transmisor $f(t) = g(-t)$, que suele ser un filtro en raíz de coseno alzado.

5.3.1. El diagrama de ojo

El diagrama de ojo es una herramienta de gran utilidad para visualizar el comportamiento de un sistema de comunicaciones, en particular, para determinar de forma cualitativa el impacto de ciertos fenómenos indeseables como el ruido, la interferencia entre símbolos o las fluctuaciones en el reloj de símbolo. Generalmente, los diagramas de ojo se construyen en el osciloscopio, aprovechando la persistencia de la onda en pantalla para representar de forma solapada fragmentos consecutivos de la señal que se desea analizar¹¹. La frecuencia de disparo del osciloscopio, obtenida a partir del reloj de símbolo, se ajusta para que el eje horizontal abarque típicamente dos períodos de símbolo.

El proceso de construcción del diagrama de ojo que realiza automáticamente el osciloscopio se ilustra en la Figura 5.19. En la parte superior se tiene la forma de onda cuyo

¹¹Los osciloscopios digitales tienen la opción de “simular” esta persistencia

diagrama de ojo se quiere visualizar, en este caso, una señal PAM banda base con constelación binaria antipodal, pulso en coseno alzado con factor de caída $\alpha = 0,35$ y carente de ruido. Dicha señal se divide en fragmentos de duración $2T$ que se representan de forma superpuesta. En la Figura 5.19 se ha elegido, por razones de claridad, dibujar sólo dos fragmentos, que son los señalados con trazo grueso sobre la forma de onda de la parte superior.

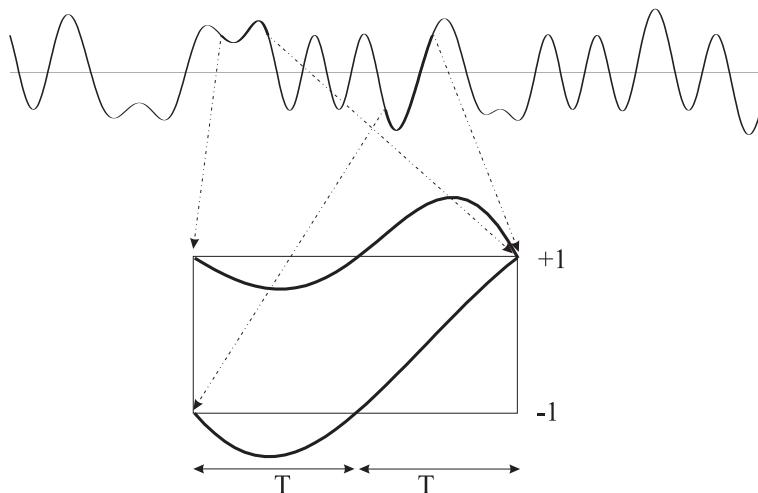


Figura 5.19. Proceso de construcción de un diagrama de ojo.

La Figura 5.20(a) ilustra el diagrama de ojo completo de una señal como la de la Figura 5.19. El llamado *ojo* aparece el centro de la figura como la zona vacía con forma de diamante. Es interesante observar que, en ausencia de ruido o interferencia entre símbolos todos los trazos pasan por los mismos puntos en el centro, que se corresponden con los niveles de la PAM utilizada, en este caso ± 1 . Como ya sabemos, muestreando justamente en los instantes que se corresponden con dichos puntos, obtendríamos el símbolo enviado en dichos instantes.

La apertura vertical del ojo es una buena medida de la inmunidad al ruido, puesto que da una idea de qué amplitud de ruido sería necesaria para producir un error (recordemos que el umbral de decisión en este caso se sitúa en el valor cero, que se puede visualizar en el diagrama como una línea horizontal que lo biseca). Por lo que respecta a la apertura horizontal, esta da una medida de la inmunidad a los errores en el instante elegido para muestrear la señal; en efecto, a medida que nos desviamos del instante óptimo de muestreo (que es aquel para el que la apertura vertical es máxima) se reduce el margen necesario para que el ruido produzca errores, hasta el punto de que si muestreamos en instantes situados fuera del ojo, la probabilidad de error ya no será cero, incluso en ausencia de ruido. La Figura 5.20(b) representa un diagrama de ojo similar al de la Figura 5.20(a), pero habiendo empleado un factor de caída de $\alpha = 1$. La mayor apertura horizontal del ojo, debida a un factor de caída más elevado, implica a su vez una mayor robustez ante posibles errores en el instante de muestreo. Esto explica por qué puede ser deseable emplear valores de α más

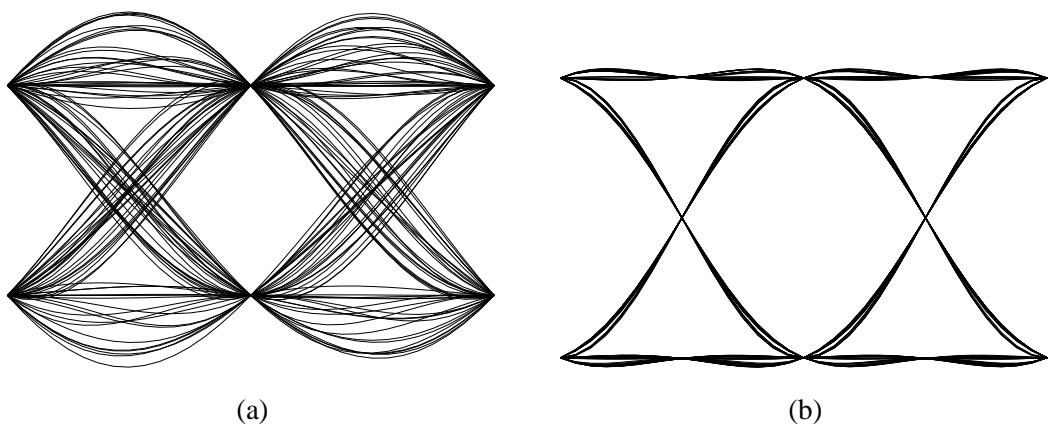


Figura 5.20. Diagramas de ojo para una PAM binaria antipodal con pulsos en coseno alzado con (a) $\alpha = 0,35$ y (b) $\alpha = 1$.

altos en los pulsos en coseno alzado, aun cuando incrementan el ancho de banda utilizado.

Las Figuras 5.21(a) y (b) muestran el diagrama de ojo que se obtiene cuando se transmite una señal PAM binaria antipodal a través de un canal $h(t) = \delta(t) - 0,3\delta(t - 2T)$ (véase Ejemplo 5.5), cuando los filtros transmisor y receptor son raíces cuadradas de coseno alzado con $\alpha = 0,35$ y $\alpha = 1$, respectivamente, y en ausencia de ruido. Para ambos casos, $p[n] = \delta[n] + 0,3\delta[n-2]$, por lo que habrá interferencia entre símbolos. Obsérvese que en el instante óptimo de muestreo la señal recibida puede tomar los valores $\pm 1 \pm 0,3$ y la inmunidad al ruido se reduce.

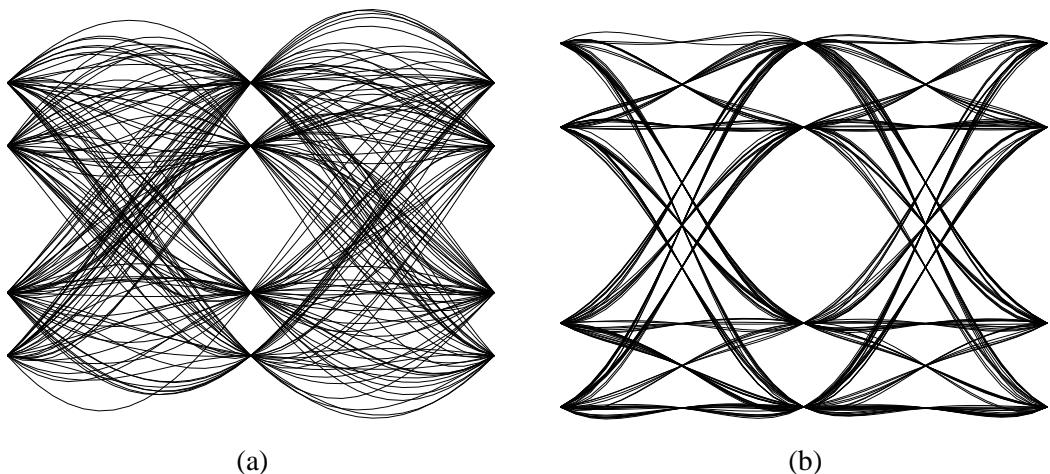


Figura 5.21. Diagramas de ojo para una PAM binaria antipodal transmitida sobre el canal $h(t) = \delta(t) + 0,3\delta(t - 2T)$, con (a) $\alpha = 0,35$ y (b) $\alpha = 1$.

Finalmente, los diagramas de ojo de las Figuras 5.22(a) y (b) se han obtenido empleando un canal $h(t) = \delta(t) + 0,3\delta(t - T/2)$ (véase Ejemplo 5.6), para el que la interferencia entre

símbolos contiene infinitos términos. Aquí también puede observarse la ventaja de usar un factor de caída mayor: el ojo aparece mucho más abierto para $\alpha = 1$ que para $\alpha = 0,35$.

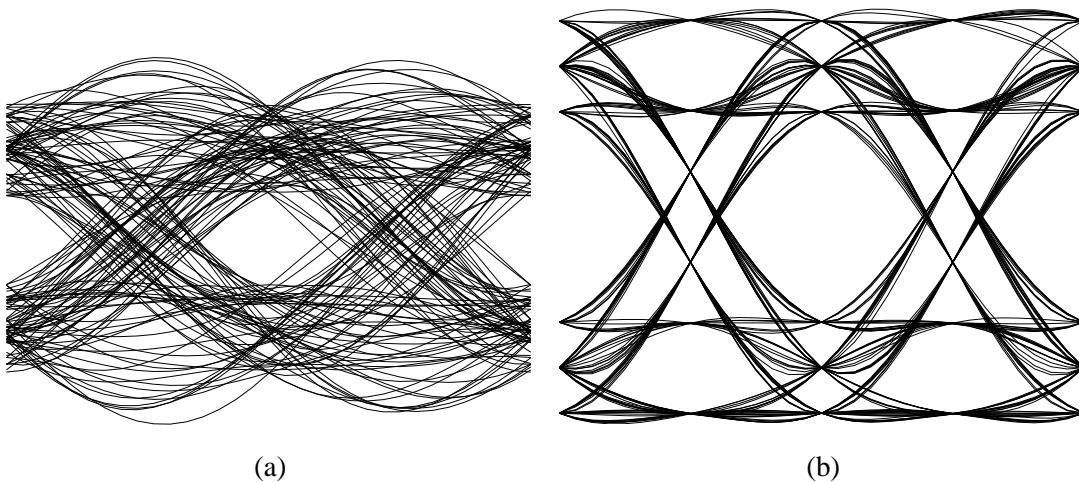


Figura 5.22. Diagramas de ojo para una PAM binaria antipodal transmitida sobre el canal $h(t) = \delta(t) + 0,3\delta(t - T/2)$, con (a) $\alpha = 0,35$ y (b) $\alpha = 1$.

5.4. PAM PASO BANDA

En apartados anteriores hemos estudiado la modulación PAM en banda base. Aunque útil para introducir algunos valiosos conceptos que serán empleados más adelante, su alcance práctico es limitado, ya que la mayoría de los canales físicos no permiten la transmisión de señales en banda base porque:

1. Muchos de ellos, como es el caso del canal telefónico, no pueden transmitir señales próximas a continua (frecuencia 0) por la fuerte atenuación que estas experimentarían, con el consiguiente desperdicio de potencia (piénsese que no es razonable transmitir en aquellas frecuencias para las que la atenuación del canal sea grande).
2. Otros canales, como es el caso de los canales radio, dividen el rango de frecuencias disponibles en bandas de frecuencia que se asignan con diferentes propósitos, y siempre con la limitación de que el ancho de banda sea mucho menor que la frecuencia central. De hecho, en estos casos, es ilegal transmitir potencia fuera de la banda asignada, existiendo fuertes restricciones sobre el espectro de la señal transmitida, generalmente especificadas a través de las llamadas *máscaras de emisión*.

Como consecuencia de lo anterior, en este apartado nos plantearemos cómo enviar la información en canales de tipo paso banda, llegando a la conclusión de que, a costa de aumentar la complejidad de transmisor y receptor, es posible mantener la misma eficiencia

espectral que conseguíamos con la PAM en banda base, si nuestro objetivo es alcanzar la misma probabilidad de error de bit.

La forma más natural de conseguir una modulación paso banda sería: 1) generar una señal PAM en banda base y 2) trasladar su espectro hasta la banda de frecuencias deseada. Tengamos siempre presente, no obstante, que el medio físico sólo admite señales reales (p.ej., voltaje o intensidad), por lo que la señal generada debe cumplir esta restricción. En consecuencia, podríamos obtener la señal paso banda deseada modulando un coseno (llamado *señal portadora*) de frecuencia igual a la que deseamos trasladar el espectro con la señal en banda base, tal como se muestra en la Figura 5.23.

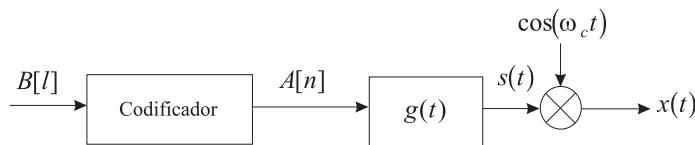


Figura 5.23. Diagrama de bloques de un modulador en doble banda lateral

Formalmente, dada una señal PAM en banda base $s(t)$ con expresión

$$s(t) = \sum_n A[n]g(t - nT) \quad (5.53)$$

el proceso de modulación de una portadora de frecuencia ω_c rad/seg produce una señal de la forma

$$x(t) = s(t) \cos(\omega_c t) \quad (5.54)$$

En la Figura 5.24 se ilustra el resultado del proceso de modulación paso banda representando los espectros de $s(t)$ y $x(t)$ denotados, respectivamente, por $S(j\omega)$ y $X(j\omega)$.

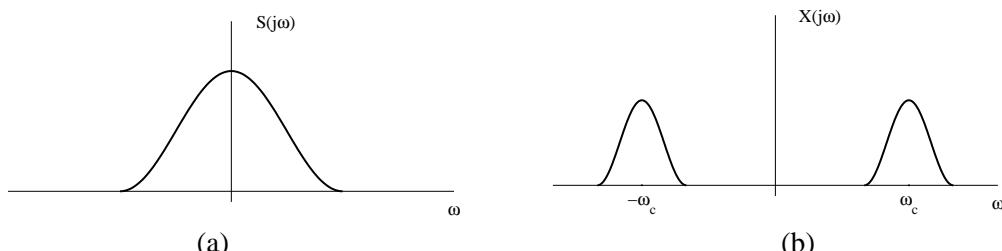


Figura 5.24. Espectro de la señal en banda base y de la señal paso banda.

Aunque válido, el esquema que acabamos de presentar no es eficiente porque malgasta el ancho de banda disponible. La razón es que, de acuerdo con las relaciones de simetría existentes en el espectro de $x(t)$, para recuperar la señal en banda base $s(t)$ sería suficiente con un espectro como el de la Figura 5.25, que ocupa exactamente la mitad del ancho de banda que en la Figura 5.24.

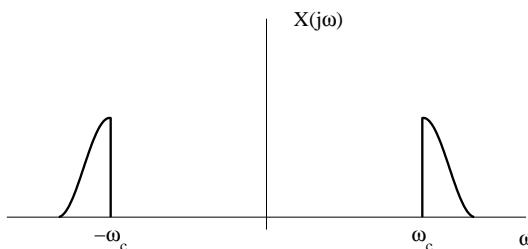


Figura 5.25. Espectro de una señal en banda lateral superior.

El lector puede comprobar cómo una nueva multiplicación por $\cos(\omega_c t)$ y un filtrado paso bajo reconstruyen la señal original en banda base.

Podemos pensar, entonces, en generar una señal $x(t)$ con un espectro como el de la Figura 5.25, para lo cual una posibilidad sería filtrar la señal paso banda anterior con un filtro paso alto $g_{pa}(t)$ con frecuencia de corte ω_c , por lo que la nueva expresión para $x(t)$ sería

$$x(t) = (s(t) \cos(\omega_c t)) * g_{pa}(t) \quad (5.55)$$

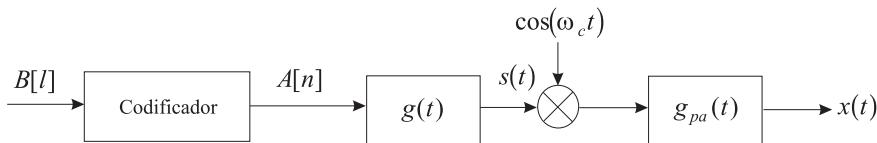


Figura 5.26. Diagrama de bloques de un modulador en banda lateral superior (“Upper Side-Band”, USB).

La modulación así conseguida se denomina PAM en banda lateral única (“Single Side-Band”, SSB) o, abreviadamente, PAM-SSB; por contra, la descrita mediante (5.54) recibe el nombre de PAM en doble banda lateral (“Double Side-Band”, DSB), o, abreviadamente, PAM-DSB. En la Figura 5.26 se representa el diagrama de bloques de un modulador en USB. Aunque el procedimiento aquí descrito sirve para obtener la *banda lateral superior* de la señal, es inmediato extenderlo a la consecución de la *banda lateral inferior* sin más que cambiar el filtro paso alto por uno paso bajo. La determinación del espectro de potencia de este tipo de señales se encuentra en el Apartado 3.3.8, bajo el epígrafe “Modulación real de procesos cicloestacionarios”.

Uno de los inconvenientes de las modulaciones en banda lateral es la necesidad de utilizar un filtro $g_{pa}(t)$ con característica ideal, esto es, con una caída muy abrupta. En las llamadas modulaciones PAM en banda lateral vestigial (“Vestigial Side-Band”, VSB) o, abreviadamente, PAM-VSB, el filtro utilizado tiene una característica relajada lo que facilita su implementación práctica a costa de un mayor ancho de banda ocupado. En cualquier

caso, el filtro ha de ser tal que el solape que se produce en los espectros durante el proceso de demodulación garantice la reconstrucción perfecta de $s(t)$.

En lugar de tratar de reducir el ancho de la señal paso banda, existe otra estrategia para conseguir la misma eficiencia espectral que consiste en modular simultáneamente dos señales reales con dos portadoras de la misma frecuencia, pero desfasadas entre sí 90° . Debido a este desfase (correspondiente a un ángulo recto), se suele decir que ambas portadoras están *en cuadratura*. De acuerdo con lo anterior, sean $s_I(t)$ y $s_Q(t)$, dos señales PAM en banda base, obtenidas al modular dos secuencias de símbolos de información (no necesariamente independientes), $A_0[n]$ y $A_1[n]$, empleando pulsos conformadores con respuesta al impulso $g(t)$. En definitiva, tenemos

$$s_I(t) = \sum_n A_0[n]g(t - nT) \quad (5.56)$$

$$s_Q(t) = \sum_n A_1[n]g(t - nT) \quad (5.57)$$

y la señal transmitida $x(t)$ será

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{2}s_I(t)\cos(\omega_c t) - \sqrt{2}s_Q(t)\sin(\omega_c t) \\ &= \sqrt{2}\sum_n A_0[n]g(t - nT)\cos(\omega_c t) - \sqrt{2}\sum_n A_1[n]g(t - nT)\sin(\omega_c t) \end{aligned} \quad (5.58)$$

El factor $\sqrt{2}$ tiene como única misión igualar la potencia de la señal paso banda a la de la señal banda base, como quedará claro más adelante. Las señales $s_I(t)$ y $s_Q(t)$ reciben a menudo los nombres de *componente en fase* y *componente en cuadratura* respectivamente, y la modulación resultante *PAM paso banda*. No es difícil ver que ambas componentes moduladas ocupan la misma banda de frecuencias (la centrada en ω_c), por lo que en el receptor tendremos que encontrar una manera de separarlas si queremos una comunicación fiable.

Una forma más compacta de escribir (5.58) pasa por considerar símbolos $A[n]$ complejos haciendo la asignación $\mathcal{Re}\{A[n]\} = A_0[n]$, $\mathcal{Im}\{A[n]\} = A_1[n]$. Si definimos la señal compleja en banda base $s(t)$ como

$$s(t) = s_I(t) + js_Q(t) = \sum_n A[n]g(t - nT) \quad (5.59)$$

veremos que esta tiene exactamente la misma forma que para una modulación PAM en banda base (Ecación (5.1)), salvo que ahora las constelaciones utilizadas contendrán, en general, símbolos complejos. Ahora podemos escribir la señal PAM paso banda $x(t)$ como

$$x(t) = \sqrt{2}\mathcal{Re}\{s(t)e^{j\omega_c t}\} = \sqrt{2}\mathcal{Re}\left\{\sum_n A[n]g(t - nT)e^{j\omega_c t}\right\}, \quad (5.60)$$

aunque, en algunas otras ocasiones, como en las modulaciones de fase, resulta más útil escribir $s(t) = |s(t)|e^{j\angle s(t)}$ y, en consecuencia,

$$x(t) = \sqrt{2}|s(t)|\cos(\omega_c t + \angle s(t)), \quad (5.61)$$

por lo que las señales $\sqrt{2}|s(t)|$ y $\angle s(t)$ reciben los nombres de *envolvente* y *fase* de $x(t)$, respectivamente.

Es importante insistir en que la formulación con números complejos no es más que un modo conveniente de representar las señales que intervienen en una modulación PAM paso banda; así, aunque a efectos de operación y representación nos interesaría esta perspectiva, siempre es útil recordar que cualquier señal compleja implica la existencia de las partes en fase $s_I(t)$ y cuadratura $s_Q(t)$, tal y como se explica en la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{2} \sum_n \operatorname{Re}\{A[n]\} g(t - nT) \cos(\omega_c t) \\ &\quad - \sqrt{2} \sum_n \operatorname{Im}\{A[n]\} g(t - nT) \sin(\omega_c t) \end{aligned} \quad (5.62)$$

En la Figura 5.27 se representa la arquitectura de un modulador, separando las componentes en fase y cuadratura.

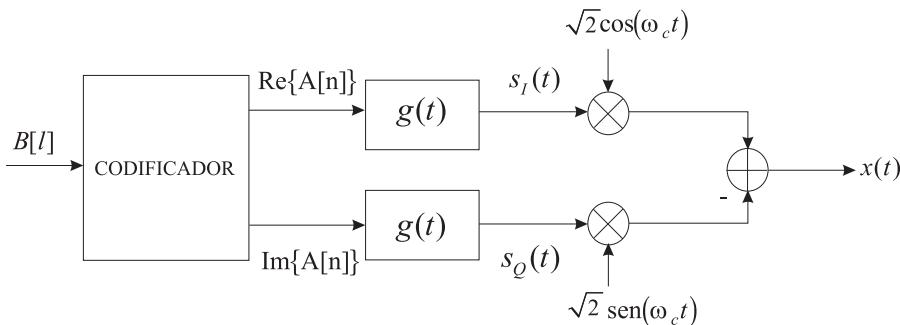


Figura 5.27. Arquitectura de un modulador de PAM paso banda, separando las componentes en fase y cuadratura.

Antes de proseguir con nuestra exposición de la modulación PAM paso banda, resulta interesante intentar relacionarla con la formulación presentada en el Apartado 4.5 para la transmisión indefinida de símbolos. La estructura de (5.58), similar a (4.98), parece sugerir un espacio de señales bidimensional, con dimensiones que se corresponderían con las señales en fase y cuadratura, pero no es así. En efecto, salvo casos particulares, no es posible escribir $x(t)$ en la forma

$$x(t) = \sum_n A_0[n] \phi_0(t - nT) + \sum_n A_1[n] \phi_1(t - nT), \quad (5.63)$$

con $\phi_0(t), \phi_1(t)$, dos señales ortogonales, lo que se puede comprobar fácilmente tratando de identificar términos con (5.58). La razón es que en general las funciones base que multiplican a cada símbolo $A[n] = (A_0[n], A_1[n])^T$ de (5.63) varían con el índice n por la aparición de las señales portadoras. Sin embargo, en algunos casos especiales las funciones sí son invariantes con n , tal como se demuestra en el siguiente ejemplo

Ejemplo 5.8

Si la frecuencia de la portadora es tal que cabe un número entero de ciclos en un periodo de símbolo, esto es,

$$\omega_c = \frac{2\pi N}{T} \quad (5.64)$$

para algún entero N , entonces es evidente que $\cos(\omega_c t) = \cos[(\omega_c(t - nT)]$ y, por tanto, (5.58) puede escribirse en la forma (5.63), haciendo la asignación

$$\begin{aligned}\phi_0(t) &= \sqrt{2}g(t) \cos(\omega_c t) \\ \phi_1(t) &= -\sqrt{2}g(t) \sin(\omega_c t)\end{aligned} \quad (5.65)$$

Obsérvese que bajo las condiciones de este ejemplo, el proceso de modulación se hace “sin portadora” (CAP, “Carrierless Amplitude and Phase modulation”), si bien es cierto que ésta va implícita en los dos pulsos transmisores utilizados. En la Figura 5.28 podemos ver un esquema para la generación de señales en este caso.

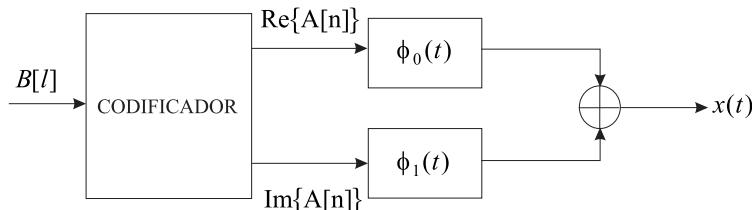


Figura 5.28. Arquitectura del modulador del Ejemplo 5.8

Aunque hemos puesto de manifiesto la imposibilidad de escribir en general la señal transmitida PAM paso banda como (5.63), sí es posible establecer este tipo de relación con la señal en banda base $s(t)$, sin más que hacer la identificación $\phi_0(t) = g(t)$, $\phi_1(t) = jg(t)$, por lo que los valores posibles de las coordenadas de los símbolos $[\Re{A[n]}, \Im{A[n]}]^T$ en esta base definen la constelación empleada.¹². Equivalentemente, podemos pensar en una base con una única función $\phi_0(t) = g(t)$ con coordenadas complejas $A[n]$. En definitiva, la señal $s(t)$ se puede escribir como

$$s(t) = \sum_n \Re{A[n]} \phi_0(t - nT) + \sum_n \Im{A[n]} \phi_1(t - nT) \quad (5.66)$$

$$= \sum_n A[n] \phi_0(t - nT) \quad (5.67)$$

El formato de modulación PAM paso banda es lo suficientemente amplio como para admitir un buen número de constelaciones, que en ocasiones hacen que la modulación resultan-

¹²El cuerpo de los complejos puede verse como un espacio vectorial bidimensional. Puede comprobarse fácilmente que si es equipado con el producto escalar $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \Re{\mathbf{x}\mathbf{y}^*}$, la norma inducida se corresponde con la distancia al origen en el plano complejo y el producto escalar es cero para dos vectores ortogonales. Las funciones $\phi_0(t)$ y $\phi_1(t)$ son ortogonales en este sentido.

te reciba nombres diferentes¹³. Así, por ejemplo, en la llamada *modulación de amplitud en cuadratura* (“Quadrature Amplitude Modulation”, QAM), las componentes en fase y cuadratura son independientes. Esto es equivalente a decir que $\text{Re}\{A[n]\}$ e $\text{Im}\{A[n]\}$ toman valores independientes, por lo que el número de símbolos en la constelación será el cuadrado del número de valores permitidos por dimensión. Una gran ventaja de la modulación QAM es la sencillez en el diseño tanto del transmisor –por la independencia de componentes– como del receptor –porque las decisiones se pueden tomar de forma independiente sobre las señales en fase y cuadratura–.

Por lo que respecta al número de bits por símbolo, obviamente este depende del número de símbolos de la constelación. Así, para un número P de bits por símbolo, tendríamos $M = 2^P$ símbolos en la constelación. Algunas de las constelaciones para P par se representan en la Figura 5.29. Para el caso de P impar es imposible distribuir los símbolos cubriendo uniforme y completamente el interior de un cuadrado, por lo que se suelen eliminar los símbolos de mayor energía (los cercanos a los vértices) para producir una constelación *en cruz*¹⁴, tal como se representa en la Figura 5.30.

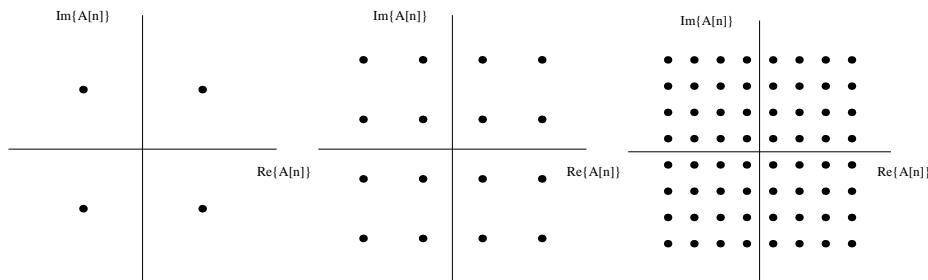


Figura 5.29. Constelaciones QPSK, 16-QAM y 64-QAM.

Otro grupo de constelaciones de gran interés se corresponde con las llamadas *modulaciones por cambio de fase* (“Phase Shift Keying”, PSK) en las que la elección de los símbolos $A[n]$ es tal que su módulo es constante y la información se transmite en la fase. La principal ventaja de la modulación PSK es que cuando se combina con pulsos de transmisión rectangulares la señal resultante tiene envolvente constante y contiene toda su información en la fase –equivalentemente, en los cruces por cero–, por lo que esta modulación es robusta ante distorsiones no lineales de amplitud que aparecen, por ejemplo, en muchos amplificadores de potencia trabajando cerca de la zona de saturación o en los limitadores de amplitud en el receptor.

Si escribimos

$$A[n] = \sqrt{E_s} e^{j\varphi[n]}, \quad (5.68)$$

¹³Es de sobra conocida la afición de los ingenieros de telecomunicación por nombrar los nuevos descubrimientos, en especial, mediante el abuso de acrónimos (en inglés). En este texto, hemos decidido emplear sólo los más habituales. Con todo, el lector verá que incluso el número de estos últimos es abultado.

¹⁴Obsérvese que en este caso las componentes en fase y cuadratura dejan de ser independientes, de forma que ya no es posible decidir sobre cada una de ellas por separado.

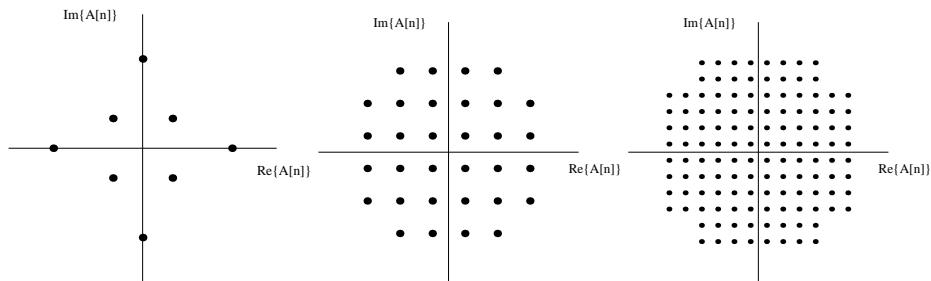


Figura 5.30. Constelaciones QAM en cruz para $M = 8, 32$ y 128 .

con E_s la energía de símbolo, el codificador de un modulador PSK asignará los bits a valores discretos de $\varphi[n]$, tal como se puede ver en la Figura 5.31 en la que se representan algunos casos de modulaciones PSK. La codificación generalmente es de tipo Gray (Página 230), de modo que símbolos contiguos difieren en un solo bit. La distribución de símbolos es uniforme, por lo que la diferencia de fases entre símbolos adyacentes para una M -PSK es de $2\pi/M$ radianes.

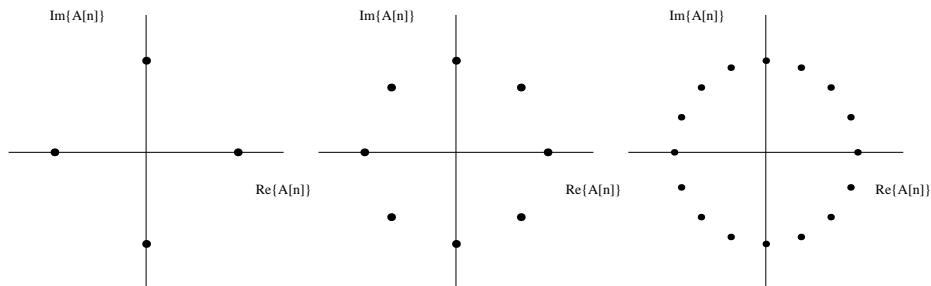


Figura 5.31. Constelaciones 4-PSK (QPSK), 8-PSK y 16-PSK

La modulación PSK admite una interesante interpretación en términos de las fases de las componentes en fase y cuadratura o de la señal compleja en banda base; en efecto, sustituyendo (5.68) en (5.60), y recordando que el pulso conformador $g(t)$ es real, tenemos

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{2E_s} \mathcal{R}e \left\{ \sum_n g(t-nT) e^{j(\omega_c t + \varphi[n])} \right\} \\ &= \sqrt{2E_s} \sum_n g(t-nT) \cos(\omega_c t + \varphi[n]) \end{aligned} \quad (5.69)$$

de modo que la información (codificada en $\varphi[n]$) se traduce en un cambio en la fase de la portadora, o sobre la exponencial compleja modulada por la señal compleja en banda base. Un caso particular de modulación PSK es el de la 2-PSK (frecuentemente llamada PSK binaria, o BPSK) en la que los símbolos sólo tienen componente real, por lo que también

son un caso particular de PAM en doble banda lateral. La modulación 4-PSK se conoce como PSK en cuadratura o QPSK (“*Quadrature PSK*”) que, por cierto, coincide con la 4-QAM¹⁵.

El abanico de constelaciones disponibles no acaba aquí: por ejemplo, se pueden combinar las modulaciones de amplitud y fase para producir las constelaciones denominadas AM-PM (“*Amplitude Modulation-Phase Modulation*”). También se puede recurrir al empaquetado hexagonal de símbolos (véase Apartado 4.4.3) para producir constelaciones denominadas hexagonales. En la Figura 5.32 se presentan algunos ejemplos de estos dos tipos de constelaciones.

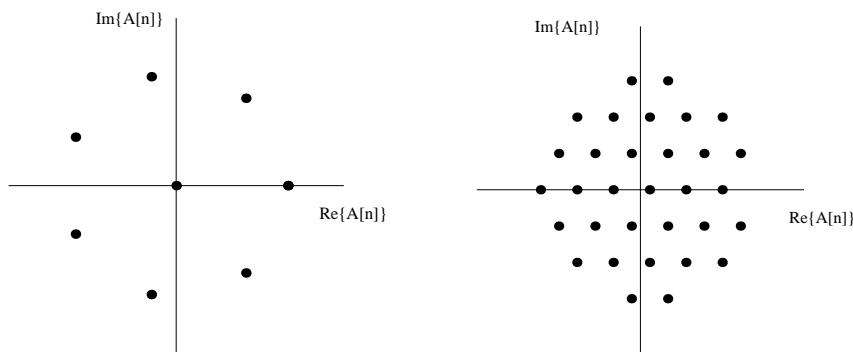


Figura 5.32. Constelaciones 1-7-AM-PM y 32-Hexagonal

5.4.1. Espectro de la señal PAM paso banda

Al igual que para la modulación PAM en banda base, para determinar las características espetrales de la señal transmitida encontramos el problema de que dicha señal no es estacionaria, sino cicloestacionaria y, por tanto, el espectro de potencia debe calcularse como el promedio de los espectros de potencia obtenidos a lo largo de todo un periodo T (Teorema de Wiener-Khinchine), siguiendo el procedimiento descrito en el Apartado 3.3.5.

En el caso de procesos paso banda es necesario hacer algunas hipótesis sobre la secuencia compleja $A[n]$ para garantizar la cicloestacionariedad de la señal transmitida $x(t)$. En el Apartado 3.3.7 del Capítulo 3 se discute la modulación compleja de procesos cicloestacionarios y se presenta la siguiente condición suficiente para que $x(t)$ sea cicloestacionaria:

$$E\{A[k+i]A[k]\} = 0, \text{ para todo } k, i, i \neq 0 \quad (5.70)$$

Esta condición se cumple en el caso de QAM si los símbolos transmitidos por los canales en fase y cuadratura son mutuamente independientes y las funciones de autocorrelación de los símbolos transmitidos por ambos canales son idénticas. Para PSK la condición se cumple si las muestras de la secuencia de fases $\varphi[n]$ son mutuamente independientes.

¹⁵Como vimos en el Apartado 4.4.3, un giro de la constelación no afecta a sus prestaciones, aunque sí puede influir en la complejidad de la implementación de transmisor y receptor.

En el supuesto de que se cumple la condición (5.70), la densidad espectral de potencia $S_x(j\omega)$ de la señal transmitida se calcula en el Apartado 3.3.7. Además, debemos tener en cuenta el factor $\sqrt{2}$ del transmisor. Por tanto, el espectro de potencia resulta ser:

$$S_x(j\omega) = \frac{1}{2} [S_s(j\omega - j\omega_c) + S_s^*(-j\omega - j\omega_c)] \quad (5.71)$$

donde

$$S_s(j\omega) = \frac{1}{T} S_A(e^{j\omega T}) |G(j\omega)|^2 \quad (5.72)$$

$S_A(e^{j\omega})$ es la densidad espectral de potencia de la secuencia compleja $A[n]$ y $G(j\omega)$ la respuesta en frecuencia del pulso transmisor. La potencia media transmitida P será:

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(j\omega) d\omega \quad (5.73)$$

Cuando la secuencia $A[n]$ es blanca, la densidad espectral de potencia correspondiente es $S_A(e^{j\omega}) = E_s$, con E_s la energía media por símbolo. En este caso, la potencia media se puede calcular como

$$P = \frac{E_s \mathcal{E}\{g(t)\}}{T}, \quad (5.74)$$

donde $\mathcal{E}\{g(t)\}$ denota la energía del pulso transmisor. Cuando dicho pulso está normalizado en energía, la potencia media transmitida es simplemente

$$P = \frac{E_s}{T} \quad (5.75)$$

Como ya indicamos en el caso de la PAM en banda base, la Ecuación (5.72) muestra claramente la posibilidad de conformar el espectro de la señal transmitida actuando ya sea sobre el filtro transmisor $g(t)$ o sobre la autocorrelación de la secuencia de símbolos $A[n]$, introduciendo memoria.

Antes de presentar algunos esquemas de receptores para PAM paso banda, es interesante echar un vistazo a la Figura 5.24 y a (5.72). Dado que $g(t)$ es real, $|G(j\omega)|^2$ tiene simetría par con respecto al origen; entonces, si $S_A(e^{j\omega})$ es hermítico, $S_x(j\omega)$ en (5.71) tendrá las mismas simetrías que la representación de la Figura 5.24(b). De acuerdo con esto, podría pensarse que un filtrado paso alto dejaría un espectro como el de la Figura 5.25, con el siguiente ahorro de ancho de banda; además, parece que a partir de la banda lateral superior seríamos capaces de recuperar la señal completa en banda base con sencillas operaciones. Desgraciadamente, la argumentación no es correcta; el origen de esta aparente paradoja proviene de que hemos basado nuestro razonamiento en el espectro de potencia –que, efectivamente, tiene las simetrías indicadas– cuando la señal en banda base que desearíamos reconstruir se corresponde con una *realización* particular $\{a[n]\}$ del proceso estocástico discreto $\{A[n]\}$ y cuyo espectro (suponiendo una señal truncada en tiempo) $S(j\omega)$ ya no es hermítico. Lo que ocurre es que, lo que definimos como densidad espectral de potencia,

coincide con el promedio de los espectros correspondientes *a todas las realizaciones* del proceso $\{A[n]\}$ (considerado de duración infinita, véase (3.269)) y este promediado sí produce un resultado hermítico. Por eso, para referirnos a los espectros correspondientes a las señales en banda base $s(t)$ y paso banda $x(t)$ asociadas a la transmisión de una secuencia particular $\{a[n]\}$, es más conveniente conceptualmente recurrir a la representación de la Figura 5.33, donde se pone de manifiesto la falta de simetría en $S(j\omega)$ y $X(j\omega)$ de la que hemos hablado.

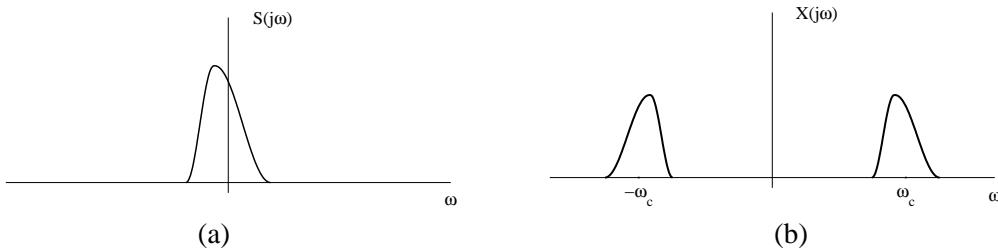


Figura 5.33. Espectro (determinista) (a) en banda base y (b) paso banda, correspondientes a una realización de los procesos $s(t)$ y $x(t)$.

5.4.2. Receptores para PAM paso banda

Comenzaremos por deducir una posible estructura de receptor para PAM paso banda suponiendo que el canal es ideal, es decir, cuando no introduce ni ruido ni distorsión. Un receptor para PAM paso banda podría recuperar la señal compleja en banda base realizando una demodulación compleja consistente en multiplicar la señal recibida por la exponencial $e^{-j\omega_ct}$, lo que tiene el efecto de trasladar el espectro de $y(t)$ hacia la izquierda ω_c rad/seg. Esta operación se esquematiza en la Figura 5.34.

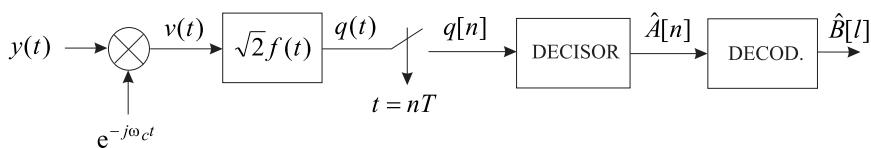


Figura 5.34. Esquema de un receptor para PAM paso banda.

El filtro genérico $f(t)$ que aparece en dicha figura tiene una función análoga al filtro receptor para PAM y se puede diseñar de acuerdo con cualquiera de los criterios expuestos en el Apartado 5.1.2. En general este filtro tendrá una respuesta al impulso compleja y tiene como misión adicional eliminar aquella parte de la señal compleja a su entrada que se encuentra centrada en $-2\omega_c$ rad/seg, por lo que tendrá una característica paso bajo. Para sistemas de banda estrecha, esto es, aquellos en que ω_c es mucho mayor que el ancho de banda de la señal transmitida, esta última tarea no plantea ninguna dificultad práctica. El

factor $\sqrt{2}$ sirve para que la potencia a la salida del filtro receptor sea la misma que a su entrada.

El muestreo a periodo de símbolo de la Figura 5.34 tiene la misma justificación que en el caso de PAM en banda base, aunque ahora hay que tener en cuenta que la señal $q(t)$ a su entrada es compleja, por lo que el muestreador produce una secuencia de observaciones $q[n]$ que también son complejas. El efecto de la operación de demodulación y filtrado sobre el espectro de la señal recibida $Y(j\omega)$ puede verse en la Figura 5.35.

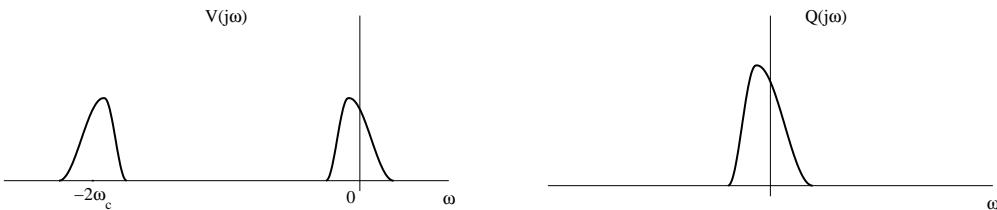


Figura 5.35. Espectro de la señal recibida (a) tras la multiplicación por la exponencial compleja y (b) tras pasar por el filtro receptor.

Matemáticamente, la señal a la entrada del muestreador es

$$q(t) = (y(t)e^{-j\omega_c t}) * (\sqrt{2}f(t)) \quad (5.76)$$

esto es,

$$q(t) = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)y(t - \tau)e^{j\omega_c \tau} e^{-j\omega_c t} d\tau = e^{-j\omega_c t} \cdot (y(t) * (\sqrt{2}f(t)e^{j\omega_c t})) \quad (5.77)$$

por lo que la realización de la Figura 5.34, resulta equivalente a filtrar primero la señal con un filtro paso banda complejo de respuesta $\sqrt{2}f(t)e^{j\omega_c t}$ y realizar la demodulación después, tal como se esquematiza en la Figura 5.36.

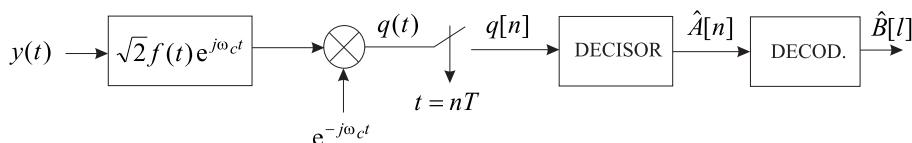


Figura 5.36. Esquema de un receptor para PAM paso banda equivalente al de la Figura 5.34.

Algunas de las señales y filtros que intervienen en las estructuras de la Figura 5.36 son complejos, por lo que será necesario separarlos en sus partes en fase y cuadratura de cara a una implementación práctica. Esta separación se lleva a cabo en las estructuras de las Figuras 5.37 y 5.38. Como podemos ver, la implementación de un receptor de PAM paso banda es equivalente a la de dos receptores PAM en banda base operando en paralelo, de ahí la necesidad de colocar dos muestreadores o dos filtros receptores.

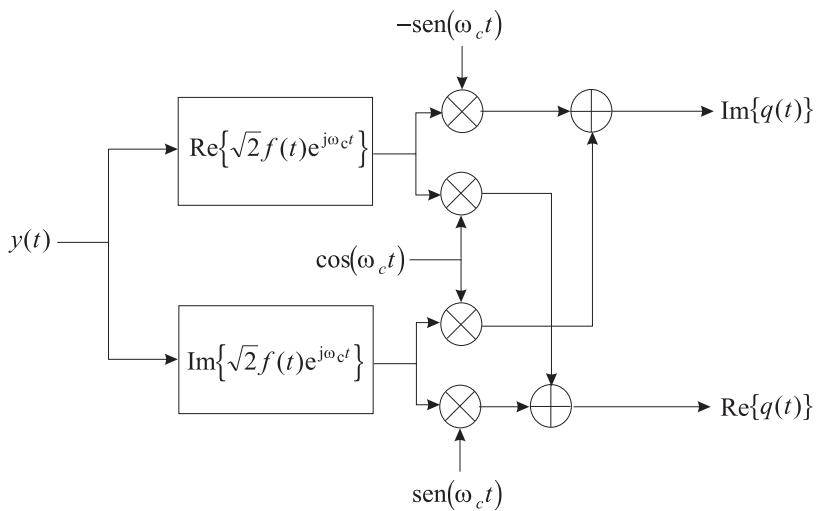


Figura 5.37. Esquema de un receptor para PAM paso banda, implementando primero el filtro complejo del receptor y separando las componentes en fase y cuadratura.

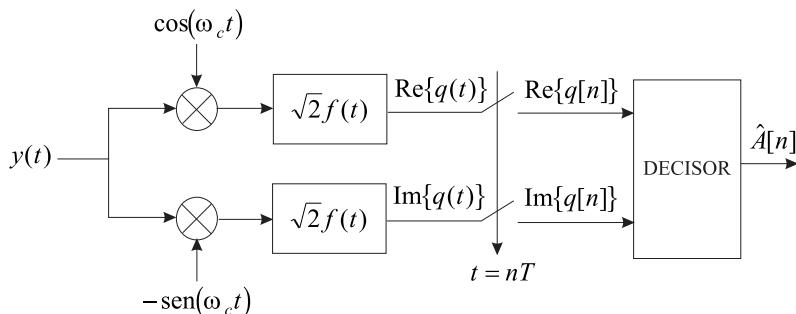


Figura 5.38. Esquema de un receptor para PAM paso banda, implementando primero la demodulación con la exponencial compleja y separando las componentes en fase y cuadratura.

5.4.3. Características del ruido en el receptor

Supongamos ahora que tenemos un canal que introduce ruido gausiano $n(t)$ con densidad espectral de potencia $S_n(j\omega)$, lo que supone una generalización con respecto al ruido blanco considerado en el Apartado 5.2.2. Nuestro objetivo es caracterizar el ruido a la salida del muestreador complejo de la Figura 5.36. Este ruido complejo determinará, junto con la señal recibida, las prestaciones del sistema de comunicaciones, por lo que esta caracterización es de capital importancia.

De la Figura 5.39 se deduce que la secuencia de ruido a la entrada del decisor, que denotamos por $z[k]$, se obtiene tras haber inyectado en el sistema de la Figura 5.36 el proceso real de ruido $n(t)$. En el Apartado 3.3.7 se presentan algunas propiedades interesantes de

los procesos gausianos complejos y que utilizaremos aquí.

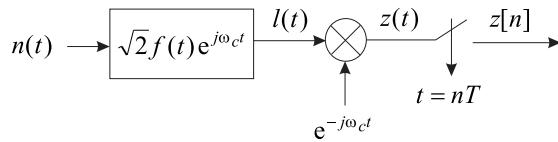


Figura 5.39. Diagrama de bloques y señales que intervienen en la demodulación de la señal de ruido $n(t)$ presente en el canal.

Definiendo (véase Figura 5.39)

$$f_c(t) = \sqrt{2}f(t)e^{j\omega_c t} \quad (5.78)$$

$$l(t) = n(t) * f_c(t) \quad (5.79)$$

$$z(t) = l(t)e^{-j\omega_c t} \quad (5.80)$$

y utilizando los resultados del Apartado 3.3.7, podemos razonar que:

1. El proceso $z(t)$ será estacionario en sentido estricto sólo si el proceso $l(t)$ es circularmente simétrico. El que $z(t)$ no fuese estacionario complicaría el análisis en gran medida.
2. El proceso $l(t)$ es circularmente simétrico si se cumple que ω_c es mayor que el ancho de banda del filtro complejo paso banda $f_c(t)$ (sistema de banda estrecha). La densidad espectral de potencia de $l(t)$ es

$$S_l(j\omega) = 2S_n(j\omega)|F(j\omega - j\omega_c)|^2. \quad (5.81)$$

En aquellos casos en que las condiciones anteriores se verifiquen, podemos extraer las siguientes consecuencias:

1. El proceso $z(t)$ es circularmente simétrico y su densidad espectral de potencia es

$$S_z(j\omega) = 2S_n(j\omega + j\omega_c)|F(j\omega)|^2 \quad (5.82)$$

Si el proceso $z(t)$ es circularmente simétrico, sus partes real e imaginaria, respectivamente $z_r(t)$ y $z_i(t)$, tienen la misma varianza y son independientes para cualquier instante t dado. Ello no significa, no obstante, que $z_r(t_1)$ y $z_i(t_2)$ sean independientes cualesquiera que sean t_1 y t_2 , $t_1 \neq t_2$. Para que esto último sea cierto, es necesario que el espectro de $S_z(j\omega)$ sea hermítico, esto es, que $S_z(j\omega) = S_z^*(-j\omega)$. Para el caso en que $n(t)$ fuese blanco, esto se satisfaría si el filtro $f(t)$ fuese real.

2. El proceso $z[n]$ es circularmente simétrico con densidad espectral de potencia

$$S_z(e^{j\omega}) = \frac{2}{T} \sum_k S_n \left(j\frac{\omega}{T} + j\frac{\omega_c}{T} - j\frac{2\pi k}{T} \right) \left| F \left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi k}{T} \right) \right|^2 \quad (5.83)$$

por lo que sus partes real e imaginaria, $z_r[n]$ y $z_i[n]$ respectivamente, son independientes para cualquier instante n considerado. De nuevo, para que $z_r[n_1]$ y $z_i[n_2]$ sean independientes para cualesquiera n_1 y n_2 , $n_1 \neq n_2$, debe cumplirse que el espectro $S_z(e^{j\omega})$ sea simétrico con respecto al origen. Ello se cumple, por ejemplo, si el ruido es blanco y la función de ambigüedad $f(t) * f^*(-t)$ satisface el criterio de Nyquist para periodo T .

A partir de (5.83), la varianza del ruido complejo discreto $z[n]$ es

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_z(e^{j\omega}) d\omega \quad (5.84)$$

que, para el caso en que $n(t)$ es ruido blanco, con densidad espectral de potencia $N_0/2$ W/Hz y la función de ambigüedad de $f(t)$ satisface el criterio de Nyquist resulta en

$$\sigma_z^2 = N_0 \quad (5.85)$$

Debe tenerse presente que si el ruido es circularmente simétrico, el resultado anterior implica que tanto su parte real como su parte imaginaria son independientes y con varianza $N_0/2$.

Partiendo de la expresión de la fdp de una gausiana compleja en (3.86), para el caso que nos ocupa podemos escribir la fdp del ruido discreto como

$$f_Z(z) = \frac{1}{\pi N_0} \exp\left(-\frac{|z|^2}{N_0}\right) \quad (5.86)$$

El lector puede preguntarse por qué hemos elegido para la determinación de las características de ruido en el receptor la estructura de la Figura 5.36 y no la de la Figura 5.34 cuando ambas son equivalentes desde el punto de vista del análisis –determinista– de señales. La razón es que con la estructura de la Figura 5.34 enseguida encontraríamos algunas dificultades: el proceso complejo a la salida del demodulador *no es estacionario en sentido estricto*, ¡ni siquiera lo son sus partes real e imaginaria!

5.4.4. Canal discreto equivalente

En este apartado determinaremos el canal discreto equivalente para el caso de modulaciones PAM paso banda cuando se transmiten a través de un canal lineal gausiano, con respuesta al impulso $h(t)$. En el apartado precedente hemos caracterizado estadísticamente el ruido a la entrada del decisor; ahora queremos obtener la parte debida a la señal de información. Para ello, consideraremos el modelo de un sistema de comunicaciones para PAM paso banda con transmisor y receptor los de las Figuras 5.27 y 5.36, respectivamente.

Recuperemos la expresión de la señal transmitida, según (5.60):

$$x(t) = \sqrt{2} \Re e \left\{ \sum_n A[n] g(t - nT) e^{j\omega_c t} \right\} \quad (5.87)$$

Al pasar por el canal, la señal recibida es $y(t) = x(t) * h(t) + n(t)$. Esta señal es filtrada por $\sqrt{2}f(t)e^{j\omega_c t}$ y, posteriormente, demodulada

$$q(t) = \left(y(t) * (\sqrt{2}f(t)e^{j\omega_c t})e^{-j\omega_c t} \right) \quad (5.88)$$

En las Figuras 5.33 y 5.35 se detallan los espectros de la señal en banda base $s(t)$, la señal modulada $x(t)$, la señal recibida $y(t)$ en ausencia de ruido y la señal a la salida del demodulador $q(t)$. Razonando sobre dichos espectros, es fácil ver que

$$y(t) = \sqrt{2}\mathcal{R}e \left\{ \sum_n A[n]g_r(t - nT)e^{j\omega_c t} \right\} + n(t) \quad (5.89)$$

donde $g_r(t) = g(t) * h_{eq}(t)$, siendo $h_{eq}(t)$ el llamado *canal equivalente en banda base*:

$$h_{eq}(t) \doteq e^{-j\omega_c t}h(t); \quad H_{eq}(j\omega) = H(j\omega + j\omega_c) \quad (5.90)$$

verificándose que, en general, $h_{eq}(t)$ será complejo.

Asimismo, podemos escribir que

$$q(t) = \sum_n A[n]p(t - nT) + z(t) \quad (5.91)$$

donde $p(t) = g_r(t) * f(t) = g(t) * h_{eq}(t) * f(t)$. La función $p(t)$ incluye todos los efectos sobre la señal de información debidos a los filtros transmisor y receptor, al canal, y al proceso de modulación/demodulación¹⁶, y $z(t)$ es el ruido equivalente en banda base, según (5.80).

Todavía es posible obtener una caracterización más simple incluyendo el proceso de muestreo del receptor; así, reproduciendo los resultados de los apartados 5.1.3 y 5.3 es posible obtener el *canal discreto equivalente en banda base*, que no es más que

$$p[n] = p(nT) \quad (5.92)$$

cuya respuesta en frecuencia es, entonces,

$$\begin{aligned} P(e^{j\omega}) &= \frac{1}{T} \sum_k P \left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi k}{T} \right) \\ &= \frac{1}{T} \sum_k G \left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi k}{T} \right) H_{eq} \left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi k}{T} \right) F \left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi k}{T} \right) \end{aligned} \quad (5.93)$$

de modo que si el conjunto de los filtros transmisor, receptor y canal equivalente en banda base cumple el criterio de Nyquist para periodo de símbolo T el canal discreto equivalente será $\delta[k]$.

Con el canal equivalente se consiguen dos objetivos:

¹⁶Debe tenerse presente que en todo momento estamos suponiendo que la frecuencia –y la fase– usadas en la demodulación son idénticas a las empleadas en la modulación. Asimismo, estamos suponiendo que el periodo de muestreo coincide exactamente con el periodo de símbolo y que la fase de muestreo es óptima. En el Capítulo 11 abandonaremos esta suposición ideal.

1. Reducir el sistema PAM paso banda al esquema de la Figura 5.7.
2. Identificar PAM paso banda y PAM en banda base. La única diferencia entre ambas es que los símbolos, el canal discreto equivalente y el ruido discreto son complejos en la primera y reales en la segunda. Ello permite estudiar la PAM en banda base como un caso particular de PAM paso banda.

Ejemplo 5.9

Calculemos el canal discreto equivalente en banda base para los canales de los Ejemplos 5.5 y 5.6. Recordemos que la forma genérica del canal $h(t) = \delta(t) + \beta\delta(t - \tau_1)$, y el filtro receptor $f(t)$ se adaptaba al transmisor, $f(t) = g(-t)$, con $g(t)$ un filtro en raíz de coseno alzado con factor de caída $\alpha = 0,35$; por tanto, la función de ambigüedad de $g(t)$, $r_g(t) = g(t) * g(-t)$ es un coseno alzado. Los dos casos considerados son:

a) $\tau_1 = T$. En este caso, $p(t) = r_g(t) * (\delta(t) + \beta\delta(t - T)e^{-j\omega_c T})$. Como $r_g(t)$ cumple el criterio de Nyquist para periodo T , tendremos

$$p[k] = \delta[k] + \beta e^{-j\omega_c T} \delta[k - 1] \quad (5.94)$$

que, como se ve, es en general una respuesta al impulso compleja pero de duración finita.

b) $\tau_1 = T/2$. De nuevo, $p(t) = r_g(t) * (\delta(t) + \beta\delta(t - T/2)e^{-j\omega_c T/2})$. Ahora tendremos

$$p[k] = \delta[k] + \beta e^{-j\omega_c T/2} \sum_n r_g(kT - T/2 - nT) \quad (5.95)$$

que, de nuevo, será en general una respuesta al impulso compleja. A diferencia del caso anterior, la respuesta será de duración infinita, debido a que el coseno alzado desplazado $T/2$ segundos ya no cumple el criterio de Nyquist.

Finalmente, para el caso en que $p[n] = \delta[n]$, y el ruido $z[n]$ es blanco, gausiano y circularmente simétrico, es fácil determinar cómo debe operar el decisor óptimo según el criterio de máxima verosimilitud, como demostramos a continuación. De nuevo, para el caso en que existe interferencia entre símbolos, referimos al lector al Capítulo 6. Si la señal a la entrada del decisor es de la forma $q[n] = A[n] + z[n]$, entonces es evidente que las decisiones se pueden tomar símbolo a símbolo. Además, a partir de la fdp del ruido en (5.86), es inmediato escribir la fdp de las observaciones en el instante n_0 condicionada a la transmisión del símbolo $a_0[n_0]$ como

$$f_{q|A}(q[n_0]|a[n_0]) = \frac{1}{\pi N_0} \exp\left(-\frac{|q[n_0] - a[n_0]|^2}{N_0}\right) \quad (5.96)$$

por lo que es obvio que para maximizar la fdp condicionada, basta con minimizar el exponente, lo que a su vez implica elegir aquel símbolo de la constelación $\hat{A}[n_0]$ tal que la distancia cuadrática $|q[n] - \hat{A}[n]|^2$ es mínima. Recordemos que, de forma equivalente, la regla de decisión se podía expresar definiendo unas regiones de decisión que, en este caso, vendrán delimitadas por rectas.

Para modulaciones PAM paso banda el diagrama de ojo se construye de forma análoga al Apartado 5.3.1, con la salvedad de que ahora en realidad tenemos que visualizar dos diagramas: uno para la componente en fase y otro para la componente en cuadratura. Por esta razón, a efectos de capturar en un solo gráfico el comportamiento de un sistema PAM paso banda, se suele recurrir al llamado *diagrama de dispersión* (“*scatter diagram*”), que no es más que una representación de la señal discreta compleja disponible bien en el transmisor o bien en el receptor. Por ejemplo, en recepción se representarían las P muestras más recientes de $\{q[n]\}$, donde P tiene en cuenta el efecto de “persistencia” propio de un osciloscopio.

Ejemplo 5.10

La Figura 5.40(a) muestra el diagrama de dispersión en recepción correspondiente a una constelación QPSK (con símbolos en $\{\pm 1 \pm j\}$) cuando la varianza del ruido $\sigma_z^2 = 0,01$. La Figura 5.40(b) incluye, además, el efecto de un canal discreto $p[n] = \delta[n] - 0,3\delta[n - 1]$. El lector puede tratar de razonar el porqué de las nubes de puntos observadas, teniendo en cuenta que $q[n] = A[n] - 0,3A[n - 1] + z[n]$.

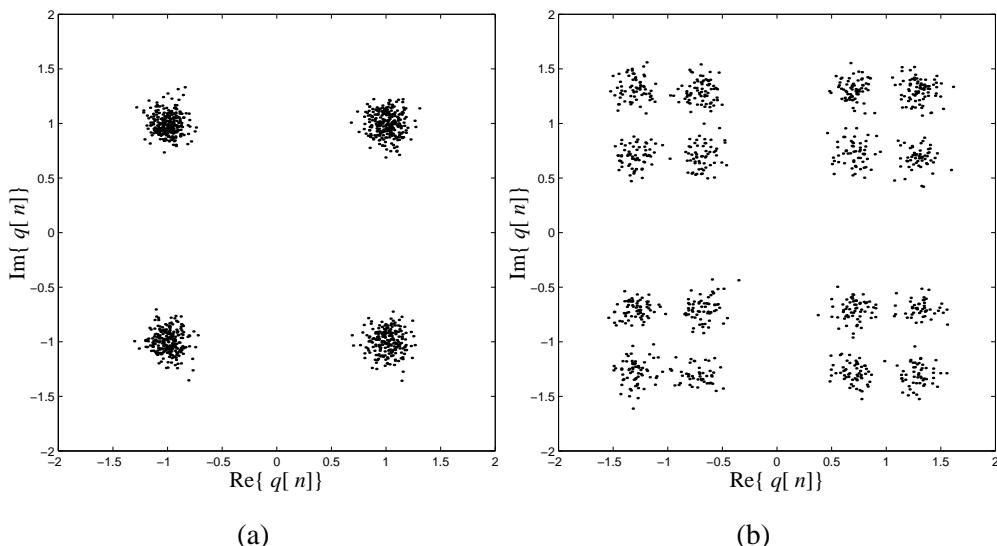


Figura 5.40. Diagramas de dispersión del Ejemplo 5.10.

5.4.5. Probabilidades de error

Para el cálculo de probabilidades de error alcanzables con las modulaciones paso banda sobre canales gausianos podemos, como en el Apartado 5.2.3, recurrir al canal discreto equivalente y a los resultados del Apartado 4.4.2, particularizados para detectores M -arios en espacios multidimensionales. Por ejemplo, en las ecuaciones (4.72-4.82) se presenta el cálculo detallado de la probabilidad de error de símbolo para una constelación equivalente a la 16-QAM. En nuestro caso, como el ruido es circularmente simétrico, la varianza de ruido por dimensión es $N_0/2$, por lo que, con las modificaciones pertinentes para tener en cuenta

la energía de símbolo, (4.82) se convierte en

$$P_e = 3Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{5N_0}}\right) - \frac{9}{4}Q^2\left(\sqrt{\frac{E_s}{5N_0}}\right) \quad (5.97)$$

Esta expresión se puede poner en términos de E_b/N_0 sin más que tener en cuenta que para la 16-QAM, $E_s = 4E_b$.

Del mismo modo que en el Apartado 5.2.3, es posible obtener cotas a la probabilidad de error basadas en la cota de la unión, así como aproximaciones para E_s/N_0 grande basadas en los símbolos a distancia mínima y el número de vecinos a distancia mínima. En el siguiente ejemplo ilustramos el uso de estas expresiones para el caso de una constelación 8-PSK.

Ejemplo 5.11

Considérese la transmisión de una señal 8-PSK descrita mediante (5.69), con $\varphi[n] \in \{0, \pm\pi/4, \pm\pi/2, \pm3\pi/4, \pi\}$ y codificación Gray, tal como se muestra en la Figura 5.41. La señal atraviesa un canal blanco y gausiano con densidad espectral de potencia $N_0/2$ W/Hz y se utiliza un receptor como el de la Figura 5.36, donde $p(t) = g(t) * f(t)$ cumple el criterio de Nyquist. En este caso, el canal discreto equivalente es tal que $q[n] = A[n] + z[n]$, con $z[n]$ ruido blanco, gausiano, circularmente simétrico, con varianza $\sigma_z^2 = N_0$.

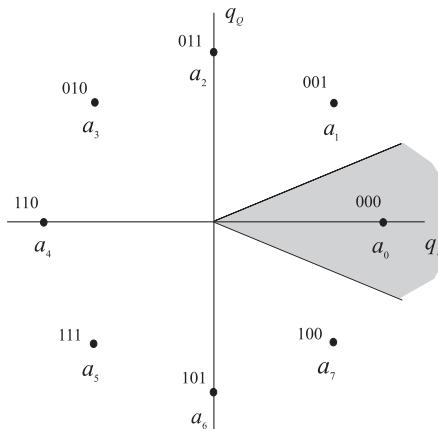


Figura 5.41. Constelación 8-PSK con codificación Gray. La región de decisión del símbolo a_0 aparece sombreada.

Si los símbolos transmitidos son equiprobables, por simetría basta con calcular la probabilidad de error para el símbolo transmitido $a_0 = \sqrt{E_s}$, que se corresponde con la secuencia binaria 000 (véase figura). La probabilidad de acierto es la probabilidad de que q se encuentre en la región sombreada. Si q_I y q_Q denotan las componentes en fase y cuadratura de q , es decir, $q = q_I + jq_Q$, entonces la probabilidad de acierto es la probabilidad de que

$$\frac{|q_Q|}{q_I} < \tan(\pi/4) \quad \text{y} \quad q_I > 0$$

o, de forma equivalente, de que

$$|q_Q| < q_I \cdot \tan(\pi/4) \quad \text{y} \quad q_I > 0 \quad (5.98)$$

Observando que q_Q y q_I siguen sendas distribuciones gausianas con medias respectivas 0 y $\sqrt{E_s}$, y varianza $N_0/2$ y son mutuamente independientes, podemos escribir la siguiente ecuación para el cálculo de la probabilidad de error de símbolo

$$P_e = 1 - 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-(q_I - \sqrt{E_s})^2/N_0}}{\sqrt{\pi N_0}} \int_0^{q_I \tan(\pi/4)} \frac{e^{-q_Q^2/N_0}}{\sqrt{\pi N_0}} dq_Q dq_I \quad (5.99)$$

Para la cota de la unión necesitamos las siguientes distancias: $d(a_0, a_1) = 2\sqrt{E_s} \operatorname{sen}(\pi/8)$; $d(a_0, a_2) = \sqrt{2E_s}$; $d(a_0, a_3) = 2\sqrt{E_s} \operatorname{sen}(3\pi/8)$; $d(a_0, a_4) = 2\sqrt{E_s}$. Por tanto,

$$P_e \leq 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_s \operatorname{sen}^2(\pi/8)}{N_0}}\right) + 2Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) + 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_s \operatorname{sen}^2(3\pi/8)}{N_0}}\right) + Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right) \quad (5.100)$$

Por otra parte, la aproximación basada en los símbolos a distancia mínima es

$$P_e \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_s \operatorname{sen}^2(\pi/8)}{N_0}}\right) \quad (5.101)$$

La Figura 5.42 muestra la probabilidad de error de símbolo P_e en función de la relación E_b/N_0 obtenida según (5.99) y la cota de la unión (5.100), recordando que, para la 8-PSK, $E_s = 3E_b$. Es interesante señalar que, para el rango de E_b/N_0 considerado en la figura, la aproximación (5.101) produce una curva indistinguible de la P_e exacta.

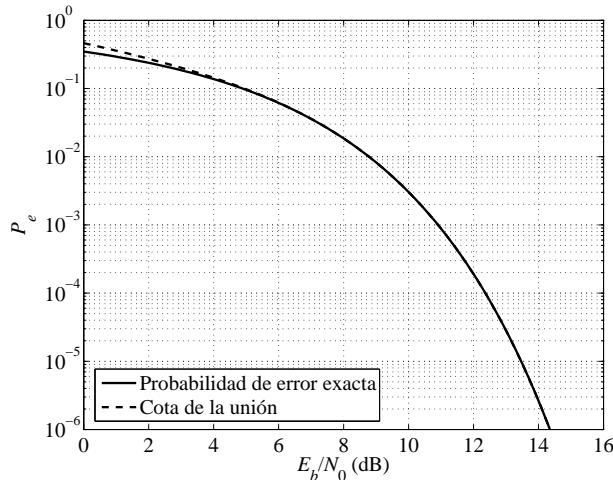


Figura 5.42. P_e exacta y cota de la unión para una constelación 8-PSK en un canal gausiano.

5.5. IMPLEMENTACIÓN DISCRETA DE SISTEMAS PAM

Aunque las arquitecturas propuestas a lo largo de este capítulo tienen como propósito el justificar las operaciones que se deben realizar para modular y demodular pulsos en am-

plitud, rara vez los diagramas de bloques de su implementación física coinciden totalmente con los aquí presentados. Así, por ejemplo, aunque nuestro receptor trabaja con una tasa de muestreo igual a la de símbolo, a menudo resulta conveniente tomar varias muestras por periodo de símbolo. Este es el caso de los llamados *igualadores fraccionarios*, descritos en el Capítulo 6, para los que el *sobremuestreo* facilita la labor de compensación de las distorsiones introducidas por el canal. Otro ejemplo es el de los algoritmos de recuperación del instante de muestreo del Capítulo 11, en los que disponer de varias muestras por periodo de símbolo posibilita la tarea de interpolación de la señal para obtener la muestra en el instante deseado. En este apartado discutiremos una ventaja adicional de operar a una fracción del periodo de símbolo: la implementación discreta de la modulación y demodulación. Los principios aquí expuestos servirán de base para desarrollos posteriores en los Capítulos 6, 8 y 11.

Considere la arquitectura del modulador y demodulador para PAM en banda base de las Figuras 5.2 y 5.18, respectivamente. Es evidente que, si deseásemos una implementación directa de ambas estructuras, necesitaríamos disponer de la circuitería analógica tal que sintetizase el filtro $g(t)$. No obstante, un vistazo a (5.26), revela que si el pulso conformador $g(t)$ es de tipo raíz cuadrada de coseno alzado, dicha síntesis no es sencilla. A continuación, derivaremos tanto para el modulador como para el demodulador estructuras equivalentes y más convenientes para su implementación física. Por su importancia, nos centraremos en sistemas que emplean pulsos en raíz cuadrada de coseno alzado, pero nuestro desarrollo es fácilmente ampliable a cualquier otro pulso de ancho de banda finito.

La observación clave es que, puesto que el pulso en raíz de coseno alzado tiene un ancho de banda $(1 + \alpha)\pi/T$ rad/seg, según el teorema del muestreo de Nyquist (Apartado 2.4.1) podemos representar la señal en banda base $s(t)$ exactamente a partir de sus muestras, siempre y cuando estas hayan sido tomadas con periodo menor o igual que $T/(1 + \alpha)$ seg. Por razones prácticas, es conveniente que haya un número entero de muestras por periodo de símbolo; además, recordemos que el factor de caída α puede variar entre 0 y 1. Todo ello sugiere representar $s(t)$ a partir de sus muestras tomadas a $T_s = T/2$ seg, aunque en otras implementaciones prácticas el periodo puede ser incluso menor. De acuerdo con (2.218) podemos escribir

$$s(t) = \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} s(mT_s) \delta(t - mT_s) \right) * h_r(t) \quad (5.102)$$

donde $h_r(t)$ es un filtro paso bajo ideal de ganancia T_s y frecuencia de corte ω_c igual a la mitad de la frecuencia de muestreo, $\omega_c = \pi/T_s$ rad/seg, por lo que su respuesta al impulso es

$$h_r(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right) \quad (5.103)$$

Es interesante señalar que las consideraciones anteriores son igualmente válidas si $s(t)$ es una señal compleja, esto es, la señal en banda base correspondiente a una modulación PAM paso banda. Naturalmente, en este caso las muestras $s(mT_s)$ son complejas.

Implementación discreta del modulador

Veamos cómo podemos generar las muestras $s[m] \doteq s(mT_s)$ a partir de la secuencia de símbolos $\{A[n]\}$ y el pulso conformador muestreado con periodo T_s , que denotaremos por $g_s[m] \doteq g(mT_s)$. Nuestro punto de partida es el muestreo de la Ecuación (5.1):

$$\begin{aligned} s[m] &= \sum_n A[n]g(mT_s - nT) \\ &= \sum_n A[n]g_s[m - 2n] \\ &= \sum_{n \text{ par}} A[n/2]g_s[m - n] \\ &= A_e[m] * g_s[m] \end{aligned} \quad (5.104)$$

donde la secuencia $A_e[m]$ se genera pasando $A[n]$ por un bloque de inserción de ceros (véase Apartado 2.4.2)

$$A_e[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A[k]\delta[n - 2k] = \begin{cases} A\left[\frac{n}{2}\right] & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \quad (5.105)$$

Por tanto, las muestras deseadas de $s(t)$ se obtienen modulando el pulso discreto $g_s[m]$ con la secuencia de símbolos $A[n]$. Esta interpretación de $s[m]$ como una señal procedente de una modulación en amplitud en tiempo discreto es evidente en la segunda línea de (5.104). En este sentido, el bloque de inserción de ceros permite adaptar la tasa de la secuencia de símbolos ($1/T$ seg $^{-1}$) a la de muestreo ($2/T$ seg $^{-1}$).

El esquema resultante se representa en la Figura 5.43, en la que el conversor discreto-continuo (D/C) con periodo T_s se considera ideal. Recordemos del Apartado 2.4 que el bloque D/C constaba de un conversor de secuencia a tren de impulsos y de un filtro de reconstrucción paso bajo ideal. En la práctica el tren de impulsos se sustituye por un tren de pulsos determinados por el circuito de retención utilizado y que producen la llamada *distorción de apertura*. Dicha distorsión se puede corregir modificando la función de transferencia del filtro de reconstrucción, como en (2.221), o, mejor aún, alterando la respuesta al impulso del pulso conformador muestreado $g_s[n]$ para incorporar la corrección.

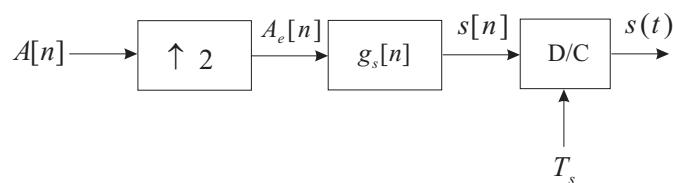


Figura 5.43. Implementación en tiempo discreto de un modulador PAM banda base.

En cualquier caso, es interesante subrayar la flexibilidad que la estructura de la Figura 5.43 permite ganar, ya que podemos cambiar fácilmente de pulso conformador sin más

que utilizar sus muestras a periodo $T/2$ en el bloque $g_s[n]$. La única condición que se debe satisfacer es que el ancho de banda del pulso conformador no exceda $\pi/T_s = 2\pi/T$ rad/seg. Obviamente, ello es aplicable a los pulsos en raíz de coseno alzado, para cualquier factor de caída $\alpha < 1$.

La extensión del diagrama de la Figura 5.43 al caso en que $T_s = T/M$, para cualquier entero M es inmediata, sin más que considerar el muestreo de $g(t)$ con periodo T_s para producir $g_s[m]$ y generar $A_e[n]$ insertando $M - 1$ ceros por periodo de símbolo. También es relativamente sencillo considerar el caso $T_s = TL/M$, con L y M enteros, a partir de las nociones de interpolación y diezmado presentadas en el Apartado 2.4.2.

Implementación discreta del demodulador

De un modo análogo al modulador, podemos construir un demodulador que realice el filtro adaptado en tiempo discreto para simplificar la implementación física de la estructura de la Figura 5.18. Nuevamente, nos centraremos en la señal en banda base, lo que implica, en el caso de PAM paso banda, una traslación previa a banda base mediante una demodulación con una exponencial compleja. Sean $r(t)$ y $q(t)$ las señales a la entrada y salida, respectivamente, del filtro receptor $f(t)$. En caso de que $f(t)$ sea el filtro adaptado, bien al pulso conformador $g(t)$, o bien a la respuesta conjunta del pulso conformador y el canal $g_r(t) = g(t) * h(t)$, es fácil concluir que el ancho de banda de la señal $q(t)$ no excederá nunca el de $g(-t)$, que es un pulso en raíz de coseno alzado. Por consiguiente, de nuevo $q(t)$ se podrá representar a partir de sus muestras tomadas con periodo $T_s = T/2$ seg, muestras que denotaremos por $q_s[n] \doteq q(nT_s)$. Recordemos que a la entrada del decisor únicamente necesitamos las muestras de $q(t)$ tomadas con periodo de símbolo T , $q[n] \doteq q(nT)$. Dichas muestras se pueden obtener a partir de $q_s[n]$ tomando una de cada dos, puesto que $q[n] = q_s[2n]$.

Nuestro deseo es situar el filtro adaptado después del muestreador con periodo T_s , con el fin de facilitar su implementación. Para simplificar el razonamiento, supongamos por un momento que el canal no introduce ruido; en tal caso, la señal recibida $r(t) = s(t) * h(t)$ estará limitada en banda, como mínimo tanto como $s(t)$, que, a su vez, no excede de π/T_s rad/seg. Esto quiere decir que $r(t)$ es representable de forma exacta a partir de sus muestras tomadas con periodo T_s , de un modo similar a (5.102). Si $f[n]$ y $r[n]$ denotan las secuencias

obtenidas al muestrear respectivamente $f(t)$ y $r(t)$ con periodo T_s , podemos escribir

$$\begin{aligned}
 q_s[m] &= (r(t) * f(t))|_{t=mT_s} \\
 &= \left(\sum_n r[n] \delta(t - nT_s) * h_r(t) * \sum_k f[k] \delta(t - kT_s) * h_r(t) \right) \Big|_{t=mT_s} \\
 &= T_s \left(\sum_n r[n] \delta(t - nT_s) * \sum_k f[k] \delta(t - kT_s) * h_r(t) \right) \Big|_{t=mT_s} \\
 &= T_s \left(\sum_k \sum_l r[l-k] f[k] \delta(t - lT_s) * h_r(t) \right) \Big|_{t=mT_s} \\
 &= T_s \sum_k r[m-k] f[k] \\
 &= T_s (r[m] * f[m])
 \end{aligned} \tag{5.106}$$

donde hemos usado el hecho de que $h_r(t)$ es un filtro paso bajo ideal de ganancia T_s , por lo que $h_r(t) * h_r(t) = T_s h_r(t)$. Como vemos en (5.106) podemos conseguir $q_s[n]$ sin más que muestrear la señal recibida $r(t)$ con periodo T_s y pasarla por el filtro en tiempo discreto $f[n]$, tal como se representa en la Figura 5.44, en la que se ha prescindido de la multiplicación por T_s en aras de una mayor claridad. El conversor continuo-discreto se supone ideal.

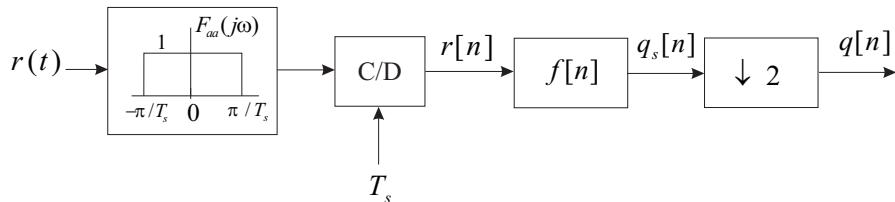


Figura 5.44. Implementación en tiempo discreto de un demodulador PAM banda base.

Si ahora suponemos que el canal introduce ruido blanco, la señal recibida $r(t)$ ya no será limitada en banda, por lo que no es posible su representación exacta a partir de sus muestras. No obstante, si hacemos pasar la señal $r(t)$ por un filtro paso bajo ideal $f_{aa}(t)$ con respuesta en frecuencia $F_{aa}(j\omega)$ de ganancia unidad y frecuencia de corte π/T_s rad/seg, es evidente que la señal $r(t) * f_{aa}(t)$ sí cumplirá las condiciones del teorema del muestreo de Nyquist y será representable a partir de sus muestras a periodo T_s . De hecho, el filtro $f_{aa}(t)$ suele recibir el nombre de *filtro anti-aliasing*, porque evita la aparición de este fenómeno en el proceso de muestreo.

Obsérvese que el filtro anti-aliasing será transparente para la parte útil de la señal recibida, ya que $s(t) * h(t) * f_{aa}(t) = s(t) * h(t)$. Cabe, por tanto, preguntarse si la colocación del filtro $f_{aa}(t)$ altera en algo las características del ruido presente en la variable de decisión $q[n]$. Por fortuna, nada cambia: si consideramos la estructura del demodulador de la Figura 5.18, vemos que si antepusiésemos $f_{aa}(t)$ a $f(t)$, la componente de ruido a la salida

de $f(t)$ sería exactamente la misma que si $f_{aa}(t)$ no existiese. Esto es consecuencia de que $f_{aa}(t) * f(t) = f(t)$. Y, como hemos razonado más arriba, siempre que la señal de entrada esté limitada en banda a π/T_s rad/seg podemos implementar el filtro $f(t)$ en tiempo discreto; precisamente, la misión del filtro $f_{aa}(t)$ es limitar el ancho de banda del ruido a π/T_s rad/seg.

Como comentario final, cabe señalar que para sistemas paso banda el proceso de demodulación con una exponencial compleja también se puede implementar en tiempo discreto. Esta idea se explora en el Problema P5.8.

5.6. LECTURAS ADICIONALES

Todos los libros de comunicaciones digitales actuales se ocupan de las modulaciones lineales con bastante nivel de detalle. Buenos ejemplos de ello son los libros de Wilson [94], Bennedetto y Biglieri [7] y Proakis [61]. No obstante, la exposición realizada aquí se apoya en el libro de Lee y Messerschmitt [43], en particular para el tratamiento de los procesos complejos.

El libro de Starr, Cioffi y Silverman [79] contiene algunas disquisiciones interesantes sobre modulaciones en cuadratura, incluyendo las denominadas modulaciones de amplitud/fase sin portadora (CAP, “Carrierless Amplitude/Phase”), que se apuntan en el Ejemplo 5.8, y discute su aplicación a la transmisión sobre cable de pares.

PROBLEMAS

P5.1 Considere un sistema PAM en banda base tal que la respuesta combinada transmisor-receptor, $p(t)$, es un pulso triangular de la forma

$$p(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T} & |t| < T \\ 0 & |t| > T \end{cases} \quad (5.107)$$

donde T es el periodo de símbolo. El ruido introducido por el canal puede considerarse despreciable.

- 1.1. Demuestre que el pulso anterior cumple el criterio de Nyquist para la ausencia de ISI.
- 1.2. Represente el espectro de la señal a la salida del filtro receptor.
- 1.3. Suponga una constelación 2-PAM (Figura 5.1(a)). Represente el diagrama de ojo a la salida del filtro receptor y calcule su apertura horizontal.
- 1.4. Repita el apartado anterior para una constelación 4-PAM (Figura 5.1(b)).

P5.2 El diagrama de ojo también es útil para medir las posibles fluctuaciones del reloj de símbolo, que se traducen en una degradación del rendimiento del sistema. Suponga que el periodo de símbolo no es fijo, sino variante en el tiempo, esto es, $T(t)$. Por

simplicidad, trataremos una variación del tipo $T(t) = T_0 + \epsilon \operatorname{sen}(\omega_J t)$, donde T_0 es el periodo de símbolo nominal, $\epsilon \ll 1$ y $\omega_J \ll 2\pi/T_0$, de modo que $T(t)$ puede considerarse constante a lo largo de varios periodos de símbolo consecutivos. La respuesta combinada transmisor-receptor es

$$p(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T(t)} & |t| < T(t) \\ 0 & |t| > T(t) \end{cases} \quad (5.108)$$

y la constelación empleada es una 2-PAM. El ruido introducido por el canal puede considerarse despreciable.

- 2.1. Represente en diagrama de ojo (suponiendo una persistencia del osciloscopio infinita) de la señal a salida del filtro receptor y compárela con el del problema anterior.
- 2.2. Compruebe que, disponiendo del diagrama de ojo, es posible estimar el valor de ϵ .

P5.3 Sea un sistema de comunicaciones PAM en banda base con periodo de símbolo T seg y pulso transmisor de tipo coseno alzado con exceso de ancho de banda del 35 %. El ruido es gausiano con densidad espectral de potencia $N_0/2$ W/Hz y la respuesta en frecuencia del canal es la que se muestra en la Figura 5.45. El filtro receptor está adaptado a transmisor y canal, esto es, $f(t) = g_r(-t)$, con $g_r(t) = g(t) * h(t)$. Represente la densidad espectral de potencia del ruido a la salida del muestreador del receptor.

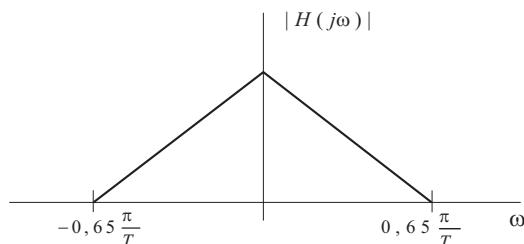


Figura 5.45. Respuesta del canal del Problema P5.3.

P5.4 Considere la transmisión de una señal binaria antipodal $A[n] \in \{-1, +1\}$ a través de un canal discreto equivalente con respuesta $p[n] = \delta[n] + 0,25\delta[n-1]$. El ruido es blanco y gausiano de varianza σ_z^2 .

- 4.1. Escriba la expresión exacta de la probabilidad de error de bit. (Ayuda: Observe que, cuando $A[n] = +1$, la salida del canal con probabilidad 1/2 toma la forma $q[n] = 1,25 + z[n]$ y, con probabilidad 1/2, $q[n] = 0,75 + z[n]$).

- 4.2. Si las decisiones $\hat{A}[n - 1]$ se pueden considerar (casi siempre) como correctas y se conoce el canal discreto equivalente $p[n]$, explique cómo se puede modificar el decisor convencional, realimentando las decisiones previas para reducir la probabilidad de error. ¿Qué ocurre si el símbolo decidido realimentado no es correcto?

P5.5 Considere la transmisión de una señal binaria antipodal $A[n] \in \{-1, +1\}$ a través de un canal discreto equivalente con respuesta al impulso $p[n] = 0,8\delta[n] + \delta[n - 1]$. El ruido es blanco y gausiano con varianza σ_z^2 . Por lo visto en este capítulo, $\hat{A}[n]$ se decide en función del signo de $q[n]$; sin embargo, en este caso, el mayor coeficiente del canal es $p[1]$.

- 5.1. Razone sobre la conveniencia de usar el signo de $q[n]$ para decidir sobre $\hat{A}[n - 1]$ en lugar de sobre $\hat{A}[n]$. Observe que esto simplemente implica un retardo de una muestra en la toma de decisiones.
- 5.2. Justifique analíticamente el razonamiento anterior calculando las probabilidades siguientes: $\Pr\{\text{sgn}(q[n]) \neq A[n]\}$, $\Pr\{\text{sgn}(q[n]) \neq A[n - 1]\}$, donde la función $\text{sgn}(x)$ es tal que devuelve 1 si $x > 0$ y -1 si $x < 0$.

P5.6 El espectro de una señal PAM en banda base (Ecuación 5.2) depende no sólo del pulso conformador, sino también de la densidad espectral de potencia de los símbolos enviados, lo que implica que podemos ayudar a la conformación espectral actuando sobre la autocorrelación de la secuencia $\{A[n]\}$. Suponga que deseamos transmitir una secuencia de símbolos blanca $\{A_b[n]\}$ y modificamos su espectro pasándola por un filtro discreto $c[n]$ con Transformada de Fourier $C(e^{j\omega})$, para producir una secuencia $\{A[n]\}$, de modo que $A[n] = A_b[n] * c[n]$. El pulso transmisor $g(t)$ es un filtro paso bajo ideal o, equivalentemente, un pulso en raíz de coseno alzado con $\alpha = 0$.

- 6.1. Escriba $S_A(e^{j\omega})$ en función de $S_{A_b}(e^{j\omega})$ y de $C(e^{j\omega})$.
- 6.2. Represente el espectro de la señal PAM $S_s(j\omega)$ para los siguientes casos: i) $c[n] = \delta[n] - \delta[n - 1]$; ii) $c[n] = \delta[n] + \delta[n - 1]$; iii) $c[n] = \delta[n] - \delta[n - 2]$.
- 6.3. Suponga que es sabido que $A_b[n] = 0$, para todo $n < 0$. Demuestre que se puede reconstruir $A_b[n]$ a partir de $A[n]$. Esto implica que el receptor puede obtener $\hat{A}_b[n]$ a partir de las decisiones $\hat{A}[n]$.
- 6.4. Para cada uno de los casos anteriores escriba la potencia transmitida en función de la energía media de los símbolos en $\{A_b[n]\}$.

P5.7 Represente el diagrama de bloques de un receptor de:

- 7.1. PAM en doble banda lateral (PAM-DSB).
- 7.2. PAM en banda lateral única (PAM-SSB).
- 7.3. CAP (Ejemplo 5.8).

P5.8 Considere el receptor de la Figura 5.36.

- 8.1. Demuestre que la demodulación con la exponencial compleja puede moverse tras el muestreador a periodo de símbolo. Ello significa que la señal a la salida del muestreador se puede demodular con una exponencial discreta $e^{-j\omega_1 n}$. Encuentre qué relación deben cumplir ω_1 y ω_c . Tenga cuidado con las unidades: mientras ω_c está expresada en rad/seg, ω_1 lo está en rad.
- 8.2. Demuestre que si $\omega_1 \in \{0, \pm\pi/2, \pi\}$ la demodulación no implica la realización de ningún producto. Esto reduce la complejidad del receptor. Naturalmente, de acuerdo con los resultados del apartado anterior, esto sugiere elegir la frecuencia de la portadora en función del periodo de símbolo.
- 8.3. Demuestre que si ω_c se elige de tal modo que $\omega_1 = 0$, entonces no es necesaria ninguna demodulación compleja, y $q[n]$ se puede obtener directamente muestreando la salida del filtro paso banda complejo de la figura.

P5.9 Considere la condición (5.70), suficiente para que la señal transmitida $x(t)$ sea cicloestacionaria.

- 9.1. Demuestre que se cumple en el caso de QAM cuando los símbolos transmitidos por los canales en fase y cuadratura son independientes y las funciones de autocorrelación de los símbolos transmitidos por ambos canales son idénticas.
- 9.2. Demuestre que se cumple en el caso de PSK si las muestras de la secuencia de fases $\varphi[n]$ son independientes.

P5.10 La constelación de la Figura 5.46 se denomina jerárquica: aunque con ella se pueden transmitir 4 bits por símbolo, los bits decodificados no tienen igual probabilidad de error. Esta constelación se utiliza en la transmisión de señales con diferentes niveles de protección; por ejemplo, en transmisión de vídeo codificado, los dos bits más protegidos se pueden usar para transmitir las componentes paso bajo importantes y los dos menos protegidos, para transmitir el detalle. Si la relación señal a ruido en recepción supera un determinado umbral γ_1 , entonces la imagen se puede ver con alta calidad. Si dicha relación no supera γ_1 , pero está por encima de un umbral γ_2 , entonces sólo se pueden decodificar fiablemente los bits más protegidos; esta situación es aceptable, por ejemplo, en terminales móviles o portátiles de bajo coste. El interés de este tipo de codificación estriba en que para constelaciones no jerárquicas, el nivel de relación señal a ruido necesario para una decodificación fiable es menor que γ_1 , pero mayor que γ_2 .

Suponga que la asignación de bits a símbolos es la siguiente: los dos primeros bits determinan el cuadrante del plano complejo; los dos últimos determinan el símbolo dentro del cuadrante. Para ambos pares de bits, se utiliza codificación Gray (Página 230). Todos los símbolos se transmiten con igual probabilidad. El parámetro $\nu = b/a$ sirve para establecer el nivel relativo de protección: para $\nu = 0$ el segundo par de bits no está protegido en absoluto, mientras que cuando $\nu = 1/2$ se recupera una constelación 16-QAM, para la que el nivel de protección es prácticamente el mismo

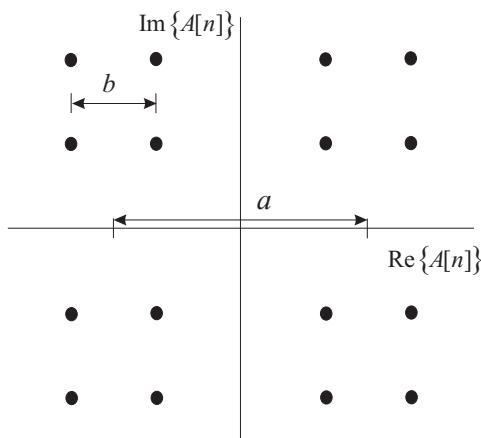


Figura 5.46. Constelación jerárquica del Problema P5.10.

para ambos pares de bits. Suponga un canal gausiano que introduce ruido de densidad espectral de potencia $N_0/2$ W/Hz.

- 10.1. Demuestre que, conocidos la energía por símbolo E_s y el nivel de protección ν , la constelación de la figura queda completamente determinada.
- 10.2. Obtenga la expresión de la probabilidad de error de bit para los dos primeros bits de cada símbolo (los más protegidos), de forma exacta en función de E_s/N_0 y ν . En función de estos mismos parámetros, obtenga la aproximación a dicha probabilidad basada en los símbolos a mínima distancia.
- 10.3. Repita los cálculos del apartado anterior con los dos últimos bits de cada símbolo (los menos protegidos).
- 10.4. Para $\nu = 1/8$ represente las P_e aproximadas de los apartados anteriores en función de E_s/N_0 . Represente en la misma gráfica la probabilidad de error de una constelación QPSK y compare los resultados.

P5.11 Una señal PAM paso banda con periodo de símbolo T seg y frecuencia de portadora ω_c rad/seg se demodula con el esquema de la Figura 5.34 pero usando una exponencial de frecuencia ω_d rad/seg, distinta a la de la portadora. El canal es gausiano y la respuesta combinada transmisor-receptor cumple el criterio de Nyquist.

- 11.1. Escriba, en función de $(\omega_c - \omega_d)$, la expresión de la secuencia de observaciones $q[n]$.
- 11.2. Represente el diagrama de dispersión que se tendría si el ruido fuese despreciable.

P5.12 Las Figuras 5.47(a)-(d) presentan diagramas de dispersión a la salida del muestreador del receptor. La respuesta combinada de los filtros transmisor y receptor es un coseno

alzado y la constelación empleada es una QPSK. Justifique, en cada caso, qué causa puede dar lugar al diagrama observado.

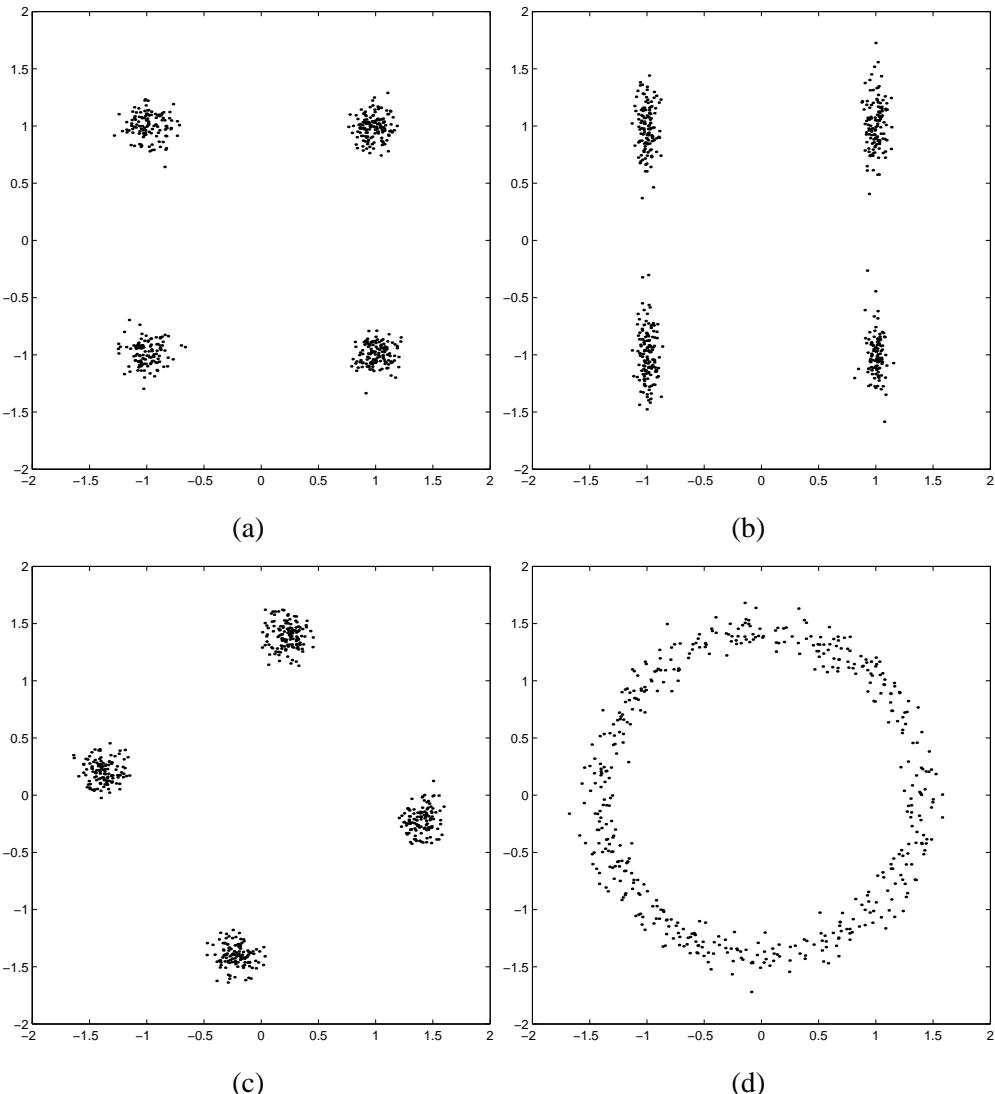


Figura 5.47. Diagramas de dispersión del Problema P5.12.

- P5.13 Uno de los problemas que suele aparecer en la práctica a la hora de implementar un demodulador PAM paso banda, es el del llamado *desequilibrio entre fase y cuadratura*, que tiene su origen en las dificultades para generar las señales demoduladoras perfectamente en cuadratura.

Considere un sistema de comunicaciones paso banda que emplea una constelación QPSK a través de un canal gausiano. La respuesta combinada de los filtros transmisor

y receptor cumple el criterio de Nyquist. Sin embargo, por el problema anteriormente mencionado, en el receptor, implementado de acuerdo con el esquema de la Figura 5.37, en lugar de emplear $\cos(\omega_c t)$, se utiliza $\cos(\omega_c t + \phi)$, $|\phi| < \pi/4$. Por supuesto, el desfase ϕ es desconocido en el decisor, que sigue manteniendo los mismos umbrales de decisión que para $\phi = 0$.

- 13.1. Suponiendo un ruido despreciable, represente el diagrama de dispersión que se tendría a la salida del muestreador (complejo) del receptor.
- 13.2. Obtenga la probabilidad de error de símbolo en función de E_s/N_0 y de ϕ .

P5.14 En este problema vamos a estudiar cómo generalizar el criterio de Nyquist a la transmisión simultánea de varias señales moduladas con PAM. Por simplicidad, consideraremos el caso en banda base, pero la generalización a una modulación paso banda es inmediata. Suponga que la señal banda base $s(t)$ se obtiene de la forma siguiente:

$$s(t) = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_n A_j[n] \phi_j(t - nT) \quad (5.109)$$

donde las funciones $\phi_j(t)$ son ortogonales y los símbolos $A_j[n]$ que las modulan son reales. En recepción, se usa el banco de filtros adaptados de la Figura 4.41. El canal se considera ideal.

- 14.1. Para el canal j -ésimo, obtenga una condición sobre la respuesta en frecuencia $\Phi_j(j\omega)$ para que en la observación $q_j[n]$ no haya interferencia de los símbolos $A_j[k]$, $k \neq n$.
- 14.2. Para el canal j -ésimo, obtenga una condición sobre las respuestas en frecuencia $\Phi_j(j\omega)$ y $\Phi_l(j\omega)$, $l \neq j$ para que en la observación $q_j[n]$ no haya interferencia de los símbolos $A_l[n]$. (Ayuda: Observe que la condición anterior implica que

$$(\phi_l(t) * \phi_j(-t)) \Big|_{t=nT} = \delta[n] \quad)$$

- 14.3. A partir del conjunto de condiciones derivadas en los apartados a) y b), que se conocen como el *criterio de Nyquist generalizado*, encuentre un par de funciones $\phi_0(t)$ y $\phi_1(t)$ que las satisfagan y tales que $\phi_0(t) * \phi_0(-t)$ sea un coseno alzado.

CAPÍTULO 6

DETECCIÓN EN CANALES CON INTERFERENCIA INTERSIMBÓLICA

Debido a la distorsión lineal que el canal introduce en la señal analógica transmitida, en la salida de un demodulador de PAM habrá presente cierto grado de interferencia intersimbólica (ISI). En tales condiciones, el detector símbolo a símbolo empleado en el Capítulo 5 deja de ser óptimo, y sus prestaciones pueden llegar a ser completamente inaceptables a medida que el nivel de ISI aumenta. Se hace así necesario modificar la estructura del detector para solventar este problema.

Para ello, determinaremos en primer lugar el decisor óptimo en presencia de ISI, el cual, como veremos, toma las decisiones utilizando toda la secuencia recibida y no símbolo a símbolo. En numerosas ocasiones la complejidad computacional de este decisor óptimo resulta ser excesiva, lo que hace necesario utilizar otras estructuras subóptimas pero menos costosas como son los igualadores. Un igualador lineal realiza un filtrado de la señal demodulada con el objeto de compensar la distorsión introducida por el canal, de tal forma que a la salida del igualador la señal está lo más libre de ISI posible. En tal caso, es posible utilizar un decisor símbolo a símbolo sobre esta señal. Los igualadores¹ se usan en procesado de señales de audio para compensar las distorsiones producidas en el canal que, en este caso, incluye micrófonos, cables, dispositivos de grabación y reproducción, etc. En comunicaciones digitales, los primeros igualadores no diferían mucho de un ecualizador manual, pero a medida que la velocidad de transmisión fue aumentando se hizo imprescindible contar con igualadores basados en principios matemáticos.

De hecho, para poder combatir eficazmente el efecto de la ISI con igualadores el receptor necesita ajustar adecuadamente los parámetros correspondientes, bien sean estos los coeficientes de la respuesta del canal o los del igualador. Una vez planteados los principios del diseño de igualadores de canal, es posible obtener estructuras capaces de ajustarse automáticamente para adaptarse a los cambios ocurridos en el canal o, simplemente, para evitar

¹En procesado de audio se emplea el término *ecualizador* que, aunque es una mala traducción del inglés “equalize”, ha sido aceptado por la Real Academia de la Lengua. Para distinguirlo de este y aprovechar las posibilidades que ofrece nuestro idioma, hemos decidido utilizar el término *igualador*, que es autoexplicativo.

la realización de operaciones matemáticas complejas. Estas estructuras adaptativas también serán objeto de este capítulo.

6.1. EL PROBLEMA DE LA INTERFERENCIA ENTRE SÍMBOLOS

Antes de pasar a desarrollar una serie de posibles estrategias para mitigar la ISI conviene analizar en detalle su naturaleza para tener una visión clara de su efecto. Comenzaremos recordando el modelo de canal discreto equivalente para modulaciones PAM desarrollado en el Capítulo 5.

6.1.1. Canal discreto equivalente

En el Capítulo 5 hemos visto que si la convolución del pulso de transmisión $g(t)$ y el filtro de recepción $f(t)$ cumple el criterio de Nyquist, y la distorsión introducida por el canal se reduce a ruido aditivo, entonces la señal demodulada y muestreada a la tasa de símbolo está libre de ISI². Esto coincide con el modelo del canal lineal gausiano de la Figura 5.11 para el que la respuesta del canal equivalente en banda base es un impulso, $h_{eq}(t) = \beta\delta(t - t_0)$, introduciendo solamente una atenuación y un retardo en la señal recibida. Nótese que la respuesta en frecuencia $H_{eq}(j\omega)$ de este canal cumple

$$|H_{eq}(j\omega)| = |\beta|, \quad \angle H_{eq}(j\omega) = -\omega t_0 + \angle \beta \quad (6.1)$$

es decir, su magnitud es constante y su fase es lineal con la frecuencia. Sin embargo, es común en la práctica encontrar canales cuya función de transferencia no cumple (6.1). Por ejemplo, en una línea telefónica la atenuación sufrida por la señal que la atraviesa depende de la frecuencia; lo mismo ocurre en un cable coaxial. En sistemas inalámbricos (canales radio) y subacuáticos (canales acústicos), varias versiones de la señal transmitida pueden llegar al receptor por diferentes caminos tras sufrir distintas reflexiones en el entorno. El receptor se enfrenta entonces a la superposición de estas réplicas de la señal original, cada una de las cuales ha sufrido una atenuación y un retardo distintos. Este fenómeno se conoce como *multitrayecto* y resulta en un canal que tampoco cumple (6.1).

En tales condiciones, para evitar la ISI se podría diseñar el filtro receptor $f(t)$ en la forma que se describió en el Apartado 5.3, con los inconvenientes allí mencionados: a su salida el ruido puede estar coloreado y, peor aún, su potencia puede ser amplificada. Por estas razones, y teniendo en cuenta que en la práctica el receptor suele desconocer la respuesta impulsional del canal en banda base equivalente $h_{eq}(t)$, es común hacer que $f(t)$ esté adaptado al filtro transmisor $g(t)$, es decir, $f(t) = g(-t)$.

Nuestro punto de partida en este capítulo será el canal discreto equivalente (Apartado 5.4.4) de la Figura 5.7:

$$q[n] = A[n] * p[n] + z[n] \quad (6.2)$$

²Esto es cierto siempre y cuando el muestreo se realice en los instantes adecuados. La influencia del instante de muestreo en la ISI será analizada en el Apartado 6.5, mientras que la sincronización de símbolo se discutirá en el Capítulo 11.

donde $q[n]$ son las muestras tomadas con periodo de símbolo de la señal a la salida del filtro receptor, $p[n]$ es la respuesta al impulso del canal discreto equivalente y $z[n]$ es la secuencia de ruido a la salida del muestreador del receptor. Supondremos que el ruido aditivo introducido por el canal es blanco y gausiano, con densidad espectral de potencia $N_0/2$ W/Hz. Además, supondremos que el filtro receptor $f(t)$ es tal que su función de ambigüedad temporal satisface el criterio de Nyquist para periodo T . En tal caso, para un sistema paso banda $z[n]$ es un proceso gausiano, blanco, circularmente simétrico con varianza $\sigma_z^2 = N_0$; para un sistema en banda base, el ruido $z[n]$ es real, gausiano y blanco con varianza $\sigma_z^2 = N_0/2$.

A lo largo de este capítulo supondremos que el canal en banda base equivalente $p(t) = g(t) * h_{eq}(t) * g(-t)$ toma valores no nulos únicamente en el intervalo $t_{inf} \leq t < t_{sup}$ de duración $T_p = t_{sup} - t_{inf}$. El valor de t_{inf} puede interpretarse como un retardo global en la transmisión, por lo que supondremos que $t_{inf} = 0$, sin perder generalidad. De este modo, nuestro modelo de canal (6.2) toma la forma

$$q[n] = \sum_{k=0}^K p[k]A[n-k] + z[n] \quad (6.3)$$

con $K = \lfloor T_p/T \rfloor$, donde $\lfloor x \rfloor$ denota el mayor entero menor o igual que x . Como consecuencia de nuestra suposición, el número de coeficientes no nulos de $p[n] = p(nT)$ es $K + 1$.

Resulta claro que cuanto mayor sea el valor de K , mayor será el número de componentes de ISI, de lo que cabe esperar que más perjudicial será su efecto. Hay que destacar que el valor de K aumenta no sólo con la dispersión de retardos T_p , sino también al aumentar la tasa de símbolo $1/T$. Es habitual que un mismo canal apenas distorsione la señal para transmisiones a baja velocidad, pero que introduzca un nivel considerable de ISI si se intentan alcanzar grandes velocidades de transmisión. Por ello, las estrategias de detección en presencia de ISI tienen un papel cada vez más importante en el diseño de un sistema de comunicaciones, debido a la tendencia generalizada de los sistemas modernos a alcanzar velocidades cada vez mayores.

6.1.2. Medida de la interferencia entre símbolos

La cantidad de ISI introducida por el canal será mayor cuanto más diste la respuesta del canal discreto equivalente $p[n]$ de un impulso puro de la forma $c\delta[n-d]$, con c alguna constante no nula y d un entero. Cabe preguntarse cuánta ISI es capaz de tolerar un detector símbolo a símbolo sin cometer errores, en el caso asintótico en que σ_z^2 tienda a cero. Para contestar, necesitamos una manera de cuantificar la ISI. Definamos d como el índice del coeficiente del canal con mayor magnitud (esto es, tal que $|p[d]| \geq |p[n]|$ para todo n), y reescribamos (6.3) como

$$q[n] = p[d]A[n-d] + \sum_{k \neq d} p[k]A[n-k] + z[n] \quad (6.4)$$

El coeficiente de referencia $p[d]$ se suele denominar *cursor*. Un decisor símbolo a símbolo para estimar $A[n-d]$ corregiría primero el efecto del factor $p[d]$, y entonces decidiría en función de la región del plano complejo en la que resida $q[n]/p[d]$ para formar la *decisión dura* $\hat{A}[n-d]$. Es decir, $\hat{A}[n-d]$ es el elemento de la constelación más próximo a

$$\frac{q[n]}{p[d]} = A[n-d] + \sum_{k \neq d} \frac{p[k]}{p[d]} A[n-k] + \frac{z[n]}{p[d]} \quad (6.5)$$

El segundo sumando en (6.5) constituye la ISI debida al canal, mientras que el tercero refleja el efecto del ruido aditivo. Es posible cuantificar la distorsión introducida por el canal a través del parámetro denominado *nivel de ISI*:

$$\gamma_{ISI} \doteq \frac{D_{\text{pico}}}{\eta} \quad (6.6)$$

donde D_{pico} (denominada *distorsión de pico*) y η son parámetros que dependen respectivamente de la respuesta impulsional del canal discreto equivalente y de la constelación utilizada, y se definen como

$$D_{\text{pico}} \doteq \sum_{k \neq d} \frac{|p[k]|}{|p[d]|} \geq 0, \quad \eta \doteq \frac{(d_{\min}/2)}{|A|_{\max}} > 0 \quad (6.7)$$

En (6.7) $|A|_{\max}$ denota la máxima magnitud de los elementos de la constelación y d_{\min} denota la mínima distancia entre dos elementos de la constelación. Nótese que $\gamma_{ISI} \geq 0$, con $\gamma_{ISI} = 0$ si y sólo si $D_{\text{pico}} = 0$, o, equivalentemente, $p[k] = 0$ para todo $k \neq d$, es decir, si el canal no introduce ISI. Cuanto mayor sea D_{pico} , mayor será el nivel de ISI.

En ausencia de ruido, el detector símbolo a símbolo no cometerá errores si $\gamma_{ISI} < 1$ (véase el Problema P6.1) y en tal caso se suele decir que “el ojo está abierto,” en referencia al diagrama de ojo introducido en el Apartado 5.3.1. Por el contrario, a medida que el nivel de ISI aumenta hasta tener $\gamma_{ISI} > 1$, “el ojo se cerrará.” Es importante observar que el hecho de que el ojo se halle o no abierto depende no sólo del canal (a través del parámetro D_{pico}), sino también de la constelación utilizada (a través del parámetro η). Para un mismo canal, vemos en (6.6) que la transmisión será más robusta a la ISI cuanto mayor sea el valor de η , mostrado en el Cuadro 6.1 para nueve constelaciones comúnmente empleadas. La constelación BPSK es la más robusta en este sentido y a medida que aumenta el número de bits por símbolo de la modulación, la sensibilidad a la ISI de la constelación correspondiente también aumenta.

Naturalmente, aun cuando la ISI sea lo suficientemente pequeña como para que el ojo esté abierto, en presencia de ruido la probabilidad de error del detector símbolo a símbolo será siempre mayor que en el caso sin ISI. Las muestras de la señal recibida no coincidirán con los símbolos transmitidos, sino que en general podrán acercarse a las fronteras de las regiones de decisión. La probabilidad de que el ruido aditivo haga pasar la correspondiente muestra a una región incorrecta es, por tanto, mayor.

Constelación	bits/símbolo	$\eta = (d_{min}/2)/ A _{max}$
BPSK	1	1
QPSK	2	0.707
4-PAM	2	0.333
8-PSK	3	0.382
8-PAM	3	0.143
16-QAM	4	0.235
32-QAM	5	0.164
64-QAM	6	0.101
128-QAM	7	0.076

Cuadro 6.1. Valores del parámetro de robustez frente a la ISI para varias constelaciones.

Ejemplo 6.1

En la Figura 6.1 se representa el diagrama de dispersión en el receptor (muestras $q[n]$) para una constelación 16-QAM y tres canales distintos, todos de la forma $p[n] = 0,1\delta[n] + \delta[n - 2] + \epsilon\delta[n - 4]$, con $\epsilon = 0, 0,1$ y $0,18$. Los valores de γ_{ISI} correspondientes son $0,4242, 0,8484$ y $1,1879$. En los dos primeros casos el ojo se halla abierto ($\gamma_{ISI} < 1$). En el tercero, la ISI es lo suficientemente elevada como para que empiecen a aparecer errores en las decisiones, incluso si no hubiese ruido. La probabilidad de error de símbolo aumentará si $|\epsilon|$ se incrementa más todavía.

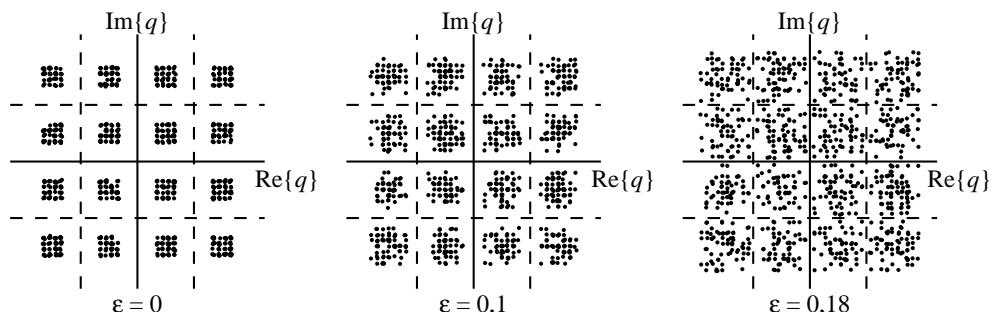


Figura 6.1. Diagramas de dispersión en el receptor para una constelación 16-QAM y tres canales $p[n] = 0,1\delta[n] + \delta[n - 2] + \epsilon\delta[n - 4]$ con diferentes niveles de ISI y sin ruido.

6.1.3. Cota del filtro adaptado

Hemos visto cómo el efecto de la ISI puede ser catastrófico para un detector símbolo a símbolo. Seguidamente pasaremos a desarrollar detectores más sofisticados que tengan en cuenta la dispersión del canal, pero antes vamos a presentar una cota para las prestaciones que se pueden obtener con cualquier detector de este tipo. Dicha cota se denomina *cota del filtro adaptado* y determina un valor mínimo para la probabilidad de error de símbolo.

Este valor mínimo no tiene por qué ser alcanzable para una implementación particular del receptor, aunque en ocasiones sí lo es.

Esta cota se obtiene observando que la probabilidad de error de símbolo con el modelo de canal (6.3) al transmitir una secuencia de símbolos nunca será menor que la correspondiente a la transmisión de un único símbolo por el mismo canal. Si únicamente se transmite $A[0] = A$, las únicas observaciones conteniendo información acerca de este símbolo son $q[0], \dots, q[K]$. Agrupando estas en un vector \mathbf{q} de dimensión $K + 1$, podemos escribir

$$\begin{bmatrix} q[0] \\ q[1] \\ \vdots \\ q[K] \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} p[0] \\ p[1] \\ \vdots \\ p[K] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z[0] \\ z[1] \\ \vdots \\ z[K] \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{q} = A\mathbf{p} + \mathbf{z} \quad (6.8)$$

Podemos interpretar (6.8) como la transmisión del símbolo A por $K + 1$ canales paralelos, sin ISI, con distintas ganancias e independientes (ya que las variables aleatorias $z[n_1], z[n_2]$ son independientes para $n_1 \neq n_2$). Si las probabilidades *a priori* de los símbolos son idénticas, entonces el criterio de máxima verosimilitud, o ML, minimiza la probabilidad de error, tal como se vio en el Capítulo 4. Dado que la función de densidad de probabilidad de \mathbf{q} , condicionada a que el símbolo transmitido A tome el valor a , es

$$f_{\mathbf{q}|A}(\mathbf{q} | a) = \frac{1}{(\pi\sigma_z^2)^{K+1}} \exp\left\{-\frac{1}{\sigma_z^2}\|\mathbf{q} - a\mathbf{p}\|^2\right\} \quad (6.9)$$

entonces el detector ML para el modelo (6.8) decidirá que el símbolo transmitido fue $\hat{a} = a_i$ si se cumple que

$$\|\mathbf{q} - a_i\mathbf{p}\|^2 < \|\mathbf{q} - a_j\mathbf{p}\|^2 \quad j = 0, \dots, M - 1, \quad j \neq i \quad (6.10)$$

o equivalentemente (véase Problema P6.4),

$$\left| \frac{\mathbf{p}^H \mathbf{q}}{\mathbf{p}^H \mathbf{p}} - a_i \right|^2 < \left| \frac{\mathbf{p}^H \mathbf{q}}{\mathbf{p}^H \mathbf{p}} - a_j \right|^2, \quad j = 0, \dots, M - 1, \quad j \neq i \quad (6.11)$$

donde \mathbf{p}^H denota el vector hermítico (es decir, traspuesto y conjugado) de \mathbf{p} . Este detector se ilustra en la Figura 6.2. Obsérvese que el estadístico $q_f = \mathbf{p}^H \mathbf{q} / \|\mathbf{p}\|^2$ puede

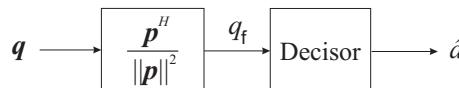


Figura 6.2. Estructura del detector ML para la transmisión de un símbolo aislado a través de un canal dispersivo.

interpretarse como la salida en el instante $n = 0$ de un filtro con respuesta impulsional $h[n] = p^*[-n] / \|\mathbf{p}\|^2$, cuando su entrada es la secuencia de observaciones $q[n]$:

$$(q[n] * h[n])|_{n=0} = \sum_k h[k]q[-k] = \frac{\sum_k p^*[-k]q[-k]}{\|\mathbf{p}\|^2} = \frac{\mathbf{p}^H \mathbf{q}}{\|\mathbf{p}\|^2} \quad (6.12)$$

En otras palabras, el detector ML consta de un filtro adaptado al canal $p[n]$ (y normalizado) seguido de un decisor de mínima distancia euclídea a los elementos de la constelación. Este resultado no debería sorprendernos, pues no es más que el equivalente discreto del problema de detección en canales gausianos estudiado en el Capítulo 4. A la salida de este filtro adaptado obtenemos un modelo simple de canal aditivo gausiano, como puede verse a partir de la expresión del estadístico q_f :

$$q_f = \frac{\mathbf{p}^H \mathbf{q}}{\|\mathbf{p}\|^2} = \frac{\mathbf{p}^H (\mathbf{A}\mathbf{p} + \mathbf{z})}{\|\mathbf{p}\|^2} = A + z_f, \quad \text{con} \quad z_f = \frac{\mathbf{p}^H \mathbf{z}}{\|\mathbf{p}\|^2} \quad (6.13)$$

Además, la relación señal a ruido medida sobre q_f es máxima (véase Problema P6.5). Nótese que la componente de ruido z_f presente en q_f es gausiana, circularmente simétrica, de media cero y varianza $\sigma_z^2/\|\mathbf{p}\|^2$. Por tanto podemos obtener una buena aproximación a la probabilidad de error resultante de forma similar a (4.91):

$$P_e \approx \kappa Q \left(\frac{d_{min}}{2} \cdot \frac{\|\mathbf{p}\|}{\sqrt{N_0/2}} \right) \quad (6.14)$$

donde d_{min} es la distancia mínima de la constelación y κ es el máximo número de símbolos que se encuentran a d_{min} de un símbolo de la constelación.

La expresión (6.14) recibe el nombre de cota del filtro adaptado. Al haber sido derivada para el caso particular en que se transmite un único símbolo, la probabilidad de error de cualquier detector operando sobre el mismo canal y con transmisión continua de símbolos estará acotada inferiormente por (6.14). Obsérvese que la única influencia del canal $p[n]$ en la cota es a través de la raíz cuadrada de su energía, $\|\mathbf{p}\| = \sqrt{\sum_k |p[k]|^2}$, de forma que si $\|\mathbf{p}\|$ aumenta, entonces la probabilidad de error disminuye debido a que la varianza efectiva de ruido $\sigma_z^2/\|\mathbf{p}\|^2$ disminuye. Alternativamente, $\|\mathbf{p}\|^2$ puede interpretarse como la ganancia en potencia introducida por el canal.

6.2. DETECTOR DE MÁXIMA VERO SIMILITUD DE SECUENCIAS EN PRESENCIA DE ISI

Cuando $\gamma_{ISI} > 1$ el ojo se halla cerrado y un decisor símbolo a símbolo no es capaz de detectar correctamente los datos; cosa poco sorprendente, pues este decisor se diseñó para canales sin ISI. En este apartado vamos a desarrollar el detector óptimo bajo el criterio ML en presencia de ISI. Para ello, partiremos del modelo (6.3) y supondremos que se transmite una secuencia de L símbolos $A[0], A[1], \dots, A[L-1]$, tomados de entre los M elementos de la constelación. Por tanto habrá M^L posibles secuencias de L símbolos, y el detector deberá determinar cuál fue transmitida de entre todas ellas. Nótese a partir de (6.3) que, debido a la memoria del canal, los L símbolos $A[0], \dots, A[L-1]$ afectan a las $L+K$ observaciones $q[0], \dots, q[L+K-1]$. Cualquier otra observación $q[n]$ con $n < 0$ ó $n > L+K-1$ sólo contiene ruido, y puede por tanto ser desecharada. Denotaremos por $N_q = L+K$ el número de observaciones disponibles.

6.2.1. Expresión del detector ML de secuencias

Podemos pensar en cada una de las M^L posibles secuencias transmitidas como un vector \mathbf{A} de L símbolos (en general complejos) pertenecientes a la constelación empleada. En otras palabras, $\mathbf{A} \doteq [A[0], A[1], \dots, A[L-1]]^T$, donde cada símbolo $A[n]$ se toma de entre los M elementos de la constelación. Podemos concluir entonces que tenemos un total de M^L secuencias posibles que describimos de la forma $\{\mathbf{a}_i, i = 0, \dots, M^L - 1\}$.

La probabilidad de decidir una secuencia distinta de la transmitida se minimiza mediante el criterio MAP desarrollado en el Apartado 4.4.1: si \mathbf{q} denota el vector formado por las N_q muestras recibidas $q[n]$, el detector MAP escogerá aquella secuencia \mathbf{a}_i que cumpla

$$p_{\mathbf{A}}(\mathbf{a}_i) f_{\mathbf{q}|\mathbf{A}}(\mathbf{q} | \mathbf{a}_i) > p_{\mathbf{A}}(\mathbf{a}_j) f_{\mathbf{q}|\mathbf{A}}(\mathbf{q} | \mathbf{a}_j), \quad j = 0, \dots, M^L - 1, \quad j \neq i \quad (6.15)$$

donde $p_{\mathbf{A}}(\mathbf{a})$ es la probabilidad *a priori* de la secuencia \mathbf{a} y $f_{\mathbf{q}|\mathbf{A}}(\mathbf{q} | \mathbf{a})$ es la función de densidad de probabilidad de la observación \mathbf{q} condicionada a la transmisión de la secuencia \mathbf{a} . Debemos insistir en que según este planteamiento, el detector MAP minimiza la probabilidad de que la secuencia decidida no coincida con la transmitida, o equivalentemente, la probabilidad de que *uno o más símbolos detectados sean erróneos*. Esta no coincide en general con la probabilidad de error de símbolo, es decir, la probabilidad de que un símbolo cualquiera de los decididos sea erróneo. El criterio de mínima probabilidad de error de símbolo resulta en un detector mucho más complejo, cuyas prestaciones suelen ser parecidas a las del detector MAP (6.15) para relaciones señal a ruido elevadas. Por ello el criterio de mínima probabilidad de secuencia errónea es generalmente preferido en la práctica.

Suponiendo que los símbolos transmitidos son independientes entre sí y equiprobables, cada una de las posibles secuencias \mathbf{a}_j tiene la misma probabilidad *a priori* y el criterio MAP se reduce al criterio ML, como se vio en el Apartado 4.4: se decidirá que la secuencia transmitida fue \mathbf{a}_i si se cumple que

$$f_{\mathbf{q}|\mathbf{A}}(\mathbf{q} | \mathbf{a}_i) > f_{\mathbf{q}|\mathbf{A}}(\mathbf{q} | \mathbf{a}_j), \quad j = 0, \dots, M^L - 1, \quad j \neq i \quad (6.16)$$

Por tanto, necesitamos la expresión de $f_{\mathbf{q}|\mathbf{A}}(\mathbf{q} | \mathbf{a})$, donde \mathbf{q} y \mathbf{a} son los vectores que recogen las muestras de, respectivamente, $q[n]$ y $a[n]$ desde $n = 0$ hasta $n = L - 1$. Para alcanzar nuestro objetivo, observemos en (6.3) que la función de densidad de probabilidad de $q[n]$, condicionada a que la secuencia transmitida \mathbf{A} tome el valor \mathbf{a} , es gausiana, de media $\sum_{k=0}^K p[k]A[n-k]$ y varianza σ_z^2 . Es más, dado que $z[n]$ es un proceso blanco, se tiene que dos variables aleatorias cualesquiera $q[n_1], q[n_2]$ con $n_1 \neq n_2$ están incorrelacionadas, y por tanto son independientes dado que son conjuntamente gausianas (véase Apartado 3.2.6). Así, la función de densidad de probabilidad conjunta se reduce a

$$f_{\mathbf{q}|\mathbf{A}}(\mathbf{q} | \mathbf{a}) = \frac{1}{(\pi\sigma_z^2)^{N_q}} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma_z^2} \sum_{n=0}^{N_q-1} \left| q[n] - \sum_{k=0}^K p[k]a[n-k] \right|^2 \right\} \quad (6.17)$$

Por tanto, el detector ML escogerá aquella secuencia de símbolos $\hat{\mathbf{a}}$ tal que la suma

$$\sum_{n=0}^{N_q-1} \left| q[n] - \sum_{k=0}^K p[k]\hat{a}[n-k] \right|^2 \quad (6.18)$$

es mínima. Observando (6.18) concluimos que la estrategia óptima consiste simplemente en escoger de entre todas las posibles aquella secuencia que, una vez filtrada por el canal $p[n]$, mejor se ajuste a las observaciones. La medida de este ajuste es la distancia euclídea, lo cual es una consecuencia de la naturaleza gausiana del ruido. Podemos considerar el detector ML como un decisor generalizado que, teniendo en cuenta la ISI, opera sobre toda la secuencia recibida y no sobre símbolos aislados.

¿Cuál es el coste computacional del detector ML? Para contestar esta pregunta, fijémonos en que para cada posible secuencia a dicho detector ha de realizar las siguientes operaciones: filtrado por el canal, resta de la secuencia resultante de la secuencia de observaciones, cálculo de las magnitudes de tales diferencias y su posterior suma. El número de productos (complejos) y sumas requeridos para todo ello es proporcional a KL . Dado que este cálculo ha de repetirse para todas las secuencias posibles, el coste total es proporcional a $KL \cdot M^L$ (al que todavía habría que añadir el de un algoritmo de búsqueda del valor máximo de las M^L distancias calculadas).

El principal problema de esta implementación directa del detector ML radica en que su coste computacional crece exponencialmente con el número de símbolos transmitidos L , y por tanto con el tiempo que dura la transmisión. Dependiendo de la aplicación, este tiempo de transmisión puede ser corto (por ejemplo, para sistemas que operan de forma pulsada transmitiendo ráfagas de unos pocos símbolos) o llegar a ser muy largo. En tal caso, además de la prohibitiva complejidad del detector, aparecen otros dos problemas adicionales: el tamaño de la memoria necesaria para almacenar todas las M^L secuencias posibles, así como el retardo inherente en la decisión, pues parece necesario esperar al final de la transmisión para comenzar el proceso de detección. Afortunadamente, estos problemas pueden superarse gracias a un algoritmo computacionalmente eficiente (su complejidad crece de forma lineal, y no exponencial, con L) para el cálculo de la mínima distancia euclídea. La idea principal consiste en aprovechar la propiedad de que la memoria del canal es finita.

6.2.2. El algoritmo de Viterbi

En este apartado presentaremos un esquema para el cálculo de la secuencia más probable, denominado *algoritmo de Viterbi* en honor a su autor. Es importante reseñar que el algoritmo de Viterbi no constituye un nuevo criterio de detección, sino que no es nada más (aunque tampoco nada menos) que un método numéricamente eficiente de minimizar la métrica (6.18) asociada al detector ML.

El modelo de canal (6.3) genera las observaciones de la forma $q[n] = o[n] + z[n]$, donde

$$o[n] = \sum_{k=0}^K p[k]A[n-k], \quad n = 0, 1, \dots, N_q - 1 \quad (6.19)$$

es la salida del canal antes de añadir el ruido. En un sistema con memoria como (6.19) un concepto importante es el de *estado*, el cual se define como la mínima información necesaria para determinar la salida del sistema en el instante n (en este caso $o[n]$), dado el valor de la entrada en ese mismo instante (en este caso $A[n]$). Inmediatamente obtenemos de (6.19)

que en nuestro caso el estado del sistema coincide con el vector formado por los K símbolos transmitidos anteriormente, que denotaremos

$$\psi[n] = \begin{bmatrix} A[n-1] \\ A[n-2] \\ \vdots \\ A[n-K] \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

Así, la salida $o[n]$ queda completamente determinada por el estado $\psi[n]$ en el que se encuentra el sistema y el valor actual $A[n]$ de la entrada. También el estado en el siguiente instante $\psi[n+1]$ queda determinado por $\psi[n]$ y $A[n]$.

Obsérvese que el número de estados posibles es finito (e igual a M^K) por pertenecer los símbolos a una constelación discreta. Los sistemas para los que se verifica esta propiedad, la cual es fundamental para el desarrollo del algoritmo de Viterbi, suelen denominarse *máquinas de estados finitos*.

De esta forma, podemos visualizar la evolución temporal de la máquina de estados finitos descrita por (6.19) como una serie de transiciones entre sus estados, cada una de ellas producida por cada nuevo valor de la entrada $A[n]$, y que producirá un valor de la salida $o[n]$. Es importante señalar que, en general, no todas las transiciones entre estados son posibles, pues las últimas $K - 1$ componentes del nuevo estado $\psi[n+1]$ deben forzosamente coincidir con las primeras $K - 1$ componentes del estado anterior $\psi[n]$.

Una herramienta muy útil para visualizar la evolución de una máquina de estados finitos es su *diagrama de rejilla*. En él, los M^K diferentes estados $\psi[n]$ se representan mediante nodos, colocados en columna. A su derecha, se coloca otra columna de M^K nodos, representando los estados en el siguiente instante $\psi[n+1]$. Las transiciones entre estados se representan uniendo los nodos correspondientes mediante líneas denominadas *ramas*.

Ejemplo 6.2

Si la constelación es binaria ($M = 2$), por ejemplo $\{+1, -1\}$, y el canal posee $K + 1 = 4$ coeficientes no nulos, entonces el diagrama de rejilla posee $2^3 = 8$ estados. Esta rejilla se representa en la Figura 6.3(a), en la que las transiciones marcadas con línea continua corresponden a una entrada $A[n] = -1$, mientras que las marcadas con líneas de trazos corresponden a $A[n] = +1$. Se ha indicado el estado correspondiente a cada nodo de forma abreviada; por ejemplo el estado

$$\psi[n] = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ +1 \end{bmatrix} \text{ se indica como } (- - +).$$

En la Figura 6.3(a) podemos observar dos propiedades que se cumplen para el diagrama de rejilla de cualquier máquina de estados finitos:

1. De cada nodo parten M ramas, cada una de las cuales corresponde a uno de los M posibles valores de la entrada $A[n]$.
2. A cada nodo llegan M ramas, y todas se corresponden con un mismo valor de $A[n]$.

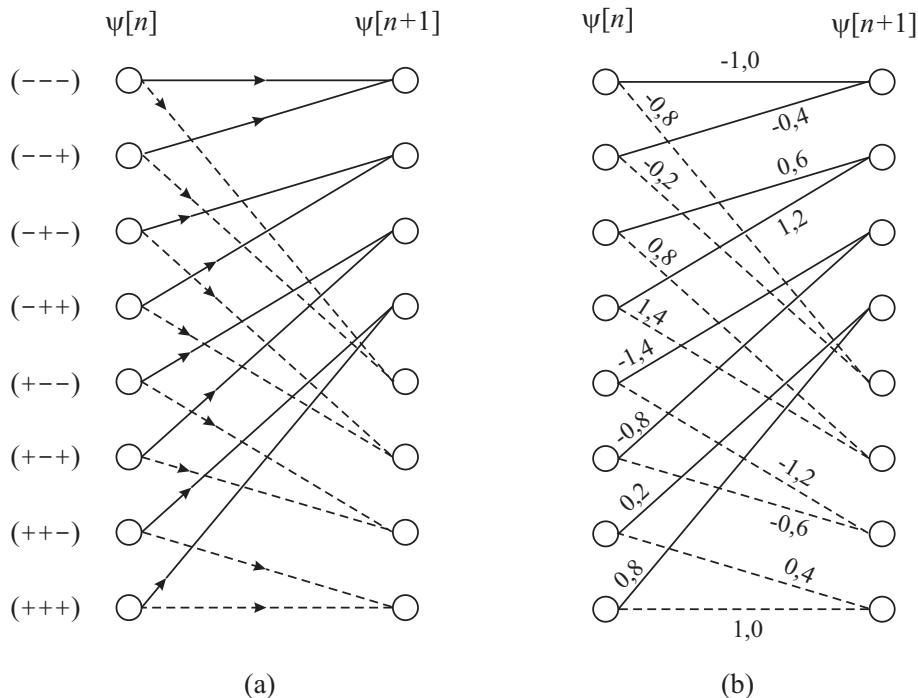


Figura 6.3. (a) Diagrama de rejilla correspondiente a un sistema con 8 estados y entrada binaria. (b) La misma rejilla indicando en cada rama el valor de la salida $o[n]$ para el canal dado por $p[n] = 0,1\delta[n] - 0,2\delta[n - 1] + 0,8\delta[n - 2] + 0,3\delta[n - 3]$.

También observamos que la estructura de la rejilla no depende del valor que tome la salida, $o[n]$. Sin embargo, el valor de $o[n]$ queda determinado por la transición $\psi[n] \rightarrow \psi[n + 1]$ y el valor de los coeficientes del canal. Por ello, cada rama de la rejilla puede ser etiquetada con el valor asociado de la salida $o[n]$.

Ejemplo 6.3

Supongamos que el canal del Ejemplo 6.2 está dado por $p[n] = 0,1\delta[n] - 0,2\delta[n - 1] + 0,8\delta[n - 2] + 0,3\delta[n - 3]$. En tal caso, la salida en el instante n puede escribirse en función del estado y la entrada en el mismo instante como $o[n] = 0,1A[n] - 0,2A[n - 1] + 0,8A[n - 2] + 0,3A[n - 3] = 0,1A[n] + [-0,2 0,8 0,3]\psi[n]$. Así, si $A[n] = +1$ y $\psi[n] = (- - +)$, entonces $o[n] = -0,2$, etc. La Figura 6.3(b) muestra la rejilla con las etiquetas correspondientes en cada rama.

La transmisión de L símbolos da lugar a la evolución del estado del canal a través del diagrama de rejilla a lo largo del tiempo, lo cual se puede visualizar representando L etapas de la rejilla y marcando las ramas correspondientes. Esto da lugar a una trayectoria o *camino*, suponiendo que el canal se encuentra en un estado inicial dado. En la práctica, la inicialización del canal puede realizarse transmitiendo una ráfaga de al menos K símbolos de manera previa a la transmisión de los L símbolos que realmente transportan información. La elección de este preámbulo de K símbolos se hace de forma acordada con el receptor, de modo que este conoce de antemano el estado inicial del canal.

Ejemplo 6.4

Considérese el canal $p[n]$ del Ejemplo 6.3. Inicialmente se transmite una ráfaga de $K = 3$ símbolos $\{-1, -1, -1\}$ lo cual coloca el canal en el estado $(---)$. Seguidamente se procede a transmitir la secuencia de $L = 5$ símbolos $\{+1, -1, +1, +1, -1\}$. El camino resultante se representa sobre el diagrama de rejilla en la Figura 6.4. La secuencia recibida (desechando las salidas producidas durante el establecimiento del estado inicial, y en ausencia de ruido) es $\{-0,8, -1,4, 0,8, -0,6, 0,2\}$, correspondiente a las etiquetas de las ramas del camino.

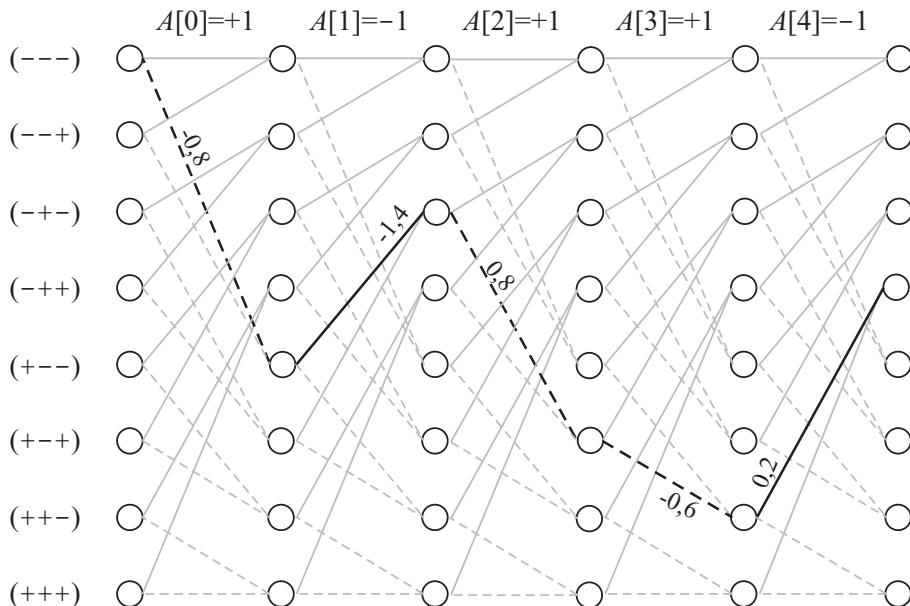


Figura 6.4. Transmisión de una secuencia de $L = 5$ símbolos representada como un camino en el diagrama de rejilla.

Pasemos ahora a estudiar cómo puede ayudarnos el diagrama de rejilla en la determinación de (6.18). Dado un vector de observaciones \mathbf{q} , la métrica asociada a cada secuencia candidata \mathbf{a} puede escribirse como

$$l(\mathbf{q}, \mathbf{a}) \doteq \sum_{n=0}^{N_q-1} |q[n] - o[n]|^2 = \sum_{n=0}^{N_q-1} l_n(\mathbf{q}, \mathbf{a}) \quad (6.21)$$

donde $o[n] = \sum_{k=0}^K p[k]a[n-k]$. El valor $l_n(\mathbf{q}, \mathbf{a}) \doteq |q[n] - o[n]|^2$ está asociado a la rama n -ésima, para cada $n = 0, \dots, N_q - 1$, y por tanto se suele denominar *métrica de rama*. Dado que cada secuencia \mathbf{a} se corresponde con un camino distinto sobre el diagrama de rejilla, $l(\mathbf{q}, \mathbf{a})$ se denomina *métrica de camino*. Así, (6.21) expresa la métrica de camino como la suma de las métricas de las N_q ramas. La métrica de rama $l_n(\mathbf{q}, \mathbf{a})$ representa la distancia entre la señal recibida y la señal que se debería haber observado si, en ausencia de ruido, la transición entre estados correspondiente a dicha rama realmente hubiese tenido lugar.

El objetivo del detector ML es determinar aquel camino sobre el diagrama de rejilla que minimiza el valor de la métrica de camino $l(\mathbf{q}, \mathbf{a})$. Definiendo la métrica acumulada como la suma de las métricas de rama hasta una cierta etapa m de la rejilla, que denotaremos por $l_{0,m}(\mathbf{q}, \mathbf{a})$, podemos escribir

$$l_{0,m}(\mathbf{q}, \mathbf{a}) \doteq \sum_{n=0}^m l_n(\mathbf{q}, \mathbf{a}) \quad (6.22)$$

El algoritmo de Viterbi se basa en la siguiente propiedad de la métrica acumulada:

Sea $\hat{\mathbf{a}}$ el camino que minimiza la métrica $l(\mathbf{q}, \mathbf{a})$ para un diagrama de rejilla y un vector de observaciones \mathbf{q} dados. Sea $\mathbf{a}' \neq \hat{\mathbf{a}}$ otro camino tal que \mathbf{a}' y $\hat{\mathbf{a}}$ pasan ambos por un mismo nodo en la etapa m -ésima del diagrama de rejilla. En tal caso, las métricas acumuladas de \mathbf{a}' y $\hat{\mathbf{a}}$ hasta la etapa m -ésima verifican

$$l_{0,m}(\mathbf{q}, \hat{\mathbf{a}}) \leq l_{0,m}(\mathbf{q}, \mathbf{a}') \quad (6.23)$$

La demostración es muy sencilla y se deja al lector como ejercicio (véase Problema P6.6). La propiedad anterior viene a decir que, si el camino óptimo pasa por un nodo dado, entonces dicho camino ha de ser necesariamente el que minimiza la métrica acumulada hasta dicho nodo. Esta observación permite rechazar muchos caminos en nuestra búsqueda a medida que avanzamos por el diagrama de rejilla.

El algoritmo de Viterbi determina el camino óptimo desplazándose secuencialmente por la rejilla. En cada etapa, y para cada nodo, se determina el camino que llega hasta ese nodo con la menor métrica acumulada, el cual recibe el nombre de *camino superviviente*. Dado que para una etapa determinada el nodo por el que pasa el camino óptimo no se conoce, se debe calcular y almacenar el camino superviviente para cada uno de los nodos. Al llegar a la última etapa de la rejilla, el camino óptimo será el superviviente con menor métrica acumulada (la métrica acumulada hasta la última etapa es $l(\mathbf{q}, \mathbf{a})$, la métrica de camino).

El cálculo del camino superviviente para un nodo dado se realiza fácilmente si nos fijamos en que a dicho nodo únicamente llegan M ramas, cada una procedente de un nodo distinto en la etapa anterior. La métrica acumulada hasta la etapa m se puede escribir en función de la acumulada hasta la etapa anterior como

$$l_{0,m}(\mathbf{q}, \mathbf{a}) = l_{0,m-1}(\mathbf{q}, \mathbf{a}) + l_m(\mathbf{q}, \mathbf{a}) \quad (6.24)$$

Nótese que $l_{0,m-1}(\mathbf{q}, \mathbf{a})$ se halla almacenada, pues corresponde al camino superviviente de uno de los nodos de la etapa anterior, mientras que $l_m(\mathbf{q}, \mathbf{a})$ es la métrica de rama correspondiente a la transición de dicho nodo de la etapa anterior al nodo considerado de la etapa m . Por tanto, para determinar el camino superviviente al nodo considerado basta realizar M sumas de la forma de (6.24) y elegir aquel nodo de la etapa anterior y aquella rama para los cuales tal suma es menor.

Ejemplo 6.5

Supongamos que se tiene el canal del Ejemplo 6.3, de nuevo con modulación binaria. Se quiere calcular el camino superviviente al nodo $(- - +)$ en la etapa m -ésima de la rejilla. En vista del

diagrama (Figura 6.3) y de la expresión (6.24), para ello se necesita el valor de la observación $q[m]$ y los valores de las métricas acumuladas $l_{0,m-1}$ para los caminos supervivientes a los nodos $(- - -)$ y $(- + +)$ en la etapa anterior, ya que estos nodos son los únicos que producen una transición al nodo en cuestión.

Por ejemplo, si $q[m] = 0,8$ con $l_{0,m-1} = 2,1$ para el nodo $(- - -)$, y $l_{0,m-1} = 1,7$ para el nodo $(- + +)$, entonces la métrica acumulada al nodo $(- - +)$ en la etapa m sería

$$\begin{aligned} l_{0,m} &= l_{0,m-1} + l_m \\ &= \begin{cases} 2,1 + |0,8 - 0,6|^2 = 2,1 + 0,04 = 2,14 & \text{desde el nodo } (- - -) \\ 1,7 + |0,8 - 1,2|^2 = 1,7 + 0,16 = 1,86 & \text{desde el nodo } (- + +) \end{cases} \end{aligned}$$

Por tanto, el camino superviviente al nodo $(- - +)$ será el procedente del nodo $(- + +)$ de la etapa anterior, y tendrá una métrica acumulada de 1,86. Naturalmente, este proceso, que hemos realizado para el nodo $(- - +)$, deberá ser repetido para cada uno de los nodos restantes.

Ejemplo 6.6

Vamos a exponer paso a paso la operación del algoritmo de Viterbi para un caso sencillo. Supongamos una modulación binaria $A[n] \in \{+1, -1\}$, y un canal dado por $p[n] = 0,7\delta[n] - 0,5\delta[n-1]$. Dado que $M = 2$ y $K = 1$, el número de estados del sistema es $M^K = 2^1 = 2$. Denotaremos estos estados por $(-)$ y $(+)$, correspondientes a $A[n-1] = -1$ ó $+1$ respectivamente. La Figura 6.5(a) muestra una etapa del diagrama de rejilla para este canal, con las etiquetas de cada rama correspondiendo a la salida asociada a cada transición de estado.

El transmisor envía una ráfaga inicial $A[n] = -1$ para $n < 0$, de forma que en $n = 0$ el receptor tiene la seguridad de que el canal se halla en el estado $(-)$. En las Figuras 6.5(b)-(f) se representan los caminos supervivientes, etapa por etapa, para la secuencia observada $\{q[0], \dots, q[5]\} = \{0,3, -0,4, 0,8, -0,1, -0,6, 0,5\}$. Tras la etapa final, vemos que el camino óptimo es el superviviente que termina en el nodo correspondiente al estado $(+)$ ya que su métrica acumulada es de 1,27, mientras que el camino superviviente finalizando en el nodo $(-)$ posee una métrica más elevada, igual a 1,39. Una vez así determinado el camino óptimo, procedemos a la decodificación de la secuencia transmitida. En vista de nuestra convención de usar trazo discontinuo para las ramas generadas por un símbolo $A[n] = +1$ y continuo para aquéllas debidas a $A[n] = -1$, observamos que la secuencia elegida por el detector ML es $\{\hat{A}[0], \dots, \hat{A}[5]\} = \{-1, -1, +1, +1, +1, +1\}$.

Como puede verse, en cada una de las L etapas del diagrama de rejilla el algoritmo de Viterbi realiza una serie de M operaciones de la forma de (6.24) para cada uno de los M^K nodos. Por tanto, el coste computacional de este algoritmo es proporcional a $(L \cdot M) \cdot M^K$. Vemos que este coste crece sólo de forma lineal con la longitud de la secuencia transmitida, L , y no exponencialmente como en una implementación directa del criterio ML. Por otro lado, aparece ahora una dependencia exponencial de la complejidad con el orden del canal, K . Si el canal es muy dispersivo, resultando en un valor elevado de K , es posible que en ciertas aplicaciones ni siquiera la eficiencia del algoritmo de Viterbi sea suficiente para permitir una implementación práctica del detector ML. En tal caso, se hace necesario recurrir a otro tipo de estructuras subóptimas pero más sencillas, como son los igualadores lineales y de realimentación de decisiones que se discutirán en los Apartados 6.3 y 6.4.

El problema del retardo en la decodificación sigue estando presente en el algoritmo de Viterbi, ya que es necesario esperar a que todas las observaciones $q[n]$ se hallen disponibles

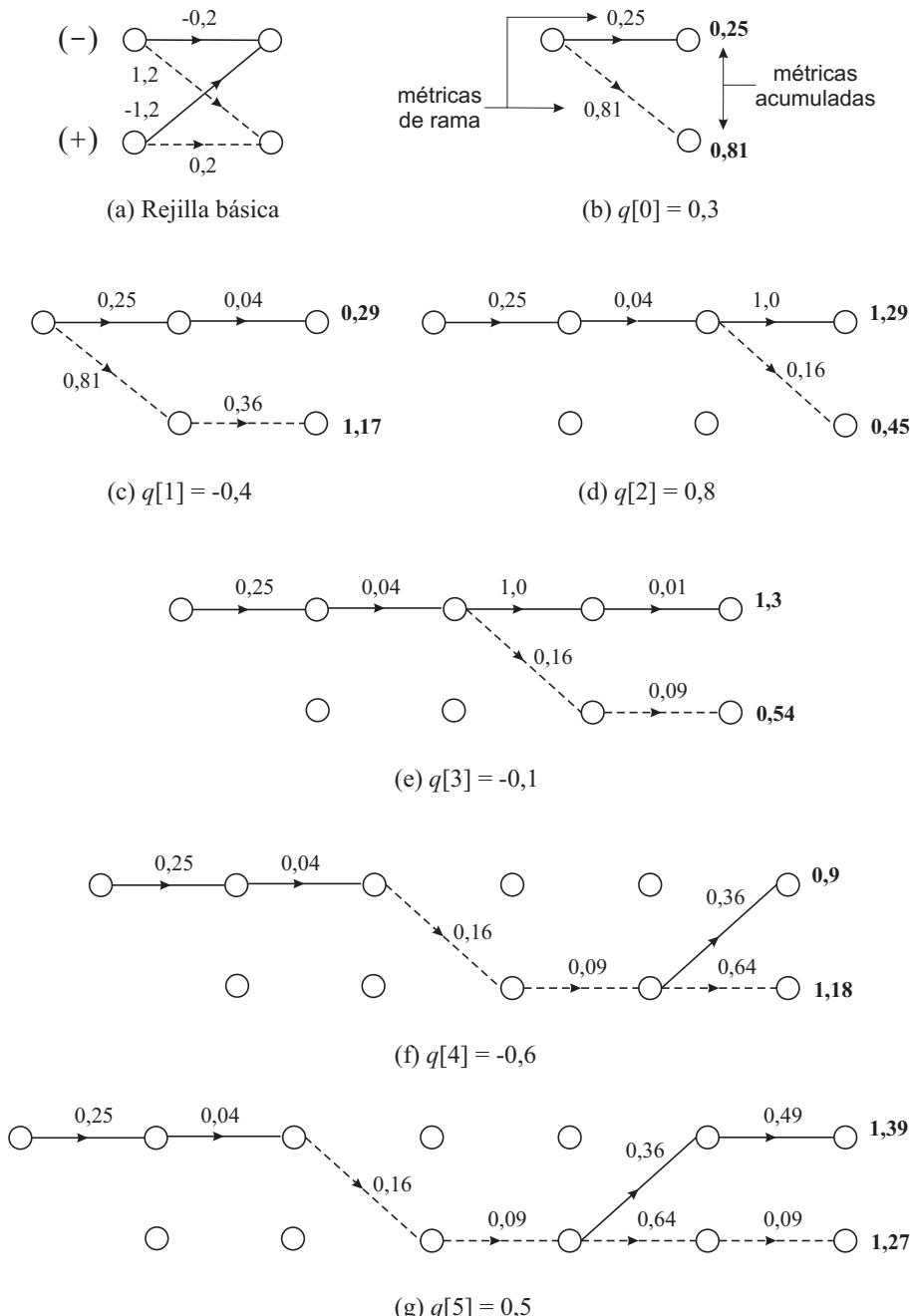


Figura 6.5. Operación del algoritmo de Viterbi vista sobre el diagrama de rejilla.

para poder decidir sobre la secuencia transmitida. En la práctica es común forzar decisiones con un retardo constante d_v (denominado *profundidad de truncamiento*), de forma que en

cada instante m se comparan las M^K métricas acumuladas para obtener la menor de todas ellas. La decisión sobre el símbolo $A[m - d]$ se toma entonces como la correspondiente al camino superviviente con esta menor métrica acumulada. Mediante esta técnica también se reduce la cantidad de memoria requerida, ya que basta con almacenar las últimas d_v ramas de cada camino superviviente. En general esta modificación (que se suele denominar *algoritmo de Viterbi truncado*) deja de ser óptima; sin embargo, el aumento en la probabilidad de secuencia errónea con respecto a la versión no truncada es menor a medida que d_v aumenta. Por tanto, si d_v se elige lo suficientemente grande, el algoritmo truncado apenas sufrirá degradación. Esto es debido a que existe una gran probabilidad de que con d_v grande todos los caminos supervivientes compartan sus ramas iniciales, de forma que estas ramas formarán parte del camino óptimo. Por ejemplo, en la Figura 6.5(d) podemos comprobar que, una vez actualizadas las métricas acumuladas, en el instante $m = 2$ es posible decidir, recorriendo hacia atrás los caminos supervivientes, que $\hat{A}[0] = -1$ y $\hat{A}[1] = -1$. Y ello sin haber esperado a tener la secuencia completa de observaciones. Del mismo modo, en $m = 4$ (Figura 6.5(f)) ya podemos decidir que $\hat{A}[2] = +1$ y $\hat{A}[3] = +1$. En la práctica la profundidad de truncamiento suele tomarse varias veces mayor que la memoria del canal.

Ejemplo 6.7

Supongamos que la constelación consta de $M = 4$ símbolos $\{-3, -1, +1, +3\}$, y que el canal está dado por $p[n] = 0,8\delta[n] + 0,6\delta[n - 1]$. El estado de partida corresponde al símbolo preacordado $A[-1] = -1$. El receptor utiliza el algoritmo de Viterbi con una profundidad de truncamiento $d_v = 2$. La Figura 6.6 muestra el resultado cuando las primeras cinco muestras recibidas son $\{q[0], \dots, q[4]\} = \{0,1, 2,8, -0,3, -0,9, 0,2\}$. A partir de la etapa $n = d_v$, en la etapa n -ésima se toma una decisión sobre el símbolo $A[n - d_v]$ seleccionando el camino superviviente con menor métrica acumulada. Este se representa con trazo más grueso en la Figura 6.6.

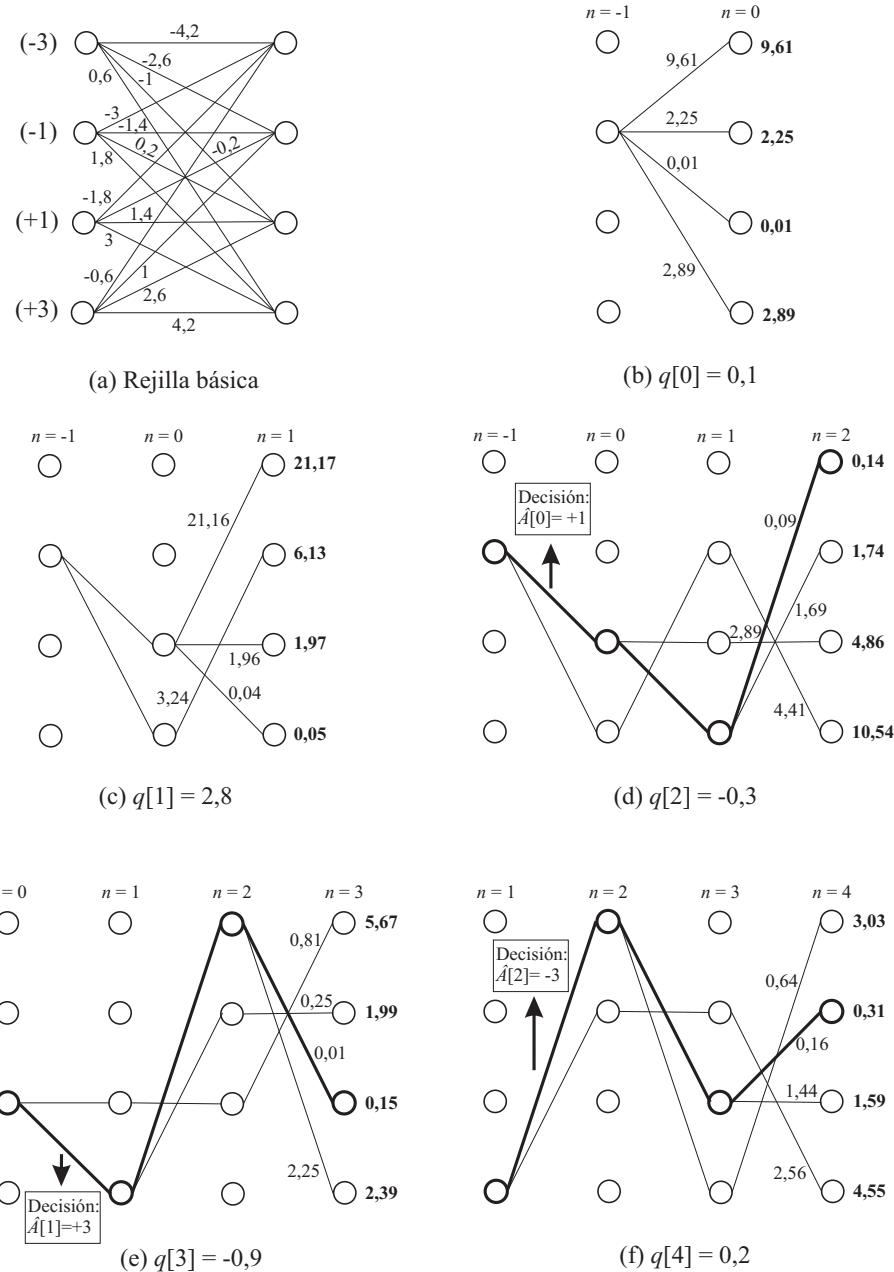
6.2.3. Probabilidad de error del detector ML de secuencias

Como ya hemos comentado, el detector de máxima verosimilitud para un canal con ISI minimiza la probabilidad de que la secuencia detectada sea diferente de la transmitida. Viendo las posibles secuencias de L símbolos como vectores L -dimensionales, esta probabilidad puede aproximarse de forma similar a (4.91):

$$Pr\{\text{secuencia errónea}\} \approx \kappa Q\left(\frac{D_{\min}/2}{\sqrt{N_0/2}}\right) \quad (6.25)$$

En este contexto, D_{\min} representa la distancia euclídea mínima entre dos secuencias sin ruido $\{o[n]\}$ (definidas mediante (6.19)) correspondiendo a dos diferentes secuencias transmitidas; y κ representa el máximo número de secuencias recibidas que se hallan a una distancia D_{\min} de una posible secuencia recibida.

Sin embargo, a medida que el número de símbolos L aumenta, κ también lo hace; de hecho, a medida que $L \rightarrow \infty$, la $Pr\{\text{secuencia errónea}\}$ tiende a 1. Esto es indicación de que este parámetro no es muy adecuado como medida de las prestaciones del detector. Por

**Figura 6.6.** Operación del algoritmo de Viterbi truncado.

otro lado, la probabilidad de error de símbolo permanece a niveles aceptables incluso cuando L crece. Por ello nos centraremos en obtener una aproximación para esta probabilidad, dada

por

$$P_e \doteq Pr(\hat{A}[n] \neq A[n]) \quad (6.26)$$

donde $A[n]$ y $\hat{A}[n]$ son los símbolos transmitido y decidido, respectivamente, correspondientes al instante n . Nótese que, en realidad, esta probabilidad es función de n , debido a que la secuencia transmitida es finita (consta de L símbolos) con lo que nuestro modelo de canal no es estrictamente estacionario³. Sin embargo, si L es lo suficientemente grande podemos dejar a un lado esta dificultad. Por ello supondremos razonablemente que P_e no depende de n .

Como hemos visto, la operación del detector ML equivale a la selección del camino en el diagrama de rejilla con menor distancia con respecto a la secuencia observada. Por tanto, para que se cometa un error es necesario que el camino escogido diverja en alguna etapa de la rejilla del camino correspondiente a la secuencia transmitida, pudiendo ambos fusionarse de nuevo un número de etapas más adelante, digamos l . Este fenómeno se denomina *suceso erróneo de longitud l* . Si denotamos por ψ y $\hat{\psi}$ las secuencias de estados sobre la rejilla correspondientes a las secuencias transmitida y detectada respectivamente, podemos definir un suceso erróneo e como el par $(\psi, \hat{\psi})$ tal que $\psi[k] \neq \hat{\psi}[k]$ para algún k . La longitud de e será igual a l si existe m tal que

$$\psi[n] \neq \hat{\psi}[n] \text{ para todo } n \in (m, m + l] \quad \text{y} \quad \psi[n] = \hat{\psi}[n] \text{ en cualquier otro caso}$$

El que un suceso erróneo e tenga longitud l no significa que la secuencia decodificada $\hat{A}[n]$ contenga l símbolos erróneos, aunque al menos contendrá un símbolo erróneo. El número de símbolos incorrectos, que denotaremos por $w(e)$, estará comprendido entre 1 y l .

Ejemplo 6.8

La Figura 6.7 representa un suceso erróneo e para el diagrama de rejilla de la Figura 6.3, suponiendo que la secuencia transmitida fue $\{\dots, -1, -1, -1, -1, -1, \dots\}$. Los dos caminos sobre la rejilla difieren en las etapas $n + 1, n + 2$ y $n + 3$, por lo que la longitud de e es $l = 3$. El suceso erróneo mostrado es además el de longitud mínima para esta secuencia transmitida. La distancia euclídea (al cuadrado) entre el camino correcto y el erróneo se calcula mediante la suma de los cuadrados de las distancias entre las ramas correspondientes a las etapas en que los dos caminos divergen, en este caso $d^2 = 0,04 + 0,16 + 2,56 + 0,36 = 3,12$. La secuencia decodificada en este caso contiene únicamente un símbolo incorrecto, de forma que $w(e) = 1$.

Denotemos el conjunto de todos los sucesos erróneos comenzando en una etapa dada de la rejilla como \mathcal{E}_0 . La probabilidad de error de símbolo del detector ML está dada por

$$P_e = \sum_{e \in \mathcal{E}_0} w(e) Pr(e) \quad (6.27)$$

donde $Pr(e)$ es la probabilidad del suceso erróneo e . La demostración de (6.27) puede encontrarse en el Apéndice 6.A. Nótese que, dado que $e = (\psi, \hat{\psi})$, podemos escribir

³Por ejemplo, no todos los estados de la rejilla son posibles en las primeras etapas, debido a que se parte de un estado inicial conocido. Esto muestra que las propiedades de la rejilla no son idénticas para toda etapa n .

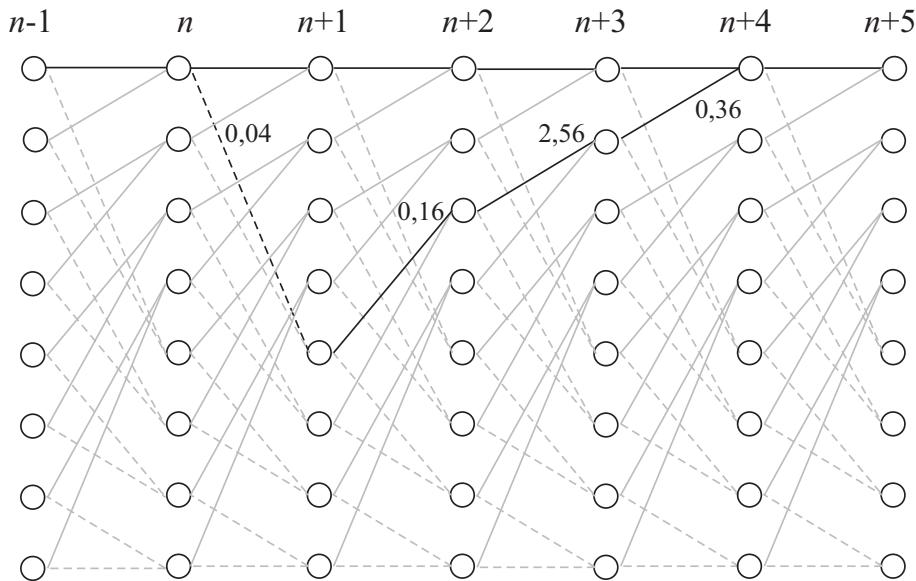


Figura 6.7. Ilustración de un suceso erróneo e de longitud $l = 3$. Las etiquetas indican las distancias (al cuadrado) entre las ramas de ambos caminos, correcto y erróneo. Se supone que el camino correcto es el que viaja a través de los nodos superiores.

$Pr\{e\} = Pr(\hat{\psi}|\psi) \cdot Pr(\psi)$. En general, es difícil calcular la probabilidad condicional $P(\hat{\psi}|\psi)$ de forma exacta, por lo que se suele recurrir a calcular cotas.

Para obtener una cota superior fijémonos en que $P(\hat{\psi}|\psi)$ es la probabilidad de que el vector observado q_0 resida en la región de decisión correspondiente a la secuencia de estados $\hat{\psi}$ cuando en realidad ψ es la secuencia correcta. Esta probabilidad es menor o igual a la que se obtendría mediante un decisor binario para decidir entre ψ y $\hat{\psi}$, por argumentos análogos a los empleados en el Capítulo 4 cuando se presentó la cota de la unión. La probabilidad de que dicho decisor binario decida $\hat{\psi}$ cuando ψ es la secuencia correcta es $Q(d(\hat{\psi}, \psi)/2\sqrt{N_0/2})$, donde $d(\hat{\psi}, \psi)$ es la distancia euclídea entre las secuencias $\hat{o}[n]$ y $o[n]$, correspondientes a $\hat{\psi}$ y ψ y definidas mediante (6.19), esto es, $d^2(\hat{\psi}, \psi) = \sum_n |\hat{o}[n] - o[n]|^2$. Así,

$$Pr(\hat{\psi}|\psi) \leq Q\left(\frac{d(\hat{\psi}, \psi)}{2\sqrt{N_0/2}}\right) \quad (6.28)$$

y por tanto,

$$P_e = \sum_{e \in \mathcal{E}_0} w(e) Pr(\psi) Pr(\hat{\psi}|\psi) \leq \sum_{e \in \mathcal{E}_0} w(e) Pr(\psi) Q\left(\frac{d(\hat{\psi}, \psi)}{2\sqrt{N_0/2}}\right) \quad (6.29)$$

Para obtener una cota inferior, retomemos (6.27). Dado que $w(e) \geq 1$, fijémonos en que

$$P_e \geq \sum_{e \in \mathcal{E}_0} Pr(e) = Pr(\epsilon) \quad (6.30)$$

donde ϵ denota el suceso “ha ocurrido un suceso erróneo”. Intuitivamente, (6.30) tiene sentido ya que todo suceso erróneo implica al menos un símbolo erróneo. Sea Ψ el conjunto de posibles secuencias de estados ψ . Podemos escribir entonces

$$P_e \geq \sum_{\psi \in \Psi} Pr(\epsilon|\psi)Pr(\psi) \geq \sum_{\psi \in \Psi_{min}} Pr(\epsilon|\psi)Pr(\psi) \quad (6.31)$$

donde Ψ_{min} es el conjunto de secuencias ψ que tienen al menos un suceso erróneo a distancia mínima, esto es, $\Psi_{min} = \{\psi \in \Psi \mid \text{existe } \hat{\psi} \in \Psi \text{ con } d(\hat{\psi}, \psi) = D_{min}\}$, siendo D_{min} la distancia euclídea mínima entre todos los pares posibles de secuencias de estados distintas. Observemos ahora que, dado que ϵ contiene todos los posibles eventos erróneos, su probabilidad de ocurrencia será siempre mayor o igual que la de un solo suceso erróneo; en particular, mayor o igual que la de un suceso a distancia mínima. Esto implica que $Pr(\epsilon|\psi) \geq Q(D_{min}/2\sqrt{N_0/2})$, para todo $\psi \in \Psi_{min}$. Por tanto,

$$P_e \geq \kappa_1 Q\left(\frac{D_{min}}{2\sqrt{N_0/2}}\right) \quad \text{con} \quad \kappa_1 \doteq \sum_{\psi \in \Psi_{min}} Pr(\psi) \quad (6.32)$$

κ_1 representa la fracción de caminos en la rejilla que tienen asociados un suceso erróneo de distancia mínima, y verifica $\kappa_1 \leq 1$.

Además de las cotas, es interesante disponer de una aproximación a la probabilidad de error. Tomando como punto de partida la primera igualdad en (6.29) y observando que para relaciones señal a ruido altas los términos dominantes en el sumatorio son aquellos que se corresponden con sucesos a distancia D_{min} (véase Capítulo 4), podemos escribir

$$\begin{aligned} P_e &\approx \sum_{e \in \mathcal{E}_{min}} w(e)Pr(\psi)Pr(\hat{\psi}|\psi) \\ &= \kappa_2 Q\left(\frac{D_{min}}{2\sqrt{N_0/2}}\right) \quad \text{con} \quad \kappa_2 \doteq \sum_{e \in \mathcal{E}_{min}} w(e)Pr(\psi) \end{aligned} \quad (6.33)$$

siendo \mathcal{E}_{min} el subconjunto de \mathcal{E}_0 cuyos sucesos erróneos tienen $d(\hat{\psi}, \psi) = D_{min}$ (es decir, el subconjunto de los sucesos erróneos más probables). Es instructivo observar que tanto κ_1 como κ_2 son independientes de la varianza del ruido.

De los desarrollos anteriores se desprende que el parámetro clave para determinar las prestaciones del detector ML es D_{min} , dado por la raíz cuadrada del mínimo valor de la suma

$$\sum_{n=0}^{N_q-1} \sum_{k=0}^K |p[k] (A[n-k] - A'[n-k])|^2 \quad (6.34)$$

que se puede obtener para dos secuencias distintas⁴ de símbolos $\{A[n]\}$ y $\{A'[n]\}$. Es decir, D_{min} es la mínima distancia euclídea entre dos vectores N_q -dimensionales producidos por

⁴Esto es, que difieran al menos en uno de sus símbolos componentes (no necesariamente en todos).

la parte determinista del canal (6.19) para dos secuencias distintas de símbolos transmitidos. En (6.34) podemos ver que, en el caso particular de un canal sin ISI ($K = 0$), D_{min} es simplemente la mínima distancia entre puntos de la constelación (multiplicada por $|p[0]|$, un factor constante debido al canal), con lo que P_e coincide con la de un detector símbolo a símbolo. Esto era de esperar, pues en ausencia de ISI dicho detector es óptimo.

El cálculo directo de D_{min} puede ser arduo debido a que el número de pares de secuencias $(\psi, \hat{\psi})$ a comprobar es en general elevado. Podemos obtener un método más eficiente inspeccionando la expresión (6.34). Si definimos la secuencia de errores $\xi[n] = A[n] - \hat{A}[n]$, vemos que este cálculo equivale a encontrar el camino (distinto del todo ceros) de menor métrica sobre una rejilla definida por el canal $p[n]$ y la “constelación” de errores. Por ejemplo, si los símbolos son binarios ($\mathcal{A} = \{-1, +1\}$), entonces los errores $\xi[n]$ pertenecen a la “constelación” $\{-2, 0, +2\}$, que consta de 3 elementos. El algoritmo de Viterbi puede entonces aplicarse para obtener el camino de menor métrica que comienza en el estado $(\xi[n-1], \dots, \xi[n-K]) = (0, \dots, 0)$ y cuya primera rama corresponde a $\xi[n] \neq 0$.

Es posible obtener una cota superior para D_{min} a partir de la cota del filtro adaptado presentada en el Apartado 6.1.3. Según (6.14), la probabilidad de error de símbolo de cualquier detector no puede ser menor que $\kappa Q(d_{min} \|p\| / 2\sqrt{N_0/2})$, donde d_{min} es la distancia mínima entre elementos de la constelación de símbolos, y $\|p\|^2$ es la energía del canal. Esta cota se puede aplicar a la probabilidad de error del detector ML (6.33) para obtener

$$\kappa_2 Q \left(\frac{D_{min}}{2\sqrt{N_0/2}} \right) \geq \kappa Q \left(\frac{d_{min}}{2} \cdot \frac{\|p\|}{\sqrt{N_0/2}} \right) \quad (6.35)$$

Dado que esto se ha de satisfacer para N_0 arbitrariamente pequeña, se sigue que

$$D_{min} \leq d_{min} \cdot \|p\| \quad (6.36)$$

Por tanto, vemos que

$$\Delta \text{SNR} \doteq 20 \log_{10} \frac{d_{min} \|p\|}{D_{min}} \quad (6.37)$$

representa el incremento en relación señal a ruido (en dB) necesario para conseguir la misma P_e que en un canal sin ISI. En caso de darse la igualdad en (6.36), entonces $\Delta \text{SNR} = 0$ y el detector ML alcanzaría la cota del filtro adaptado para relaciones señal a ruido suficientemente elevadas, lo cual significa que sus prestaciones no serían inferiores a las obtenidas en un canal sin ISI.

Ejemplo 6.9

Para la rejilla de la Figura 6.5(a), correspondiente al canal $p[n] = 0,7\delta[n] - 0,5\delta[n-1]$ y una constelación binaria $\mathcal{A} = \{-1, +1\}$, es posible comprobar directamente por inspección que existen dos sucesos erróneos con D_{min} , los cuales se ilustran en la Figura 6.8. En este caso, se tiene $D_{min}^2 = 1^2 + 1,4^2 = 2,96$, mientras que la energía del canal es $\|p\|^2 = 0,7^2 + 0,5^2 = 0,74$. Dado que la constelación tiene $d_{min} = 2$, podemos comprobar que en este caso (6.36) se cumple con igualdad. Por tanto, para relaciones señal a ruido suficientemente elevadas, el detector ML alcanza la cota del filtro adaptado.

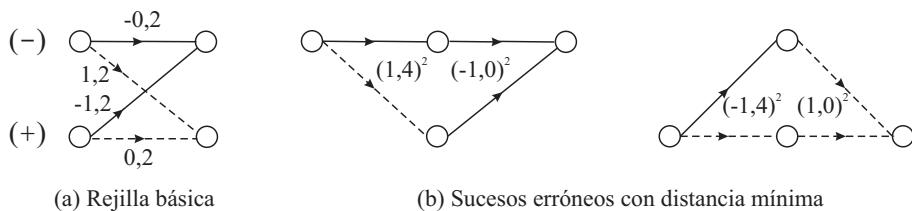


Figura 6.8. Rejilla básica y sucesos de error con D_{min} para el canal $p[n] = 0,7\delta[n] - 0,5\delta[n - 1]$ con modulación binaria.

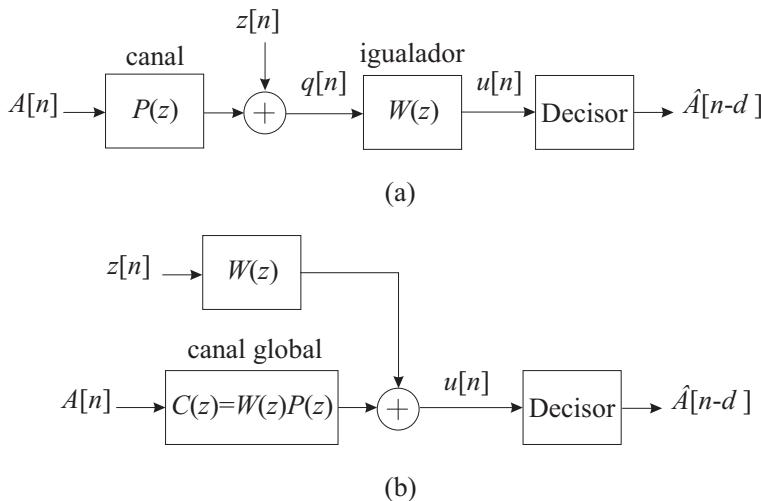


Figura 6.9. (a) Igualación lineal con detección símbolo a símbolo; (b) Sistema equivalente.

6.3. IGUALACIÓN LINEAL

El coste computacional del detector ML (basado en el algoritmo de Viterbi) es proporcional a M^K , con K la memoria del canal discreto equivalente y M el tamaño de la constelación. A menos que M y K tomen valores pequeños, la complejidad resultante será prohibitiva, sobre todo en sistemas con altas tasas binarias. En tales situaciones se hace necesario recurrir a estrategias subóptimas de detección. Una de las más comunes, denominada *igualación*, utiliza un decisor símbolo a símbolo pero no directamente sobre la señal recibida; dicha señal es procesada previamente por un sistema denominado *igualador* cuyo objetivo es compensar la distorsión del canal, de forma que a la salida del igualador el nivel de ISI sea sustancialmente menor que el presente en la señal recibida. Si el igualador se diseña correctamente, el diagrama de ojo a su salida se encontrará lo suficientemente abierto como para posibilitar el funcionamiento de un decisor símbolo a símbolo. Aunque existen igualadores no lineales, en este texto trataremos exclusivamente los *lineales*, que son suficientes para entender los criterios y principios fundamentales de la igualación de canal. En

los igualadores lineales el sistema que compensa la distorsión de canal es un filtro lineal (no necesariamente invariante en el tiempo).

La Figura 6.9(a) representa el diagrama de bloques del equivalente discreto de un sistema de comunicaciones que emplea igualación lineal. En dicha figura, $P(z)$ y $W(z)$ denotan respectivamente las Transformadas Z de las respuestas impulsionales del canal discreto equivalente, $p[n]$, y del filtro igualador, $w[n]$. Debido a razones de implementación, la estructura generalmente utilizada para este igualador es un filtro FIR (véase Apartado 2.4.3), cuyo orden denotaremos por K_w . Denotaremos por $c[n]$ la convolución de las respuestas impulsionales $p[n]$ y $w[n]$:

$$c[n] = w[n] * p[n] = \sum_{l=0}^{K_w} p[l]w[n-l], \quad 0 \leq n \leq K + K_w \quad (6.38)$$

la cual es la respuesta al impulso del denominado *canal global*, correspondiente a la conexión en serie del canal discreto equivalente y el igualador.

Así, la señal $u[n]$ a la salida del igualador se puede escribir como

$$\begin{aligned} u[n] &= \sum_{k=0}^{K_w} w[k]q[n-k] \\ &= \sum_{k=0}^{K_w} w[k] \left(\sum_{l=0}^K p[l]A[n-k-l] + z[n-k] \right) \\ &= \sum_{m=0}^{K+K_w} c[m]A[n-m] + \sum_{k=0}^{K_w} w[k]z[n-k] \end{aligned} \quad (6.39)$$

De la expresión (6.39) vemos que la entrada del decisor $u[n]$ es la suma de dos contribuciones, tal como se ilustra en la Figura 6.9(b). La primera de ellas es la componente de señal y resulta de filtrar los símbolos $A[n]$ por el canal global, cuya función de transferencia es

$$C(z) = \sum_{n=0}^{K+K_w} c[n]z^{-n} = W(z)P(z) \quad (6.40)$$

La segunda contribución a $u[n]$ en (6.39) es la componente de ruido, y es el resultado de filtrar el ruido $z[n]$ con el igualador $W(z)$. Debido a este filtrado dicha componente de ruido no será en general un proceso blanco, a diferencia del proceso de ruido original $z[n]$.

Si el diseño del igualador es correcto, cabe esperar que su salida cumpla $u[n] \approx A[n-d]$ para todo n y para algún entero d , denominado *retardo global*. Si reescribimos (6.39) como

$$u[n] = \underbrace{c[d]A[n-d]}_{\text{término deseado}} + \underbrace{\sum_{m \neq d} c[m]A[n-m]}_{\text{ISI residual}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{K_w} w[k]z[n-k]}_{\text{ruido filtrado}} \quad (6.41)$$

vemos que $u[n] \approx A[n - d]$ se cumplirá si $c[d] \approx 1$ y si los términos de ISI residual y de ruido filtrado son lo suficientemente pequeños. En tal caso, el decisor símbolo a símbolo situado tras el igualador en la Figura 6.9 recuperaría los símbolos originales simplemente eligiendo el punto de la constelación más próximo a $u[n]$ en distancia euclídea:

$$\hat{A}[n - d] = a_i \quad \text{si} \quad |u[n] - a_i| < |u[n] - a_j|, \quad j = 0, \dots, M - 1, \quad j \neq i \quad (6.42)$$

Para el correcto funcionamiento del receptor se necesita que la probabilidad de error de símbolo $\Pr\{\hat{A}[n - d] \neq A[n - d]\}$ sea lo suficientemente pequeña.

La razón de admitir un retardo global no nulo es que, como veremos más adelante, las prestaciones del igualador pueden mejorar considerablemente para ciertos retardos $d > 0$ con respecto al caso $d = 0$. Por otro lado, el funcionamiento del receptor no se ve afectado⁵ por el hecho de trabajar con un retardo global $d > 0$. Así, el retardo global constituye un parámetro adicional que proporciona mayor flexibilidad en el diseño del igualador.

En ausencia de ruido u otras interferencias, la ISI residual en (6.41) será pequeña si el canal global se aproxima a un retardo puro: $c[n] \approx \delta[n - d]$ o, equivalentemente, $C(z) \approx z^{-d}$. Este objetivo de diseño del igualador se conoce como *criterio forzador de ceros*. Alternativamente, es posible definir un objetivo de diseño basado directamente en la diferencia entre la entrada al decisor $u[n]$ y su valor ideal $A[n - d]$, lo que da lugar al *criterio de error cuadrático medio*. En los siguientes apartados analizaremos por separado cada uno de ellos.

6.3.1. Igualador lineal bajo el criterio forzador de ceros

El criterio forzador de ceros o ZF (“zero-forcing”) obtiene los coeficientes del igualador para eliminar la ISI en el canal global resultante. Es decir, se trata de forzar a valer cero el nivel de ISI γ_{ISI} definido en (6.6) correspondiente al canal global, de ahí su nombre. En principio, la eliminación total de la ISI sólo es posible si se dispone de un igualador con un número de coeficientes infinito, aunque es posible obtener aproximaciones aceptables con igualadores FIR si el retardo d y el orden del filtro K_w se eligen apropiadamente.

Supongamos de momento que disponemos de un número ilimitado de coeficientes para la implementación del igualador. El criterio ZF estipula que el canal global debe reducirse a un retardo puro: $C(z) = W(z)P(z) = z^{-d}$. Sean K' y K'' el número de ceros que el canal posee en el interior y en el exterior de la circunferencia unidad, respectivamente, y supongamos que no hay ningún cero situado sobre la circunferencia unidad, de forma que

$$P(z) = P_0 \underbrace{\prod_{k=1}^{K'} (1 - \alpha_k z^{-1})}_{\doteq P_{min}(z)} \underbrace{\prod_{n=1}^{K''} (1 - \beta_n z^{-1})}_{\doteq P_{max}(z)}, \quad \text{con } \begin{cases} |\alpha_k| < 1 \text{ para } 1 \leq k \leq K' \\ |\beta_n| > 1 \text{ para } 1 \leq n \leq K'' \end{cases} \quad (6.43)$$

⁵Aunque existen algunas aplicaciones donde el retardo global ha de mantenerse por debajo de un valor máximo tolerable.

donde P_0 es una constante. $P_{\min}(z)$ es un sistema de fase mínima (véase Apartado 2.3). Por otro lado, $P_{\max}(z)$ tiene todos sus ceros fuera de la circunferencia unidad; los filtros FIR con esta propiedad se suelen denominar *de fase máxima*.

De $W(z)P(z) = z^{-d}$ y la factorización $P(z) = P_0P_{\min}(z)P_{\max}(z)$ se sigue que

$$W(z) = \frac{z^{-d}}{P(z)} = \frac{1}{P_0} \cdot \frac{1}{P_{\min}(z)} \cdot \frac{z^{-d}}{P_{\max}(z)} \quad (6.44)$$

El factor $1/P_{\min}(z)$ se corresponde con un filtro causal y estable, ya que todos sus polos $\alpha_1, \dots, \alpha_{K'}$ se encuentran situados dentro de la circunferencia unidad. Por otro lado los polos $\beta_1, \dots, \beta_{K''}$ del factor $z^{-d}/P_{\max}(z)$ se hallan en el exterior de esta, por lo que una implementación estable de esta función de transferencia ha de ser necesariamente no causal, tal y como se discutió en el Apartado 2.3.4. Así, la función de transferencia $W(z)$ en (6.44) no se corresponde con una respuesta impulsional finita y causal, como se requiere para poder implementar el filtro igualador. Sin embargo, si el retardo d es lo suficientemente elevado, la parte no causal de (6.44) podrá despreciarse. Por tanto es posible obtener una buena aproximación de (6.44) mediante un filtro FIR causal simplemente truncando la parte causal de $z^{-d}/P(z)$ al número de coeficientes adecuado, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

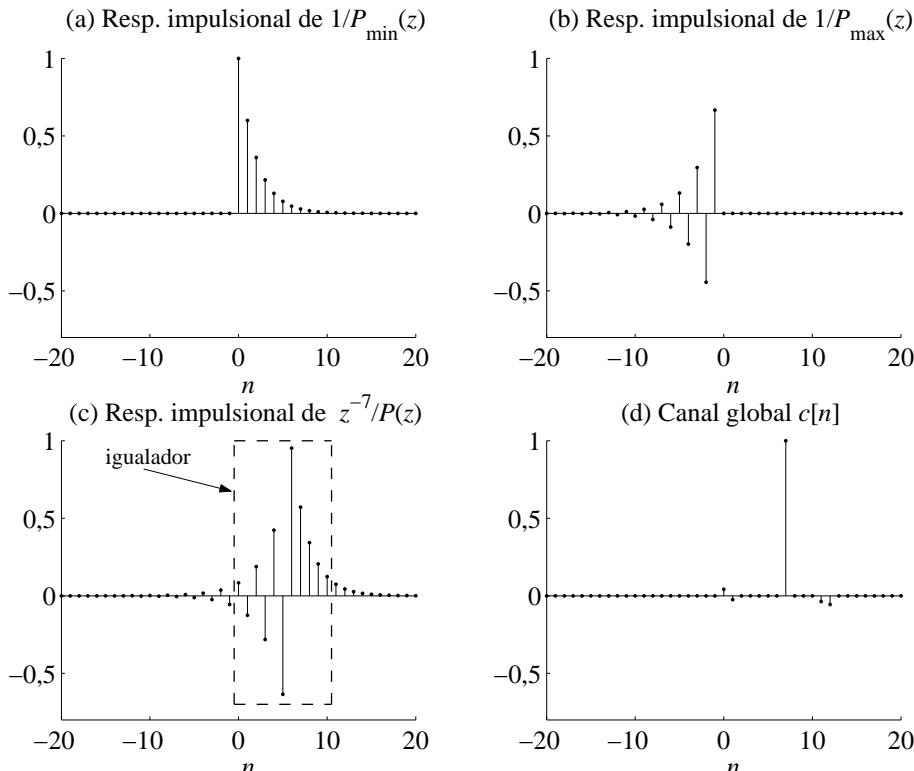


Figura 6.10. Respuestas impulsionales interviniendo en el diseño del igualador ZF para el canal $P(z) = 0,5 + 0,45z^{-1} - 0,45z^{-2}$ del Ejemplo 6.10.

Ejemplo 6.10

Supongamos que el canal discreto equivalente está dado por $P(z) = 0,5 + 0,45z^{-1} - 0,45z^{-2} = 0,5(1 - 0,6z^{-1})(1 + 1,5z^{-1})$. En tal caso, $P_0 = 0,5$, $P_{min}(z) = 1 - 0,6z^{-1}$ y $P_{max}(z) = 1 + 1,5z^{-1}$, con lo que obtenemos las siguientes implementaciones estables:

$$\begin{aligned}\frac{1}{P_{min}(z)} &= \frac{1}{1 - 0,6z^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (0,6)^n z^{-n}, \\ \frac{1}{P_{max}(z)} &= \frac{1}{1 + 1,5z^{-1}} = \frac{\frac{z}{1,5}}{1 + \frac{z}{1,5}} = \frac{z}{1,5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{1,5}\right)^n z^n\end{aligned}$$

cuyas respuestas impulsionales se representan en la Figura 6.10(a)-(b). Allí se puede observar que un retardo de $d = 7$ muestras es adecuado para poder truncar $z^{-d}/P_{max}(z)$ quedándonos con su parte causal. El igualador ZF $W(z)$ es un filtro FIR con orden K_w cuya respuesta impulsional viene dada por los primeros $K_w + 1$ coeficientes de la parte causal de la respuesta al impulso de $z^{-d}/P(z)$. A partir de dicha respuesta, mostrada en la Figura 6.10(c), se observa que tomando $K_w = 10$ se captura la mayor parte de los coeficientes significativos. El canal global $C(z) = W(z)P(z)$ obtenido con este igualador se ilustra en la Figura 6.10(d): se tiene $c[n] \approx \delta[n - 7]$, como cabía esperar. Para mejorar la calidad de esta aproximación se podría aumentar el retardo d y el orden K_w del igualador.

En nuestro diseño hemos supuesto que el canal $P(z)$ no posee raíces situadas sobre la circunferencia unidad. Este requisito es necesario, pues no es posible invertir un cero de este tipo de forma estable. A medida que alguna raíz de $P(z)$ se acerca a la circunferencia unidad, el orden K_w y el retardo d deberán aumentar considerablemente para capturar la parte significativa del inverso retardado $z^{-d}/P(z)$. Obsérvese que, dado que el canal global $C(z)$ es FIR con orden $K + K_w$, este es el máximo valor asignable al retardo d , pues no es posible obtener $W(z)P(z) \approx z^{-d}$ si d es mayor que el orden del polinomio $W(z)P(z)$.

El criterio ZF conduce a un igualador $W(z)$ que trata de satisfacer $C(z) = W(z)P(z) \approx z^{-d}$. Por tanto, su transformada de Fourier cumplirá

$$|W(e^{j\omega})| \approx \frac{1}{|P(e^{j\omega})|}, \quad \angle W(e^{j\omega}) + \angle P(e^{j\omega}) \approx -\omega d \quad (6.45)$$

La condición (6.45) implica que para compensar la ISI el igualador ZF deberá amplificar más aquellas componentes frecuenciales que han sido más atenuadas por el canal. Esto puede suponer un problema ya que, tal como se observa en la Figura 6.9 y en (6.39), la salida $u[n]$ del igualador posee una componente debida al ruido $z[n]$ presente en la señal recibida tras ser filtrado por el igualador. Por tanto, el igualador estará amplificando considerablemente el ruido en aquellas bandas de frecuencia en las que el canal introduce fuerte atenuación. Este fenómeno se denomina *realce del ruido*, y puede llegar a ser muy perjudicial si la relación señal a ruido en el receptor no es lo suficientemente alta, o si la función de transferencia $P(z)$ del canal presenta ceros próximos a la circunferencia unidad. Así, la probabilidad de error a la salida del decisor símbolo a símbolo será excesivamente elevada como consecuencia del realce del ruido, aun cuando el igualador ZF haya conseguido reducir aceptablemente la ISI.

Ejemplo 6.11

La Figura 6.11 muestra la respuesta en frecuencia del canal $p[n] = 0,5\delta[n] + 0,45\delta[n - 1] - 0,45\delta[n - 2]$ considerado en el Ejemplo 6.10, así como la del igualador ZF calculado en dicho

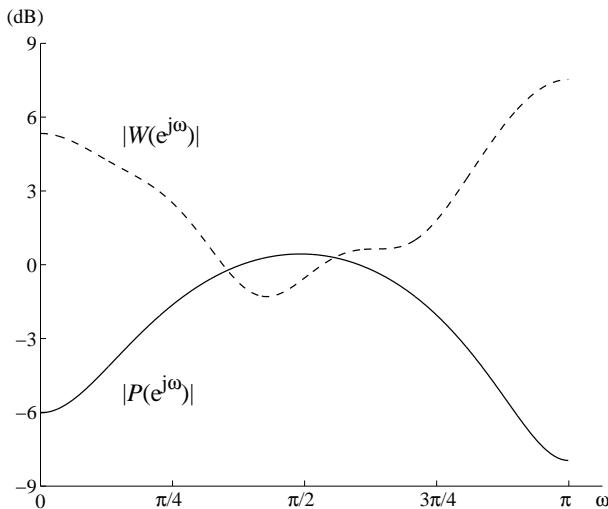


Figura 6.11. Magnitud de la función de transferencia del canal (línea continua) y del igualador ZF (línea discontinua) del Ejemplo 6.11.

ejemplo. Como puede observarse, el canal introduce una atenuación importante en bajas y altas frecuencias, sin alterar apenas las frecuencias en torno a $\omega = \pi/2$. Como consecuencia, el igualador ZF introduce amplificación en altas y bajas frecuencias, de forma que el efecto neto es

$$|W(e^{j\omega})| \text{ (dB)} + |P(e^{j\omega})| \text{ (dB)} \approx 0 \quad (6.46)$$

La relación (6.46) es sólo aproximada, pues para cumplirse con exactitud el igualador debería poseer un número infinito de coeficientes. La calidad de la aproximación (6.46) mejorará si se incrementa el orden K_w del igualador. Sin embargo, el igualador estará realizando considerablemente el ruido en las frecuencias en torno a $\omega = 0$ (unos 6 dB) y $\omega = \pi$ (unos 8 dB).

Nótese que el criterio forzador de ceros se centra en la eliminación de ISI, ignorando en todo momento el ruido presente en el receptor. Para mitigar el efecto del realce del ruido, este ha de ser tenido en cuenta en el diseño del igualador desde un principio.

6.3.2. Igualador lineal bajo el criterio de error cuadrático medio

En última instancia, la probabilidad de error P_e obtenida tras el decisor determina la calidad del igualador, y depende tanto de la ISI residual que no ha podido ser eliminada por el igualador como del ruido filtrado por este. En principio podría plantearse el diseño del igualador para minimizar directamente P_e . Por desgracia, P_e es una función extremadamente complicada de los coeficientes del igualador, ya que, por un lado, la componente de ISI residual a la salida de este no posee una distribución gaussiana, mientras que, por el otro, una vez filtrado por el igualador, el ruido deja de ser blanco (véase también Apartado 5.1.2). Por ello, el diseño bajo un criterio de mínima probabilidad de error no es, en general, fácilmente abordable.

Otra posibilidad consiste en diseñar el igualador para que la secuencia a su salida sea “lo más parecida posible” a la secuencia de símbolos original. De esta forma se tendría en cuenta tanto el efecto de la ISI como el del ruido, ya que ambos introducen distorsión. Se evitaría así el problema de realce del ruido del método ZF mediante un compromiso entre amplificación de ruido y eliminación de ISI. En igualación, la medida más popular de “parecido” entre dos secuencias es el error cuadrático medio o MSE (“Mean-Square Error”).

El criterio MSE elige el igualador de forma que la varianza del error $e_d[n] \doteq A[n-d] - u[n]$ (diferencia entre la secuencia de símbolos originales, posiblemente retardada, y la salida del igualador) sea mínima. Aunque el igualador resultante no es necesariamente óptimo en términos de probabilidad de error, en general sus prestaciones son más que aceptables, y lo que no es menos importante, el diseño resultante es matemáticamente manejable.

La salida del igualador puede expresarse como $u[n] = \mathbf{w}^T \mathbf{q}[n]$, con \mathbf{w} el vector de coeficientes del igualador y $\mathbf{q}[n]$ agrupando las muestras de la señal recibida:

$$\mathbf{w} \doteq [w[0], w[1], \dots, w[K_w]]^T \quad (6.47)$$

$$\mathbf{q}[n] \doteq [q[n], q[n-1], \dots, q[n-K_w]]^T \quad (6.48)$$

El cálculo del igualador MSE es un problema de estimación lineal de mínima varianza, donde la variable aleatoria a estimar es $A[n-d]$ y la estimación se hace como combinación lineal de las componentes de $\mathbf{q}[n]$. La solución al problema general de estimación lineal se presenta en el Apéndice 6.B, de donde se obtiene el igualador que minimiza el error cuadrático medio $E\{|e_d[n]|^2\}$, que denotaremos $\mathbf{w}_{d,\text{MSE}}$, y el valor mínimo obtenido:

$$\mathbf{w}_{d,\text{MSE}} = (E\{\mathbf{q}^*[n]\mathbf{q}[n]\})^{-1} E\{\mathbf{q}^*[n]A[n-d]\} \quad (6.49)$$

$$\underset{\mathbf{w}}{\min} E\{|e_d[n]|^2\} = E\{|A[n]|^2\} - \mathbf{w}_{d,\text{MSE}}^H E\{\mathbf{q}^*[n]\mathbf{q}[n]\} \mathbf{w}_{d,\text{MSE}} \quad (6.50)$$

Para el cálculo de $\mathbf{w}_{d,\text{MSE}}$ se necesita la *matriz de autocorrelación* $\mathbf{R}_q \doteq E\{\mathbf{q}^*[n]\mathbf{q}[n]\}$. Esta matriz tiene la interesante propiedad de ser *toeplitz* (es decir, todos los elementos a lo largo de cualquiera de sus diagonales son iguales), ya que por ser $q[n]$ un proceso estacionario, su elemento (i, j) es, con i, j entre 1 y $K_w + 1$,

$$E\{q^*[n-i+1]q[n-j+1]\} = E\{q[n+i-j]q^*[n]\} = R_q[i-j] \quad (6.51)$$

el cual sólo depende de $i - j$. Además, $R_q[i-j] = R^*[j-i]$. Nótese que los elementos de esta matriz no son sino las componentes de la secuencia de autocorrelación del proceso $q[n]$:

$$\mathbf{R}_q = \begin{bmatrix} R_q[0] & R_q^*[1] & R_q^*[2] & \cdots & R_q^*[K_w] \\ R_q[1] & R_q[0] & R_q^*[1] & \cdots & R_q^*[K_w-1] \\ R_q[2] & R_q[1] & R_q[0] & \cdots & R_q^*[K_w-2] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_q[K_w] & R_q[K_w-1] & R_q[K_w-2] & \cdots & R_q[0] \end{bmatrix} \quad (6.52)$$

Por otro lado, también se necesita calcular el vector de correlación cruzada entre la entrada al igualador y la señal deseada, dado por

$$\mathbf{r}_{qA} \doteq E\{\mathbf{q}^*[n]A[n-d]\} = \begin{bmatrix} E\{q^*[n]A[n-d]\} \\ E\{q^*[n-1]A[n-d]\} \\ \vdots \\ E\{q^*[n-K_w]A[n-d]\} \end{bmatrix} \quad (6.53)$$

Para escribir (6.52) y (6.53) en términos del canal discreto equivalente, recurrimos al modelo (6.3), que nos permite escribir $\mathbf{q}[n]$ como

$$\mathbf{q}[n] = \underbrace{\begin{bmatrix} p[0] & p[1] & \cdots & \cdots & \cdots & p[K] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p[0] & p[1] & \cdots & \cdots & p[K] & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & p[0] & p[1] & \cdots & \cdots & \cdots & p[K] \end{bmatrix}}_{=P^T} \underbrace{\begin{bmatrix} A[n] \\ A[n-1] \\ \vdots \\ A[n-K-K_w] \end{bmatrix}}_{=\mathbf{a}[n]} + \underbrace{\begin{bmatrix} z[n] \\ z[n-1] \\ \vdots \\ z[n-K_w] \end{bmatrix}}_{=\mathbf{z}[n]} \Leftrightarrow \mathbf{q}[n] = P^T \mathbf{a}[n] + \mathbf{z}[n] \quad (6.54)$$

El vector $\mathbf{a}[n]$ recoge los símbolos transmitidos, mientras que en el vector $\mathbf{z}[n]$ se incluyen las muestras del ruido. La matriz P , de tamaño $(K+K_w+1) \times (K_w+1)$, y cuya traspuesta interviene en (6.54), se denomina *matriz de convolución del canal*. Nótese que P es toeplitz.

Utilizando la expresión (6.54) se llega a

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{qA} &= E\{(P^T \mathbf{a}[n] + \mathbf{z}[n])^* A[n-d]\} \\ &= P^H E\{\mathbf{a}^*[n] A[n-d]\} + E\{\mathbf{z}^*[n] A[n-d]\} \end{aligned} \quad (6.55)$$

El ruido y los símbolos están incorrelacionados por ser estadísticamente independientes, y dado que su media es cero, el segundo sumando en (6.55) se anula: $E\{\mathbf{z}^*[n] A[n-d]\} = E\{\mathbf{z}^*[n]\} E\{A[n-d]\} = \mathbf{0}$, esto es, un vector con componentes nulas. Por otro lado, para un retardo d con $0 \leq d \leq K+K_w$ se tiene

$$E\{\mathbf{a}^*[n] A[n-d]\} = E_s \cdot \nu_d \quad (6.56)$$

donde E_s es la energía media por símbolo y ν_d se define como el vector cuyas componentes son todas nulas excepto la $(d+1)$ -ésima, que es igual a uno.

Multiplicando por la derecha a una matriz, el vector ν_d produce un vector igual a la columna $(d+1)$ -ésima de dicha matriz. Por tanto, sustituyendo (6.56) en (6.55), se tiene

que el vector $E\{\mathbf{q}^*[n]A[n-d]\}$ es simplemente la columna $(d+1)$ -ésima de la matriz \mathbf{P}^H (escalada por la energía media por símbolo):

$$\mathbf{r}_{qA} = E_s \cdot \mathbf{P}^H \boldsymbol{\nu}_d = E_s \cdot \begin{bmatrix} p^*[d] \\ p^*[d-1] \\ \vdots \\ p^*[d-K_w] \end{bmatrix} \quad (6.57)$$

Usando (6.54), obtenemos ahora la siguiente expresión para la matriz de autocorrelación de la señal a la salida del canal discreto equivalente:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_q &= E\{(\mathbf{P}^H \mathbf{a}^*[n] + \mathbf{z}^*[n])(\mathbf{a}^T[n] \mathbf{P} + \mathbf{z}^T[n])\} \\ &= \mathbf{P}^H E\{\mathbf{a}^*[n] \mathbf{a}^T[n]\} \mathbf{P} + E\{\mathbf{z}^*[n] \mathbf{z}^T[n]\} \\ &\quad + \mathbf{P}^H E\{\mathbf{a}^*[n] \mathbf{z}^T[n]\} + E\{\mathbf{z}^*[n] \mathbf{a}^T[n]\} \mathbf{P} \end{aligned} \quad (6.58)$$

Los dos últimos sumandos en (6.58) son cero debido a la incorrelación entre las secuencias de símbolos y de ruido. Por otro lado, dado que estas dos secuencias son blancas con varianzas E_s y σ_z^2 respectivamente, sus matrices de autocorrelación se reducen a

$$E\{\mathbf{a}^*[n] \mathbf{a}^T[n]\} = E_s \cdot \mathbf{I}, \quad E\{\mathbf{z}^*[n] \mathbf{z}^T[n]\} = \sigma_z^2 \cdot \mathbf{I} \quad (6.59)$$

Sustituyendo esto en (6.58), la matriz de autocorrelación puede escribirse como

$$E\{\mathbf{q}^*[n] \mathbf{q}^T[n]\} = E_s \cdot \mathbf{P}^H \mathbf{P} + \sigma_z^2 \mathbf{I} \quad (6.60)$$

Por tanto, sustituyendo (6.57) y (6.60) en (6.49), obtenemos finalmente la expresión del igualador MSE óptimo en función de los parámetros del canal:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{d,\text{MSE}} &= (E_s \mathbf{P}^H \mathbf{P} + \sigma_z^2 \mathbf{I})^{-1} (E_s \mathbf{P}^H \boldsymbol{\nu}_d) \\ &= (\mathbf{P}^H \mathbf{P} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{P}^H \boldsymbol{\nu}_d \end{aligned} \quad (6.61)$$

donde se ha introducido el inverso de la relación señal a ruido

$$\lambda \doteq \frac{\sigma_z^2}{E_s} \quad (6.62)$$

Finalmente, utilizando (6.60) y (6.61), el valor mínimo de la varianza del error dado en (6.50) puede escribirse como

$$\min_{\mathbf{w}} E\{|e_d[n]|^2\} = E_s [1 - \boldsymbol{\nu}_d^H \mathbf{P} (\mathbf{P}^H \mathbf{P} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{P}^H \boldsymbol{\nu}_d] \quad (6.63)$$

que no es sino el elemento $(d+1)$ -ésimo de la diagonal de la matriz⁶ $\mathbf{I} - \mathbf{P} (\mathbf{P}^H \mathbf{P} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{P}^H$. Por tanto, basta invertir la matriz $\mathbf{P}^H \mathbf{P} + \lambda \mathbf{I}$ para obtener el error cuadrático medio correspondiente a todos los retardos en el rango admisible $0 \leq d \leq K + K_w$.

⁶Nótese que $\boldsymbol{\nu}_i^H \mathbf{M} \boldsymbol{\nu}_j$ es el elemento (i, j) de la matriz \mathbf{M} .

De particular interés es el caso en el que la relación señal a ruido es elevada, de forma que $\lambda \rightarrow 0$. De hecho, tomar $\lambda = 0$ equivale a ignorar el ruido, lo que puede considerarse como un diseño ZF alternativo⁷ al del Apartado 6.3.1:

$$\mathbf{w}_{d,\text{ZF}} = (\mathbf{P}^H \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}^H \boldsymbol{\nu}_d \quad (6.64)$$

El cálculo del igualador ZF mediante (6.64) posee la ventaja de no requerir una factorización espectral del canal discreto equivalente $P(z)$, pues dicha factorización puede ser computacionalmente problemática, sobre todo si el orden del canal es elevado. Mediante este diseño, el igualador trata de ajustar la respuesta impulsional del canal global a un impulso $\delta[n - d]$, el cual representa una respuesta ideal libre de ISI (véase Problema P6.14).

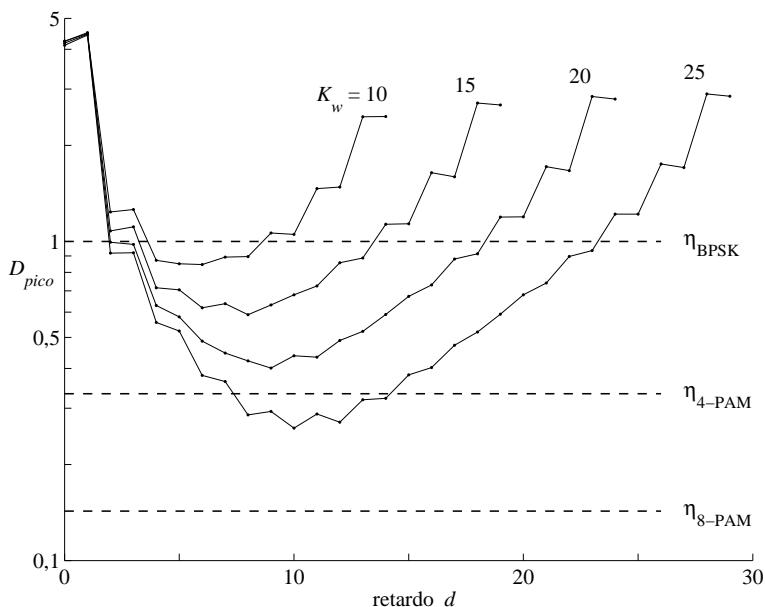


Figura 6.12. Distorsión de pico en el canal global usando un igualador ZF con varios órdenes, para $p[n] = 0,3\delta[n] - 0,12\delta[n - 1] - 0,42\delta[n - 2] - 0,5\delta[n - 4]$.

Ejemplo 6.12

Consideremos el canal $p[n] = 0,3\delta[n] - 0,12\delta[n - 1] - 0,42\delta[n - 2] - 0,5\delta[n - 4]$. Los ceros de $P(z)$ se encuentran aproximadamente en $\{1,64, -1,34, 0,87e^{\pm j0,4811\pi}\}$. En la Figura 6.12 se representa la distorsión de pico (definida en (6.7)) correspondiente al canal global obtenido mediante el igualador ZF (6.64), para varios órdenes K_w del igualador, y en función del retardo d . Recuérdese que $\gamma_{\text{ISI}} = D_{\text{pico}}/\eta$, de forma que valores pequeños de D_{pico} indican una menor ISI residual; y que se requiere $D_{\text{pico}} < \eta$ para abrir el ojo de forma que, en ausencia de ruido, el decisor símbolo a símbolo basado en la distancia euclídea no cometa errores. Las líneas horizontales en la Figura 6.12 indican los valores de η para las constelaciones BPSK, 4-PAM y 8-PAM.

⁷Cuando K_w y d son lo suficientemente elevados, los igualadores ZF obtenidos mediante ambos criterios son prácticamente iguales.

Las prestaciones del igualador mejoran a medida que se aumenta el número de sus coeficientes, como cabía esperar. Nótese que el orden requerido para un igualador capaz de abrir el ojo es mayor cuanto mayor sea el número de elementos de la constelación. En concreto, ninguno de los órdenes representados es suficiente si la constelación empleada es 8-PAM. Por otra parte, para un orden K_w dado, existe una importante variación con el retardo. Obsérvese que los retardos que proporcionan una mayor reducción de la ISI suelen encontrarse en los valores intermedios del rango admisible $[0, K_w + K]$, mientras que hacia los extremos de este rango las prestaciones se degradan sustancialmente. Este comportamiento es típico de canales que poseen ceros tanto dentro como fuera de la circunferencia unidad.

Para relaciones señal a ruido suficientemente elevadas, se tiene $\lambda \approx 0$ y los igualadores diseñados bajo los criterios MSE (6.61) y ZF (6.64) son similares. Esto es intuitivamente satisfactorio: cuando el nivel de ruido es muy bajo la tarea del igualador se reduce a eliminar la ISI, tal y como se pretende con el criterio forzador de ceros. Sin embargo, a medida que el nivel de ruido aumenta, la diferencia entre los diseños ZF y MSE se hace más aparente. Como ya se ha dicho, al haberse ignorado el ruido en su diseño, el igualador ZF corre el riesgo de amplificar excesivamente el ruido en las bandas de frecuencia en que el canal introduce atenuaciones considerables. Por el contrario, el igualador MSE alcanza un equilibrio entre realce de ruido y compensación de la ISI.

Ejemplo 6.13

La Figura 6.13 muestra la función de transferencia del canal discreto equivalente $p[n]$ del Ejemplo 6.12, así como la del igualador lineal MSE de orden $K_w = 25$ y retardo $d = 10$ para diferentes niveles de ruido. En ausencia de ruido aditivo, esto es, con $\text{SNR} = \lambda^{-1} = \infty$, el igualador MSE coincide con el ZF, de forma que $|W(e^{j\omega})| (\text{dB}) + |P(e^{j\omega})| (\text{dB}) \approx 0$. Por otro lado, a medida que la relación señal a ruido empeora, la ganancia del igualador MSE en torno a las frecuencias $\omega = \pi/2$ y $\omega = \pi$ (en las cuales la atenuación introducida por el canal es considerable) disminuye progresivamente. Este efecto evita el realce del ruido a la salida del igualador.

El igualador lineal constituye una herramienta poderosa para la compensación de la ISI. Tal como se ha visto, es posible abrir el ojo a la salida del igualador si el número de coeficientes y el retardo correspondiente se eligen adecuadamente. Por otro lado, el igualador lineal presenta los siguientes inconvenientes:

- Básicamente, el filtro igualador trata de aproximar el inverso del canal discreto equivalente. Cuando este presenta una atenuación considerable en alguna banda de frecuencias (típicamente debido a algún cero de su función de transferencia próximo a la circunferencia unidad), el número de coeficientes del igualador necesario para aproximar este inverso (y así abrir el ojo) de forma satisfactoria puede ser excesivamente grande.
- Cuando el ruido presente es sustancial, el igualador lineal ha de mantener un compromiso entre compensación de ISI y realce del ruido. Así, a medida que la relación señal a ruido en recepción disminuye, la ISI residual a la salida del igualador aumentará.

En el siguiente apartado presentaremos un esquema de igualación alternativo que puede mitigar en gran medida los inconvenientes anteriores del igualador lineal.

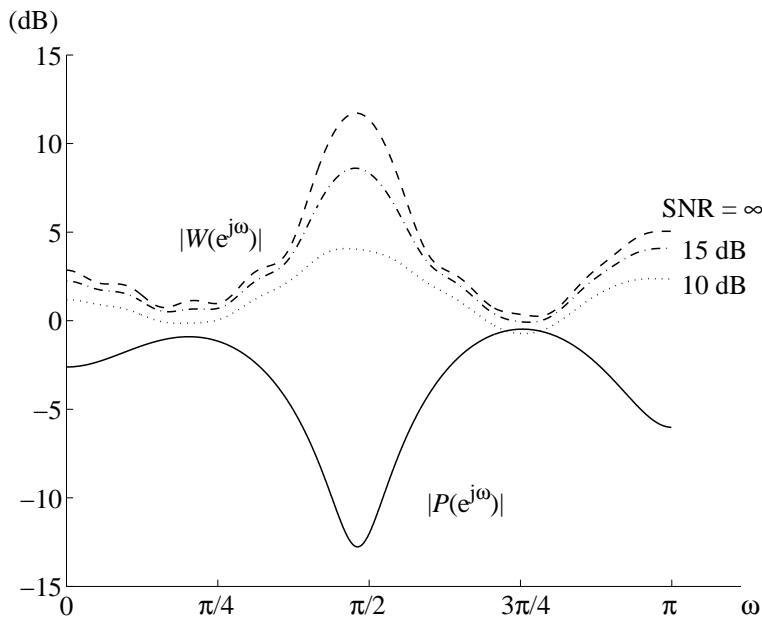


Figura 6.13. Magnitud de la función de transferencia del canal (línea continua) y del igualador lineal MSE (líneas discontinuas) del Ejemplo 6.13.

6.4. IGUALADOR CON REALIMENTACIÓN DE DECISIONES

El método de igualación que se desarrollará en este apartado supone un intento de superar los problemas asociados con el igualador lineal (realce del ruido y necesidad de órdenes elevados), sin incurrir en el elevado coste computacional del detector ML del Apartado 6.2. La idea principal consiste en utilizar las estimaciones de los símbolos obtenidas en instantes anteriores para mitigar la ISI, por lo que este esquema se denomina *igualador con realimentación de decisiones*, o igualador DFE (“*decision feedback equalizer*”). Dado que estas decisiones son generadas por el decisor símbolo a símbolo, el cual es un dispositivo no lineal, el igualador DFE constituye asimismo un elemento no lineal, a diferencia de los igualadores presentados en el Apartado 6.3. Veremos cómo es posible salvar esta dificultad si se supone que la tasa de error resultante es suficientemente baja. Esta suposición hará posible el diseño del igualador DFE bajo el criterio del error cuadrático medio (MSE).

6.4.1. Concepto de realimentación de decisiones

Para ilustrar el funcionamiento del igualador con realimentación de decisiones, consideremos un caso particular en el que el canal discreto equivalente $p[n]$ es tal que su primer coeficiente es la unidad (esto es, $p[0] = 1$), de forma que la señal recibida toma la forma

$$q[n] = A[n] + \sum_{k=1}^K p[k]A[n-k] + z[n] \quad (6.65)$$

Una posible estrategia para eliminar la ISI dada por el segundo sumando en (6.65) consiste en restar a $q[n]$ una estimación de dicha ISI, construida a partir de las decisiones $\hat{A}[n-1], \dots, \hat{A}[n-K]$ obtenidas en instantes anteriores. Así se obtiene la secuencia $u[n]$,

$$\begin{aligned} u[n] &= q[n] - \sum_{k=1}^K p[k] \hat{A}[n-k] \\ &= A[n] + \sum_{k=1}^K p[k] (A[n-k] - \hat{A}[n-k]) + z[n] \end{aligned} \quad (6.66)$$

y a partir de ella se obtendría la siguiente decisión $\hat{A}[n]$ como el símbolo de la constelación más próximo a $u[n]$ en distancia euclídea. De (6.66) se desprende que si las decisiones coinciden con los símbolos originales (como debe ser si el receptor está funcionando adecuadamente), es decir, si $\hat{A}[n-k] = A[n-k]$ para $k = 1, \dots, K$, entonces el segundo sumando en (6.66) se anula, resultando en $u[n] = A[n] + z[n]$. Vemos que con esta estrategia se ha logrado eliminar totalmente la ISI, sin amplificar el ruido en el proceso, y utilizando un número de coeficientes razonable (en este caso igual al orden del canal K): ¡los principales inconvenientes del igualador lineal del Apartado 6.3 parecen haber sido superados!

Hemos de ser cautos en nuestras conclusiones, pues el desarrollo anterior depende críticamente de la suposición de que el primer coeficiente del canal discreto equivalente es $p[0] = 1$. ¿Qué ocurre si esto no se cumple? Tal como muestra el siguiente ejemplo, es posible incurrir en un realce importante del ruido.

Ejemplo 6.14

Si $p[0] \neq 1$, la señal de entrada al decisor podría construirse como

$$\begin{aligned} u[n] &= \frac{q[n]}{p[0]} - \sum_{k=1}^K \frac{p[k]}{p[0]} \hat{A}[n-k] \\ &= A[n] + \sum_{k=1}^K \frac{p[k]}{p[0]} (A[n-k] - \hat{A}[n-k]) + \frac{z[n]}{p[0]} \end{aligned} \quad (6.67)$$

de forma que si las decisiones anteriores son correctas, se tiene $u[n] = A[n] + \frac{z[n]}{p[0]}$ y la ISI desaparece. Sin embargo, la potencia de ruido a la entrada del decisor pasa a ser $\sigma_z^2 / |p[0]|^2$, la cual será mayor cuanto menor sea el valor de $|p[0]|$, con el consiguiente aumento de la probabilidad de error a la salida del decisor. Vemos por tanto que la estrategia de realimentación de decisiones no está libre del problema del realce del ruido.

El problema estriba en que es posible tener un canal con $|p[0]| \ll 1$. En tal situación, podría admitirse un retardo $d > 0$ en la estimación de la secuencia original de símbolos, es decir, utilizar como referencia para la decisión el símbolo $A[n-d]$. Para minimizar el realce del ruido, d puede elegirse como el índice del mayor coeficiente (cursor) de la respuesta impulsional del canal, de forma que $|p[d]| > |p[k]|$ para todo $k \neq d$. Sin embargo, con esta estrategia aparece un nuevo fenómeno, tal como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.15

Si d es el índice correspondiente al cursor del canal, las decisiones se obtienen de modo que $\hat{A}[n - d]$ es el elemento de la constelación más cercano a la entrada $u[n]$ al decisor, dada por

$$\begin{aligned} u[n] &= \frac{q[n]}{p[d]} - \sum_{k=d+1}^K \frac{p[k]}{p[d]} \hat{A}[n - k] \\ &= \left(\sum_{k=0}^{d-1} \frac{p[k]}{p[d]} A[n - k] \right) + A[n - d] \\ &\quad + \left(\sum_{k=d+1}^K \frac{p[k]}{p[d]} (A[n - k] - \hat{A}[n - k]) \right) + \left(\frac{z[n]}{p[d]} \right) \end{aligned} \quad (6.68)$$

Si las decisiones previas $\hat{A}[n - d - 1], \dots, \hat{A}[n - K]$ son correctas, el tercer sumando en (6.68), denominado *ISI postcursora*, se anulará. La componente de ruido es el cuarto sumando en (6.68), cuya varianza es $\sigma_z^2 / |p[d]|^2$. Por otro lado, observamos ahora la aparición del primer sumando en (6.68), correspondiente a la ISI debida a los coeficientes $p[0], p[1], \dots, p[d - 1]$ del canal. Este término, denominado *ISI precursora*, no puede cancelarse puesto que las decisiones necesarias para ello, $\hat{A}[n], \hat{A}[n - 1], \dots, \hat{A}[n - d + 1]$, todavía no se hallan disponibles: sólo es posible realimentar decisiones previas.

Así, vemos que la estrategia de realimentación de decisiones no es necesariamente capaz de cancelar siempre toda la ISI, sino únicamente la ISI postcursora. En el peor de los casos podríamos tener $d = K$, de forma que no sería posible cancelar ningún término de ISI utilizando decisiones previas (toda la ISI constituye ISI precursora).

De los Ejemplos 6.14 y 6.15 se desprende que la realimentación de decisiones deberá alcanzar un equilibrio entre cancelación de ISI y amplificación de ruido, tal y como ocurría con el igualador lineal MSE del Apartado 6.3. Con todo, las prestaciones obtenibles con un igualador DFE diseñado adecuadamente suelen ser mucho mejores que las de un igualador lineal de complejidad similar (mismo número de coeficientes), debido a que las decisiones se hallan libres de ruido, gracias a la acción del decisor símbolo a símbolo.

Por otro lado, la eliminación completa de la ISI postcursora depende de que las decisiones previas sean correctas. En la práctica, sin embargo, la probabilidad de error nunca es exactamente cero. Supóngase que, en un instante dado n_0 , el ruido aditivo es tal que la decisión correspondiente es errónea: $A[n_0 - d] \neq \hat{A}[n_0 - d]$. Además de producirse un error de decisión, al realimentar la cantidad errónea $\hat{A}[n_0 - d]$ en nuestro intento de cancelar la ISI postcursora en el instante $n_0 + 1$, es posible que en realidad aumentemos dicha ISI. Este aumento puede provocar una nueva decisión incorrecta $\hat{A}[n_0 - d + 1]$, la cual será también realimentada, pudiendo provocar nuevos errores, y así sucesivamente. Este fenómeno, denominado *propagación de errores*, es una consecuencia inevitable del hecho de realimentar decisiones previas y suele resultar de forma típica en ráfagas de varios símbolos incorrectos. La longitud y frecuencia de aparición de dichas ráfagas dependen del entorno particular de operación (respuesta impulsional del canal, potencia de ruido y constelación utilizada) y naturalmente suponen una degradación en las prestaciones del igualador.

6.4.2. Estructura del igualador DFE

El diagrama de la estructura de un igualador DFE en el caso más general se muestra en la Figura 6.14(a). Uno de sus bloques es el filtro precursor $W(z)$, que es un filtro FIR de orden K_w , y cuya misión consiste en mitigar la ISI precursora, la cual, como se ha visto, no puede ser cancelada mediante realimentación de decisiones previas. El otro bloque constituyente del igualador DFE es el filtro de realimentación $B(z)$, también un filtro FIR de orden K_b , y que posee la peculiaridad de ser estrictamente causal (de no ser así, el lazo de realimentación de la Figura 6.14(a) no sería implementable causalmente). Así, las Transformadas Z de estos filtros se pueden escribir en función de sus coeficientes como

$$W(z) = \sum_{k=0}^{K_w} w[k]z^{-k}, \quad B(z) = \sum_{k=1}^{K_b} b[k]z^{-k} \quad (6.69)$$

de forma que la operación del igualador DFE es la siguiente:

$$u[n] = \sum_{k=0}^{K_w} w[k]q[n-k] - \sum_{k=1}^{K_b} b[k]\hat{A}[n-d-k] \quad (6.70)$$

siendo $\hat{A}[n-d]$ la decisión tomada sobre $u[n]$. Nótese que para $K_b = 0$ el filtro de realimentación desaparece y recuperamos la configuración del igualador lineal del Apartado 6.3.

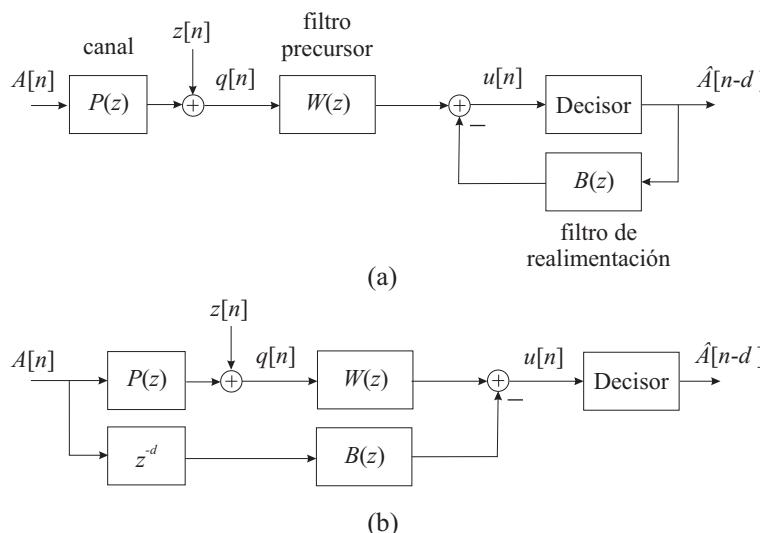


Figura 6.14. (a) Igualación con realimentación de decisiones; (b) Sistema equivalente si las decisiones son siempre correctas ($\hat{A}[n-d] = A[n-d]$ para todo n).

Debido a la presencia del decisor dentro del lazo de realimentación de la Figura 6.14 el igualador DFE resulta ser un sistema no lineal, en el sentido de que la señal de entrada

al decisor símbolo a símbolo $u[n]$ depende de una forma no lineal de sus valores pasados $u[n-1], \dots, u[n-K_b]$. Este hecho complica el diseño y el análisis del igualador DFE de forma sustancial. Sin embargo, si la probabilidad de error obtenida es suficientemente pequeña (como cabe esperar de un correcto diseño), podemos suponer que las decisiones previas coincidirán con los símbolos originales: $\hat{A}[n-d-k] = A[n-d-k]$, para $1 \leq k \leq K_b$ y para todo n . Usando esta aproximación, los diagramas de la Figuras 6.14(a) y (b) son equivalentes. En esta última configuración, vemos que la dependencia de $u[n]$ con los símbolos originales y con el ruido aditivo es lineal en ambos casos.

La hipótesis bajo la cual todas las decisiones previas están libres de errores facilita enormemente el estudio del igualador DFE y es por ello muy utilizada. Aunque los resultados así obtenidos suelen ser aceptables, es importante recordar que en la práctica la probabilidad de error, aunque baja, nunca llegará a ser nula, por lo que tal suposición no deja de ser una aproximación. El diseño del igualador DFE deberá en cualquier caso ser validado (típicamente, mediante simulación numérica), para así verificar que sus prestaciones no se ven degradadas por el fenómeno de la propagación de errores hasta el punto de dejar de satisfacer las especificaciones iniciales.

Para el cálculo de los filtros del igualador es conveniente expresar la entrada al decisor en términos del producto escalar de ciertos vectores. Agrupemos los coeficientes del filtro precursor y del filtro de realimentación en los vectores w y b respectivamente:

$$\mathbf{w} \doteq [w[0], w[1], \dots, w[K_w]]^T, \quad \mathbf{b} \doteq [b[1], b[2], \dots, b[K_b]]^T \quad (6.71)$$

La señal de entrada al decisor se puede escribir como $u[n] = \mathbf{w}^T \mathbf{q}[n] - \mathbf{b}^T \hat{\mathbf{a}}[n]$, donde los vectores con las muestras de la señal recibida y las decisiones previas son, respectivamente,

$$\mathbf{q}[n] \doteq [q[n], q[n-1], q[n-3], \dots, q[n-K_w]]^T \quad (6.72)$$

$$\hat{\mathbf{a}}[n] \doteq [\hat{A}[n-d-1], \hat{A}[n-d-2], \dots, \hat{A}[n-d-K_b]]^T \quad (6.73)$$

Utilizando la hipótesis de que las decisiones previas coinciden con los símbolos originales, (6.73) se puede reescribir como

$$\hat{\mathbf{a}}[n] = [A[n-d-1], A[n-d-2], \dots, A[n-d-K_b]]^T \quad (6.74)$$

De esta forma la operación del igualador DFE puede representarse como en la Figura 6.14(b). Bajo esta hipótesis, y dado que el vector dado en (6.74) no depende de los coeficientes w , b , el cálculo del igualador DFE puede reformularse como un problema de estimación óptima lineal.

6.4.3. Igualador DFE bajo el criterio de error cuadrático medio

De forma similar al caso del igualador lineal, adoptaremos el criterio MSE para el cálculo del igualador con realimentación de decisiones. Bajo el criterio MSE, los filtros se escogen de forma que la varianza del error de estimación sea mínima. Denotaremos por w_d y b_d los vectores de coeficientes que minimizan $E\{|e_d[n]|^2\}$, donde, como anteriormente, la

señal de error se define como la diferencia entre la secuencia original de símbolos (con un retardo d) y la entrada al bloque decisor:

$$e_d[n] \doteq A[n-d] - u[n] = A[n-d] - (\mathbf{w}^T \mathbf{q}[n] - \mathbf{b}^T \hat{\mathbf{a}}[n]) \quad (6.75)$$

A la hora de calcular el igualador DFE óptimo es posible utilizar directamente el método expuesto en el Apéndice 6.B para obtener simultáneamente los coeficientes de ambos filtros (precursor y de realimentación), agrupados en el vector $[\mathbf{w}^T \mathbf{b}^T]^T$. Sin embargo, es más instructivo realizar inicialmente la optimización del filtro de realimentación, *suponiendo un filtro precursor fijo*; el vector \mathbf{b} así obtenido es una función del filtro precursor \mathbf{w} . Para este valor de \mathbf{b} , es posible entonces obtener el vector \mathbf{w} óptimo.

Para comenzar, recordemos el modelo matricial (6.54) de generación del vector $\mathbf{q}[n]$ dado en (6.72) y que repetimos aquí por conveniencia:

$$\mathbf{q}[n] = \mathbf{P}^T \mathbf{a}[n] + \mathbf{z}[n] \quad (6.76)$$

con \mathbf{P} la matriz de convolución del canal, y $\mathbf{a}[n]$, $\mathbf{z}[n]$ los vectores de símbolos y de ruido:

$$\mathbf{a}[n] = [A[n], A[n-1], \dots, A[n-K-K_w]]^T \quad (6.77)$$

$$\mathbf{z}[n] = [z[n], z[n-1], \dots, z[n-K_w]]^T \quad (6.78)$$

Así, la señal a la entrada del bloque decisor puede escribirse de la siguiente forma:

$$u[n] = \mathbf{w}^T \mathbf{q}[n] - \mathbf{b}^T \hat{\mathbf{a}}[n] = \mathbf{w}^T \mathbf{P}^T \mathbf{a}[n] - \mathbf{b}^T \hat{\mathbf{a}}[n] + \mathbf{w}^T \mathbf{z}[n] \quad (6.79)$$

Llegados a este punto, definamos la *matriz de selección* \mathbf{S}_d , de tamaño $K_b \times (K+K_w+1)$,

$$\mathbf{S}_d \doteq \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{0}_{K_b \times (d+1)} & \mathbf{I}_{K_b} & \mathbf{0}_{K_b \times [(K+K_w)-(d+K_b)]} \end{array} \right] \quad (6.80)$$

donde $\mathbf{0}$ e \mathbf{I} denotan la matriz nula y la matriz identidad respectivamente y los subíndices indican el tamaño de la matriz. Así, los vectores $\mathbf{a}[n]$ y $\hat{\mathbf{a}}[n]$ están relacionados mediante

$$\hat{\mathbf{a}}[n] = \mathbf{S}_d \cdot \mathbf{a}[n] \quad (6.81)$$

Obsérvese que para que (6.80) y (6.81) tengan sentido, ha de verificarse que

$$d + K_b \leq K + K_w \quad (6.82)$$

Aunque en principio los órdenes K_w , K_b y el retardo d no tendrían por qué cumplir la condición (6.82), de ser así los últimos $(d + K_b) - (K + K_w)$ coeficientes del filtro de realimentación óptimo serían iguales a cero (véase Problema P6.17). Esto significa que el problema es equivalente a otro en el que el filtro de realimentación tiene un orden $K'_b < K_b$ tal que (6.82) se satisface con igualdad, esto es, $d + K'_b = K + K_w$. Por tanto, en adelante supondremos que (6.82) se cumple.

Filtro de realimentación óptimo

Procedamos ahora a calcular el filtro de realimentación que minimiza el error cuadrático medio para un filtro precursor dado. El error $e_d[n]$ en (6.75) puede escribirse como

$$e_d[n] = (A[n-d] - \mathbf{w}^T \mathbf{q}[n]) - (-\mathbf{b}^T \hat{\mathbf{a}}[n]) \quad (6.83)$$

y por tanto el diseño del filtro de realimentación bajo el criterio MSE para \mathbf{w} fijo equivale al de la estimación lineal de la variable $A[n-d] - \mathbf{w}^T \mathbf{q}[n]$ basándonos en el vector $-\hat{\mathbf{a}}[n]$. La solución, de acuerdo con el Apéndice 6.B, está dada por

$$\mathbf{b}_{opt}(\mathbf{w}) = -E\{\hat{\mathbf{a}}^*[n]\hat{\mathbf{a}}^T[n]\}^{-1} E\{\hat{\mathbf{a}}^*[n](A[n-d] - \mathbf{w}^T \mathbf{q}[n])\} \quad (6.84)$$

La matriz en (6.84) es simplemente $E\{\hat{\mathbf{a}}^*[n]\hat{\mathbf{a}}^T[n]\}^{-1} = E_s^{-1} \mathbf{I}_{K_b}$, bajo la hipótesis de correctas decisiones previas. Por otro lado, $E\{\hat{\mathbf{a}}^*[n]A[n-d]\} = \mathbf{0}_{K_b}$ debido a la independencia entre $A[n-d]$ y los símbolos contenidos en $\hat{\mathbf{a}}[n]$ (véase (6.74)). Así, utilizando el modelo (6.76) y la relación (6.81), junto con la independencia de símbolos y ruido, obtenemos los coeficientes del filtro de realimentación en función de los del filtro precursor:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{opt}(\mathbf{w}) &= -E_s^{-1} \cdot (E\{\hat{\mathbf{a}}^*[n]A[n-d]\} - E\{\hat{\mathbf{a}}^*[n]\mathbf{q}^T[n]\}\mathbf{w}) \\ &= E_s^{-1} \cdot E\{\hat{\mathbf{a}}^*[n](\mathbf{a}^T[n]\mathbf{P} + \mathbf{z}^T[n])\}\mathbf{w} \\ &= E_s^{-1} \cdot E\{\hat{\mathbf{a}}^*[n]\mathbf{a}^T[n]\} \cdot \mathbf{P}\mathbf{w} \\ &= \mathbf{S}_d \mathbf{P}\mathbf{w} \end{aligned} \quad (6.85)$$

La expresión (6.85) tiene una fácil interpretación, si observamos que el vector $\mathbf{c} = \mathbf{P}\mathbf{w}$ recoge los coeficientes $c[0], c[1], \dots, c[K+K_w]$ del canal global $c[n] = w[n] * p[n]$ (véase Problema P6.14). De este hecho y de la definición (6.80) de la matriz de selección \mathbf{S}_d , vemos que los coeficientes del filtro de realimentación óptimo dado en (6.85) satisfacen

$$b[k] = c[k+d], \quad k = 1, 2, \dots, K_b \quad (6.86)$$

lo que significa que, cualquiera que sea el valor del filtro precursor $w[n]$, el filtro óptimo de realimentación para el retardo d se encargará de cancelar la ISI postcursora del canal global $c[n] = w[n] * p[n]$ en la ventana de coeficientes $d+1, \dots, d+K_b$.

Filtro precursor óptimo

Ahora procederemos a calcular los coeficientes del filtro precursor \mathbf{w} óptimo, tomando como filtro de realimentación el calculado mediante (6.85). Dado que este filtro de realimentación cancela la ISI postcursora en la ventana de coeficientes (6.86), la tarea del filtro precursor será mitigar la ISI precursora, así como la ISI postcursora residual (fuera de dicha ventana), sin amplificar en exceso el ruido. La Figura 6.15 ilustra la partición de la respuesta impulsional del canal global $c[n]$ y su alineación con el filtro de realimentación $b[n]$.

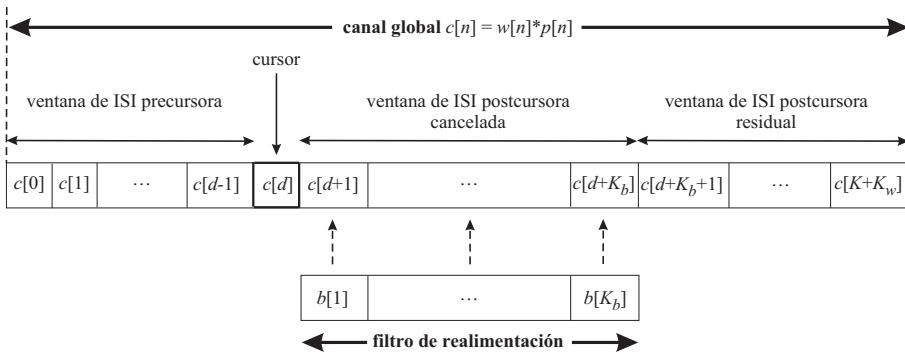


Figura 6.15. Alineación temporal del canal global y del filtro de realimentación.

Para determinar el vector \mathbf{w} que minimiza el error cuadrático medio, escribamos primero la entrada al decisor obtenida con el filtro de realimentación óptimo (6.85) como

$$\begin{aligned} u[n] &= \mathbf{w}^T \mathbf{q}[n] - \mathbf{b}_{opt}^T(\mathbf{w}) \hat{\mathbf{a}}[n] \\ &= \mathbf{w}^T (\mathbf{P}^T \mathbf{a}[n] + \mathbf{z}[n]) - \mathbf{w}^T \mathbf{P}^T \mathbf{S}_d^T \mathbf{S}_d \mathbf{a}[n] \\ &= \mathbf{w}^T (\mathbf{P}^T \mathbf{D}_d \mathbf{a}[n] + \mathbf{z}[n]) \end{aligned} \quad (6.87)$$

donde hemos introducido la siguiente matriz de tamaño $(K + K_w + 1) \times (K + K_w + 1)$:

$$\mathbf{D}_d \doteq \mathbf{I} - \mathbf{S}_d^T \mathbf{S}_d \quad (6.88)$$

La matriz \mathbf{D}_d se obtiene fijando a cero los elementos $d + 2, \dots, d + K_b + 1$ de la diagonal de la matriz identidad de tamaño $K + K_w + 1$, de forma que el vector $\mathbf{D}_d \mathbf{a}[n]$ se obtiene sustituyendo por ceros los símbolos $A[n - d - 1], \dots, A[n - d - K_b]$ del vector $\mathbf{a}[n]$. Esto es debido a la cancelación de ISI postcursora por parte del filtro de realimentación (6.85).

Utilizando la expresión (6.87) para $u[n]$, el error $e_d[n]$ en (6.75) puede escribirse como

$$e_d[n] = A[n - d] - \mathbf{w}^T (\mathbf{P}^T \mathbf{D}_d \mathbf{a}[n] + \mathbf{z}[n]) \quad (6.89)$$

Esta expresión es similar a la correspondiente a la que se obtiene para un igualador lineal (véase Apartado 6.3.2), con la salvedad de que la matriz \mathbf{P} es sustituida ahora por $\mathbf{D}_d^T \mathbf{P}$. Por tanto, la expresión del vector \mathbf{w} del filtro precursor que minimiza la varianza de $e_d[n]$ se puede obtener directamente de la correspondiente al igualador lineal MSE, dada en (6.61), sin más que realizar dicha sustitución. Usando $\lambda = \sigma_z^2/E_s$ como anteriormente, tendremos

$$\mathbf{w}_d = (\mathbf{P}^H \mathbf{D}_d^* \mathbf{D}_d^T \mathbf{P} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{P}^H \mathbf{D}_d^* \boldsymbol{\nu}_d \quad (6.90)$$

Se comprueba fácilmente que la matriz \mathbf{D}_d satisface $\mathbf{D}_d^* \mathbf{D}_d^T = \mathbf{D}_d$, así como $\mathbf{D}_d^* \boldsymbol{\nu}_d = \boldsymbol{\nu}_d$. Con esto, y dado que el filtro de realimentación óptimo es $\mathbf{b}_d = \mathbf{b}_{opt}(\mathbf{w}_d)$, obtenemos la expresión final de los filtros del igualador DFE para el retardo d , bajo el criterio MSE:

$$\mathbf{w}_d = (\mathbf{P}^H \mathbf{D}_d \mathbf{P} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{P}^H \boldsymbol{\nu}_d, \quad \mathbf{b}_d = \mathbf{S}_d \mathbf{P} \mathbf{w}_d \quad (6.91)$$

El valor mínimo del error cuadrático medio, obtenido con estos filtros, es por tanto

$$E\{|e_d[n]|^2\}|_{w_d, b_d} = E_s \cdot [1 - \boldsymbol{\nu}_d^H \mathbf{P} (\mathbf{P}^H \mathbf{D}_d \mathbf{P} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{P}^H \boldsymbol{\nu}_d] \quad (6.92)$$

Debido a la presencia de la matriz \mathbf{D}_d en (6.92), el cálculo del error cuadrático medio mínimo del igualador DFE correspondiente a cada valor del retardo d requiere la inversión de una matriz de tamaño $K_w + 1$.

Aunque en todo momento hemos considerado el criterio MSE para el cálculo de los filtros, es también posible utilizar el enfoque ZF para tal fin, sin más que ignorar el efecto del ruido presente en el receptor. El igualador resultante se obtendría haciendo $\lambda = 0$ en (6.91). Hay que señalar, sin embargo, que el error cuadrático medio resultante con el igualador ZF-DFE no se obtiene de (6.92) tomando $\lambda = 0$.

6.4.4. Consideraciones sobre el diseño del igualador DFE

En la mayoría de casos prácticos, el número total de coeficientes del igualador $K_b + K_w + 1$ suele hallarse acotado debido a restricciones sobre la circuitería del receptor. Por tanto, además de escoger el retardo global d , en el diseño del igualador DFE se habrá de determinar cómo repartir los recursos disponibles (esto es, el número total de coeficientes) entre los filtros precursor y de realimentación. En un extremo, asignando $K_b = 0$ obtenemos el diseño del igualador lineal del Apartado 6.3 con su limitación inherente en cuanto a eliminación de ISI. En el otro, asignando un único coeficiente al filtro precursor ($K_w = 0$), el igualador DFE es incapaz de reducir la ISI precursora (véase Ejemplo 6.15). Por tanto, es preciso alcanzar un compromiso para los órdenes de ambos filtros.

En principio, la elección óptima, bajo el criterio MSE, pasaría por calcular el error cuadrático medio obtenido con todas las posibles combinaciones (K_w, K_b, d) . Esta estrategia de fuerza bruta puede resultar excesivamente costosa en recursos de cálculo, por lo que es importante disponer de ciertas guías generales que nos ayuden al respecto.

- En los Ejemplos 6.14 y 6.15 se observa que una buena estrategia para limitar el realce del ruido debido al filtro precursor consiste en tratar de ajustar el retardo global d a la posición del cursor del canal discreto equivalente $p[n]$ (esto es, su coeficiente de mayor magnitud). Por otro lado, el retardo introducible mediante el filtro precursor deberá estar comprendido entre 0 y K_w . Por tanto, si denominamos d_p la posición del cursor de $p[n]$, cabe esperar que los retardos comprendidos en el rango $d_p \leq d \leq d_p + K_w$ proporcionen una reducción considerable del error cuadrático medio.
- Dado que la misión del filtro de realimentación es cancelar la ISI postcursora, su orden K_b debería fijarse para incluir en la ventana de cancelación la mayoría de los coeficientes de $c[n] = w[n] * p[n]$ más significativos (véase Figura 6.15). Un buen punto de partida consiste en elegir K_b de forma que la ventana $(p[d_p + 1], \dots, p[d_p + K_b])$ contenga los postcursos de $p[n]$ con magnitudes significativas.
- La señal de entrada al filtro de realimentación pertenece a un alfabeto finito (la constelación utilizada). Por esta razón, en numerosas ocasiones la complejidad computacional asociada a dicho filtro puede ser considerablemente menor que la correspondiente

al filtro precursor, aun cuando este posea un número bastante menor de coeficientes. Por ejemplo, si los símbolos $A[n]$ se extraen de una constelación QPSK, la operación del filtro de realimentación no requiere multiplicaciones y puede efectuarse de forma exacta utilizando únicamente sumas y restas. Este hecho puede influir en el reparto final de coeficientes entre el filtro precursor y el de realimentación.

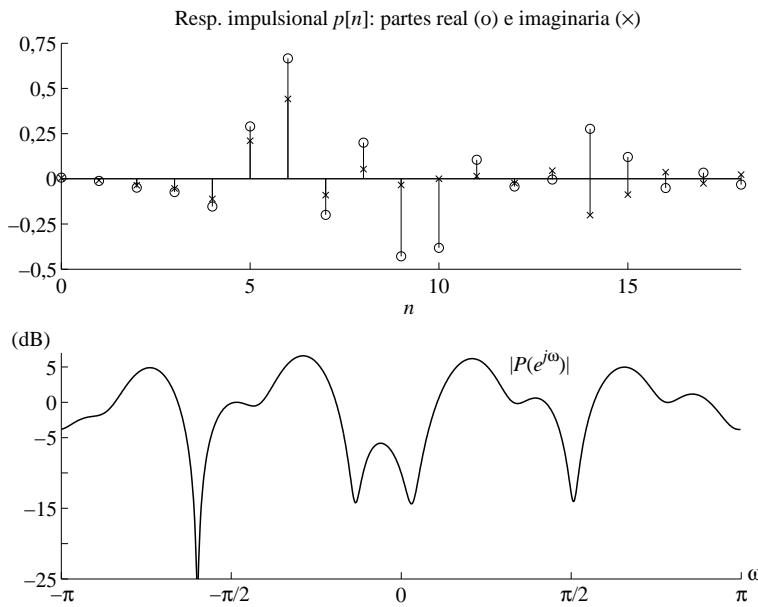


Figura 6.16. Respuesta impulsional y función de transferencia del canal discreto equivalente del Ejemplo 6.16.

Ilustraremos los pasos en el diseño del igualador DFE mediante el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.16

Considérese un sistema con un filtro de recepción adaptado al pulso de transmisión $g(t)$, el cual consiste en un pulso en raíz de coseno alzado con factor de caída $\alpha = 0,1$ y truncado a una duración $8T$, con T el periodo de símbolo. La respuesta impulsional del canal multirayos es de la forma $h(t) = \sum_{i=1}^L \beta_i \delta(t - \tau_i)$, de modo que el canal discreto equivalente $p[n]$ (véase Apartado 5.1.3) es

$$p[n] = \sum_{i=1}^L \beta_i e^{-j\omega_c \tau_i} r_g(nT - \tau_i) \quad (6.93)$$

donde $r_g(t) = g(t) * g(-t)$ y ω_c es la frecuencia de portadora. En nuestro ejemplo se ha tomado $L = 4$ caminos, $\omega_c T = 2\pi \cdot 127$ rad, y

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 0,2; & \beta_2 &= 0,9; & \beta_3 &= 0,6; & \beta_4 &= 0,4; \\ \tau_1 &= 0,2T; & \tau_2 &= 2,7T; & \tau_3 &= 6,5T; & \tau_4 &= 11,3T \end{aligned} \quad (6.94)$$

La respuesta impulsional y la función de transferencia del canal discreto equivalente se representan en la Figura 6.16. El coeficiente de mayor magnitud de $p[n]$ reside en la posición $d_p = 6$,

tras la cual se aprecia una considerable ISI postcursora abarcando unos 10 períodos de símbolo. Siguiendo las directrices de diseño anteriores, cabe esperar una reducción significativa del error cuadrático medio sobre el rango de retardos $6 \leq d \leq 6 + K_w$. El filtro de realimentación debería poseer al menos 10 coeficientes para poder eliminar la ISI postcursora eficazmente.

La Figura 6.17 muestra los resultados obtenidos con tres diseños distintos, todos utilizando el mismo número total de 30 coeficientes, para un valor de $\lambda = 0,01$ (relación señal a ruido $E_s/N_0 = 20$ dB). Con $K_b = 0$, $K_w = 29$ obtenemos el igualador lineal del Apartado 6.3.

Utilizando un igualador DFE con $K_b = 10$, $K_w = 19$, el error cuadrático medio disminuye sensiblemente (unos 7 dB) en el rango previsto de retardos $6 \leq d \leq 25$. El uso de un filtro de realimentación más largo ($K_b = 20$, $K_w = 9$) no proporciona una mejora apreciable, puesto que se están asignando coeficientes de realimentación a posiciones en las cuales la ISI postcursora es poco significativa o inexistente. Además, al reducirse el orden del filtro precursor, el rango de retardos idóneo se ve también reducido a $6 \leq d \leq 15$. En la Figura 6.18 se representan los valores de la distorsión de pico obtenidos con estos tres diseños. El igualador lineal de orden 30 no es capaz de abrir el ojo para ningún valor del retardo, ni siquiera con una constelación QPSK. La mejora introducida al utilizar realimentación de decisiones es clara.

Esta mejora se hace más patente a la luz de la Figura 6.19, la cual muestra la probabilidad de error obtenida con los igualadores lineal y DFE para una constelación 16-QAM en función de la relación E_b/N_0 (recordemos que, para la 16-QAM, $E_s = 4E_b$). Ambos poseen un total de 30 coeficientes, de los cuales el igualador DFE utiliza 10 en el filtro de realimentación. El retardo global elegido es $d = 19$. Obsérvese la dificultad del igualador lineal para reducir la probabilidad de error. El igualador DFE, por otro lado, es capaz de mejorar este comportamiento ostensiblemente, gracias a la capacidad de cancelar la ISI postcursora sin realizar el ruido.

Como comparación se muestra también la curva de P_e para un igualador DFE idealizado en el que el filtro de realimentación utiliza los símbolos transmitidos y no las decisiones previas. La degradación en las prestaciones debido al efecto de propagación de errores se observa claramente, sobre todo para relaciones E_s/N_0 elevadas. En este rango se aprecia también una distancia de unos 2.5 dB entre el igualador DFE idealizado y la cota del filtro adaptado. Aunque sería ilustrativo presentar la curva de P_e para el detector ML del Apartado 6.2 como comparación, el lector entenderá que no lo hayamos hecho si determina el número de estados del diagrama de rejilla que el algoritmo de Viterbi debería utilizar para este canal con modulación 16-QAM.

6.5. IGUALADOR FRACCIONARIO

A lo largo de este capítulo hemos supuesto que el receptor opera con las muestras de la señal a la salida del filtro receptor $f(t)$ obtenidas a la tasa de símbolo $1/T$, pues tal como se demostró en el Apéndice 4.B, dichas muestras constituyen estadísticos suficientes para la detección. Así, no hay en principio necesidad de muestrear a una tasa más elevada, lo cual es conveniente desde el punto de vista de la complejidad del receptor. Sin embargo, tal como se discutió en el Apartado 5.5, es frecuente encontrar implementaciones físicas en las que la señal demodulada es muestreada a una tasa mayor que la de símbolo; por ejemplo, para realizar convenientemente el filtro receptor $f(t)$ de forma digital, o para la operación de los esquemas de recuperación del instante de muestreo adecuado, descritos en el Apartado 11.4.

En ambos casos es común utilizar un periodo de muestreo T_s con T/T_s un entero mayor que 1; la elección $T_s = T/2$ es quizás la más popular, pues proporciona un rendimiento

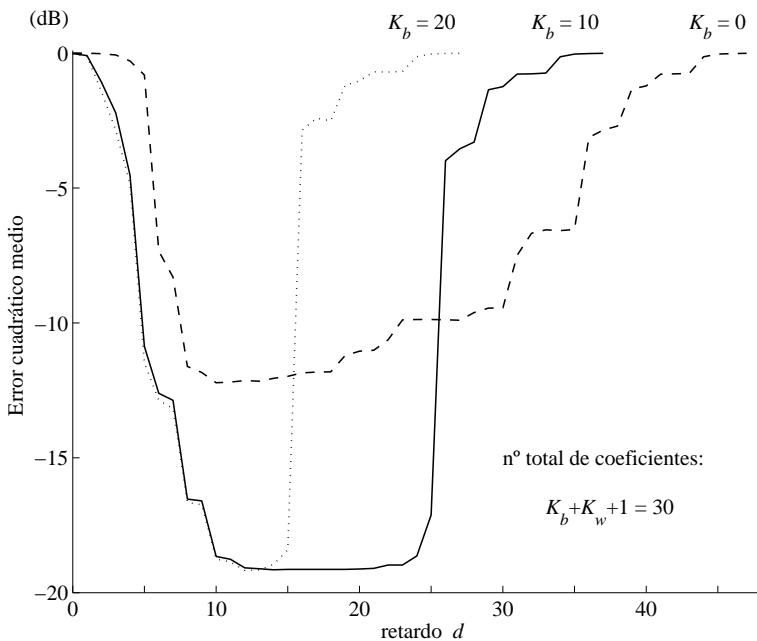


Figura 6.17. Error cuadrático medio obtenido con tres diferentes asignaciones de recursos a los filtros precursor y de realimentación del igualador DFE del Ejemplo 6.16.

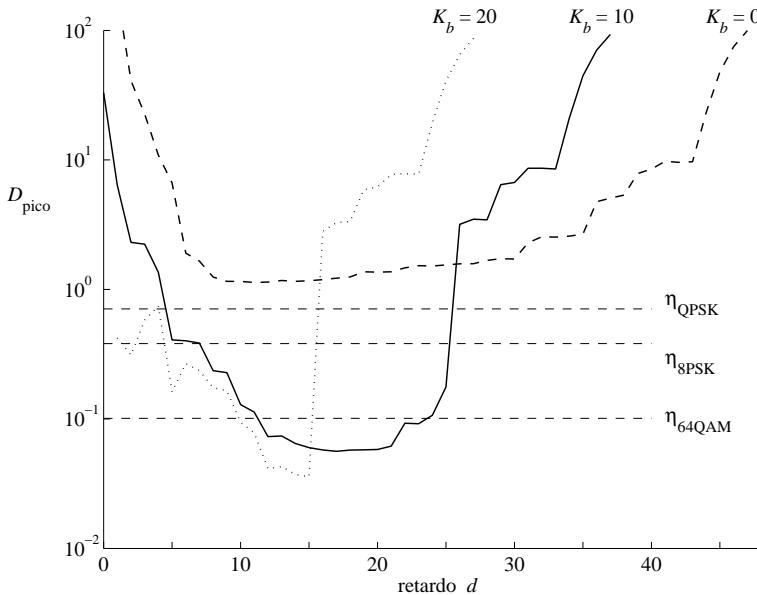


Figura 6.18. Distorsión de pico obtenida con tres diferentes asignaciones de recursos a los filtros precursor y de realimentación del igualador DFE del Ejemplo 6.16.

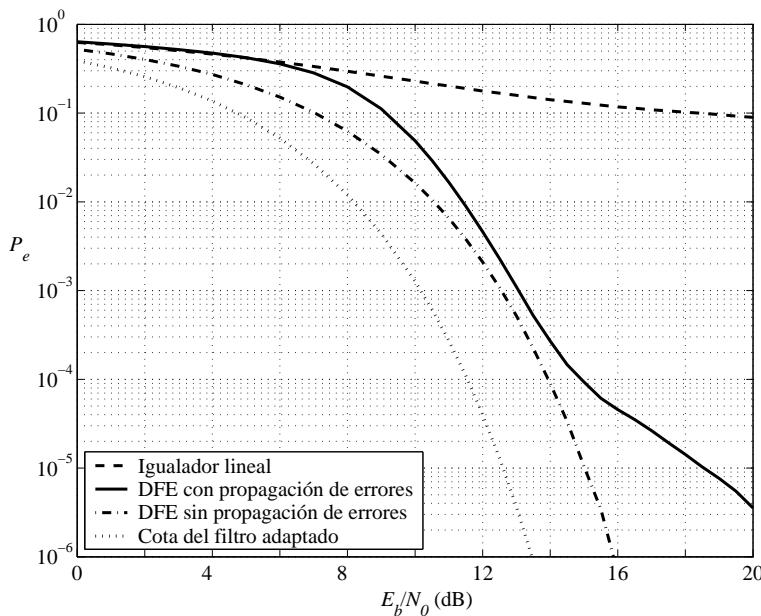


Figura 6.19. Probabilidad de error de los igualadores lineal y DFE para el canal del Ejemplo 6.16 con una constelación 16-QAM.

satisfactorio (evita el aliasing para todo factor de caída en el rango $0 \leq \alpha \leq 1$ cuando $f(t)$ es un pulso en raíz de coseno alzado), sin aumentar excesivamente la tasa de muestreo.

Por tanto, en tal situación el filtro igualador puede operar directamente sobre estas muestras espaciadas T_s segundos, recibiendo entonces el calificativo de *fraccionario* debido a que el periodo de muestreo (separación entre los coeficientes del igualador) es una fracción del periodo de símbolo T . La salida del igualador fraccionario se diezma posteriormente por un factor T/T_s para obtener así una señal muestreada a periodo de símbolo, sobre la que se tomarán decisiones símbolo a símbolo.

Obsérvese que si la duración temporal (orden del filtro multiplicado por el periodo de muestreo) de un igualador no fraccionario y la de uno fraccionario se mantienen al mismo valor, el igualador fraccionario requiere una mayor potencia de cálculo pues dispone de un mayor número de coeficientes⁸. A pesar de ello, el uso de igualadores fraccionarios se ha generalizado bastante en el diseño de sistemas de comunicaciones digitales de alta velocidad. Esto es debido a que estos sistemas presentan un potencial mayor en cuanto a reducción de la ISI que un igualador no fraccionario, como veremos seguidamente, siendo a la vez más robustos frente a errores en la recuperación del instante de muestreo (sincronización de símbolo).

Ejemplo 6.17

Para ilustrar la sensibilidad a errores en el instante de muestreo de un receptor con muestreo

⁸El hecho de que la salida del igualador fraccionario es seguidamente diezmada permite aliviar este problema utilizando las estructuras denominadas *polifase*; véase por ejemplo [87, sec. 4.3.1].

a tasa de símbolo, consideremos un caso sencillo en el que el canal equivalente en banda base únicamente introduce un retardo: $h_{eq}(t) = \delta(t - \epsilon T)$, donde $|\epsilon| < 0,5$. Supongamos que el pulso de transmisión $g(t)$ es un pulso en raíz de coseno alzado con factor de caída α y truncado a 8 períodos de símbolo. En recepción se usa el filtro adaptado al pulso transmisor, por tanto, $f(t) = g(-t)$. El canal equivalente en banda base es

$$p(t) = g(t) * h_{eq}(t) * f(t) \approx g_{ca}(t - \epsilon T) \quad (6.95)$$

donde $g_{ca}(t)$ es un pulso en coseno alzado con factor de caída α .

La señal a la salida del filtro receptor se muestrea en los instantes $t = nT$. Por tanto, si $\epsilon = 0$, entonces $p[n] \approx \delta[n]$ y no hay ISI, por lo que en principio no sería necesario utilizar un igualador. Sin embargo, cuando $\epsilon \neq 0$, el pulso en coseno alzado no se está muestreando exactamente en sus cruces por cero. El canal discreto equivalente contendrá términos adicionales que introducen ISI, tal como se ilustra en la Figura 6.20.

La Figura 6.21 muestra los resultados obtenidos cuando dicha ISI se corrige mediante un igualador no fraccionario lineal MSE con $K_w + 1 = 9$ coeficientes, para una relación señal a ruido $E_s/N_0 = 20$ dB; el valor de retardo se ha optimizado para cada caso. Obsérvese que incluso sin error en el sincronismo de símbolo ($\epsilon = 0$) la distorsión de pico no es exactamente cero. Esto es debido al truncamiento del pulso en raíz de coseno alzado a un número finito de períodos de símbolo. Dicho efecto es más perjudicial cuanto menor sea el factor de caída, ya que en ese caso la magnitud de las colas del pulso $g(t)$ decrece a cero más lentamente.

También se observa que, independientemente de α , las prestaciones del igualador no fraccionario se degradan ostensiblemente a medida que $|\epsilon| \rightarrow 0,5$. La razón es que en tal caso $p[n]$ satisface la propiedad de simetría $p[K-n] = p[n]$, $n = 0, 1, \dots, K$ (véase Figura 6.20 para $\epsilon = 0,5$) y, por tanto, su función de transferencia presenta un cero en $\omega = \pi$. El igualador lineal encuentra gran dificultad para mitigar la ISI, debido a este cero situado sobre la circunferencia unidad.

En el Capítulo 11 se presentarán métodos de sincronización que pueden paliar en gran medida estos problemas. Algunos de estos esquemas aprovechan ciertas propiedades del pulso $p(t)$ para recuperar el instante óptimo de muestreo, como puede ser la simetría del pulso en coseno alzado. Sin embargo, cuando el canal es dispersivo, el pulso efectivo a la salida del filtro adaptado no presentará tales propiedades, por lo que las prestaciones de los algoritmos de sincronización pueden degradarse sustancialmente. El uso de un igualador fraccionario permite ajustar su respuesta para compensar posibles errores en el instante de muestreo, añadiendo robustez al receptor.

El diagrama de bloques de un igualador fraccionario con $T_s = T/2$, incluyendo implementación de decisiones, se representa⁹ en la Figura 6.22. A la salida del filtro adaptado se toman muestras de la señal $q(t)$ a periodo $T/2$, que denotaremos por $q_s[n] \doteq q(nT/2)$. En el Apartado 5.5 demostramos que $q_s[n]$ puede escribirse como

$$q_s[n] = \sum_l A[l] p_s[n - 2l] + z_s[n] \quad (6.96)$$

⁹Es posible modificar la arquitectura de la Figura 6.22 situando el filtro adaptado tras el conversor continuo-discreto (C/D). El filtro adaptado discreto se puede entonces absorber en el filtro fraccionario precursor. Naturalmente, en tal situación todavía es necesario utilizar un filtro analógico de recepción $f_{aa}(t)$ previo a la conversión C/D con el objeto de eliminar ruido fuera de banda y evitar aliasing; véase Apartado 5.5.

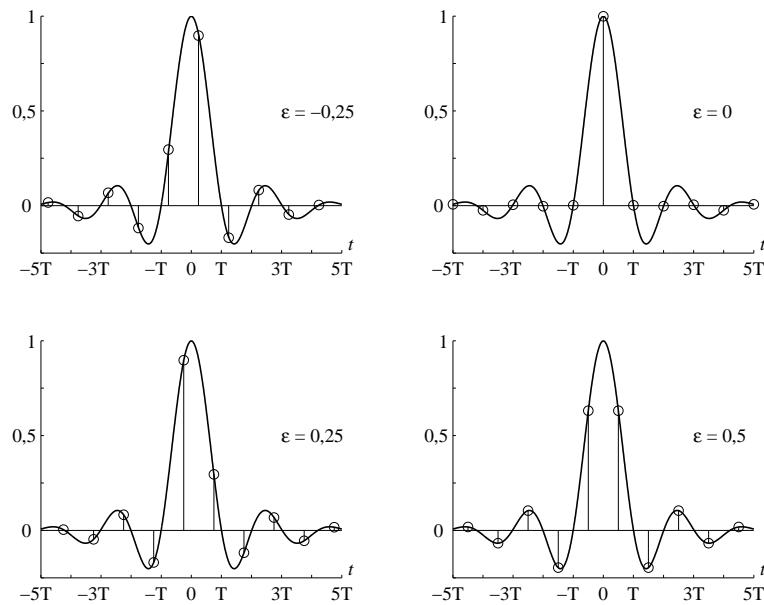


Figura 6.20. Canal discreto equivalente obtenido en función del error de sincronización de símbolo ϵ . Factor de caída $\alpha = 0, 2$, pulso transmisor truncado a 8 períodos de símbolo.

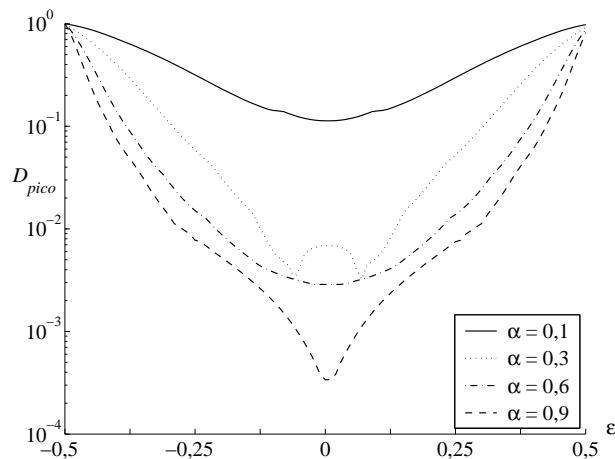


Figura 6.21. Distorsión de pico obtenida con un igualador lineal MSE, no fraccionario, con orden $K_w = 8$, para un pulso de transmisión en raíz de coseno truncado a 8 períodos de símbolo, en función del error de sincronización de símbolo ϵ .

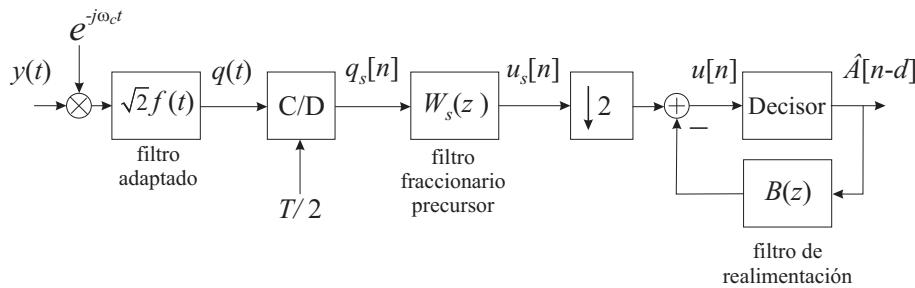


Figura 6.22. Igualador fraccionario con realimentación de decisiones.

donde

$$p_s[n] \doteq p \left(\frac{nT}{2} \right), \quad z_s[n] \doteq z \left(\frac{nT}{2} \right) \quad (6.97)$$

son respectivamente las muestras a periodo $T/2$ del pulso equivalente $p(t)$ y del ruido equivalente en banda base $z(t)$. Dado que hemos supuesto en el Apartado 6.1.1 que $p(t)$ tiene una duración de T_p segundos, y habiendo definido $K = \lfloor T_p/T \rfloor$, se sigue que el número de coeficientes no nulos de $p_s[n]$ pasa a ser ahora $2K + 1$, como consecuencia del sobremuestreo.

En la Figura 6.22, el filtro precursor fraccionario $W_s(z)$ opera al doble de la tasa de símbolo, por lo que se suele, con un cierto abuso de terminología, decir que sus coeficientes están espaciados $T/2$ segundos. Por otro lado, el filtro de realimentación $B(z)$ opera a la tasa de símbolo, por lo que se dice que sus coeficientes están espaciados T segundos. Como el diezmador que sigue al filtro precursor dispone de dos muestras por periodo de símbolo, ha de descartar la mitad, de ahí el diezmador. Supondremos que el filtro de realimentación cuenta con K_b coeficientes espaciados T segundos, mientras que el filtro precursor fraccionario dispone de un número de coeficientes espaciados $T/2$ segundos igual a $K'_w + 1$, que por simplicidad supondremos par. La longitud temporal del filtro precursor fraccionario es entonces la misma que la de otro no fraccionario con $K_w + 1 = (K'_w + 1)/2$ coeficientes, de forma que se tiene

$$W_s(z) = \sum_{k=0}^{2K_w+1} w_s[k] z^{-k}, \quad B(z) = \sum_{k=1}^{K_b} b[k] z^{-k} \quad (6.98)$$

Así, la operación del igualador fraccionario se puede expresar de la siguiente forma:

$$u_s[n] = \sum_{k=0}^{2K_w+1} w_s[k] q_s[n-k], \quad u[n] = u_s[2n] - \sum_{k=1}^{K_b} b[k] \hat{A}[n-d-k] \quad (6.99)$$

El cálculo del igualador fraccionario puede efectuarse de forma análoga a como se hizo en el caso no fraccionario, si se expresa la entrada al decisor $u[n]$ como

$$u[n] = \mathbf{w}_s^T \mathbf{q}_s[n] - \mathbf{b}^T \hat{\mathbf{a}}[n] \quad (6.100)$$

donde ahora \mathbf{w}_s contiene los $2(K_w + 1)$ coeficientes espaciados $T/2$ segundos de $W_s(z)$, mientras que, debido al diezmado de la señal $u_s[n]$, el vector $\mathbf{q}_s[n]$ está ahora dado por

$$\mathbf{q}_s[n] = [q_s[2n], q_s[2n - 1], q_s[2n - 2], \dots, q_s[2n - (2K_w + 1)]]^T \quad (6.101)$$

Los vectores \mathbf{b} y $\hat{\mathbf{a}}[n]$ se definen de forma idéntica al caso no fraccionario, ya que los coeficientes del filtro de realimentación están espaciados T segundos.

Es posible obtener un modelo matricial para la generación del vector $\mathbf{q}_s[n]$ en (6.101) de la forma $\mathbf{q}_s[n] = \mathbf{P}_s^T \mathbf{a}[n] + \mathbf{z}_s[n]$, donde ahora $\mathbf{z}_s[n]$ se define a partir de las muestras de ruido $z_s[n]$ de forma análoga a (6.101), el vector $\mathbf{a}[n]$ sigue estando dado por (6.77), y la matriz \mathbf{P}_s puede construirse a partir de los coeficientes del canal muestreado con periodo $T/2$, $p_s[n]$ (véase Problema P6.19). Nótese que este modelo es formalmente idéntico al obtenido en (6.76) para el caso no fraccionario. Con dicho modelo y la expresión (6.100), es posible obtener los coeficientes \mathbf{w}_s y \mathbf{b} para minimizar el error cuadrático medio $E\{|e_d[n]|^2\} = E\{|A[n - d] - u[n]|^2\}$, suponiendo como anteriormente que las decisiones previas coinciden con los símbolos originales. El proceso a seguir es completamente análogo al mostrado para el caso no fraccionario y se deja al lector como ejercicio; la única diferencia estriba en el hecho de que, debido al sobremuestreo, el ruido $z_s[n]$ ya no es blanco (véase Problema P6.20).

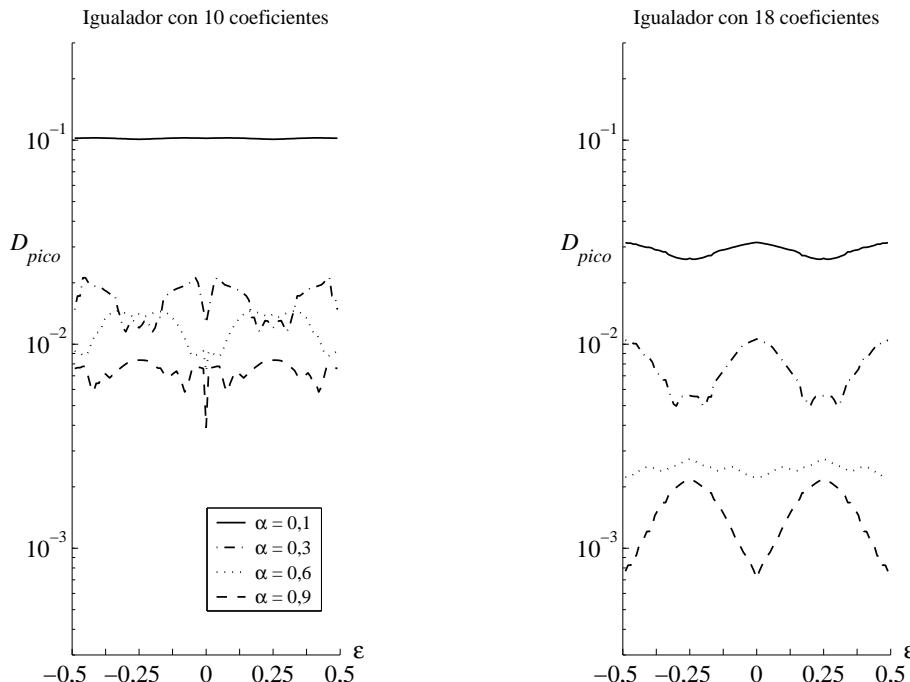


Figura 6.23. Distorsión de pico obtenida con un igualador lineal MSE fraccionario (espaciado $T/2$ segundos), para un pulso $p(t)$ en coseno alzado con factor de caída α , en función del error de sincronización de símbolo ϵ .

Ejemplo 6.18

En la Figura 6.23 se muestra la distorsión de pico obtenida para un pulso $p(t)$ en coseno alzado con factor de caída α como en el Ejemplo 6.17, y con un igualador MSE lineal fraccionario, espaciado $T/2$, en función del error de sincronización de símbolo ϵ . La relación señal a ruido es de $E_s/N_0 = 20$ dB. Comparando las Figuras 6.21 y 6.23 se puede observar que el esquema fraccionario es mucho menos sensible a errores en el instante de muestreo que el igualador no fraccionario. Con $K'_w + 1 = 10$ coeficientes, el esquema fraccionario presenta un coste computacional similar al del igualador no fraccionario de la Figura 6.21, mientras que, con $K'_w + 1 = 18$ coeficientes, ambos igualadores cubren la misma duración temporal.

6.6. PRESTACIONES ASINTÓTICAS DE LOS IGUALADORES

En los apartados precedentes hemos presentado el diseño de varias estructuras de igualación, siempre bajo la suposición de que los filtros presentes en dichas estructuras poseen un número finito de coeficientes. Esta condición responde, evidentemente, a consideraciones de índole práctica. Sin embargo resulta de interés analizar las prestaciones de los diversos igualadores para el caso idealizado en el que la complejidad de los filtros no se ve restringida, de forma que sus respuestas impulsionales pueden tener un número de coeficientes infinito. Dichas prestaciones constituirán una cota superior sobre las de cualquier igualador práctico con la misma estructura. Un diseño realista podrá acercarse a esta cota si la longitud de los filtros y el retardo global son lo suficientemente grandes, aunque nunca superarla. Por ello procederemos ahora a analizar los igualadores lineal y con realimentación de decisiones en el caso idealizado, bajo los criterios forzador de ceros y de mínimo error cuadrático medio. Al no restringir la complejidad de los filtros, la optimización puede llevarse a cabo directamente en el dominio de la frecuencia, como veremos seguidamente.

6.6.1. Igualador lineal

Consideremos el modelo discreto (con muestreo a periodo T de la salida del filtro de recepción) del igualador lineal de la Figura 6.9. Calcularemos el igualador óptimo a periodo de símbolo (esto es, no fraccionario) bajo los criterios ZF y MSE, sin adoptar ninguna restricción inicial sobre el canal discreto equivalente o el igualador, que podrán tener un número ilimitado de coeficientes sin ser necesariamente causales:

$$P(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p[n]z^{-n}, \quad W(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w[n]z^{-n} \quad (6.102)$$

El error de igualación $e_{lin}[n] = A[n - d] - u_{lin}[n]$ es la diferencia entre la secuencia de símbolos transmitidos (incluyendo un retardo global d) y la entrada al decisor dada por $u_{lin}[n] = w[n] * q[n]$. Observemos ahora que $e_{lin}[n]$ puede escribirse como

$$e_{lin}[n] = (\delta[n - d] - w[n] * p[n]) * A[n] - w[n] * z[n] \quad (6.103)$$

y dado que los procesos $A[n]$ y $z[n]$ son independientes, la función de autocorrelación de $e_{lin}[n]$ será la suma de las autocorrelaciones de cada uno de los dos términos en (6.103). Por

tanto, la densidad espectral de potencia del error de igualación, $S_{e,lin}(e^{j\omega})$, será asimismo la suma de las densidades espectrales de potencia de cada uno de estos dos términos:

$$\begin{aligned} S_{e,lin}(e^{j\omega}) &= \left| e^{-j\omega d} - W(e^{j\omega})P(e^{j\omega}) \right|^2 S_A(e^{j\omega}) + |W(e^{j\omega})|^2 S_z(e^{j\omega}) \\ &= |e^{-j\omega d} - WP|^2 E_s + |W|^2 \sigma_z^2 \end{aligned} \quad (6.104)$$

donde por claridad hemos eliminado el argumento de $W(e^{j\omega})$ y $P(e^{j\omega})$, y hemos utilizado el hecho de que $S_A(e^{j\omega}) = E_s$ y $S_z(e^{j\omega}) = \sigma_z^2$, por ser $\{A[n]\}$ y $\{z[n]\}$ procesos blancos. El primer sumando en (6.104) corresponde a la ISI, mientras que el segundo es debido al ruido que es filtrado por el igualador.

Bajo el criterio ZF, el igualador minimiza el error entre el canal equivalente $c[n] = w[n] * p[n]$ y un retardo puro $\delta[n-d]$. Empleando el Teorema de Rayleigh (Página 40) la energía de este error se puede expresar en el dominio de la frecuencia:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\delta[n-d] - c[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |e^{-j\omega d} - W(e^{j\omega})P(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (6.105)$$

Realicemos ahora una observación importante: al no imponer ninguna restricción sobre el igualador, su función de transferencia $W(e^{j\omega})$ puede ser especificada *independientemente para cada frecuencia* ω . Por tanto, para el criterio ZF debemos elegir aquel W que minimiza el integrando de (6.105); es fácil ver que el integrando se minimiza (de hecho, se hace cero) para

$$W_{lin}^{\text{ZF}}(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega d}}{P(e^{j\omega})} \quad (6.106)$$

resultado no muy sorprendente: para eliminar la ISI el igualador ha de invertir la función de transferencia del canal en cada frecuencia, además de incluir un factor $e^{-j\omega d}$ para ajustarse al retardo global de d muestras impuesto. Nótese que si $P(e^{j\omega_0}) = 0$ para alguna frecuencia ω_0 , W_{lin}^{ZF} no está definido: como sabemos, no es posible invertir un cero sobre la circunferencia unidad de forma estable mediante un igualador lineal.

Por lo que respecta al igualador MSE, utilizando el Teorema de Wiener-Khinchine (véase Página 150) podemos escribir

$$E\{|e_{lin}[n]|^2\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{e,lin}(e^{j\omega}) d\omega \quad (6.107)$$

con $S_{e,lin}(e^{j\omega})$ dado por (6.104). De nuevo, al no existir restricciones sobre W , basta con encontrar para cada frecuencia ω aquel W que minimiza el integrando en (6.107). En el Apéndice 6.C se demuestra que la solución al problema de minimización (6.107) se obtiene para el igualador lineal dado por

$$W_{lin}^{\text{MSE}}(e^{j\omega}) = e^{-j\omega d} \frac{P^*(e^{j\omega})}{|P(e^{j\omega})|^2 + \lambda} \quad (6.108)$$

con $\lambda \doteq \sigma_z^2/E_s$. Nótese que W_{lin}^{MSE} incluye un factor $P^*(e^{j\omega})$, que constituye un filtro adaptado al canal discreto equivalente $P(e^{j\omega})$. Para relaciones señal a ruido elevadas ($\lambda \rightarrow$

0), se tiene $W_{lin}^{\text{MSE}} \rightarrow W_{lin}^{\text{ZF}}$, como cabría esperar. En ambos casos (ZF y MSE) la única influencia del retardo global d en el igualador es a través del factor $e^{-j\omega d}$, de forma que el igualador lineal para el retardo d se obtiene a partir del correspondiente al retardo cero sin más que desplazar su respuesta al impulso d muestras. Esto, naturalmente, es debido a la hipótesis de que el igualador posee un número infinito de coeficientes.

Sustituyendo (6.106) y (6.108) en la expresión de $S_{e,lin}(e^{j\omega})$ en (6.104), se obtiene la densidad espectral de potencia del error de igualación para los igualadores ZF y MSE:

$$S_{e,lin}^{\text{ZF}}(e^{j\omega}) = E_s \cdot \frac{\lambda}{|P(e^{j\omega})|^2}, \quad S_{e,lin}^{\text{MSE}}(e^{j\omega}) = E_s \cdot \frac{\lambda}{|P(e^{j\omega})|^2 + \lambda} \quad (6.109)$$

Por tanto, los valores de la varianza del error que se obtiene con los diseños ZF y MSE son

$$\xi_{lin}^{\text{ZF}} \doteq \frac{E_s}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\lambda}{|P(e^{j\omega})|^2} d\omega, \quad \xi_{lin}^{\text{MSE}} \doteq \frac{E_s}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\lambda}{|P(e^{j\omega})|^2 + \lambda} d\omega \quad (6.110)$$

Debido al término adicional $\lambda > 0$ en el denominador de $S_{e,lin}^{\text{MSE}}$, está claro que $\xi_{lin}^{\text{MSE}} < \xi_{lin}^{\text{ZF}}$, lo cual es lógico si recordamos que el igualador ZF no ha sido diseñado para minimizar el error cuadrático medio. La existencia de algún cero del canal sobre la circunferencia unidad resultaría en $\xi_{lin}^{\text{ZF}} = \infty$, otra prueba más del problema del realce de ruido del criterio ZF. Obsérvese también que tanto ξ_{lin}^{ZF} como ξ_{lin}^{MSE} son independientes del retardo global d , como cabía esperar por las razones antes expuestas.

Ejemplo 6.19

Para el canal multirayecto $p[n]$ del Ejemplo 6.16 con $\lambda = 0,01$, y para $E_s = 1$, los valores asintóticos (6.110) son $\xi_{lin}^{\text{ZF}} = -13,5$ dB y $\xi_{lin}^{\text{MSE}} = -15,3$ dB, con lo que el criterio MSE proporciona una mejora asintótica de 1.8 dB en el error cuadrático medio con respecto al criterio ZF. Obsérvese en la Figura 6.17 que el igualador lineal con 30 coeficientes para el retardo global óptimo aún se halla unos 3 dB por encima del valor asintótico ξ_{lin}^{MSE} .

6.6.2. Igualador con realimentación de decisiones

Consideremos ahora el modelo discreto (obtenido a la tasa de símbolo) del igualador con realimentación de decisiones de la Figura 6.14(a). Para obtener el igualador óptimo bajo el criterio ZF o MSE de nuevo supondremos que tanto el canal $P(z)$ como el filtro precursor $W(z)$ pueden ser de complejidad ilimitada (infinitos coeficientes y no necesariamente causales, como en (6.102)); sin embargo, el filtro de realimentación ha de ser estrictamente causal para ser implementable en la práctica¹⁰, aunque no limitaremos su orden:

$$B(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b[n]z^{-n} \quad (6.111)$$

¹⁰Recuérdese que las únicas decisiones disponibles para el filtro de realimentación se corresponden con el pasado.

También supondremos que las decisiones realimentadas son correctas, de forma que el esquema de igualación es equivalente al mostrado en la Figura 6.14(b). En tal caso, y denotando por $u_{dfe}[n]$ la entrada al decisor símbolo a símbolo en el esquema DFE, el error de igualación $e_{dfe}[n] = A[n-d] - u_{dfe}[n]$ puede escribirse como

$$e_{dfe}[n] = (\delta[n-d] + b[n] * \delta[n-d] - w[n] * p[n]) * A[n] - w[n] * z[n] \quad (6.112)$$

por lo que su densidad espectral de potencia está dada en este caso por

$$\begin{aligned} S_{e,dfe}(e^{j\omega}) &= \left| e^{-j\omega d} [1 + B(e^{j\omega})] - W(e^{j\omega}) P(e^{j\omega}) \right|^2 S_A(e^{j\omega}) + |W(e^{j\omega})|^2 S_z(e^{j\omega}) \\ &= |D(e^{j\omega}) - W(e^{j\omega}) P(e^{j\omega})|^2 E_s + |W(e^{j\omega})|^2 \sigma_z^2 \end{aligned} \quad (6.113)$$

donde hemos introducido $D(e^{j\omega}) \doteq e^{-j\omega d} [1 + B(e^{j\omega})]$. De nuevo observamos que el primer término en (6.113) es debido a la ISI, mientras que el segundo es consecuencia del ruido.

Nuestro primer paso consistirá en calcular el filtro precursor W óptimo en función del filtro de realimentación B . Al igual que en el apartado anterior, la función de transferencia $W(e^{j\omega})$ se puede especificar independientemente para cada frecuencia, ya que el filtro precursor no está limitado en complejidad. El criterio ZF sólo considera la interferencia entre símbolos, mientras que bajo el criterio MSE sí se tiene en cuenta la influencia del ruido. Por tanto, para obtener el filtro precursor óptimo deberemos encontrar aquel W que minimiza

$$\text{ZF: } |D - WP|^2 \quad (6.114)$$

$$\text{MSE: } |D - WP|^2 E_s + |W|^2 \sigma_z^2 \quad (6.115)$$

La solución ZF elimina completamente la ISI precursora, y está dada por

$$W_{dfe}^{\text{ZF}}(e^{j\omega}) = \frac{D(e^{j\omega})}{P(e^{j\omega})} = \frac{e^{-j\omega d}}{P(e^{j\omega})} [1 + B(e^{j\omega})] \quad (6.116)$$

Para la existencia de W_{dfe}^{ZF} se requiere que $P(e^{j\omega}) \neq 0$ para todo ω , como ocurría con W_{lin}^{ZF} .

El filtro precursor MSE se obtiene en el Apéndice 6.C:

$$W_{dfe}^{\text{MSE}}(e^{j\omega}) = e^{-j\omega d} \frac{P^*(e^{j\omega})}{|P(e^{j\omega})|^2 + \lambda} [1 + B(e^{j\omega})] \quad (6.117)$$

En vista de (6.106) y (6.108), se observa que estos filtros verifican

$$W_{dfe}^{\text{ZF}} = W_{lin}^{\text{ZF}} [1 + B]; \quad W_{dfe}^{\text{MSE}} = W_{lin}^{\text{MSE}} [1 + B] \quad (6.118)$$

de forma que el filtro precursor óptimo (ZF o MSE) del igualador DFE puede verse como la conexión en serie del igualador lineal óptimo (ZF o MSE) W_{lin} y el filtro causal $1 + B$, tal como muestra la Figura 6.24(a). Esta observación permite especificar una estructura alternativa para el igualador DFE: utilizando $u_{lin}[n] = w_{lin}[n] * q[n]$, podemos expresar $u_{dfe}[n]$ como

$$\begin{aligned} u_{dfe}[n] &= (\delta[n] + b[n]) * u_{lin}[n] - b[n] * \hat{A}[n-d] \\ &= u_{lin}[n] + b[n] * (u_{lin}[n] - \hat{A}[n-d]) \end{aligned} \quad (6.119)$$

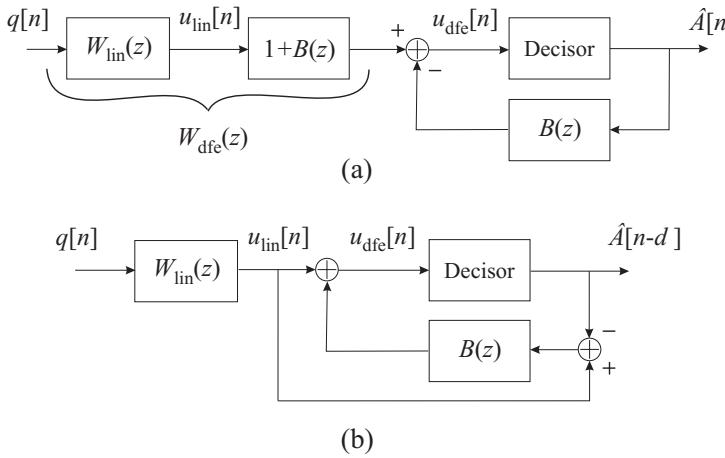


Figura 6.24. (a) Igualador DFE óptimo para un filtro precursor sin limitación en complejidad; (b) Estructura equivalente (DFE con predicción de ruido).

Nótese que $u_{lin}[n]$ no es sino la salida del igualador lineal óptimo del apartado anterior. Basándose en (6.119), el cálculo de $u_{dfe}[n]$ puede realizarse mediante el esquema de la Figura 6.24(b), que recibe el nombre de *DFE con predicción de ruido*, por razones que quedarán claras una vez que determinemos el filtro de realimentación óptimo. Esta estructura tiene la interesante propiedad de que el bloque precursor óptimo W_{lin} es independiente del filtro de realimentación B que se escoja, lo cual puede ser útil en ciertas aplicaciones. Por otro lado, los valores de la señal de entrada al filtro B en la estructura DFE con predicción de ruido no pertenecen ya a un conjunto finito como ocurría con la estructura DFE original, lo que puede tener consecuencias a la hora de su implementación.

Calculemos ahora el filtro de realimentación óptimo. Bajo el criterio MSE, B ha de minimizar la varianza del error de igualación. Por otro lado, el igualador lineal ZF ya elimina completamente la ISI, pues $u_{lin}^{ZF}[n] = A[n - d] + e_{lin}^{ZF}[n]$, donde $e_{lin}^{ZF}[n] = w_{lin}^{ZF}[n] * z[n]$ es debido únicamente al ruido. ¿Qué ventaja tiene entonces la realimentación de decisiones en el caso ZF? De hecho, como queda claro en la Figura 6.24(a), ¡estamos introduciendo ISI postcursora para que luego la elimine el filtro de realimentación! Sustituyendo $u_{lin}^{ZF}[n] = A[n - d] + e_{lin}^{ZF}[n]$ en (6.119) y suponiendo decisiones correctas,

$$\begin{aligned} u_{dfe}^{ZF}[n] &= A[n - d] + e_{lin}^{ZF}[n] + b[n] * (A[n - d] + e_{lin}^{ZF}[n] - \hat{A}[n - d]) \\ &= A[n - d] + (\delta[n] + b[n]) * e_{lin}^{ZF}[n] \end{aligned}$$

la cual tampoco contiene ISI. Sin embargo, la componente de ruido pasa a estar filtrada por $1 + B$, de forma que B puede elegirse para minimizar la varianza de esta componente sin introducir ISI adicional, mejorando por tanto las prestaciones del igualador lineal ZF.

Así, bajo cualquiera de los dos criterios (ZF o MSE), el filtro de realimentación óptimo minimizará la varianza del error de igualación $e_{dfe}[n]$, el cual puede relacionarse utilizando

(6.119) con el correspondiente para el igualador lineal, $e_{lin}[n] = \hat{A}[n-d] - u_{lin}[n]$:

$$\begin{aligned} e_{dfe}[n] &= (\delta[n] + b[n]) * e_{lin}[n] \\ &= e_{lin}[n] + \sum_{k=1}^{\infty} b[k]e_{lin}[n-k] = e_{lin}[n] - \hat{e}_{lin}[n] \end{aligned} \quad (6.120)$$

donde $\hat{e}_{lin}[n] \doteq -\sum_{k=1}^{\infty} b[k]e_{lin}[n-k]$ es una predicción de $e_{lin}[n]$, calculada como combinación lineal de sus muestras anteriores $e_{lin}[n-k]$ con $k > 0$, y donde los coeficientes de dicha combinación lineal son los $b[k]$ (cambiados de signo). El error $e_{dfe}[n] = e_{lin}[n] - \hat{e}_{lin}[n]$ puede interpretarse como un error de predicción, de forma que el filtro B óptimo estará dado por el predictor óptimo para $e_{lin}[n]$. Para hallar este predictor óptimo observemos que, en vista de (6.109) y (6.120), la densidadpectral de potencia de $e_{dfe}[n]$ está dada por

$$S_{e,dfe}(e^{j\omega}) = S_{e,lin}(e^{j\omega})|1 + B(e^{j\omega})|^2 = E_s \cdot \frac{\lambda}{S(e^{j\omega})}|1 + B(e^{j\omega})|^2 \quad (6.121)$$

donde

$$S(e^{j\omega}) \doteq \begin{cases} |P(e^{j\omega})|^2, & \text{para el criterio ZF} \\ |P(e^{j\omega})|^2 + \lambda, & \text{para el criterio MSE} \end{cases} \quad (6.122)$$

En ambos casos, $S(e^{j\omega})$ es una función positiva¹¹. Esto nos permite utilizar el siguiente resultado, conocido como *Teorema de factorización espectral*, cuya demostración se puede encontrar en el Apéndice 6.D y que dice que toda función racional $S(z)$ real, positiva y acotada sobre la circunferencia unidad puede factorizarse de forma única como $S(z) = \gamma_S^2[1 + F(z)][1 + F^*(1/z^*)]$, donde $F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f[k]z^{-k}$ es tal que $1 + F(z)$ es de fase mínima, y

$$\gamma_S^2 = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln S(e^{j\omega}) d\omega \right\} > 0 \quad (6.123)$$

Realizando esta descomposición para $S(e^{j\omega})$ dado en (6.122), tenemos que $S(e^{j\omega}) = \gamma_S^2|1 + F(e^{j\omega})|^2$. Dado que $1 + F(z)$ es de fase mínima, su inversa es causal y estable, de forma que la función de transferencia definida por

$$V(z) \doteq \frac{1 + B(z)}{1 + F(z)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} v[k]z^{-k} \quad (6.124)$$

es causal y estable. En vista de (6.121) y utilizando el Teorema de Wiener-Khinchine, la varianza de $e_{dfe}[n]$ puede expresarse como

$$E\{|e_{dfe}[n]|^2\} = \frac{E_s}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\lambda}{\gamma_S^2} \frac{|1 + B(e^{j\omega})|^2}{|1 + F(e^{j\omega})|^2} d\omega = E_s \cdot \frac{\lambda}{\gamma_S^2} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} |v[k]|^2 \right) \quad (6.125)$$

¹¹En el caso MSE, $S = |P|^2 + \lambda > 0$ pues $\lambda > 0$. En el caso ZF, recordemos que para la existencia del igualador es necesario que $P(e^{j\omega}) \neq 0$ para todo ω , resultando en $S = |P|^2 > 0$.

la cual es mínima si $v[k] = 0$ para todo $k \geq 1$, es decir, para $1 + B(z) = 1 + F(z)$. Por tanto, el filtro de realimentación óptimo está dado por el factor espectral de fase mínima de $S(e^{j\omega})$. Para este filtro óptimo, el error de igualación $e_{dfe}[n]$ es un proceso blanco, ya que su densidad espectral de potencia $S_{e,dfe}(e^{j\omega}) = E_s \cdot \lambda / \gamma_S^2$ es constante para todo ω .

Dependiendo del criterio particular, y usando la expresión (6.123) para γ_S^2 , la mínima varianza del error para el igualador DFE, $E_s \cdot \lambda / \gamma_S^2$, toma los siguientes valores:

$$\xi_{dfe}^{\text{ZF}} \doteq E_s \cdot \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \frac{\lambda}{|P(e^{j\omega})|^2} d\omega \right\} \quad (6.126)$$

$$\xi_{dfe}^{\text{MSE}} \doteq E_s \cdot \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \frac{\lambda}{|P(e^{j\omega})|^2 + \lambda} d\omega \right\} \quad (6.127)$$

De nuevo, el término aditivo $\lambda > 0$ en el denominador del integrando en (6.127) resulta en $\xi_{dfe}^{\text{MSE}} < \xi_{dfe}^{\text{ZF}}$. Cuando la relación señal a ruido tiende a infinito, el igualador DFE obtenido bajo el criterio MSE coincide con el obtenido bajo el criterio forzador de ceros.

Por otra parte, dado que el igualador lineal es un caso particular del igualador DFE en el que el filtro de realimentación se fija a $B = 0$, también se tiene que $\xi_{dfe}^{\text{ZF}} \leq \xi_{lin}^{\text{ZF}}$ y $\xi_{dfe}^{\text{MSE}} \leq \xi_{lin}^{\text{MSE}}$; una demostración alternativa de este hecho se desprende de que

$$\frac{\xi_{dfe}}{\xi_{lin}} = \frac{\exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \frac{\lambda}{S(e^{j\omega})} d\omega \right\}}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\lambda}{S(e^{j\omega})} d\omega} \leq 1 \quad (6.128)$$

lo cual es una consecuencia de la desigualdad de Jensen, discutida en el Apéndice 9.B y en el Problema P6.22. La igualdad se cumple en (6.128) si y sólo si $S(e^{j\omega})$ es constante para todo ω .

Ejemplo 6.20

Para el canal multirayecto $p[n]$ del Ejemplo 6.16 con $\lambda = 0,01$, y para $E_s = 1$, los valores asintóticos son $\xi_{dfe}^{\text{ZF}} = -19,2$ dB y $\xi_{dfe}^{\text{MSE}} = -19,3$ dB. Por tanto, de la Figura 6.17 se desprende que con un total de 30 coeficientes, el igualador DFE prácticamente ha alcanzado sus prestaciones asintóticas. Para este caso, se tiene $\xi_{dfe}^{\text{MSE}} / \xi_{lin}^{\text{MSE}} = -4$ dB.

6.7. AJUSTE DEL RECEPTOR

La aplicación de cualquiera de los métodos presentados a lo largo del capítulo para mitigar la ISI requiere conocer la respuesta impulsional del canal discreto equivalente, $p[n]$. Por ello, de alguna manera el receptor deberá realizar una estimación de los parámetros del canal (o bien directamente de los coeficientes del igualador, como veremos) antes de poder realizar la detección de los símbolos transmitidos. Las estrategias para este ajuste del receptor pueden dividirse en dos grupos: esquemas no realimentados, en los que la estimación de parámetros se realiza a partir de un bloque de muestras de la señal recibida, y métodos recursivos (o adaptativos), en los que los parámetros del receptor se actualizan repetidamente con cada nueva muestra $q[n]$. A continuación presentaremos algunos de estos métodos.

6.7.1. Esquemas no realimentados

Con el objeto de facilitar la tarea del receptor, el transmisor puede insertar en la secuencia enviada un bloque de N símbolos (denominados *símbolos de entrenamiento* o *símbolos piloto*) que son conocidos de antemano en recepción. Esto puede ser aprovechado por el receptor, bien para estimar los parámetros del canal, bien para calcular directamente el igualador. En concreto, supongamos que $\{A[0], \dots, A[N - 1]\}$ son símbolos de entrenamiento. A partir del modelo de canal discreto equivalente (a periodo de símbolo),

$$q[n] = \sum_{k=0}^K p[k]A[n-k] + z[n], \quad -\infty < n < \infty$$

podemos observar que en las $N - K$ observaciones $\{q[K], \dots, q[N - 1]\}$ únicamente influyen los símbolos piloto. La estimación de los parámetros necesarios puede entonces hacerse mediante esquemas no realimentados, a partir del conjunto de estas $N - K$ observaciones. Dicha estimación deberá repetirse de forma periódica para que el receptor pueda ajustarse a posibles variaciones en el entorno y la frecuencia con que se debe repetir la transmisión de símbolos piloto dependerá de la rapidez con la que varíen los parámetros del canal. Si el entorno de operación fluctúa de forma considerable entre la transmisión de dos bloques consecutivos de símbolos piloto, es muy probable que se produzcan numerosos errores en las decisiones debido al desajuste del receptor; por otro lado, los símbolos piloto consumen recursos que podrían utilizarse para enviar verdadera información, por lo que tampoco es deseable transmitirlos con excesiva frecuencia.

El uso de símbolos de entrenamiento requiere que el receptor localice el bloque de N símbolos piloto dentro de la secuencia de observaciones, lo que suele hacerse correlacionando la secuencia recibida con el bloque de símbolos piloto. Si estos se eligen de forma adecuada, dicha correlación cruzada presentará un máximo acusado en el momento preciso, aun cuando la ISI introducida por el canal sea considerable.

Estimación del canal

Agrupando las observaciones en un vector q de tamaño $N - K$ podemos escribir

$$\underbrace{\begin{bmatrix} q[K] \\ q[K+1] \\ \vdots \\ q[N-1] \end{bmatrix}}_{\hat{q}} = \underbrace{\begin{bmatrix} A[K] & A[K-1] & \cdots & A[0] \\ A[K+1] & A[K] & \cdots & A[1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A[N-1] & A[N-2] & \cdots & A[N-K-1] \end{bmatrix}}_{\hat{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} p[0] \\ p[1] \\ \vdots \\ p[K] \end{bmatrix}}_{\hat{p}} + \underbrace{\begin{bmatrix} z[K] \\ z[K+1] \\ \vdots \\ z[N-1] \end{bmatrix}}_{\hat{z}} \Leftrightarrow q = Ap + z \quad (6.129)$$

En este contexto, la matriz toeplitz \mathbf{A} es conocida (está formada por los símbolos de entrenamiento), mientras que \mathbf{p} ha de estimarse. Los elementos del vector de ruido \mathbf{z} son variables aleatorias gausianas e independientes, circularmente simétricas, con media cero y varianza σ_z^2 , la cual puede que deba estimarse también, dependiendo de la aplicación. Una vez que se dispone de \mathbf{p} y, si es preciso, σ_z^2 , el receptor puede aplicar los métodos de detección expuestos en este capítulo, bien mediante aplicación del algoritmo de Viterbi, bien mediante el diseño de un igualador. El criterio de máxima verosimilitud (ML) plantea la estimación de los parámetros del canal para maximizar la función de densidad de probabilidad $f_{\mathbf{q}|\mathbf{p},\sigma_z^2}(\mathbf{q}|\mathbf{p},\sigma_z^2)$. De forma análoga a como se obtuvo (6.17), esta función está dada por

$$f_{\mathbf{q}|\mathbf{p},\sigma_z^2}(\mathbf{q}|\mathbf{p},\sigma_z^2) = \frac{1}{(\pi\sigma_z^2)^{N-K}} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma_z^2} \|\mathbf{q} - \mathbf{Ap}\|^2 \right\} \quad (6.130)$$

Para maximizar (6.130) con respecto a \mathbf{p} , hemos de elegir $\hat{\mathbf{p}}$ como el valor que minimiza¹² $\|\mathbf{q} - \mathbf{Ap}\|^2$. Una vez que se dispone de dicho valor, el estimador de la varianza del ruido se obtiene fácilmente: igualando a cero la derivada de (6.130) con respecto a σ_z^2 se sigue que

$$\hat{\sigma}_z^2 = \frac{1}{N-K} \|\mathbf{q} - \mathbf{Ap}\|^2 \quad (6.131)$$

La norma $\|\mathbf{q} - \mathbf{Ap}\|^2$ a minimizar puede escribirse como

$$\begin{aligned} \|\mathbf{q} - \mathbf{Ap}\|^2 &= [\mathbf{q}^H \mathbf{q} - \mathbf{q}^H \mathbf{A} (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{q}] \\ &\quad + [\mathbf{p} - (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{q}]^H (\mathbf{A}^H \mathbf{A}) [\mathbf{p} - (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{q}] \end{aligned} \quad (6.132)$$

El primer término no depende de \mathbf{p} , por lo que minimizar (6.132) equivale a minimizar el segundo término (ya que este es positivo). Dicho término se anula para

$$\hat{\mathbf{p}} = (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{q} \quad (6.133)$$

Insertando este valor en (6.131) se obtiene el estimador ML de la varianza de ruido. Obsérvese que una condición necesaria para la invertibilidad de $\mathbf{A}^H \mathbf{A}$ es que la matriz \mathbf{A} tenga al menos tantas filas como columnas, lo cual quiere decir que (6.129) debe ofrecernos al menos tantas ecuaciones como parámetros se han de estimar. Dado que los símbolos de entrenamiento son conocidos de antemano por el receptor, es posible precalcular la matriz $(\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H$ a priori y almacenarla en memoria. De esta forma no es necesario para el receptor realizar la inversión matricial cada vez que el canal ha de ser reestimado.

Para tener una idea de la calidad de este estimador de canal, sustituimos la expresión (6.129) del vector \mathbf{q} en (6.133) para escribir $\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p} + (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{z}$ lo que revela que el estimador $\hat{\mathbf{p}}$ es una variable aleatoria gausiana, de media \mathbf{p} y matriz de covarianza $\sigma_z^2 (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1}$. Por tanto, la mejora de la calidad de la estimación pasa por aumentar los elementos de la diagonal de $\mathbf{A}^H \mathbf{A}$, lo que puede hacerse de dos formas distintas. En primer

¹²Dado que la matriz \mathbf{A} es de tamaño $(N - K) \times (K + 1)$, en general no es cuadrada, por lo que no es posible tomar directamente $\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{q}$.

lugar, puede aumentarse la magnitud de los símbolos de entrenamiento, a costa de incrementar la potencia transmitida. En segundo lugar, para una misma potencia transmitida, se puede aumentar el número de símbolos de entrenamiento N . El precio a pagar en este caso es un uso menos eficiente del canal, ya que durante la transmisión de símbolos piloto no se está enviando verdadera información.

En el caso en que el receptor utilice el algoritmo de Viterbi para la detección de los símbolos, se emplea la respuesta impulsional del canal estimado para construir el diagrama de rejilla. Por otro lado, si el receptor se basa en un igualador, este ha de obtenerse resolviendo las ecuaciones de diseño correspondientes, para las cuales se necesitan también los parámetros del canal. Pero también cabe la posibilidad de calcular directamente dichos filtros, como se presenta a continuación.

Cálculo directo del igualador

Si se va a utilizar un igualador lineal de orden K_w en el receptor, es posible calcular sus coeficientes directamente sin necesidad de estimar primero los parámetros del canal. El error de igualación para un retardo d estará dado por

$$e_d[n] = A[n-d] - \sum_{k=0}^{K_w} w[k]q[n-k]$$

Agrupando sus muestras en un vector e_d , obtenemos el modelo

$$\underbrace{\begin{bmatrix} e_d[K_w] \\ e_d[K_w+1] \\ e_d[K_w+2] \\ \vdots \\ e_d[N-1] \end{bmatrix}}_{\dot{=} e_d} = - \underbrace{\begin{bmatrix} q[K_w] & q[K_w-1] & \cdots & q[0] \\ q[K_w+1] & q[K_w] & \cdots & q[1] \\ q[K_w+2] & q[K_w+1] & \cdots & q[2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q[N-1] & q[N-2] & \cdots & q[N-K_w-1] \end{bmatrix}}_{\dot{=} Q} \underbrace{\begin{bmatrix} w[0] \\ w[1] \\ \vdots \\ w[K_w] \end{bmatrix}}_{\dot{=} w} + \underbrace{\begin{bmatrix} A[K_w-d] \\ A[K_w-d+1] \\ A[K_w-d+2] \\ \vdots \\ A[N-d-1] \end{bmatrix}}_{\dot{=} a_d} \Leftrightarrow e_d = a_d - Qw, \quad (6.134)$$

cuya matriz Q , de tamaño $(N - K_w) \times (K_w + 1)$ y toeplitz, se construye ahora con las observaciones. Como sustitución al criterio de mínimo MSE es frecuente utilizar el criterio de mínimos cuadrados o LS (“Least Squares”), que plantea estimar el igualador para minimizar la norma del vector de error, $\|e_d\|^2$. Dada la similitud en la estructura de $\|e_d\|^2 = \|a_d - Qw\|^2$ con (6.132), se deja como ejercicio al lector el comprobar que,

siguiendo pasos análogos a los del apartado anterior, los coeficientes del igualador LS para el retardo d están dados por

$$\mathbf{w}_{d,LS} = (\mathbf{Q}^H \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{Q}^H \mathbf{a}_d \quad (6.135)$$

Este igualador $\mathbf{w}_{d,LS}$ constituye una estimación del igualador MSE óptimo $\mathbf{w}_{d,MSE}$ dado por (6.61). Como antes, para que $\mathbf{Q}^H \mathbf{Q}$ sea invertible es necesario que \mathbf{Q} posea al menos tantas filas como columnas, esto es, (6.134) ha de proporcionar al menos tantas ecuaciones como parámetros se han de estimar. Por otro lado, cuanto mayor sea el número de símbolos de entrenamiento disponibles, más fiable será la estimación $\mathbf{w}_{d,LS}$ del igualador MSE óptimo.

El valor mínimo de la norma del vector de error $\|\mathbf{e}_d\|^2$ que resulta con este igualador es

$$\xi_d \doteq \|\mathbf{a}_d - \mathbf{Q}\mathbf{w}_{d,LS}\|^2 = \mathbf{a}_d^H \mathbf{a}_d - \mathbf{a}_d^H \mathbf{Q}(\mathbf{Q}^H \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{Q}^H \mathbf{a}_d \quad (6.136)$$

El diseño del igualador requiere especificar el retardo global d , el cual, como sabemos, puede afectar drásticamente las prestaciones obtenidas. Una posible opción consiste en calcular (6.136) para un rango de retardos $0 \leq d \leq d_{max}$ y elegir el retardo para el que ξ_d es mínimo.

De forma similar es posible extender el diseño LS al esquema de igualación con realimentación de decisiones, lo que se deja al lector como ejercicio (véase Problema P6.23).

6.7.2. Igualación adaptativa

El principal inconveniente del diseño del igualador mediante los métodos no realimentados estriba en su considerable carga computacional, ya que ha de invertirse una matriz de tamaño igual al número de coeficientes del igualador. Si la distorsión debida al canal hace necesario un igualador con un orden elevado, estos métodos pueden no ser factibles.

Es posible evitar este problema utilizando técnicas adaptativas. La idea fundamental consiste en plantear el diseño del igualador como un problema de minimización de cierta función de coste J , pero en lugar de intentar resolver dicho problema directamente (como en el caso de los métodos no realimentados) se adopta una estrategia iterativa denominada *descenso por gradiente*, mediante la cual los coeficientes del igualador se modifican para cada nueva observación siguiendo la dirección opuesta al vector gradiente de la función de coste. Si la magnitud de dicha modificación se escoge de forma adecuada, los coeficientes convergerán a un entorno de los valores que minimizan J .

Ejemplo 6.21

Supongamos que a través de algún procedimiento hemos establecido nuestra función de coste, correspondiente a un hipotético problema en el que aparecen dos variables w_1 y w_2 , y que resulta ser

$$J(w_1, w_2) = w_1^2 + w_2^2 + w_1 w_2 + w_1 + 5w_2 + 8 \quad (6.137)$$

Nuestro objetivo es minimizar $J(w_1, w_2)$. En este caso sencillo, esto puede hacerse directamente tomando derivadas parciales con respecto a w_1 y a w_2 , igualando a cero, y despejando:

$$\frac{\partial J(w_1, w_2)}{\partial w_1} = 2w_1 + w_2 + 1 = 0, \quad \frac{\partial J(w_1, w_2)}{\partial w_2} = 2w_2 + w_1 + 5 = 0$$

de donde $w_1 = 1, w_2 = -3$ es la solución deseada. Sin embargo, en un caso práctico este método directo puede no ser viable; por ejemplo, si las derivadas de J son demasiado complicadas, o bien si no pueden calcularse directamente con los datos disponibles y han de ser estimadas a partir de señales ruidosas.

Una posible alternativa es el método iterativo conocido como *descenso por gradiente*. La idea básica es realizar una estimación inicial de la posición del mínimo, evaluar la dirección que a partir de esa estimación nos proporciona la mayor pendiente “hacia abajo” sobre la función de coste, y dar un pequeño paso en esa dirección para establecer la siguiente estimación. Si el paso no es excesivamente grande, es de esperar que esta nueva estimación sea mejor que la anterior, en el sentido de que el el coste se habrá decrementado ligeramente. El proceso se repite, con la intención de acercarnos cada vez más al punto óptimo con cada paso.

La clave de este método reside en el hecho de que la dirección de mayor pendiente “hacia abajo” en un punto dado viene dada por el negativo del gradiente de la función de coste, evaluado en ese punto. El gradiente no es más que el vector de las derivadas parciales de la función de coste J ; en nuestro ejemplo, sería el vector $[2w_1 + w_2 + 1, 2w_2 + w_1 + 5]^T$. Nótese que a cada punto (w_1, w_2) del plano le corresponde un valor del vector gradiente, y que en el punto que minimiza la función de coste, el gradiente se anula (véase Figura 6.25).

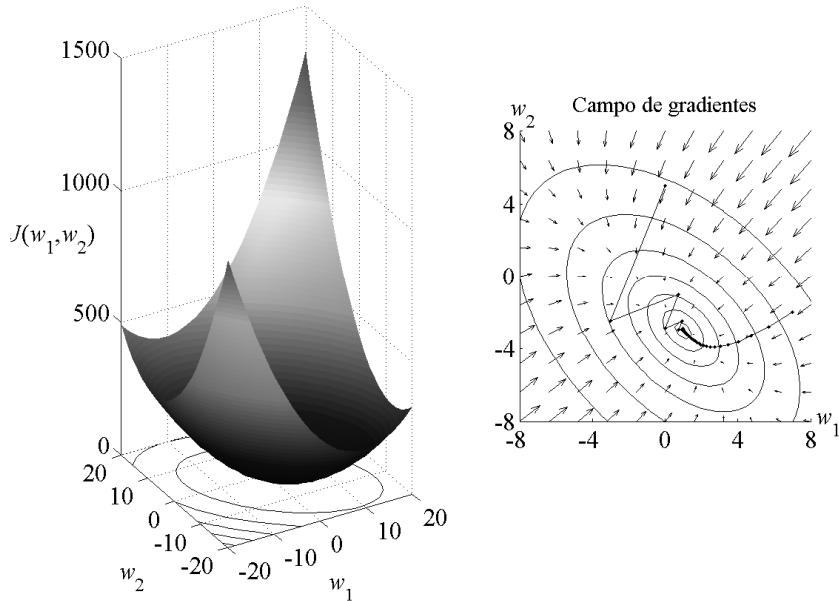


Figura 6.25. Representación gráfica del coste J del Ejemplo 6.21.

Para aplicar el método de descenso por gradiente a la función J en (6.137), supongamos que tenemos una estimación de los valores de w_1, w_2 óptimos en el instante k , que denotaremos por $w_1[k], w_2[k]$. Las nuevas estimaciones en el instante $k + 1$ serán

$$w_i[k + 1] = w_i[k] - \mu \left. \frac{\partial J(w_1, w_2)}{\partial w_i} \right|_{(w_1, w_2) = (w_1[k], w_2[k])} \quad (6.138)$$

donde μ es un número positivo denominado *paso de adaptación*. Este proceso se repite a medida

que k se incrementa. Básicamente, estamos siguiendo la dirección de los vectores representados en la Figura 6.25 para que, poco a poco, nos lleven hasta el valor óptimo. Explícitamente,

$$\begin{aligned} w_1[k+1] &= w_1[k] - \mu(2w_1[k] + w_2[k] + 1) \\ w_2[k+1] &= w_2[k] - \mu(2w_2[k] + w_1[k] + 5) \end{aligned} \quad (6.139)$$

Así, iterando (6.139), las secuencias $w_1[k]$, $w_2[k]$ deberían converger a los valores óptimos $w_1 = 1$, $w_2 = -3$. En la Figura 6.25 se han representado las trayectorias de estas secuencias para dos casos. En el primero se parte del punto inicial $w_1[0] = 7$, $w_2[0] = -2$ y se utiliza un paso de adaptación $\mu = 0,1$. En el segundo caso los valores iniciales son $w_1[0] = 0$, $w_2[0] = 5$, y el paso $\mu = 0,5$. Comparando las dos trayectorias observamos la influencia del paso de adaptación. En ambos casos se converge al mínimo de J , aunque con un paso más pequeño se requiere un mayor número de iteraciones. Por otro lado, un paso elevado se traduce en una trayectoria con saltos considerables, es decir, menos suaves. Si el paso se elige demasiado grande, es posible que la iteración se desestabilice y el método diverja, debido a que la función de coste no se decremente necesariamente con cada iteración.

Al aplicar las técnicas de descenso por gradiente para adaptar el igualador sus coeficientes se actualizan con cada muestra de la señal recibida, con lo que el igualador pasa a ser un sistema variante en el tiempo. Denotaremos por $w[k; n]$ el valor que toma el coeficiente k -ésimo del igualador en el instante n . De esta forma, para un igualador lineal con orden K_w la salida del filtro en el instante n es

$$u[n] = \sum_{k=0}^{K_w} w[k; n]q[n-k] = \mathbf{w}^T[n]\mathbf{q}[n] \quad (6.140)$$

donde el vector de coeficientes del filtro en el instante n es

$$\mathbf{w}[n] \doteq [w[0; n], w[1; n], \dots, w[K_w; n]]^T \quad (6.141)$$

mientras que $\mathbf{q}[n]$ recoge las últimas $K_w + 1$ muestras de la señal de entrada al igualador:

$$\mathbf{q}[n] \doteq [q[n], q[n-1], \dots, q[n-K_w]]^T \quad (6.142)$$

A la hora de minimizar una función de coste J ha de tenerse en cuenta que los coeficientes del igualador son en general complejos. Como en (6.138), su adaptación se realiza sustrayendo de su valor anterior un cierto *término de corrección*: para $k = 0, 1, \dots, K_w$, las partes real e imaginaria del coeficiente k -ésimo del igualador se actualizan en el instante $n + 1$ mediante

$$\begin{aligned} \mathcal{R}e\{w[k; n+1]\} &= \mathcal{R}e\{w[k; n]\} - \mu \frac{\partial J}{\partial \mathcal{R}e\{w[k; n]\}}, \\ \mathcal{I}m\{w[k; n+1]\} &= \mathcal{I}m\{w[k; n]\} - \mu \frac{\partial J}{\partial \mathcal{I}m\{w[k; n]\}}, \end{aligned}$$

donde el *paso de adaptación* $\mu > 0$ gobierna la magnitud del término de corrección. Definiendo la derivada de J con respecto a un parámetro complejo w como

$$\frac{\partial J}{\partial w} \doteq \frac{\partial J}{\partial \mathcal{R}e\{w\}} + j \frac{\partial J}{\partial \mathcal{I}m\{w\}} \quad (6.143)$$

el descenso por gradiente se puede expresar de forma compacta mediante

$$w[k; n+1] = w[k; n] - \mu \cdot \frac{\partial J}{\partial w[k; n]}, \quad 0 \leq k \leq K_w \quad (6.144)$$

Dependiendo de la función de coste J utilizada es posible obtener distintos algoritmos adaptativos. Seguidamente expondremos el denominado *algoritmo LMS*, que utiliza un coste relacionado con el error cuadrático medio del Apartado 6.3.2, para más tarde introducir el *algoritmo CMA*. Ambos desarrollos requieren disponer de las derivadas de las partes real e imaginaria de la salida del igualador con respecto a las partes real e imaginaria de los coeficientes del filtro en el instante n . A partir de (6.140) es inmediato comprobar que dichas derivadas están dadas por

$$\frac{\partial \mathcal{R}e\{u[n]\}}{\partial \mathcal{R}e\{w[k; n]\}} = \mathcal{R}e\{q[n-k]\} \quad \frac{\partial \mathcal{R}e\{u[n]\}}{\partial \mathcal{I}m\{w[k; n]\}} = -\mathcal{I}m\{q[n-k]\} \quad (6.145)$$

$$\frac{\partial \mathcal{I}m\{u[n]\}}{\partial \mathcal{R}e\{w[k; n]\}} = \mathcal{I}m\{q[n-k]\} \quad \frac{\partial \mathcal{I}m\{u[n]\}}{\partial \mathcal{I}m\{w[k; n]\}} = \mathcal{R}e\{q[n-k]\} \quad (6.146)$$

Adaptación supervisada: el algoritmo LMS

Recordemos que el error cuadrático medio asociado al igualador es $E\{|e_d[n]|^2\}$, donde $e_d[n] = A[n-d] - u[n]$. El igualador MSE del Apartado 6.3.2 se diseñó para minimizar esta cantidad. Resulta natural, por tanto, utilizar el error cuadrático medio como función de coste para un algoritmo adaptativo. Utilizando (6.140) y siguiendo un desarrollo análogo al del Apéndice 6.B se obtiene

$$E\{|e_d[n]|^2\} = (E_s - \mathbf{r}_{qA}^H \mathbf{R}_q^{-1} \mathbf{r}_{qA}) + (\mathbf{w} - \mathbf{w}_{d,\text{MSE}})^H \mathbf{R}_q (\mathbf{w} - \mathbf{w}_{d,\text{MSE}}) \quad (6.147)$$

donde $\mathbf{R}_q \doteq E\{\mathbf{q}^*[n]\mathbf{q}^T[n]\}$, $\mathbf{r}_{qA} \doteq E\{\mathbf{q}^*[n]A[n-d]\}$, y $\mathbf{w}_{d,\text{MSE}}$ es el igualador óptimo dado por $\mathbf{w}_{d,\text{MSE}} = \mathbf{R}_q^{-1} \mathbf{r}_{qA}$. En el Problema P6.24 se demuestra que (6.147) presenta un único mínimo en $\mathbf{w} = \mathbf{w}_{d,\text{MSE}}$. Esto es importante puesto que, en general, mediante el uso de un descenso por gradiente sólo podemos esperar converger al mínimo local más cercano al punto de partida, que no tiene por qué corresponder necesariamente con el mínimo global.

Para obtener el gradiente de la función de coste $J_d \doteq \frac{1}{2}E\{|e_d[n]|^2\}$ podemos aprovechar el hecho de que los operadores esperanza y derivada commutan, para escribir

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_d}{\partial w[k; n]} &= \frac{1}{2}E\left[\frac{\partial |e_d[n]|^2}{\partial w[k; n]}\right] = \frac{1}{2}E\left[\frac{\partial |A[n-d] - u[n]|^2}{\partial w[k; n]}\right] \\ &= -\frac{1}{2}E\left[e_d[n] \frac{\partial u^*[n]}{\partial w[k; n]} + e_d^*[n] \frac{\partial u[n]}{\partial w[k; n]}\right] \\ &= -E\left[\mathcal{R}e\left\{e_d[n] \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{R}e\{u[n]\}}{\partial w[k; n]} - j \frac{\partial \mathcal{I}m\{u[n]\}}{\partial w[k; n]}\right)\right\}\right] \end{aligned} \quad (6.148)$$

donde la segunda línea se debe a que $u[n]$ depende de $w[k; n]$, pero $A[n-d]$ no.

Por tanto, la expresión de la derivada (6.143) con $J = J_d$ y $w = w[k; n]$, utilizando (6.145), (6.146) y (6.148), resulta ser

$$\begin{aligned}\frac{\partial J_d}{\partial w[k; n]} &= -E [\mathcal{R}e\{e_d[n]q^*[n-k]\} + j\mathcal{R}e\{e_d[n] \cdot (-jq^*[n-k])\}] \\ &= -E [\mathcal{R}e\{e_d[n]q^*[n-k]\} + j\mathcal{I}m\{e_d[n]q^*[n-k]\}] \\ &= -E \{e_d[n]q^*[n-k]\}\end{aligned}\quad (6.149)$$

En este punto surge un problema, ya que no es posible calcular la media estadística en (6.149) sin conocer los parámetros del canal. La solución consiste en aproximar esta media estadística por un promedio temporal, que en el caso más simple podría reducirse al valor instantáneo (esto es, sin promediar) $-e_d[n]q^*[n-k]$. Usando esta aproximación del gradiente para el término de corrección se obtiene el algoritmo LMS (“Least Mean Squares”), el cual, recordando (6.141) y (6.142), puede expresarse en formato vectorial como

$$\mathbf{w}[n+1] = \mathbf{w}[n] + \mu (A[n-d] - u[n]) \mathbf{q}^*[n] \quad (6.150)$$

Así, el término de corrección del algoritmo LMS es el producto de tres factores: el paso de adaptación μ , el vector conjugado de muestras de entrada al igualador $\mathbf{q}^*[n]$, y el error de igualación o diferencia entre los símbolos de entrenamiento (con el retardo d correspondiente) y la salida del igualador. La adaptación (6.150) se realiza a la tasa de símbolo, requiriendo $K_w + 2$ multiplicaciones y sumas (complejas) por cada muestra de entrada.

Debido a la naturaleza estocástica del término de corrección¹³ en (6.150), los coeficientes del filtro, una vez adaptados mediante el algoritmo LMS, constituyen a su vez variables aleatorias. Su media evolucionará en el tiempo, buscando el mínimo del error cuadrático medio; y superpuesta a esta trayectoria aparecerá una componente aleatoria denominada *ruido de adaptación*, cuya varianza es proporcional al paso de adaptación μ . Esta componente aleatoria se halla presente incluso una vez que los coeficientes han convergido en media a su valor óptimo $\mathbf{w}_{d,\text{MSE}}$, resultando en una cierta degradación en las prestaciones con respecto al caso ideal en el que los coeficientes del igualador son fijos con $\mathbf{w} = \mathbf{w}_{d,\text{MSE}}$. Es por ello que el ruido de adaptación debe mantenerse lo más bajo posible.

Por otra parte, el paso de adaptación determina también la velocidad de convergencia, de forma que el tiempo necesario para que los coeficientes del igualador converjan en media a sus valores óptimos será mayor cuanto menor sea μ . En canales que varían a lo largo del tiempo, el algoritmo adaptativo deberá ajustar el igualador para seguir estas fluctuaciones. Para ello, la rapidez de respuesta del algoritmo habrá de ser similar a la de las variaciones del canal, es decir, el paso de adaptación deberá de ser lo suficientemente grande.

Por todo ello, la elección del paso de adaptación deberá responder a un compromiso entre velocidad de convergencia/capacidad de seguimiento y ruido de adaptación residual. Cuando la finalidad última del diseño es obtener un error cuadrático medio lo menor posible, μ ha de fijarse al valor más pequeño que se pueda representar dada la precisión de nuestra implementación. Por otro lado, si el objetivo principal es una convergencia lo más rápida

¹³De hecho, el algoritmo LMS es también conocido como *algoritmo del gradiente estocástico*.

possible, μ deberá aumentarse, teniendo en cuenta que un valor de μ excesivamente grande desestabilizará completamente la adaptación, haciendo el igualador inservible.

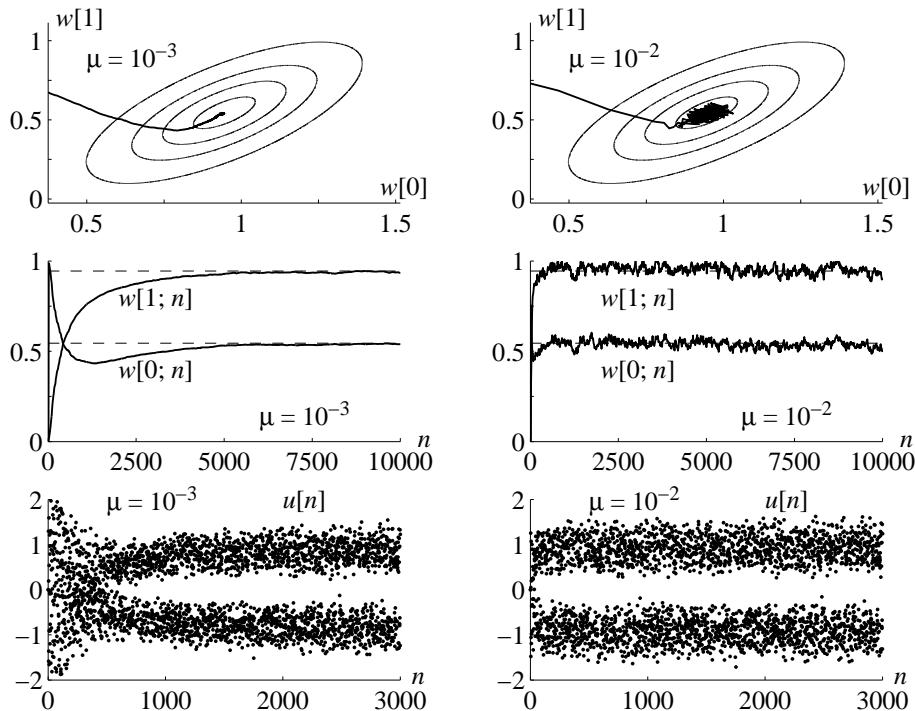


Figura 6.26. Comportamiento del igualador adaptado mediante el algoritmo LMS para dos distintos pasos de adaptación.

Ejemplo 6.22

La Figura 6.26 muestra las trayectorias del algoritmo LMS aplicado a un igualador con $K_w + 1 = 2$ coeficientes e inicializado en $w[0; 0] = 0$, $w[1; 0] = 1$, de forma que inicialmente implementa un retardo de un símbolo. La respuesta impulsional del canal es $p[k] = -0,22\delta[k] + 1,1\delta[k - 1] - 0,66\delta[k - 2] + 0,44\delta[k - 3] - 0,22\delta[k - 4]$, los símbolos pertenecen a una constelación BPSK y la relación señal a ruido es de 23 dB. El igualador MSE para el retardo $d = 1$ es $w[k] = 0,9447\delta[k] + 0,5448\delta[k - 1]$.

En este ejemplo bidimensional es posible visualizar el coste (6.147). Las líneas de error cuadrático medio constante son elipses concéntricas, centradas en el igualador óptimo. Para $\mu = 10^{-3}$ la trayectoria de $w[n]$ es perpendicular a estas elipses (como cabe esperar de un descenso por gradiente), estabilizándose en un entorno del igualador óptimo. Para $\mu = 10^{-2}$, aunque la convergencia es significativamente más rápida, las fluctuaciones de los coeficientes en torno a sus valores óptimos son mucho mayores como consecuencia del ruido de adaptación. Este se hace aún mayor si μ se incrementa más, hasta que para $\mu > 10^{-1}$ el igualador se hace inestable.

La distorsión de pico antes del igualador es $D_{pico} = 1,4$, mayor que $\eta_{BPSK} = 1$, con lo que el ojo se halla inicialmente cerrado. En la evolución de la salida del igualador $u[n]$ observamos cómo el igualador adaptativo es capaz de abrir paulatinamente el ojo a su salida, produciendo una señal a partir de la cual el bloque decisor posterior recuperará los símbolos originales.

Hasta aquí hemos descrito la operación del algoritmo LMS para la adaptación de un igualador lineal, aunque la misma idea puede aplicarse a la adaptación de un igualador con realimentación de decisiones. La salida del igualador estará dada en tal caso por

$$u[n] = \mathbf{w}^T[n]\mathbf{q}[n] - \mathbf{b}^T[n]\hat{\mathbf{a}}[n]$$

donde $\mathbf{w}[n]$ y $\mathbf{b}[n]$ son los vectores de coeficientes de los filtros precursor y de realimentación, respectivamente (el argumento n refleja que ahora estos vectores son variantes en el tiempo, debido a la adaptación); mientras que $\mathbf{q}[n]$ y $\hat{\mathbf{a}}[n]$ contienen respectivamente las muestras de la señal recibida y las decisiones anteriores, tal y como definimos en (6.72) y (6.73). El error cuadrático medio como función de \mathbf{w} y \mathbf{b} sigue teniendo un único mínimo, suponiendo que las decisiones previas son correctas. La adaptación del filtro precursor se realiza mediante (6.150), mientras que la del filtro de realimentación está dada por

$$\mathbf{b}[n+1] = \mathbf{b}[n] - \mu (A[n-d] - u[n]) \hat{\mathbf{a}}^*[n] \quad (6.151)$$

El algoritmo LMS necesita una secuencia de entrenamiento para poder calcular el error $A[n-d] - u[n]$ que dirige la adaptación. Si dicha secuencia consta de N símbolos piloto, tras N iteraciones ya no será posible actualizar los coeficientes del filtro. Sin embargo, si tras esta etapa de entrenamiento el igualador se ha acercado suficientemente a sus valores óptimos como para lograr abrir el ojo a su salida, las decisiones $\hat{A}[n-d]$ obtenidas por el detector serán lo suficientemente fiables como para poder ser utilizadas en la adaptación en lugar de los símbolos de entrenamiento. Este modo de operación se denomina *dirigido por decisión*, y permite mantener activo el ajuste del igualador para seguir posibles fluctuaciones en el canal de forma ininterrumpida. Es importante tener en cuenta que la transición desde el modo entrenado al modo dirigido por decisión generalmente fracasará si el ojo no se encuentra lo suficientemente abierto en el momento de realizarse. Como regla heurística suele requerirse que la tasa de error de símbolo no supere el 5 % al final del modo entrenado.

Adaptación ciega: el algoritmo CMA

Para la correcta adaptación del igualador mediante el algoritmo LMS es preciso que el receptor sea entrenado por el transmisor hasta que aquél sea capaz de usar sus propias decisiones. Sin embargo, existen aplicaciones importantes en las que no es posible o deseable tal grado de cooperación entre ambos terminales. Por ejemplo, en sistemas punto-multipunto y redes de difusión no es práctico que el transmisor interrumpa el envío de datos para proceder a entrenar el receptor de cada nuevo cliente que se conecta al sistema, lo que por otra parte requeriría la existencia de un canal de retorno al transmisor desde cada receptor para realizar una petición de entrenamiento. Aun cuando podrían insertarse símbolos piloto de forma periódica en la transmisión de datos, permitiendo así el entrenamiento de los receptores, esta estrategia reduce la tasa efectiva del sistema.

Por todo ello, en ocasiones se hace necesario un método de adaptación no supervisado o *ciego*, en el que el igualador es capaz de ajustarse sin necesidad de una secuencia de símbolos piloto. Esto puede hacerse aprovechando la información disponible acerca de

las propiedades estadísticas de los símbolos transmitidos. Por ejemplo, supongamos que la modulación empleada es QPSK, de forma que los símbolos pertenecen a una constelación $\{\sqrt{E_s}e^{j(\frac{\pi}{4}+m\frac{\pi}{2})}, 0 \leq m \leq 3\}$. En tal caso, aunque el valor particular de cada símbolo $A[n]$ se desconoce, sí se sabe que su magnitud $|A[n]|^2 = E_s$ es constante para todo n . Cabe pensar entonces en formular un coste que penalice desviaciones de la magnitud de las muestras $u[n]$ a la salida del igualador con respecto a una constante C , como por ejemplo

$$J_{CM} = \frac{1}{4}E\{(|u[n]|^2 - C)^2\} \quad (6.152)$$

La derivada de J_{CM} con respecto a $w[k; n]$ es

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_{CM}}{\partial \alpha} &= \frac{1}{2}E\left\{(|u[n]|^2 - C) \frac{\partial}{\partial w[k; n]}|u[n]|^2\right\} \\ &= E\left\{(|u[n]|^2 - C) \left[Re\{u[n]\} \frac{\partial Re\{u[n]\}}{\partial w[k; n]} + Im\{u[n]\} \frac{\partial Im\{u[n]\}}{\partial w[k; n]}\right]\right\} \end{aligned} \quad (6.153)$$

Así, utilizando (6.145) y (6.146) obtenemos la expresión de la derivada con respecto al coeficiente complejo $w[k; n]$ definida en (6.143):

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_{CM}}{\partial w[k; n]} &= E\left\{(|u[n]|^2 - C) (Re\{u[n]\}Re\{q[n-k]\} + Im\{u[n]\}Im\{q[n-k]\} \right. \\ &\quad \left. - jRe\{u[n]\}Im\{q[n-k]\} + jIm\{u[n]\}Re\{q[n-k]\})\right\} \\ &= E\left\{(|u[n]|^2 - C) u[n]q^*[n-k]\right\} \end{aligned} \quad (6.154)$$

De forma similar a como se hizo en el desarrollo del algoritmo LMS, y dado que no es posible en general evaluar la media estadística en (6.154), aproximaremos esta media estadística por el valor instantáneo $-(C - |u[n]|^2)u[n]q^*[n-k]$. El esquema de adaptación resultante se denomina algoritmo CMA (“Constant Modulus Algorithm”), y en formato vectorial puede escribirse como

$$\mathbf{w}[n+1] = \mathbf{w}[n] + \mu (C - |u[n]|^2) u[n] \mathbf{q}^*[n] \quad (6.155)$$

Obsérvese que las ecuaciones de adaptación de LMS (6.150) y CMA (6.155) son estructuralmente similares: la única diferencia es la sustitución del error de igualación $A[n-d] - u[n]$ por el término $(C - |u[n]|^2)u[n]$. El coste computacional de ambos es por tanto similar, y las consideraciones acerca del paso de adaptación hechas para LMS (compromiso entre velocidad de convergencia y ruido de adaptación) son también aplicables a CMA.

La diferencia crucial entre ambos algoritmos reside en que para la adaptación mediante CMA no se necesitan símbolos piloto, a diferencia de LMS. Por tanto, CMA constituye un método de adaptación ciego, tal como se pretendía. Aunque el desarrollo anterior se basa en la característica de módulo constante de la constelación QPSK, CMA funciona correctamente cuando los símbolos pertenecen a una constelación sin esta propiedad, como puede ser por ejemplo la constelación 16-QAM. Esta destacable propiedad hace de CMA un algoritmo de adaptación muy popular en aplicaciones en las que se requiere un método ciego.

Una estrategia común consiste en utilizar inicialmente CMA para abrir suficientemente el ojo a la salida del igualador, tras lo cual es posible conmutar a LMS dirigido por decisión. Esto es deseable puesto que LMS presenta en general un menor ruido de adaptación que CMA, lo que permite utilizar un paso de adaptación mayor con el consiguiente beneficio a la hora de realizar el seguimiento de las fluctuaciones del canal.

El valor de C no afecta a la convergencia de CMA siempre y cuando $C > 0$, aunque un cambio en C se traduce en un reescalado de la salida del igualador. Para ajustar correctamente la magnitud de dicha salida (lo cual es necesario para el correcto funcionamiento del detector, excepto en el caso de modulaciones PSK), C ha de fijarse al valor

$$C = E\{|A[n]|^4\}/E\{|A[n]|^2\} \quad (6.156)$$

En la expresión (6.152) se puede observar que J_{CM} es insensible a rotaciones de fase en la salida del igualador; es decir, si se sustituye $u[n]$ por $u[n]e^{j\theta[n]}$, donde $\theta[n]$ es un valor de fase (posiblemente variante con el tiempo), el valor de J_{CM} no cambia. Como consecuencia, CMA resulta operativo incluso en casos en los que la señal entregada al igualador presenta una modulación residual debida a desajustes entre las frecuencias de los osciladores del transmisor y el demodulador. Tras el igualador esta modulación residual estará todavía presente, pero una vez que CMA ha convergido la interferencia entre símbolos habrá sido eliminada, o al menos suficientemente reducida. Así, a la salida del igualador se obtendrá una versión de la constelación de los símbolos transmitidos que estará “rotando” en torno al origen del plano complejo a una velocidad proporcional al error de frecuencia cometido. Los métodos de sincronización que se expondrán en el Capítulo 11 realizarán los ajustes finales de fase y frecuencia, necesarios antes de realizar las decisiones sobre los símbolos.

A diferencia de LMS, la regla de adaptación de CMA (6.155) no requiere especificar un retardo global d , de forma que no es posible determinar a priori el valor de dicho retardo asociado al igualador, una vez que CMA ha convergido. De hecho, a diferencia de J_d (la cual presenta un único mínimo), la función de coste J_{CM} presenta en general varios mínimos, los cuales suelen estar próximos a los igualadores MSE $w_{d,MSE}$ asociados a los distintos valores de d . Debido a esto, CMA convergerá al mínimo local más próximo al valor inicial $w[0]$, que puede estar asociado a un retardo con un elevado error cuadrático medio (recuérdese que el valor del retardo puede afectar significativamente a las prestaciones del igualador, como se muestra en la Figura 6.12). Dado que el único tipo de control que se puede ejercer sobre el retardo final obtenido por CMA es mediante la inicialización del igualador, esta es extremadamente importante. Una práctica común, denominada *inicialización de púa central*, consiste en comenzar con un simple retardo de $\lfloor \frac{K_w}{2} \rfloor$ muestras:

$$w[k; 0] = \begin{cases} 1, & k = \lfloor \frac{K_w}{2} \rfloor \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (6.157)$$

La razón es que CMA tiende a converger a igualadores con el mismo retardo asociado al valor inicial. Dado que los valores en el centro del rango de retardos suelen proporcionar prestaciones aceptables (de nuevo nos remitimos al ejemplo de la Figura 6.12), la estrategia de inicialización de púa central suele ser satisfactoria.

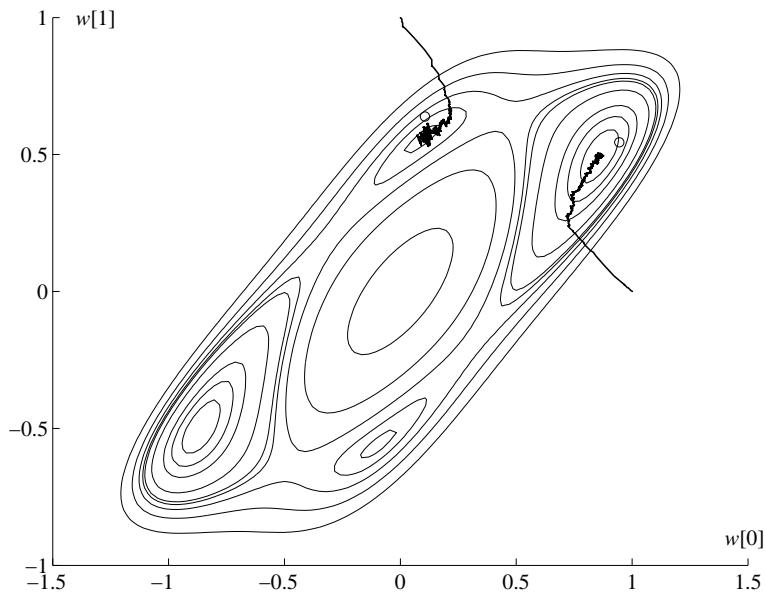


Figura 6.27. Evolución de los coeficientes del igualador con el algoritmo CMA para dos inicializaciones distintas. Los círculos señalan los igualadores MSE correspondientes a los retardos globales $d = 1$ y $d = 2$.

Ejemplo 6.23

En la Figura 6.27 se representan las líneas de J_{CM} constante para el canal del Ejemplo 6.22 y un igualador de dos coeficientes. Estas líneas de contorno ya no son elipses, a diferencia de lo que ocurría con el error cuadrático medio. De hecho, para este canal J_{CM} presenta cuatro mínimos distintos. Dos de ellos se encuentran próximos a los igualadores MSE $\mathbf{w}_{d,MSE}$ para $d = 1$ y $d = 2$. Cambiando estos de signo, obtenemos los otros dos mínimos. Esto se debe a que, como se ha dicho, J_{CM} es insensible a rotaciones de fase en la salida del igualador (para coeficientes reales, la única rotación de fase posible es de π radianes). Otra característica de J_{CM} que se puede observar es la presencia de un *máximo* en $\mathbf{w} = \mathbf{0}$. Esta propiedad no es exclusiva de este entorno, sino que es general, aunque no lo demostraremos (véase también el Problema P6.25).

También se muestran en la Figura 6.27 las trayectorias del algoritmo CMA para dos diferentes inicializaciones de púa para el igualador ($W(z) = 1$ y $W(z) = z^{-1}$), ilustrando la importancia de la inicialización en las prestaciones obtenidas. Con un igualador inicial $W(z) = 1$, CMA converge al mínimo local próximo a $\mathbf{w}_{1,MSE}$, que no es capaz de abrir el ojo a su salida. Para un filtro inicial $W(z) = z^{-1}$, la convergencia es al mínimo cercano a $\mathbf{w}_{2,MSE}$, resultando en un ojo abierto.

6.8. LECTURAS ADICIONALES

El problema que supone la interferencia entre símbolos para la correcta recuperación de la información transmitida ha tenido un papel clave en el diseño de los receptores desde hace ya más de cuarenta años, con los primeros módems telefónicos; así, la bibliografía sobre este

tema es bastante extensa. Los textos de Barry, Lee y Messerschmitt [5] y Proakis [61] son buenas referencias generales. A. Viterbi propuso inicialmente su hoy famoso algoritmo para la decodificación de códigos convolucionales en [90]; pocos años después, G. Forney lo aplicó al problema de detección ML de secuencias con ISI en [32].

El igualador fraccionario y la estructura con realimentación de decisiones fueron propuestos a principios de los setenta [84], [52]. La principal motivación inicial de la estructura fraccionaria fue su robustez frente a errores de sincronización, aunque más recientemente ha habido un interés renovado por estas estructuras en relación con el problema de igualación ciega. El artículo [82] proporciona una buena introducción práctica a los igualadores fraccionarios. Por otro lado, el igualador DFE se analiza en profundidad en el estudio general [6].

La aplicación del algoritmo LMS, que había sido propuesto inicialmente por B. Widrow [93] en un contexto más general, al problema de la adaptación del igualador lineal se debe a R. Lucky. Desde entonces han aparecido numerosos algoritmos para este propósito: S. Qureshi proporciona una buena visión general en el artículo tutorial [64], donde se discute también la adaptación de igualadores con realimentación de decisiones y fraccionarios. Algunas excelentes referencias sobre filtrado adaptativo son el texto de Haykin [40] y el ya citado libro de Widrow y Stearns [93].

El algoritmo CMA, propuesto originalmente por D. Godard en [33], es quizá el método de igualación ciega con más éxito. En [15] se puede encontrar una excelente introducción a las propiedades y características de CMA, mientras que [83] proporciona una visión práctica del diseño y funcionamiento de un receptor ciego.

PROBLEMAS

P6.1 Demuestre que si para una cierta constelación el nivel de ISI (6.6) del canal discreto equivalente cumple $\gamma_{ISI} < 1$, entonces en ausencia de ruido un decisor símbolo a símbolo no comete errores (Ayuda: la desigualdad triangular establece que $|\sum_k x_k| \leq \sum_k |x_k|$ para cualesquiera números complejos x_k).

P6.2 Un sistema de comunicaciones en banda base utiliza la modulación BPSK, con energía media por símbolo E_s . La respuesta impulsional del canal discreto equivalente es $p[n] = \delta[n] + \beta\delta[n - 1]$, con β real y $|\beta| < 1$.

- 2.1. Suponga que los símbolos transmitidos son equiprobables e independientes. Calcule la expresión de la probabilidad de error de símbolo en función de E_s/N_0 y β cuando se emplea un decisor símbolo a símbolo.
- 2.2. A partir de dicha expresión, concluya que en este sistema el efecto de la ISI es aproximadamente equivalente a una reducción en la relación señal a ruido efectiva de $20 \log(1 - |\beta|)$ dB con respecto al caso en que no hay ISI.

P6.3 En el Cuadro 6.1 se observa que para las constelaciones allí enumeradas el parámetro de robustez frente a la ISI η , definido en (6.7), cumple $\eta \leq 1$.

- 3.1. Demuestre que esta propiedad se cumple para cualquier constelación de M símbolos complejos.
- 3.2. Demuestre que $\eta = 1$ únicamente para una constelación BPSK.
- 3.3. Halle η en función de M para las constelaciones M -PAM y M -PSK. Para un M dado, ¿cuál de estas constelaciones es más robusta frente a la ISI?
- P6.4 Demuestre que si p, q , son dos vectores dados, entonces minimizar la norma $\|q - ap\|^2$ con respecto a a sobre un subconjunto del plano complejo es equivalente a minimizar $|q_f - a|^2$ sobre dicho subconjunto, donde $q_f = p^H q / \|p\|^2$.
- P6.5 Considere el modelo $q = Ap + z$ en el que se transmite un mismo símbolo A por $K + 1$ canales distintos, libres de ISI, donde p es el vector que recoge las amplitudes de dichos canales y las componentes de z son variables aleatorias gausianas independientes, circularmente simétricas, de media cero e idéntica varianza σ_z^2 . Si formamos el estadístico $x = g^H q$ como una combinación lineal de las observaciones, ¿cuál es el vector g que maximiza la relación señal a ruido en x ? ¿Es única la solución? ¿Cuál es la relación señal a ruido resultante? (Ayuda: la desigualdad de Schwarz establece que para dos vectores cualesquiera v, w , se tiene $|v^H w| \leq \|v\| \cdot \|w\|$, y la igualdad se satisface si y sólo si v y w son colineales, esto es, si $w = \alpha v$ para algún escalar α).
- P6.6 Demuestre la propiedad enunciada en la Página 317 referida a las métricas acumuladas. Para ello, considere el camino \tilde{a} tal que \tilde{a} coincide con a' antes de la etapa m -ésima del diagrama de rejilla, y con \hat{a} después de dicha etapa. ¿Qué ocurre con \tilde{a} si (6.23) no se satisface?
- P6.7 Considere el Ejemplo 6.6 de aplicación del algoritmo de Viterbi, ilustrado en la Figura 6.5. Obtenga las decisiones producidas por una versión truncada del algoritmo, usando $d_v = 1$. ¿Coinciden estas decisiones con las de la versión no truncada? Repita el proceso para el caso extremo de una profundidad de truncamiento $d_v = 0$. ¿Existe alguna diferencia con respecto a un decisor sin memoria basado en la distancia euclídea?
- P6.8 Observe que en los cálculos del algoritmo de Viterbi truncado con $d_v = 2$ del Ejemplo 6.7, en la etapa n no todos los caminos iniciales comparten la misma rama correspondiente a la etapa $n - d_v = 0$. Repita los cálculos usando una profundidad de truncamiento $d_v = 3$ y compruebe si en tal caso se comparten o no.
- P6.9 La rejilla de la Figura 6.3 puede descomponerse en cuatro “subrejillas” disjuntas, cada una de las cuales conecta dos nodos en el instante n con otros dos nodos en el instante $n + 1$ (por ejemplo, una de estas subrejillas está dada por los nodos $(---)$ y $(-+-)$ en el instante n , y los nodos $(---$) y $(+-)$ en el instante $n + 1$). Estas celdas o subrejillas disjuntas reciben el nombre de *mariposas*.

Considere el caso general en el que la constelación tiene M elementos y la memoria del canal es K , de forma que la rejilla tiene M^K estados.

- 9.1. Defina formalmente una mariposa estableciendo las propiedades de sus nodos de entrada y de salida.
- 9.2. ¿Cuántos nodos de entrada y de salida posee cada mariposa?
- 9.3. ¿Cuántas mariposas posee la rejilla?

La importancia de esta división de la rejilla en mariposas es que, al ser disjuntas, las operaciones requeridas por el algoritmo de Viterbi pueden ejecutarse en paralelo, es decir, cada mariposa puede implementarse de forma independiente de y simultánea a las demás. La unidad de cálculo que realiza las operaciones asociadas a una mariposa se denomina ACS (“Add-Compare-Select”).

- P6.10 ¿Cuál es la longitud mínima de cualquier suceso erróneo para un diagrama de rejilla correspondiente a una constelación de M símbolos y un canal con memoria K ?
- P6.11 Suponga que para una constelación con mínima distancia entre elementos d_{min} y un canal $p[n]$ con energía $\|p\|^2 = \sum_{k=0}^K |p[k]|^2$ dados, el diagrama de rejilla es tal que existe un suceso erróneo $e = (\psi, \hat{\psi})$ induciendo un único error de símbolo, y tal que dicho error ocurre entre dos símbolos de la constelación separados d_{min} . Demuestre que para dicho suceso erróneo se verifica $d(\psi, \hat{\psi}) = d_{min} \cdot \|p\|$. ¿Podemos concluir que $D_{min} = d_{min} \cdot \|p\|$?
- P6.12 Considere la transmisión de símbolos binarios $\{-1, +1\}$ por el canal $p[n] = 0,5\delta[n] - 0,5\delta[n-1] + 0,8\delta[n-2]$.
- 12.1. Dibuje el diagrama de rejilla etiquetando cada rama con la métrica correspondiente.
 - 12.2. Dibuje el diagrama de rejilla asociado a la constelación de errores $\{-2, 0, +2\}$.
 - 12.3. Determine los sucesos erróneos con mínima distancia. ¿Cuál es el valor de D_{min} ?
 - 12.4. ¿Cuál es el incremento en relación señal a ruido ΔSNR con respecto a un canal sin ISI?
- P6.13 Determine la función de autocorrelación $R_q[m] = E\{q^*[n]q[n+m]\}$ de las muestras de la señal recibida $q[n]$. A partir del modelo del canal discreto equivalente (6.3),
- 13.1. Demuestre que

$$R_q[n] = E_s \cdot \sum_{k=0}^K p[k+n]p^*[k] + \sigma_z^2 \delta[n]$$

- 13.2. ¿Concuerda esto con la expresión (6.60) de la matriz de autocorrelación?
- 13.3. Tomando Transformadas Z en la expresión anterior, demuestre que la densidad espectral de potencia de la señal recibida es

$$S_q(z) = P(z)P^*(1/z^*) + \sigma_z^2$$

donde $P(z)$ es la Transformada Z del canal discreto equivalente. Concluya que $S_q(e^{j\omega}) = |P(e^{j\omega})|^2 + \sigma_z^2$.

- P6.14 Para un canal discreto equivalente $p[n]$ de orden K y un igualador lineal $w[n]$ de orden K_w , el canal global $c[n] = w[n] * p[n]$ tiene orden $K + K_w$. En este problema demostraremos que el diseño del igualador ZF mediante (6.64) resulta en un canal global para el que su “distancia euclídea” a un impulso $\delta[n - d]$, dada por

$$\sum_{n=0}^{K+K_w} |c[n] - \delta[n - d]|^2 \quad (6.158)$$

es mínima. Nótese que $\delta[n - d]$ representa una respuesta completamente libre de ISI.

- 14.1. Siendo \mathbf{c} el vector de coeficientes del canal global, demuestre que $\mathbf{c} = \mathbf{Pw}$, donde \mathbf{P} es la matriz de convolución del canal $p[n]$, cuya traspuesta se introdujo en (6.54). Concluya que la suma (6.158) puede reescribirse como $\|\boldsymbol{\nu}_d - \mathbf{Pw}\|^2$.
- 14.2. Escriba esta norma como $\|\boldsymbol{\nu}_d - \mathbf{Pw}\|^2 = (\boldsymbol{\nu}_d - \mathbf{Pw})^H(\boldsymbol{\nu}_d - \mathbf{Pw})$ y desarrolle esta expresión.
- 14.3. Compruebe que se verifica

$$\|\boldsymbol{\nu}_d - \mathbf{Pw}\|^2 = [1 - \boldsymbol{\nu}_d^H \mathbf{P}(\mathbf{P}^H \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}^H \boldsymbol{\nu}_d] + \|\mathbf{P}[\mathbf{w} - (\mathbf{P}^H \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}^H \boldsymbol{\nu}_d]\|^2 \quad (6.159)$$

- 14.4. Observe que el primer sumando en (6.159) no depende de \mathbf{w} . Concluya que el vector \mathbf{w} que minimiza (6.158) es $\mathbf{w}_{d,\text{ZF}}$, dado por (6.64).
- 14.5. Demuestre que el valor mínimo de (6.158), obtenido mediante $\mathbf{w}_{d,\text{ZF}}$, es el elemento $(d + 1)$ -ésimo de la diagonal de la matriz $\mathbf{I} - \mathbf{P}(\mathbf{P}^H \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}^H$.

- P6.15 Considere el canal discreto equivalente $p[n] = 0,5\delta[n] + 0,45\delta[n - 1] - 0,45\delta[n - 2]$ de los Ejemplos 6.10 y 6.11.

- 15.1. Con la ayuda de un programa de manipulación numérica, obtenga la respuesta impulsional del igualador ZF bajo el criterio de mínimos cuadrados para $K_w = 15$, $d = 9$ y para $K_w = 20$, $d = 12$, y represente el diagrama de ceros del igualador y del canal global para ambos casos. ¿Qué es lo que observa?
- 15.2. Considere la respuesta impulsional de un sistema lineal e invariante en el tiempo con N ceros equiespaciados sobre una circunferencia de radio $r > 0$ centrada en el origen del plano complejo. Demuestre que la respuesta impulsional $c[n] = \delta[n] - (re^{j\theta})^N \delta[n - N]$, con $\theta \in [0, 2\pi)$, cumple esta propiedad.
- 15.3. Obtenga la función de transferencia $C(e^{j\omega})$ correspondiente a esta respuesta al impulso y demuestre que el valor de la variación pico a pico de $|C(e^{j\omega})|^2$ es

$$\frac{\max_{\omega} |C(e^{j\omega})|^2}{\min_{\omega} |C(e^{j\omega})|^2} = \frac{|1 + r^N|^2}{|1 - r^N|^2} \quad (6.160)$$

A partir de este resultado, concluya que si $r \neq 1$ entonces $|C(e^{j\omega})|^2$ tiende a hacerse plana a medida que el número N de ceros equiespaciados aumenta.

P6.16 Sea $c[n]$ la respuesta impulsional del canal global obtenida con el igualador lineal MSE de orden K_w y retardo d . Demuestre que el valor mínimo de la varianza del error, dado en (6.63), puede escribirse como $(1 - c[d])E_s$. Por tanto, el valor del coeficiente “cursor” del canal global, $c[d]$, es siempre real y menor que la unidad.

P6.17 En el diseño del igualador DFE, suponga que el orden del canal discreto equivalente K , el número de coeficientes del filtro de realimentación K_b , el orden del filtro precursor K_w , y el retardo global d son tales que se tiene $d + K_b > K + K_w$.

17.1. Demuestre que, para un filtro precursor fijo y con coeficientes \mathbf{w} , los coeficientes del filtro de realimentación que minimiza el error cuadrático medio están dados por $\mathbf{b}_{opt}(\mathbf{w}) = E_s^{-1} \cdot E\{\hat{\mathbf{a}}^*[n]\mathbf{a}^T[n]\}\mathbf{P}\mathbf{w}$, donde $\hat{\mathbf{a}}[n]$ y $\mathbf{a}[n]$ son los vectores definidos en (6.74) y (6.77) respectivamente.

17.2. Demuestre que la matriz $E\{\hat{\mathbf{a}}^*[n]\mathbf{a}^T[n]\}$ está dada por

$$E\{\hat{\mathbf{a}}^*[n]\mathbf{a}^T[n]\} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(K+K_w-d) \times (d+1)} & E_s \cdot \mathbf{I}_{K+K_w-d} \\ \mathbf{0}_{(d+K_b-K-K_w) \times (d+1)} & \mathbf{0}_{(d+K_b-K-K_w) \times (K+K_w-d)} \end{bmatrix}$$

17.3. ¿Cuál es el valor de los últimos $(d + K_b) - (K + K_w)$ coeficientes del filtro de realimentación óptimo? ¿Cómo interpreta este resultado en términos de cancelación de ISI postcursora, en vista de la Figura 6.15?

17.4. Concluya que el error cuadrático medio obtenido no varía si el número de coeficientes del filtro de realimentación se reduce a $K'_b = K + K_w - d < K_b$.

P6.18 Considere el diseño del igualador DFE bajo el criterio MSE. Suponga que el orden K_b del filtro de realimentación se escoge igual al orden del canal discreto equivalente: $K_b = K$. En tal caso, la condición (6.82) $d + K_b \leq K + K_w$ se reduce a $d \leq K_w$.

18.1. Demuestre que en tal caso ($K_b = K$ y $d \leq K_w$) la matriz $\mathbf{D}_d^T \mathbf{P}$ admite la siguiente partición:

$$\mathbf{D}_d^T \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{L} & \mathbf{0}_{(d+1) \times (K_w-d)} \\ \mathbf{0}_{K \times (d+1)} & \mathbf{0}_{K \times (K_w-d)} \\ \mathbf{0}_{(K_w-d) \times (d+1)} & \mathbf{U} \end{bmatrix}$$

donde \mathbf{L} es una matriz cuadrada triangular inferior tamaño $d + 1$, y \mathbf{U} es una matriz cuadrada triangular superior de tamaño $K_w - d$.

18.2. Demuestre que los últimos $K_w - d$ coeficientes del vector $\mathbf{P}^H \boldsymbol{\nu}_d$ son cero.

18.3. Utilizando los resultados anteriores y en vista de (6.91), demuestre que los últimos $K_w - d$ coeficientes del filtro precursor del DFE son iguales a cero.

18.4. Concluya que el error cuadrático medio obtenido no varía si el número de coeficientes del filtro precursor se reduce a $K'_w = d \leq K_w$. ¿Cómo interpreta este resultado en términos de cancelación de ISI postcursora?

- 18.5. De este resultado, junto con el del Problema P6.17, deduzca que no se obtiene reducción alguna del error cuadrático medio incrementando el orden K_b del filtro de realimentación más allá del orden K del canal discreto equivalente.
- P6.19 Considere el modelo (6.96) para la salida del filtro adaptado muestreada a periodo $T/2$. Demuestre que en el modelo matricial $\mathbf{q}_s[n] = \mathbf{P}_s^T \mathbf{a}[n] + \mathbf{z}_s[n]$ para el vector $\mathbf{q}_s[n]$ definido en (6.101), la fila m -ésima de la matriz \mathbf{P}_s^T para $m = 1, \dots, 2(K_w+1)$, está dada por
- $$\begin{aligned} & [0, \underbrace{\dots, 0}_{k-1}, p_s[0], p_s[2], \dots, p_s[2K], \underbrace{0, \dots, 0}_{K_w-k+1}], \quad \text{para } m = 2k - 1 \\ & [0, \underbrace{\dots, 0}_k, p_s[1], p_s[3], \dots, p_s[2K-1], \underbrace{0, \dots, 0}_{K_w-k}], \quad \text{para } m = 2k \end{aligned}$$
- P6.20 Sea $n(t)$ el ruido aditivo en el canal, y sea $z(t)$ el proceso obtenido al pasar $n(t)$ por el filtro receptor $f(t)$.
- 20.1. Calcule la función de autocorrelación de $z(t)$, $R_z(\tau)$, suponiendo que la densidad espectral de potencia de $n(t)$ es $S_n(j\omega) = N_0/2$ W/Hz.
 - 20.2. Suponga que $f(t)$ es un pulso en raíz de coseno alzado con factor de caída α . Considere el proceso $z_s[n] = z(nT/2)$ obtenido al muestrear $z(t)$ con periodo $T_s = T/2$. ¿Es $z_s[n]$ un proceso blanco?
 - 20.3. Calcule la matriz de autocorrelación del vector $\mathbf{z}_s[n]$ de las muestras de ruido, dado por $\mathbf{z}_s[n] = [z_s[2n], z_s[2n-1], \dots, z_s[2n-2K_w-1]]^T$.
- P6.21 En este problema se obtiene una expresión para la relación entre los valores asintóticos del error cuadrático medio mínimo correspondientes a los igualadores lineal y con realimentación de decisiones.
- 21.1. Sean $e_{lin}[n]$ y $e_{df[e]}[n]$ los errores de igualación obtenidos con los esquemas óptimos lineal y DFE respectivamente. Partiendo de (6.120), halle el filtro causal y estable $G(z)$ con respuesta impulsional $g[n]$ tal que $e_{lin}[n] = g[n] * e_{df[e]}[n]$.
 - 21.2. A partir del resultado anterior, obtenga la relación entre las varianzas $\xi_{lin} = E\{|e_{lin}[n]|^2\}$, $\xi_{df[e]} = E\{|e_{df[e]}[n]|^2\}$ en función del filtro de realimentación B (Ayuda: $e_{df[e]}[n]$ es un proceso blanco).
 - 21.3. Concluya que $\xi_{lin}/\xi_{df[e]} \geq 1$, con igualdad si y sólo si el filtro de realimentación óptimo es $B(z) = 0$.
- P6.22 La desigualdad de Jensen (véase el Apéndice 9.B) establece que para toda variable aleatoria X y toda función cóncava f definida sobre el rango de X , se tiene $E\{f(X)\} \leq f(E\{X\})$.
- 22.1. Utilice la concavidad de la función logaritmo para demostrar que $E\{\ln g(X)\} \leq \ln E\{g(X)\}$ para toda función no negativa g y toda variable aleatoria X .

- 22.2. Particularizando al caso en el que X está uniformemente distribuida en $[-\pi, \pi]$, demuestre la desigualdad entre las medias geométrica y aritmética de g :

$$\exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln g(\omega) d\omega \right\} \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\omega) d\omega$$

- 22.3. Verifique que la igualdad se cumple si g es constante en $[-\pi, \pi]$.

- P6.23 En este problema se extiende el diseño LS del igualador, basado en símbolos de entrenamiento, al esquema con realimentación de decisiones. La expresión del error de igualación para un esquema DFE con retardo global d es

$$e_d[n] = A[n-d] - \sum_{k=0}^{K_w} w[k]q[n-k] + \sum_{k=1}^{K_b} b[k]\hat{A}[n-d-k]$$

- 23.1. Generalice (6.134) a esta configuración para obtener un modelo de la forma $e_d = a_d - Qw + \hat{A}_d b$, donde w y b son los vectores con los coeficientes del filtro precursor y de realimentación respectivamente. La matriz \hat{A}_d está formada por decisiones previas, que podemos suponer correctas; por tanto, \hat{A}_d puede construirse a partir de los símbolos de entrenamiento.
- 23.2. Demuestre que para un filtro precursor dado, el filtro de realimentación que minimiza $\|e_d\|^2$ es $b_{d,LS} = -(\hat{A}_d^H \hat{A}_d)^{-1} \hat{A}_d^H (a_d - Qw)$.
- 23.3. Con este filtro de realimentación, demuestre que el vector de error puede escribirse como $e_d = G_d(a_d - Qw)$, donde $G_d \doteq I - \hat{A}_d(\hat{A}_d^H \hat{A}_d)^{-1} \hat{A}_d^H$.
- 23.4. Demuestre que el filtro precursor que minimiza $\|e_d\|^2$ está dado por $w_{d,LS} = (Q^H G_d Q)^{-1} Q G_d a_d$.

- P6.24 Dada una matriz R de tamaño $n \times n$ simétrica y real, se define la *forma cuadrática* asociada a R como la función $f(v) = v^T R v$, con $v \in \mathbb{R}^n$. Se dice que R es *definida positiva*, lo que se denota mediante $R > 0$, si se tiene $f(v) > 0$ para todo $v \neq 0$.

- 24.1. Demuestre que el gradiente, esto es, el vector de derivadas, de $f(v)$ con respecto a v es $\nabla f(v) = 2Rv$.
- 24.2. Demuestre que si $R > 0$, el único punto en el que $\nabla f(v)$ se anula es $v = 0$. Concluya que este punto es el único mínimo de $f(v)$.
- 24.3. Considere la matriz de autocorrelación $R = E\{q^*[n]q^T[n]\}$ que aparece en (6.147). Utilizando el modelo (6.54) para el vector $q[n]$, calcule R en función de la matriz de convolución del canal P , la energía media por símbolo E_s y la varianza del ruido σ_z^2 . Demuestre que R es definida positiva.
- 24.4. Concluya que, en el caso real, la función de coste (6.147) posee un único mínimo en $w = w_{d,MSE}$ (esto es también cierto en el caso complejo).

- P6.25 Suponga que en la adaptación del igualador mediante CMA, dada por (6.155), se elige la inicialización $w[0] = 0$ para el vector de coeficientes. ¿Puede predecir la evolución de $w[n]$ para $n > 0$? ¿Existe este problema con el algoritmo LMS?

APÉNDICES

6.A. PROBABILIDAD DE ERROR DE SÍMBOLO DEL DETECTOR ML

Procederemos aquí a demostrar la expresión de la probabilidad de error de símbolo del detector ML dada por (6.27). Considérese la etapa n del diagrama de rejilla, y denotemos por $P_e[n]$ la probabilidad de que el símbolo decidido en el instante n por el detector ML sea erróneo. Para que esto ocurra, es preciso que haya habido un suceso erróneo. Para cualquier suceso erróneo e , definamos la variable

$$\alpha_n(e) \doteq \begin{cases} 1 & \text{si } e \text{ produce un símbolo erróneo en la etapa } n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Así, la probabilidad de que se haya producido un símbolo erróneo en el instante n causado por un suceso erróneo e es $\alpha_n(e)Pr\{e\}$, y por tanto,

$$P_e[n] = \sum_{e \in \mathcal{E}} \alpha_n(e)Pr\{e\} \quad (6.161)$$

donde \mathcal{E} es el conjunto de todos los sucesos erróneos. Nótese que podemos escribir $\mathcal{E} = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_k$, donde \mathcal{E}_k es el conjunto de sucesos erróneos comenzando en la etapa k de la rejilla. Dado que los \mathcal{E}_k son disjuntos, (6.161) resulta en

$$P_e[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{e_k \in \mathcal{E}_k} \alpha_n(e_k)Pr\{e_k\} \quad (6.162)$$

Observemos ahora que el conjunto de sucesos erróneos comenzando en una etapa dada es numerable, de forma que podemos escribir $\mathcal{E}_k = \{e_k^{(m)}, m = 0, 1, 2, \dots\}$. Así,

$$P_e[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_n(e_k^{(m)}) Pr\{e_k^{(m)}\} \quad (6.163)$$

Suponiendo que el número de símbolos transmitidos, L , es suficientemente grande, podemos suponer que las características de los sucesos erróneos son estacionarias. En particular, podemos establecer una correspondencia uno a uno entre los elementos de los conjuntos \mathcal{E}_{k_1} y \mathcal{E}_{k_2} , de forma que $e_{k_2}^{(m)}$ se obtiene de $e_{k_1}^{(m)}$ sin más que desplazarlo de la etapa k_1 a la etapa k_2 . Nuestra hipótesis de estacionariedad implica entonces que, para todo k_1, k_2 ,

$$Pr(e_{k_2}^{(m)}) = Pr(e_{k_1}^{(m)}), \quad \alpha_n(e_{k_1}^{(m)}) = \alpha_{n-k_1+k_2}(e_{k_2}^{(m)}) \quad (6.164)$$

Aplicando estas propiedades en (6.163),

$$\begin{aligned} P_e[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{n-k}(e_0^{(m)}) Pr(e_0^{(m)}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_i(e_0^{(m)}) Pr(e_0^{(m)}) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} Pr(e_0^{(m)}) \underbrace{\sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i(e_0^{(m)})}_{=w(e_0^{(m)})} = \sum_{e \in \mathcal{E}_0} w(e)Pr\{e\} \end{aligned} \quad (6.165)$$

que es (6.27). Obsérvese que (6.165) no depende de n , es decir, $P_e[n] = P_e$ para todo n . Esto, naturalmente, es una consecuencia de la hipótesis de estacionariedad. También podemos observar que (6.165) es el valor medio del número de símbolos incorrectos inducidos por los sucesos de error que comienzan en una etapa determinada de la rejilla.

6.B. ESTIMACIÓN LINEAL ÓPTIMA

El problema de la estimación lineal óptima puede plantearse informalmente de la siguiente forma. Dado un conjunto de vectores, ¿cuál es la combinación lineal de ellos que mejor aproxima otro vector dado?

En esta formulación general, un “vector” es cualquier elemento de un espacio de Hilbert. El caso más común es el espacio vectorial \mathbb{C}^K con el producto escalar usual, aunque existen múltiples aplicaciones a otros espacios de Hilbert: uno que nos interesa particularmente es el de las variables aleatorias conjuntamente distribuidas, al que volveremos tras presentar la solución al caso general.

Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert sobre el conjunto de los números complejos \mathbb{C} , dotado con el producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (véase Apartado 2.1.4). Dado un conjunto de K vectores $\mathbf{w}_k \in \mathcal{H}$, $k = 1, \dots, K$, y otro vector $\mathbf{v} \in \mathcal{H}$, el problema es el siguiente: determinar los escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_K$ de forma que el estimador $\hat{\mathbf{v}} \doteq \alpha_1 \mathbf{w}_1 + \dots + \alpha_K \mathbf{w}_K$ minimice la norma del error resultante $\|\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}\|^2$.

Podemos desarrollar la norma de este error para obtener

$$\|\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}\|^2 = \langle \mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}, \mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}} \rangle = \|\mathbf{v}\|^2 - \langle \hat{\mathbf{v}}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{v}} \rangle + \|\hat{\mathbf{v}}\|^2 \quad (6.166)$$

El primer sumando, $\|\mathbf{v}\|^2$, no depende de los escalares α_k . Los otros términos están dados por

$$\langle \hat{\mathbf{v}}, \mathbf{v} \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^K \alpha_k \mathbf{w}_k, \mathbf{v} \right\rangle = \sum_{k=1}^K \alpha_k \langle \mathbf{w}_k, \mathbf{v} \rangle \quad (6.167)$$

$$\|\hat{\mathbf{v}}\|^2 = \left\langle \sum_{k=1}^K \alpha_k \mathbf{w}_k, \sum_{l=1}^K \alpha_l \mathbf{w}_l \right\rangle = \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^K \alpha_k \alpha_l^* \langle \mathbf{w}_k, \mathbf{w}_l \rangle \quad (6.168)$$

Definiendo el vector $\boldsymbol{\alpha} \doteq [\alpha_1 \ \dots \ \alpha_K]^T$, estos términos pueden expresarse de forma compacta como

$$\langle \hat{\mathbf{v}}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{c}^H \boldsymbol{\alpha}, \quad \|\hat{\mathbf{v}}\|^2 = \boldsymbol{\alpha}^H \mathbf{R} \boldsymbol{\alpha} \quad (6.169)$$

donde el vector \mathbf{c} y la matriz \mathbf{R} están dados por

$$\mathbf{c} \doteq \begin{bmatrix} \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_1 \rangle \\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_K \rangle \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} \doteq \begin{bmatrix} \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle & \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{w}_K, \mathbf{w}_1 \rangle \\ \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle & \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{w}_K, \mathbf{w}_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_K \rangle & \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_K \rangle & \cdots & \langle \mathbf{w}_K, \mathbf{w}_K \rangle \end{bmatrix} \quad (6.170)$$

Así, la norma del error de aproximación (6.166) puede escribirse como

$$\|\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 - \mathbf{c}^H \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}^H \mathbf{c} + \boldsymbol{\alpha}^H \mathbf{R} \boldsymbol{\alpha} \quad (6.171)$$

Para hallar el vector $\boldsymbol{\alpha}$ óptimo vamos a manipular ligeramente esta expresión. Sustituimos $\mathbf{c}^H \boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\alpha}^H \mathbf{c}$ en (6.171) por $\mathbf{c}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R} \boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\alpha}^H \mathbf{R} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{c}$, respectivamente:

$$\|\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 - \mathbf{c}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R} \boldsymbol{\alpha}^H - \boldsymbol{\alpha}^H \mathbf{R} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{c} + \boldsymbol{\alpha}^H \mathbf{R} \boldsymbol{\alpha} \quad (6.172)$$

y añadamos la cantidad $\mathbf{c}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{c} - \mathbf{c}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{c}$ (la cual es igual a cero), para obtener

$$\|\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}\|^2 = (\|\mathbf{v}\|^2 - \mathbf{c}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{c}) - \mathbf{c}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R} \boldsymbol{\alpha}^H \quad (6.173)$$

$$\begin{aligned} & - \boldsymbol{\alpha}^H \mathbf{R} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{c} + \boldsymbol{\alpha}^H \mathbf{R} \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{c}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{c} \\ & = (\|\mathbf{v}\|^2 - \mathbf{c}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{c}) + (\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{R}^{-1} \mathbf{c})^H \mathbf{R} (\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{R}^{-1} \mathbf{c}). \end{aligned} \quad (6.174)$$

Observamos que el primer sumando en (6.174) no depende de los coeficientes α_k . El segundo término es no negativo, puesto que \mathbf{R} es una matriz hermética y definida positiva¹⁴, como el lector puede comprobar usando las propiedades del producto escalar, si se supone que los vectores $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_K$ son linealmente independientes.

Por ello, está claro que $\|\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}\|^2$ será mínima si se toma $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_{opt} \doteq \mathbf{R}^{-1} \mathbf{c}$. Los coeficientes óptimos $\boldsymbol{\alpha}_{opt} = [\alpha_{opt,1} \ \cdots \ \alpha_{opt,K}]^T$ son, por tanto, la solución de las denominadas *ecuaciones normales*

$$\mathbf{R} \boldsymbol{\alpha}_{opt} = \mathbf{c} \quad (6.175)$$

El valor mínimo de la norma del error que resulta es

$$\|\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}_{opt}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 - \mathbf{c}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{c} = \|\mathbf{v}\|^2 - \boldsymbol{\alpha}_{opt}^H \mathbf{R} \boldsymbol{\alpha}_{opt} \quad (6.176)$$

Una importante propiedad del estimador óptimo $\hat{\mathbf{v}}_{opt} = \alpha_{opt,1} \mathbf{w}_1 + \cdots + \alpha_{opt,K} \mathbf{w}_K$, que el lector puede comprobar, es que el error resultante es ortogonal a todos los vectores \mathbf{w}_k , propiedad conocida como *principio de ortogonalidad* o *Teorema de la proyección*:

$$\langle \mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}_{opt}, \mathbf{w}_k \rangle = 0, \quad k = 1, \dots, K \quad (6.177)$$

Su interpretación geométrica se muestra en la Figura 6.28. Dado que el estimador de \mathbf{v} se construye como combinación lineal de los \mathbf{w}_k , la norma del error será mínima cuando dicho estimador es la proyección de \mathbf{v} sobre el subespacio generado por $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_K$.

La *estimación lineal de mínima varianza* constituye una aplicación importante de lo expuesto. El conjunto de variables aleatorias complejas conjuntamente distribuidas, con el producto escalar $\langle x, y \rangle \doteq E\{xy^*\}$, constituye un espacio de Hilbert, como el lector puede comprobar fácilmente. Sean $v \in \mathbb{C}$, $\mathbf{w} = [w_1 \ \cdots \ w_K]^T \in \mathbb{C}^{K \times 1}$ variables aleatorias

¹⁴ $\mathbf{R} \in \mathbb{C}^{K \times K}$ es hermética si cumple $\mathbf{R} = \mathbf{R}^H$; en tal caso, $\mathbf{x}^H \mathbf{R} \mathbf{x}$ es real para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^K$. \mathbf{R} es definida positiva si además $\mathbf{x}^H \mathbf{R} \mathbf{x} > 0$ para todo $\mathbf{x} \neq 0$.

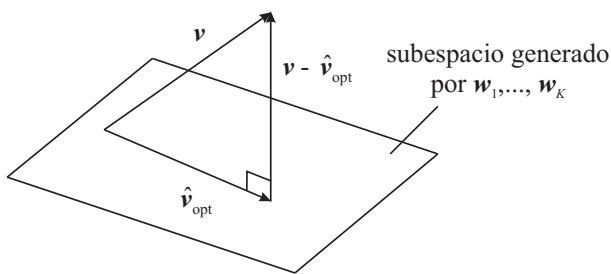


Figura 6.28. Principio de ortogonalidad. El error del estimador lineal óptimo es ortogonal al subespacio generado por los vectores sobre los que se basa la estimación.

conjuntamente distribuidas, ambas de media cero¹⁵. A menudo es preciso obtener una estimación del valor de v a partir de la observación de w . Una posible forma de hacerlo consiste en plantear un estimador \hat{v} lineal, dado por $\hat{v} = \boldsymbol{\alpha}^T w = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_K w_K$.

El *estimador lineal de mínima varianza* se define como aquél para el cual el valor cuadrático medio¹⁶ del error de estimación, $E\{|v - \hat{v}|^2\}$, es mínimo. Este error cuadrático puede expresarse como

$$E\{|v - \hat{v}|^2\} = E\{(v - \hat{v})(v - \hat{v})^*\} = \langle v - \hat{v}, v - \hat{v} \rangle = \|v - \hat{v}\|^2$$

por lo que el problema es un caso particular de la formulación general expuesta. En vista de nuestro desarrollo precedente, el vector de coeficientes óptimo es la solución de las ecuaciones normales (6.175), donde el vector c y la matriz R definidos en (6.170) estarán dados ahora por

$$c = E\{w^* v\}, \quad R = E\{w^* w^T\} \quad (6.178)$$

La varianza del error de estimación que se consigue de este modo se obtiene de (6.176):

$$\begin{aligned} E\{|v - \hat{v}_{opt}|^2\} &= E\{|v|^2\} - c^H R^{-1} c \\ &= E\{|v|^2\} - \boldsymbol{\alpha}_{opt}^H E\{w^* w^T\} \boldsymbol{\alpha}_{opt} \end{aligned} \quad (6.179)$$

En este contexto, el principio de ortogonalidad (6.177) se traduce en que el error de estimación se halla *incorrelacionado* con las variables aleatorias w_1, \dots, w_K , es decir, $E\{(v - \hat{v}_{opt}) w_k^*\} = 0$ para $k = 1, \dots, K$.

¹⁵En caso de que v, w no tengan media cero, basta sustituir v por $\bar{v} \doteq v - E\{v\}$ y w por $\bar{w} \doteq w - E\{w\}$, las cuales sí son de media cero.

¹⁶Nótese que $E\{v - \hat{v}\} = E\{v\} - \boldsymbol{\alpha}^T E\{w\} = 0 - \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{0} = 0$, de forma que la varianza del error de estimación coincide con su valor cuadrático medio.

6.C. MINIMIZACIÓN DE LA DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA DEL ERROR DE IGUALACIÓN

En este Apéndice se desarrolla la solución al problema de minimización con respecto a W de una densidad espectral de potencia S_e de la forma

$$S_e = |D - WP|^2 S_A + |W|^2 S_z \quad (6.180)$$

donde S_A y S_z representan respectivamente las densidades espectrales de potencia de los símbolos y del ruido, siendo por tanto reales y positivas. Desarrollando esta expresión,

$$\begin{aligned} S_e &= (D - WP)(D^* - W^*P^*)S_A + |W|^2 S_z \\ &= (|D|^2 + |W|^2|P|^2 - WPD^* - W^*P^*D)S_A + |W|^2 S_z \\ &= (|D|^2 + \rho^2|P|^2 - \rho e^{j\theta}PD^* - \rho e^{-j\theta}P^*D)S_A + \rho^2 S_z \end{aligned} \quad (6.181)$$

donde $\rho \doteq |W|$ y $\theta \doteq \angle W$. Derivando (6.181) con respecto a ρ se obtiene

$$\frac{\partial S_e}{\partial \rho} = 2\rho(|P|^2 S_A + S_z) - (e^{j\theta}PD^* + e^{-j\theta}P^*D)S_A \quad (6.182)$$

la cual se anula para

$$\rho = S_A \frac{e^{j\theta}PD^* + e^{-j\theta}P^*D}{2(|P|^2 S_A + S_z)} \quad (6.183)$$

Por otro lado, derivando (6.181) con respecto a θ se tiene

$$\frac{\partial S_e}{\partial \theta} = S_A(-j\rho e^{j\theta}PD^* + j\rho e^{-j\theta}P^*D) \quad (6.184)$$

que se anulará si $e^{j\theta}PD^* = e^{-j\theta}P^*D$. Sustituyendo esto en (6.183) obtenemos

$$\rho = S_A \frac{e^{-j\theta}P^*D}{|P|^2 S_A + S_z} \quad (6.185)$$

y por tanto el W óptimo está dado por

$$W = \rho e^{j\theta} = \frac{S_A P^* D}{|P|^2 S_A + S_z} \quad (6.186)$$

El valor mínimo de S_e se obtiene sustituyendo (6.186) en (6.180):

$$S_e = \frac{S_A S_z |D|^2}{|P|^2 S_A + S_z} \quad (6.187)$$

6.D. DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE FACTORIZACIÓN ESPECTRAL

Sea $S(z)$ tal que $S(e^{j\omega})$ es real y $0 < S(e^{j\omega}) < S_0$ para todo ω y alguna constante S_0 . En el desarrollo en serie de Fourier $S(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k e^{-jk\omega}$ se verifica $s_k = s_{-k}^*$ para todo k , ya que $S^*(e^{j\omega}) = S(e^{j\omega})$. Por tanto, se tiene $S(z) = S^*(1/z^*)$, lo cual implica que si z_0 es un cero (o un polo) de $S(z)$, entonces su recíproco conjugado $1/z_0^*$ ha de serlo también. Es decir, los polos y ceros de $S(z)$ se presentan en pares de recíprocos conjugados ($z_0, 1/z_0^*$). Sean d_1, \dots, d_M los ceros de $S(z)$ en el interior de la circunferencia unidad, y sean c_1, \dots, c_N los polos de $S(z)$ también en dicho interior. Podemos entonces escribir

$$S(z) = \gamma_S^2 \cdot \underbrace{\frac{\prod_{k=1}^M (1 - d_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - c_k z^{-1})}}_{\doteq 1+F(z)} \cdot \underbrace{\frac{\prod_{k=1}^M (1 - d_k^* z)}{\prod_{k=1}^N (1 - c_k^* z)}}_{=1+F^*(1/z^*)} \quad (6.188)$$

para alguna constante γ_S^2 . Nótese que la función $1 + F(z)$ así construida es causal, estable, y de fase mínima, y que el hecho de que $S(e^{j\omega})$ sea estrictamente positiva y esté acotada implica que $S(z)$ no puede poseer polos ni ceros sobre la circunferencia unidad.

Para calcular el valor de γ_S^2 , observemos que, integrando el logaritmo de (6.188),

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln S(e^{j\omega}) d\omega &= \ln \gamma_S^2 + \sum_{k=1}^M \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |1 - d_k e^{-j\omega}|^2 d\omega \\ &\quad - \sum_{k=1}^N \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |1 - c_k e^{-j\omega}|^2 d\omega \end{aligned} \quad (6.189)$$

Teniendo en cuenta que $\ln |1 - ae^{-j\omega}|^2 = \ln(1 - ae^{-j\omega}) + \ln(1 - a^*e^{j\omega})$ vemos que:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |1 - ae^{j\omega}|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 - ae^{-j\omega}) d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 - a^*e^{j\omega}) d\omega \quad (6.190)$$

Cada una de las dos integrales de la derecha puede verse como una Transformada de Fourier inversa evaluada en $n = 0$. Para calcular la primera integral sea, por tanto, $t_1[n]$ la secuencia cuya Transformada de Fourier $T_1(e^{j\omega})$ es $\ln(1 - ae^{j\omega})$. Derivando con respecto a ω tenemos que

$$\frac{dT_1(e^{j\omega})}{d\omega} = \frac{jae^{-j\omega}}{(1 - ae^{-j\omega})} \quad (6.191)$$

Por otro lado, sabemos que derivar en frecuencia con respecto a ω equivale en el dominio temporal a multiplicar por $-jn$ (véase Página 49). Por tanto, utilizando el Cuadro 2.3 de pares transformados básicos, podemos escribir que

$$-jnt_1[n] = \begin{cases} ja^n, & n > 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (6.192)$$

con lo que

$$t_1[n] = \begin{cases} -\frac{a^n}{n}, & n > 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (6.193)$$

de donde deducimos que $t_1[0] = 0$.

Similares argumentos sirven para demostrar que si $t_2[n]$ denota la Transformada de Fourier inversa de $\ln(1 - a^* e^{j\omega})$, entonces

$$t_2[n] = \begin{cases} -\frac{(a^*)^n}{n}, & n < 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (6.194)$$

de donde, de nuevo, concluimos que $t_2[0] = 0$.

Por tanto, las integrales de la forma (6.190) valen 0, lo que establece la validez de (6.123).

CAPÍTULO 7

MODULACIONES DE FASE Y FRECUENCIA

En este capítulo revisaremos un conjunto de modulaciones que comparte la característica de tener envolvente constante, de modo que la información se transmite (con mayor o menor grado de complejidad) en la fase de la portadora. Ello presenta la ventaja de una mayor inmunidad a las distorsiones no lineales típicas de las etapas de amplificación en radiofrecuencia y de, como veremos, permitir en muchos casos soluciones *incoherentes*, esto es, que no requieren conocer la fase exacta de la portadora de la señal recibida, siempre a costa de una pérdida en prestaciones que en muchas aplicaciones prácticas puede resultar asumible.

Para transmitir la información en la fase, se puede cambiar directamente la fase de la portadora en función de la señal de información o recurrir a esquemas que envían la información en cambios incrementales de fase, pudiendo ser dichos cambios discretos o continuos. En este último caso, la solución más simple consiste en enviar la información en la frecuencia, esto es, en la derivada de la fase instantánea, alternativa que conduce a implementaciones hardware extremadamente sencillas. Por último, veremos cómo la idea de modificar la fase instantánea para modular información se puede generalizar considerablemente en las llamadas modulaciones de fase continua que, incrementando la complejidad del receptor, permiten aumentar la eficiencia espectral.

7.1. MODULACIONES DE FASE

En este apartado nos ocuparemos de una familia de modulaciones paso banda que construyen la señal a transmitir modulando la fase de la portadora de un modo sencillo. Como ya hemos señalado, la modulación de fase es ventajosa cuando el canal incluye efectos no lineales sobre la amplitud, como es el caso de los amplificadores de radiofrecuencia empleados en comunicaciones móviles y vía satélite. Estas no linealidades típicamente tienen la forma de una zona lineal y una saturación. Para obtener el máximo rendimiento del amplificador se desea trabajar lo más cerca posible de la saturación; en el caso de modulaciones

de amplitud esto tiene como consecuencia una notable distorsión (además de un mayor ancho de banda ocupado) que afecta negativamente al rendimiento¹. En cierto modo, todas las modulaciones que estudiaremos se derivan a partir de la PSK (descrita en el Apartado 5.4) y tratan de paliar algunos de sus defectos.

Para conseguir envolvente constante, podríamos partir de la señal PSK definida en (5.69) usando como filtro conformador un pulso rectangular causal de duración T segundos y normalizado en energía, esto es,

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} w_T(t) \quad (7.1)$$

siendo $w_T(t)$ un pulso rectangular causal, que será utilizado a menudo más adelante, por lo que conviene introducir aquí su expresión

$$w_T(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < T \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (7.2)$$

Por desgracia, el precio que pagaríamos por la simplicidad del modulador es la necesidad de un considerable ancho de banda, ya que, bajo la hipótesis de que la secuencia de símbolos equiprobables complejos es blanca con energía media $E_s = E\{|A[n]|^2\}$, y aplicando la Ecuación (5.72) a este caso, la densidad espectral de potencia de la señal en banda base $s(t)$ será

$$S_s(j\omega) = E_s \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right) \quad (7.3)$$

El espectro resultante es una sinc al cuadrado que decrece como $1/\omega^2$, por lo que sus lóbulos secundarios contienen una energía considerable. Esto hace que, en canales limitados en ancho de banda, como puede ser el caso de comunicaciones móviles, su uso –sin más modificaciones– no sea aconsejable. Una forma de razonar el porqué de esa inefficiencia espectral consiste en pensar en los saltos bruscos de fase que se pueden producir cada T segundos. En la Figura 7.1 se representa un fragmento de señal transmitida $x(t)$ con una modulación QPSK con pulsos rectangulares, además de las correspondientes componentes en fase y cuadratura. Para facilitar la visualización, la portadora ha sido desfasada $\pi/4$ radianes. Como podemos observar, los saltos de fase en la portadora de un símbolo al adyacente pueden ser de $\pm 90^\circ$ y 180° : el primer caso se da cuando varía una sola de las componentes, mientras que en el segundo caso el cambio acontece simultáneamente en ambas componentes. Estas discontinuidades de fase son en última instancia las responsables del ancho de banda ocupado.

7.1.1. Modulaciones QPSK con desplazamiento temporal

Una forma obvia de reducir el ancho de banda de la señal transmitida es colocar un filtro paso banda en el transmisor que reduzca la radiación de potencia fuera de la banda

¹Para modulaciones de amplitud la solución es trabajar en la zona lineal para todo el rango de envolventes de entrada, lo que se consigue reduciendo la potencia de salida del amplificador.

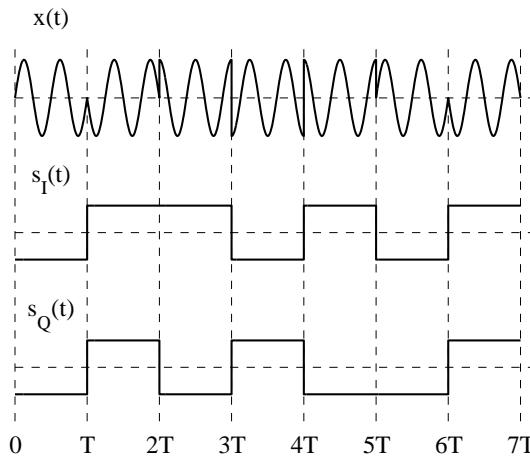


Figura 7.1. Fragmento de una señal QPSK $x(t)$ y componentes en fase $s_I(t)$ y cuadratura $s_Q(t)$.

deseada. Como sabemos, este filtro se podría agrupar con el pulso rectangular $g(t)$ para producir el pulso conformador que efectivamente estamos usando y que, naturalmente, deja de ser el pulso rectangular original. En otras palabras, el proceso de filtrado paso banda va a traer como consecuencia que la señal transmitida deje de tener envolvente constante. En el Problema P7.1 se comprueba cómo los saltos de fase de 180° son muy perjudiciales, ya que dan lugar, tras el filtrado paso banda, a relaciones entre los valores máximo y mínimo de la envolvente que pueden llegar a valer infinito.

Una forma sencilla de evitar los saltos de fase de 180° consiste en no cambiar simultáneamente las partes en fase y cuadratura, lo que se puede conseguir desplazando medio periodo de símbolo la señal en cuadratura con respecto a la componente en fase². Por esta razón, la modulación resultante se denomina QPSK con desplazamiento (“Offset QPSK”, OQPSK). Con esta solución, los saltos de fase ocurren con mayor frecuencia (cada $T/2$ segundos) pero son sólo de $\pm 90^\circ$. Esta circunstancia se ilustra en la Figura 7.2, donde se representa la señal $x(t)$ correspondiente a una modulación OQPSK con pulsos rectangulares. Para facilitar la visualización, la portadora ha sido desfasada $\pi/4$ radianes. Asimismo, se representan las componentes en fase y cuadratura, comprobándose que ahora están desplazadas relativamente $T/2$ segundos.

En el Problema P7.1 se demuestra que la relación entre los valores máximo y mínimo de la envolvente de la señal OQPSK tras un filtrado paso banda es de $\sqrt{2}$, mientras que en la QPSK era infinito.

Formalmente, la señal transmitida en OQPSK es

$$x(t) = \sqrt{2}s_I(t) \cos(\omega_c t) - \sqrt{2}s_Q(t) \sin(\omega_c t) \quad (7.4)$$

siendo $s_I(t)$ y $s_Q(t)$ idénticas a las definidas en (5.56-5.57), adaptadas a este caso (pulsos

²En el Problema P7.6 se presenta otra forma de evitar los saltos de fase de 180° en la que las componentes en fase y en cuadratura cambian simultáneamente.

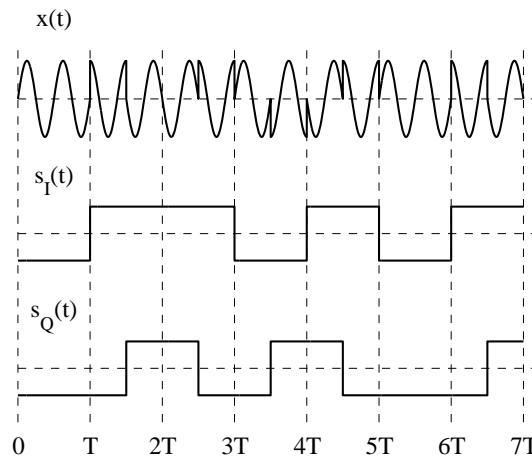


Figura 7.2. Fragmento de una señal OQPSK $x(t)$ y componentes en fase $s_I(t)$ y cuadratura $s_Q(t)$.

rectangulares):

$$s_I(t) = \sum_n \operatorname{Re}\{A[n]\}g(t - nT) \quad (7.5)$$

$$s_Q(t) = \sum_n \operatorname{Im}\{A[n]\}g(t - nT - T/2) \quad (7.6)$$

con $g(t)$ el pulso rectangular introducido en (7.1). Como en la QPSK, si las partes real e imaginaria de los símbolos son independientes, la modulación OQPSK equivale a transmitir con sendas constelaciones binarias antipodales sobre los canales en fase y cuadratura. Teniendo presente que la señal en cuadratura se genera desplazada $T/2$ segundos con respecto a la señal en fase, el modulador enviará entonces los símbolos binarios pares en la componente en fase y los impares sobre la componente en cuadratura, tal como se esquematiza en la Figura 7.3.

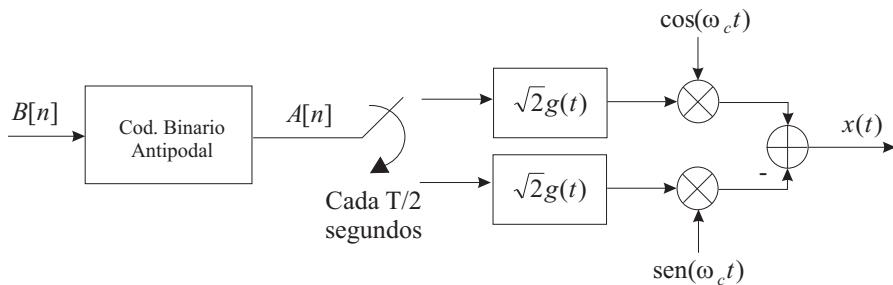


Figura 7.3. Arquitectura de un modulador para OQPSK.

Espectro de la señal OQPSK

La determinación de la densidad espectral de potencia de la señal transmitida OQPSK puede apoyarse en que el espectro total es simplemente la suma de los correspondientes a las partes en fase y cuadratura, si suponemos que los símbolos antipodales transmitidos sobre cada componente están incorrelacionados. Estudiemos primero el espectro de potencia de la parte en fase $x_1(t) \doteq \sqrt{2}s_I(t) \cos(\omega_c t)$, que no es más que una señal PAM-DSB. Denotaremos este espectro por $S_{x1}(j\omega)$. En el Apartado 3.3.8 se demostró que la densidad espectral de potencia de una señal como $x_1(t)$, suponiendo que esta es de banda estrecha, tiene la forma

$$S_{x1}(j\omega) = \frac{1}{2} \{ S_{sI}(j\omega - j\omega_c) + S_{sI}^*(-j\omega - j\omega_c) \} \quad (7.7)$$

siendo $S_{sI}(j\omega)$ el espectro de potencia de $s_I(t)$. El cálculo de $S_{sI}(j\omega)$ es inmediato a partir de la Ecuación (3.297). Así, para una secuencia blanca transmitida sobre el canal en fase, con pulsos $g(t)$ en transmisión, tenemos

$$S_{sI}(j\omega) = \frac{E\{\mathcal{R}e^2\{A[n]\}\}}{T} |G(j\omega)|^2 \quad (7.8)$$

Por otra parte, definiendo $x_2(t) \doteq \sqrt{2}s_Q(t) \sin(\omega_c t)$ podemos calcular su densidad espectral de potencia, que denotamos por $S_{x2}(j\omega)$. Es inmediato ver, adaptando el cálculo del espectro de una señal como (3.364) al caso de una modulación con un seno, que

$$S_{x2}(j\omega) = \frac{1}{2} \{ S_{sQ}(j\omega - j\omega_c) + S_{sQ}^*(-j\omega - j\omega_c) \} \quad (7.9)$$

siendo $S_{sQ}(j\omega)$ el espectro de potencia de $s_Q(t)$. En cuanto al cálculo de dicho espectro, de nuevo se puede aplicar la relación en 3.297. Así, para una secuencia blanca transmitida sobre el canal en cuadratura resulta

$$S_{sQ}(j\omega) = \frac{E\{\mathcal{I}m^2\{A[n]\}\}}{T} |G(j\omega)|^2 \quad (7.10)$$

donde se ha tenido en cuenta que la densidad espectral de potencia de $s_Q(t-T/2)$ es idéntica a la de $s_Q(t)$. Por tanto,

$$\begin{aligned} S_x(j\omega) &= S_{x1}(j\omega) + S_{x2}(j\omega) \\ &= \frac{E\{\mathcal{R}e^2\{A[n]\}\} + E\{\mathcal{I}m^2\{A[n]\}\}}{2T} \{ |G(j\omega - j\omega_c)|^2 + |G(-j\omega - j\omega_c)|^2 \} \\ &= \frac{E_s}{2T} \{ |G(j\omega - j\omega_c)|^2 + |G(-j\omega - j\omega_c)|^2 \} \end{aligned} \quad (7.11)$$

siendo E_s la energía media por símbolo transmitido. Particularizando la expresión anterior para pulsos $g(t)$ rectangulares como los definidos en (7.1), obtenemos

$$S_x(j\omega) = \frac{E_s}{2} \left\{ \text{sinc}^2 \left(\frac{(\omega - \omega_c)T}{2\pi} \right) + \text{sinc}^2 \left(\frac{(\omega + \omega_c)T}{2\pi} \right) \right\} \quad (7.12)$$

Por tanto, podemos concluir que el espectro de potencia de la señal OQPSK es *idéntico* al de la QPSK convencional. Como ya hemos señalado, la principal ventaja de la OQPSK es la reducción en el rango de valores de la envolvente con respecto a la QPSK.

7.1.2. Receptores para modulaciones de fase

El receptor para una modulación de fase responde a la estructura de la Figura 5.34, o cualquiera de las realizaciones equivalentes del Apartado 5.4.2, operando el decisor en función de la fase de la observación $q[n]$. Este tipo de receptor recibe el nombre de *coherente* porque supone un conocimiento exacto de la fase de la señal recibida. Para el caso que nos ocupa, si en el receptor decidimos emplear un filtro adaptado al transmisor, esto es, $f(t) = g(-t)$, entonces, teniendo en cuenta que $g(t)$ es un pulso rectangular, la estructura de la Figura 5.34 es equivalente a la de la Figura 7.4 (en el caso de la figura, por simplicidad se ha supuesto que $\theta = 0$).

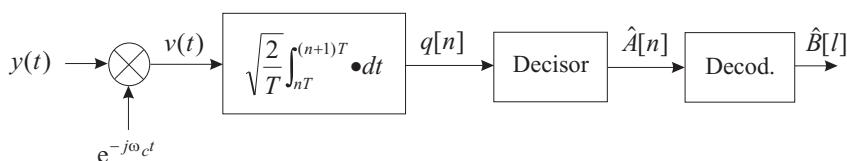


Figura 7.4. Diagrama de bloques de un receptor coherente para PSK.

Por lo que respecta a la estructura de un receptor para OQPSK, este es una adaptación del diagrama de bloques de la Figura 5.38, teniendo en cuenta que ahora el canal en cuadratura se transmite retardado $T/2$ segundos. El esquema resultante se muestra en la Figura 7.5.

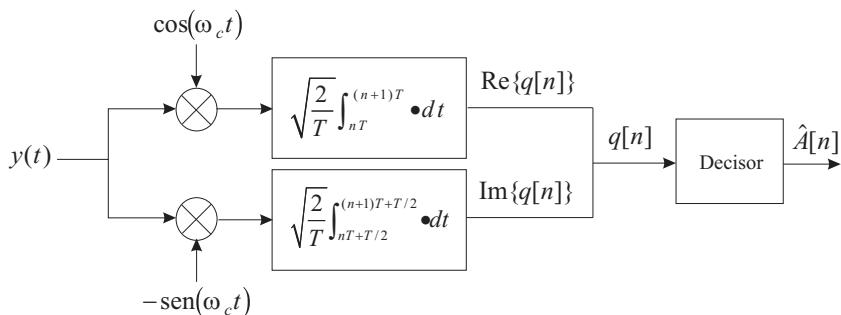


Figura 7.5. Diagrama de bloques de un receptor para OQPSK.

7.1.3. Modulaciones de fase diferencial

Uno de los principales problemas que encontramos a la hora de diseñar receptores para modulaciones de fase es la necesidad de conocer la fase absoluta de la señal recibida. Piénsese que las decisiones en un receptor de PSK se toman en función de la fase de la observación $q[n]$ (véase Figura 7.6). Si la fase absoluta de la portadora es desconocida en el receptor y este realiza la demodulación con una fase arbitraria, el resultado es que la se-

cuencia $q[n]$ será una versión rotada de la secuencia de símbolos $A[n]$, como demostramos en el siguiente ejemplo.

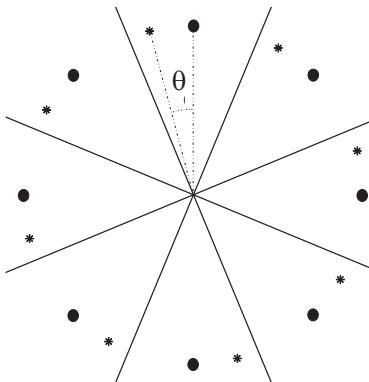


Figura 7.6. Constelación 8-PSK (●) y regiones de decisión. Constelación (*) después de una rotación de θ radianes.

Ejemplo 7.1

Supongamos que transmitimos una señal 8-PSK por un canal ideal (con respuesta $h(t) = \delta(t)$ y sin ruido). Supóngase, no obstante, que la demodulación se realiza con una exponencial compleja de frecuencia ω_c . Las portadoras empleadas en el transmisor y receptor están desfasadas θ radianes. Adaptando el desarrollo del Apartado 5.4.4 al presente caso, vemos que el canal discreto equivalente en banda base es simplemente $p[k] = e^{j\theta}\delta[k]$, lo que tiene el efecto de rotar la constelación transmitida en θ radianes.

Es fácil ver (Figura 7.6) que si $|\theta| > \pi/8$ los símbolos transmitidos serán girados hasta caer en una región de decisión diferente a la que les debería corresponder, por lo que la probabilidad de error de símbolo será 1. Si $|\theta| < \pi/8$ las cosas no son tan graves (la observación $q[n]$ caerá en la región de decisión correcta), pero hará falta menos potencia de ruido para provocar un error. Obviamente, hay dos soluciones triviales a este problema: 1) corregir la fase de la secuencia $q[n]$ –multiplicándola por $e^{-j\theta}$ – o 2) girar las regiones de decisión θ radianes para que se adapten a la secuencia de observaciones esperadas en recepción. Pero cualquiera de las dos soluciones propuestas implica conocer θ y eso no es fácil.

Como acabamos de ver en el ejemplo, para demodular perfectamente una señal PSK es necesario conocer exactamente la fase absoluta θ de la portadora de la señal recibida. En el Capítulo 11 estudiaremos con detalle algunas formas de averiguar θ , pero debemos adelantar que, a no ser que se envíe una señal de referencia (por ejemplo, una portadora llamada “piloto”, que no envía ninguna información) con el consiguiente desperdicio de potencia o de eficiencia espectral, su determinación resulta problemática. Existen, sin embargo, algunos esquemas de recuperación de fase (véase Apartado 11.5.2) que no requieren del envío de información de referencia, pero que emplean no linealidades que dan lugar a ambigüedades en la estimación de θ . Así, por ejemplo, para modulaciones de tipo M-PSK, la estima $\hat{\theta}$ es de la forma $\hat{\theta} = \theta + 2\pi K/M$, para algún entero fijo $K \in \{0, 1, \dots, M - 1\}$. Por ello, cualquier intento de corregir la observación rotándola $\hat{\theta}$ radianes en el sentido contrario a las

agujas del reloj, provocará que, siempre que $K \neq 0$, el resultado se encuentre en una región de decisión incorrecta.

Como veremos a continuación, una solución a los problemas del desconocimiento de la fase absoluta o de las ambigüedades de fase, pasa por enviar la información en el cambio de fase con respecto a la fase transmitida en el símbolo anterior. Esta modulación se denomina PSK codificada diferencialmente y se construye como sigue. Si $\phi[n-1]$ es la fase transmitida en el periodo de símbolo $(n-1)$ -ésimo, la fase en el periodo siguiente $\phi[n]$ se obtiene como

$$\phi[n] = \phi[n-1] + \Delta_\phi[n] \quad (7.13)$$

donde para una modulación M -aria $\Delta_\phi[n]$ se elige dentro del conjunto de fases $\{0, 2\pi/M, \dots, 2\pi(M-1)/M\}$. La clave de la PSK codificada diferencialmente reside en que ahora la información no se codifica en $\phi[n]$ sino en $\Delta_\phi[n]$, es decir, en los *saltos de fase*, tal como se ilustra en la Figura 7.7.

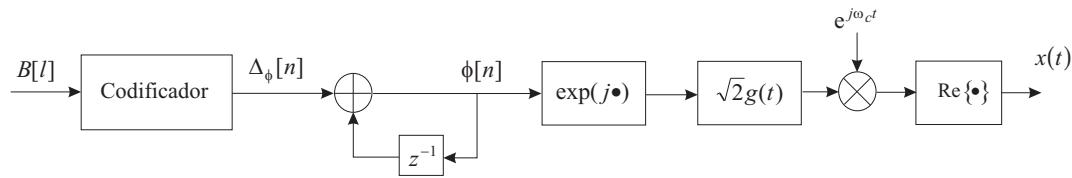


Figura 7.7. Arquitectura de un modulador para PSK codificada diferencialmente.

La PSK codificada diferencialmente admite una demodulación *coherente*, tal como se esquematiza en la Figura 7.8: partiendo de la muestra $q[n]$ primero se corrige la rotación de la constelación, después se toma la decisión sobre la fase del símbolo transmitido y, finalmente, se hace la decodificación diferencial, que es el proceso inverso al realizado en el codificador. Hemos supuesto que la fase estimada $\hat{\theta}$ procede de un esquema de recuperación de fase que no se muestra en la figura.

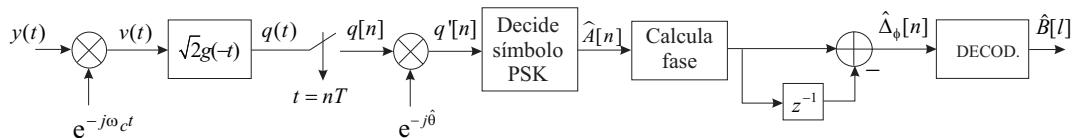


Figura 7.8. Arquitectura de un demodulador coherente para PSK codificada diferencialmente.

Naturalmente, si se conoce la fase absoluta de la señal recibida, esto es, $\hat{\theta} = \theta$ el sistema funcionará casi tan bien como la PSK convencional demodulada coherentemente. La pequeña diferencia de prestaciones se debe a que en la PSK codificada diferencialmente un error en la decodificación de un símbolo suele producir también un error en el símbolo siguiente. Esto se traduce en una P_e que para E_b/N_0 grande aproximadamente duplica la de la PSK. Lo más interesante del esquema de la Figura 7.8 es que también resulta válido cuando existen ambigüedades de fase, tal y como pone de manifiesto el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.2

En las mismas condiciones del Ejemplo 7.1, la información se codifica con saltos de fase $\Delta_\phi[n]$ dentro del conjunto $\{0, 2\pi/8, \dots, 2\pi 7/8\}$ (la asignación particular de bits a $\Delta_\phi[n]$ es irrelevante en este ejemplo). La fase de los símbolos transmitidos se genera a partir de $\Delta_\phi[n]$ empleando (7.13). La demodulación se realiza de acuerdo con el esquema de la Figura 7.8.

La observación corregida $q'[n]$ es tal que

$$\triangleleft q'[n] = \phi[n] + \theta - \hat{\theta} \quad (7.14)$$

Supongamos que la ambigüedad de fase es tal que $\hat{\theta} = \theta + 2\pi K/8$, para algún entero K . Entonces, $\triangleleft q'[n] = \phi[n] - 2\pi K/8$ y $\triangleleft q'[n-1] = \phi[n-1] - 2\pi K/8$. Como en nuestro ejemplo no hay ruido, las fases decididas $\hat{\phi}[n]$ serán iguales a $\triangleleft q'[n]$, para todo n . Por tanto,

$$\hat{\Delta}_\phi[n] \doteq \triangleleft q'[n] - \triangleleft q'[n-1] = \phi[n] - 2\pi K/8 - \phi[n-1] + 2\pi K/8 = \Delta_\phi[n] \quad (7.15)$$

por lo que la decisión será siempre correcta en ausencia de ruido.

Obsérvese que para su buen funcionamiento, la PSK codificada diferencialmente necesita una fase inicial, digamos $\phi[-1] = 0$, que deben conocer tanto transmisor como receptor. En todo caso, el desconocimiento de esta fase (o, como ya hemos comentado, el error en la recepción de un símbolo) no produce *propagación de errores*, en el sentido de que sólo corrompe la información enviada en el periodo de símbolo siguiente.

La PSK codificada diferencialmente admite también una demodulación de tipo incoherente, esto es, sin conocimiento alguno de la fase de la portadora de la señal recibida. Cuando la PSK codificada diferencialmente se demodula con el esquema de la Figura 7.9, entonces se habla de *PSK diferencial* (“*differential PSK*”, DPSK). El caso particular denominado DQPSK se corresponde con la QPSK modulada y demodulada diferencialmente.

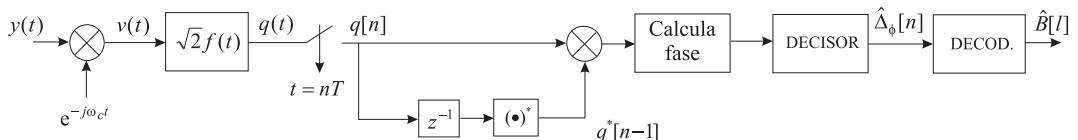


Figura 7.9. Diagrama de bloques de un receptor para DPSK.

Para analizar el funcionamiento de la DPSK, consideremos de nuevo que la señal transmitida sobre un canal gausiano sufre en la conversión a banda base del receptor un desplazamiento de fase de θ radianes. Entonces, la observación $q[n]$ se podrá escribir como

$$q[n] = \sqrt{E_s} e^{j(\phi[n]+\theta)} + z[n], \quad (7.16)$$

donde $z[n]$ es ruido complejo circularmente simétrico de varianza σ_z^2 . Por tanto, el producto $q[n]q^*[n-1]$ será

$$\begin{aligned} q[n]q^*[n-1] &= E_s e^{j(\phi[n]-\phi[n-1])} + \sqrt{E_s} e^{j(\phi[n]+\theta)} z^*[n-1] \\ &\quad + \sqrt{E_s} e^{-j(\phi[n-1]+\theta)} z[n] + z[n]z^*[n-1] \end{aligned} \quad (7.17)$$

de modo que, en ausencia de ruido los tres últimos términos son nulos, y $\triangle\{q[n]q^*[n-1]\} = \Delta_\phi[n]$, por lo que la decisión es correcta, independientemente del valor de θ . A efectos de interpretación del resultado, es conveniente dividir la Ecuación (7.17) por $\sqrt{E_s}$:

$$\begin{aligned} \frac{q[n]q^*[n-1]}{\sqrt{E_s}} &= \sqrt{E_s}e^{j(\phi[n]-\phi[n-1])} + e^{j(\phi[n]+\theta)}z^*[n-1] \\ &+ e^{-j(\phi[n-1]+\theta)}z[n] + \frac{z[n]z^*[n-1]}{\sqrt{E_s}} \end{aligned} \quad (7.18)$$

lo que no afecta en modo alguno a la decisión, pues está basada en la fase de $q[n]q^*[n-1]$. Cuando el ruido no es nulo, el cálculo exacto de la probabilidad de error se ve dificultado por el último sumando en (7.18), ya que es difícil caracterizar su densidad de probabilidad. Sin embargo, cuando la relación señal a ruido es alta (E_s/σ_z^2 grande), este término se puede despreciar. Por otra parte, los otros dos términos de ruido restantes, tienen la forma de una exponencial compleja multiplicada por una muestra de ruido gausiano. Si las partes real e imaginaria de $z[n]$ son independientes e idénticamente distribuidas (ruido con simetría circular), entonces la multiplicación por una exponencial compleja no cambia esas propiedades. Por tanto, si el ruido es blanco, el término $e^{j(\phi[n]+\theta)}z^*[n-1] + e^{-j(\phi[n-1]+\theta)}z[n]$ será gausiano con simetría circular y varianza $2\sigma_z^2$. En resumen, cuando el último término de (7.18) es despreciable, tenemos que la parte de señal deseada es $\sqrt{E_s}e^{j(\phi[n]-\phi[n-1])}$ mientras que el ruido complejo es gausiano de varianza $2\sigma_z^2$. Estos parámetros coinciden con los que se tienen en una modulación PSK, salvo por que la varianza del ruido es ahora el doble de la que se tendría en PSK (debido a que ahora hay dos términos de ruido). Por tanto, para relaciones E_s/N_0 grandes, la DPSK sufre una penalización de 3 dB frente a la PSK (Apartado 5.2.3).

Cuando el desfase θ no es constante, sino variante en el tiempo, la DPSK todavía puede ofrecer un rendimiento aceptable siempre que la variación $\theta[n] - \theta[n-1]$ sea pequeña en comparación con la separación angular entre las regiones de decisión. Este aspecto se explora en el Problema P7.5.

7.2. MODULACIONES POR DESPLAZAMIENTO DE FRECUENCIA

Las modulaciones que hemos estudiado hasta ahora tienen la característica común de que la señal transmitida se obtiene a partir de combinaciones lineales de unos pulsos básicos modulados por la secuencia de información, por lo que se pueden denominar *modulaciones lineales*. En este apartado presentamos otras modulaciones que no presentan la propiedad anterior, por lo que pueden denominarse *modulaciones no lineales*. Las modulaciones que estudiaremos en este apartado pueden verse como modulaciones de fase, aunque, con el ánimo de facilitar la comprensión, comenzaremos introduciendo dos casos particulares (FSK y MSK), que generalizaremos posteriormente en las modulaciones CPM.

7.2.1. Señal transmitida FSK

Una de las posibilidades para transmitir información consiste en hacerlo variando la frecuencia de la portadora, en lugar de la amplitud o la fase, como hemos venido haciendo hasta ahora. La idea básica es seleccionar la frecuencia de la portadora que se transmite durante un intervalo de símbolo de entre un conjunto discreto de frecuencias disponibles. Por esta razón, se habla en este caso de modulación por desplazamiento de frecuencia (“*Frequency Shift Keying*”, FSK).

Las principales ventajas de la FSK son la facilidad y bajo coste para implementar tanto transmisores como receptores, en especial, los receptores incoherentes que discutiremos en breve. Además, el hecho de que la información está presente en los cruces por cero hace que ciertas alinealidades del sistema de transmisión (como las de los amplificadores de RF que operan cerca del punto de saturación) que no afectan a los cruces por cero sean menos dañinas sobre la FSK que si se tratase de modulaciones de amplitud. Como hemos visto, esta última es, en realidad, una ventaja también de las modulaciones de fase; al fin y al cabo, una modulación de frecuencia puede verse como una modulación de la *derivada* de la fase instantánea. Como veremos, el precio de las ventajas mencionadas es una pérdida de eficiencia en ancho de banda y en potencia.

Definiendo los pulsos $g_i(t)$, $i = 0, \dots, M - 1$ como

$$g_i(t) = \operatorname{sen}(\omega_i t)w_T(t) \quad (7.19)$$

siendo $w_T(t)$ el pulso rectangular causal definido en (7.2), la modulación FSK asigna a cada “símbolo” de entrada $A[n] \in \{0, 1, \dots, M - 1\}$, el pulso $g_{A[n]}(t)$, de modo que si, por simplicidad, suponemos que M es una potencia de dos, y enviamos un nuevo pulso cada T segundos, entonces estaremos transmitiendo con régimen binario $\log_2(M)/T$ bits/seg. La señal transmitida tiene entonces la siguiente expresión

$$x(t) = K \sum_n g_{A[n]}(t - nT) \quad (7.20)$$

donde K es una constante relacionada con la energía media por símbolo transmitido, tal y como estableceremos en breve.

Teniendo en cuenta las consideraciones que ya realizamos en el Apartado 7.1 al respecto del incremento de ancho de banda debido a la existencia de saltos bruscos en la fase de la señal transmitida, nos limitaremos aquí a una versión de la modulación FSK en la que se garantiza la continuidad de fase. Dicha modulación se denomina FSK de fase continua (“*Continuous Phase FSK*”, CPFSK). El lector puede comprobar que la condición para que exista continuidad de fase es que las frecuencias ω_i empleadas en (7.19) sean tales que exista un número entero de ciclos dentro del periodo de símbolo T o, equivalentemente,

$$\omega_i = \frac{2\pi N_i}{T}, \quad i = 0, \dots, M - 1 \quad (7.21)$$

para algún número entero N_i . Más adelante (Apartado 7.4) veremos que si uno está dispuesto a aumentar el conjunto de pulsos disponibles y a introducir memoria en el transmisor, entonces la condición (7.21) ya no es necesaria para la continuidad de fase.

Es claro que el espectro de energía asociado al pulso $g_i(t)$ es una sinc al cuadrado centrada en la frecuencia ω_i . Consecuentemente, no es difícil intuir que el espectro ocupado por la señal transmitida será menor cuanto menor sea la separación entre las frecuencias empleadas, lo que obliga a que los enteros N_i sean todos consecutivos. Más adelante, cuando determinemos la expresión del espectro de potencia de la señal transmitida, quedará plenamente justificada nuestra intuición.

Más abajo comprobaremos que, la condición (7.21) es además suficiente para garantizar la ortogonalidad de los pulsos $g_i(t)$, por lo que hablaremos en este caso de *CPFSK ortogonal*. Podemos, por tanto, definir la base ortonormal

$$\phi_i(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \operatorname{sen}(\omega_i t) w_T(t), \quad i = 0, \dots, M-1 \quad (7.22)$$

y, a partir de ella, la señal transmitida (7.20) será

$$x(t) = \sqrt{E_s} \sum_n \phi_{A[n]}(t - nT) \quad (7.23)$$

siendo E_s la energía por pulso transmitido. En la Figura 7.10 representamos un fragmento de señal transmitida para una modulación CPFSK ortogonal binaria ($M = 2$), donde podemos observar claramente cómo se mantiene la continuidad de fase. Para esta misma modulación binaria la Figura 7.11 recoge en el espacio de señales la constelación empleada. De un modo genérico, las modulaciones que emplean este tipo de constelaciones reciben el nombre de *modulaciones ortogonales*, reservándose la denominación *modulaciones biortogonales* para las que transmiten un bit adicional de información en el signo del pulso empleado.

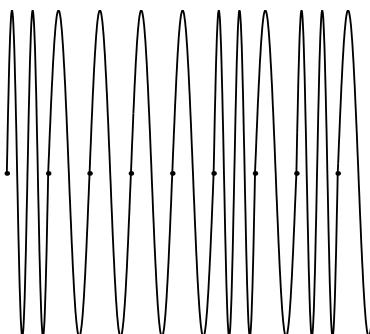


Figura 7.10. Fragmento de una señal CPFSK ortogonal binaria.

Una forma interesante de representar la modulación CPFSK consiste en considerar la transmisión de un pulso de frecuencia ω_i como una desviación con respecto a una frecuencia central, que denotaremos por ω_c y que se puede relacionar con una frecuencia nominal de “portadora”. Por ejemplo, en el caso de la CPFSK ortogonal binaria, $\omega_c = (\omega_0 + \omega_1)/2$ y en la CPFSK ortogonal cuaternaria, $\omega_c = (\omega_0 + \omega_3)/2 = (\omega_1 + \omega_2)/2$. De forma alternativa, en la CPFSK ortogonal binaria $\omega_0 = \omega_c - \pi/T$; $\omega_1 = \omega_c + \pi/T$ y en la CPFSK ortogonal cuaternaria $\omega_0 = \omega_c - 3\pi/T$; $\omega_1 = \omega_c - \pi/T$; $\omega_2 = \omega_c + \pi/T$ y $\omega_3 = \omega_c + 3\pi/T$.

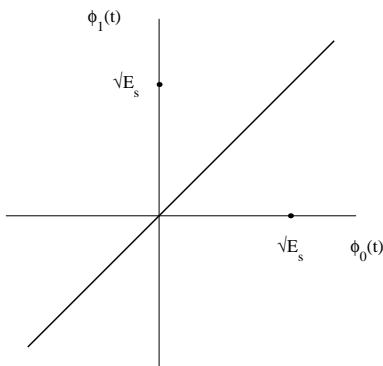


Figura 7.11. Representación en espacio de señales de la constelación empleada en la modulación CPFSK ortogonal binaria.

De este modo, la señal $x(t)$ puede reescribirse como

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \sum_n \operatorname{sen} \left(\omega_c t + I[n] \frac{\pi t}{T} \right) w_T(t - nT) \quad (7.24)$$

donde $I[n] \in \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(M-1)\}$ sirve para seleccionar la frecuencia de transmisión durante la transmisión del pulso n -ésimo. Obsérvese que los $I[n]$ pueden considerarse en cierto sentido “símbolos” de información, sin que ello implique la existencia de una constelación unidimensional porque, como acabamos de ver, estamos trabajando con M dimensiones. En cualquier caso, la utilización de los $I[n]$ permite ver la modulación como un auténtico *desplazamiento de frecuencia* con respecto a ω_c , lo que justifica el nombre de FSK. Más adelante veremos cómo la generalización de este formato permite una notación compacta que evita la necesidad de enumerar todo el conjunto de pulsos posibles en transmisión cuando su número es elevado.

7.2.2. Espectro de la señal FSK

En el Apéndice 7.A se obtiene el espectro de una señal FSK, bajo la hipótesis de que los símbolos transmitidos son independientes y equiprobables, de forma que los pulsos $g_i(t)$, $0 \leq i \leq M-1$ tienen idéntica probabilidad de ser transmitidos. Es interesante señalar que, dado que la media de la señal transmitida es periódica de periodo T y, en general, no nula, el espectro contiene dos componentes que describimos a continuación. El llamado espectro discreto, que denotamos por $S_{xd}(j\omega)$, se corresponde con la transformada de la señal media. Como dicha señal media es determinista y periódica, su Transformada de Fourier contendrá exclusivamente líneas espectrales en frecuencias múltiplo de $2\pi/T$. Por su parte, el llamado espectro continuo, que denotamos por $S_{xc}(j\omega)$, se corresponde con la densidad espectral de potencia de la señal transmitida, una vez se ha sustraído la señal media. Dichos espectros

resultan ser:

$$S_{xd}(j\omega) = \frac{2E_s}{T} \frac{1}{(MT)^2} \left| \sum_{i=0}^{M-1} G_i(j\omega) \right|^2 \sum_k \delta \left(\omega - \frac{2\pi k}{T} \right) \quad (7.25)$$

$$S_{xc}(j\omega) = \frac{2E_s}{T} \frac{1}{MT} \left\{ \sum_{i=0}^{M-1} |G_i(j\omega)|^2 - \frac{1}{M} \left| \sum_{i=0}^{M-1} G_i(j\omega) \right|^2 \right\} \quad (7.26)$$

donde $G_i(j\omega)$, $i = 0, \dots, M-1$, es la Transformada de Fourier del pulso $g_i(t)$.

Finalmente, el espectro de la señal transmitida será

$$S_x(j\omega) = S_{xc}(j\omega) + S_{xd}(j\omega) \quad (7.27)$$

Ejemplo 7.3

Calculemos el espectro de la señal FSK binaria con frecuencias ω_0 y ω_1 . Teniendo en cuenta que

$$G_i(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{j} (\delta(\omega - \omega_i) - \delta(\omega + \omega_i)) * \left[T \operatorname{sinc} \left(\frac{\omega T}{2\pi} \right) e^{-j\omega T/2} \right], \quad i = 0, 1 \quad (7.28)$$

resulta evidente que

$$\begin{aligned} G_0(j\omega) + G_1(j\omega) &= \frac{1}{2j} (\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_1) - \delta(\omega + \omega_1)) \\ &\quad * \left[T \operatorname{sinc} \left(\frac{\omega T}{2\pi} \right) e^{-j\omega T/2} \right] \end{aligned} \quad (7.29)$$

Por tanto, $G_0(j\omega) + G_1(j\omega)$ es la suma de cuatro sincs desplazadas a las frecuencias $\pm\omega_0$ y $\pm\omega_1$. Recordando que tanto ω_0 como ω_1 son múltiplo de $2\pi/T$, es claro que (7.29) se anulará en las frecuencias múltiplo de $2\pi/T$ (porque así ocurre con la sinc) excepto precisamente en ω_0 y ω_1 , de modo que el espectro discreto constará de los dos pares de líneas espectrales siguientes:

$$\begin{aligned} S_{xd}(j\omega) &= \frac{2E_s}{T} \cdot \frac{1}{4T^2} \cdot \frac{T^2}{4} \cdot (\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_1) - \delta(\omega + \omega_1)) \\ &= \frac{E_s}{8T} (\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_1) - \delta(\omega + \omega_1)) \end{aligned} \quad (7.30)$$

En cuanto al espectro continuo, desarrollando (7.26) tenemos que

$$S_{xc}(j\omega) = \frac{E_s}{T^2} (|G_0(j\omega)|^2 + |G_1(j\omega)|^2 - 2\operatorname{Re}\{G_0(j\omega)G_1^*(j\omega)\}) \quad (7.31)$$

El espectro continuo para la CPFSK ortogonal binaria, se representa en la Figura 7.12, junto con el espectro continuo para el caso en que $\omega_1 = \omega_0 + 3\pi/T$ (que ya no es una FSK de fase continua). Las frecuencias representadas lo son a partir de ω_c , ya que el espectro es simétrico con respecto a la frecuencia central. Obsérvese el mayor espectro ocupado en el caso en que la fase no es continua. También es interesante comprobar que en ese caso el espectro discreto deja de tener dos pares de líneas espectrales (para la CPFSK ortogonal binaria, en el rango de frecuencias representado en la figura sólo aparecería una delta, situada en ω_1) y pasa a tener infinitas. Esta comprobación se deja como ejercicio, y evidencia el aumento de potencia radiada fuera de banda para la FSK de fase no continua.

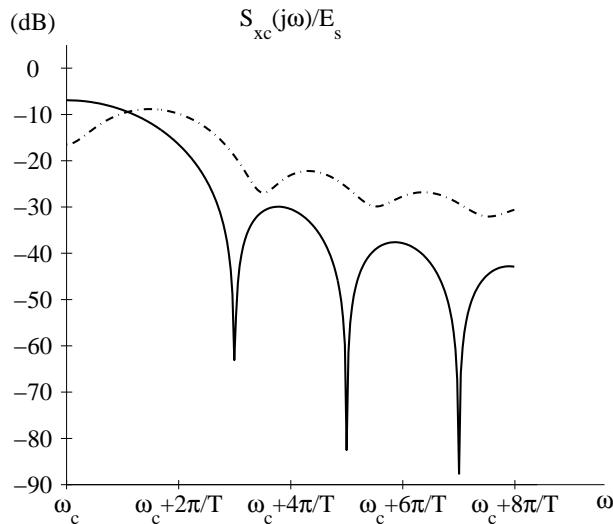


Figura 7.12. Espectro continuo de la señal FSK binaria del Ejemplo 7.3 para los casos de fase continua (línea continua) y fase discontinua (línea punteada).

7.2.3. Receptores para FSK

Para un canal gausiano que introduce ruido aditivo blanco, la obtención de un receptor de máxima verosimilitud (ML) para FSK es sencilla a partir de los resultados del Apartado 4.5. Para el caso de la FSK binaria, basta con colocar un banco de filtros adaptados a las funciones base, seguidos de un muestreador a periodo de símbolo y un decisor que selecciona el símbolo (bit) $\hat{B}[n]$ correspondiente a la rama cuya salida es máxima, tal como ilustramos en la Figura 7.13 para el caso binario. Naturalmente, la estructura basada en filtros adaptados puede sustituirse por su equivalente con correlacionadores. Obsérvese la ventaja que supone el que los posibles pulsos transmitidos sean ortogonales: en ausencia de ruido en el canal, las salidas de todas las ramas del receptor, excepto la correspondiente al índice de la información transmitida serán cero.

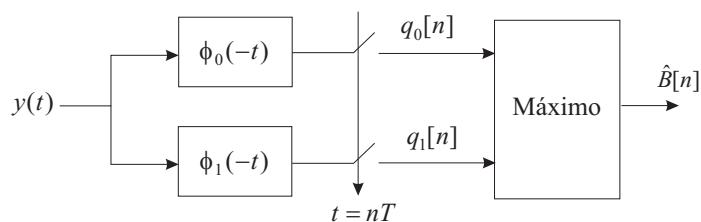


Figura 7.13. Diagrama de bloques de un receptor coherente para FSK binaria.

El cálculo de la probabilidad de error obtenida en CPFSK ortogonal binaria con el receptor coherente y canal gausiano con densidad espectral de potencia $N_0/2$ W/Hz es inmediato

a partir de la representación en espacio de señales de la Figura 7.11, empleando la Ecuación (4.68), de modo que

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) \quad (7.32)$$

Obsérvese que, en comparación con una modulación de amplitud binaria (Ecuación (5.35)), la energía por símbolo en CPFSK debería ser el doble para conseguir alcanzar las mismas prestaciones. Por esta razón, se dice que la CPFSK binaria tiene una penalización de 3 dB con respecto a la PAM binaria.

Como ya hemos señalado, una de las principales ventajas de la modulación FSK es que conduce de forma natural –por la separación entre las frecuencias empleadas– a esquemas de receptores incoherentes muy fáciles de implementar. En el Apartado 7.1.3 comprobamos las consecuencias de no conocer exactamente la fase de la señal recibida y propusimos la modulación DPSK como una solución al problema. En el caso de la FSK, la presencia de una fase desconocida θ en la señal recibida puede empeorar considerablemente el funcionamiento del sistema de transmisión. Para verlo, supongamos que en el intervalo $[0, T]$ se transmite, digamos, el pulso $g_0(t)$, y se recibe

$$y(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \operatorname{sen}(\omega_0 t + \theta) w_T(t) \quad (7.33)$$

Al pasar por el filtro adaptado y muestrear, de acuerdo con el esquema de la Figura 7.13, tendríamos

$$q_0[0] = \int_0^T y(t) \phi_0(t) dt \approx \sqrt{E_s} \cos \theta \quad (7.34)$$

El caso en que la salida es máxima se corresponde con $\theta = 0$, que coincide con las hipótesis de trabajo en detección coherente, pero a medida que θ se aproxima a $\pi/2$ la salida de la rama superior del receptor decrece en magnitud hasta llegar a valer cero. Lógicamente, esto provocará que las prestaciones del receptor se reduzcan notablemente, puesto que ahora será más fácil que en la rama inferior el ruido produzca una salida mayor que en la superior y, por tanto, una equivocación.

Para solventar el problema anterior sin recurrir a ningún esquema de recuperación de la fase de la señal recibida (necesario para una correcta recepción coherente), es relativamente sencillo construir receptores incoherentes que, aunque subóptimos (en el sentido de que sus prestaciones son inferiores a las del receptor coherente con estimación perfecta de fase), son bastante más inmunes a los efectos de una fase desconocida en la señal recibida. La idea que subyace a muchos de estos receptores es bien sencilla: si la información se transmite en la frecuencia, basta con colocar un banco de filtros paso banda sintonizados a las diferentes frecuencias y seleccionar la salida de aquella rama cuya envolvente (integrada sobre un periodo de símbolo) sea mayor. En la Figura 7.14 se representa un receptor incoherente para FSK binaria, basado en la detección de la envolvente a la salida de filtros paso banda $h_0(t)$ y $h_1(t)$, sintonizados respectivamente a las frecuencias ω_0 y ω_1 . Obsérvese que es necesario

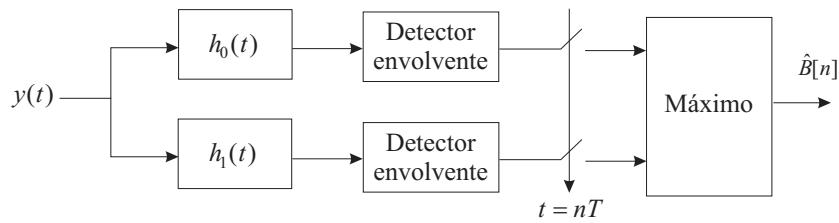


Figura 7.14. Diagrama de bloques de un receptor incoherente para FSK basado en filtros paso banda y detectores de envolvente.

muestrear la salida del detector de envolvente y que es relativamente importante hacerlo en el instante adecuado, esto es, cuando dicha salida alcanza su máximo (o su mínimo).

Incluso es posible derivar el receptor incoherente óptimo según el criterio de máxima verosimilitud, suponiendo que el receptor no dispone de ninguna información a priori sobre la fase θ . Esto se lleva a cabo en el Apéndice 7.B. La arquitectura de receptor resultante se muestra en la Figura 7.15 y consta de un correlacionador seguido de una detección de envolvente con la denominada *ley cuadrática* de combinación. Cualitativamente, cuando enviamos el pulso $g_0(t)$, si $\theta = \pi/2$ entonces la salida del correlacionador con $\sin(\omega_0 t)$ será cero, pero la salida del correlacionador con $\cos(\omega_0 t)$ será máxima. Sin embargo, la salida de cualquiera de los dos correlacionadores de la rama inferior será pequeña, por corresponderse con filtros sintonizados a ω_1 . Por esta razón, el receptor es mucho más robusto ante la presencia de un desfase arbitrario θ (véase Problema P7.7). Como comentario final, es interesante razonar que, dado que el receptor de la Figura 7.14 emplea filtros paso banda, cuando se transmita $g_0(t)$ ($g_1(t)$) habrá una parte de la energía del pulso que atravesará el filtro $h_1(t)$ ($h_0(t)$) (recordemos que el espectro asociado a cada pulso es una sinc). Esta componente indeseada será tanto mayor cuanto menor sea la separación entre ω_0 y ω_1 , por lo que se puede establecer un compromiso entre la probabilidad de error en el receptor y el ancho de banda ocupado.

7.3. MODULACIÓN MSK

Ya hemos visto que para garantizar la continuidad de fase en FSK las portadoras asociadas a cada pulso debían ser de la forma $\omega_i = 2\pi N_i/T$, $i = 0, \dots, M - 1$ para algún número entero N_i y que, además, esta asignación de frecuencias conducía a la ortogonalidad de los pulsos empleados. También hemos visto cómo el espectro de la señal FSK aumenta con la separación frecuencial entre portadoras, por lo que podríamos preguntarnos si existen otras separaciones menores que también provean ortogonalidad. Intuitivamente, esta menor separación se traducirá en un menor ancho de banda ocupado.

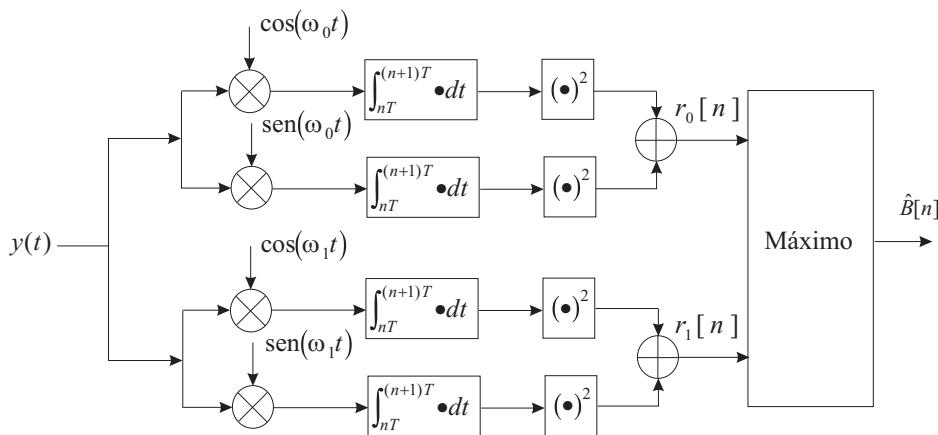


Figura 7.15. Diagrama de bloques de un receptor incoherente para FSK basado en correlacionadores y detección de envolvente con ley cuadrática.

7.3.1. Señal transmitida MSK

Considerando pulsos $g_i(t)$ como los dados en (7.19), podemos plantearnos qué separación entre frecuencias conduce a la ortogonalidad. Para ello, sean $g_i(t)$ y $g_l(t)$ dos pulsos cualesquiera y calculemos su producto escalar

$$\begin{aligned}\langle g_i, g_l \rangle &= \int_0^T \sin(\omega_i t) \sin(\omega_l t) dt = \frac{1}{2} \int_0^T \cos[(\omega_i - \omega_l)t] dt - \frac{1}{2} \int_0^T \cos[(\omega_i + \omega_l)t] dt \\ &= \frac{T}{2} \frac{\sin[(\omega_i - \omega_l)T]}{(\omega_i - \omega_l)T} - \frac{T}{2} \frac{\sin[(\omega_i + \omega_l)T]}{(\omega_i + \omega_l)T}\end{aligned}\quad (7.35)$$

El segundo sumando de la última línea de (7.35) es despreciable cuando el producto $(\omega_i + \omega_l)T$ es muy grande, lo que precisamente sucede en los sistemas de banda estrecha, que son los que se emplean en la práctica. Para que el primer término de la última línea de (7.35) se anule es necesario que $(\omega_i - \omega_l)T = N_{i,l}\pi$, para algún $N_{i,l}$ entero distinto de cero. Equivalentemente, la condición de ortogonalidad fuerza a que la separación entre frecuencias sea

$$\omega_i - \omega_l = \frac{\pi N_{i,l}}{T}, \quad i, l = 0, \dots, M-1, \quad i \neq l \quad (7.36)$$

Como podemos observar, la separación empleada en CPFSK ortogonal (múltiplo de $2\pi/T$ rad/seg) cumple la condición anterior, pero dicha condición también se satisface para una separación múltiplo de π/T rad/seg.

Podríamos pensar entonces en una modulación FSK con frecuencias de la forma $\omega_i = \pi N_i/T$, para algún entero N_i distinto de cero³, pero encontraríamos que ya no se satisface

³Curiosamente, para esta asignación de frecuencias el segundo término de la última línea de (7.35) no sólo es muy pequeño, sino cero.

la condición de continuidad de fase, por lo que el resultado (para $M = 2$) sería una señal como la que se muestra en la Figura 7.16, en la que se observan los saltos de fase de 180° .

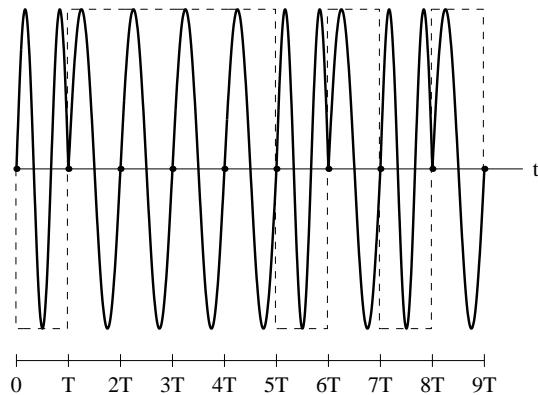


Figura 7.16. Fragmento (línea continua) de una señal FSK con frecuencias $\omega_0 = 2\pi/T$ y $\omega_1 = 3\pi/T$. Asimismo, se muestra la señal de información (línea discontinua).

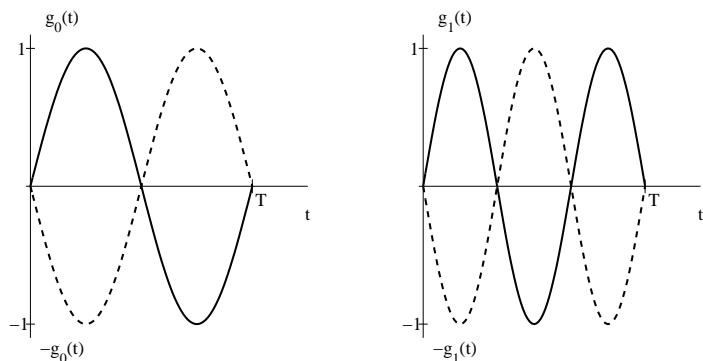


Figura 7.17. Pulsos empleados en la modulación MSK.

Sin embargo, no es difícil conseguir una fase continua con esta separación de frecuencias. Veámoslo para el caso $M = 2$. En la Figura 7.17 se muestran en línea continua los pulsos $g_0(t)$ y $g_1(t)$ que se emplearían en este caso, mientras en línea discontinua se representan $-g_0(t)$ y $-g_1(t)$. Como es evidente, si $g_0(t)$ y $g_1(t)$ son ortogonales, esta propiedad se conserva si alguno de ellos o ambos se multiplican por -1 .

Ahora podemos ver (Figura 7.18) que una elección cuidadosa del signo del pulso $g_i(t)$ permite resolver el problema. Conviene tener presente que, para poder garantizar la continuidad de fase, el transmisor debe *tener memoria* en el sentido de que, aunque la elección del pulso depende exclusivamente del bit que queremos transmitir, el signo depende del pulso anteriormente transmitido; de forma alternativa, podemos pensar que ahora tenemos 4 pulsos distintos que se seleccionan en función del bit de información que se desea transmitir

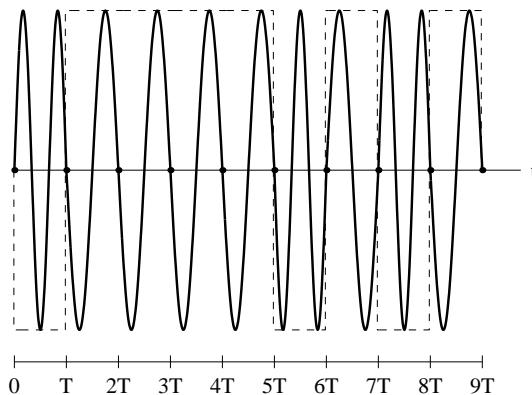


Figura 7.18. Fragmento (línea continua) de una señal MSK y señal de información correspondiente (línea discontinua).

y del estado del transmisor durante el periodo de símbolo anterior.

La modulación resultante, que continúa empleando pulsos ortogonales pero con separación mínima en frecuencia, se denomina *modulación por desplazamiento mínimo* (“Minimum Shift Keying”, MSK).

Con todas las consideraciones realizadas previamente, es claro que la señal transmitida $x(t)$ se puede escribir de forma similar a la expresión (7.24) válida para la CPFSK ortogonal. Así,

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \sum_n \operatorname{sen} \left(\omega_c t + I[n] \frac{\pi t}{2T} + \theta[n] \right) w_T(t - nT) \quad (7.37)$$

donde $I[n] \in \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(M-1)\}$ es el n -ésimo “símbolo” de información, ω_c es la *frecuencia central* o frecuencia nominal de la portadora, $w_T(t)$ es el pulso rectangular causal definido en (7.2), y $\theta[n]$ tiene como misión forzar la continuidad de fase. Recuérdese que la definición de los símbolos de información no implica la existencia de una constelación unidimensional, sino que, de modo similar al caso de la CPFSK ortogonal, estamos trabajando con $M/2$ dimensiones (constelación biortogonal). El empleo de los $I[n]$ permite también contemplar la modulación MSK como un verdadero *desplazamiento de frecuencia* con respecto a una frecuencia central ω_c . Más adelante, cuando describamos de forma general las modulaciones de fase continua, veremos cómo la MSK se corresponde con un caso especial de aquéllas.

Por lo que respecta a los $\theta[n]$ que aparecen en la Ecuación (7.37) vamos a determinar qué características han de tener para mantener la fase continua. Particularizando dicha expresión para $t = mT + \epsilon$ y $t = mT - \epsilon$, $\epsilon > 0$, y haciendo tender ϵ a cero, obtenemos la condición siguiente para conservar la continuidad de fase:

$$I[m-1] \frac{\pi m}{2} + \theta[m-1] = I[m] \frac{\pi m}{2} + \theta[m] \quad \text{mód } 2\pi \quad (7.38)$$

de donde

$$\theta[m] = \theta[m-1] + (I[m-1] - I[m]) \frac{\pi m}{2} \quad \text{mód } 2\pi \quad (7.39)$$

La MSK, vista como una adaptación de la FSK ortogonal de fase continua, es una modulación no lineal. Sin embargo, vamos a demostrar a continuación cómo la MSK binaria puede verse como una forma particular de una modulación OQPSK (Apartado 7.1.1), lo que nos será de gran utilidad a la hora de determinar las características espectrales de la señal transmitida. Observemos que, para la MSK binaria, $I[n] \in \{\pm 1\}$, $\theta[n] \in \{0, \pi\}$, para todo n . Supondremos en nuestro análisis que la fase de referencia $\theta[-1] = 0$. En primer lugar, escribiendo el seno como la parte imaginaria de una exponencial y desarrollando términos, la Ecuación (7.37) se puede transformar a

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cos(\omega_c t) \sum_n \operatorname{Im} \left\{ \exp(jI[n]\frac{\pi t}{2T}) \exp(j\theta[n]) \right\} w_T(t-nT) \\ &+ \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \sin(\omega_c t) \sum_n \operatorname{Re} \left\{ \exp(jI[n]\frac{\pi t}{2T}) \exp(j\theta[n]) \right\} w_T(t-nT) \\ &= \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cos(\omega_c t) \sum_n I[n] \cos(\theta[n]) \sin\left(\frac{\pi t}{2T}\right) w_T(t-nT) \\ &+ \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \sin(\omega_c t) \sum_n \cos(\theta[n]) \cos\left(\frac{\pi t}{2T}\right) w_T(t-nT) \end{aligned} \quad (7.40)$$

donde hemos utilizado el hecho de que $\sin(\theta[n]) = 0$ por ser $\theta[n]$ múltiplo entero de π .

A partir de (7.39) y recordando que $I[n] \in \{\pm 1\}$, podemos obtener las siguientes relaciones para n par:

$$\cos(\theta[n]) = \cos(\theta[n-1]) \quad (7.41)$$

$$I[n] \cos(\theta[n]) = I[n+1] \cos(\theta[n+1]) \quad (7.42)$$

Con estas relaciones, y usando el hecho de que

$$w_T(t-nT) + w_T(t-nT-T) = w_{2T}(t-nT) \quad (7.43)$$

se tiene que es posible escribir (7.40) como

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cos(\omega_c t) \sum_{n \text{ par}} I[n] \cos(\theta[n]) \sin\left(\frac{\pi t}{2T}\right) w_{2T}(t-nT) \\ &+ \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \sin(\omega_c t) \sum_{n \text{ par}} \cos(\theta[n]) \cos\left(\frac{\pi t}{2T}\right) w_{2T}(t-nT+T) \end{aligned} \quad (7.44)$$

Finalmente, empleando el hecho de que para n par,

$$\cos(\pi t/2T) = \sin[\pi(t-nT+T)/2T](-1)^{n/2} \quad (7.45)$$

$$\sin(\pi t/2T) = \sin[\pi(t-nT)/2T](-1)^{n/2} \quad (7.46)$$

y definiendo el pulso normalizado

$$g(t) = \sqrt{\frac{1}{T}} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi t}{2T} \right) w_{2T}(t) \quad (7.47)$$

es posible llegar a la siguiente expresión para una modulación MSK binaria

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{2E_s} \cos(\omega_c t) \sum_{n \text{ par}} I[n] \cos(\theta[n]) (-1)^{n/2} g(t - nT) \\ &+ \sqrt{2E_s} \operatorname{sen}(\omega_c t) \sum_{n \text{ par}} \cos(\theta[n]) (-1)^{n/2} g(t - nT + T) \end{aligned} \quad (7.48)$$

que no es más que la expresión de la OQPSK en (7.4), difiriendo sólamente en el tipo de pulsos empleados (ahora se corresponden con medio ciclo de sinusoides) y en los símbolos que se transmiten en los canales en fase y cuadratura, que ahora se generan de una forma algo más elaborada. Además, como queda patente en (7.48), la transmisión de la “OQPSK equivalente” se realiza con periodo de símbolo $2T$, esto es, sólo se transmite en los instantes nT , con n par y con pulsos de duración $2T$.

En cualquier caso, esta mayor complicación formal no impide que las secuencias de “símbolos” que modulan respectivamente a los canales en fase y cuadratura sean blancas y mutuamente incorrelacionadas cuando la secuencia $I[n]$ es blanca. La demostración se deja como ejercicio para el lector.

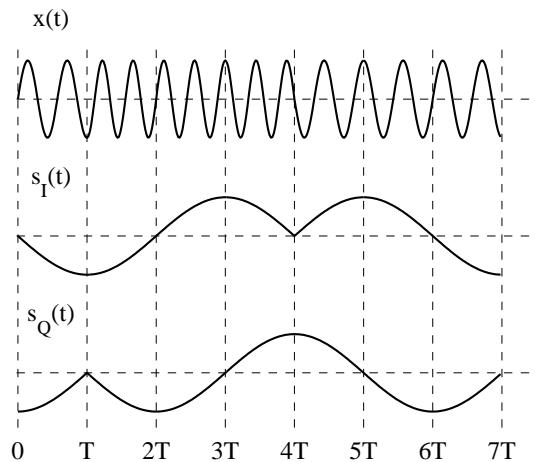


Figura 7.19. Fragmento de una señal MSK $x(t)$ y sus componentes en fase $s_I(t)$ y cuadratura $s_Q(t)$.

La Figura 7.19 muestra la señal $x(t)$ y las componentes en fase y cuadratura (con un desplazamiento relativo de $T/2$ segundos) correspondientes a una señal MSK. Compárese con las figuras 7.1 y 7.2 correspondientes a una señal QPSK y una OQPSK, respectivamente.

7.3.2. Espectro de la señal MSK binaria

Para calcular el espectro de potencia de la señal transmitida, basta con utilizar los resultados del Apartado 7.1.1 referidos a la modulación OQPSK, teniendo en cuenta únicamente la nueva forma del pulso conformador $g(t)$ cuya Transformada de Fourier $G(j\omega)$ es tal que

$$|G(j\omega)|^2 = 16T\pi^2 \left(\frac{\cos \omega T}{\pi^2 - 4\omega^2 T^2} \right)^2 \quad (7.49)$$

Por tanto, aplicando (7.11), el espectro de potencia de la señal MSK binaria es

$$S_x(j\omega) = 8E_s\pi^2 \left(\frac{\cos[(\omega - \omega_c)T]}{\pi^2 - 4(\omega - \omega_c)^2 T^2} \right)^2 + 8E_s\pi^2 \left(\frac{\cos[(\omega + \omega_c)T]}{\pi^2 - 4(\omega + \omega_c)^2 T^2} \right)^2 \quad (7.50)$$

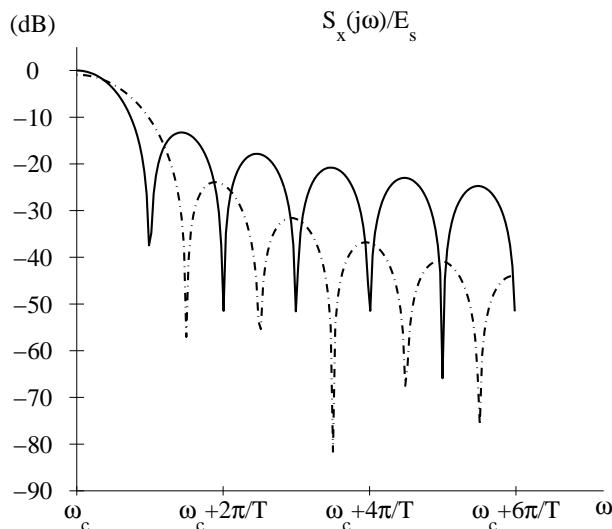


Figura 7.20. Espectros de las señales MSK (línea punteada) y OQPSK (línea continua).

En la Figura 7.20 se representan los espectros correspondientes a una modulación MSK binaria y a una OQPSK (idéntico al de una QPSK) con pulsos rectangulares (y periodo de símbolo $2T$ segundos, de forma que la velocidad binaria de transmisión sea idéntica en ambos casos). Aunque el lóbulo principal de la señal MSK es más ancho que el de la OQPSK, los lóbulos secundarios de la primera decrecen más rápidamente, por lo que el ancho de banda efectivo de la MSK es significativamente menor que el de la OQPSK (QPSK) (la diferencia es mayor cuanto mayor es el porcentaje de potencia para el que se define el ancho de banda). De hecho, mientras la densidad espectral de potencia de la OQPSK decrece como $1/\omega^2$, para la MSK lo hace como $1/\omega^4$.

Para terminar con nuestra descripción de la modulación MSK es interesante repetir que, aunque se trata de una modulación no lineal, hemos visto cómo, adecuadamente manipulada,

para el caso binario se puede transformar en una modulación de tipo lineal con desplazamiento, lo que nos ha facilitado la determinación de su espectro de potencia. El cálculo del espectro de potencia para una modulación MSK general es bastante más complicado, requiriendo una metodología que se encuentra fuera del alcance de este texto.

7.3.3. Receptores para MSK binaria

Resulta muy sencillo adaptar las estructuras de receptor incoherente propuestas para FSK en el Apartado 7.2.3 al caso de MSK ya que ambas modulaciones se basan en el mismo principio de codificar la información en la frecuencia. Para la obtención de un receptor coherente, uno estaría tentado de proponer la estructura de la Figura 7.21, que no es más que una adaptación del receptor coherente para FSK que tiene en cuenta que los pulsos transmitidos pueden cambiar su signo para mantener continua la fase; de ahí el bloque que calcula el valor absoluto de la salida.

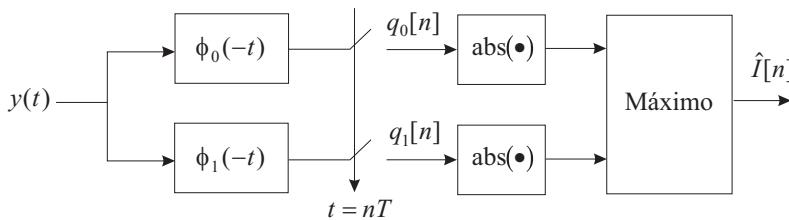


Figura 7.21. Diagrama de bloques de un receptor para MSK binaria basado en el receptor ML para FSK.

Sin embargo, con ser esta una estructura razonable no cabe decir, a diferencia de lo que ocurre con el receptor coherente para CPFSK ortogonal, que sea óptima en el sentido de máxima verosimilitud (ML). La razón estriba en que la toma de decisiones símbolo a símbolo no tiene en cuenta que el transmisor tiene memoria, en el sentido de que a un pulso dado no le puede suceder cualquiera de los otros cuatro, sino sólo dos. Por ejemplo, si durante el intervalo $[nT, (n + 1)T]$ se transmite el pulso $+g_1(t)$, en el intervalo siguiente $[(n + 1)T, (n + 2)T]$ solamente es válido transmitir $-g_0(t)$ ó $-g_1(t)$. En realidad, en el receptor de la Figura 7.21 no estamos teniendo en cuenta este hecho; en otras palabras, aunque improbable, es posible que, en función de las observaciones, el receptor decida que el pulso $+g_0(t)$ sucede al $+g_1(t)$, lo cual no es consistente con la condición de continuidad de fase. Tener en cuenta esta condición contribuiría a reducir la probabilidad de error en el receptor; por tanto, la estructura propuesta no puede ser óptima en el sentido ML. Desgraciadamente, la complejidad del receptor ML es muy superior a la del receptor de la Figura 7.21, como comprobaremos más adelante (Apartado 7.4.2).

Es fácil demostrar (véase Problema P7.9) que la probabilidad de error obtenida con el receptor de la Figura 7.21 es

$$P_e = 2Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) \quad (7.51)$$

esto es, el doble de la que resulta en CPFSK binaria ortogonal con receptor coherente.

También podemos plantear un receptor de MSK siguiendo la analogía con la modulación OQPSK y el receptor propuesto para esta última en la Figura 7.5. El diagrama de bloques del receptor resultante se expone en la Figura 7.22 donde, a efectos ilustrativos, se ha empleado un banco de filtros adaptados, mientras en la Figura 7.5 se utilizaba un banco de correlacionadores.

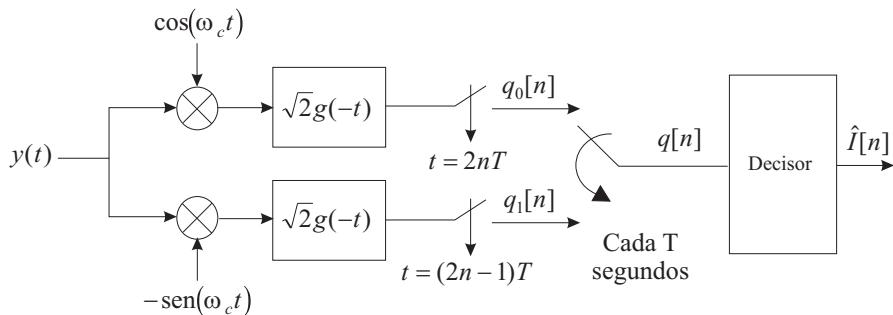


Figura 7.22. Diagrama de bloques de un receptor para MSK binaria basado en el receptor ML para OQPSK.

En este caso volvemos a tener el mismo problema comentado en el párrafo anterior: si no tenemos en cuenta la memoria del receptor, estaremos desperdiciando información valiosa. Por ejemplo, aquí podríamos pensar en emplear la observación $q_1[n]$ de la componente en fase para tomar una decisión sobre $I[n]$, n par (véase Ecuación (7.48)), para lo cual deberíamos conocer $\theta[n]$, que a su vez interviene también en la componente en cuadratura. Pero $I[n]$ y $\theta[n]$ también dependen de $I[n-2]$ y $\theta[n-2]$, a través de $I[n-1], \theta[n-1]$, con n par (véase Ecuación (7.39)), y este argumento se podría llevar hacia atrás, hasta la primera observación recibida. Como consecuencia, para implementar el receptor ML necesitamos que el bloque etiquetado como “Decisor” en la Figura 7.22 tome decisiones conjuntas sobre toda la secuencia recibida y no símbolo a símbolo. Como ya hemos dicho, formalizaremos este tipo de soluciones en el Apartado 7.4.2.

7.4. MODULACIONES DE FASE CONTINUA

Como veremos en breve, las modulaciones CPFSK ortogonal y MSK no son más que casos particulares de una familia de modulaciones denominadas *de fase continua* (“*Continuous Phase Modulations*”, CPM), que tienen la ventaja de mantener constante la envolvente de la señal transmitida y consiguen reducciones significativas en el ancho de banda con respecto al necesario para la modulación QPSK. Conseguir amplitud constante no es difícil; ya hemos visto que para ello basta con que la información se transmita en la fase (o en su derivada, la frecuencia). Para lograr fase continua, es suficiente que la fase no tenga saltos bruscos, cosa que siempre se puede conseguir con un filtrado apropiado.

7.4.1. Señal transmitida CPM

En general, las modulaciones CPM responden a la siguiente expresión para la señal transmitida, que es una generalización de (7.24) y (7.37), correspondientes a las modulaciones CPFSK y MSK, respectivamente:

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \operatorname{sen} [\omega_c t + \theta_0 + \theta(t, i)] \quad (7.52)$$

donde i es la secuencia de símbolos transmitidos, ω_c es la frecuencia nominal de la portadora, θ_0 es la fase inicial de la portadora, E_s es la energía transmitida durante un periodo de símbolo y $\theta(t, i)$ es una función continua de t que puede adoptar diferentes formas, tal como veremos en breve.

Para introducir los parámetros de interés en una modulación CPM, es ilustrativo y conveniente comenzar con una primera generalización de la modulación CPFSK ortogonal, cuya expresión es (7.24). Dicha generalización se obtiene al abandonar la restricción de ortogonalidad, por lo que emplearemos el término CPFSK, sin otros calificativos, para referirnos a este caso.

Sea $s(t)$ una señal PAM en banda base con pulsos rectangulares de duración T segundos, con la forma

$$s(t) = \sum_n I[n]g(t - nT) \quad (7.53)$$

donde los símbolos $I[n]$ pertenecen al conjunto $\{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(M-1)\}$. El pulso rectangular $g(t)$ se normaliza de tal modo que su área sea $1/2$, esto es,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt = 1/2 \quad (7.54)$$

Como en el apartado anterior, el uso de los símbolos $I[n]$ no implica que la constelación empleada sea unidimensional; de hecho, en las modulaciones CPM se complica extraordinariamente la búsqueda de una base para representar las posibles señales transmitidas. A partir de $s(t)$ se genera una señal cuya frecuencia instantánea (esto es, la derivada de la fase instantánea) sea $(\omega_c + 2\omega_d T s(t))$, siendo ω_d la denominada *desviación de frecuencia de pico*, nombre que se corresponde con la máxima excursión de frecuencia con respecto a ω_c para el caso de CPFSK binaria. Teniendo en cuenta que hemos especificado la derivada, la fase se obtendrá por integración, de forma que la señal transmitida será

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \operatorname{sen} \left[\omega_c t + \theta_0 + 2\omega_d T \int_{-\infty}^t s(\tau)d\tau \right] \\ &= \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \operatorname{sen} \left[\omega_c t + \theta_0 + 2\omega_d T \int_{-\infty}^t \sum_n I[n]g(\tau - nT)d\tau \right] \end{aligned} \quad (7.55)$$

Fijémonos en que aunque la señal $s(t)$ tiene discontinuidades (por el uso de pulsos rectangulares), al integrarla dichas discontinuidades desaparecen. Identificando términos con

respecto a la Ecuación (7.52), podemos escribir que

$$\theta(t, \mathbf{i}) = 2\omega_d T \int_{-\infty}^t \sum_n I[n] g(\tau - nT) d\tau \quad (7.56)$$

Para determinar la evolución de la fase $\theta(t, \mathbf{i})$ de la portadora en el intervalo $[nT, (n+1)T]$, basta con realizar la integral (usando (7.54)), resultando

$$\theta(t, \mathbf{i}) = \omega_d T \sum_{m=-\infty}^{n-1} I[m] + \omega_d T \left(\frac{t - nT}{T} \right) I[n], \quad nT \leq t < (n+1)T \quad (7.57)$$

o, equivalentemente,

$$\theta(t, \mathbf{i}) = \theta[n] + 2\pi h I[n] q_g(t - nT), \quad nT \leq t < (n+1)T \quad (7.58)$$

donde h es el denominado *índice de modulación*, definido como $h = \omega_d T / \pi$; $\theta[n]$ es la *fase acumulada* hasta el instante $t = nT$, esto es,

$$\theta[n] = \pi h \sum_{m=-\infty}^{n-1} I[m] \quad (7.59)$$

y, finalmente, $q_g(t)$ es

$$q_g(t) = \int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau \quad (7.60)$$

En el siguiente ejemplo, procedemos a identificar la modulación recién vista con la CPFSK binaria.

Ejemplo 7.4

En el Apartado 7.2 obtuvimos una expresión para la CPFSK ortogonal (Ecuación (7.24)) similar a (7.57). Identificando términos tenemos que, para la CPFSK ortogonal binaria, $I[n] \in \{\pm 1\}$, $\omega_d = \pi/T$ y $h = 1$. Obsérvese que si $\theta[0] = 0$, entonces

$$\theta(t, \mathbf{i}) = \pi \sum_{m=0}^{n-1} I[m] - n\pi I[n] + \frac{\pi t}{T} I[n], \quad nT \leq t < (n+1)T \quad (7.61)$$

Teniendo en cuenta que los $I[m]$ son impares, es inmediato ver que $\pi \sum_{m=0}^{n-1} I[m] - n\pi I[n]$ es un múltiplo entero de 2π , por lo que el término $\theta(t, \mathbf{i})$ es, módulo 2π , igual a $(\pi t/T)I[n]$, por lo que queda establecido que la CPFSK binaria es un caso particular de CPM. La identificación es fácilmente extensible a cualquier modulación M -CPFSK, con los mismos parámetros ω_d y h .

En la Figura 7.23 se representa el llamado *árbol de fases* para la CPFSK binaria. El árbol de fases muestra la evolución con el tiempo del término $\theta(t, \mathbf{i})$ para todos los valores posibles de la secuencia $\{I[n]\}$. Como referencia, se ha tomado $\theta[0] = 0$. Es interesante observar varias características en este árbol de fases:

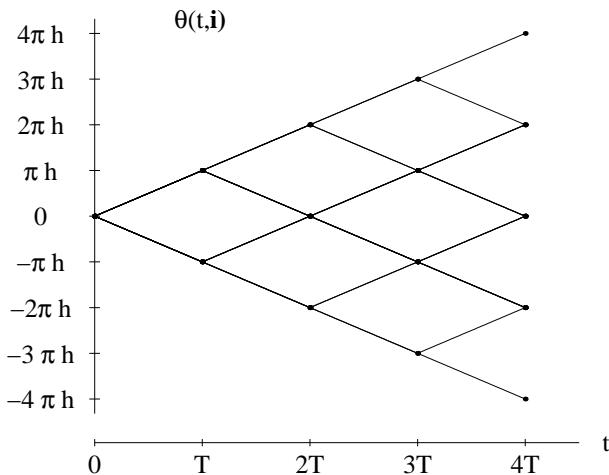


Figura 7.23. Árbol de fases para una CPFSK binaria.

1. Las trayectorias de la fase son lineales, porque los pulsos $g(t)$ que se usan para modular la fase son rectangulares y, por tanto, su integral $q_g(t)$ es lineal.
2. El hecho de que las fases sean indistinguibles módulo 2π hace que el árbol sea invariante a desplazamientos verticales que sean múltiplo de 2π . Por ello, en muchas ocasiones el árbol de fases se representa módulo 2π ; en realidad, es conveniente pensar en el árbol de fases como pegado sobre un cilindro de radio unitario, de modo que las fases $-\pi$ y π son, en realidad, coincidentes.

En el siguiente ejemplo, estudiamos la MSK binaria como caso particular de la CPM.

Ejemplo 7.5

En la MSK binaria, la identificación de términos entre (7.37) y (7.57) nos permite escribir que $\omega_d = \pi/2T$, $h = 1/2$. El árbol de fases es idéntico al de la Figura 7.23, aunque mientras en la CPFSK binaria, las posibles fases al cabo de un periodo de símbolo eran múltiplo entero de π rad, ahora lo son de $\pi/2$ rad.

Los pulsos $g(t)$ que hemos venido empleando en este apartado eran rectangulares y de duración un periodo de símbolo. En realidad, no hay ningún impedimento para utilizar otros tipos de pulsos. La posibilidad de usar pulsos con respuesta temporal más suave o duración mayor de T segundos, abre la puerta a variaciones menos bruscas en la fase, por lo que se puede esperar un menor ancho de banda ocupado, a costa de una mayor complejidad (especialmente del receptor) debida a la introducción de memoria, fenómeno que ya observamos en la MSK. Cuando la duración del pulso $g(t)$, que supondremos causal, es de L periodos de símbolo, $L > 1$, hablamos de *CPM de respuesta parcial*, quedando el nombre *CPM de respuesta completa* reservado para el caso $L = 1$. En cualquier caso, mantendremos vigente la condición (7.54) por la que la integral de $g(t)$ es $1/2$ para $t \geq LT$. En definitiva, pode-

mos decir que la CPFSK es un caso particular de CPM con pulsos rectangulares y duración $L = 1$ periodo de símbolo.

Generalizando los cálculos realizados en (7.57), podemos escribir la fase $\theta(t, i)$ en el intervalo $[nT, (n + 1)T]$ como

$$\theta(t, i) = 2\pi h \sum_{m=-\infty}^n I[m]q_g(t - mT) \quad (7.62)$$

$$= \pi h \sum_{m=-\infty}^{n-L} I[m] + 2\pi h \sum_{m=n-L+1}^n I[m]q_g(t - mT) \quad (7.63)$$

$$= \theta[n] + \theta(t, I[n], I[n - 1], \dots, I[n - L + 1]) \quad (7.64)$$

En (7.63) $\theta[n]$ representa la fase acumulada hasta el instante nT debida a todos los pulsos que ya han colmado la integral, mientras que $\theta(t, I[n], I[n - 1], \dots, I[n - L + 1])$ representa la contribución de todos aquellos pulsos que aún no han llegado hasta su valor final en el instante $(n + 1)T$. Esta última función se puede descomponer en las contribuciones debidas a los símbolos pasados y la correspondiente al símbolo actual. De este modo:

$$\theta(t, I[n], \dots, I[n - L + 1]) = 2\pi h \sum_{m=n-L+1}^{n-1} I[m]q_g(t - mT) + 2\pi h I[n]q_g(t - nT) \quad (7.65)$$

Para describir la evolución de la fase $\theta(t, i)$ podemos recurrir a un diagrama de estados o a un diagrama de rejilla (véase Apartado 6.2.2). Mientras en la CPM de respuesta completa el estado viene determinado exclusivamente por $\theta[n]$, para la CPM de respuesta parcial necesitamos definir un vector de estados que contenga, además de $\theta[n]$, los símbolos que aparecen explícitamente en (7.65), de modo que dicho vector de estados en el instante n , que denotaremos por $\psi[n]$, será

$$\psi[n] = (\theta[n], I[n - 1], \dots, I[n - L + 1])^T \quad (7.66)$$

Para el caso de respuesta completa ($L = 1$) vemos que el vector de estados $\psi[n]$ se reduce a $\theta[n]$, tal como habíamos necesitado para CPFSK y MSK.

¿Cuántos estados diferentes necesita un diagrama de rejilla para CPM? En principio, atendiendo a las combinaciones posibles de $L - 1$ símbolos que pueden tomar M valores diferentes, tendríamos un total de M^{L-1} , multiplicado por el número de valores distintos que $\theta[n]$ puede tomar. Calculemos este último valor, suponiendo que el índice de modulación h es un número racional, de la forma

$$h = \frac{P}{Q} \quad (7.67)$$

con P y Q números enteros coprimos⁴. Por otro lado, a partir de (7.63) tenemos que $\theta[n]$ es

⁴Dos números enteros son coprimos si su máximo común divisor es 1.

una suma de números enteros multiplicada por πh , que puede tomar los siguientes valores

$$\theta[n] \in \left\{ 0, \pi \frac{P}{Q}, 2\pi \frac{P}{Q}, \dots, N\pi \frac{P}{Q}, \dots \right\} \quad (7.68)$$

Recordemos que de cara al número de estados las fases son indistinguibles módulo 2π , por lo que basta con averiguar cuántos valores diferentes módulo 2π puede tomar la secuencia en (7.68). Para P un número entero par, la secuencia se repite a partir de $N = Q$, por lo que $\theta[n]$ puede tomar Q valores diferentes; para P impar, la secuencia no se repite hasta $N = 2Q$. Recapitulando, el número de estados es

$$\begin{cases} QM^{L-1}, & P \text{ par} \\ 2QM^{L-1}, & P \text{ impar} \end{cases} \quad (7.69)$$

Ejemplo 7.6

- a) Para la CPFSK binaria ($M = 2$) con $h = 1$ y $L = 1$, la expresión (7.69) determina que el número de estados es 2, que se corresponden con $\psi[n] = \theta[n] \in \{0, \pi\}$. Para la MSK binaria ($M = 2$), con $h = 1/2$ y $L = 1$, el número de estados es 4, que se corresponden con $\psi[n] = \theta[n] \in \{0, \pm\pi/2, \pi\}$.
- b) Para una modulación CPM de respuesta parcial, con longitud de los pulsos $L = 2$ períodos de símbolo, índice de modulación $h = 2/3$ y $M = 4$, el número de estados $\psi[n] = (\theta[n], I[n-1])$ es 12.

Para finalizar la descripción del diagrama de rejilla basta con especificar el vector de estado $\psi[n+1]$ a partir de la entrada $I[n]$ y del valor del vector de estado en el instante anterior $\psi[n]$. Esto es inmediato a partir de la definición de $\theta[n+1]$, ya que

$$\theta[n+1] = \theta[n] + \pi h I[n-L+1] \quad (7.70)$$

Finalmente, completan la descripción de $\psi[n+1]$ los símbolos $I[n], \dots, I[n-L+2]$.

El ejemplo siguiente muestra cómo determinar el diagrama de rejilla para una modulación CPM.

Ejemplo 7.7

Sea una modulación CPM con $L = 2$, $h = 2/3$ y $M = 2$. Los 6 posibles valores del vector de estados son

$$\psi[n] = (\theta[n], I[n-1]) \in \{(0, +1), (0, -1), (2\pi/3, +1), (2\pi/3, -1), (4\pi/3, +1), (4\pi/3, -1)\} \quad (7.71)$$

En la Figura 7.24 se representan las posibles transiciones entre estados, de acuerdo con la Ecación (7.70).

Dentro de la inabordable cantidad de posibilidades a la hora de elegir los pulsos $g(t)$ presentaremos aquí, con ánimo ilustrativo, los más conocidos, aparte de los rectangulares, que son los llamados *pulsos en coseno alzado* y que no deben confundirse con los empleados para satisfacer el criterio de Nyquist en modulaciones de tipo lineal. Los pulsos en coseno

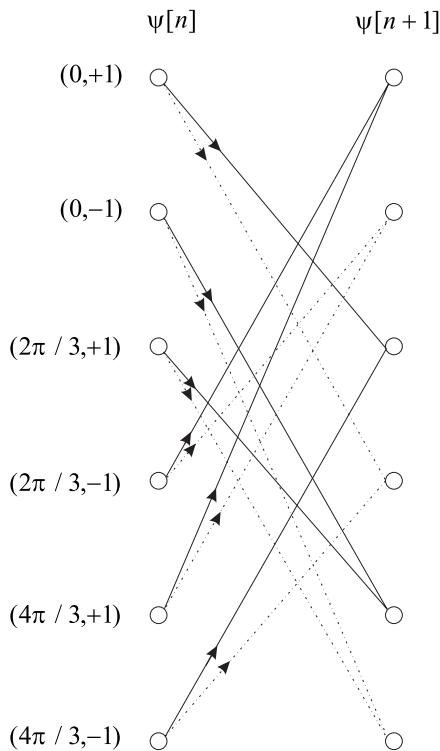


Figura 7.24. Diagrama de rejilla para la modulación CPM del Ejemplo 7.7. Las transiciones en línea continua se producen con $I[n] = +1$. Las transiciones en línea discontinua se producen con $I[n] = -1$.

alzado tienen la ventaja de suavizar las transiciones de fase debido a su forma (compárese con la de los pulsos rectangulares). La expresión de los pulsos $g(t)$ usados en este caso es

$$g(t) = \frac{1}{2LT} \left[1 - \cos \left(\frac{2\pi t}{LT} \right) \right] w_{LT}(t) \quad (7.72)$$

donde w_{LT} es un pulso rectangular causal de duración LT segundos, definido según (7.2). El pulso $g(t)$ se representa en la Figura 7.25 junto con su integral $q_g(t)$ para $L = 1$. Como podemos observar en la Figura 7.26, donde se representa el árbol de fases para una CPM cuaternaria con $L = 2$ y pulsos en coseno alzado, las transiciones son más suaves, lo que hace que el ancho de banda ocupado resulte menor. En la Figura 7.26 se ha supuesto que la secuencia $I[n]$ para $n < 0$ toma idénticamente el valor $+3$ y, como referencia a efectos de representación, se ha tomado una fase inicial de 0 radianes.

Otro caso interesante es el de la llamada GMSK (“Gaussian MSK”), de importancia por ser empleada como modulación en el estándar europeo GSM de comunicaciones móviles de segunda generación y en el estándar europeo de comunicaciones inalámbricas DECT. La GMSK coincide con la MSK binaria en el empleo de $h = 1/2$ y $M = 2$, pero ahora la duración de los pulsos es mayor que un periodo de símbolo ($L > 1$) y los pulsos $g(t)$

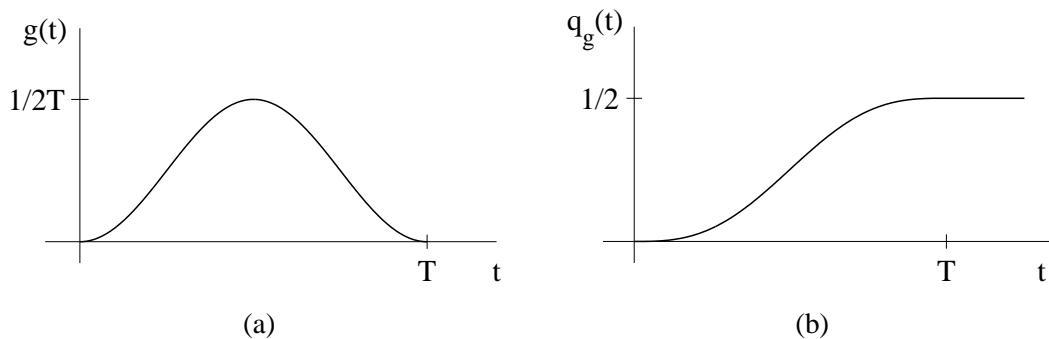


Figura 7.25. (a) Pulso en coseno alzado ($L = 1$) y (b) su integral.

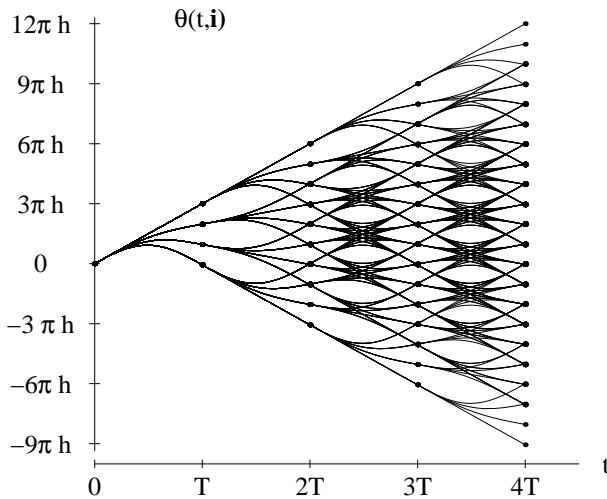


Figura 7.26. Árbol de fases para una modulación CPM cuaternaria con pulsos en coseno alzado y $L = 2$.

son el resultado de pasar el pulso rectangular empleado en MSK a través de un filtro con respuesta al impulso gausiana y truncando el resultado en tiempo. El resultado es que los pulsos empleados tienen la forma

$$g(t) = \frac{1}{2T} \left\{ Q\left(\frac{2\pi\beta(t - T/2)}{\sqrt{\ln 2}}\right) - Q\left(\frac{2\pi\beta(t + T/2)}{\sqrt{\ln 2}}\right) \right\} \quad (7.73)$$

donde $Q(\cdot)$ es la conocida función Q definida mediante (3.31) en la Página 103 y que ya empleamos en el cálculo de probabilidades de error en el Capítulo 4, y β es un parámetro que permite controlar la duración temporal de los pulsos. A un mayor valor de β le corresponde una mayor duración temporal en $g(t)$ por lo que el ancho de banda disminuye. A cambio, al aumentar β crece el número de estados del diagrama de rejilla y con él la complejidad del detector en el receptor. En el caso del estándar GSM, $\beta = 0,3$ mientras que en el estándar

DECT, $\beta = 0,2$. En la Figura 7.27 se representa $g(t)$ y su integral $q_g(t)$ para $\beta = 0,2$ y $\beta = 0,3$.

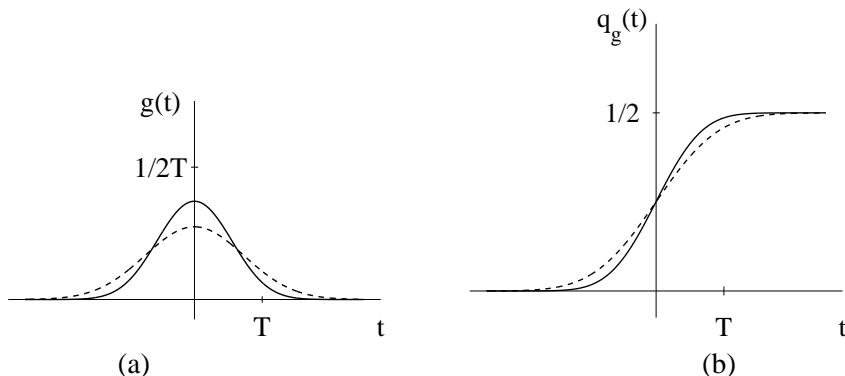


Figura 7.27. (a) Pulsos gaussianos para $\beta = 0,2$ (línea continua) y $\beta = 0,3$ (línea discontinua); (b) integrales respectivas.

Para concluir nuestra descripción de las modulaciones CPM, mencionaremos dos posibles extensiones, en las que no profundizaremos por quedar fuera de los objetivos de este texto. Por una parte, en la denominada *CPM multiamplitud*, la amplitud de la señal transmitida no es constante, sino que puede tomar uno de entre un conjunto de valores posibles. En la llamada *CPM multi-h* es el índice de modulación h el que varía de forma cíclica dentro de un conjunto de índices permitidos.

7.4.2. Detector coherente ML para CPM

En este apartado estudiaremos el diseño de un detector para CPM según el criterio de máxima verosimilitud (ML) en un canal gausiano. Recordemos que en el intervalo $[0, NT)$ la señal transmitida $x(t)$ tiene la forma

$$x_i(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \operatorname{sen} [\omega_c t + \theta_0 + \theta(t, i)], \quad 0 \leq t < NT \quad (7.74)$$

donde i es la secuencia de símbolos transmitidos, que deseamos averiguar con la mínima probabilidad de error, N es el número de períodos de símbolo transmitidos y la dependencia de la señal transmitida con i se explicita escribiendo $x_i(t)$. Para simplificar la discusión, supondremos que la decisión se basa en la observación de la señal recibida $y(t)$ en el intervalo $[0, NT)$ y que la fase inicial de la portadora θ_0 es nula. Como sabemos, para canales gausianos con ruido blanco, el criterio ML dicta que elijamos aquella secuencia \hat{i} tal que la distancia euclídea entre las proyecciones sobre una base ortonormal de $y(t)$ y $x_{\hat{i}}(t)$ sea mínima. Teniendo en cuenta que las distancias euclídeas se pueden calcular de forma equivalente en el espacio de Hilbert L_2 (véase Apartado 4.2), podemos concluir que debemos

buscar aquella secuencia $\hat{\mathbf{i}}$ tal que

$$\int_0^{NT} \left| y(t) - \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \sin [\omega_c t + \theta(t, \hat{\mathbf{i}})] \right|^2 dt \quad (7.75)$$

sea mínima. Desarrollando el cuadrado en (7.75) y sabiendo que la señal $y(t)$ no depende de $\hat{\mathbf{i}}$ y que $\mathcal{E}\{x_{\hat{\mathbf{i}}}(t)\} = NE_s$, por lo que tampoco depende de $\hat{\mathbf{i}}$, podemos concluir que el receptor ML puede de forma equivalente seleccionar aquella secuencia que maximiza la correlación

$$\langle \mathbf{x}_{\hat{\mathbf{i}}}, \mathbf{y} \rangle \doteq \int_0^{NT} y(t) \sin [\omega_c t + \theta(t, \hat{\mathbf{i}})] dt. \quad (7.76)$$

Para resolver el problema de encontrar $\hat{\mathbf{i}}$ se puede emplear el algoritmo de Viterbi (Apartado 6.2.2), ya que, si definimos las métricas

$$l_n(\mathbf{y}, \mathbf{x}_i) \doteq \int_{nT}^{(n+1)T} y(t) \sin [\omega_c t + \theta(t, i)] dt, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (7.77)$$

vemos que $l_n(\mathbf{y}, \mathbf{x}_i)$ depende únicamente de la señal recibida en el intervalo $[nT, (n+1)T]$, del vector de estado $\psi[n]$ (véase Ecuación 7.66) y del símbolo $I[n]$. La correlación en (7.76) se puede escribir como una suma de métricas de rama

$$\langle \mathbf{x}_{\hat{\mathbf{i}}}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} l_n(\mathbf{y}, \mathbf{x}_{\hat{\mathbf{i}}}) \quad (7.78)$$

Para aplicar el algoritmo de Viterbi, sólo tenemos que representar el diagrama de rejilla de la modulación CPM en cuestión, según lo explicado más arriba, asignar a cada rama la métrica (7.77) correspondiente y proceder como en el Apartado 6.2.2, determinando el camino superviviente hasta cada nodo como aquél que llega a dicho nodo con la mayor⁵ métrica acumulada, y eligiendo el camino con mayor métrica una vez alcanzado el final de la rejilla (o, forzando las decisiones con una determinada profundidad de truncamiento, Página 319). Obsérvese que el cómputo de las métricas (7.77) requiere la evaluación de una integral que, en la práctica, se suele implementar mediante una suma, tomando varias muestras de $y(t)$ por periodo de símbolo.

Veamos a continuación cómo calcular la probabilidad de error de símbolo en un canal gausiano representado por ruido $n(t)$ de media cero y densidad espectral de potencia $N_0/2$ W/Hz. Tal y como se discute en el Apartado 6.2.3, la probabilidad de error de símbolo se puede expresar en términos de la probabilidad de elegir un camino erróneo que comience en una etapa dada de la rejilla. En particular, la aproximación (6.33) permite escribir la probabilidad de error de símbolo P_e como

$$P_e \approx \kappa_2 Q \left(\frac{D_{min}}{2\sqrt{N_0/2}} \right) \quad (7.79)$$

⁵Obsérvese que deseamos *maximizar* la correlación.

donde D_{min} denota la distancia euclídea mínima entre caminos en el diagrama de rejilla y κ_2 está relacionada con el número de caminos erróneos a distancia mínima. Para calcular la distancia mínima entre caminos, basta con considerar que cada camino está asociado únicamente con una posible señal transmitida $x_i(t)$, siendo i la secuencia de símbolos asociada. Por tanto, D_{min} no es más que la distancia euclídea mínima entre señales transmitidas. Con este fin, conviene desarrollar la distancia euclídea entre dos señales genéricas, $x_i(t)$ y $x_j(t)$, tales que las secuencias de símbolos asociadas cumplen $i \neq j$. Esta distancia, que denotaremos por $d(x_i(t), x_j(t))$ se puede calcular como sigue, suponiendo N símbolos transmitidos,

$$\begin{aligned}
 d^2(x_i(t), x_j(t)) &= \int_0^{NT} |x_i(t) - x_j(t)|^2 dt \\
 &= \int_0^{NT} x_i^2(t) dt + \int_0^{NT} x_j^2(t) dt - 2 \int_0^{NT} x_i(t)x_j(t) dt \\
 &= 2NE_s - 2\frac{2E_s}{T} \int_0^{NT} \sin[\omega_c t + \theta(t, i)] \sin[\omega_c t + \theta(t, j)] dt \\
 &= 2NE_s - \frac{2E_s}{T} \int_0^{NT} \cos[\theta(t, i) - \theta(t, j)] dt \\
 &= \frac{2E_s}{T} \int_0^{NT} (1 - \cos[\theta(t, i) - \theta(t, j)]) dt
 \end{aligned} \tag{7.80}$$

Además, a partir de la definición de $\theta(t, i)$ en (7.62), es inmediato concluir que $\theta(t, i) - \theta(t, j) = \theta(t, i - j) = \theta(t, e)$, donde e es la secuencia de error entre i y j , de tal modo que si $I[n], J[n] \in \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(M-1)\}$, entonces $E[n] \in \{0, \pm 2, \dots, \pm 2(M-1)\}$. Por consiguiente, para encontrar D_{min}^2 basta con considerar

$$D_{min}^2 = \min_{e \in \mathcal{E}} \left\{ \frac{2E_s}{T} \int_0^{NT} (1 - \cos[\theta(t, e)]) dt \right\} \tag{7.81}$$

siendo \mathcal{E} el conjunto de posibles secuencias de error excluyendo $e \neq \mathbf{0}$, y N suficientemente grande como para que no se produzcan truncamientos anticipados del camino de distancia mínima. En cualquier caso, el cálculo de las integrales debe con frecuencia realizarse mediante técnicas numéricas. En el Problema P7.10 se calcula una cota a la distancia mínima para los casos de CPFSK y MSK binaria.

También se pueden construir receptores incoherentes para CPM, que no se consideran en este texto. Recomendamos al lector interesado la consulta de [61] y [2].

7.5. LECTURAS ADICIONALES

Las modulaciones de frecuencia más sencillas, como la FSK o la MSK, se pueden encontrar en la práctica totalidad de los libros de texto sobre comunicaciones digitales, como [43], [94], [7]. Por el nivel de detalle y el completo análisis de las técnicas empleadas en

recepción se recomienda consultar el texto de Proakis [61], que aquí se ha tomado como fuente para los desarrollos de algunos apartados.

Las modulaciones CPM han ido perdiendo vigencia con el transcurso del tiempo, especialmente a causa de la complejidad de las implementaciones que de ellas se derivan. El libro de Anderson, Aulin y Sundberg [1] es ya un clásico sobre la materia y es especialmente interesante para consultar información sobre las características espectrales y distancias en las modulaciones CPM multiamplitud y multi-h. Un buen resumen de este material está en el más reciente libro de Anderson y Svensson [2]. También resulta recomendable el tutorial [3]. El cálculo del espectro de las señales OQPSK y CPFSK que hemos presentado está basado en el texto de Benedetto y Biglieri [7].

Existen dos campos de aplicación en los que las modulaciones presentadas en este capítulo han sido profusamente utilizadas: las comunicaciones móviles y las comunicaciones vía satélite. En [80] se discute con un alto grado de detalle las modulaciones empleadas en comunicaciones móviles, excepto las de espectro ensanchado. Otro caso similar es [25] que, una vez desprovisto de su autobombo, resulta un libro atractivo por su enfoque pragmático.

PROBLEMAS

- P7.1 Considere la transmisión de una señal paso banda $x(t) = \sqrt{2}\Re\{s(t)e^{j\omega_c t}\}$ correspondiente a una señal banda base $s(t)$ y frecuencia de portadora ω_c rad/seg a través de un filtro paso banda $h(t)$ de la forma

$$h(t) = w_\tau(t) \cdot \cos(\omega_c t) \quad (7.82)$$

siendo $w_\tau(t)$ un pulso rectangular causal de duración τ segundos, con $0 < \tau < T$, siendo T el periodo de símbolo. Observe que este es un mal filtro paso banda, pero suficiente para ilustrar la interacción entre los saltos de fase y el filtrado.

- 1.1. Demuestre que la señal filtrada $y(t) = x(t) * h(t)$ se puede escribir como

$$y(t) = \sqrt{2}\Re\{(s(t) * w_\tau(t))e^{j\omega_c t}\} \quad (7.83)$$

de forma que la señal banda base equivalente es $s(t) * w_\tau(t)$ (Ayuda: utilice los resultados del Apartado 5.4.4).

Como consecuencia, si $s_I(t)$ y $s_Q(t)$ denotan las componentes en fase y cuadratura de $s(t)$, respectivamente, las componentes en fase y cuadratura tras el filtrado serán $s_{fI}(t) \doteq s_I(t) * w_\tau(t)$ y $s_{fQ}(t) \doteq s_Q(t) * w_\tau(t)$, respectivamente.

- 1.2. Sea $s(t)$ una señal QPSK con pulsos rectangulares. Demuestre que el valor mínimo de la envolvente de la señal filtrada $\sqrt{2(s_{fQ}^2(t) + s_{fI}^2(t))}$ es 0 y que el valor máximo es $\tau \sqrt{\frac{2E_s}{T}}$.
- 1.3. Para el caso en que $s(t)$ es una señal OQPSK demuestre que el cociente entre el valor máximo y el mínimo de la envolvente de la señal filtrada es $\sqrt{2}$.

P7.2 En este capítulo hemos estudiado un buen número de modulaciones en las que las variaciones de fase juegan un papel fundamental. Una forma ilustrativa de visualizar las diferentes modulaciones es la llamada gráfica I/Q. En ella, se representa el par constituido por las componentes en fase y cuadratura en el instante t , $(s_I(t), s_Q(t))$, como un punto del plano, de modo que, a medida que t varía, obtenemos una representación de cómo evoluciona la magnitud y fase de la señal en banda base. La envolvente de la señal paso banda es proporcional al radio de su gráfica I/Q.

- 2.1. Compruebe que las gráficas I/Q para las modulaciones QPSK y QPSK codificada diferencialmente son iguales y contienen un conjunto finito de puntos. Típicamente, estos puntos se unen con líneas discontinuas para reflejar las posibles transiciones (instantáneas) de fase.
- 2.2. Dibuje la gráfica I/Q de la modulación OQPSK.
- 2.3. Dibuje las gráficas I/Q de las modulaciones MSK y CPFSK binarias.

P7.3 Demuestre que el receptor DPSK de la Figura 7.9 no produce propagación de errores. Para ello, sea $\phi[n]$ la fase transmitida en el periodo n -ésimo (obtenida según la Ecación (7.13)) y suponga que la señal recibida $q[n]$ es tal que $q[n] = \sqrt{E_s} e^{j\phi[n]}$ para todo n , excepto $n = n_0$, en que $q[n_0] = \sqrt{E_s} e^{j(\phi[n_0] + \epsilon[n_0])}$, siendo $|\epsilon[n_0]|$ suficientemente grande como para producir un error en decisión tomada en el instante n_0 . Demuestre que la decisión tomada en el instante $(n_0 + 1)$ también será incorrecta, pero que para $n > (n_0 + 1)$ no hay errores.

P7.4 Suponga la transmisión de una señal M -PSK a través de un canal gausiano que introduce ruido con densidad espectral de potencia $N_0/2$ W/Hz y que, además, introduce un desfase de θ rad desconocido en el receptor. El receptor mantiene las regiones de decisión que se corresponderían con $\theta = 0$.

- 4.1. Bajo la hipótesis de E_s/N_0 alta, escriba una expresión aproximada para la probabilidad de error de símbolo $P_e(\theta)$, en el rango $\theta \in (-\pi/M, \pi/M)$, en función de θ . (Ayuda: tenga en cuenta que la probabilidad de error está relacionada con la distancia del símbolo transmitido, rotado θ rad (véase Figura 7.6), a la frontera de decisión).
- 4.2. Sea d_{min} la distancia mínima entre símbolos de la constelación. Definimos la distancia efectiva $d_{ef}(\theta)$ como aquella tal que la probabilidad de error $P_e(\theta)$ se puede aproximar como sigue

$$P_e(\theta) \approx \kappa Q \left(\frac{d_{ef}(\theta)}{2\sqrt{N_0/2}} \right) \quad (7.84)$$

para alguna constante κ . Represente el cociente $d_{min}/d_{ef}(\theta)$ (en dB) con respecto a θ en el rango $\theta \in (-\pi/M, \pi/M)$. Este cociente puede interpretarse como la pérdida de rendimiento (medido en reducción de la SNR efectiva) debida al desconocimiento de la fase θ y sirve para establecer unos límites de tolerancia a los algoritmos de recuperación de fase para receptores coherentes.

P7.5 Considere una señal QPSK que ha sido obtenida modulando una portadora de frecuencia ω_c rad/seg. En el receptor, la demodulación se realiza con una frecuencia $\omega_c + \Delta\omega$ rad/seg, lo que modela la inevitable diferencia entre las frecuencias de los osciladores del transmisor y el receptor, o la desviación de frecuencia debida al efecto Doppler. El canal es gausiano con densidad espectral de potencia de ruido $N_0/2$ W/Hz y la respuesta combinada transmisor/receptor cumple el criterio de Nyquist. El periodo de símbolo es T seg.

- 5.1. Demuestre que si los símbolos transmitidos son $A[n]$, la señal a la salida del muestreador del receptor es

$$q[n] = A[n]e^{j(\omega_0 n + \theta)} + z[n]$$

donde $\omega_0 = \Delta\omega \cdot T$, θ es el desfase entre las sinusoides usadas en modulación y demodulación, y $z[n]$ es ruido blanco, gausiano, circularmente simétrico, de media cero y varianza $\sigma_z^2 = N_0$.

- 5.2. Demuestre que si $\omega_0 = P\pi/Q$, con P, Q dos números enteros positivos tales que $P/Q < 1$, entonces la probabilidad de error de símbolo es mayor que 0.5, independientemente del valor de θ .
- 5.3. Considere ahora un sistema DQPSK. Obtenga una expresión aproximada de la $P_e(\omega_0)$, probabilidad de error de símbolo en función de ω_0 , cuando E_s/N_0 es grande. (Ayuda: utilice los resultados del Problema P7.4. Recuerde asimismo que para la DQPSK el ruido equivalente es 3dB superior al correspondiente a PSK.)
- 5.4. Obtenga (numéricamente) el rango de valores de ω_0 para el que la pérdida de la SNR efectiva con respecto al caso $\omega_0 = 0$ es inferior a 3 dB.

P7.6 Una modulación de fase diferencial empleada en algunos estándares de telefonía celular americanos y japoneses es la conocida como $\pi/4$ -DQPSK. Esta modulación es similar a una DQPSK convencional, excepto en que los saltos de fase $\Delta_\phi[n]$ pertenecen al conjunto $\{\pm\pi/4, \pm 3\pi/4\}$. La fase transmitida $\phi[n]$ se genera según la Ecación (7.13), con $\phi[-1] = 0$.

- 6.1. Demuestre que los conjuntos de fases transmitidas en los instantes pares e impares son disjuntos.
- 6.2. Dibuje el diagrama I/Q de esta modulación (véase Problema P7.2) uniendo las posibles transiciones entre símbolos con línea discontinua. Observe que las transiciones conectan los dos conjuntos del apartado anterior.
- 6.3. Considere un filtro paso banda como el del Problema P7.1. Calcule el cociente entre los valores máximo y mínimo de la envolvente de la señal filtrada y compárela con el de la QPSK convencional (que a su vez es igual al de la DQPSK convencional).

- P7.7 Considere el receptor incoherente para FSK binaria de la Figura 7.15. Suponga que $\omega_0 T \gg 1$ y $\omega_1 T \gg 1$, $\omega_0 = 2\pi K/T$, para algún entero K y $\omega_0 = \omega_1 + 2\pi/T$ (condición de ortogonalidad). Considere la transmisión en el intervalo $[0, T]$ del símbolo correspondiente a la frecuencia ω_0 a través de un canal sin ruido que sólo introduce un desfase θ , de modo que la señal recibida $y(t)$ es (7.33). Demuestre que las variables de decisión $r_0[n]$ y $r_1[n]$ del detector de ley cuadrática cumplen

$$r_0[n] \approx E_s^2; \quad r_1[n] \approx 0$$

para cualquier θ .

Suponga ahora que no se cumple la condición de ortogonalidad. Calcule las variables de decisión en función de $\Delta\omega \doteq \omega_1 - \omega_0$.

- P7.8 Demuestre que las secuencias $I[n] \cos(\theta[n])(-1)^{n/2}$ y $\cos(\theta[n])(-1)^{n/2}$, con n par, que dan lugar a las componentes en fase y cuadratura de la señal MSK según la Ecuación (7.48), son blancas y mutuamente incorrelacionadas. Debe tener presente que los $\theta[n]$ sirven para garantizar la continuidad de fase y, por tanto, dependen de los $I[n]$.

- P7.9 Demuestre que la probabilidad de error de símbolo en MSK binaria cuando se emplea el receptor de la Figura 7.21 es la dada por (7.51).

- P7.10 Considere la transmisión de una señal CPM binaria ($M = 1$) de respuesta completa ($L = 1$), con índice de modulación h racional, a través de un canal gausiano con densidad espectral de potencia de ruido $N_0/2$ W/Hz. Sean dos secuencias de símbolos i, j tales que ambas difieren únicamente en los símbolos correspondientes a $n = 0, 1$.

- 10.1. Demuestre que los caminos del diagrama de rejilla correspondientes a las secuencias i, j se separan en el instante $n = 0$ y se vuelven a juntar al cabo de dos transiciones.
- 10.2. Considere la secuencia de error $e = i - j$. Observe que $E[n] \in \{0, \pm 2\}$ para todo n . Utilice la Ecuación (7.81) para demostrar que la distancia entre las señales $x_i(t)$ y $x_j(t)$ es tal que

$$d^2(x_i(t), x_j(t)) = 4E_s \left(1 - \frac{\sin 2\pi h}{2\pi h} \right) \quad (7.85)$$

La anterior es una cota superior a la distancia mínima. ¿Por qué?

- 10.3. Utilice la cota anterior para obtener una aproximación de la probabilidad de error de símbolo. Particularice dicha expresión para el caso de MSK ($h = 1/2$). Compare esta probabilidad con la del receptor de la Figura 7.21.

APÉNDICES

7.A. ESPECTRO DE UNA SEÑAL MULTIPULSO SIN MEMORIA

En este apéndice calculamos el espectro de potencia de un proceso de la forma

$$X(t) = K \sum_n g_{A[n]}(t - nT) \quad (7.86)$$

donde $K = \sqrt{2E_s/T}$, los pulsos $g_i(t)$, $i = 0, \dots, M-1$ tienen duración igual o menor que T segundos, y los símbolos $A[n]$ son estadísticamente independientes y uniformemente distribuidos en $\{0, 1, \dots, M-1\}$. En primer lugar, es fácil comprobar que el proceso $X(t)$ es cicloestacionario de periodo T , por lo que la autocorrelación $R_x(t + \tau, t)$ es una función periódica de t y, por tanto, la función de autocorrelación promediada se puede calcular sobre un único periodo

$$\begin{aligned} \bar{R}_x(\tau) &= \frac{1}{T} \int_0^T R_x(t + \tau, t) dt \\ &= \frac{K^2}{T} \sum_n \sum_l \int_0^T E\{g_{A[n]}(t + \tau - nT)g_{A[l]}(t - lT)\} dt \end{aligned} \quad (7.87)$$

Es conveniente introducir la media $\mu_g(t)$ de los pulsos transmitidos, ya que, en general, esta no será nula

$$\mu_g(t) \doteq E\{g_{A[n]}(t)\} = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} g_i(t) \quad (7.88)$$

donde la última igualdad es consecuencia del carácter equiprobable de los símbolos. También será conveniente definir, para todo i , $0 \leq i \leq M-1$, $\tilde{g}_i(t) \doteq g_i(t) - \mu_g(t)$. Obsérvese que $E\{\tilde{g}_{A[n]}(t)\} = 0$, donde la esperanza se toma sobre la variable $A[n]$.

Recordando la independencia de los símbolos, las funciones $g_{A[n]}(t)$ y $g_{A[l]}(t)$ serán independientes para cualquier t siempre que $n \neq l$. Esta consideración nos permite escribir

$$\begin{aligned} E\{g_{A[n]}(t + \tau - nT)g_{A[l]}(t - lT)\} &= E\{g_{A[n]}(t + \tau - nT)\} \cdot E\{g_{A[l]}(t - lT)\} \\ &= \mu_g(t + \tau - nT)\mu_g(t - lT), \quad n \neq l \end{aligned} \quad (7.89)$$

Para el caso $n = l$, tenemos

$$\begin{aligned} E\{g_{A[n]}(t + \tau - nT)g_{A[n]}(t - nT)\} &= E\{[\tilde{g}_{A[n]}(t + \tau - nT) + \mu_g(t + \tau - nT)] \\ &\quad \cdot [\tilde{g}_{A[n]}(t - nT) + \mu_g(t - nT)]\} \\ &= E\{\tilde{g}_{A[n]}(t + \tau - nT)\tilde{g}_{A[n]}(t - nT)\} \\ &\quad + \mu_g(t + \tau - nT)\mu_g(t - nT) \end{aligned} \quad (7.90)$$

Ahora estamos en condiciones de escribir (7.87) como

$$\begin{aligned}\bar{R}_x(\tau) &= \frac{K^2}{T} \sum_n \sum_l \int_0^T \mu_g(t + \tau - nT) \mu_g(t - lT) dt \\ &+ \frac{K^2}{T} \sum_n \int_0^T E\{\tilde{g}_{A[n]}(t + \tau - nT) \tilde{g}_{A[n]}(t - nT)\} dt\end{aligned}\quad (7.91)$$

Denotamos los dos sumandos anteriores por $\bar{R}_{xd}(\tau)$ y $\bar{R}_{xc}(\tau)$ respectivamente, mientras que sus transformadas respectivas son $S_{xd}(j\omega)$ y $S_{xc}(j\omega)$. A continuación, desarrollamos cada una de las autocorrelaciones promediadas y sus espectros asociados.

$$\begin{aligned}\bar{R}_{xd}(\tau) &= \frac{K^2}{T} \sum_n \sum_l \int_{-lT}^{T-lT} \mu_g(t + \tau + lT - nT) \mu_g(t) dt \\ &= \frac{K^2}{T} \sum_m \sum_l \int_{-lT}^{T-lT} \mu_g(t + \tau + mT) \mu_g(t) dt \\ &= \frac{K^2}{T} \sum_m \int_{-\infty}^{\infty} \mu_g(t + \tau + mT) \mu_g(t) dt \\ &= \frac{K^2}{T} \sum_m r_{\mu_g}(\tau + mT) \\ &= \frac{K^2}{T} r_{\mu_g}(t) * \sum_m \delta(\tau + mT)\end{aligned}\quad (7.92)$$

donde $r_{\mu_g}(t) \doteq \mu_g(t) * \mu_g(-t)$ es la función de ambigüedad temporal de $\mu_g(t)$. Para calcular $S_{xd}(j\omega)$, sólo tenemos que recordar que la transformada de un tren de impulsos espaciados T segundos es otro tren de impulsos espaciados $2\pi/T$ rad/seg. Por tanto,

$$S_{xd}(j\omega) = \frac{K^2}{T^2} S_{\mu_g}(j\omega) \sum_m \delta\left(j\omega - j\frac{2\pi m}{T}\right) \quad (7.93)$$

donde $S_{\mu_g}(j\omega)$ es la Transformada de Fourier de $r_{\mu_g}(\tau) = \mu_g(\tau) * \mu_g(-\tau)$. A partir de (7.88) es inmediato ver que

$$S_{\mu_g}(j\omega) = \frac{1}{M^2} \left| \sum_{i=0}^{M-1} G_i(j\omega) \right|^2 \quad (7.94)$$

ecuación que, sustituida en (7.93), produce (7.25).

Por lo que respecta a \bar{R}_{xc} , podemos escribir

$$\begin{aligned}
 \bar{R}_{xc}(\tau) &= \frac{K^2}{T} \sum_n \int_{-nT}^{T-nT} E\{\tilde{g}_{A[n]}(t+\tau)\tilde{g}_{A[n]}(t)\}dt \\
 &= \frac{K^2}{T} \int_{-\infty}^{\infty} E\{\tilde{g}_{A[n]}(t+\tau)\tilde{g}_{A[n]}(t)\}dt \\
 &= \frac{K^2}{MT} \sum_{i=0}^{M-1} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}_i(t+\tau)\tilde{g}_i(t)dt \\
 &= \frac{K^2}{MT} \left(\sum_{i=0}^{M-1} g_i(\tau) * g_i(-\tau) - M r_{\mu_g}(\tau) \right)
 \end{aligned} \tag{7.95}$$

cuya Transformada de Fourier es (7.26).

7.B. RECEPTOR INCOHERENTE ÓPTIMO

En este apéndice vamos a extender el cálculo del demodulador ML del Apartado 4.3 a la recepción incoherente (esto es, con una fase desconocida) de señales paso banda. Como en aquella ocasión, consideraremos la transmisión de un único símbolo $b_i \in \{0, 1, \dots, M-1\}$, que se transforma en el modulador en otro símbolo a_i perteneciente a la constelación $\{a_i, i = 0, 1, \dots, M-1\}$, con la hipótesis adicional de que dichos símbolos tienen la misma energía, esto es, $\|a_i\|^2 = E_s$, para todo $i \in \{0, 1, \dots, M-1\}$. La extensión al caso de una transmisión indefinida de símbolos es inmediata, siempre que las formas de onda no abarquen más de un periodo de símbolo T .

Recordemos que cada símbolo a_i se corresponde de forma única con una forma de onda $s_i(t)$, perteneciente al espacio de Hilbert L_2 y que podemos escribir como una combinación lineal de elementos de una base ortonormal

$$s_i(t) = \sum_{k=0}^{N-1} a_{ik} \phi_k(t) \tag{7.96}$$

donde los a_{ik} , $0 \leq k \leq N-1$, son los elementos del vector a_i . Dado que en nuestro caso queremos considerar una transmisión paso banda, permitiremos que dichos coeficientes sean complejos, de modo que las formas de onda en banda base $s_i(t)$, $i = 0, \dots, M-1$, también pueden tomar valores complejos. Por tanto, suponiendo que el modulador desea enviar el símbolo a_i , construirá la señal

$$x(t) = \sqrt{2} \Re \{ s_i(t) e^{j\omega_c t} \}, \tag{7.97}$$

donde, como de costumbre, ω_c denota la frecuencia de la portadora. La señal $x(t)$ se transmite por un canal que supondremos gausiano y que introduce un desfase de θ radianes sobre la portadora, de modo que la señal recibida puede escribirse como

$$y(t) = \sqrt{2} \Re \{ s_i(t) e^{j(\omega_c t + \theta)} \} + n(t), \tag{7.98}$$

con $n(t)$ el ruido. En el receptor, la primera operación (véase Figura 5.34) consiste en una demodulación compleja multiplicando por $e^{-j\omega_c t}$ (la fase θ no se utiliza, porque se supone desconocida para el receptor) que produce la señal $v(t) = y(t)e^{-j\omega_c t}$. A continuación, siguiendo el esquema del demodulador del Apartado 4.3, obtenemos el vector \mathbf{q} de coordenadas de $v(t)$ en la base del modulador. Estas coordenadas, q_k , $k = 0, 1, \dots, N - 1$ se calculan como

$$q_k = \sqrt{2}\langle \mathbf{v}, \phi_k \rangle = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} v(t)\phi_k(t)dt, \quad (7.99)$$

donde el factor $\sqrt{2}$ sirve para conservar la potencia de la señal (véase Apartado 5.4.2). Sustituyendo (7.98) en (7.99) y considerando, por una parte, la ortogonalidad de las funciones base y , por otra, que las funciones $\phi_k(t)$ eliminan aquellas componentes de la señal que están centradas en la frecuencia $-2\omega_c$ rad/seg, podemos escribir, emulando el desarrollo realizado en (4.10),

$$q_k = a_{ik}e^{j\theta} + z_k, \quad 0 \leq k \leq N - 1 \quad (7.100)$$

donde a_{ik} es la coordenada k -ésima del i -ésimo símbolo de la constelación (el que hemos transmitido) y z_k es una realización de una variable aleatoria gausiana compleja circularmente simétrica, de media cero y varianza total $\sigma_z^2 = N_0$. Recordemos que esta varianza se reparte entre la varianzas de la parte real e imaginaria de z_k . Además, es fácil demostrar que las N componentes de ruido son mutuamente incorrelacionadas. Por tanto, la función de densidad de probabilidad conjunta de \mathbf{q} condicionada al símbolo enviado y a una fase θ es

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{q}|\mathbf{A},\theta}(\mathbf{q}|\mathbf{a}_i, \theta) &= \prod_{k=0}^{N-1} f_{q_k|A_k}(q_k|a_{ik}, \theta) = \frac{1}{(\pi N_0)^N} e^{-\sum_{k=0}^{N-1} \frac{|q_k - a_{ik}e^{j\theta}|^2}{N_0}} \\ &= \frac{1}{(\pi N_0)^N} e^{-\frac{\|\mathbf{q} - \mathbf{a}_i e^{j\theta}\|^2}{N_0}}. \end{aligned} \quad (7.101)$$

Comparando este resultado con (4.17) vemos que, además de la presencia de la fase θ , el hecho de que el ruido sea ahora complejo introduce cambios menores en el exponente del denominador.

Recordando que el receptor ML elige el símbolo \mathbf{a}_i que maximiza (7.101), y que la función exponencial es estrictamente creciente, parecería que ahora bastaría con seleccionar \mathbf{a}_i tal que $\|\mathbf{q} - \mathbf{a}_i e^{j\theta}\|^2$ es mínimo. Sin embargo, esta estrategia sólo valdría para un demodulador coherente, esto es, que conociese θ . En el caso incoherente, el demodulador óptimo requiere dar algunos pasos más. En primer lugar, debemos eliminar la dependencia con la fase desconocida, lo que implica *marginalizar* la fdp en (7.101) integrando con respecto a la distribución de θ , que denotaremos por $f_\theta(\theta)$:

$$f_{\mathbf{q}|\mathbf{A}}(\mathbf{q}|\mathbf{a}_i) = \int_{-\pi}^{\pi} f_{\mathbf{q}|\mathbf{A},\theta}(\mathbf{q}|\mathbf{a}_i, \theta) f_\theta(\theta) d\theta. \quad (7.102)$$

Teniendo en cuenta que en la mayor parte de los casos no existe información disponible a priori sobre θ , parece razonable escoger aquella distribución que maximiza su entropía, esto

es, la uniforme en $[-\pi, \pi]$ (véase Capítulo 9). En este caso, sustituyendo (7.101) en (7.102), tenemos

$$f_{\mathbf{q}|\mathbf{A}}(\mathbf{q}|\mathbf{a}_i) = \frac{1}{2\pi(\pi N_0)^N} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\frac{||\mathbf{q}-\mathbf{a}_i e^{j\theta}||^2}{N_0}} d\theta, \quad (7.103)$$

integral que tiene solución analítica:

$$f_{\mathbf{q}|\mathbf{A}}(\mathbf{q}|\mathbf{a}_i) = \frac{1}{(\pi N_0)^N} \exp\left(-\frac{||\mathbf{q}||^2 + ||\mathbf{a}_i||^2}{N_0}\right) I_0\left(\frac{2|\langle \mathbf{q}, \mathbf{a}_i \rangle|}{N_0}\right), \quad (7.104)$$

donde $I_0(\cdot)$ es la llamada función de Bessel modificada de orden 0, de la que esencialmente nos interesa saber que es estrictamente creciente para argumentos positivos. Observando la expresión (7.104) y teniendo en cuenta nuestra hipótesis de que todos los símbolos de la constelación tienen idéntica energía, podemos concluir que el receptor ML debe elegir aquel \mathbf{a}_i tal que maximiza

$$r_i \doteq |\langle \mathbf{q}, \mathbf{a}_i \rangle|^2 = \left| \sum_{k=0}^{N-1} q_k a_{ik}^* \right|^2 = \left| \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} v(t) s_i^*(t) dt \right|^2. \quad (7.105)$$

La estructura resultante, en este caso realizada con filtros adaptados y generalizada a la transmisión indefinida de símbolos, se representa en la Figura 7.28, en la que $\hat{B}[n]$ denota el n -ésimo símbolo decidido.

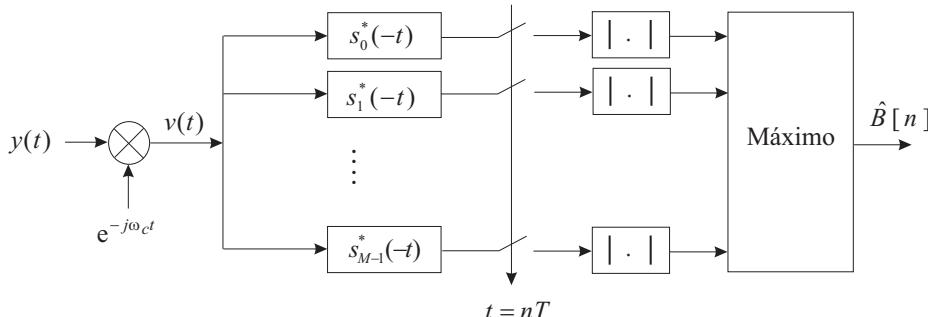


Figura 7.28. Diagrama de bloques de un receptor ML incoherente.

7.B.1. Receptor ML Incoherente para CPFSK ortogonal binaria

Consideraremos aquí la transmisión de un único símbolo en el intervalo $t \in [0, T]$. La generalización a una transmisión indefinida de símbolos en inmediata, habida cuenta de que las formas de onda de diferentes símbolos transmitidos no se solapan. En este caso, tenemos dos formas de onda en banda base:

$$\begin{aligned} s_0(t) &= \sqrt{\frac{E_s}{T}} e^{j(-\frac{\pi t}{T} + \pi/2)} w_T(t), \\ s_1(t) &= \sqrt{\frac{E_s}{T}} e^{j(\frac{\pi t}{T} + \pi/2)} w_T(t), \end{aligned} \quad (7.106)$$

y la operación (7.105) produce la variable de decisión

$$\begin{aligned} r_0 &= \left| \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \int_0^T y(t) e^{-j\omega_c t} e^{j(-\pi t/T + \pi/2)} \right|^2 = \left| \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \int_0^T y(t) e^{j(\omega_0 t + \pi/2)} \right|^2 \\ &= \frac{2E_s}{T} \left[\left(\int_0^T y(t) \sin(\omega_0 t) dt \right)^2 + \left(\int_0^T y(t) \cos(\omega_0 t) dt \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (7.107)$$

con un resultado similar para la variable de decisión r_1 , con ω_1 en lugar de ω_0 . Finalmente, el decisor elegirá aquel símbolo cuya variable de decisión asociada sea máxima.

CAPÍTULO 8

MODULACIONES MULTIPULSO

En el Capítulo 6 comprobamos que, para canales con ISI, las modulaciones de amplitud requieren el empleo de igualadores que, a menudo, se convierten en sofisticados sistemas con un elevado coste de implementación. En el presente capítulo desarrollaremos la idea, presentada en el Capítulo 4 y ya utilizada en el capítulo precedente, de usar conjuntos de pulsos ortogonales, y que, adecuadamente modificada, se convierte en un valioso instrumento que permite combatir el multitrayecto con soluciones con menor complejidad que las propias de PAM. En nuestro caso, los pulsos empleados responderán a una generalización de la CPFSK en la que se permite la modulación compleja en amplitud. Como veremos, la modulación resultante se puede relacionar con la Transformada de Fourier discreta, analogía que no sólo facilita la implementación eficiente, sino que da lugar al aprovechamiento de algunas propiedades de dicha transformada que abren la puerta a ingeniosas soluciones contra el multitrayecto.

Asimismo, veremos cómo la utilización de un ancho de banda muy superior al mínimo requerido por el criterio de Nyquist se puede convertir en un magnífico aliado contra el multitrayecto. A esta solución, conocida como espectro ensanchado, dedicaremos la segunda parte del capítulo. El aparente desperdicio de ancho de banda de esta estrategia se ve compensado con la aparición de grados de libertad que permiten construir conjuntos de pulsos ortogonales (o quasi-ortogonales) que, a su vez, se pueden emplear para albergar muchos usuarios aprovechando simultáneamente el mismo ancho de banda. Por supuesto, semejante recurso implica un diseño muy cuidadoso de los pulsos empleados y del receptor.

8.1. MODULACIONES MULTIPORTADORA

En el Apartado 7.2 hemos visto cómo es posible conseguir conjuntos ortogonales de pulsos empleando frecuencias relacionadas de forma armónica. Una extensión de dicha idea consistiría en modular dichos pulsos en amplitud, por lo que tendríamos la posibilidad de transmitir información de dos formas: 1) seleccionando la amplitud transmitida, y 2) seleccionando el pulso empleado. Alternativamente, podríamos pensar en aprovechar la ortogonalidad de los pulsos para transmitirlos todos simultáneamente, cada uno de ellos modulado

en amplitud por símbolos de información. En el receptor, la ortogonalidad nos ayudará a separar la contribución de cada pulso y decidir sobre la información transmitida sobre éste sin interferencia de los restantes. De hecho, algo parecido hacemos cuando enviamos simultáneamente las componentes en fase y cuadratura y posteriormente las separamos en el receptor, de forma que las decisiones tomadas en el canal en fase pueden ser independientes de las tomadas en el canal en cuadratura.

Por otra parte, como veremos en este apartado, no hay nada que impida emplear exponenciales complejas como pulsos básicos en lugar de señales tipo coseno, puesto que ya sabemos que el proceso de modulación en cuadratura nos permite trabajar con señales complejas en banda base. Como quedará claro, el uso de exponenciales complejas separadas un múltiplo de $2\pi/T$ rad/seg, siendo T el periodo de símbolo, permite crear un conjunto de pulsos ortogonales.

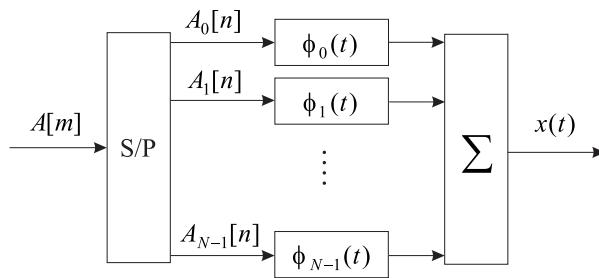


Figura 8.1. Esquema de un modulador FDM (OFDM).

Comencemos por un múltiplex por división en frecuencia clásico (“*Frequency Division Multiplex*”, FDM) aplicado a un único usuario (es decir, el ancho de banda disponible no se comparte con otros usuarios). Este ancho de banda disponible, digamos W rad/seg, se divide (empleando filtros ideales) en N subcanales de ancho de banda W/N rad/seg por los que se transmite la información empleando una modulación PAM paso banda en cada subcanal. El proceso se ilustra en la Figura 8.1. La misión del conversor serie/paralelo es la de multiplexar la secuencia de símbolos a su entrada sobre los N subcanales disponibles. Lógicamente, si N/T baudios es la velocidad de símbolo a la entrada del conversor, en cada subcanal la velocidad de símbolo será de $1/T$ baudios. Como justificaremos en breve, nada se gana dividiendo un canal en N subcanales para su utilización por un único usuario; sin embargo, la relación conceptual de un sistema FDM con un sistema multiportadora es suficientemente estrecha como para aconsejar un rápido vistazo.

Por lo que respecta al receptor FDM, éste simplemente separaría la señal recibida en N subcanales, convertiría la información de paralelo a serie (operación inversa a la realizada en el transmisor) y tomaría una decisión en función de la observación. Nótese que en el receptor necesitamos ahora N muestreadores operando a tasa $1/T$ seg⁻¹. El receptor FDM se muestra en la Figura 8.2. Es interesante razonar que si la señal transmitida atraviesa un canal lineal, es evidente que no habrá interferencia entre los símbolos transmitidos entre subcanales diferentes; sí puede haber interferencia entre los símbolos de un mismo subcanal,

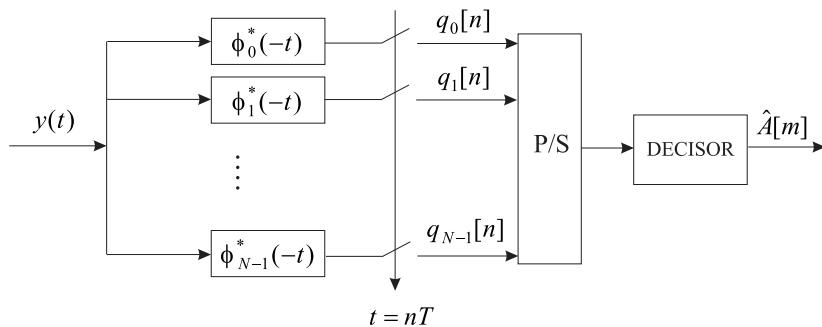


Figura 8.2. Diagrama de bloques de un receptor para FDM (OFDM).

aunque si sobre cada subcanal se cumple el criterio de Nyquist (¡cuidado!, ahora a periodo T), dicha interferencia será cero.

Los inconvenientes del sistema FDM son:

1. Se necesita emplear filtros ideales, irrealizables en la práctica. En cuanto esta restricción se relaja, aparece interferencia entre subcanales. Una forma de reducir esta interferencia es dejar una banda de guarda entre filtros adyacentes, pero esto reduce la eficiencia espectral, tanto más cuanto mayor es el número de subcanales en que se ha dividido el canal.
2. La complejidad del sistema es considerablemente mayor que la de un sistema PAM. Concretamente, tanto en el transmisor como en el receptor se necesitan N filtros; además, en el receptor ha de haber N muestreadores operando sincronamente.

La solución al primer inconveniente pasa por emplear pulsos que, manteniendo la ortogonalidad, sean realizables de forma práctica. Como sabemos, es posible conseguir conjuntos de pulsos ortogonales aunque éstos se solapen espectralmente de manera parcial o total. La solución al segundo problema es más sutil y aparecerá algo más adelante, en el transcurso de nuestro análisis.

8.1.1. Modulaciones multiportadora en tiempo continuo

En una modulación multiportadora se emplea un conjunto de pulsos que se generan multiplicando un *filtro prototipo* por un conjunto de N portadoras distintas. Comenzaremos estudiando el caso en que dicho filtro prototipo es un pulso rectangular causal de duración T segundos y nos centraremos únicamente en la señal compleja en banda base $s(t)$. La señal transmitida $x(t)$ se obtiene a partir de $s(t)$ en la forma acostumbrada

$$x(t) = \sqrt{2}\Re\{s(t)e^{j\omega_c t}\} \quad (8.1)$$

siendo ω_c la frecuencia de la señal portadora en rad/seg. En el caso comentado, la señal compleja en banda base responde a la expresión:

$$s(t) = \sum_n \mathbf{A}^T[n] \phi(t - nT) = \sum_n \sum_{k=0}^{N-1} A_k[n] \phi_k(t - nT) \quad (8.2)$$

donde las funciones base $\phi_k(t)$, $k = 0, \dots, N - 1$ son de la forma:

$$\phi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j \frac{2\pi k t}{T}} \cdot w_T(t) \quad (8.3)$$

siendo $w_T(t)$ una ventana temporal rectangular de duración T segundos

$$w_T(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < T \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (8.4)$$

Estas funciones $\phi_k(t)$ constituyen una base ortonormal, puesto que

$$\begin{aligned} \langle \phi_k, \phi_l \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T e^{\frac{j2\pi kt}{T}} e^{-j\frac{2\pi lt}{T}} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi(k-l)t}{T}\right) dt + \frac{j}{T} \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi(k-l)t}{T}\right) dt = \delta[k - l] \end{aligned} \quad (8.5)$$

para todo $k, l \in \{0, \dots, N - 1\}$.

Teniendo en cuenta que cada función base $\phi_k(t)$ se genera modulando una portadora compleja con un pulso rectangular $w_T(t)$ y que las funciones anteriormente descritas son ortogonales, este formato de modulación también se conoce como Múltiplex por División en Frecuencia Ortogonal (“Orthogonal Frequency Division Multiplex”, OFDM).

Los números complejos $A_k[n]$ que aparecen en (8.2) son los símbolos de la modulación OFDM. Como observamos en dicha expresión, la OFDM es, en realidad, la superposición de N modulaciones de tipo PAM paso banda, que se transmiten simultáneamente. El esquema de la Figura 8.1 también es válido para un modulador OFDM en tiempo continuo, teniendo en cuenta que las funciones base empleadas son las descritas en (8.3). En el caso de OFDM, además, es inmediato demostrar que para cualquier entero n se cumple que

$$\phi_k(t - nT) = \phi_0(t - nT) e^{j \frac{2\pi k(t-nT)}{T}} = \phi_0(t - nT) e^{j \frac{2\pi k t}{T}} \quad (8.6)$$

de modo que cada uno de los filtros de la Figura 8.1 es equivalente a un filtrado con $\phi_0(t)$ (que es un pulso rectangular en banda base) y una posterior modulación compleja, tal como se representa en la Figura 8.3.

En adelante, utilizaremos el término *subcanal* para referirnos a cada una de las modulaciones de tipo PAM paso banda considerada por separado. Es interesante observar que, dado

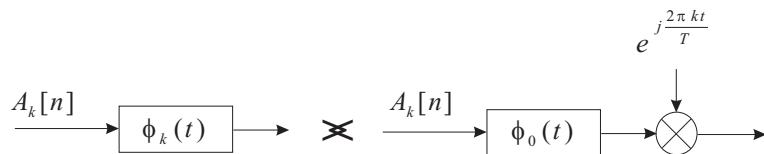


Figura 8.3. Equivalencia entre el filtrado con $\phi_k(t)$ y el filtrado con $\phi_0(t)$ y una modulación compleja.

que la transmisión de símbolos sobre los diferentes subcanales puede considerarse independiente, es posible emplear diferentes constelaciones sobre cada uno, de forma que se envíe más información en aquellos subcanales con mejores prestaciones.

Es ilustrativo representar el módulo al cuadrado de la Transformada de Fourier de las funciones base, $|\Phi_k(j\omega)|^2$, ya que de este modo se pueden observar sus características especales. A partir de (8.3) es inmediato ver que:

$$|\Phi_k(j\omega)|^2 = T \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{(\omega - 2\pi k/T)T}{2\pi} \right), \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (8.7)$$

En la Figura 8.4 se representa el espectro de las funciones correspondientes a $k = 0$ y $k = 9$. En primer lugar, vemos que, a diferencia de un múltiplex por división en frecuencia convencional, las funciones base se solapan en frecuencia; de todas formas, esto no significa que no sean fácilmente separables si se transmiten superpuestas, en virtud de su ortogonalidad. Por otra parte, también a diferencia de un múltiplex por división en frecuencia clásico, los espectros se extienden hasta el infinito, aunque su caída asintótica es como $1/\omega^2$.

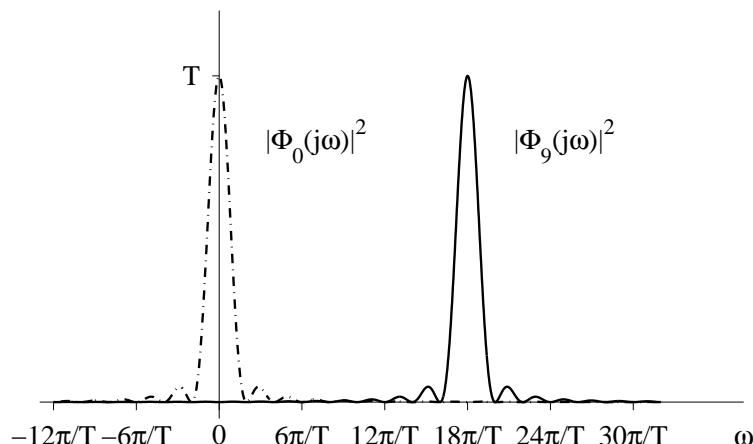


Figura 8.4. Espectro de la función base correspondiente a los subcanales número 0 (línea punteada) y número 9 (línea continua) en una modulación multiportadora en tiempo continuo con $N = 16$.

Espectro de la señal multiportadora en tiempo continuo

Si los símbolos que se transmiten sobre cualquier par de subcanales están mutuamente incorrelacionados y la secuencia $A_k[n]$, con k fijo, es blanca, entonces es posible escribir:

$$S_s(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N-1} E_{s,k} |\Phi_k(j\omega)|^2 \quad (8.8)$$

donde $E_{s,k} \doteq E\{|A_k[n]|^2\}$ es la energía media por símbolo transmitido sobre el subcanal k -ésimo. La dependencia de la energía media con el índice k de la portadora refleja la posibilidad, antes aludida, de emplear una constelación diferente con cada función base.

A partir de (8.8) es sencillo obtener la potencia transmitida P , ya que

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_s(j\omega) d\omega = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N-1} E_{s,k} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_k(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N-1} E_{s,k} \quad (8.9)$$

donde hemos usado el hecho de que las funciones base tienen energía unidad.

Cuando las energías medias de las constelaciones empleadas en cada subcanal son idénticas, es decir, $E_{s,k} = E_s$, para todo $k = 0, 1, \dots, N - 1$, podemos escribir

$$P = \frac{NE_s}{T} \quad (8.10)$$

que es N veces mayor que la que obteníamos para PAM paso banda (véase Ecuación (5.75)). Este resultado no es en absoluto sorprendente: recuérdese que, según nuestra formulación, la velocidad de transmisión es de N/T baudios, esto es, N veces mayor que la de PAM paso banda. En otras palabras, a igualdad de tasas de símbolo, la PAM paso banda y la OFDM consumen la misma potencia.

En la Figura 8.5 se representa el espectro de la señal OFDM cuando se emplean 8 portadoras, es decir, $N = 8$, mientras que en la Figura 8.6 se repite la representación para $N = 64$. En ambos casos, las constelaciones empleadas sobre cada subcanal son idénticas. Como se puede observar, a medida que aumenta el número de portadoras, el espectro tiende a aplanarse más en la zona intermedia. En la Figura 8.7 se representan los espectros correspondientes a las 8 funciones base que conforman el espectro, representadas con líneas de diferente trazo y centradas en la frecuencia que les corresponde. Como se puede comprobar, los picos del espectro de cada subcanal coinciden con los nulos de los restantes; en el resto de las frecuencias, la suma se approxima asintóticamente (cuando el número de portadoras N tiende a infinito) al valor de los picos, como demostramos a continuación.

Para ello, consideremos que los índices de las funciones base en la Ecuación (8.2) se extienden desde $k = -\infty$ hasta $k = \infty$. Calculemos la densidad espectral de potencia para este caso, suponiendo que la constelación usada sobre cada subcanal es idéntica y con energía media E_s . Sustituyendo (8.7) en (8.8) y teniendo en cuenta los índices, es posible

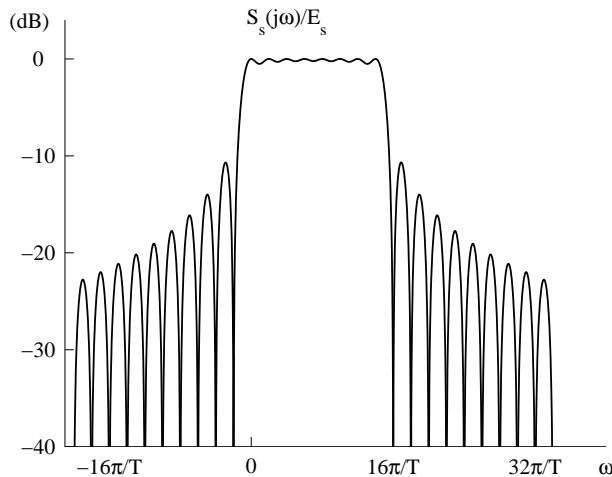


Figura 8.5. Espectro de la señal OFDM en tiempo continuo para $N = 8$.

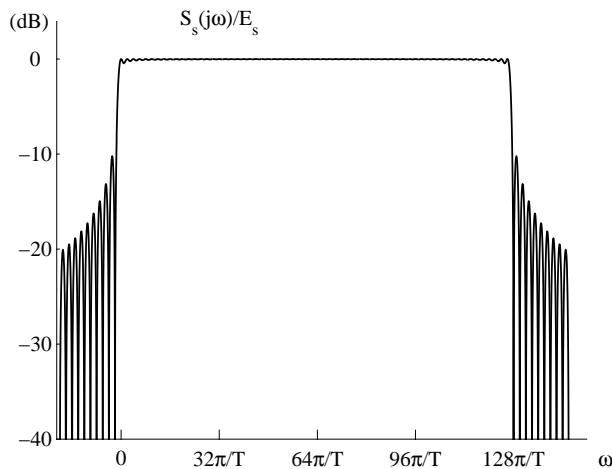


Figura 8.6. Espectro de la señal OFDM en tiempo continuo para $N = 64$.

escribir:

$$\begin{aligned}
 S_s(j\omega) &= \frac{E_s}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{(\omega - 2\pi k/T)T}{2\pi} \right) \\
 &= \frac{E_s}{T} \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\omega T}{2\pi} \right) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta \left(\omega - \frac{2\pi k}{T} \right)
 \end{aligned} \tag{8.11}$$

Pero $S_s(j\omega)$ en (8.11) sólo será constante con ω si su Transformada de Fourier inversa es

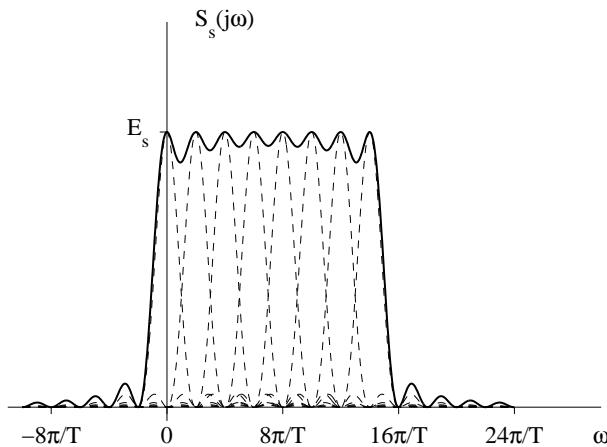


Figura 8.7. Espectros individuales correspondientes a los subcanales de una modulación OFDM en tiempo continuo ($N = 8$) en línea discontinua y espectro completo en línea continua.

una delta en el origen, esto es, si se verifica que

$$\frac{E_s}{T} (\phi_0(t) * \phi_0^*(-t)) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = C\delta(t) \quad (8.12)$$

para algún número real C . El que en (8.12) aparezca la función de ambigüedad $\phi_0(t) * \phi_0^*(-t)$ se debe a que ésta es la señal cuya transformada es $\text{sinc}^2(\omega T/2\pi)$. En tiempo, esta señal es un pulso triangular de ancho $2T$ segundos y centrado en el origen. En consecuencia, al multiplicar esta señal por un tren de deltas espaciadas T segundos, es evidente que sólo quedará la situada en el origen, con lo que la validez de (8.12) queda demostrada y, por tanto, el espectro es plano para el caso asintótico.

8.1.2. Modulaciones multiportadora en tiempo discreto

La modulación OFDM descrita en los apartados anteriores tiene el inconveniente de que su implementación práctica resulta difícil debido a que es necesario generar N portadoras complejas ($2N$ reales) perfectamente enganchadas en fase. Si esta condición no se cumple, las funciones base dejan de ser ortogonales y aparece el efecto conocido como *interferencia entre portadoras* (“*InterCarrier Interference*”, ICI) que afecta negativamente a las prestaciones del sistema. En este apartado veremos cómo, empleando técnicas de procesado de señal, es posible generar una señal similar a la anterior, pero sin los problemas de enganche en fase de las portadoras y con una realización mucho más eficiente.

En principio, podría pensarse en generar muestras discretas de las señales transmitidas y, a partir de ellas, construir la señal de la Ecuación (8.2). Desgraciadamente, ya hemos visto que las funciones base son de ancho de banda infinito, propiedad que hereda el espectro completo $S_s(j\omega)$ en la Ecuación (8.8). Sin embargo, como podemos ver en las Figuras 8.5 y

8.6, el espectro ocupa aproximadamente¹ $2\pi N/T$ rad/seg. Esto sugiere la idea de muestrear a la tasa de Nyquist asociada a este ancho de banda, lo que a su vez se corresponde con un muestreo con periodo T/N segundos. Muestreando $s(t)$ en (8.2) con periodo T/N , y denotando por $s[m]$ las muestras complejas recogidas en el intervalo $0 \leq t < T$, tendríamos:

$$s[m] = \sum_{k=0}^{N-1} A_k[0] \phi_k(mT/N), \quad m = 0, \dots, N-1 \quad (8.13)$$

o, equivalentemente,

$$s[m] = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{k=0}^{N-1} A_k[0] e^{j \frac{2\pi k m}{N}}, \quad m = 0, \dots, N-1 \quad (8.14)$$

Pero el término de la derecha de (8.14) no es más que la DFT inversa (IDFT, véase Apartado 2.3.5) de la secuencia $A_k[0]$, $k = 0, \dots, N-1$, salvo por un factor constante. Podemos, pues, pensar en transmitir la IDFT de los símbolos A_k , aprovechando, además, la existencia de algoritmos muy eficientes para la realización de la IDFT, como es el caso de la FFT (Fast Fourier Transform) inversa, especialmente eficiente cuando el número de portadoras N es una potencia de 2. La descripción de estos y otros algoritmos para la realización rápida de la DFT se escapa del ámbito de este texto. En el Apartado 8.4 se ofrecen algunas referencias bibliográficas donde se puede encontrar una descripción detallada de dichos algoritmos y sus propiedades.

Cuando muestreamos la señal $s(t)$ completa –no sólo un intervalo de duración T – dada en la forma (8.2) obtenemos una secuencia $s[m]$ cuya expresión es

$$\begin{aligned} s[m] &= \sum_n \sum_{k=0}^{N-1} A_k[n] \phi_k(mT/N - nT) \\ &= \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_n \sum_{k=0}^{N-1} A_k[n] e^{j \frac{2\pi k(m-nN)}{N}} w_N[m - nN] \end{aligned} \quad (8.15)$$

donde la secuencia $w_N[m]$ es una ventana rectangular en tiempo discreto de N muestras de duración:

$$w_N[m] = \begin{cases} 1 & 0 \leq m \leq N-1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (8.16)$$

La Ecuación (8.15) admite una interesante interpretación en términos de una base ortogonal de funciones en tiempo discreto. Definiendo las funciones discretas

$$\xi_k[m] = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot e^{j \frac{2\pi k m}{N}} w_N[m], \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (8.17)$$

¹En realidad, si consideramos sólo aquellas partes del espectro asociado a cada subcanal que estén a menos de 20 dB con respecto al lóbulo principal, lo que corresponde con mantener dos lóbulos secundarios a cada lado del espectro, el ancho de banda sería $2(N+5)\pi/T$ rad/seg, por lo que para N grande se justifica el valor empleado en la aproximación.

es fácil demostrar que constituyen un conjunto ortonormal, en el sentido de que

$$\langle \xi_k, \xi_l \rangle = \sum_m \xi_k[m] \xi_l^*[m] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi(k-l)m}{N}} = \delta[k - l] \quad (8.18)$$

Así, (8.15) puede reescribirse como

$$s[m] = \sqrt{\frac{N}{T}} \sum_n \sum_{k=0}^{N-1} A_k[n] \xi_k[m - nN] \quad (8.19)$$

que, como puede verificarse, no es más que una versión discreta de la Ecuación (8.2).

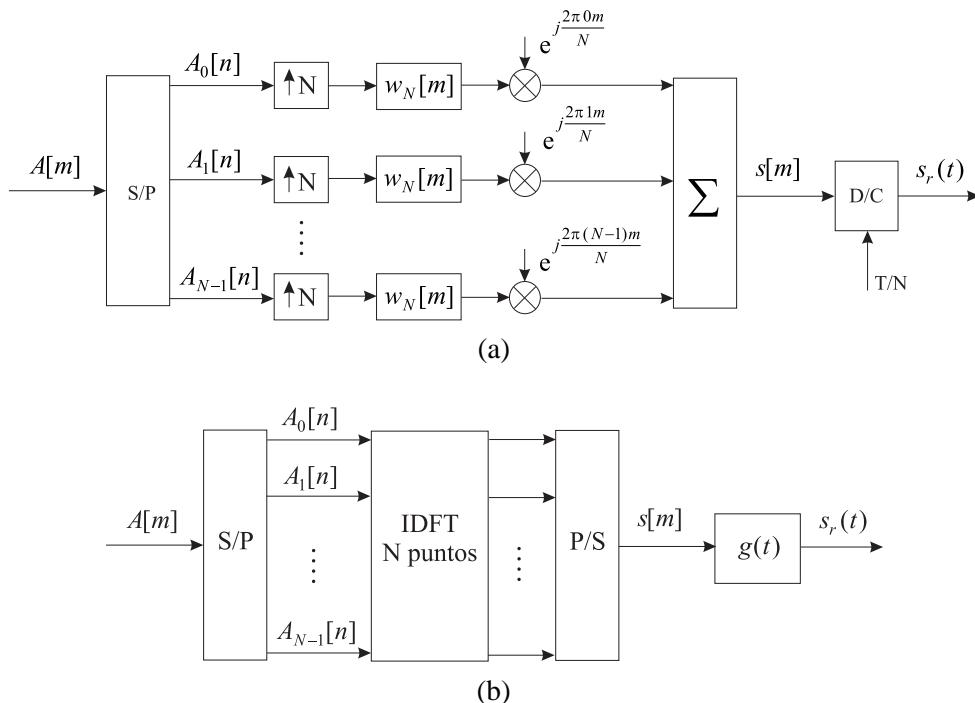


Figura 8.8. Arquitectura de un modulador OFDM en tiempo discreto: (a) realización mediante exponentiales complejas; (b) realización mediante IDFT.

El desarrollo anterior sugiere una implementación en tiempo discreto de la modulación OFDM como la que se esquematiza en la Figura 8.8. La conversión digital/análogica de la señal $s[m]$ se lleva a cabo con un filtro de reconstrucción $g(t)$ que, por ahora, consideraremos ideal². La conversión de discreto a continuo se hace con periodo T/N segundos, por lo que

²Matemáticamente, el proceso de conversión de discreto a continuo de la secuencia $s[m]$ con un filtro de reconstrucción $g(t)$ es equivalente a una modulación de amplitud con la secuencia $s[m]$ usando como filtro transmisor $g(t)$.

las respuestas al impulso y en frecuencia del filtro de reconstrucción son, respectivamente,

$$g(t) = \text{sinc}\left(\frac{tN}{T}\right) \quad (8.20)$$

$$G(j\omega) = \frac{T}{N} \cdot \Pi\left(\frac{\omega T}{2\pi N}\right) \quad (8.21)$$

Antes justificamos el hecho de que si las funciones $\phi_k(t)$ eran de ancho de banda ilimitado, éstas no eran realizables a partir de la reconstrucción de una señal discreta mediante un filtro ideal, como el utilizado en el esquema de la Figura 8.8. Si las realizaciones discreta y continua no son realmente idénticas, entonces ¿qué funciones equivalentes en tiempo continuo estamos empleando cuando utilizamos la estructura de la Figura 8.8? Conocer estas funciones es relativamente sencillo: sólo tenemos que aplicar el principio de superposición a la salida del filtro de reconstrucción $g(t)$. Denotaremos estas funciones por $\hat{\phi}_k(t)$, $k = 0, \dots, N - 1$ y la salida del conversor digital/analógico ideal operando con tasa N/T seg $^{-1}$ por $s_r(t)$. Entonces, $s_r(t)$ se puede escribir a partir de la conocida expresión que relaciona la señal reconstruida con sus muestras tomadas con tasa de muestreo N/T seg $^{-1}$, esto es,

$$s_r(t) = \sum_m s[m]g(t - mT/N) \quad (8.22)$$

donde $g(t)$ viene dado por (8.20). Sustituyendo (8.19) en la ecuación anterior, es posible escribir

$$s_r(t) = \sqrt{\frac{N}{T}} \sum_n \sum_{k=0}^{N-1} A_k[n] \cdot \sum_m \xi_k[m - nN]g(t - mT/N) \quad (8.23)$$

que, tras un cambio de variable, se convierte en

$$s_r(t) = \sum_n \sum_{k=0}^{N-1} A_k[n] \hat{\phi}_k(t - nT) \quad (8.24)$$

siendo

$$\hat{\phi}_k(t) = \sqrt{\frac{N}{T}} \sum_m \xi_k[m]g(t - mT/N) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{m=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi m k}{N}} \text{sinc}[(t - mT/N)N/T] \quad (8.25)$$

La Figura 8.9 ilustra las funciones base para $k = 6$ empleadas en los casos continuo y discreto (en este último, con $N = 8$ y $N = 16$). Es interesante observar cómo, a medida que aumenta N , la función $\hat{\phi}_k(t)$ converge –en valor cuadrático medio³– a $\phi_k(t)$.

³La convergencia no es uniforme, ya que en este caso aparece el llamado *fenómeno de Gibbs*, que provoca las oscilaciones que se ven en la Figura 8.9.c y que no desaparecen por mucho que aumente N .

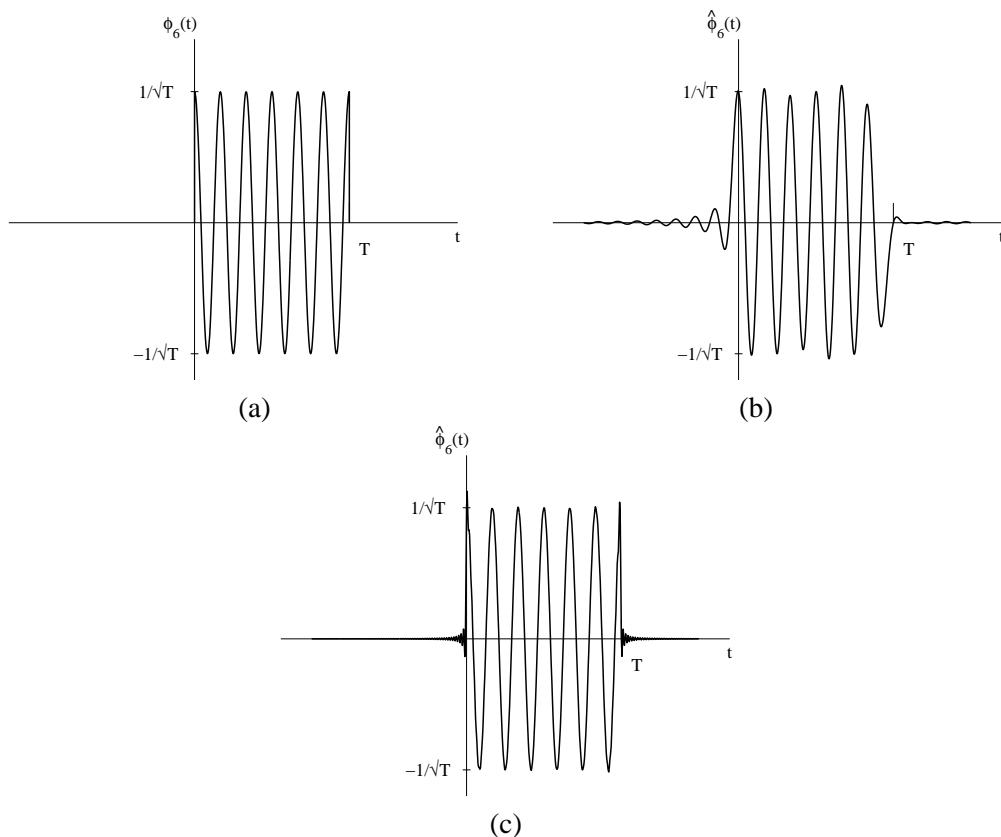


Figura 8.9. Representación de la parte real de las funciones base en el dominio del tiempo:
(a) OFDM en tiempo continuo; (b) OFDM en tiempo discreto para $N = 8$; (c) OFDM en tiempo discreto para $N = 64$.

De nuevo cabe preguntarse si el conjunto de funciones $\hat{\phi}_k(t)$, $k = 0, \dots, N - 1$ es ortogonal. Y, de nuevo, la respuesta es afirmativa. Efectuando la correlación cruzada (tomando como soporte toda la recta real porque, como ya hemos visto, las funciones tienen duración infinita) y usando (8.25) resulta

$$\begin{aligned} \langle \hat{\phi}_k, \hat{\phi}_l \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}_k(t) \hat{\phi}_l^*(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi km}{N}} e^{-j \frac{2\pi li}{N}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t - mT/N) g(t - iT/N) dt \end{aligned} \quad (8.26)$$

Operando con el integrando de (8.26) es fácil ver que

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau - mT/N) g(\tau - iT/N) d\tau = (g(t) * g(-t)) \Big|_{t=(m-i)T/N} \quad (8.27)$$

Pero la función de ambigüedad temporal de $g(t)$ cumple, salvo por una constante, el criterio de Nyquist cuando se muestrea con periodo T/N , no en vano $g(t)$ constituye un caso degenerado de filtro en raíz cuadrada de coseno alzado con factor de caída α igual a cero. Por tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau - mT/N)g(\tau - iT/N)dt = \frac{T}{N}\delta[m - i] \quad (8.28)$$

El factor T/N es debido a que $g(t) * g(-t)$ no es exactamente un pulso de Nyquist porque $g(t)$ no está normalizado en energía.

Sustituyendo (8.28) en (8.26) tenemos

$$\langle \hat{\phi}_k, \hat{\phi}_l \rangle = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi(k-l)m}{N}} = \delta[k - l] \quad (8.29)$$

con lo que queda demostrado que el conjunto de funciones $\hat{\phi}_k(t)$, $k = 0, \dots, N - 1$ es ortonormal. De hecho, esta propiedad se verifica para cualquier filtro de reconstrucción $g(t)$ cuya función de ambigüedad temporal cumpla el criterio de Nyquist cuando se muestrea con periodo T/N . La demostración sigue las mismas líneas que la que aquí se ha presentado para un filtro de interpolación ideal.

Espectro de la señal multiportadora en tiempo discreto

En este caso, si los símbolos que modulan a cada par de funciones base están mutuamente incorrelacionados y la secuencia de símbolos transmitida sobre cada subcanal es blanca, el espectro de la señal transmitida $s_r(t)$, que denotaremos por $S_{sr}(j\omega)$, es

$$S_{sr}(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N-1} E_{s,k} |\hat{\Phi}_k(j\omega)|^2 \quad (8.30)$$

siendo $E_{s,k} = E\{|A_k[n]|^2\}$ la energía media por símbolo transmitido sobre el subcanal k -ésimo y $\hat{\Phi}_k(j\omega)$ la Transformada de Fourier de $\hat{\phi}_k(t)$. De nuevo, la dependencia de (8.30) con el índice k refleja la posibilidad de emplear constelaciones diferentes con cada portadora, o incluso “apagar” portadoras.

Sólo nos resta calcular $|\hat{\Phi}_k(j\omega)|^2$. Para ello, basta con tener en cuenta que $\hat{\phi}_k(t)$ es el resultado de pasar la señal discreta $\sqrt{N/T} \cdot \xi_k[m]$ por un interpolador ideal con respuesta en frecuencia $G(j\omega)$ dada por (8.21). Calculando la magnitud al cuadrado de la Transformada de Fourier de (8.17) obtenemos

$$|\Xi_k(e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{N} \frac{\sin^2[(\omega - 2\pi k/N)N/2]}{\sin^2[(\omega - 2\pi k/N)/2]} \quad (8.31)$$

Por otra parte, aplicando los resultados del Apartado 2.4.3 que permiten relacionar el espectro de una señal continua reconstruida con el de la señal discreta y el filtro reconstructor,

podemos escribir

$$|\hat{\Phi}_k(j\omega)|^2 = \frac{N}{T} \cdot |\Xi_k(e^{j\omega T/N})|^2 \cdot \frac{T^2}{N^2} \cdot \Pi\left(\frac{\omega T}{2\pi N}\right) \quad (8.32)$$

que, tras sustituir en (8.31), resulta en

$$|\hat{\Phi}_k(j\omega)|^2 = \frac{T}{N^2} \frac{\sin^2[(\omega - 2\pi k/T)T/2]}{\sin^2[(\omega - 2\pi k/T)T/2N]}, \quad |\omega| < \frac{\pi N}{T} \quad (8.33)$$

En la Figura 8.10 se representa el cuadrado de la magnitud del espectro de $\hat{\phi}_k(t)$ para $k = 9$ y $N = 16$. La principal diferencia con la Figura 8.10 reside en la posición que ocupan los subcanales en el espectro continuo, debido a la presencia ahora del filtro de reconstrucción. Ello provoca que los subcanales aparezcan ordenados de forma diferente a como sucede en la OFDM en tiempo continuo. De hecho, se produce un desplazamiento cíclico de $N\pi/T$ rad/seg sobre el ordenamiento natural.

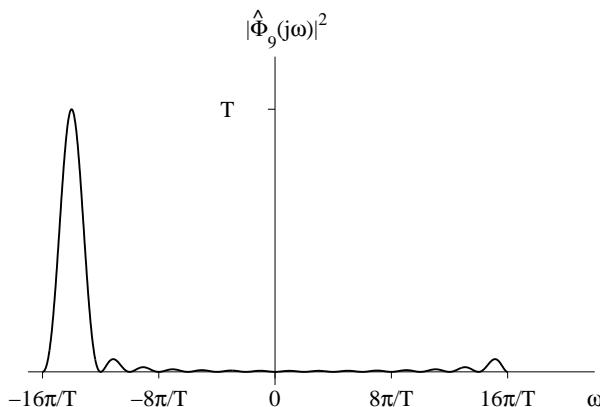


Figura 8.10. Espectro de la función base correspondiente al subcanal número 9 en una modulación OFDM en tiempo discreto con $N = 16$.

En caso de que se desease un ordenamiento natural de las portadoras asociadas a cada símbolo, éste se puede conseguir a través de un desplazamiento cíclico de π radianes sobre el espectro de la secuencia discreta $s[m]$ (equivalente a multiplicar en tiempo por la secuencia $(-1)^m$) o bien a través de un filtro de reconstrucción complejo con frecuencia de corte inferior 0 rad/seg y superior $2\pi N/T$ rad/seg. Evidentemente, esta última opción requiere cambiar la frecuencia de la portadora ω_c para trasladar el espectro de la señal transmitida a la frecuencia deseada.

En cuanto a la representación de $S_{sr}(j\omega)$, es fácil demostrar (Problema P8.2) que, en el caso de que las constelaciones empleadas sobre cada subcanal sean idénticas y con energía media E_s , entonces

$$S_{sr}(j\omega) = \begin{cases} E_s & |\omega| < \frac{N\pi}{T} \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (8.34)$$

por lo que el espectro es plano en la banda de paso del filtro transmisor, tal como se muestra en la Figura 8.11. Por supuesto, esto es consecuencia del filtro de reconstrucción empleado; en el caso más general de un filtro con función de transferencia $G(j\omega)$, el espectro de la señal transmitida es

$$S_{sr}(j\omega) = \frac{N^2 E_s}{T^2} |G(j\omega)|^2 \quad (8.35)$$

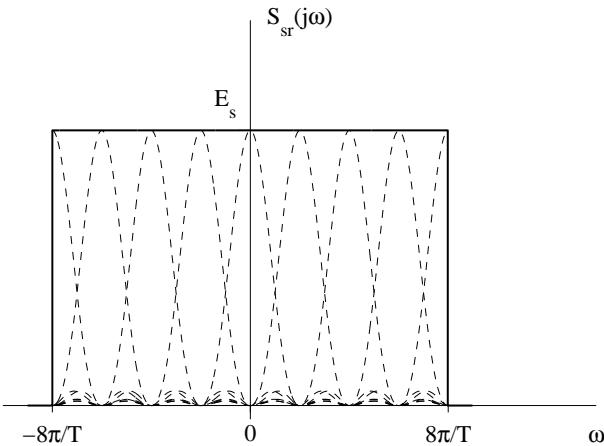


Figura 8.11. Espectro de la señal en banda base (línea continua) correspondiente a una modulación OFDM en tiempo discreto con $N = 8$ y los espectros asociados a cada subcanal (línea punteada).

El cálculo de la potencia transmitida P se puede efectuar sin más que integrar la densidad espectral de potencia en (8.35). Para el caso en que $G(j\omega)$ es un filtro de reconstrucción ideal, el espectro de potencia viene dado por (8.34), de modo que

$$P = \frac{NE_s}{T} \quad (8.36)$$

que coincide con el resultado obtenido para la OFDM en tiempo continuo (véase Ecación 8.10). Recordemos del Apartado 8.1.1 que dicho resultado implica que a igualdad de tasas de símbolo, la PAM paso banda y la OFDM consumen la misma potencia. Un razonamiento similar lleva también a concluir que, cuando se usan los mismos pulsos conformadores, la PAM paso banda y la OFDM presentan la misma eficiencia espectral.

Una de las mayores ventajas de la OFDM es su flexibilidad a la hora de conformar el espectro, ya que se puede actuar de forma independiente sobre cada portadora. Así, por ejemplo, el espectro de la Figura 8.11 implica la utilización de un filtro paso bajo ideal; sin embargo, en la práctica se emplean filtros con caídas mucho menos abruptas debido a restricciones de complejidad y coste. Para facilitar la labor de dichos filtros de reconstrucción es habitual poner a cero (apagar) las portadoras situadas en frecuencias próximas a $\pm N\pi/T$

rad/seg.⁴ Obviamente, esto reduce la velocidad de transmisión alcanzable, pero también el ancho de banda ocupado en aproximadamente la misma proporción, por lo que la eficiencia espectral no se resiente. El precio reside en la aparente mayor complejidad derivada del uso de un N mayor que el número de portadoras que realmente se utiliza, pero, como ya hemos señalado, si N es potencia de 2 incluso puede comportar una reducción computacional frente a otros valores aún menores. Otra importante ventaja de la OFDM reside en la posibilidad de aplicar algoritmos de *carga de bits*, en los que se envía más información sobre aquellas portadoras con mejor relación señal a ruido. El Problema P8.8 ilustra este concepto.

8.1.3. Receptores para modulaciones multiportadora

Resulta fácil obtener receptores para modulaciones multiportadora, apoyándose en la formulación en espacio de señales, para la que ya hemos caracterizado las funciones base $\phi_k(t)$ y $\hat{\phi}_k(t)$ en los casos continuo y discreto, respectivamente. La estructura del receptor sigue entonces las directrices del Apartado 4.5 y no es más que una adaptación de la Figura 4.41 a este caso concreto, lo que incluye una demodulación compleja para trasladar la señal a banda base y el empleo de filtros adaptados complejos. La estructura resultante se recoge en la Figura 8.2 para el caso de modulación en tiempo continuo. Ha de tenerse presente que si las constelaciones empleadas sobre cada subcanal son distintas, habrá que colocar un decisor y un decodificador por cada rama del receptor y hacer la conversión paralelo/serie posteriormente.

El esquema correspondiente a un receptor para una modulación multiportadora en tiempo discreto es idéntico al representado en la Figura 8.2, sustituyendo $\phi_k(t)$ por $\hat{\phi}_k(t)$.

No obstante, como veremos a continuación, en el caso discreto es posible una implementación mucho más eficiente que no requiere un banco de filtros adaptados (o de correlacionadores, según sea la implementación concreta), y que se muestra en la Figura 8.12(a). Sea $v(t)$ la señal recibida en banda base; entonces, la señal discreta a la salida del k -ésimo muestreador es

$$\begin{aligned} q_k[n] &= \left(v(t) * \hat{\phi}_k^*(-t) \right) |_{t=nT} \\ &= \sqrt{\frac{N}{T}} \sum_m \xi_k^*[m] (v(t) * g(-t - mT/N)) |_{t=nT} \\ &= \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{m=0}^{N-1} e^{-j \frac{2\pi km}{N}} (v(t) * g(-t)) |_{t=nT+mT/N} \end{aligned} \quad (8.37)$$

Sea $v[m]$ la secuencia obtenida al muestrear la señal $v(t)*g(-t)$ con periodo T/N segundos. Entonces, (8.37) puede reescribirse de la siguiente forma

$$q_k[n] = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{m=0}^{N-1} e^{-j \frac{2\pi km}{N}} v[nN + m] \quad (8.38)$$

⁴Recuérdese que, de acuerdo con el desplazamiento cíclico de $N\pi/T$ rad/seg de los subcanales debido al filtro de reconstrucción, estas portadoras se corresponden con aquéllas con índices en torno a $N/2$ en el dominio de la DFT. Véase Problema P8.10.

por lo que $q_k[n]$ es, salvo un factor constante, el k -ésimo coeficiente de la DFT de N puntos del n -ésimo bloque de N puntos de la señal $v[m]$. Este resultado no es demasiado sorprendente, en vista de cómo hemos generado la señal transmitida. El lector puede comprobar fácilmente que si la función de ambigüedad temporal $g(t) * g(-t)$ satisface el criterio de Nyquist a periodo T/N y el canal es ideal y no introduce ruido, tendremos $v[m] = s[m]$.

El diagrama de bloques del receptor resultante se representa en la Figura 8.12(b). Como vemos, hemos sustituido un banco de filtros adaptados y muestreadores por un solo filtro adaptado y un muestreador operando a tasa N/T seg $^{-1}$, esto es, N veces mayor que los de la Figura 8.2. Ahora es necesario calcular una DFT pero, como ya hemos indicado más arriba, la existencia de algoritmos para su cálculo eficiente hace que esta solución sea, con mucho, preferible.

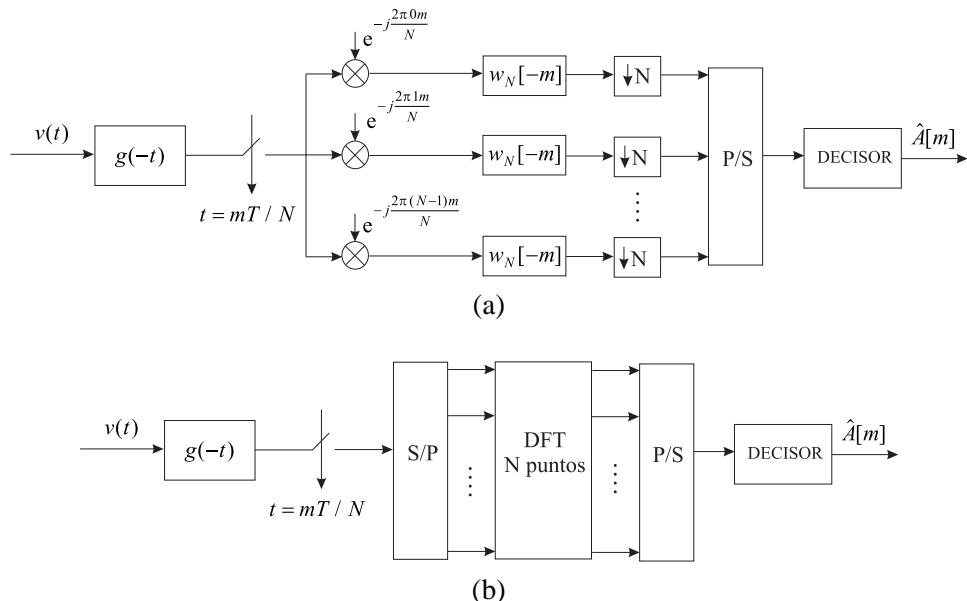


Figura 8.12. Arquitectura de un receptor para OFDM en tiempo discreto: (a) realización mediante exponentiales complejas; (b) realización mediante DFT. Los factores constantes se incluyen en el bloque decisor.

8.1.4. Características del ruido en el receptor

Si el canal introduce ruido aditivo y gausiano $n(t)$ con densidad espectral de potencia $S_n(j\omega)$, podemos aplicar la misma metodología que en el Apartado 5.4.3 para obtener las características del ruido discreto sobre cada subcanal. Sea $z_k[n]$ el ruido presente en la observación $q_k[n]$ correspondiente al subcanal k -ésimo. Entonces, si $\sqrt{2}f_k(t)$ es el filtro receptor

en dicho subcanal, es posible escribir (véase Ecuación (5.83)),

$$S_{z,k}(e^{j\omega}) = \frac{2}{T} \sum_i S_n \left(j \frac{\omega}{T} + j \frac{\omega_c}{T} - j \frac{2\pi i}{T} \right) \left| F_k \left(j \frac{\omega}{T} - j \frac{2\pi i}{T} \right) \right|^2 \quad (8.39)$$

siendo $S_{z,k}(e^{j\omega})$ la densidad espectral de potencia del proceso $z_k[n]$ y $F_k(j\omega)$ la Transformada de Fourier de $f_k(t)$. En el caso particular en que $f_k(t) = \phi_k^*(-t)$ y el ruido $n(t)$ es blanco, con densidad espectral de potencia $N_0/2$ W/Hz, de (8.39) se puede deducir que el ruido $z_k[n]$ es blanco, circularmente simétrico, con varianza

$$\sigma_{z,k}^2 = N_0, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (8.40)$$

Además, para este caso es sencillo demostrar aprovechando la ortogonalidad entre los pulsos usados sobre cada subcanal que $E\{z_i[n]z_k^*[l]\} = 0$ si $i \neq k$, para todo n y l .

Idénticos resultados se obtienen en caso de que se emplee una modulación multiportadora en tiempo discreto.

8.1.5. Canal discreto equivalente en banda base

Como ya vimos en el Apartado 4.5, Ecuación (4.99), es posible calcular un canal discreto equivalente para la transmisión indefinida de símbolos, aplicable al caso de modulaciones multiportadora. En realidad, dado que empleamos N subcanales en paralelo, más que un canal discreto equivalente en banda base, tendremos una matriz de canales discretos equivalentes en banda base, como quedará claro en breve. Adicionalmente, el cálculo de la matriz de canales discretos equivalentes nos permitirá llegar a una ingeniosa extensión de la OFDM que resulta de gran utilidad para combatir la distorsión introducida por canales lineales con memoria.

Supongamos que, por el momento, el canal no introduce ruido y que está caracterizado por una respuesta al impulso $h(t)$ o una respuesta en frecuencia $H(j\omega)$. Consideremos la secuencia $q_k[n]$ de observaciones a la salida del muestreador del k -ésimo subcanal y sea $\sqrt{2}f_k(t)$ el filtro empleado en la rama del receptor correspondiente a dicho subcanal. Entonces, recordando que sobre cada subcanal tenemos, en realidad, una modulación PAM, podemos usar los resultados del Apartado 5.4.4 para escribir que

$$q_k(t) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_l A_i[l] p_{k,i}(t - lT), \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (8.41)$$

donde $p_{k,i}(t) \doteq \phi_i(t) * h_{eq}(t) * f_k(t)$, y $h_{eq}(t) = e^{-j\omega_c t} h(t)$. La señal a la salida del k -ésimo muestreador es

$$q_k[n] = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_l A_i[l] p_{k,i}[n - l], \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (8.42)$$

donde $p_{k,i}[n] = p_{k,i}(nT)$.

Como vemos, sin hacer más consideraciones, todos los símbolos enviados sobre cada uno de los subcanales interfieren con el transmitido sobre el subcanal k -ésimo en el instante nT . Teniendo en cuenta que

$$q_k[n] = \sum_{i=0}^{N-1} A_i[n] * p_{k,i}[n], \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (8.43)$$

podemos ver que ahora tenemos N^2 canales discretos equivalentes, siendo el canal $p_{k,i}[n]$ el que contiene la interferencia de los símbolos enviados en el subcanal i -ésimo sobre un símbolo transmitido por el subcanal k -ésimo. Para evitar una degradación importante de las prestaciones del sistema, deseáramos que:

1. La interferencia entre símbolos (ISI) en cada subcanal sea cero. Esto se consigue si y sólo si $p_{i,i}[n] = C\delta[n]$ para todo $i = 0, \dots, N-1$, con C una constante compleja no nula.
2. La interferencia entre subcanales (también llamada interferencia entre portadoras, ICI) sea cero. Esto se consigue si y sólo si $p_{k,i}[n] = 0$ cuando $k \neq i$, $k, i = 0, \dots, N-1$.

Si se cumplen las dos condiciones anteriores y $C = 1$, está claro que, en ausencia de ruido, $q_k[n] = A_k[n]$.

Si $P_{k,i}(e^{j\omega})$ denota la Transformada de Fourier de la secuencia $p_{k,i}[n]$ y $\mathbf{P}(e^{j\omega})$ es una matriz cuyo elemento k, i -ésimo es $P_{k,i}(e^{j\omega})$, entonces las condiciones anteriores se pueden reescribir como

$$\mathbf{P}(e^{j\omega}) = \mathbf{I}_{N \times N} \quad (8.44)$$

donde $\mathbf{I}_{N \times N}$ es la matriz identidad de dimensión N . La Condición (8.44) se conoce como *criterio de Nyquist generalizado*. Por desgracia, la aplicación de la Condición (8.44) es difícil; por ejemplo, si quisieramos encontrar los $f_k(t)$ tales que se satisficiera dicha condición, veríamos que ahora tenemos N grados de libertad y N^2 condiciones, por lo que, en general, no es posible cumplir (8.44). Otra alternativa al diseño de los $f_k(t)$ sería la minimización del error cuadrático medio por subcanal. En todo caso, es importante señalar que para aplicar estos diseños se necesita conocer la respuesta del canal en banda base equivalente $h_{eq}(t)$, lo que a menudo no es factible en la práctica.

Por consiguiente, aquí adoptaremos una solución más cercana a la práctica. En primer lugar, haremos que $f_k(t) = \phi_k^*(-t)$, $k = 0, \dots, N-1$, esto es, emplearemos como filtros receptores los filtros adaptados a los correspondientes filtros transmisores. El canal equivalente en banda base es ahora

$$p_{k,i}(t) = \phi_i(t) * \phi_k^*(-t) * h_{eq}(t) \quad (8.45)$$

o, en frecuencia,

$$P_{k,i}(j\omega) = \Phi_i(j\omega)\Phi_k^*(j\omega)H_{eq}(j\omega) \quad (8.46)$$

Vamos a tratar de razonar sobre las implicaciones de (8.46) de forma cualitativa. Supongamos que T es muy grande en comparación con la duración efectiva del canal $h_{eq}(t)$. Recordemos que las funciones $\phi_k(t)$ son tales que su Transformada de Fourier es una sinc centrada en $\omega_k = 2\pi k/T$ rad/seg, por lo que, para T grande, la respuesta en frecuencia del canal puede considerarse aproximadamente plana con respecto a dicha sinc, de modo que su efecto es el de multiplicar $\Phi_k(j\omega)$ por aproximadamente $H_{eq}(j2\pi k/T)$. Además, esta multiplicación no destruye la ortogonalidad, puesto que en este caso (8.45) resulta

$$\begin{aligned} p_{k,i}[n] &\approx H_{eq}(j2\pi k/T) (\phi_i(t) * \phi_k^*(-t))|_{t=nT} \\ &= \begin{cases} H(j\omega_c + j2\pi k/T)\delta[n] & \text{si } k = i \\ 0 & \text{si } k \neq i \end{cases} \end{aligned} \quad (8.47)$$

donde la segunda igualdad es consecuencia de la ortonormalidad de las funciones $\phi_k(t)$.

Obsérvese que, por tanto, estaríamos cerca de nuestro objetivo de cumplir el criterio de Nyquist generalizado. La matriz de canales discretos equivalentes es aproximadamente diagonal, pero no es la identidad. Para conseguir exactamente la identidad, bastaría con multiplicar la salida de cada muestreador $q_k[n]$ por $H^{-1}(j\omega_c + j2\pi k/T)$, aunque correríamos el riesgo de aumentar la potencia de ruido en algún subcanal si el correspondiente valor de $H(j\omega_c + j2\pi k/T)$ fuese muy pequeño.

Llegados a este punto, conviene detenernos para extraer las siguientes conclusiones:

1. El análisis realizado sólo sirve para analizar cualitativamente el problema; la aproximación en (8.47) es válida si la respuesta en frecuencia del canal es plana dentro del ancho de banda donde cada portadora tiene la mayor parte de su energía.
2. El efecto del canal $h(t)$ sobre el subcanal k -ésimo se cuantifica a través de su respuesta a la frecuencia $\omega_c + 2\pi k/T$ rad/seg. En otras palabras, para entender qué sucede sobre la portadora k -ésima, “basta” con considerar la respuesta del canal equivalente en banda base en la frecuencia de dicha portadora. Esta consideración no debería ser sorprendente: a medida que aumenta T , más se parece la función $\phi_k(t)$ a una exponencial compleja de la forma $e^{j\omega_k t}$; pero las exponenciales complejas son autofunciones de los sistemas lineales y el autovalor correspondiente es la respuesta del canal a la frecuencia de la exponencial ω_k . Es importante percatarse de que, dado que $H(j\omega)$ es, en general, un número complejo, el efecto será el de rotar y escalar la constelación transmitida sobre el subcanal correspondiente.

El desarrollo y las conclusiones de este apartado se pueden extender a las funciones base empleadas en la modulación multiportadora en tiempo discreto. En este caso, es interesante desarrollar la expresión (8.45) (cambiando $\phi_i(t)$ y $\phi_k(t)$ por $\hat{\phi}_i(t)$ y $\hat{\phi}_k(t)$, respectivamente), ya que nos servirá como punto de partida para solventar los problemas de la ISI y la ICI. Por tanto, sustituyendo (8.25) en (8.45) obtenemos

$$p_{k,i}(t) = \frac{N}{T} \sum_m \sum_l \xi_i[m] \xi_k^*[l] (g(t - mT/N) * h_{eq}(t) * g(-t - lT/N)) \quad (8.48)$$

Y, de aquí, empleando (8.17),

$$p_{k,i}[n] = \frac{1}{T} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi i m}{N}} e^{-j \frac{2\pi l k}{N}} d[nN + l - m] \quad (8.49)$$

siendo $d[m]$ el canal discreto equivalente en banda base a periodo T/N segundos, resultado de muestrear con periodo T/N la respuesta combinada del filtro transmisor, filtro receptor y canal equivalente en banda base

$$d[m] \doteq (g(t) * h_{eq}(t) * g(-t))|_{t=mT/N} \quad (8.50)$$

Obsérvese que, mientras $p_{k,i}[n]$ depende de los índices de las funciones base, $d[m]$ no lo hace. La Ecuación (8.49) puede verse como el resultado de calcular primero una DFT y después una DFT inversa (usando índices diferentes) del canal discreto equivalente en banda base obtenido a periodo T/N . Como ya hemos razonado antes, la matriz $\mathbf{P}(e^{j\omega})$ no es la identidad, salvo en el primero de los casos siguientes:

Ejemplo 8.1

- a) Si el canal discreto equivalente es $d[m] = T/N\delta[m]$, entonces es inmediato ver que $p_{k,i}[n] = \delta[k - i]\delta[n]$. Obsérvese que el factor T/N en $d[m]$ tiene en cuenta la ganancia del filtro $g(t)$ (véase (8.28)).
- b) Si el canal discreto equivalente es $d[m] = T/N(\delta[m] + 0,5\delta[m - N])$, entonces $p_{k,i}[n] = \delta[k - i](\delta[n] + 0,5\delta[n - 1])$. En tal caso, tenemos ISI pero no ICI.
- c) Si el canal discreto equivalente es $d[m] = T/N(\delta[m] + 0,5\delta[m - 1])$, el cálculo de $p_{k,i}[n]$ se complica algo más. Naturalmente, el primer sumando de $d[n]$ no presenta ninguna dificultad, puesto que se trata del caso (a) que estudiamos en este ejemplo. Sin embargo, para el segundo sumando, tenemos dos casos en los que $d[nN + l - m]$ es igual a 0,5: 1) si $l = m + 1$ y $n = 0$, y 2) si $l = 0, m = N - 1$ y $n = 1$. Analizando el primer caso, tendremos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi i m}{N}} e^{-j \frac{2\pi l k}{N}} \delta[l - m - 1] \\ &= \frac{1}{2N} \sum_{m=0}^{N-2} e^{j \frac{2\pi(i m - m k - k)}{N}} \\ &= \frac{1}{2N} \sum_{m=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi(i m - m k - k)}{N}} - \frac{1}{2N} e^{-j \frac{2\pi i}{N}} \\ &= \frac{1}{2} e^{-j \frac{2\pi k}{N}} \delta[k - i] - \frac{1}{2N} e^{-j \frac{2\pi i}{N}} \end{aligned} \quad (8.51)$$

El segundo caso produce, simplemente,

$$\frac{1}{2N} e^{j \frac{2\pi i(N-1)}{N}} = \frac{1}{2N} e^{-j \frac{2\pi i}{N}} \quad (8.52)$$

Agrupando los resultados obtenidos, podemos escribir

$$p_{k,i}[n] = \delta[n]\delta[k - i] + \frac{1}{2} \left(e^{-j \frac{2\pi k}{N}} \delta[k - i] - \frac{1}{N} e^{-j \frac{2\pi i}{N}} \right) \delta[n] + \frac{1}{2N} e^{-j \frac{2\pi i}{N}} \delta[n - 1] \quad (8.53)$$

Como vemos, para este canal discreto equivalente, no sólo tenemos ICI (como cabría esperar), sino también ISI.

En el apartado siguiente veremos cómo una pequeña modificación de la arquitectura de transmisor y receptor nos va a permitir obtener una matriz de canales discretos equivalentes auténticamente (no aproximadamente) diagonal.

Hasta el momento hemos supuesto que no hay ruido en el sistema; cuando el canal introduce ruido gausiano $n(t)$ con densidad espectral de potencia $S_n(j\omega)$, la variable de decisión en el subcanal k -ésimo se puede expresar como

$$q_k[n] = \sum_{i=0}^{N-1} A_i[n] * p_{k,i}[n] + z_k[n] \quad (8.54)$$

donde $z_k[n]$ es ruido gausiano complejo cuyo espectro de potencia se calcula según (8.39). Tal como se discute en el Apartado 8.1.4, cuando $n(t)$ es blanco con densidad espectral $N_0/2$ W/Hz, el ruido $z_k[n]$ es blanco, circularmente simétrico y con varianza N_0 .

8.1.6. Eliminación de la ISI y la ICI en modulaciones multiportadora

Supóngase que el canal discreto equivalente en banda base a periodo T/N , $d[n]$, es causal y de duración $K + 1$ muestras, es decir, $d[n] = 0$ si $n < 0$ ó $n > K^5$.

Consideremos ahora una modulación multiportadora en tiempo discreto en la que las funciones base en tiempo discreto son de la forma

$$\tilde{\xi}_k[m] = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{j \frac{2\pi km}{N}} w_{N+M}[m + M], \quad k = 0, \dots, N - 1 \quad (8.55)$$

de modo que la señal en tiempo discreto $\tilde{s}[m]$ que contiene las muestras de la señal en tiempo continuo que se va a enviar por el canal se obtiene como

$$\tilde{s}[m] = \sqrt{\frac{N}{T}} \sum_n \sum_{k=0}^{N-1} A_k[n] \tilde{\xi}_k[m - n(N + M)] \quad (8.56)$$

Como se puede comprobar, la única diferencia de $\tilde{\xi}_k[m]$ dada en (8.55) con la definición dada en (8.17) es que ahora la función toma valores no nulos en el intervalo $[-M, N - 1]$, cuando antes lo hacía en el intervalo $[0, N - 1]$. Por el momento, supongamos que la extensión de las funciones base es mayor que la duración del canal, esto es, realizaremos nuestra discusión bajo la siguiente hipótesis

$$M \geq K \quad (8.57)$$

La secuencia $\tilde{s}[m]$ en (8.56) se convierte a tiempo continuo con periodo T/N segundos empleando un filtro de reconstrucción $g(t)$ cuya función de ambigüedad temporal cumple,

⁵Muchos canales prácticos cumplen esta condición de forma aproximada, ya que se puede encontrar un K tal que la mayor parte de la energía del canal está contenida en las $K + 1$ primeras muestras. Véase Apartado 6.1.

salvo por una constante, el criterio de Nyquist a periodo T/N (no necesariamente un filtro ideal). Aunque la velocidad de conversión es la misma que la empleada anteriormente⁶, el hecho de que las funciones $\tilde{\xi}_k[m]$ tengan ahora una duración $(N + M)/N$ veces superior hace que la velocidad de transmisión efectiva de la secuencia de símbolos se reduzca en un factor $(N + M)/N$, lo que se traduce en una pérdida de eficiencia espectral.

La estructura propuesta ahora para el receptor consiste en obtener la secuencia $v[m]$ muestreando la señal $v(t) * g(-t)$ con periodo T/N segundos y calcular la variable de decisión del subcanal k -ésimo $q_k[n]$ como

$$q_k[n] = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{m=0}^{N-1} \xi_k^*[m] v[n(N + M) + m] \quad (8.58)$$

lo que implica usar $\xi_k^*[m]$ y no $\tilde{\xi}_k^*[m]$ en el correlacionador del receptor, como en principio cabría esperar sabiendo que es $\tilde{\xi}_k^*[m]$ la base discreta que empleamos en el transmisor. Comparando (8.58) y (8.38) vemos que la única diferencia es que ahora diezmamos por un factor de $N + M$ en lugar de N , lo cual es lógico porque en el transmisor cada símbolo de información se debe repetir $N + M$ muestras antes de multiplicarlo por la función base discreta correspondiente. Además, es fundamental observar en (8.58) que por cada $N + M$ muestras recibidas sólo estamos empleando las N últimas para efectuar la correlación, lo que equivale a descartar las primeras M ; por ejemplo, para obtener $q_k[0]$ empleamos las muestras $\{v[0], \dots, v[N - 1]\}$, mientras que para obtener $q_k[1]$ empleamos las muestras $\{v[N + M], \dots, v[M + 2N - 1]\}$, etc. Más adelante justificaremos el porqué de este esquema de receptor.

Es posible repetir el cálculo del canal discreto equivalente del apartado anterior para tener en cuenta las modificaciones en modulador y demodulador propuestas. Así, suponiendo que no hay ruido en el sistema, tenemos

$$p_{k,i}[n] = \frac{1}{T} \sum_{m=-M}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi m i}{N}} e^{-j \frac{2\pi l k}{N}} d[n(N + M) + l - m] \quad (8.59)$$

Haciendo el cambio de variable $u = l - m$ podemos escribir

$$p_{k,i}[n] = \frac{1}{T} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{u=l-N+1}^{l+M} e^{-j \frac{2\pi u i}{N}} e^{j \frac{2\pi l(i-k)}{N}} d[n(N + M) + u] \quad (8.60)$$

Es fácil ver que si $d[m]$ sólo toma valores no nulos en el intervalo $[0, K]$, como $M \geq K$ y u recorre el intervalo $[-N + 1, M + N - 1]$, entonces $d[n(N + M) + u]$ sólo puede ser distinto de cero para $n = 0$. Por otra parte, para todo l , $0 \leq l \leq N - 1$ se cumple que el

⁶Y, por tanto, la tasa de símbolo efectiva pasa de N/T a $N^2/T(N + M)$ baudios.

intervalo $[0, K] \subset [l - N + 1, l + M]$. Por tanto, (8.60) es equivalente a

$$\begin{aligned} p_{k,i}[n] &= \frac{1}{T} \sum_{u=0}^K e^{-j\frac{2\pi u i}{N}} d[u] \delta[n] \cdot \sum_{l=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi l(i-k)}{N}} \\ &= \frac{N}{T} \delta[n] \delta[k - i] \sum_{u=0}^K e^{-j\frac{2\pi u i}{N}} d[u] \end{aligned} \quad (8.61)$$

Por tanto, vemos que la ISI y la ICI han desaparecido, limitándose el efecto del canal a ser multiplicativo. Es muy interesante reconocer en (8.61) que el canal discreto equivalente sobre el canal i -ésimo es simplemente ¡la DFT de N puntos de $d[m]$!, de modo que la señal recibida en el subcanal k -ésimo es

$$q_k[n] = \frac{N}{T} A_k[n] D[k] \quad (8.62)$$

siendo $D[k]$ el k -ésimo coeficiente de la DFT de N puntos del canal discreto equivalente a periodo T/N . Todo ello nos permite contemplar “subcanales” discretos equivalentes como en la Figura 8.13, donde se ha prescindido, en beneficio de la claridad, del factor N/T en cada uno de los subcanales.

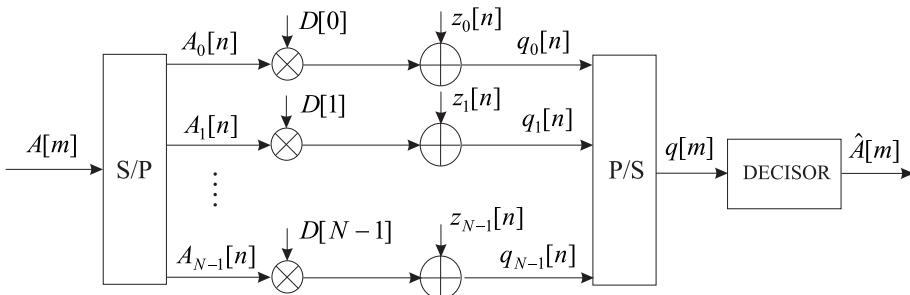


Figura 8.13. Subcanales discretos equivalentes en banda base para la modulación OFDM con extensión cíclica de tamaño mayor que la duración del canal.

Es de capital importancia tener presente que este resultado sólo es válido si la extensión cíclica de las funciones base es mayor que la longitud del canal menos uno. De lo contrario, volveríamos a la situación con ISI e ICI, pudiendo cuantificar ambas a partir de (8.60).

Ejemplo 8.2

Comprobemos, calculando el canal discreto equivalente, que tanto la ISI como la ICI han desaparecido en la situación analizada en el Ejemplo 8.1(c). En este caso, el canal discreto a periodo T/N es $d[m] = T/N(\delta[m] + 0,5\delta[m-1])$. Para que $p_{k,i}[n]$ en (8.59) tome valores no nulos para algún $n_0 \neq 0$ tendría que cumplirse que $n_0(N+M)-1 = m_0 - l_0$, con $m_0 \in [-M, \dots, N-1]$ y $l_0 \in [0, \dots, N-1]$. Es fácil ver que esto no puede ocurrir: el máximo y el mínimo de $m_0 - l_0$ son, respectivamente, $N-1$ y $-M-N+1$, por lo que la condición anterior no se cumple para ningún $n_0 \neq 0$ si $M > 0$.

Podemos escribir, por tanto,

$$\begin{aligned}
 p_{k,i}[n] &= \frac{1}{N} \delta[n] \sum_{m=-M}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi m i}{N}} e^{-j \frac{2\pi l k}{N}} (\delta[l-m] + 0,5 \delta[l-m-1]) \\
 &= \frac{1}{N} \delta[n] \left(N \delta[k-i] + 0,5 \sum_{l=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi(l+1)i}{N}} e^{-j \frac{2\pi l k}{N}} \right) \\
 &= \delta[n] \delta[k-i] (1 + 0,5 e^{j \frac{2\pi i}{N}})
 \end{aligned} \tag{8.63}$$

que sólo toma valores no nulos si $n = 0$ y $k = i$.

Sin embargo, en el caso planteado en el Ejemplo 8.1(b). el lector puede comprobar que si M es tal que $M < N$, entonces la ISI no sólo no desaparece, sino que además se crea ICI. Véase el Problema P8.4.

En este apartado hemos supuesto que el canal no introduce ruido; en caso de que sí lo introdujese, la Ecuación (8.54) y las consideraciones efectuadas con posterioridad para el caso de ruido blanco siguen siendo válidas.

Probabilidades de error

Como en el Capítulo 5, el concepto de canal discreto equivalente simplifica el cálculo de la probabilidad de error. A efectos de comparación con la PAM paso banda, cuyas probabilidades se consideran en el Apartado 5.2.3, analicemos el caso de canal gausiano con densidad espectral de potencia de ruido $N_0/2$ W/Hz. Como hemos discutido, este tipo de canal no da lugar a ISI ni ICI, por lo que, para todo i, k , $p_{k,i}[n] = \delta[n] \delta[k-i]$, de modo que las variables de decisión en (8.54) se simplifican a

$$q_k[n] = A_k[n] + z_k[n] \tag{8.64}$$

siendo $z_k[n]$ ruido blanco, circularmente simétrico y de varianza N_0 (recuérdese: $N_0/2$ por dimensión). Como se ve, este modelo coincide exactamente con el estudiado para PAM paso banda, por lo que podemos concluir que si en el l -ésimo subcanal se emplea la misma constelación que en PAM paso banda, las probabilidades de error respectivas serán idénticas, de modo que la discusión realizada en el Apartado 5.2.3 es enteramente aplicable a este caso. En resumen, nada se gana en prestaciones por emplear una modulación OFDM en lugar de una PAM *cuando el canal es gausiano*.

Asimismo, es interesante examinar el caso en que eliminamos la ISI y la ICI con la extensión cíclica, para el que

$$q_k[n] = A_k[n] \frac{N}{T} D[k] + z_k[n] \tag{8.65}$$

Recordando que $D[k]$ es, en general, complejo, el efecto sobre el canal k -ésimo es el de escalar y rotar la constelación originalmente transmitida. Por tanto, si suponemos que se emplea la misma constelación en todos los subcanales, y d_{min} es la distancia mínima entre los elementos de dicha constelación, en recepción dicha distancia se convierte en $d_{min} \cdot |D[k]|N/T$

para el canal k -ésimo, por lo que el peor caso se tiene en aquel subcanal para el que $|D[k]|$ es mínimo. No obstante, es de capital importancia señalar que si no se toman medidas para contrarrestar el efecto de $D[k]$ en el receptor (véase Apartado 8.1.8), los efectos pueden ser desastrosos. Ello apunta a la necesidad de estimar $D[k]$ o emplear métodos incoherentes. Por ejemplo, si la modulación empleada en cada subcanal es DPSK (Apartado 7.1.3), entonces el escalado no tiene efecto, ya que la información se envía en la fase; además, si la fase de $D[k]$ se puede considerar constante en un periodo de T segundos, la demodulación diferencial evita la necesidad de conocerla.

8.1.7. La OFDM vista como un proceso en bloques

En este apartado ofrecemos una interpretación alternativa de los resultados del apartado precedente, lo que nos permitirá profundizar en las causas que hacen que tanto la ISI como la ICI desaparezcan. En aras de una mayor claridad en la exposición, prescindiremos de los factores de escala en la DFT y en la DFT inversa.

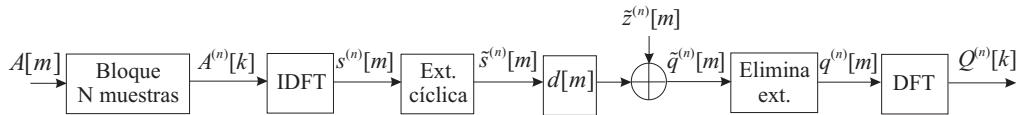


Figura 8.14. La modulación OFDM como un proceso por bloques. El superíndice n indica el n -ésimo bloque.

La Figura 8.14 presenta esta nueva perspectiva. La secuencia de símbolos $A[m]$ se divide en bloques de N muestras, a las que se calcula la DFT inversa, lo que produce también N muestras. Denotaremos por $s^{(n)}[m]$, $m = 0, \dots, N - 1$ el n -ésimo bloque de muestras de salida de la IDFT. Antes de ser transmitidas secuencialmente (con periodo T/N) las muestras del bloque, se les añade (por la izquierda) un prefijo cíclico de M muestras, de modo que se construye la versión extendida del bloque $s^{(n)}[m]$, que denotamos mediante $\tilde{s}^{(n)}[m]$, como

$$\tilde{s}^{(n)}[m] = \begin{cases} s^{(n)}[m + N] & m = -M, \dots, -1 \\ s^{(n)}[m] & m = 0, \dots, N - 1 \end{cases} \quad (8.66)$$

Equivalentemente, $\tilde{s}^{(n)}[m]$ es el resultado de haber truncado al intervalo $[-M, N - 1]$ una señal periódica (infinita) construida a partir de $s^{(n)}[m]$. La operación de extensión cíclica se ilustra en la Figura 8.15.

El bloque $\tilde{s}^{(n)}[m]$ se envía ahora por el canal discreto equivalente en banda base obtenido a periodo T/N , que denotamos por $d[m]$. En ausencia de ruido, el n -ésimo bloque de observaciones es entonces $\tilde{q}^{(n)}[m] = \tilde{s}^{(n)}[m] * d[m]$. Finalmente, el receptor calcula la DFT de N puntos del bloque $q^{(n)}[m]$ obtenido a partir de las muestras de $\tilde{s}^{(n)}[m]$ en el intervalo $[0, N - 1]$:

$$q^{(n)}[m] = \tilde{q}^{(n)}[m]w_N[m] \quad (8.67)$$

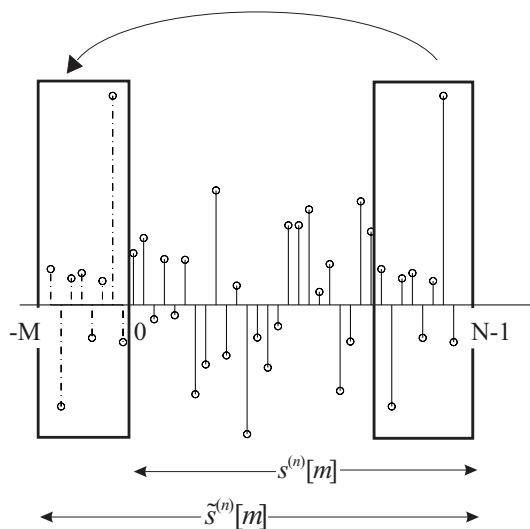


Figura 8.15. Operación de extensión cíclica sobre $s^{(n)}[m]$.

Sea $Q^{(n)}[k]$ la DFT de N puntos de $q^{(n)}[m]$. Obsérvese que, a partir de la definición de la DFT,

$$Q^{(n)}[k] = \sum_{m=0}^{N-1} q^{(n)}[m] e^{-j \frac{2\pi km}{N}} = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{q}^{(n)}[m] e^{-j \frac{2\pi km}{N}} \quad (8.68)$$

De acuerdo con lo anterior, tenemos las siguientes relaciones

$$Q^{(n)}[k] = \text{DFT}\{q^{(n)}[m]\} = \text{DFT}\{\tilde{q}^{(n)}[m]\} = \text{DFT}\{\tilde{s}^{(n)}[m] * d[m]\} \quad (8.69)$$

Pero, gracias a la extensión cíclica, la convolución lineal entre $\tilde{s}^{(n)}[m]$ y $d[m]$ en el intervalo $[0, N - 1]$ equivale a la convolución circular $s^{(n)}[m] \circledast d[m]$ y, por tanto,

$$\begin{aligned} Q^{(n)}[k] &= \text{DFT}\{s^{(n)}[m]\} \cdot \text{DFT}\{d[m]\} \\ &= \text{DFT}\{\text{IDFT}\{A^{(n)}[k]\}\} \cdot \text{DFT}\{d[m]\} \\ &= A^{(n)}[k] D[k] \end{aligned} \quad (8.70)$$

siendo $D[k]$ la DFT de N puntos del canal, que es, salvo por una constante, el mismo resultado al que habíamos llegado en el apartado anterior⁷.

En la Figura 8.16 se representan los diagramas de bloques de un transmisor y un receptor que aprovechan la idea de la extensión cíclica. ¿Para qué sirve la extensión cíclica? La respuesta es: para “engañar” al canal. Evidentemente, en el canal se realiza una operación

⁷Obsérvese que la notación empleada en este apartado difiere de la empleada en otros anteriores: $A_k[n]$ denota el n -ésimo símbolo transmitido sobre la portadora k -ésima, mientras que $A^{(n)}[k]$ denota el símbolo transmitido sobre la portadora k -ésima en el n -ésimo bloque.

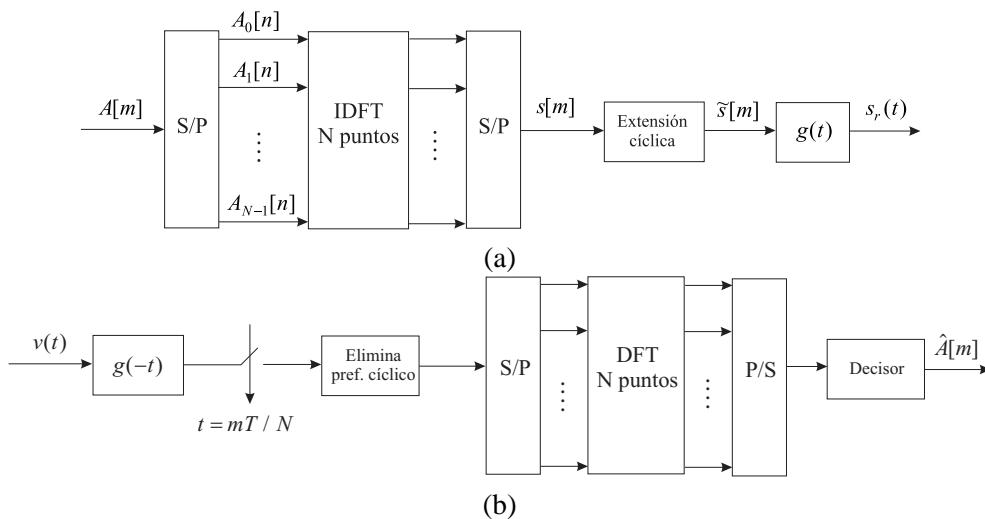


Figura 8.16. Estructura de un: (a) transmisor y (b) receptor para OFDM en tiempo discreto con extensión cíclica.

de convolución lineal; sin embargo, nosotros estamos interesados en una convolución circular. Sólo la convolución circular tiene un efecto puramente multiplicativo en el dominio transformado y eso es lo que buscamos para que no haya ICI. Para que la convolución lineal equivalga a una circular tenemos que realizar la extensión cíclica. Pero, además, la incorporación del prefijo cíclico evita que un bloque interfiera con el siguiente, lo que se traduce en una ISI nula. Mientras la duración del prefijo sea mayor que la longitud del canal, el efecto de un bloque sobre el siguiente se limitará a corromper su prefijo cíclico, pero no la parte de información. En realidad, esta característica de ISI nula se consigue con cualquier *intervalo de guarda temporal* introducido –por ejemplo, un intervalo idénticamente nulo–, pero sólo la extensión cíclica garantiza, además, una ICI nula⁸.

Finalmente, es importante mencionar que la introducción de la extensión cíclica hace que las funciones base empleadas en el transmisor ya no sean ortogonales, aunque esto no es un problema, ya que en el receptor se elimina dicha extensión cíclica y se recupera la ortogonalidad. Otro efecto interesante es que al aumentar la duración temporal de las funciones base, las sincs correspondientes son más estrechas en frecuencia que antes, por lo que sus máximos ya no coinciden exactamente con los nulos de las demás y el espectro total resultante $S_{sr}(j\omega)$ ya no es plano, sino que presenta un rizado. La Figura 8.17 ilustra este hecho. Lógicamente, para un N fijo, a mayor valor de M , mayor rizado. Por otra parte, el espectro de la Figura 8.17 se ha obtenido empleando un filtro transmisor $g(t)$ del tipo raíz cuadrada de coseno alzado, con factor de caída $\alpha = 0,5$, lo que da lugar a la caída suave de la figura.

⁸Existen otras formas de construir el bloque a transmitir que, mediante un procesado posterior, también permiten eliminar la ICI (véase Problema P8.5).

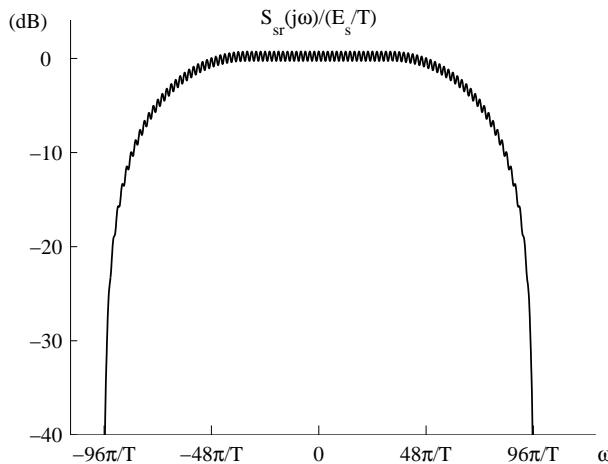


Figura 8.17. Espectro de potencia de la señal OFDM en tiempo discreto cuando $N = 64$, $M = 4$ y el pulso transmisor es un filtro en raíz cuadrada de coseno alzado con factor de caída $\alpha = 0,5$.

8.1.8. Igualación Lineal

Como hemos visto en el Apartado 8.1.6, la OFDM con un prefijo cíclico suficientemente largo ofrece la ventaja de convertir el efecto convolutivo del canal en otro multiplicativo. Ello garantiza que la implementación de igualadores lineales es extremadamente sencilla. Nuestro punto de partida será la Ecuación (8.65), que relaciona la señal recibida en el subcanal k -ésimo con el símbolo enviado sobre dicho subcanal. La primera observación importante es que, dado que la señal recibida depende de la DFT del canal $D[k]$, deberemos colocar un igualador por cada subcanal; afortunadamente, el hecho de que no tengamos ISI implica que este igualador será únicamente multiplicativo. Por tanto, denotaremos el igualador empleado sobre el k -ésimo subcanal por $W[k]$.

Atendiendo al criterio forzador de ceros (ZF, Apartado 6.3.1), el igualador simplemente invierte el efecto del canal. Así pues,

$$W_{\text{ZF}}[k] = \frac{T}{N} D^{-1}[k] = \frac{T}{N} \cdot \frac{D^*[k]}{|D[k]|^2} \quad (8.71)$$

Como se comentó en el Apartado 6.3.1, este igualador presenta el inconveniente de amplificar la potencia de ruido si $|D[k]|N/T$ es pequeño.

Por lo que respecta al igualador diseñado de acuerdo con el criterio de mínimo error cuadrático medio (MSE), éste se diseña para minimizar $E\{|W[k]q_k[n] - A_k[n]|^2\}$. Siguiendo las directrices del Apartado 6.3.2 es inmediato concluir que, ahora,

$$W_{\text{MSE}}[k] = \frac{E_{s,k} D^*[k] N/T}{E_{s,k} |D[k]|^2 N^2/T^2 + \sigma_{z,k}^2} \quad (8.72)$$

siendo $E_{s,k}$ y $\sigma_{z,k}^2$ la energía de símbolo y la varianza de ruido del subcanal k -ésimo, respectivamente.

Aunque ambos igualadores parecen muy distintos, obsérvese que

$$W_{ZF}[k] = \frac{D^*[k]N/T}{|D[k]|^2 N^2 / T^2} \quad (8.73)$$

de modo que podemos interpretar ambos igualadores del siguiente modo: la multiplicación por $D^*[k]$ sirve para corregir la rotación de fase introducida en el canal; por lo demás, ambos igualadores realizan un escalado (diferente en cada caso) para tratar de restaurar la amplitud del símbolo transmitido.

Un aspecto muy interesante de la comparativa entre ambos igualadores es que el igualador ZF obtiene mejores prestaciones en términos de probabilidad de error. Este hecho puede parecer sorprendente a primera vista, pero debe recordarse que, en realidad, el igualador MSE minimiza el error cuadrático medio, no la probabilidad de error. Se recomienda al lector la resolución del Problema P8.11 en el que se profundiza en este aspecto.

Por supuesto, ambas estructuras de igualador requieren conocer la respuesta del canal en cada portadora $D[k]$. Tal como vimos en el Apartado 6.7.2, este problema se puede solucionar enviando símbolos piloto bien para estimar el canal o bien para construir un igualador adaptativo con un algoritmo como el LMS.

A lo largo de los apartados precedentes hemos venido suponiendo la idealidad de los sistemas descritos en lo que respecta a la sincronización: así, la conversión a banda base de la señal recibida se considera perfecta (esto es, se usa exactamente la misma frecuencia y fase que en la modulación) y el instante de muestreo es óptimo. Además, cuando se trata de operar con bloques (por ejemplo, para eliminar el prefijo cíclico o hacer la DFT), suponemos que el receptor conoce el instante en que comienza cada bloque. Por supuesto, en la práctica es necesario resolver estos problemas, que abordaremos en el Apartado 11.7.

8.2. MODULACIONES DE ESPECTRO ENSANCHADO

En este apartado estudiaremos un tipo de modulaciones pensadas originalmente para combatir la interferencia en sistemas militares y que son aplicadas hoy en día como técnica de acceso múltiple o para mitigar los efectos de la distorsión lineal del canal. Dado que estas técnicas se basan en la utilización de un ancho de banda considerablemente superior al que dictaría el cumplimiento del criterio de Nyquist para la ausencia de ISI, reciben el nombre de *espectro ensanchado*. Así, si la tasa de transmisión de información en baudios es $1/T$ y W es el ancho de la banda base en hercios, el criterio de Nyquist para señales paso banda determina que $W \cdot T \geq 1/2$. Para una modulación en espectro ensanchado, el producto $W \cdot T$ es mucho mayor que $1/2$.

¿Para qué sirve entonces esta redundancia? En contra de lo que se pueda pensar inicialmente, el uso de un mayor ancho de banda sobre un canal gausiano ideal no produce ninguna mejora de prestaciones, medidas en la relación E_b/N_0 que se necesita para alcanzar un cierto nivel de probabilidad de error. Las principales ventajas de usar un mayor ancho de banda para sistemas con un único usuario son dos: 1) en caso de que haya interferencias localizadas en frecuencia presentes en el canal, en promedio éstas afectarán menos cuanto

mayor sea el ancho de banda ocupado, especialmente si la potencia transmitida se distribuye uniformemente sobre el ancho de banda disponible; 2) si el canal introduce una distorsión lineal, puede haber zonas del espectro del canal con una atenuación considerable, por lo que el uso de un mayor ancho de banda evita concentrar toda la potencia en las zonas “malas” del canal.

Las modulaciones en espectro ensanchado también son de utilidad para construir sistemas de acceso múltiple (véase Apartado 8.3). En tal caso es posible minimizar las necesidades de intervalos y bandas de guarda que requieren los sistemas de acceso múltiple por división en tiempo y en frecuencia, respectivamente. Para ello, todos los usuarios presentes en el sistema transmiten simultáneamente ocupando el mismo ancho de banda. Semejante “milagro” no ha de suponer para nosotros sorpresa alguna, por cuanto ya sabemos que la ortogonalidad entre las señales transmitidas nos permite la separación de la información en el receptor, aunque ésta se haya enviado usando pulsos que se solapan en tiempo y en frecuencia. Por tanto, basta con que la información de cada usuario module un pulso distintivo, ortogonal (o casi ortogonal) a los demás, de modo que se minimice la interferencia debida a los restantes usuarios. Dicha interferencia se denomina *multiacceso* (“*Multiaccess Interference*”, MAI). Por razones prácticas el pulso distintivo usado en transmisión se genera a partir de un código (o firma), por lo que se habla de *acceso múltiple por división en código* (“*Code-Division Multiple Access*”, CDMA).

En este apartado revisaremos las modulaciones de espectro ensanchado, deteniéndonos en la arquitectura del transmisor y en un receptor basado en el filtro adaptado. El diseño de receptores de espectro ensanchado para sistemas con un único usuario se aborda en el Apartado 8.2.3, mientras que la aplicación de las modulaciones de espectro ensanchado a acceso múltiple se considerará en el Apartado 8.3.1.

Como motivación del problema, consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 8.3

Sea el canal $h(t) = \delta(t) - 0,9\delta(t - \Delta)$, para un Δ conocido. A través de dicho canal se transmite con una modulación PAM paso banda con frecuencia de portadora ω_c rad/seg y periodo de símbolo T segundos. Por simplicidad, supongamos que el filtro transmisor es un filtro ideal con frecuencia de corte π/T rad/seg y ganancia \sqrt{T} o, lo que es lo mismo, es un filtro en raíz de coseno alzado con factor de caída $\alpha = 0$.

La respuesta en frecuencia del canal es $H(j\omega) = 1 - 0,9e^{j\omega\Delta}$, representada en la Figura 8.18 en un rango apropiado, en el que vemos que dicha respuesta es periódica con periodo $2\pi/\Delta$ rad/seg, con mínimos situados en las frecuencias de la forma $2\pi k/\Delta$ rad/seg, y máximos en las frecuencias de la forma $(2k + 1)\pi/\Delta$ rad/seg, con k un número entero.

Cualitativamente, si la frecuencia de la portadora coincide con un mínimo de $H(j\omega)$ y el ancho de banda empleado es muy pequeño en comparación con el espacio entre “agujeros espectrales”, la potencia recibida será muy pequeña. Dicha potencia aumentará a medida que lo haga el ancho de banda empleado. La condición de que el ancho de banda sea pequeño se traduce en que

$$T/\Delta \gg 1 \quad (8.74)$$

lo que puede interpretarse como que el periodo de símbolo empleado es mucho mayor que el retardo introducido en la componente retardada por el canal. En efecto, si el retardo Δ es pequeño en comparación con T , y la frecuencia de la portadora es de la forma $2\pi k/\Delta$, el canal se

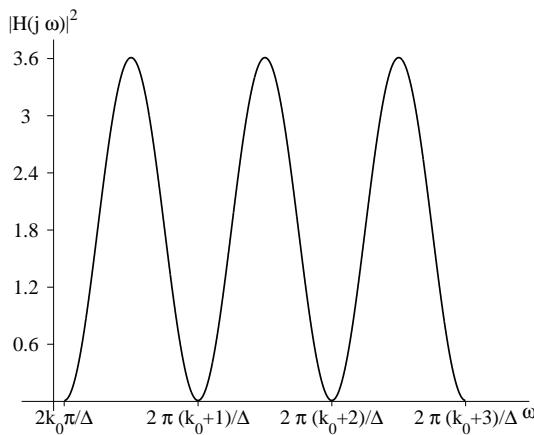


Figura 8.18. Respuesta en magnitud al cuadrado del canal del Ejemplo 8.3.

comportará aproximadamente como $h(t) \approx 0,1\delta(t)$, por lo que una señal transmitida en banda base (donde hay un mínimo) será fuertemente atenuada.

Formalmente, para una secuencia de símbolos $A[n]$ blanca y con energía media E_s , la potencia recibida S es

$$\begin{aligned} S &= \frac{E_s T}{2\pi T} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} |1 - 0,9e^{j\omega\Delta}|^2 d\omega \\ &= \frac{E_s}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} (1,81 - 1,8 \cos(\omega\Delta)) d\omega \\ &= P \left(1,81 - \frac{1,8}{\pi\Delta/T} \operatorname{sen}(\pi\Delta/T) \right) \end{aligned} \quad (8.75)$$

donde $P = E_s/T$ es la potencia transmitida. Es, por tanto, el factor entre paréntesis en (8.75) el que determina la ganancia en potencia del canal. Este factor depende, como puede comprobarse, del cociente Δ/T y se representa en función de dicho parámetro en la Figura 8.19, donde es posible observar que, a medida que aumenta el ancho de banda empleado también lo hace la ganancia en potencia del canal, hasta alcanzar un máximo, produciendo después una respuesta oscilatoria. Esta respuesta se debe a que, con el aumento del ancho de banda ocupado se van incluyendo dentro del mismo nuevos máximos o mínimos, aunque su importancia relativa es cada vez menor. El valor asintótico de la ganancia es, como puede comprobarse en (8.75), 1,81.

El ejemplo anterior pone de manifiesto el riesgo de emplear un ancho de banda pequeño cuando el canal es selectivo en frecuencia. Una solución trivial sería cambiar de frecuencia de portadora, pero esto no es posible en muchos sistemas reales en los que Δ varía con el tiempo, lo que, a su vez, provoca que la posición de los agujeros también sea variante en el tiempo. Este es el caso de muchos radioenlaces digitales, con el cambio en las condiciones atmosféricas, y, en mayor medida, en comunicaciones móviles, con el desplazamiento del terminal del usuario.

Como solución al problema anterior, hemos visto también en el Ejemplo 8.3 que un aumento del ancho de banda utilizado en transmisión produce un aumento de la ganancia en

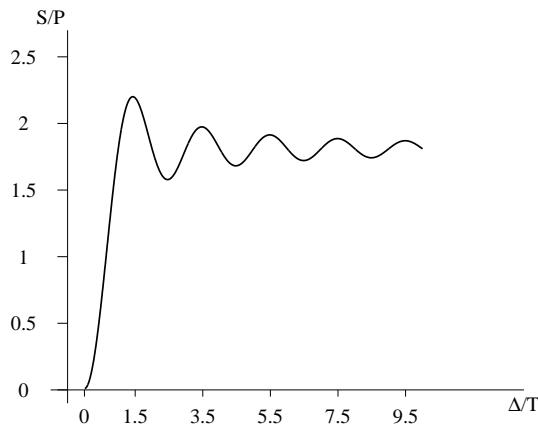


Figura 8.19. Ganancia en función del cociente Δ/T para el Ejemplo 8.3.

potencia del canal, aunque ello no es, en absoluto, una panacea, ya que en cuanto $T/\Delta \leq 1/2$ la interferencia entre símbolos empieza a jugar un papel relevante.

¿Cómo podemos aumentar el ancho de banda en transmisión? Parece obvio que la solución pasa por aumentar el ancho de banda del filtro empleado en transmisión (véase, por ejemplo, la Ecuación (5.72)) por encima del mínimo marcado por el criterio de Nyquist para la ausencia de ISI. Si nuestro deseo es enviar símbolos de información con una tasa de $1/T$ baudios, podríamos pensar en emplear un filtro transmisor de ancho de banda (en banda base) de $\pi N/T$ rad/seg, con N un número entero suficientemente grande. Este valor N recibe el nombre de *factor de expansión*, puesto que determina el número de veces en que se aumenta el ancho de banda por encima del mínimo necesario para que no haya ISI.

Supongamos entonces que nuestra señal compleja en banda base es de la forma:

$$s(t) = \sum_n A[n]g(t - nT) \quad (8.76)$$

donde ahora el filtro $g(t)$ es un filtro en raíz de coseno alzado (con $\alpha = 0$), ocupando $\pi N/T$ rad/seg de ancho de banda. En tiempo, la función de ambigüedad temporal de ese pulso es una sinc que pasa por cero en los instantes $t = kT/N$, para cualquier entero k distinto de cero. En la Figura 8.20 se representa un fragmento de señal transmitida para ilustrar el problema que el uso de este tipo de pulsos acarrearía: la duración del pulso $g(t)$ es ahora muy corta en comparación con el periodo de símbolo T . Por esta razón, la señal se transmite en ráfagas de muy corta duración cada T segundos, por lo que la potencia instantánea no se distribuye de manera uniforme: en algunos instantes la potencia es muy grande y durante la mayor parte del tiempo prácticamente no se transmite señal alguna. Conseguir esta elevada potencia de pico sin distorsiones de amplitud es, como ya hemos comentado en capítulos precedentes, problemática allí donde hay amplificadores de radiofrecuencia, por lo que la solución que aquí hemos planteado es manifiestamente mejorable.

En cualquier caso, es interesante advertir que la función de ambigüedad de los pulsos

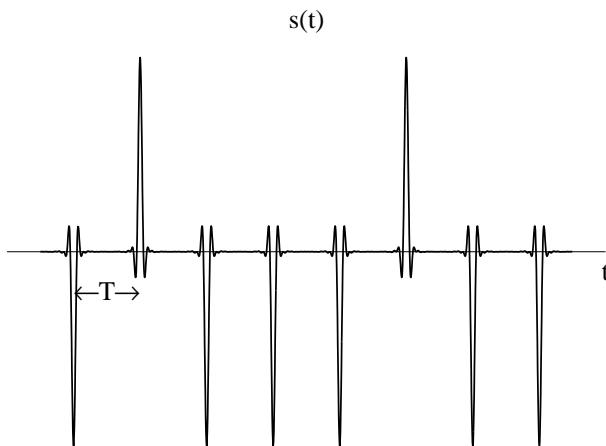


Figura 8.20. Fragmento de una señal de espectro ensanchado con pulsos muy estrechos en el dominio temporal.

empleados cumple, salvo por un factor constante, el criterio de Nyquist, no sólo a periodo T , sino también a periodo T/N (recordemos que esto también ocurría en OFDM). El hecho de que se fueren cruces por cero cada T/N segundos está directamente relacionado con el ancho de banda ocupado. Así pues, podríamos pensar en buscar otros pulsos $g(t)$ cuyas funciones de ambigüedad no estén tan localizadas en el dominio del tiempo, pero sigan cumpliendo el criterio de Nyquist a periodo T/N . Obviamente, el número de pulsos que satisfacen esta restricción es infinito, por lo que aquí nos centraremos en una familia de pulsos que, por construcción, cumplen dicho requisito y que, además, cuentan con la ventaja adicional de ser parametrizables en función de un código o firma, por lo que serán de utilidad en aplicaciones de acceso múltiple, como ya hemos comentado.

8.2.1. Espectro ensanchado por secuencia directa

La familia de pulsos considerada responde a la forma:

$$g(t) = \sum_{m=0}^{N-1} x[m]g_c(t - mT_c) \quad (8.77)$$

donde la secuencia $x[m]$ (posiblemente compleja) es determinista (por tanto, no porta información) y se denomina *secuencia ensanchadora* o *secuencia de chip*; $g_c(t)$ es un pulso cuya función de ambigüedad cumple el criterio de Nyquist a periodo T_c , y $T_c = T/N$ es el denominado *periodo de chip*⁹.

De la Expresión (8.77) se deduce que el pulso $g(t)$ se obtiene después de sumar versiones desplazadas y escaladas del pulso de chip $g_c(t)$ o, de forma equivalente, $g(t)$ es el resultado

⁹En inglés, *chip* significa “pedacito”. El término alude a cada uno de los pedacitos en que se divide el periodo de símbolo T .

de “modular” el pulso de chip con una secuencia determinista y de duración un periodo de símbolo.

Sustituyendo (8.77) en (8.76) tenemos

$$s(t) = \sum_n A[n] \sum_{l=0}^{N-1} x[l] g_c(t - lT_c - nT) \quad (8.78)$$

La expresión anterior se puede transformar para ofrecer una interpretación alternativa de la generación de señales de espectro ensanchado. Haciendo el cambio de variable $m = nN + l$ en (8.78) resulta

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_n A[n] \sum_{m=nN}^{nN+N-1} x[m - nN] g_c(t - mT_c) \\ &= \sum_n A[n] \sum_m \tilde{x}[m] w_N[m - nN] g_c(t - mT_c) \end{aligned} \quad (8.79)$$

donde $\tilde{x}[m]$ es una señal periódica generada a partir de $x[m]$ como $\tilde{x}[m] \doteq \sum_k x[m - kN]$ y $w_N[m]$ es una ventana rectangular causal de N muestras.

De este modo, la señal $s(t)$ en (8.79) es equivalente a modular un pulso $g_c(t)$ con una secuencia $s[m]$ tal que

$$s[m] = \tilde{x}[m] \sum_n A[n] w_N[m - nN] \quad (8.80)$$

Obsérvese que $\sum_n A[n] w_N[m - nN]$ en (8.80) puede interpretarse como una secuencia obtenida repitiendo N veces las muestras de $A[n]$ a una tasa lógicamente N veces mayor. Gracias a ello, el producto con $\tilde{x}[m]$ es compatible en tasa. Esta forma de generar señales de espectro ensanchado, multiplicando por una *secuencia ensanchadora* se denomina *por secuencia directa* (“*Direct Sequence Spread Spectrum*”, DSSS).

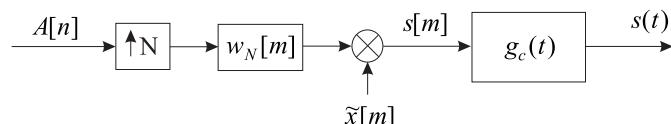


Figura 8.21. Arquitectura de un transmisor de espectro ensanchado de secuencia directa en banda base.

La Ecuación (8.80) posibilita dibujar el diagrama de bloques de un transmisor correspondiente a una modulación de espectro ensanchado, tal como se representa en la Figura 8.21. Además, esta estructura nos permite razonar fácilmente por qué podemos conseguir ensanchar el espectro: la secuencia $s[m]$ se transmite ahora a una velocidad N veces superior; si esta nueva secuencia tiene un espectro discreto plano, el espectro de potencia de la señal $s(t)$ coincidirá con $|G_c(j\omega)|^2$, siendo $G_c(j\omega)$ la Transformada de Fourier del pulso

de chip. Esta última consideración es de gran importancia: no todas las secuencias de chip $x[m]$ serán válidas para nuestros propósitos. En el ejemplo siguiente, se consideran algunas secuencias de chip que no lo son.

Ejemplo 8.4

a) Si $x[m] = \delta[m]$ estamos en el caso ilustrado en la Figura 8.20, esto es, la energía transmitida durante un periodo de símbolo se concentra en un periodo de chip, y durante el resto apenas se transmite señal. Se dice entonces que la señal está localizada en tiempo. Es fácil ver que si la secuencia $A[n]$ es blanca, entonces el espectro de $s[m]$ es plano.

b) Si $x[m] = e^{j\frac{2\pi ml}{N}}$, para un $l \in \{0, \dots, N-1\}$ fijo, la señal transmitida equivale a modular una de las funciones base discretas empleadas en OFDM. Aunque en este caso la transmisión ya no está localizada en tiempo, el lector recordará que el espectro asociado a una portadora en OFDM era una sinc, por lo que ahora estará localizado en frecuencia. Por tanto, los inconvenientes que encontraríamos son idénticos a los comentados más arriba cuando motivamos el empleo de espectro ensanchado: en canales selectivos en frecuencia, un espectro estrecho puede sufrir una importante atenuación.

A la vista del ejemplo anterior, desearíamos que la secuencia $s[m]$ no estuviese localizada ni en tiempo ni en frecuencia. ¿Existe alguna secuencia de chip $x[m]$ con la que podamos lograr este doble objetivo? La respuesta es afirmativa, siempre que estemos dispuestos a relajar las condiciones. Por ejemplo, no es difícil demostrar que las únicas secuencias $x[m]$ para las que el espectro de $s[m]$ es plano son aquellas de la forma $x[m] = e^{j\theta}\delta[m - k]$, para algún $k \in \{0, \dots, N-1\}$ y algún número real θ . Pero estas secuencias son las que precisamente hemos descartado anteriormente.

Supongamos por un momento que N es infinito y $x[m]$ es una realización de un proceso estocástico blanco. Entonces, su espectro de potencia sería plano y, con él, el de $s[m]$. Obviamente, si consideramos una realización de dicho proceso truncada a un número finito de muestras, el espectro de $x[m]$ dejará de ser plano y otro tanto sucederá con la densidad espectral de potencia de $s[m]$. En cualquier caso, parece una buena idea obtener $x[m]$ como una secuencia de *seudoruido*, esto es, una secuencia determinista pero con apariencia externa de ruido blanco. En el Apartado 8.2.9 analizaremos este aspecto en detalle.

8.2.2. Espectro de la señal espectro ensanchado por secuencia directa

En este caso, podemos aplicar directamente la Expresión (5.72), de forma que el espectro de potencia de la señal en banda base $s(t)$ es

$$S_s(j\omega) = \frac{1}{T} S_A(e^{j\omega T}) |G(j\omega)|^2 \quad (8.81)$$

siendo $S_A(e^{j\omega})$ la densidad espectral de potencia de la secuencia $A[n]$. Es conveniente, no obstante, poner la expresión anterior en función de la secuencia de chip y del pulso de chip. Para ello, se calcula la Transformada de Fourier en ambos lados de (8.77), de modo que

$$G(j\omega) = G_c(j\omega) \sum_{m=0}^{N-1} x[m] e^{-j\omega m T_c} \quad (8.82)$$

pero el término dentro del sumatorio no es más que la Transformada de Fourier de la secuencia $x[m]$ evaluada en ωT_c . Por tanto,

$$S_s(j\omega) = \frac{1}{T} S_A(e^{j\omega T}) \cdot |X(e^{j\omega T_c})|^2 \cdot |G_c(j\omega)|^2 \quad (8.83)$$

Ejemplo 8.5

En la Figura 8.22 se representa la densidad espectral de potencia de la señal en banda base cuando el pulso de chip es de tipo raíz cuadrada de coseno alzado, con factor de caída $\alpha = 0,5$, $N = 10$ y la secuencia ensanchadora es $\{-1, -1, -1, -1, 1, -1, 1, -1, -1, 1\}$ normalizada por $\sqrt{10}$ para tener energía unidad. La secuencia de símbolos transmitidos es blanca y con energía media E_s .

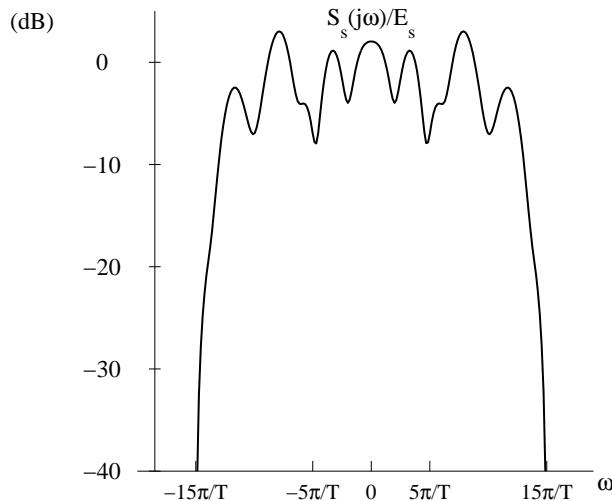


Figura 8.22. Espectro de potencia de la señal en banda base del Ejemplo 8.5.

Es interesante señalar que, dado que el término $S_A(e^{j\omega T}) \cdot |X(e^{j\omega T_c})|^2$ es periódico en ω , es la respuesta en frecuencia del pulso de chip $G_c(j\omega)$ la que suele determinar el ancho de banda empleado. Así, si $G_c(j\omega)$ es un pulso en raíz cuadrada de coseno alzado con factor de caída α , el ancho de banda ocupado por la señal paso banda será $2\pi N(1 + \alpha)/T$ rad/seg, esto es, N veces mayor que el que resultaría de usar una modulación PAM paso banda con el mismo valor de α .

8.2.3. Receptores para modulaciones de espectro ensanchado por secuencia directa

La estructura del receptor para espectro ensanchado de secuencia directa sigue exactamente las directrices del Apartado 5.4.2, por lo que su diagrama de bloques es idéntico a la Figura 5.34. Desgraciadamente, dicha estructura es poco apropiada para su implementación práctica incluso en el caso en que el filtro receptor $f(t)$ sea tal que $f(t) = g^*(-t)$ ya que depende directamente de la secuencia $x[m]$. En muchas aplicaciones, como en acceso

múltiple por división en código, la asignación de secuencias (o firmas, en este caso) $x[m]$ a cada usuario no es fija, sino que se realiza dinámicamente. Esto obligaría a construir un filtro analógico $g(t)$ para cada nueva firma, lo que, obviamente, está lejos de constituir una solución práctica.

Por otra parte, podemos pensar en emplear una solución similar a la que presentamos en modulaciones OFDM: se trata de usar un filtro receptor a periodo de chip y realizar el resto de las operaciones en tiempo discreto, donde ya no habrá problemas por el hecho de que el código sea diferente.

Por tanto, suponiendo $f(t) = g^*(-t)$, si $v(t)$ es la señal recibida en banda base, la secuencia de observaciones a la salida del muestreador a periodo de símbolo $q[n]$ es

$$\begin{aligned} q[n] &= (v(t) * g^*(-t))|_{t=nT} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x^*[m] (v(t) * g_c^*(-t - mT_c))|_{t=nT} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x^*[m] (v(t) * g_c^*(-t))|_{t=nT+mT_c} \end{aligned} \quad (8.84)$$

Sea $v[m]$ la secuencia obtenida al muestrear la señal $v(t) * g_c^*(-t)$ con periodo de chip. Entonces (8.84) se puede escribir de la siguiente forma

$$q[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x^*[m] v[nN + m] \quad (8.85)$$

$$= (v[m] \tilde{x}^*[m]) * w_N[-m - nN] \quad (8.86)$$

lo que permite representar el diagrama de bloques del receptor en banda base de acuerdo con el esquema de la Figura 8.23. Téngase en cuenta que para el caso paso banda este diagrama debería ser ampliado para incorporar una demodulación compleja y un factor $\sqrt{2}$ en el filtro receptor. Además, hemos supuesto que el filtro $g_c(t)$ es real, por lo que en el receptor no es necesario el conjugado.

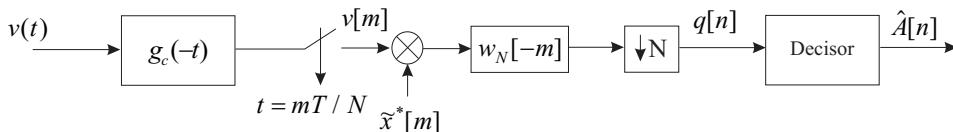


Figura 8.23. Arquitectura de un receptor de espectro ensanchado en banda base.

La operación realizada en (8.85), consistente en multiplicar por $\tilde{x}^*[m]$ y sumar N muestras consecutivas, recibe el nombre de *desensanchado* porque a su salida la tasa de operación pasa de $N/T \text{ seg}^{-1}$ a $1/T \text{ seg}^{-1}$, lo que equivale a una reducción del ancho espectral por un factor de N .

8.2.4. Características del ruido en el receptor

Consideraremos aquí el caso paso banda, aunque los resultados son válidos para banda base. Si el canal introduce ruido aditivo y gausiano $n(t)$ con densidad espectral de potencia $S_n(j\omega)$, podemos de nuevo aplicar la misma metodología que en el Apartado 5.4.3 para obtener las características del ruido discreto $z[n]$ presente en cada observación $q[n]$. Si el filtro receptor es de la forma $\sqrt{2}f(t)$, entonces (5.83) sigue siendo válida.

En el caso particular en que $g(t)$ es un pulso cuya función de ambigüedad temporal cumple el criterio de Nyquist a periodo T , el filtro receptor está adaptado al pulso transmisor ($f(t) = g^*(-t)$) y el ruido $n(t)$ es blanco, con densidad espectral de potencia $N_0/2$ W/Hz, (8.39), el ruido discreto $z[n]$ es blanco y circularmente simétrico, con varianza

$$\sigma_z^2 = N_0 \quad (8.87)$$

Obsérvese que una condición suficiente para que $r_g(t) = g(t)*g^*(-t)$ cumpla el criterio de Nyquist a periodo T es que $g_c(t) * g_c^*(-t)$ cumpla dicho criterio a periodo T/N .

8.2.5. Canal discreto equivalente

La obtención del canal discreto equivalente para el caso de modulación de espectro ensanchado por secuencia directa es inmediata a partir de los resultados del Apartado 5.4.4. Así, si $p[n]$ denota el canal discreto equivalente en banda base,

$$p[n] = (g(t) * h_{eq}(t) * f(t))|_{t=nT} \quad (8.88)$$

por lo que la representación del mismo coincide exactamente con la Figura 5.7. Sin embargo, en el caso en que el filtro receptor $f(t)$ se selecciona de modo que $f(t) = g^*(-t)$, podemos ir algo más lejos en nuestro análisis. Así,

$$\begin{aligned} p[n] &= \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} x[l] x^*[m] (g_c(t - lT_c) * h_{eq}(t) * g_c^*(-t - mT_c))|_{t=nT} \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} x[l] x^*[m] d[nN + m - l] \end{aligned} \quad (8.89)$$

siendo $d[m] = (g_c(t) * h_{eq}(t) * g_c^*(-t))|_{t=mT_c}$ el canal discreto equivalente en banda base a periodo de chip, equivalente a muestrear a periodo de chip la respuesta combinada del filtro transmisor, filtro receptor y canal equivalente en banda base.

Para ilustrar la obtención del canal discreto equivalente, consideremos el ejemplo siguiente:

Ejemplo 8.6

Supongamos que $g_c(t)$ es tal que su función de ambigüedad $g_c(t) * g_c^*(-t)$ cumple el criterio de Nyquist a periodo de chip.

a) Si el canal equivalente en banda base es $h_{eq}(t) = \delta(t)$, entonces $d[m] = \delta[m]$ y, por tanto,

$$p[n] = \sum_{m=0}^{N-1} |x[m]|^2 \delta[n] \quad (8.90)$$

b) En el caso del canal del Ejemplo 8.3, tenemos $h_{eq}(t) = h(t)e^{-j\omega_c t} = \delta(t) - 0,9e^{-j\omega_c \Delta} \delta(t - \Delta)$. Supongamos que $\Delta = T/10$ y que $N = 100$. Entonces, $d[m] = \delta[m] - 0,9e^{-j\omega_c T/10} \delta[m - 10]$, por lo que

$$\begin{aligned} p[n] &= \sum_{m=0}^{N-1} |x[m]|^2 \delta[n] - 0,9e^{-j\frac{\omega_c T}{10}} \sum_{m=0}^{N-1} x[m - 10] x^*[m] \delta[n] \\ &\quad - 0,9e^{-j\frac{\omega_c T}{10}} \sum_{m=0}^{N-1} x[m + 90] x^*[m] \delta[n - 1] \end{aligned} \quad (8.91)$$

De este ejemplo podemos concluir que para que no hubiese ISI (siempre que Δ fuese menor que T) una condición suficiente sería que

$$r_x[k] \doteq \sum_{m=0}^{N-1} x^*[m] x[m + k] = \delta[k] \quad (8.92)$$

o, puesto de otro modo, que la función de ambigüedad de la secuencia ensanchadora $x[m]$ fuese una delta en el origen. La función $r_x[k]$ también recibe también el nombre de *autocorrelación determinista aperiódica*¹⁰ (véase (2.50)). Es fácil ver que precisamente el cumplimiento de esta condición garantizaría que $|X(e^{j\omega T_c})|^2$ en (8.83) fuese constante. No obstante, no olvidemos que las únicas secuencias $x[m]$ que satisfacen (8.92) son de la forma $e^{j\theta} \delta[m - k]$, para algún θ real y algún $k \in \{0, \dots, N - 1\}$ y que éstas no son adecuadas para nuestros propósitos, por lo que una solución pragmática consiste en hacer que $x[m]$ sea seudorruido.

En el Ejemplo 8.6(b) hemos visto cómo un diseño adecuado de la secuencia ensanchadora puede reducir considerablemente la ISI. Antes de proseguir, repasemos los pasos que hemos dado para llegar hasta aquí:

1. Para evitar que la transmisión a periodo T sobre un canal de la forma $h_{eq}(t) = \delta(t) - h_1 \delta(t - \Delta)$, con h_1 complejo y T/Δ mucho mayor que 1, se pudiese ver seriamente afectada por la atenuación del canal, redujimos el periodo efectivo de transmisión a $T_c = T/N$ y, consecuentemente, aumentamos el ancho de banda ocupado en un factor N .
2. Al disminuir el periodo efectivo de transmisión sobre el canal a T_c el cociente T_c/Δ es menor que 1 y, por tanto, aparece “interferencia entre chips” que, dependiendo de la secuencia ensanchadora, puede dar lugar a ISI.

¹⁰El calificativo aperiódica servirá más adelante para distinguirla de la autocorrelación determinista periódica.

3. Para mitigar los efectos de la ISI, las secuencias de chip se diseñan de modo que su función de ambigüedad temporal se parezca a una delta en el origen.

¿Qué hemos ganado con esta técnica? En primer lugar, analicemos su coste: sabemos que el ancho de banda es un bien limitado en muchos casos –sin lugar a dudas, esto sucede en los canales de radiofrecuencia– y, además, aumentar la velocidad de transmisión supone una complicación tecnológica adicional en el diseño de transmisor y receptor. En cuanto a los beneficios, pensemos que como T/Δ es mucho mayor que 1, en un sistema PAM en banda base convencional, aunque habrá ISI presente en la secuencia recibida, ésta se centra prácticamente en el símbolo actual, por lo que, si la frecuencia de la portadora es tal que $\omega_c = 2\pi k/T$ para algún número entero k (véase Figura 8.18), la señal $q[n]$ a la salida del muestreador sólo tendrá influencia del símbolo actual. Para el canal del ejemplo 8.3 tendremos

$$q[n] \approx A[n] - 0.9A[n] + z[n] \quad (8.93)$$

siendo la varianza del ruido $\sigma_z^2 = N_0$. Por otra parte, en el sistema de espectro ensanchado, suponiendo que se satisface aproximadamente (8.92), tenemos que

$$q[n] \approx A[n] + z[n] \quad (8.94)$$

donde, de nuevo, $\sigma_z^2 = N_0$. Por tanto, como vemos, la relación señal a ruido ha aumentado en unos 20 dB gracias a la utilización de espectro ensanchado. En cualquier caso, como veremos en el Apartado 8.2.8, todavía podemos hacerlo algo mejor, a base de complicar más el receptor.

Asimismo, en el Apartado 11.8 se efectúan consideraciones sobre la sincronización aplicada a sistemas de espectro ensanchado por secuencia directa.

8.2.6. Inmunidad a las interferencias de banda estrecha

En este apartado verificaremos que las modulaciones de espectro ensanchado son muy apropiadas para el caso en que existen interferencias de banda estrecha presentes en el canal, ya sean malintencionadas (en inglés se emplea el término “jammer”) como no intencionadas (por ejemplo, debidas a una emisión espúrea de un transmisor autorizado). Aunque en la literatura existen casi tantas formas de abordar el problema como autores, las conclusiones son esencialmente idénticas, por lo que aquí adoptaremos un enfoque relativamente original con idéntico resultado.

Considérese un sistema de espectro ensanchado por secuencia directa que transmite con una frecuencia de portadora ω_c rad/seg. Los pulsos empleados tanto en transmisión como en recepción son de tipo raíz cuadrada de coseno alzado con factor de caída α (véanse figuras 8.21 y 8.23). Supóngase que el sistema está interferido por una portadora $J(t)$ de frecuencia ω_J próxima a ω_c y amplitud A_J :

$$J(t) = A_J \cos(\omega_J t + \phi) \quad (8.95)$$

donde ϕ es un desfase que el interferente malicioso puede elegir para producir el mayor daño –medido en la *BER*– posible en el sistema¹¹. Naturalmente, para interferencias no intencionadas la *BER* alcanzada en el caso anterior supondrá una cota superior.

Para calcular la *BER* necesitamos determinar la contribución de la señal interferente a la entrada del decisor de la Figura 8.23. Denominando $q_J[n]$ a dicha contribución y aplicando (8.85), tendremos

$$q_J[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x^*[m] J[nN + m] \quad (8.96)$$

donde

$$J[m] = (J(t)e^{-j\omega_c t} * \sqrt{2}g_c(-t))|_{t=mT_c} \quad (8.97)$$

Los factores $\sqrt{2}$ y $e^{-j\omega_c t}$ se deben al proceso de conversión a banda base, que no se explicita en la Figura 8.23. Suponiendo que ω_J y ω_c están lo suficientemente próximas como para que $\omega_J - \omega_c$ pertenezca a la banda de paso del filtro receptor –de lo contrario la interferencia se eliminaría completamente–, podemos escribir

$$J[m] = \frac{\sqrt{2}}{2} A_J G_c^*(j\omega_J - j\omega_c) \exp\{j(\omega_J m T_c - \omega_c m T_c + \phi)\} \quad (8.98)$$

Sustituyendo (8.98) en (8.96) obtendríamos directamente la contribución del interferente a la entrada del decisor. Si desde el punto de vista del interferente consideramos la secuencia $x[m]$ como un proceso blanco que toma valores en $\{\pm 1/\sqrt{N}\}$ con igual probabilidad (véase Apartado 8.2.9), entonces podremos caracterizar estadísticamente $q_J[n]$ calculando su media y su varianza. Es inmediato ver que

$$E\{q_J[n]\} = 0 \quad (8.99)$$

$$\text{Var}\{q_J[n]\} = \frac{A_J^2}{2} |G_c(j\omega_J - j\omega_c)|^2 \quad (8.100)$$

Recuérdese que $|G_c(j\omega)|^2 = T_c = T/N$ para $|\omega| < (1-\alpha)\pi/T_c$ y es monótona decreciente para valores de ω mayores, ya que se trata de un pulso en coseno alzado. Por tanto, mientras la frecuencia de la señal interferente no difiera de la de la portadora en más de $(1-\alpha)\pi/T_c$ rad/seg, la probabilidad de error alcanzable será independiente de la primera¹². Además, como vemos, la fase ϕ es irrelevante.

Para valores de N grandes la variable $q_J[n]$ seguirá por el teorema central del límite (Apartado 3.2.8) una distribución gausiana compleja circularmente simétrica. En este caso, podemos calcular la *BER* para diferentes constelaciones. A modo de ejemplo, consideremos una constelación binaria antipodal (BPSK) con energía media de símbolo E_s . En este

¹¹Suponemos que el receptor es capaz de alcanzar una sincronización perfecta con el transmisor. En realidad, en muchas ocasiones, el peor daño se infinge “atacando” a la sincronización del sistema.

¹²En el Problema P8.14 se considera una frecuencia arbitraria en la señal interferente.

caso,

$$BER = Q \left(\frac{\sqrt{2E_s}}{\sqrt{N_0 + J_0}} \right) \quad (8.101)$$

con $N_0/2$ W/Hz la densidad espectral de potencia del ruido del canal y

$$J_0 = \text{Var}\{q_J[n]\} = \frac{TA_J^2}{2N} \quad (8.102)$$

Si el ruido del canal es despreciable, entonces la relación señal a ruido a la entrada del detector

$$SNR = \frac{4E_s N}{TA_J^2} \quad (8.103)$$

aumenta con N , o, dicho de otro modo, el daño causado por el interferente es menor cuanto mayor es el ancho de banda empleado. Por esta razón, $10 \log_{10} N$ recibe habitualmente la denominación de *ganancia de procesado*. Como comentario final, no debe perderse de vista que esta ganancia de procesado *no existe* si la interferencia tiene un ancho de banda mayor que el empleado en la transmisión; esto sucedería, por ejemplo, en el caso de un interferente que emitiese ruido blanco.

8.2.7. Espectro ensanchado por salto en frecuencia

Volvamos ahora al Ejemplo 8.3 para discutir un esquema de espectro ensanchado que también resulta adecuado en canales selectivos en frecuencia. En dicho ejemplo razonamos que si el ancho de banda era pequeño, entonces un sistema clásico utilizando el ancho de banda mínimo podía tener la mala suerte de transmitir allí donde aparecía un agujero espectral, con la consiguiente pérdida en la potencia de la señal recibida. En cambio, también podía tenerse la buena suerte de transmitir en la banda en la que la respuesta del canal tenía la ganancia máxima. Dado que, como ya comentamos, la posición de los picos y valles de la función de transferencia del canal es variable –y relativamente difícil de predecir–, podría pensarse en no dejar al sistema en manos de la fortuna y “repartir” casos favorables y desfavorables empleando una frecuencia de portadora que cambie cada cierto tiempo, que denominaremos *periodo de salto*. Ya que ahora la frecuencia de portadora se va desplazando a medida que transcurre el tiempo, el ancho de banda necesario es aproximadamente igual a la máxima excursión permitida en la frecuencia de portadora. Por las mismas razones que en el Ejemplo 8.3 conviene que dicho ancho de banda sea grande en comparación con el que dictaría el criterio de Nyquist. El resultado es una modulación de espectro ensanchado que recibe el nombre de *salto en frecuencia* (“Frequency Hopping”, FH).

Aunque la idea del salto en frecuencia se puede combinar con cualquier modulación básica (por ejemplo, QAM o PSK), lo más natural es hacerlo con una modulación FSK de fase continua (CPFSK) ya sea binaria o, en general, M-aria (Apartado 7.2). En este caso, la frecuencia de la portadora se hace variar en el tiempo de acuerdo con una secuencia determinista $x[m]$.

Es habitual clasificar las modulaciones de espectro ensanchado por salto en frecuencia como *de salto lento* y *salto rápido*, atendiendo a la relación entre el periodo de salto, que denotaremos por T_2 , y el de símbolo T . Para el salto lento, $T_2/T \geq 1$, y para el rápido, $T_2/T < 1$. Además, por razones prácticas, la relación entre el periodo más grande y el más pequeño suele ser en ambos casos un número entero.

Formalmente, recordando la Expresión (7.24), la señal transmitida en CPFSK puede escribirse como

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \sum_n \operatorname{sen} \left(\omega_c t + I[n] \frac{\pi t}{T} \right) w_T(t - nT) \quad (8.104)$$

donde los $I[n]$ eran los “símbolos” de información tales que $I[n] \in \{\pm 1, \dots, \pm(M-1)\}$ para una CPFSK M-aria. Veamos cómo modificar esta expresión para las modulaciones de espectro ensanchado por salto en frecuencia.

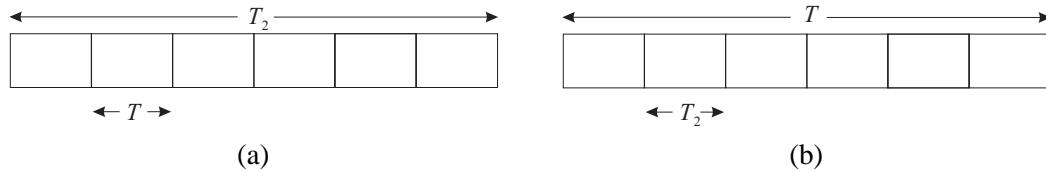


Figura 8.24. Ilustración de las relaciones entre el periodo de símbolo T y el periodo de salto en frecuencia T_2 . (a) Salto lento (SFH); (b) salto rápido (FFH).

De acuerdo con lo indicado en el párrafo anterior, en una modulación por salto lento en frecuencia (“*Slow FH*”, SFH), la señal transmitida puede escribirse como:

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \sum_m \sum_{n=0}^{T_2/T-1} \operatorname{sen} \left(\omega_c t + x[m] \frac{\pi t}{T} + I[n+mN] \frac{\pi t}{T} \right) w_T(t - nT - mT_2) \quad (8.105)$$

con $N = T_2/T$ un entero mayor que 1, de forma que se transmiten varios símbolos de información por cada cambio en la frecuencia central, tal como se ilustra en la Figura 8.24(a). Podemos interpretar la secuencia $\{x[m]\}$ como la que realiza la selección “gruesa” de la frecuencia, mientras la secuencia de símbolos $\{I[m]\}$ realiza una selección “fina”. De hecho, para que los conjuntos de frecuencias gruesas empleados no se solapen y se garantice la continuidad de fase, $x[m]$ ha de tener la forma $2kM$, con k entero. Naturalmente, para que el ancho de banda ocupado sea mínimo, los valores de k empleados deben pertenecer a un conjunto de N enteros consecutivos; en tal caso, la expansión de ancho de banda en comparación con el de una CPFSK M-aria es de aproximadamente N .

En una modulación por salto rápido en frecuencia (“*Fast FH*”, FFH) la frecuencia de la portadora cambia varias veces por cada símbolo procedente de la fuente, esto es,

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \sum_n \sum_{m=0}^{T/T_2-1} \operatorname{sen} \left(\omega_c t + x[m+nN] \frac{\pi t}{T_2} + I[n] \frac{\pi t}{T_2} \right) w_{T_2}(t - nT - mT_2) \quad (8.106)$$

con $N = T/T_2$ un entero mayor que 1 (véase Figura 8.24(b)) y la secuencia $\{x[m]\}$ con la misma forma que en el párrafo anterior. Obsérvese que ahora las condiciones para garantizar continuidad de fase se aplican cada T_2 segundos.

En la Figura 8.25 se representa una posible arquitectura de transmisor para FH, teniendo en cuenta la idea ya comentada de que, en realidad, basta con cambiar la frecuencia de la portadora cada T_2 segundos. Con los modernos sistemas de síntesis digital directa (“*Direct Digital Synthesis*”, DDS) es posible simplificar el esquema anterior sin más que generar en cada momento los valores (numéricos) de las frecuencias necesarias.

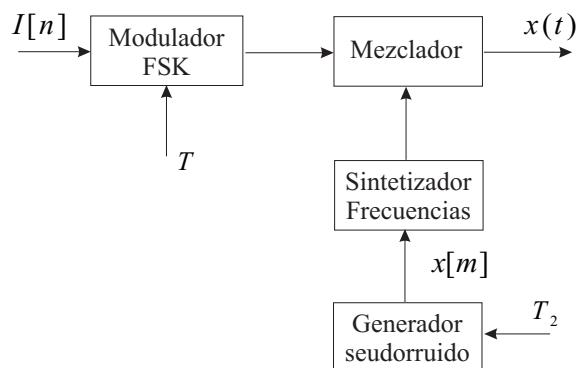


Figura 8.25. Diagrama de bloques de un modulador de espectro ensanchado por salto en frecuencia.

Para el cálculo del espectro de potencia de la señal transmitida, es evidente, de acuerdo con los resultados presentados en el Apartado 7.2 para CPFSK que sería necesario extender el procedimiento allí presentado teniendo en cuenta que el patrón de saltos en frecuencia –dado por $x[m]$ – es determinista, por lo que no profundizaremos más en esta dirección. En cualquier caso, es interesante señalar que, en consonancia con la justificación dada al comienzo de este apartado, para que el “reparto” de bandas en FH sea efectivo, la secuencia $x[m]$ debería ser tal que cada subbanda se visite el mismo número de veces. Si, además, el canal fuese variante en el tiempo, convendría que la portadora cambiase de una forma aleatoria, para que no se visitasen consecutivamente subbandas con atenuaciones que pueden estar fuertemente correlacionadas. Como consecuencia, interesa que la secuencia $x[m]$ tenga las mismas propiedades que exigíamos a su homónima empleada en espectro ensanchado por secuencia directa y que se resumen en que tenga características de seudoruido.

Aunque se pueden construir receptores coherentes para FH siguiendo los principios del Apartado 4.5, es obvio que ahora pueden esgrimirse las mismas razones que conducen al empleo de receptores incoherentes en modulaciones FSK. Por tanto, es posible deducir un receptor incoherente para FH a partir de la discusión del Apartado 7.2.3. El diagrama de bloques correspondiente al caso de saltos lentos en frecuencia (SFH) se representa en la Figura 8.26. En el caso de saltos rápidos (FFH, Figura 8.27) debe tenerse en cuenta que la transmisión de un símbolo de la fuente implica N sucesivas envolventes de frecuencias diferentes, por lo que el receptor dispondrá de N estadísticos que han de producir una única

decisión, de modo que es necesario combinarlos. Aunque es posible determinar teóricamente la ley de combinación óptima (siguiendo el criterio ML) ésta resulta ser poco atractiva de cara a una implementación física, por lo que la simplificación más común (especialmente adecuada para SNR pequeña) conduce a una combinación cuadrática, esto es, a utilizar como variables de decisión la suma de las N salidas sucesivas de los detectores de ley cuadrática. Por tanto, obsérvese que esta arquitectura de receptor incoherente no es más que una generalización del detector de ley cuadrática para tener en cuenta las N subenvolventes por símbolo transmitido.

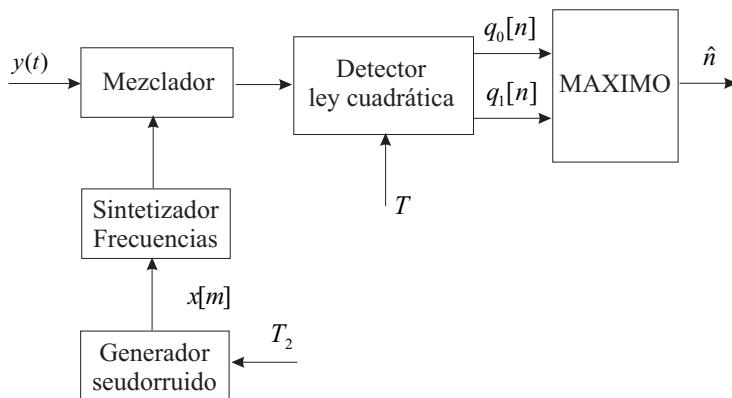


Figura 8.26. Arquitectura de un receptor de espectro ensanchado por salto lento en frecuencia.

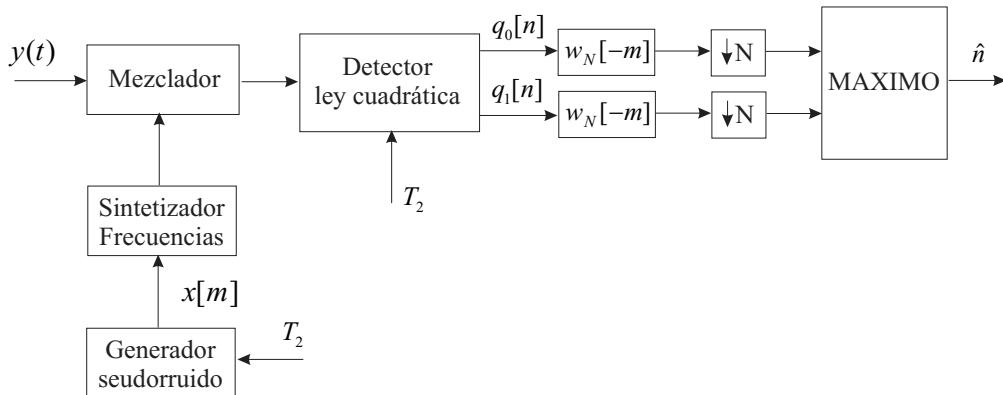


Figura 8.27. Arquitectura de un receptor de espectro ensanchado por salto rápido en frecuencia.

Para finalizar este apartado, es de interés señalar que también es posible trasladar las ideas de FH al dominio del tiempo, donde se convierten en espectro ensanchado por *salto en el tiempo* (“*Time Hopping*”, TH). En este caso, los pulsos empleados son similares a los que se utilizan en la Figura 8.20, salvo porque ahora la posición del pulso dentro del periodo de

símbolo varía de acuerdo con una secuencia determinista. Valga decir, como consecuencia, que las razones que dificultaban el empleo de este tipo de pulsos son aplicables también en este caso. Por otra parte, los esquemas DS, FH y TH se pueden combinar entre sí para dar lugar a híbridos que heredan algunas de las ventajas de sus progenitores, siempre a costa de un aumento de complejidad y, generalmente, requisitos más estrictos en los relojes de chip.

En el Apartado 11.8 se efectúan consideraciones sobre la sincronización aplicada a sistemas de espectro ensanchado por salto en frecuencia.

8.2.8. Receptores RAKE

En comunicaciones terrestres (p.ej., radioenlaces, comunicaciones celulares, etc.) es frecuente que la señal transmitida llegue al receptor por diferentes caminos, en un fenómeno que se conoce como *propagación multirayecto*¹³. Dichos caminos son debidos a las reflexiones, refracciones y/o difracciones que experimenta la señal transmitida en su interacción con el medio. El efecto neto es que la señal que llega al receptor por cada uno de los caminos sufre una atenuación, un desfase en la portadora y un retardo distintos.

Si en el receptor fuese posible resolver (separar) los diferentes caminos de propagación, entonces se podría aprovechar su conocimiento para mejorar el funcionamiento del sistema. Naturalmente, cuanto mayor sea el ancho de banda de la señal transmitida (menor duración de la función de ambigüedad de los pulsos) más fácil será distinguir las diferentes componentes del multirayecto. En este apartado estudiaremos someramente un tipo de receptor que, tras identificar la respuesta al impulso del canal, construye de acuerdo con el criterio del filtro adaptado una estructura que, por recordar vagamente a los rastillos de jardín, fue bautizada por sus inventores (Price y Green, 1958) como receptor RAKE (rastrillo).

Para deducir su arquitectura, consideremos la respuesta equivalente en banda base que corresponde a un canal con multirayecto:

$$h_{eq}(t) = \sum_{l=1}^L h_l \delta(t - \tau_l) \quad (8.107)$$

donde L es el número de caminos, h_l es un coeficiente complejo que indica la ganancia y desfase relativos al camino l -ésimo y τ_l es el retardo experimentado por la señal transmitida al recorrer el l -ésimo trayecto. En la Expresión (8.107) hemos supuesto que el canal es invariante con el tiempo; no obstante, el desarrollo que presentaremos en este apartado se puede extender de forma casi inmediata a canales lentamente variantes en el tiempo.

Como ya se discutió en los Apartados 5.3 y 5.4, si conociésemos $h_{eq}(t)$, entonces podríamos implementar un receptor basado en el filtro adaptado, con una estructura como la de la Figura 5.34. En este caso, si $f(t)$ denota el filtro receptor entonces debería cumplirse

¹³Véase Ejemplo 8.3.

que

$$\begin{aligned} f^*(-t) &= g(t) * h_{eq}(t) \\ &= \sum_{l=1}^L h_l g(t - \tau_l) \end{aligned} \quad (8.108)$$

siendo $g(t)$ el pulso transmisor. De aquí, se deduce que

$$f(t) = g^*(-t) * \sum_{l=1}^L h_l^* \delta(t + \tau_l) \quad (8.109)$$

De este modo, habiendo determinado previamente –aunque todavía no hemos dicho cómo– los coeficientes h_l , $l = 1, \dots, L$ y los retardos τ_l , podríamos emplear la estructura de la Figura 8.28 en la que, como se ve, existen L ramas paralelas cuyas salidas se combinan para producir la variable de decisión. Estas ramas (o, mejor, púas) son las que configuran el “rastrillo” o RAKE¹⁴. Intuitivamente, cuanto menor es h_l , más atenuada resulta la señal transmitida por el camino correspondiente, de modo que, si se ve afectada por el mismo nivel de ruido (tal y como ocurre en nuestro modelo), su “fiabilidad” será menor; de ahí que se multiplique por un coeficiente más pequeño (justamente h_l^*). Por otra parte, el adelanto de τ_l segundos sirve para compensar el introducido por el canal y así “alinear” las salidas procedentes de cada púa. Evidentemente, el esquema propuesto no es causal, pero es inmediato transformarlo en causal sin más que retardar $\max_{l=1, \dots, L} \{\tau_l\}$ segundos la toma de decisiones.

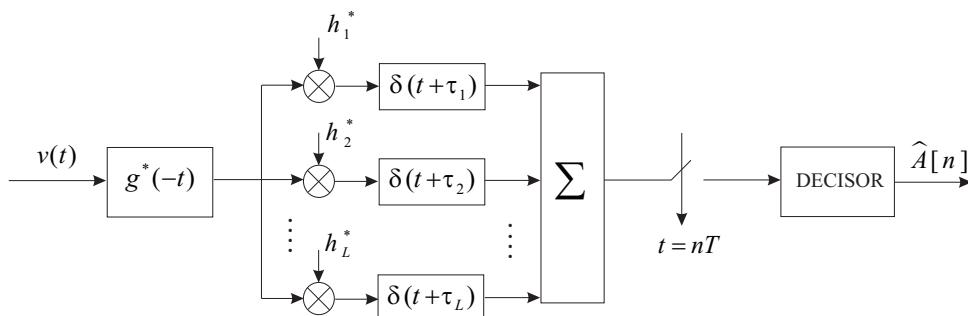


Figura 8.28. Diagrama de bloques de un receptor RAKE en banda base con pías en tiempo continuo.

Como bien podrá razonar el lector, lo dicho hasta ahora sobre el receptor RAKE no es exclusivo de modulaciones de espectro ensanchado, sino que se puede adaptar a cualquier modulación lineal o no lineal. Sin embargo, para el caso de espectro ensanchado por secuencia directa, la implementación práctica cobra más sentido. En primer lugar, cuanto menor

¹⁴El receptor “arrastra” las contribuciones temporales de la señal recibida cuyos retardos caen en el rango de acción de cada rama; de ahí el nombre.

es T_c (mayor ancho de banda), más resolución temporal podemos alcanzar, de modo que podremos aproximar el adelanto τ_l con un adelanto discreto de $m_l \approx \tau_l/T_c$ unidades cometiendo un menor error. Piénsese que la realización exacta de un retardo no entero entraña una mayor dificultad, tal como discutiremos más adelante.

Siguiendo la deducción del Apartado 8.2.3, es inmediato obtener la estructura del receptor RAKE en tiempo discreto de la Figura 8.29. En realidad, en lugar de retardos específicos para cada púa, es más eficiente una implementación a partir de una línea de retardos, pero el diagrama en 8.29 ilustra mejor las operaciones que se realizan en cada rama¹⁵. Como no podía ser de otra manera, también es necesario conocer los parámetros del canal para la realización del receptor RAKE en tiempo discreto. Antes de discutir cómo podemos averiguar dichos parámetros, es interesante cuantificar las ventajas de esta estructura para el canal del Ejemplo 8.3.

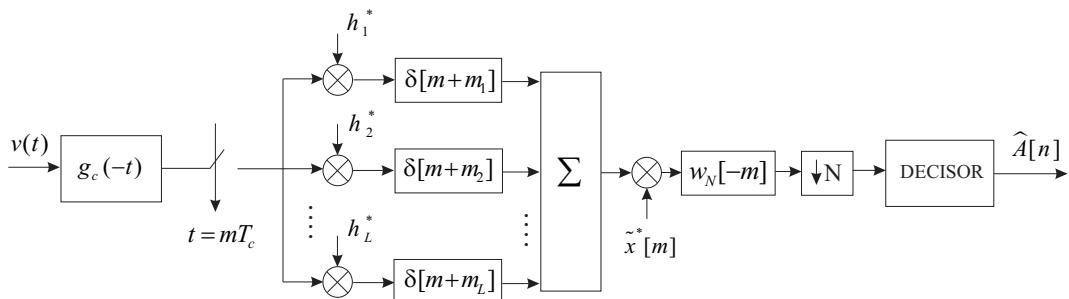


Figura 8.29. Diagrama de bloques de un receptor RAKE en banda base con púas en tiempo discreto para modulación de espectro ensanchado por secuencia directa.

Ejemplo 8.7

Recordando que $h_{eq}(t) = \delta(t) - 0,9e^{-j\omega_c\Delta}\delta(t - \Delta)$, con $\Delta = T/10$ y $N = 100$ y utilizando los resultados de este apartado, representamos en la Figura 8.30 el esquema del receptor RAKE. Si calculamos el canal discreto equivalente a periodo de chip, éste será ahora de la forma

$$\begin{aligned} d[m] &= (g_c(t) * h_{eq}(t) * h_{eq}^*(-t) * g_c(-t))|_{t=mT_c} \\ &= -0,9e^{j\omega_c T/10}\delta[n+10] + 1,81\delta[n] - 0,9e^{-j\omega_c T/10}\delta[n-10] \end{aligned} \quad (8.110)$$

El cálculo del canal discreto equivalente (a periodo de símbolo, Ecuación (8.89)) produciría 5 términos (ya no 3, como en el Ejemplo 8.6) cuya determinación se deja al lector como ejercicio. De nuevo, si se cumple (aproximadamente) la condición de que la función de ambigüedad temporal de la secuencia ensanchadora, $r_x[k]$, sea una delta en el origen, entonces el canal discreto equivalente $p[n]$ será $p[n] = 1,81\delta[n]$.

Por otra parte, el ruido a la entrada del decisor, aunque ya no será blanco, conservará su gausiandad, por lo que para evaluar las prestaciones del receptor RAKE, bastará con conocer su varianza (puesto que es de media cero). No es difícil ver que a la salida del muestreador a T_c el filtro FIR

¹⁵Recuérdese que el filtro adaptado del receptor se puede implementar en forma discreta siguiendo las directrices del Apartado 5.5.

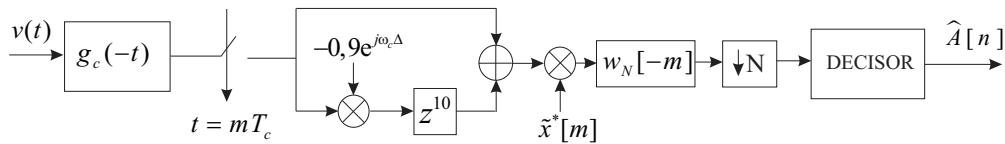


Figura 8.30. Diagrama de bloques del receptor RAKE del Ejemplo 8.7

de dos ramas colorea el ruido y aumenta su varianza a $(1 + 0,9^2)N_0 = 1,81N_0$. Por último, la operación de multiplicación por la secuencia $\tilde{x}[m]$ y suma de N muestras, deja inalterada dicha varianza (puesto que $\sum_{m=0}^{N-1} |\tilde{x}[m]|^2 = 1$).

Finalmente, la *BER* (para una constelación binaria antipodal) con el receptor RAKE sería

$$BER = Q\left(\sqrt{\frac{2 \cdot 1,81E_s}{N_0}}\right) \quad (8.111)$$

de modo que hemos ganado aproximadamente $10 \log_{10} 1,81 = 2,5$ dB en comparación con el receptor de la Figura 8.23.

El receptor RAKE no está exento de problemas: supongamos que, en lugar de un filtro $f(t)$ perfectamente adaptado, esto es, $f^*(-t) = g(t) * h_{eq}(t)$ empleamos en su construcción una estima de $h_{eq}(t)$ que denotaremos por $\hat{h}_{eq}(t)$, de modo que utilizamos como filtro receptor un $f(t)$ tal que $f^*(-t) = g(t) * \hat{h}_{eq}(t)$. Entonces, basta generalizar el razonamiento del Ejemplo 8.7 para demostrar que el canal discreto equivalente (siempre que la secuencia $x[m]$ cumpla la Condición (8.92)) es

$$p[n] = \sum_{l=1}^L h_l \hat{h}_l^* \delta[n] \quad (8.112)$$

y que la varianza del ruido a la entrada del decisor es

$$\sigma_z^2 = N_0 \sum_{l=1}^L |\hat{h}_l|^2 \quad (8.113)$$

Por tanto, una estima incorrecta de los parámetros del canal puede tener consecuencias desastrosas en recepción, por cuanto el único coeficiente de $p[n]$, que es un número complejo, puede tener una amplitud muy pequeña y una fase que rote la constelación transmitida. Como ya sabemos, este último problema puede solucionarse si los símbolos $A[n]$ son generados mediante una modulación diferencial de fase (DPSK).

El párrafo anterior pone de manifiesto la importancia de estimar correctamente los parámetros del canal. A continuación, estudiaremos uno de los procedimientos posibles. Para simplificar la discusión vamos a suponer que el canal tiene un único trayecto, cuyos parámetros h_1 y τ_1 , deseamos estimar, y que no hay ruido presente. El diagrama de bloques del estimador se representa en la Figura 8.31 donde puede observarse que el filtro receptor es

$g_c(-t)$; de este modo, todo el procesado se hace en tiempo discreto. Es fácil ver que el canal discreto equivalente a periodo de chip es, para este caso:

$$d[m] = (g_c(t) * h_1 \delta(t - \tau_1) * g_c(-t))|_{t=mT_c} \quad (8.114)$$

de modo que si los pulsos $g_c(t)$ son de raíz cuadrada de coseno alzado, podremos hacer la aproximación

$$d[m] \approx h_1 \delta[m - k_1] \quad (8.115)$$

con $k_1 \approx \tau_1/T_c$. Como antes, esta aproximación es perfecta si τ_1/T_c es un número entero y, en cualquier caso, tanto más correcta cuanto mayor es el factor de caída del pulso $g_c(t)$. En breve, encontraremos conveniente descomponer k_1 como

$$k_1 = m_1 + n_1 N, \quad m_1 \in \{0, \dots, N-1\} \quad (8.116)$$

y n_1 entero. Nótese que en esta descomposición única, n_1 equivale al número entero de periodos de símbolo que caben en τ_1 , y m_1 es el número de periodos de chip que restan al dividir τ_1 por $n_1 T$.

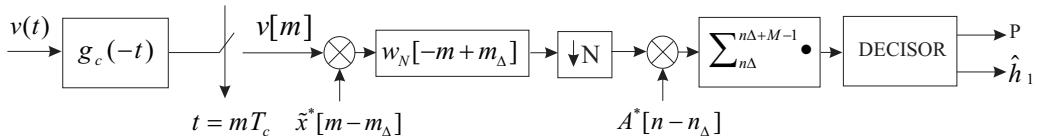


Figura 8.31. Diagrama de bloques del estimador de parámetros de una púa del receptor RAKE.

Vamos a analizar a continuación el funcionamiento del estimador de la Figura 8.31. Por simplicidad, y sin restar validez alguna a nuestras conclusiones, supondremos que el retardo m_Δ en el esquema de la figura es tal que $m_\Delta < m_1$. La secuencia a la salida del diezmador será

$$\sum_{m=m_\Delta}^{N-1+m_\Delta} v[m + nN] \tilde{x}^*[m - m_\Delta] = \sum_{m=0}^{N-1} v[m + m_\Delta + nN] \tilde{x}^*[m] \quad (8.117)$$

que es idéntica a (8.85) salvo porque ahora la secuencia $v[m]$ aparece “adelantada” m_Δ muestras. Por tanto, podemos pensar que tenemos la misma situación estudiada en el Apartado 8.2.5 donde ahora el canal discreto equivalente a periodo de chip es

$$d[m] \approx h_1 \delta[m - k_1] * \delta[m + m_\Delta] = h_1 \delta[m - n_1 N - (m_1 - m_\Delta)] \quad (8.118)$$

Por tanto, empleando (8.89), el canal discreto equivalente a periodo de símbolo será

$$\begin{aligned}
 p[n] &= h_1 \sum_{m=0}^{N-1} x^*[m] x[m + m_\Delta - m_1] \delta[n - n_1] \\
 &+ h_1 \sum_{m=0}^{N-1} x^*[m] x[m + N + m_\Delta - m_1] \delta[n - n_1 - 1]
 \end{aligned} \quad (8.119)$$

Por tanto, si se cumple la Condición (8.92) relativa a la función de ambigüedad temporal de la secuencia $x[m]$, entonces a la salida del diezmador por N de la Figura 8.31 tendríamos la secuencia $h_1 A[n - n_1]$ si y sólo si $m_\Delta = m_1$. Así pues, para averiguar el parámetro m_1 (número de chips que restan al dividir k_1 por N) bastaría con realizar la correlación con versiones desplazadas de la secuencia ensanchadora. Obsérvese que, en ausencia de ruido y satisfaciendo la Condición (8.92) dicha correlación valdrá cero excepto cuando $m_\Delta = m_1$.

Para reducir la varianza de dicha estimación, se puede integrar el resultado durante varios (digamos M) períodos de símbolo. Al mismo tiempo, ello puede servir para averiguar el valor del parámetro n_1 . De nuevo, realizando una correlación de la secuencia a la salida del diezmador por N con $A^*[n - n_\Delta]$ es fácil ver que en ausencia de ruido el resultado será distinto de cero si la secuencia $A[n]$ es blanca y de media cero y se cumple que $n_\Delta = n_1$. El propósito del bloque sumador en la Figura 8.31 es entonces el de efectuar dicha correlación sobre una ventana suficientemente grande de tiempo (M muestras). Es importante señalar que para poder determinar el parámetro n_1 (número entero de símbolos en k_1) necesitamos conocer la secuencia transmitida (durante las M muestras).

Para símbolos de una constelación PSK y en ausencia de ruido, por el teorema central del límite, es fácil ver que cuando $n_\Delta \neq n_1$ y M es grande, cada muestra a la salida del sumador es una variable aleatoria gausiana de media 0 y varianza $|h_1|^2 M E_s^2$, mientras que cuando $n_\Delta = n_1$ a la salida del sumador tendremos el valor $h_1 M E_s$. Teniendo en cuenta esta caracterización estadística, el bloque etiquetado como “DECISOR” en la Figura 8.31 ofrecería una decisión binaria, que hemos llamado P , sobre si se han encontrado o no los valores correctos para los m_Δ y n_Δ tentativos. En caso negativo, sería necesario probar con otros parámetros, y así sucesivamente. En caso de que se decida que se ha podido determinar el parámetro $k_1 = m_1 + N n_1$, el coeficiente h_1 se puede estimar a partir de la variable de decisión, dividiendo el valor medio de ésta por $M E_s$.

Para finalizar este apartado, es interesante realizar una serie de consideraciones:

- Para un canal multirayecto como el descrito mediante (8.107) el método de estimación buscaría los diferentes picos de la correlación para identificar los parámetros asociados a cada retardo. De esta forma, el esquema resultante tendría una estructura tipo RAKE, con tantas púas como –a priori– caminos de propagación presentes en el canal.
- La resolución del método presentado es de T_c segundos. Esto quiere decir que si dos retardos τ_i y τ_l difieren en menos que esta cantidad, en general no será posible resolverlos. En consecuencia, a todos los efectos, ambos se comportarán como si sólo existiese un camino. Lógicamente, cuanto menor sea T_c (mayor ancho de banda), mayor será la resolución alcanzable.
- Algunos canales no encajan *físicamente* dentro del modelo propagación multirayecto que hemos discutido, sino que más bien presentan un continuo de caminos. En todo caso, dado que la señal de espectro ensanchado suele ser de banda limitada (algo que por ejemplo ocurre si los $g_c(t)$ son pulsos en raíz cuadrada de coseno alzado), es posible recurrir al teorema del muestreo para representar *matemáticamente* la respuesta

al impulso de $h_{eq}(t)$ como un tren de deltas espaciadas $1/W$ segundos, donde W Hz sería el ancho de la señal paso banda. A partir de aquí, se pueden aplicar los resultados de este apartado. Téngase en cuenta que, aunque en principio el tren de deltas es infinito (ya que la señal es de banda limitada), truncando la respuesta impulsional a partir de un T_p que suele denominarse *extensión de retardo*, el error cometido puede considerarse suficientemente pequeño.

- Nuestro modelo supone que las componentes del canal son deterministas; cuando cada componente es en realidad la combinación de muchas contribuciones que llegan prácticamente al mismo tiempo con fases aleatorias, es justificable modelar los h_l como variables aleatorias complejas cuyo módulo sigue una distribución Rayleigh y cuya fase es uniforme en $[0, 2\pi]$. En este caso, el tipo de análisis presentado en el Ejemplo 8.7 deja de ser válido y es necesario un método más elaborado.
- Cuanto mayor es el tamaño de la ventana de integración M , mayor será la relación señal a ruido a la salida del correlacionador y menor la probabilidad de cometer un error en la determinación de n_1 . Por contra, mayores valores de M implican: 1) mayor tiempo necesario para identificar el canal, y 2) una secuencia piloto (símbolos $A[n]$ conocidos) más larga, con la consiguiente pérdida de eficiencia.

Conviene no olvidar que, a lo largo del presente apartado, hemos supuesto que la función de ambigüedad temporal de $x[m]$ era una delta en el origen. Dado que, como discutiremos más adelante, esta condición no es alcanzable en la práctica, hemos despreciado los términos de *autointerferencia* debidos a esta falta de idealidad. En particular, los resultados del Ejemplo 8.7 deben considerarse un límite superior para las verdaderas prestaciones.

8.2.9. Diseño de pulsos para espectro ensanchado

En este apartado abordaremos el problema del diseño de las secuencias $x[m]$ para su utilización en modulaciones de espectro ensanchado. A través de los apartados precedentes hemos venido insistiendo en el interés que tiene la satisfacción de la Condición (8.92), que recordemos era

$$r_x[k] \doteq \sum_{m=0}^{N-1} x^*[m]x[m+k] = \delta[k]$$

tanto para mitigar la posible ISI como para la estima de los parámetros del canal en modulaciones de espectro ensanchado. También hemos comentado que las únicas secuencias que cumplen (8.92) son de la forma $x[m] = e^{j\theta}\delta[m - k]$, para algún $k \in \{0, \dots, N - 1\}$ y θ real, pero resultan poco apropiadas por concentrar su energía en un corto intervalo de tiempo.

Es ilustrativo y útil formular la Condición (8.92) en el dominio de la frecuencia. Toman-do Transformadas de Fourier en ambos lados y recordando que $X(e^{j\omega})$ denota la Transformada de $x[m]$, podemos escribir una condición completamente equivalente:

$$\sum_{m=0}^{N-1} X(e^{j\omega})e^{j\omega m}x^*[m] = |X(e^{j\omega})|^2 = 1, \text{ para todo } \omega \quad (8.120)$$

Renunciando al cumplimiento estricto de (8.92) ó (8.120) existen varios caminos posibles; por ejemplo, se puede diseñar $x[m]$ de modo que la función de ambigüedad temporal, $r_x[k]$, tenga la menor energía posible fuera del origen. Sin embargo, el método que goza de mayor popularidad en la literatura es el de forzar el cumplimiento de (8.92) en un conjunto finito de frecuencias, en concreto, aquellas de la forma $\omega = 2\pi k/N$, $k = 0, \dots, N - 1$, que son las que se manejan en la DFT. Así, la Condición (8.120) se relaja a

$$|X(e^{j\frac{2\pi k}{N}})|^2 = 1, \text{ para todo } k = 0, \dots, N - 1 \quad (8.121)$$

Para secuencias de longitud N , es fácil ver el equivalente temporal de (8.121). En efecto, si $\tilde{x}[m]$ es la secuencia periódica de periodo N construida a partir de $x[m]$, entonces tomando la DFT inversa a ambos lados de (8.121), tenemos

$$x[m] \circledast x^*[((-m))_N] = \delta[m], \quad m = 0, \dots, N - 1 \quad (8.122)$$

o, equivalentemente,

$$\tilde{r}_{\tilde{x}}[m] \doteq \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{x}^*[l] \tilde{x}[l+m] = \delta[m], \quad m = 0, \dots, N - 1 \quad (8.123)$$

Obsérvese que mientras la función de ambigüedad temporal de $x[m]$ en (8.92) tiene longitud $2N - 1$ muestras, la que aparece en la Condición (8.123) es periódica (aunque la condición se refiere a un solo periodo) y, por tanto, la denominaremos *función de ambigüedad temporal periódica* o *función de autocorrelación determinista periódica*.

Seguidamente, estudiaremos un método que produce secuencias ensanchadoras que casi cumplen la Condición (8.123), y que destacan por su simplicidad, periodicidad inherente¹⁶ y por servir como bloque constructivo para secuencias algo más elaboradas que se emplean en acceso múltiple (Apartado 8.3.2).

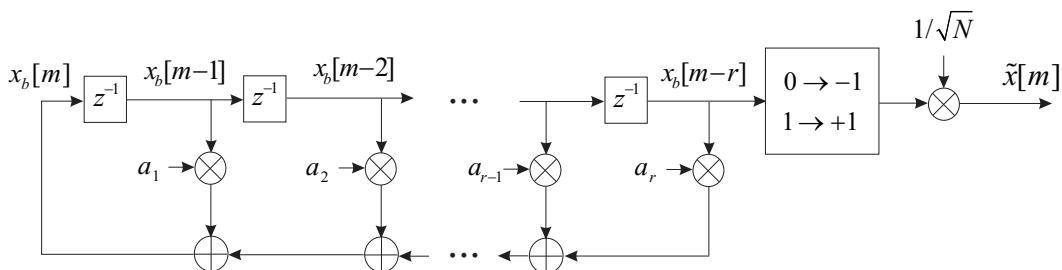


Figura 8.32. Esquema de un generador de secuencias periódicas de longitud maximal.

Consideremos un registro de desplazamiento lineal realimentado (“*Linear Feedback Shift Register*”, LFSR) como el de la Figura 8.32 en el que tanto la secuencia $x_b[m]$ como los coeficientes a_1 a a_r son binarios (de ahí el subíndice b en $x_b[m]$) y las operaciones

¹⁶Esta es una interesante propiedad, ya que las secuencias que se emplean en el modulador (véase Figura 8.21) son periódicas.

de suma y las operaciones de multiplicación y suma son módulo 2¹⁷. Construimos un polinomio $A(z)$ a partir de los multiplicadores del LFSR tal y como se indica a continuación:

$$A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_{r-1} z^{-(r-1)} + a_r z^{-r} \quad (8.124)$$

Claramente, la secuencia $x_b[m]$ de salida del LFSR puede verse como una función del contenido inicial del registro (que, arbitrariamente, tomaremos en $m = 0$) y del polinomio $A(z)$:

$$\begin{aligned} x_b[m] &= a_1 x_b[m-1] + a_2 x_b[m-2] + \cdots + a_r x_b[m-r] \\ &= \sum_{i=1}^r a_i x_b[m-i], \quad m > 0 \end{aligned} \quad (8.125)$$

Definiendo la *función generadora* de la secuencia $x_b[m]$ como su Transformada Z unilateral

$$X_b(z) = \sum_{m=0}^{\infty} x_b[m] z^{-m} \quad (8.126)$$

y combinando esta ecuación con (8.125) podemos escribir

$$\begin{aligned} X_b(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=1}^r a_i x_b[m-i] z^{-m} \\ &= \sum_{i=1}^r a_i z^{-i} \sum_{m=0}^{\infty} x_b[m-i] z^{i-m} \\ &= \sum_{i=1}^r a_i z^{-i} (x_b[-i] z^i + \cdots + x_b[-1] z + X_b(z)) \\ &= \sum_{i=1}^r a_i z^{-i} (x_b[-i] z^i + \cdots x_b[-1] z) + (A(z) - 1) X_b(z) \end{aligned} \quad (8.127)$$

que, a su vez, se puede manipular (recordando que en módulo 2 restar es equivalente a sumar), resultando

$$X_b(z) A(z) = \sum_{i=1}^r a_i z^{-i} (x_b[-i] z^i + \cdots x_b[-1] z) \quad (8.128)$$

por lo que, finalmente,

$$X_b(z) = \frac{\sum_{i=1}^r a_i z^{-i} (x_b[-i] z^i + \cdots x_b[-1] z)}{A(z)} \quad (8.129)$$

¹⁷Formalmente, $x_b[m]$ y a_1 a a_r están definidos sobre el cuerpo de Galois binario, $GF(2)$, cuya estructura algebraica será analizada con mayor detalle en el Apartado 10.2. Aquí nos ocuparemos cuando sea posible este análisis, detallando únicamente los conceptos mínimos imprescindibles que nos permitan definir las secuencias de *longitud maximal* que utilizaremos más adelante.

Por la forma en que aparece en la ecuación anterior, $A(z)$ recibe el nombre de *polinomio característico* y desempeña un papel clave en la generación de secuencias ensanchadoras. Es interesante percatarse de que, dado un $m_0 > 0$, las muestras de la secuencia $x_b[m]$ para $m \geq m_0$ dependen exclusivamente del contenido del registro en el instante m_0 y del polinomio característico. Por tanto, si en otro instante $m_1 > m_0$ el contenido del registro vuelve a ser igual al que se tenía en m_0 , es evidente que la secuencia será tal que: $x_b[m - m_1] = x_b[m - m_0]$, para todo $m > m_1$, y, por tanto, $x_b[m]$ será periódica con periodo $m_1 - m_0$. Ahora bien, en el LFSR sólo puede haber como máximo 2^r combinaciones diferentes, una de las cuales –la de todo ceros– produce una salida idénticamente nula, por lo que el contenido del registro será igual a un valor anterior al cabo de, como máximo, $2^r - 1$ instantes de tiempo. De todo lo dicho se concluye que el periodo máximo en la secuencia $x_b[m]$ es de $2^r - 1$. No obstante, existen polinomios característicos que hacen que el contenido del LFSR se repita al cabo de menos muestras, como discutiremos a continuación. Cuando el periodo de la secuencia $x_b[m]$ es $2^r - 1$ se dice que ésta es una *secuencia de longitud maximal* o, también, una *secuencia m*.

Es posible demostrar que excepto en casos degenerados en que el numerador y el denominador de (8.129) tienen factores comunes, el periodo p de la secuencia $x_b[m]$ es el menor entero positivo para el que $A(z)$ divide a $1 - z^{-p}$, de modo que una condición necesaria para que una secuencia sea de longitud maximal es que el polinomio $A(z)$ sea irreducible (no factorizable). Los polinomios característicos que dan lugar a una secuencia de longitud maximal se denominan *primitivos*.

Dos propiedades de las secuencias de longitud maximal tienen importantes implicaciones sobre la función de ambigüedad temporal periódica de la secuencia binaria antipodal $\tilde{x}[m]$ que se obtiene a partir de la secuencia binaria $x_b[m - r]$ mediante el proceso de correspondencia $0 \rightarrow -1$, $1 \rightarrow +1$ y una posterior normalización de energía dividiendo por \sqrt{N} (véase Figura 8.32). Recuérdese que N es el periodo de la secuencia m .

Primero, considerando que en una secuencia de longitud maximal todos los vectores binarios de r bits (excepto el vector nulo) acaban apareciendo en el LFSR y que el bit de menor peso es el que aparece directamente en $x_b[m - r]$, es fácil ver que habrá $2^r / 2$ vectores con un 1 y $2^r / 2 - 1$ vectores con un 0 en la posición de menor peso. De ello se puede concluir que toda secuencia de longitud maximal tiene 2^{r-1} unos y $2^{r-1} - 1$ ceros.

En segundo lugar, es inmediato ver que cualquier desplazamiento de menos de N unidades de una secuencia m $\tilde{x}[m]$ se corresponde con la secuencia m $\tilde{x}'[m]$ obtenida a partir de otro vector inicial. Sumando (módulo 2) las respectivas funciones generadoras (8.129) se deduce que la suma de dos secuencias m es equivalente a otra secuencia m con un nuevo vector inicial. Como consecuencia de ello y de la propiedad indicada en el párrafo anterior, la suma de dos secuencias $x_b[m]$ y $x'_b[m]$ de longitud maximal –producidas con el mismo polinomio primitivo– tendrá 2^{r-1} unos y $2^{r-1} - 1$ ceros o, lo que es lo mismo, ambos sumandos diferirán en exactamente 2^{r-1} bits y coincidirán en exactamente $2^{r-1} - 1$ bits. Si ahora nos fijamos en las correspondientes secuencias $\tilde{x}[m]$ y $\tilde{x}'[m]$ no nos será difícil ver

que

$$\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}[m] \tilde{x}'[m] = -\frac{1}{N} \quad (8.130)$$

pero $\tilde{x}'[m]$ no es más que una versión desplazada de $\tilde{x}[m]$, esto es, $\tilde{x}'[m] = \tilde{x}[m + k]$, para algún k tal que $0 < k \leq N - 1$. Así pues, la función de ambigüedad temporal periódica verifica que

$$\tilde{r}_{\tilde{x}}[k] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}[m] \tilde{x}[m + k] = \begin{cases} -\frac{1}{N} & 0 < k \leq N - 1 \\ 1 & k = 0 \end{cases} \quad (8.131)$$

de modo que hemos presentado un método de generación de secuencias que casi cumplen la Condición (8.92), por lo que resultan apropiadas para su empleo en aplicaciones de espectro ensanchado¹⁸.

¿Cuántas secuencias m existen para un tamaño de registro r determinado? La respuesta, que no demostraremos aquí, es $\Phi(2^r - 1)/r$, siendo $\Phi(\cdot)$ la llamada *función indicatriz de Euler* tal que, para un número entero n , $\Phi(n)$ es el número de enteros menores que n que son coprimos¹⁹ con n .

El siguiente ejemplo pretende ilustrar las propiedades de las secuencias de longitud maximal.

Ejemplo 8.8

Consideremos los LFSR de longitud $r = 4$, que darán lugar a secuencias m de longitud $2^r - 1 = 15$. El número de polinomios primitivos disponibles es de 2, puesto que $\Phi(15)/4 = 2$ (téngase en cuenta que los enteros positivos menores y coprimos con 15 son 8, a saber: $\{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$). Mediante búsqueda exhaustiva (comprobando si los polinomios dividen a $1 - z^{-p}$) encontramos que los dos polinomios primitivos son:

$$A_1(z) = 1 + z^{-3} + z^{-4} \quad (8.132)$$

$$A_2(z) = 1 + z^{-1} + z^{-4} \quad (8.133)$$

(en el Cuadro 10.2 podemos encontrar polinomios binarios primitivos de grado 2 a 21).

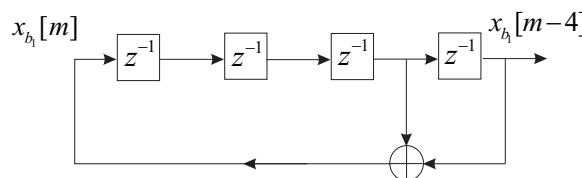


Figura 8.33. Diagrama de bloques del generador de secuencias m basado en $A_1(z)$ del Ejemplo 8.8.

¹⁸Como se ve, los términos fuera del origen tienden a cero asintóticamente con N .

¹⁹Su máximo común divisor es el 1.

En la Figura 8.33 se representa el LFSR asociado al polinomio $A_1(z)$, mientras que en la Figura 8.34 se muestra un fragmento (dos períodos) de la secuencia m obtenida (convertida ya a binaria antipodal) empleando $A_1(z)$ como polinomio característico e inicializando el LFSR con todo unos. Denotaremos esta secuencia por $\tilde{x}_1[m]$.

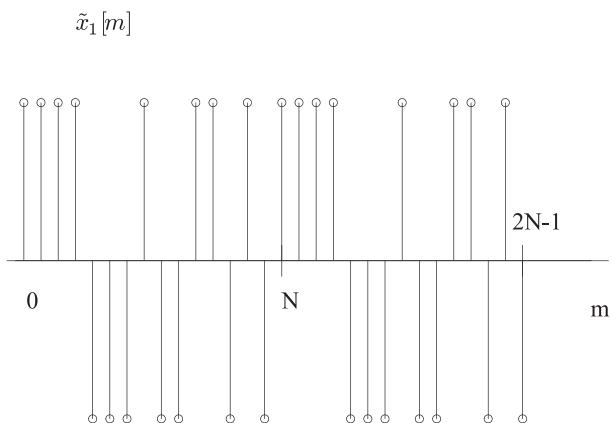


Figura 8.34. Fragmento de la secuencia ensanchadora periódica del Ejemplo 8.8.

La función de ambigüedad temporal periódica de $\tilde{x}_1[m]$ aparece en la Figura 8.35. Como vemos, dicha función es periódica y sólo toma los valores 1 y $1/15$, por lo que se encuentra muy cerca de cumplir la Condición (8.92). La Figura 8.36 representa la función de ambigüedad temporal

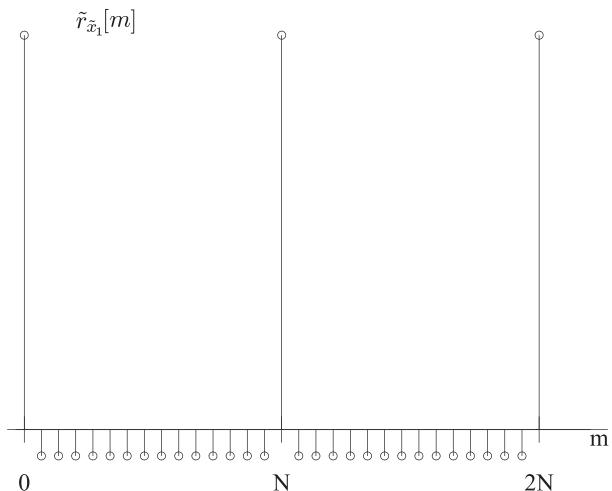


Figura 8.35. Función de ambigüedad temporal periódica correspondiente a la secuencia del Ejemplo 8.8.

aperiódica de $x_1[m]$. Como resulta notorio, algunos valores no son todo lo pequeños que cabría desear, por ejemplo, $r_{x_1}[5] = -4/15$. Este es un efecto tanto más importante cuanto menor es N , lo que aconseja valores relativamente grandes del factor de expansión. En consecuencia, aunque

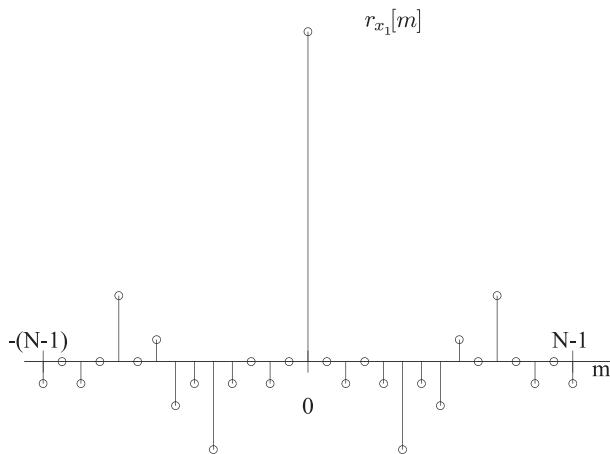


Figura 8.36. Función de ambigüedad temporal aperiódica correspondiente a la secuencia del Ejemplo 8.8.

el método de diseño basado en la función de ambigüedad temporal periódica resulta ser muy simple, no es del todo satisfactorio para valores de N pequeños, como el de nuestro ejemplo.

Abundando más en las propiedades de la secuencia que hemos generado, es interesante analizar (Figura 8.37) su respuesta en frecuencia. Recordemos que la Condición (8.92) se correspondía con un espectro plano (Ecuación (8.120)), pero que el método presentado en este apartado únicamente garantiza “casi unos” en las frecuencias asociadas a la DFT de N puntos. Para constatar que el grado de planicidad aumenta a medida que lo hace N , se representa en la Figura 8.38 el espectro de una secuencia m , de longitud 1023, generada con el polinomio característico

$$A(z) = 1 + z^{-3} + z^{-10} \quad (8.134)$$

En el Problema P8.16 se pide explicar el porqué del mínimo espectral en continua que se observa en las figuras 8.37 y 8.38.

8.3. ACCESO MÚLTIPLE

En este apartado analizaremos algunos mecanismos existentes para conseguir que múltiples usuarios comparten el medio físico de comunicaciones. Aquí nos centraremos en el llamado *acceso múltiple*, en el que un conjunto de usuarios transmiten información a un receptor y soslayaremos el caso de los sistemas de difusión, en los que un transmisor envía la misma información a múltiples usuarios.

Existen formas bien conocidas que permiten que múltiples usuarios hagan llegar la información al receptor: el acceso múltiple por división en frecuencia (“Frequency Division Multiple Access”, FDMA) y el acceso múltiple por división en tiempo (“Time Division Multiple Access”, TDMA). En el primero, el ancho de banda disponible se divide en subbandas que no se solapan y éstas se asignan a los diferentes usuarios, con la ventaja de que se pueden emplear modulaciones de distinta naturaleza sobre cada subbanda. En el caso

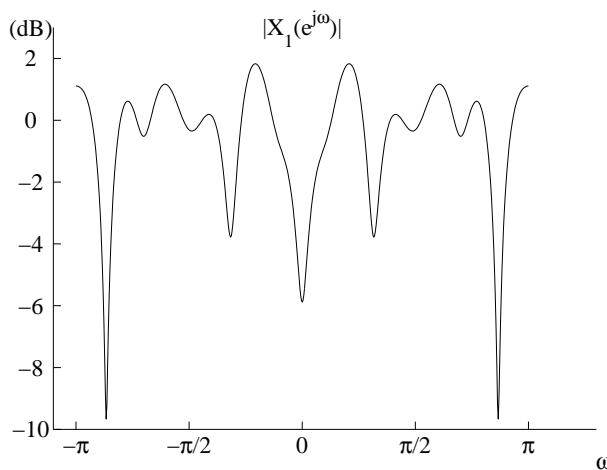


Figura 8.37. Respuesta en frecuencia de la secuencia ensanchadora del Ejemplo 8.8.

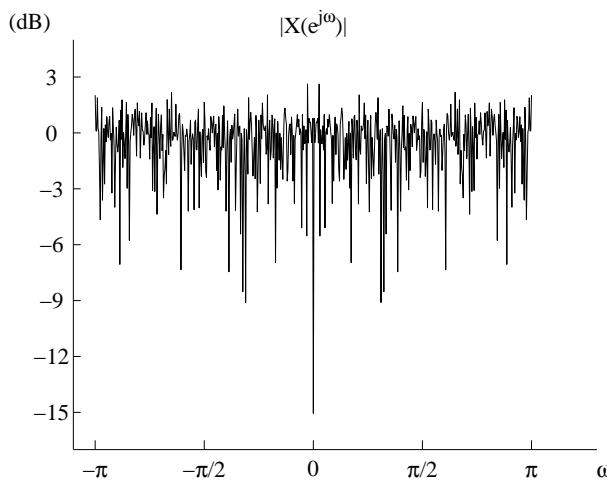


Figura 8.38. Respuesta en frecuencia correspondiente a una secuencia ensanchadora de tipo m con longitud 1023.

de TDMA, se divide un intervalo de tiempo denominado *trama* en subintervalos que no se solapan y que de nuevo se asignan a los distintos usuarios.

Pero las posibilidades no terminan aquí: recordando la modulación OFDM (Apartado 8.1) vemos que es inmediato construir a partir de ésta un esquema de acceso múltiple, simplemente asignando una o varias portadoras (esto es, una o varias funciones base) a cada usuario. El método resultante se denomina OFDMA (“*Orthogonal Frequency Division Multiple Access*”).

En realidad, basta con disponer de una base ortogonal de señales para construir un sistema de acceso múltiple, asignando una o varias funciones base a cada usuario. En el receptor

será fácil separar la información correspondiente a cada usuario con una estructura de receptor similar a la de la Figura 8.2, siempre y cuando en el canal no se haya destruido la ortogonalidad; recordemos las medidas que, en forma de prefijo cíclico, era preciso tomar en OFDM para evitar que esto sucediese.

¿Cuántas funciones base podríamos conseguir dado un ancho de banda W Hz y una duración de t_0 segundos²⁰? La respuesta, consecuencia del llamado *Teorema de Landau-Pollack*, es $2Wt_0 + 1$. Este resultado es consistente con el criterio de Nyquist generalizado (véase Ecuación (8.44)) en el que, además de la condición de ortogonalidad mutua, se impone que la ISI –sobre canales limitados en banda– correspondiente a cada usuario sea nula. Para una transmisión a una tasa de $1/T$ baudios puede demostrarse que de este criterio se desprende que es necesario un ancho de banda de $N\pi/T$ rad/seg o, equivalentemente, $N/2T$ Hz para acomodar N usuarios. Alternativamente, si se dispone de un ancho de banda de W Hz, el criterio de Nyquist generalizado garantiza la existencia de las funciones base que permiten dar cabida a un número máximo de usuarios igual a $2WT$.

Naturalmente, a una compañía operadora de telecomunicaciones, el número anterior le parecerá siempre raquíntico. En realidad, es cierto que una buena parte del tráfico de información que circula por las redes de telecomunicaciones se produce en forma de ráfagas. Piénsese, por ejemplo, en que en una conversación telefónica cada interlocutor está activo, en promedio, aproximadamente el 37,5 % del tiempo²¹, o en alguien navegando en Internet quien, mientras lee en la pantalla de su ordenador, puede no estar recibiendo ninguna información. A la vista de lo anterior, en sistemas en los que el tráfico no es uniforme, no es demasiado eficiente asignar una función base a un usuario de forma permanente. Es por ello que desde el origen de las redes telemáticas se han propuesto mecanismos de asignación dinámica de canales, como los populares métodos de escucha y detección de colisiones en transmisión (el protocolo CSMA/CD²² empleado en redes Ethernet); los de *polling*, en los que un terminal *maestro* que controla la red pregunta a los demás si tienen algo que enviar; o los de paso de testigo, en los que un testigo (*token*) que confiere el derecho a transmitir va circulando entre los distintos terminales.

Puesto que estos mecanismos de asignación dinámica de canales se sitúan un nivel por encima de la capa física, los dejaremos de lado en este texto. Frente a los métodos anteriores, a lo largo de este apartado plantearemos un camino alternativo: renunciaremos a utilizar señales ortogonales en transmisión (aunque buscaremos conjuntos de señales con bajas correlaciones entre sus elementos). Como consecuencia, el receptor basado en filtros adaptados no será capaz de separar completamente las señales y aparecerá la llamada *interferencia multiacceso* (MAI). A cambio, al abandonar la condición de ortogonalidad, el número L de usuarios en el sistema podrá superar el límite del criterio generalizado de Nyquist. Además, no será necesario recurrir a complicados esquemas de asignación dinámica, ya que permitiremos que los L usuarios transmitan simultáneamente y sobre el mismo ancho de banda.

²⁰Tanto la duración como el ancho de banda definidos como aquellos que concentran una porción significativa de la energía, ya que, como es sabido, una señal de duración finita tiene un ancho de banda infinito y viceversa.

²¹Este es un valor medio; todos conocemos personas con factores de actividad de más del 75 %.

²²“Carrier Sense Multiple Access with Collision Detection”: Acceso múltiple con escucha de portadora y detección de colisiones.

Para lograr estos objetivos veremos que el empleo de modulaciones de espectro ensanchado resulta sumamente adecuado. En particular, circunscribiremos nuestra discusión a las modulaciones basadas en secuencia directa asignando una secuencia ensanchadora (que en este contexto recibe el nombre de secuencia de código o firma) diferente a cada usuario. Este tipo de acceso múltiple se denomina *acceso múltiple por división en código* (“*Code Division Multiple Access*”, CDMA).

8.3.1. Señales multiusuario en CDMA

Como hemos indicado anteriormente, cada usuario en el sistema tendrá una secuencia de código diferente y, obviamente, enviará una secuencia de símbolos diferente. En adelante, y para simplificar nuestro análisis, supondremos que el resto de parámetros del sistema son idénticos para todos los usuarios: pulsos de chip $g_c(t)$, periodo de símbolo T y periodo de chip T_c . La función de ambigüedad de dichos pulsos cumple el criterio a periodo T_c . Además, supondremos que la constelación empleada por todos los usuarios es una binaria antipodal con energía media por símbolo E_s .

Así pues, la señal transmitida por el usuario i -ésimo será:

$$\begin{aligned} x_i(t) &= \sqrt{2}\mathcal{R}e\left\{\sum_n A_i[n]g_i(t-nT)e^{j\omega_ct}\right\} \\ &= \sqrt{2}\mathcal{R}e\left\{\sum_n \sum_{l=0}^{N-1} A_i[n]x_i[l]g_c(t-lT_c-nT)e^{j\omega_ct}\right\} \end{aligned} \quad (8.135)$$

donde $g_i(t)$ es el pulso transmisor (a periodo de símbolo), $A_i[n]$ la secuencia de símbolos transmitidos y $x_i[l]$ la secuencia de código correspondiente. En el canal se combinarán todas las señales procedentes de los usuarios activos (supondremos que hay L de ellos) y a la entrada del receptor se tendrá una superposición de dichas señales con ruido:

$$y(t) = \sqrt{2}\mathcal{R}e\left\{\sum_{i=0}^{L-1} \sum_n A_i[n]g_{r,i}(t-nT)e^{j\omega_ct}\right\} + n(t) \quad (8.136)$$

donde $g_{r,i}(t) = g_i(t) * h_{eq,i}(t)$ es la respuesta combinada del filtro transmisor y el canal equivalente correspondientes al usuario i -ésimo. Obsérvese que el filtro transmisor es específico de cada usuario (porque se basa en una secuencia de código distintiva) y que el canal, en general, también lo es (ya que la ubicación física de cada transmisor será en general diferente).

Teniendo en cuenta las hipótesis que se realizan sobre los canales $h_i(t)$, los sistemas multiusuario se pueden clasificar en síncronos y asíncronos. En los sistemas síncronos, el instante de transmisión se elige cuidadosamente en cada transmisor para que las señales de los diferentes usuarios se reciban alineadas temporalmente. Esto quiere decir que no sólo los periodos de símbolo y chip son idénticos para todos los usuarios, sino que el instante de muestreo en el receptor es óptimo para todas y cada una de las señales transmitidas (que se reciben superpuestas). En el caso de comunicaciones celulares, es razonable pensar

que el caso síncrono se da en las comunicaciones desde la estación base (que es donde físicamente se realiza la superposición de las señales destinadas a los L usuarios) hasta los receptores móviles²³, mientras que en las comunicaciones desde los terminales móviles hacia la estación base²⁴ lo más frecuente es encontrar un escenario asíncrono, aunque sería posible convertirlo en síncrono a costa de enviar señales de control de reloj y fase en lazo cerrado.

Con el fin de no complicar innecesariamente las discusiones subsiguientes consideraremos canales con respuesta plana en frecuencia; supondremos entonces que el caso síncrono se corresponde con canales en banda base equivalentes de la forma:

$$h_{eq,i}(t) = \alpha_i \delta(t), \quad i = 0, \dots, L - 1 \quad (8.137)$$

donde α_i es un número real que tiene en cuenta que la atenuación experimentada por las señales procedentes de cada usuario puede ser diferente. En cuanto al caso asíncrono, supondremos que éste se corresponde con canales del tipo

$$h_{eq,i}(t) = \alpha_i \delta(t - \tau_i), \quad i = 0, \dots, L - 1 \quad (8.138)$$

por lo que las señales llegarán al receptor con retardos diferentes e, incluso en el caso de que las fases de las portadoras fuesen idénticas en transmisión, fases diferentes, ya que el retardo τ_i se traduce en un fasor $e^{-j\omega_c \tau_i}$ que se incluye en α_i .

En el caso síncrono, si los pulsos $g_i(t)$ fuesen ortogonales, entonces el receptor óptimo según el criterio ML estaría basado en filtros adaptados (véase Figura 5.34). Es más, en este caso, el receptor basado en cada filtro adaptado puede adoptar la forma de la Figura 8.23, en la que se ha prescindido en aras de una mayor claridad del factor $\sqrt{2}$ y de la demodulación con una exponencial compleja de frecuencia la de la portadora. El esquema resultante, para el i -ésimo usuario es el que se detalla en la Figura 8.39²⁵. Es conveniente que el lector examine también la Figura 8.12(a) para establecer un claro paralelismo. En esencia, la OFDM para acceso múltiple (OFDMA) puede verse como un caso particular de CDMA en el que las secuencias de código son tales que $L = N$ y

$$\tilde{x}_i[m] = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{j \frac{2\pi im}{N}}, \quad i = 0, \dots, N - 1 \quad (8.139)$$

Dada la sencillez de la estructura de la Figura 8.39, podemos preguntarnos por las condiciones que hacen que los pulsos $g_i(t)$ sean efectivamente ortogonales. Para ello, basta con

²³Denominado habitualmente enlace descendente.

²⁴Denominado enlace ascendente.

²⁵En sentido estricto, el receptor basado en el filtro adaptado debería incluir también una multiplicación por α_i , que simplemente conllevaría una redefinición de las regiones de decisión, por lo que dicha multiplicación se puede evitar modificando el decisor. En cualquier caso, excepto en algunos casos especiales (p.ej., constelación binaria antipodal y $\alpha_i > 0$), la redefinición del decisor es siempre necesaria, porque el propio canal introduce un escalado por α_i .

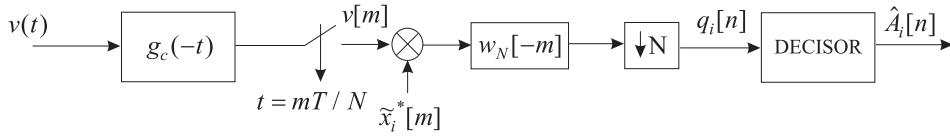


Figura 8.39. Demodulador correspondiente al usuario i -ésimo en CDMA síncrono.

calcular el producto escalar

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} g_i(t) g_j^*(t) dt \\
 &= \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} x_i[m] x_j^*[l] (g_c(t - mT_c) * g_c^*(-t - lT_c))|_{t=0} \\
 &= \sum_{m=0}^{N-1} x_i[m] x_j^*[m]
 \end{aligned} \tag{8.140}$$

Para escribir la segunda línea se ha utilizado el hecho de que la función de ambigüedad temporal equivale a una convolución (con una de las señales reflejada) y un muestreo en $t = 0$. Para escribir la tercera, se ha tenido en cuenta que los pulsos $g_c(t) * g_c^*(-t)$ cumplen el criterio de Nyquist a periodo de chip. Por consiguiente, la condición de ortogonalidad entre los $g_i(t)$ puede parafrasearse como ortogonalidad entre las respectivas secuencias de código, esto es,

$$\sum_{m=0}^{N-1} x_i^*[m] x_j[m] = \delta[i - j], \quad i, j = 0, \dots, N-1 \tag{8.141}$$

Entonces, para que se satisfaga (8.141) ha de verificarse que $L \leq N$, ya que, en el mejor de los casos, las secuencias $x_i[m]$, $i = 0, \dots, L-1$ podrían constituir una base del subespacio de señales discretas complejas de energía finita que son nulas fuera del intervalo $[0, N-1]$. Evidentemente, existen infinitas bases posibles para este subespacio y cualquiera nos serviría para el caso síncrono, aunque siempre con la limitación de N usuarios en el sistema. Como ejemplo, están las funciones empleadas en OFDMA (Ecuación (8.139)), o las que se corresponderían con un acceso múltiple por división en tiempo (TDMA). En este último caso,

$$x_i[m] = \delta[m - i], \quad i = 0, \dots, N-1 \tag{8.142}$$

Consideremos ahora el caso asíncrono. Supondremos que el receptor emplea un esquema basado en filtros adaptados (teniendo en cuenta el canal), de modo que el demodulador de información correspondiente al usuario l -ésimo emplea un filtro $f_l(t)$ tal que $f_l^*(-t) = g_l(t) * h_{eq,l}(t)$, tal y como se detalla en la Figura 8.40, en la que se ha obviado la demodulación con la exponencial compleja $e^{-j\omega_ct}$ y la multiplicación por $\sqrt{2}$. Es muy

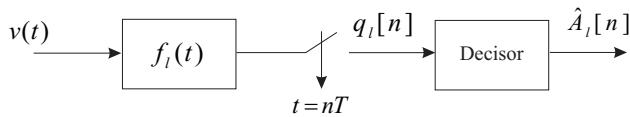


Figura 8.40. Demodulador correspondiente al usuario l -ésimo en CDMA asíncrono.

revelador obtener el canal, o mejor dicho, los canales discretos equivalentes para este caso, siguiendo estrechamente el desarrollo del Apartado 8.1.5, realizado para OFDM.

Sea $q_l(t)$, $l \in \{0, \dots, L-1\}$ la señal a la salida del filtro $f_l(t)$ situado en la l -ésima rama del receptor. Entonces, en ausencia de ruido,

$$q_l(t) = \sum_{i=0}^{L-1} \sum_k A_i[k] p_{l,i}(t - kT) \quad (8.143)$$

donde

$$p_{l,i}(t) = g_i(t) * h_{eq,i}(t) * f_l(t) \quad (8.144)$$

es el canal equivalente que se corresponde con los símbolos enviados por el usuario i -ésimo a la salida del l -ésimo filtro adaptado. A la salida del l -ésimo muestreador tenemos

$$\begin{aligned} q_l[n] &= \sum_{i=0}^{L-1} \sum_k A_i[k] p_{l,i}[n - k] \\ &= \sum_{i=0}^{L-1} A_i[n] * p_{l,i}[n], \quad l = 0, \dots, L-1 \end{aligned} \quad (8.145)$$

con $p_{l,i}[n] \doteq p_{l,i}(nT)$.

A continuación, expresaremos (8.145) en función de los canales discretos equivalentes a periodo de chip, definidos como

$$d_{l,i}[m] = (g_c(t) * h_{eq,i}(t) * h_{eq,l}^*(-t) * g_c^*(-t))|_{t=mT_c} \quad (8.146)$$

En efecto, sustituyendo las respectivas expresiones de $g_i(t)$ y $g_l(t)$ en (8.144) tenemos

$$p_{l,i}(t) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} x_i[m] x_l^*[k] \alpha_i \alpha_l^*(g_c(t - mT_c - \tau_i) * g_c^*(-t - kT_c - \tau_l)) \quad (8.147)$$

de donde se sigue inmediatamente que

$$p_{l,i}[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} x_i[m] x_l^*[k] d_{l,i}[nN + k - m] \quad (8.148)$$

La expresión anterior no admite en general más simplificaciones, ya que en principio $d_{l,i}[m]$ en (8.146) puede tener infinitos términos, incluso aunque los pulsos de chip sean de tipo raíz cuadrada de coseno alzado, ya que basta con que $\tau_i - \tau_l$ no sea igual a un número entero de periodos de chip.

De acuerdo con la Expresión (8.145), la señal a la entrada del l -ésimo decisor es una suma de L contribuciones, una de las cuales depende de la secuencia deseada $A_l[n]$, aunque, a su vez, este término podría contener ISI. En nuestro caso los canales $h_l(t)$ que estamos considerando no producen ISI, lo que se traduce en que $p_{l,i}[n] = |\alpha_i|^2 \delta[n]$, para todo $i = 0, \dots, L-1$. Por otra parte, cuando $p_{l,i}[n] \neq 0$ para algún $l \neq i$, diremos que tenemos interferencia multiacceso (MAI, “Multi-Access Interference”). Cuando existe MAI el receptor basado en el banco de filtros adaptados no es óptimo. Es por ello que resulta interesante evaluar esta MAI y examinar bajo qué condiciones se hace cero. Comenzaremos con un ejemplo que arrojará alguna luz sobre dichas condiciones.

Ejemplo 8.9

Sea un sistema asíncrono con dos usuarios, para el que $N = 100$. Asimismo, los retardos respectivos son $\tau_0 = 3T + 25T_c$, $\tau_1 = 3T + 50T_c$ y las ganancias respectivas $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 0.5$. Finalmente, por simplicidad, supondremos que ω_c es tal que $\omega_c T_c$ es un múltiplo entero de 2π . Entonces, aplicando (8.146):

$$\begin{aligned} d_{0,0}[m] &= \delta[m] \\ d_{0,1}[m] &= 0,5\delta[m-25] \\ d_{1,0}[m] &= 0,5\delta[m+25] \\ d_{1,1}[m] &= 0,25\delta[m] \end{aligned} \quad (8.149)$$

lo que, sustituido en (8.148), produce:

$$\begin{aligned} p_{0,0}[n] &= \left(\sum_{m=0}^{N-1} |x_0[m]|^2 \right) \delta[n]; \\ p_{1,1}[n] &= \left(0,25 \sum_{m=0}^{N-1} |x_1[m]|^2 \right) \delta[n]; \\ p_{0,1}[n] &= \left(0,5 \sum_{m=0}^{N-1} x_0^*[m]x_1[m-25] \right) \delta[n] + \left(0,5 \sum_{m=0}^{N-1} x_0^*[m]x_1[m+75] \right) \delta[n-1] \\ p_{1,0}[n] &= \left(0,5 \sum_{m=0}^{N-1} x_1^*[m]x_0[m+25] \right) \delta[n] + \left(0,5 \sum_{m=0}^{N-1} x_1^*[m]x_0[m-75] \right) \delta[n+1] \end{aligned} \quad (8.150)$$

El lector puede comprobar que $p_{1,0}[n] = p_{0,1}^*[-n]$. A la vista de (8.150), para que no haya MAI, la condición es que los canales discretos equivalentes “cruzados” sean cero, algo que se consigue si y sólo si se satisfacen simultáneamente las dos condiciones siguientes:

$$\sum_{m=0}^{N-1} x_0^*[m]x_1[m-25] = 0 \quad (8.151)$$

$$\sum_{m=0}^{N-1} x_0^*[m]x_1[m+75] = 0 \quad (8.152)$$

Si ahora pensamos en una aplicación en la que los usuarios pueden variar su distancia relativa con respecto al receptor –esto sucede, por ejemplo, en comunicaciones móviles– y que, a falta de mecanismos de sincronización en lazo cerrado, el instante de inicio de transmisión por parte de cada usuario se puede considerar arbitrario, parece recomendable que se cumpla el siguiente conjunto de condiciones de ortogonalidad

$$r_{x_i, x_l}[k] \doteq \sum_{m=0}^{N-1} x_i^*[m] x_l[m+k] = 0, \text{ para todo } k \quad (8.153)$$

y para todo $i, l \in \{0, \dots, L-1\}$, $i \neq l$. La función $r_{x_i, x_l}[k]$ se suele denominar *función de correlación cruzada determinista aperiódica*. Cuando no hay posibilidad de equívoco, dicha función suele nombrarse simplemente como *correlación aperiódica*, y hablaremos de alta correlación entre secuencias cuando la magnitud de $r_{x_i, x_l}[k]$ sea elevada, y de ortogonalidad, que no de incorrelación, cuando $r_{x_i, x_l}[k] = 0$.

Por desgracia, parece demasiado optimista esperar conseguir muchas secuencias de código que cumplan (8.153). Por otra parte, está claro que cuanto mayor es la magnitud de los términos $r_{x_i, x_l}[k]$, mayor es el nivel de MAI presente en el sistema. Todo ello nos lleva a concluir que un buen objetivo de diseño es conseguir muchas secuencias de código –lo que se convertirá en muchos usuarios– con correlación entre ellos lo más baja posible –lo que se traducirá en una interferencia multiacceso reducida–. Con estas premisas es inmediato descartar como secuencias de código las secuencias de longitud maximal obtenidas con el mismo polinomio característico, que tendrían la forma (más fácilmente expresable sobre la versión periódica):

$$\tilde{x}_i[m] = \tilde{x}_0[m+i], \quad i = 1, \dots, N-1 \quad (8.154)$$

Estas secuencias producirían para determinados desplazamientos valores de correlación excesivamente grandes.

En el apartado siguiente veremos algunas formas de diseñar secuencias ensanchadoras apropiadas para CDMA.

8.3.2. Diseño de secuencias de código para CDMA

Comenzaremos presentando algunas de las alternativas más frecuentemente utilizadas para el caso síncrono, para, con posterioridad, realizar algunas consideraciones para el caso asíncrono. Recordemos que el caso síncrono impone muchas menos restricciones, por lo que su solución es mucho más sencilla.

Una de las construcciones de códigos más populares en CDMA síncrono son los llamados *códigos Walsh-Hadamard*. Estos códigos están definidos para longitudes de la forma $N = 2^r$, con r entero positivo. La construcción de Hadamard define un conjunto de matrices de acuerdo con el siguiente procedimiento recursivo:

$$\mathbf{H}_1 = [0]; \quad \mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{H}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.155)$$

$$\mathbf{H}_{2N} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_N & \overline{\mathbf{H}}_N \\ \overline{\mathbf{H}}_N & \mathbf{H}_N \end{bmatrix} \quad (8.156)$$

siendo $\overline{\mathbf{H}}_N$ la submatriz que se obtiene realizando el complemento a 2 de los bits de \mathbf{H}_N . La secuencia de código $x_i[m]$, $m = 0, \dots, N-1$, se obtiene seleccionando la i -ésima fila de la matriz \mathbf{H}_N y convirtiéndola de binaria a antipodal con la transformación $0 \rightarrow -1/\sqrt{N}$, $1 \rightarrow 1/\sqrt{N}$. Por construcción, es fácil ver que las secuencias de chip generadas de este modo, son ortonormales; por tanto, satisfacen la Condición (8.141). Con este procedimiento se generan exactamente N secuencias de código de tamaño N . Una ventaja de las secuencias de Walsh-Hadamard es su capacidad para generar códigos con un factor de expansión variable (“Orthogonal Variable Spreading Factor”, OVSF), que ofrecen más grados de libertad a la hora de alcanzar un compromiso entre velocidad binaria y robustez. El Problema P8.17 sirve para ilustrar este interesante concepto.

Desgraciadamente, los códigos de Walsh-Hadamard se comportan muy mal en entornos asíncronos. Basta con comprobar que la cuarta fila de la matriz \mathbf{H}_4 se obtiene tras un desplazamiento cíclico de la tercera; esta característica se propaga en la construcción recursiva, teniendo en cuenta la forma en que se extienden las filas en la parte superior de la matriz. A partir de ahora, centraremos nuestra atención en el caso asíncrono, dejando para el final de este apartado la discusión sobre algunas otras secuencias óptimas en el caso síncrono. Lamentablemente, la búsqueda de conjuntos de secuencias que satisfagan (8.153) no ha arrojado hasta la fecha resultados satisfactorios en forma de procedimientos sistemáticos que no requieran de la resolución de problemas numéricos. Sin embargo, un problema similar relacionado, basado en la función de correlación periódica, sí que da lugar a soluciones fácilmente descriptibles, tal y como mostraremos a continuación.

La correlación periódica entre dos secuencias $\tilde{x}_i[m]$ y $\tilde{x}_l[m]$, $i \neq l$, de periodo N , se define como

$$\tilde{r}_{\tilde{x}_i, \tilde{x}_l}[k] \doteq \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_i^*[m] \tilde{x}_l[m+k] \quad (8.157)$$

y difiere de la correlación aperiódica entre las secuencias de duración finita $x_i[m]$, $x_l[m]$, dada en (8.153), en que allí algunos de los N sumandos son cero, en concreto, aquellos en los que aparecen factores de la forma $x_l[m+k]$, con $m+k > N-1$ ó $m+k < 0$.

En lo sucesivo, consideraremos conjuntos de L secuencias de código binarias antipodales, normalizadas en energía y de periodo N . Es pertinente mencionar aquí un resultado debido a Welch, que establece una cota inferior para la magnitud de la correlación periódica

entre cualesquiera dos secuencias del conjunto:

$$\max_{\substack{i,l \in \{0,1,\dots,L-1\} \\ i \neq l}} |\tilde{r}_{\tilde{x}_i, \tilde{x}_l}[k]| \geq \sqrt{\frac{L-1}{LN-1}} \quad (8.158)$$

que, para L y N grandes, es aproximadamente $1/\sqrt{N}$. Obsérvese que, para L y N dados, el resultado de Welch confirma nuestra intuición de que la correlación periódica dentro del conjunto no se puede hacer cero (no es posible la ortogonalidad).

Es razonable preguntarse si existen conjuntos de secuencias que se acerquen a la cota de Welch. Como ya hemos señalado, éste no es el caso para las secuencias m obtenidas con el mismo polinomio característico, ya que es fácil ver que para cualquier par de secuencias el máximo de la correlación periódica es 1. No obstante, las secuencias m se emplean como elemento constructivo en conjuntos de secuencias con baja correlación periódica. Sea $x_b[m]$ la secuencia m binaria a la salida de un LFSR y sea $x'_b[m]$ la secuencia obtenida al diezmar $x_b[m]$ por un factor entero P , de modo que $x'_b[m] = x_b[Pm]$. Puesto que $x_b[m]$ es periódica, es fácil ver que la secuencia $x'_b[m]$ también será periódica; en concreto, el periodo es $N/\text{mcd}(N, P)$, con $\text{mcd}(\cdot, \cdot)$ el máximo común divisor. Por tanto, si P y N son coprimos, la secuencia $x'_b[m]$ será maximal. Aunque aquí omitiremos la justificación, cuando se conoce el polinomio generador $A(z)$ de la secuencia $x_b[m]$ es fácil calcular el polinomio generador $A'(z)$ que da lugar a la secuencia diezmada $x'_b[m]$. Para ello, se puede recurrir al concepto de *clases conjugadas* del Apartado 10.2.2: basta calcular el polinomio minimal de la P -ésima clase conjugada en el cuerpo de Galois de orden 2^r , siendo $A(z)$, de grado r , el polinomio primitivo. Un método equivalente más sencillo consiste en calcular las r raíces de $A(z)$, que denotaremos por α_i , $i = 1, \dots, r$; entonces $A'(z)$ se obtiene calculando el polinomio cuyas r raíces son de la forma α_i^P , $i = 1, \dots, r$, y reduciendo sus coeficientes módulo 2. En caso de que el polinomio resultante tenga raíces múltiples, $A'(z)$ se calcula fijando a uno la multiplicidad de cada raíz (véase Ejemplo 8.10).

Los códigos *Gold* se construyen a partir de un *par preferido* de secuencias m . Un par $(x_b[m], x'_b[m])$ de secuencias m de longitud $N = 2^r - 1$ se dice preferido si:

- $r \pmod 4 \neq 0$, es decir, r no es múltiplo de 4.
- $x'_b[m]$ se obtiene diezmando $x_b[m]$ por un factor P de una de las dos formas siguientes: $P = 2^k + 1$; $P = 2^{2k} - 2^k + 1$, para algún entero k .
- Si r es múltiplo de 2 (pero no de 4), $\text{mcd}(r, k) = 2$; si r es impar, $\text{mcd}(r, k) = 1$.

Para simplificar la descripción de los conjuntos subsiguientes, dada una secuencia binaria genérica $y_b[m]$ de periodo M , denotamos por \mathcal{Y}_b el código constituido por dicha secuencia y todos sus posibles desplazamientos módulo M :

$$\mathcal{Y}_b = \{y_b[m], y_b[m+1], \dots, y_b[m+M-1]\} \quad (8.159)$$

Asimismo, la suma de una secuencia $y_b[m]$ y un código \mathcal{Y}_b es el conjunto resultante de sumar $y_b[m]$ y cada una de las secuencias en \mathcal{Y}_b . Naturalmente, la cardinalidad del conjunto dado en (8.159) es M .

Dado un par preferido de secuencias $x_b[m]$ y $x'_b[m]$ un código Gold consiste en el conjunto de $2^r + 1$ secuencias siguiente:

$$x_b[m] \cup x'_b[m] \cup (x_b[m] + \mathcal{X}'_b) \quad (8.160)$$

donde todas las sumas son módulo-2 y \mathcal{X}'_b es el código asociado a $x'_b[m]$.

Considerando las secuencias antipodales correspondientes a $x_b[m]$, $x'_b[m]$, que denotamos por $\tilde{x}_b[m]$, $\tilde{x}'_b[m]$, Gold demostró que la correlación periódica entre cualesquiera dos secuencias del código puede tomar tres valores distintos:

$$\tilde{r}_{\tilde{x}_l, \tilde{x}_l}[k] \in \{-t(r), -1/N, t(r) - 2/N\}, \text{ para todo } k \quad (8.161)$$

siendo

$$t(r) = \begin{cases} \frac{1+2^{(r+1)/2}}{N}, & \text{si } r \text{ es impar} \\ \frac{1+2^{(r+2)/2}}{N}, & \text{si } r \text{ es par} \end{cases} \quad (8.162)$$

El valor absoluto máximo de la correlación periódica, $t(r)$, cuando r es impar es $(1 + \sqrt{2(N+1)})/N$, que se puede aproximar para N grande por $\sqrt{2/N}$. Para el caso r par, el pico de la correlación periódica cuando N es grande se puede aproximar por $2/\sqrt{N}$. Por tanto, para N grande los códigos Gold alcanzan un nivel máximo de correlación que es mayor que la cota de Welch en un factor de $\sqrt{2}$ para r impar ó de 2 para r par.

El precio a pagar por alcanzar unos niveles bajos de correlación de pico lo encontramos en la propia función de ambigüedad temporal. Aunque las secuencias $\tilde{x}_l[m]$ y $\tilde{x}'_l[m]$ son maximales (y por tanto, su función de ambigüedad temporal periódica es de la forma dada en (8.131)), las creadas a partir de su suma no lo son; de hecho, la función de ambigüedad temporal periódica de dichas secuencias toma los valores dados en (8.161), además de 1, que es el valor en el origen y que se corresponde con una recepción correcta. Ello supone una desventaja para la estimación de canal en receptores de tipo RAKE y, en general, en la sincronización.

Otro conjunto de secuencias similares son los llamados *códigos Kasami*. Existen dos conjuntos de secuencias que, por su tamaño, reciben los nombres de *pequeño* y *grande*. Ambos resultan de manipular secuencias m de tamaño $N = 2^r - 1$, con r par (pero no múltiplo de 4). El conjunto pequeño se obtiene del siguiente modo: dada una secuencia maximal $x_b[m]$, se construye $x''_b[m]$ diezmado $x_b[m]$ con un factor $P = 2^{r/2} + 1$. Viendo que $N = 2^r - 1 = (2^{r/2} + 1)(2^{r/2} - 1) = P(2^{r/2} - 1)$ podemos concluir que $x''_b[m]$ tendrá periodo $N/\text{mcd}(N, P) = 2^{r/2} - 1$. Ahora, el conjunto en cuestión es

$$x_b[m] \cup (x_b[m] + \mathcal{X}''_b) \quad (8.163)$$

cuyo tamaño es $2^{r/2}$. Las funciones de correlación cruzada y ambigüedad temporal (periódicas) toman ahora valores en el conjunto $\{-1/N, -(2^{r/2} + 1)/N, (2^{r/2} - 1)/N\}$, cuyo valor absoluto máximo es $(2^{r/2} + 1)/N$ o, aproximadamente, $2^{-r/2}$ para N grande. Obsérvese que la cota de Welch en este caso ($L = 2^{r/2}$, $N = 2^r - 1$) es, según (8.158),

$$\sqrt{\frac{2^{r/2} - 1}{2^{r/2}(2^r - 1)}} \approx 2^{-r/2} \quad (8.164)$$

siendo la aproximación válida para N grande. Por tanto, las secuencias del conjunto pequeño de Kasami alcanzan asintóticamente ($N \rightarrow \infty$) la cota de Welch. En este sentido, dicho conjunto se puede considerar óptimo. En comparación con el de Gold, el conjunto que acabamos de describir es muy pequeño (del orden de $2^{r/2}$ veces más pequeño).

Para construir el *conjunto grande de Kasami*, comenzamos con un par preferido de secuencias $(x_b[m], x'_b[m])$, generado exactamente de la misma forma que en los códigos Gold. Además, se emplea una tercera secuencia $x''_b[m]$, obtenida a partir de $x_b[m]$ con un factor de diezmado $P = 2^{r/2} + 1$. El conjunto se forma como sigue:

$$x_b[m] \cup x'_b[m] \cup (x_b[m] + \mathcal{X}'_b) \cup (x'_b[m] + \mathcal{X}''_b) \cup (x_b[m] + \mathcal{X}'_b + \mathcal{X}''_b) \quad (8.165)$$

Como se puede comprobar, el conjunto grande de Kasami contiene al conjunto de Gold y al conjunto pequeño de Kasami. Dentro del conjunto, tanto la correlación cruzada como la función de ambigüedad temporal (periódicas) toman cinco valores posibles, a saber, $\{-t(r), -s(r), -1/N, s(r) - 2/N, t(r) - 2/N\}$, siendo $t(r) = (1 + 2^{(r+2)/2})/N$ y $s(r) = (t(r) + 1/N)/2$. Ello implica que el valor de pico es $t(r)$, esto es, el mismo que para los códigos Gold; sin embargo, el tamaño del conjunto es considerablemente superior, ya que contiene $2^{r/2}(2^r + 1)$ secuencias.

El siguiente ejemplo ilustra la construcción de los códigos de Gold y Kasami.

Ejemplo 8.10

Sea $r = 6$, lo que produce secuencias de, como máximo, periodo $N = 2^r - 1 = 63$. El polinomio generador $A(z) = 1 + z^{-1} + z^{-6}$ es primitivo, por lo que la secuencia obtenida a partir de dicho generador es maximal. Las raíces de $A(z)$ son $z^{-1} = 0,9554 \pm 0,6118j$, $z^{-1} = -0,1547 \pm 1,0384j$ y $z^{-1} = -0,7907 \pm 0,3005j$. Consideremos ahora un factor de diezmado $P = 3$; en este caso, el polinomio obtenido al elevar al cubo las raíces de $A(z)$ es $1 + z^{-1} + 3z^{-2} + 3z^{-4} + z^{-6}$, que reducido módulo-2, se convierte en $A'_3(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-4} + z^{-6}$. No obstante, como el máximo común divisor de N y P es 3, la secuencia generada a partir de $A'_3(z)$ no es maximal, sino que tendrá periodo $63/\text{mcd}(63, 3) = 21$. Sin embargo, para un factor de diezmado $P = 5$, como P y N no tienen factores comunes (salvo el 1), el polinomio generador resultante, sí que da lugar a una secuencia maximal. Dicho polinomio, que denotaremos por $A'_5(z)$ resulta ser (después de calcular las raíces de $A(z)$, elevarlas a la quinta potencia, construir el polinomio con las raíces resultantes y reducir módulo-2) $A'_5(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-5} + z^{-6}$ que, por tanto, también es primitivo.

Como r no es múltiplo de 4; P es de la forma $2^k + 1$, con k entero (aquí $k = 2$), y el máximo común divisor entre r y k es 2, entonces las secuencias generadas a partir de $A(z)$ y $A'_5(z)$ constituyen un par preferido, por lo que se pueden emplear para construir un código Gold con $2^r + 1 = 65$ secuencias. El valor absoluto de las funciones correlación cruzada y ambigüedad temporal cruzada (fuera del cero) periódicas es de $t(r) = (1 + 2^{(r+2)/2})/N = 17/63$.

Dado que $r = 6$ es múltiplo de 2 (pero no de 4), también podemos construir los conjuntos pequeño y grande de Kasami. Para ello, necesitamos diezmar la secuencia generada por el polinomio $A(z)$ con un factor $P = 2^{r/2} + 1 = 9$. Según el método explicado, reduciendo módulo-2 el polinomio resultante de elevar las raíces de $A(z)$ a la novena potencia, obtenemos $1 + z^{-4} + z^{-6}$ que tiene raíces múltiples (ya que únicamente contiene potencias pares de z^{-1}), que, una vez eliminadas, conducen al polinomio minimal $A''_9(z) = 1 + z^{-2} + z^{-3}$. Dicho polinomio genera una secuencia de periodo $63/\text{mcd}(63, 9) = 7$. Combinando las secuencias obtenidas en la forma

(8.163) obtenemos un conjunto de $2^{r/2} = 8$ secuencias, cuyo valor absoluto máximo para la correlación periódica es de tan solo $(2^{r/2} + 1)/N = 9/63$.

El conjunto grande de Kasami resulta al combinar las secuencias generadas por los polinomios $A'(z)$, $A'_5(z)$ y $A''_9(z)$ en la forma dada por (8.165). El valor absoluto máximo de la correlación es como en los códigos Gold: 17/63, pero el tamaño del conjunto es considerablemente superior: $2^{r/2}(2^r + 1) = 520$, esto es, 8 veces mayor que el de Gold.

Una vez que hemos descrito algunos procedimientos prácticos para el diseño de secuencias con bajos niveles de pico de correlación periódica, es pertinente preguntarnos si son adecuados pensando en que, como discutimos en el apartado precedente, estamos realmente interesados en reducir la correlación aperiódica (Condición (8.153)). Para encontrar la relación entre ambas funciones, obsérvese que para $k \geq 0$

$$\begin{aligned}\tilde{r}_{\tilde{x}_i, \tilde{x}_l}[k] &= \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_i^*[m] \tilde{x}_l[m+k] \\ &= \sum_{m=0}^{N-1-k} x_i^*[m] x_l[m+k] + \sum_{m=N-k}^{N-1} x_i^*[m] x_l[m+k-N] \\ &= r_{x_i, x_l}[k] + r_{x_i, x_l}[k-N], \quad k \geq 0\end{aligned}\tag{8.166}$$

El problema, como se ve, es que un valor bajo de $\tilde{r}_{\tilde{x}_i, \tilde{x}_l}[k]$ no conduce directamente a un valor bajo de $r_{x_i, x_l}[k]$, ya que éste se puede compensar con $r_{x_i, x_l}[k-N]$.

Para hacer más explícita la influencia de la correlación periódica en las prestaciones de un sistema CDMA, analicemos un caso con dos usuarios con secuencias respectivas $x_i[m]$ y $x_l[m]$, que se reciben con la misma potencia ($\alpha_i = \alpha_l = 1$) y retardos $\tau_l = 0$ y $\tau_i = kT/N$, para algún $k \in \{1, \dots, N-1\}$. Los símbolos transmitidos $A_i[n], A_l[n]$ se eligen con igual probabilidad en la constelación binaria antipodal $\{-\sqrt{E_s}, +\sqrt{E_s}\}$. Considerando el receptor adaptado al usuario l -ésimo, los canales discretos equivalentes serán, según (8.148),

$$p_{l,l}[n] = \sum_{m=0}^{N-1} |x_l[m]|^2 = r_{x_l}[0];\tag{8.167}$$

$$\begin{aligned}p_{l,i}[n] &= \sum_{m=0}^{N-1} x_l^*[m] x_i[m-k] \delta[n] + \sum_{m=0}^{N-1} x_l^*[m] x_i[m+N-k] \delta[n-1] \\ &= r_{x_l, x_i}[-k] \delta[n] + r_{x_l, x_i}[N-k] \delta[n-1]\end{aligned}\tag{8.168}$$

por lo que la señal a la salida del receptor l -ésimo será

$$\begin{aligned}q_l[n] &= A_l[n] r_{x_l}[0] + A_i[n] r_{x_l, x_i}[-k] + A_i[n-1] r_{x_l, x_i}[N-k] \\ &= \begin{cases} A_l[n] r_{x_l}[0] + A_i[n] \tilde{r}_{\tilde{x}_l, \tilde{x}_i}[N-k], & \text{si } A_i[n] = A_i[n-1] \\ A_l[n] r_{x_l}[0] - A_i[n] r_{x_l, x_i}^o[N-k], & \text{si } A_i[n] \neq A_i[n-1] \end{cases}\end{aligned}\tag{8.169}$$

siendo

$$r_{x_l, x_i}^o[k] \doteq r_{x_l, x_i}[k] - r_{x_l, x_i}[k-N]\tag{8.170}$$

la llamada *correlación impar*.

Observando (8.169), podemos concluir que el 50 % del tiempo la MAI viene dada por la correlación periódica, mientras que el 50 % del tiempo restante está determinada por la correlación impar. En consecuencia, en el diseño de secuencias para CDMA se debería prestar atención no sólo a la correlación periódica, como suele ser habitual, sino también a la correlación impar. En el Problema P8.18 se estudian algunas propiedades de la correlación impar, mientras que en el Problema P8.19 se aborda el diseño de conjuntos de secuencias cuyos valores de correlación impar son idénticos a los de la correlación periódica, lo que garantiza valores de MAI bajos.

Dado un conjunto de L secuencias binarias antipodales de longitud N y normalizadas en energía existe una cota inferior, también debida a Welch, referida a los valores de correlación aperiódica:

$$\max_{\substack{l,i \in \{0, \dots, L-1\} \\ l \neq i}} |r_{x_l, x_i}[k]| \geq \sqrt{\frac{(L-1)}{2LN - L - 1}} \quad (8.171)$$

En todo caso, y a pesar de que ha sido a menudo utilizado, el criterio de diseño de secuencias para CDMA asíncrono basado en el valor de pico de la correlación aperiódica, presenta el evidente problema de que no tiene en cuenta cuántas veces la correlación se acerca a dicho valor de pico. Intuitivamente, si r_p es el valor de pico, es menos perjudicial una correlación tal que $|r_{x_l, x_i}[k]| = r_p$, si $k = k_0$ y $|r_{x_l, x_i}[k]| = 0$, para todo $k \neq k_0$, que una correlación tal que $|r_{x_l, x_i}[k]| = r_p$ para todo k . Un criterio más razonable sería diseñar el código para minimizar la probabilidad de error de bit, pero para ello conviene hacer algunas simplificaciones. Sin pérdida de generalidad, supondremos que estamos interesados en minimizar la *BER* correspondiente al usuario l -ésimo y que el retardo asociado a la señal transmitida por dicho usuario es $\tau_l = 0$ (por lo que el receptor está perfectamente enganchado). Asimismo, supondremos que las señales transmitidas por los otros $L - 1$ usuarios se reciben con igual potencia, y que los retardos asociados a dichas señales son múltiplos enteros del periodo de chip. Dado que no hay ninguna razón a priori para atribuir mayor probabilidad a un determinado retardo, supondremos que todos son independientes y con distribución uniforme en $\{0, T/N, \dots, (N-1)T/N\}$ ²⁶. Por tanto, los retardos discretos correspondientes se distribuyen uniformemente en $\{0, 1, \dots, N-1\}$. Finalmente, supondremos que los símbolos transmitidos por cada usuario se escogen con igual probabilidad en la constelación $\{-\sqrt{E_s}, +\sqrt{E_s}\}$, son blancos y mutuamente ortogonales con los de otros usuarios. Por tanto, a la vista de (8.169), el valor esperado de la interferencia multiacceso

²⁶Obsérvese que, dada la cicloestacionariedad con periodo T de la señal transmitida, basta con considerar retardos en el intervalo $[0, T)$.

(MAI) es 0 y su varianza:

$$\begin{aligned} \text{Var}\{\text{MAI}_l\} &= \frac{1}{N} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq l}}^{L-1} \left(\sum_{k=0}^{N-1} E\{|A_i[n]|^2\} |r_{x_l, x_i}[k]|^2 + \sum_{k=1}^{N-1} E\{|A_i[n-1]|^2\} |r_{x_l, x_i}[N-k]|^2 \right) \\ &= \frac{E_s}{N} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq l}}^{L-1} \sum_{k=-N+1}^{N-1} |r_{x_l, x_i}[k]|^2 \end{aligned} \quad (8.172)$$

Si el número de usuarios L es grande, de acuerdo con el Teorema Central del Límite (Apartado 3.2.8), es razonable modelar la MAI como una variable aleatoria gausiana de media nula y varianza $\text{Var}\{\text{MAI}_l\}$ ²⁷. Si el canal introduce ruido blanco gausiano con densidad espectral de potencia $N_0/2$ W/Hz y las secuencias de código están normalizadas en energía, podemos escribir la BER para el usuario l -ésimo como

$$BER_{el} = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{\frac{N_0}{2} + \text{Var}\{\text{MAI}_l\}}}\right) \quad (8.173)$$

Conviene recordar que la MAI depende de la energía media por símbolo E_s . De hecho, para E_s/N_0 grandes, la MAI suele dominar al término de ruido. En cualquier caso, desde el punto de vista del diseño de secuencias, es evidente que para minimizar la probabilidad de error se debe minimizar la varianza de la MAI. Por otra parte, en la mayor parte de los sistemas CDMA de nada sirve diseñar las secuencias para que un usuario en particular tenga un bajo nivel de MAI, si ello implica empeorar el rendimiento de otros usuarios. Es por ello que un criterio de diseño comúnmente aceptado es el de minimizar la varianza de la MAI promediada sobre todos los usuarios, esto es,

$$\overline{\text{Var}\{\text{MAI}\}} \doteq \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \text{Var}\{\text{MAI}_l\} = \frac{E_s}{LN} \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq l}}^{L-1} \sum_{k=-N+1}^{N-1} |r_{x_i, x_l}[k]|^2 \quad (8.174)$$

Generalmente, se suele imponer alguna condición adicional sobre la función de ambigüedad temporal aperiódica total promediada sobre todas las secuencias del conjunto (suponiendo que están normalizadas en energía):

$$\frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{\substack{k=-N+1 \\ k \neq 0}}^{N-1} |r_{x_l}[k]|^2 \quad (8.175)$$

Recuérdese que la función de ambigüedad temporal aperiódica fuera del cero tiene importancia en las prestaciones de los receptores tipo RAKE y, en general, en todos los sistemas que requieran sincronizar el código.

²⁷No obstante, este modelo adolece de ciertas imperfecciones para relaciones señal a ruido grandes que pueden conducir a conclusiones erróneas. Véase el apartado siguiente.

Excepto en unos pocos casos, la solución a la minimización de $\overline{\text{Var}\{\text{MAI}\}}$ sujeta a alguna condición sobre (8.175) se ha resuelto con procedimientos numéricos de variada naturaleza, no existiendo métodos que ofrezcan soluciones cerradas satisfactorias, por lo que no profundizaremos más en esta dirección. Sí es interesante señalar que para el caso síncrono, en el que la dificultad del problema se reduce considerablemente, existen soluciones muy sencillas. Suponiendo que las señales recibidas de todos los usuarios están perfectamente sincronizadas, la varianza media de la MAI se obtiene promediando únicamente sobre los símbolos de información transmitidos y sobre todas las combinaciones de usuarios, pero no sobre los desplazamientos de la correlación; en otras palabras, basta con eliminar el promediado sobre k y fijar $k = 0$ en (8.174). Como sabemos, siempre que el número de usuarios L sea menor o igual que la longitud de las secuencias N , es posible conseguir que la MAI en el caso síncrono se haga cero; por ejemplo, las secuencias de Walsh-Hadamard alcanzan este objetivo. Por esta razón, nos centraremos en el caso $L > N$, que suele conocerse como *sobresaturado*. Para este caso, la cota de Welch es

$$\frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq l}}^{L-1} |r_{x_i, x_l}[0]|^2 \geq \frac{L-N}{N} \quad (8.176)$$

Véase el Problema P8.20. Curiosamente, es muy fácil producir conjuntos de secuencias que satisfagan la cota de Welch; dichos conjuntos reciben el calificativo de WBE (“*Welch-Bound-Equality*”, igualdad en la cota de Welch). Sea \mathbf{X} una matriz $L \times N$ tal que sus columnas son ortogonales y con energía L/N ; entonces las secuencias construidas a partir de las L filas de \mathbf{X} constituyen un conjunto WBE. A la inversa, si se dispone de un conjunto WBE con L secuencias de longitud N , entonces la matriz $L \times N$ cuyas filas son dichas secuencias es tal que sus columnas son ortogonales con energía L/N . Este importante resultado se demuestra en el Problema P8.20.

A lo largo de este apartado hemos revisado diferentes mecanismos para la generación de secuencias de código. Evidentemente, existen muchísimos más, generalmente buscando satisfacer alguna propiedad de interés. Por ejemplo, dividiendo el código en subconjuntos se puede pensar en obtener una función de ambigüedad aperiódica reducida (o cero) entre secuencias pertenecientes a un mismo subconjunto, admitiendo una correlación más alta con secuencias de otros subconjuntos. Otra posibilidad consiste en suponer un entorno cuasi-síncrono, en el que los receptores son capaces de alcanzar una sincronización imperfecta, lo que implica que el error en la identificación del canal está limitado en valor absoluto a un número determinado de muestras K . En este último caso, el objetivo del diseño del código es conseguir valores bajos de correlación aperiódica dentro de la ventana $-K \leq k \leq K$, siendo irrelevantes los valores que se obtienen para $k > K$.

No obstante, excepto en el caso síncrono con un número de usuarios igual o inferior a la longitud del código, la MAI es un hecho inevitable. Es natural preguntarse entonces si existe alguna forma de combatirla en el receptor, del mismo modo que el detector de Viterbi o los igualadores mitigan los efectos de la ISI (Capítulo 6). La respuesta la encontraremos en el siguiente apartado, bajo el concepto de *detección multiusuario*.

8.3.3. Detección Multiusuario

Nuestro objetivo en este apartado es el de mostrar las ventajas que comporta el empleo de un receptor que demodule simultáneamente la señal de todos los usuarios en el sistema, con el objeto de reducir la interferencia sobre la señal deseada. Por esta razón, nos concentraremos exclusivamente en sistemas síncronos con dos usuarios que denotaremos por 0 y 1, aunque indicaremos cómo extender los esquemas a una situación más realista en la que más usuarios comparten el medio. De hecho, aunque es obvio que para $N \geq 2$ se pueden diseñar códigos ortogonales, supondremos que las secuencias $x_0[m]$ y $x_1[m]$ no lo son, por ser ésta la situación de interés práctico. Por la razón arriba esgrimida, en este apartado consideraremos un sistema en banda base, lo que implica que todas las secuencias que manejaremos, incluidas las de código, son reales. Además, supondremos que todas las secuencias de código están normalizadas en energía, es decir, $r_{x_l}[0] = 1$, para todo l .

Recordemos que en el caso síncrono el efecto de la MAI viene recogido a través de la correlación en el origen $r_{x_1,x_0}[0]$ (en este caso la correlación periódica y la aperiódica coinciden). Para simplificar la notación, realizaremos la asignación $\rho \doteq r_{x_1,x_0}[0] = r_{x_0,x_1}[0]$. Además, supondremos que ambos usuarios emplean una constelación binaria antipodal $\{-\sqrt{E_s}, +\sqrt{E_s}\}$ y que el ruido es blanco y gausiano con densidad espectral de potencia $N_0/2$ W/Hz. Finalmente, realizaremos la suposición de que las ganancias de los canales correspondientes a las señales transmitidas por ambos usuarios, α_0 y α_1 , son positivas (si alguna de las ganancias o ambas son negativas es fácil transformar el problema para restablecer la situación aquí considerada).

Consideraremos en primer lugar el receptor basado en el filtro adaptado, que se ilustra en la Figura 8.39. En este caso, siguiendo los desarrollos de los apartados precedentes, encontramos que

$$q_0[n] = \alpha_0 A_0[n] + \alpha_1 \rho A_1[n] + z_0[n] \quad (8.177)$$

donde $z_0[n]$ es ruido gausiano de varianza $N_0/2$, tal como se demuestra en el Problema P8.22.

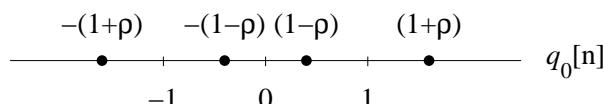


Figura 8.41. Posibles valores recibidos en ausencia de ruido a la salida del filtro adaptado del usuario 0, cuando $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$, $\rho = 0,6$ y $E_s = 1$.

Teniendo en cuenta las constelaciones empleadas, fácilmente podemos ver que la MAI puede tomar dos valores, $\pm \alpha_1 \rho \sqrt{E_s}$. Como el umbral de decisión se encuentra en el cero, la MAI causará complicaciones cuando tenga el signo contrario al símbolo transmitido. La situación sin ruido se representa en la Figura 8.41 para $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$, $\rho = 0,6$ y $E_s = 1$. Por simetría, el cálculo de la BER se puede efectuar considerando que $A_0[n] = \sqrt{E_s}$. En este caso, se tendrá un error cuando $\alpha_0 \sqrt{E_s} + \alpha_1 \rho A_1[n] + z_0[n] < 0$. Por tanto, la BER

para el usuario 0 será

$$BER_{e_0} = \frac{1}{2}Q\left(\frac{(\alpha_0 - \alpha_1\rho)\sqrt{2E_s}}{\sqrt{N_0}}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\frac{(\alpha_0 + \alpha_1\rho)\sqrt{2E_s}}{\sqrt{N_0}}\right) \quad (8.178)$$

donde el primer término, que se corresponde con el evento a distancia mínima de la frontera de decisión, será dominante en la suma. Una observación fundamental es que la probabilidad de error no sólo depende del nivel de correlación ρ , sino también de los valores de α_0 y α_1 . Por consiguiente, de poco servirá tener un valor de correlación ρ muy bajo si α_1 es grande en comparación con α_0 . Esta situación recibe el nombre de efecto *cerca-lejos* porque se da cuando el usuario deseado está más lejos del receptor (estación base) que el interferente. De hecho, el lector puede verificar que si α_1 es tal que $\alpha_1 > \alpha_0/\rho$, entonces en ausencia de ruido la probabilidad de error para el usuario 0 es 1/2. El efecto cerca-lejos se puede mitigar controlando la potencia con que transmite cada usuario, de modo que todos se reciben con potencias similares; ello tiende a ahorrar potencia y a alargar la duración de la batería de los terminales en entornos celulares. No obstante, los algoritmos de control de potencia se sitúan fuera del ámbito de este texto; aquí examinaremos otro tipo de soluciones basadas en el procesado de las señales recibidas.

Para entender qué tipo de soluciones perseguimos, piénsese en la BER para el usuario 1 cuando $\alpha_1 > \alpha_0$; en este caso, replicando el desarrollo que lleva a (8.178), es inmediato ver que el numerador del argumento de la función $Q(\cdot)$ será mayor que para el usuario 0, por lo que la BER será menor. Ello sugiere la siguiente estrategia en el receptor: se decodifica la señal correspondiente al usuario 1, obteniéndose $\hat{A}_1[n]$, que se usa para estimar la MAI²⁸ y sustraerla de $q_0[n]$, de modo que la entrada al decisor es $q_0[n] - \rho\alpha_1\hat{A}_1[n]$. Por tanto, en una situación en la que predomina el efecto cerca-lejos, un decisor basado en cancelaciones sucesivas de la interferencia podrá ser efectivo. El lector habrá encontrado aquí una evidente similitud con la estrategia empleada por los igualadores con decisiones realimentadas (Apartado 6.4): mientras allí se cancela la ISI, aquí se elimina la MAI. Obsérvese que para poder implementar la idea que acabamos de describir, necesitamos haber demodulado la señal del usuario 1, incluso aunque sólo estuviésemos interesados en extraer la información transmitida por el usuario 0. Esta es la esencia de la detección multiusuario.

Podemos generalizar fácilmente el análisis de las prestaciones correspondientes al receptor con filtro adaptado a una situación con L usuarios. En este caso, la Ecuación (8.178) se transforma en

$$P_{e_0} = \frac{1}{2^{L-1}} \sum_{i_1=-1,+1} \cdots \sum_{i_k=-1,+1} \cdots \sum_{i_{L-1}=-1,+1} Q\left(\frac{(\alpha_0 + \sum_{k=1}^{L-1} i_k \alpha_k r_{x_k, x_0})\sqrt{2E_s}}{\sqrt{N_0}}\right) \quad (8.179)$$

Ahora la condición para que la probabilidad de error en ausencia de ruido sea nula es

$$\alpha_0 > \sum_{k=1}^{L-1} \alpha_k |r_{x_k, x_0}[k]| \quad (8.180)$$

²⁸Suponiendo que α_1 es conocido.

que se conoce como *condición de ojo abierto* (véase Apartado 6.1.2). Es interesante ver que aunque el número de usuarios sea muy grande, es posible que la probabilidad de error sea 0 en ausencia de ruido. Esta consideración se debe contrastar con la aproximación realizada en (8.173) para calcular la probabilidad de error empleando el teorema central del límite: allí aproximábamos la MAI por una variable aleatoria gausiana, lo que implica que, incluso sin ruido, la aproximación arroja una probabilidad de error que nunca puede ser nula. Este razonamiento no hace sino apuntar a que la aproximación en (8.173) no es fiable si la relación señal a ruido es alta. De hecho, mientras la MAI siempre está acotada, esto no ocurre con la aproximación gausiana. A pesar de ello, en el contexto en que la usamos, la aproximación (8.173) presenta la ventaja de ser mucho más tratable matemáticamente que (8.179).

Como hemos visto, el hecho de que tanto $q_0[n]$ como $q_1[n]$ contengan información sobre $A_0[n]$ y $A_1[n]$ hace que el detector basado en el filtro adaptado no sea óptimo. Podríamos pensar entonces en tomar decisiones conjuntas sobre el vector $\mathbf{A}[n] \doteq (A_0[n], A_1[n])^T$ tras haber observado el vector $\mathbf{q}[n] \doteq (q_0[n], q_1[n])^T$. En este caso, si $\mathbf{z}[n] \doteq (z_0[n], z_1[n])^T$ denota el vector de ruido, tendríamos el siguiente modelo

$$\mathbf{q}[n] = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \rho \\ \alpha_0 \rho & \alpha_1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{A}[n] + \mathbf{z}[n] \quad (8.181)$$

sobre el que podríamos emplear la teoría expuesta en el Capítulo 4. Desgraciadamente, el modelo en (8.181) no es del todo adecuado: las componentes del vector de ruido, aunque gausianas y de media cero, no son independientes, por lo que no podemos aplicar sin más un decisor basado en minimizar la distancia euclídea. En efecto, la matriz de covarianza del ruido (Problema P8.22) es

$$\text{E}\{\mathbf{z}[n]\mathbf{z}^T[n]\} = \frac{N_0}{2} \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \quad (8.182)$$

cuyo carácter no diagonal es consecuencia de la falta de ortogonalidad entre $x_0[m]$ y $x_1[m]$. Para formular el problema dentro del marco del Capítulo 4 necesitamos que las componentes de ruido sean independientes e idénticamente distribuidas. Hay varias formas de conseguir este objetivo: podemos realizar una transformación de coordenadas sobre $\mathbf{q}[n]$ tal que el ruido tenga las propiedades deseadas²⁹; sin embargo, aquí optaremos por proyectar la señal recibida empleando una base ortonormal. El detector resultante, que recibe el nombre de *detector conjunto ML óptimo* se recoge en la Figura 8.42.

Para conseguir que el ruido tenga componentes independientes, buscamos una secuencia ensanchadora $x'_1[m]$ de energía unidad y ortogonal a $x_0[m]$. En el receptor proyectamos sobre las secuencias $x_0[m]$ y $x'_1[m]$, obteniendo un nuevo vector de observaciones $\mathbf{q}'[n]$ que contiene información sobre $\mathbf{A}[n]$. El hecho de que la transformación de $\mathbf{q}[n]$ a $\mathbf{q}'[n]$ sea invertible garantiza que $\mathbf{q}'[n]$ es un *estadístico suficiente*, esto es, que contiene información suficiente como para tomar una decisión óptima.

²⁹Esta operación, que se conoce como blanqueado, se basa en efectuar la descomposición en autovectores de la matriz de covarianza.

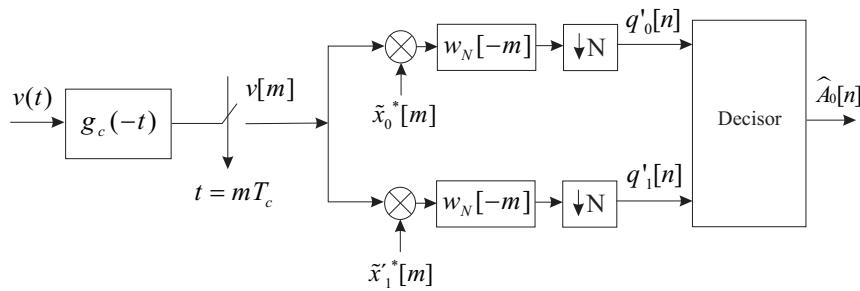


Figura 8.42. Diagrama de bloques de un detector conjunto ML.

Dadas $x_0[m]$ y $x_1[m]$, podemos construir una base ortonormal sin más que aplicar el procedimiento de Gram-Schmidt (Apéndice 4.A)³⁰. La primera señal de la nueva base $x'_0[m]$ es simplemente $x_0[m]$; mientras que la segunda se obtiene del siguiente modo

$$x'_1[m] = \frac{x_1[m] - \rho x_0[m]}{\sqrt{1 - \rho^2}} \quad (8.183)$$

Con esta base es posible comprobar (Problema P8.22) que el ruido $z'[n]$ presente en $\mathbf{q}'[n]$ tendrá componentes gausianas independientes, con media cero y varianza $N_0/2$, por lo que se cumple el objetivo fijado. Ahora resta escribir la componente de señal en términos de la nueva base; en ausencia de ruido, la señal $v[m]$ (véase Figura 8.39), para $nN \leq m \leq nN + N - 1$, se puede expresar como

$$v[m] = \alpha_0 A_0[n] \tilde{x}_0[m] + \alpha_1 A_1[n] \tilde{x}_1[m], \quad nN \leq m \leq nN + N - 1 \quad (8.184)$$

de donde se deduce que, en ausencia de ruido,

$$\begin{aligned} q'_0[n] &= \sum_{m=0}^{N-1} (\alpha_0 A_0[n] x_0[m] + \alpha_1 A_1[n] x_1[m]) (x'_0[m])^* \\ &= \alpha_0 A_0[n] + \alpha_1 \rho A_1[n] \end{aligned} \quad (8.185)$$

$$\begin{aligned} q'_1[n] &= \sum_{m=0}^{N-1} (\alpha_0 A_0[n] x_0[m] + \alpha_1 A_1[n] x_1[m]) (x'_1[m])^* \\ &= \alpha_1 A_1[n] \sqrt{1 - \rho^2} \end{aligned} \quad (8.186)$$

El nuevo modelo es, por tanto,

$$\mathbf{q}'[n] = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \rho \\ 0 & \alpha_1 \sqrt{1 - \rho^2} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{A}[n] + \mathbf{z}'[n] \quad (8.187)$$

³⁰Aunque el procedimiento allí descrito se aplica a señales en tiempo continuo, la extensión a señales en tiempo discreto es inmediata.

que ahora cuenta con la ventaja de que el ruido es circularmente simétrico en el plano $(q'_0[n], q'_1[n])$ por lo que el decisor óptimo según el criterio ML simplemente elegirá aquel vector $\mathbf{A}[n]$ tal que $\|\mathbf{q}'[n] - \mathbf{M}_\rho \mathbf{A}[n]\|^2$ es mínimo, siendo \mathbf{M}_ρ la matriz que multiplica a $\mathbf{A}[n]$ en (8.187). En la Figura 8.43(a) se representa el vector recibido asociado a cada uno de los cuatro posibles valores de $\mathbf{A}[n]$ (etiquetados con los valores binarios asociados), así como las regiones de decisión en el plano $(q'_0[n], q'_1[n])$ cuando $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$ y $\rho = 0,6$. La Figura 8.43(b) transforma la representación al plano $(q_0[n], q_1[n])$. El lector puede comprobar cómo en este caso las fronteras de decisión no son las que resultarían si se utilizase la regla de decisiones basadas en distancia euclídea mínima: la razón es que en el plano $(q_0[n], q_1[n])$ el ruido no tiene componentes independientes.

Para calcular la BER , podemos usar la misma metodología del Apartado 4.4.2, trabajando con las probabilidades de acierto. Obsérvese que la simetría presente en la Figura 8.43(a) obliga a calcular únicamente dos probabilidades de acierto: las asociadas a los vectores $\mathbf{A}[n] = [-\sqrt{E_s}, \sqrt{E_s}]^T$ y $\mathbf{A}[n] = [\sqrt{E_s}, \sqrt{E_s}]^T$. Una alternativa, especialmente interesante en detectores multidimensionales, es recurrir a cotas como la de la unión o aproximaciones basadas en los vectores más cercanos.

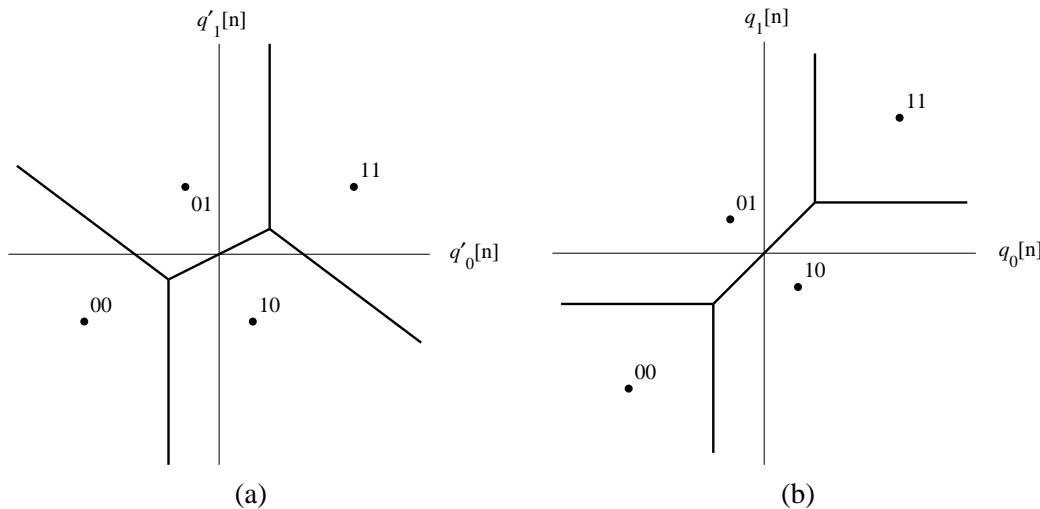


Figura 8.43. Regiones de decisión para el detector conjunto óptimo ($\alpha_0 = \alpha_1 = 1; \rho = 0,6$): (a) En el plano $(q'_0[n], q'_1[n])$; (b) en el plano $(q_0[n], q_1[n])$.

Parecería que el detector conjunto ML conduce a minimizar la probabilidad de error, pero ¿qué probabilidad de error? Un instante de reflexión nos debe llevar a pensar que este detector minimiza la probabilidad de error sobre la decisión conjunta, es decir, si $\mathbf{A}[n]$ denota el vector con los símbolos transmitidos en un instante dado y $\hat{\mathbf{A}}[n]$ es la decisión, el detector conjunto ML minimiza $Pr(\hat{\mathbf{A}}[n] \neq \mathbf{A}[n])$. Pero también podemos pensar en que si estamos interesados en decodificar los símbolos del usuario, digamos, 0, entonces querremos minimizar la probabilidad de error en las decisiones relativas a dicho usuario, esto es, $Pr(\hat{A}_0[n] \neq A_0[n])$, utilizando el decisor óptimo para el usuario cuestión.

Es fácil caer en la tentación de pensar que ambos detectores van a producir el mismo resultado, pero no es así. El detector óptimo ML para el usuario 0 será aquel que maximice la probabilidad de observar la secuencia recibida $v[n]$ condicionada a la transmisión del símbolo $a_0[n]$; esto quiere decir que $A_1[n]$ debe ser eliminado marginalizando con respecto a su distribución. Desarrollemos esta idea: para empezar, las únicas muestras de $v[n]$ que dependen de $A_0[n]$ y $A_1[n]$ son aquellas tales que $nN \leq m \leq nN + N - 1$, por lo que vamos a agrupar dichas muestras en el vector $\mathbf{v}[n]$. Por otra parte, sean \mathbf{x}_0 y \mathbf{x}_1 los vectores que contienen las muestras de las secuencias ensanchadoras $x_0[m]$ y $x_1[m]$. Teniendo en cuenta que el ruido presente en $v[n]$ es blanco y con varianza $N_0/2$, podemos concluir que, condicionado a $a_0[n]$ y $a_1[n]$, el vector $\mathbf{v}[n]$ tendrá una distribución conjuntamente gaussiana de media $\alpha_0 a_0[n] \mathbf{x}_0 + \alpha_1 a_1[n] \mathbf{x}_1$ y matriz de covarianza $(N_0/2) \mathbf{I}_{N \times N}$. Por tanto, podemos escribir

$$f_{\mathbf{v}[n]|\mathbf{A}[n]}(\mathbf{v}[n]|\mathbf{a}[n]) = \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} \exp(-\|\mathbf{v}[n] - \alpha_0 a_0[n] \mathbf{x}_0 - \alpha_1 a_1[n] \mathbf{x}_1\|^2/N_0) \quad (8.188)$$

Ahora, suponiendo que los dos valores de $A_1[n]$ son equiprobables, tenemos que la distribución de $\mathbf{v}[n]$ condicionada solamente a $a_0[n]$ es

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{v}[n]|a_0[n]}(\mathbf{v}[n]|a_0[n]) &= \frac{1}{2} f_{\mathbf{v}[n]|\mathbf{A}[n]}(\mathbf{v}[n]|a_0[n], A_1[n] = -\sqrt{E_s}) \\ &\quad + \frac{1}{2} f_{\mathbf{v}[n]|\mathbf{A}[n]}(\mathbf{v}[n]|a_0[n], A_1[n] = +\sqrt{E_s}) \\ &= \frac{1}{2(\pi N_0)^{N/2}} \exp\left(-\|\mathbf{v}[n] - \alpha_0 a_0[n] \mathbf{x}_0 + \alpha_1 \sqrt{E_s} \mathbf{x}_1\|^2/N_0\right) \\ &\quad + \frac{1}{2(\pi N_0)^{N/2}} \exp\left(-\|\mathbf{v}[n] - \alpha_0 a_0[n] \mathbf{x}_0 - \alpha_1 \sqrt{E_s} \mathbf{x}_1\|^2/N_0\right) \end{aligned} \quad (8.189)$$

Desarrollando las normas al cuadrado y eliminando aquellos términos que no dependen de $a_0[n]$, podemos ver que el detector ML óptimo para el usuario 0 elige aquel $\hat{A}_0[n]$ que maximiza la siguiente función

$$\frac{2q_0[n]\alpha_0\hat{A}_0[n]}{N_0} + \log \cosh\left(\frac{2\alpha_1\sqrt{E_s}q_1[n] - 2\rho\alpha_0\alpha_1\sqrt{E_s}\hat{A}_0[n]}{N_0}\right) \quad (8.190)$$

Equivalentemente, la decisión será $\hat{A}[n] = +\sqrt{E_s}$ si

$$\frac{4\alpha_0\sqrt{E_s}q_0[n]}{N_0} - \log \frac{\cosh\left(\frac{2\alpha_1\sqrt{E_s}q_1[n] + 2\rho\alpha_0\alpha_1 E_s}{N_0}\right)}{\cosh\left(\frac{2\alpha_1\sqrt{E_s}q_1[n] - 2\rho\alpha_0\alpha_1 E_s}{N_0}\right)} > 0 \quad (8.191)$$

y $\hat{A}[n] = -\sqrt{E_s}$ en caso contrario.

En la Figura 8.44(a) se ilustran las regiones de decisión en el plano $(q_0[n], q_1[n])$ que resultan con el detector ML óptimo del usuario 0, para el caso $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$ y $\rho = 0,6$

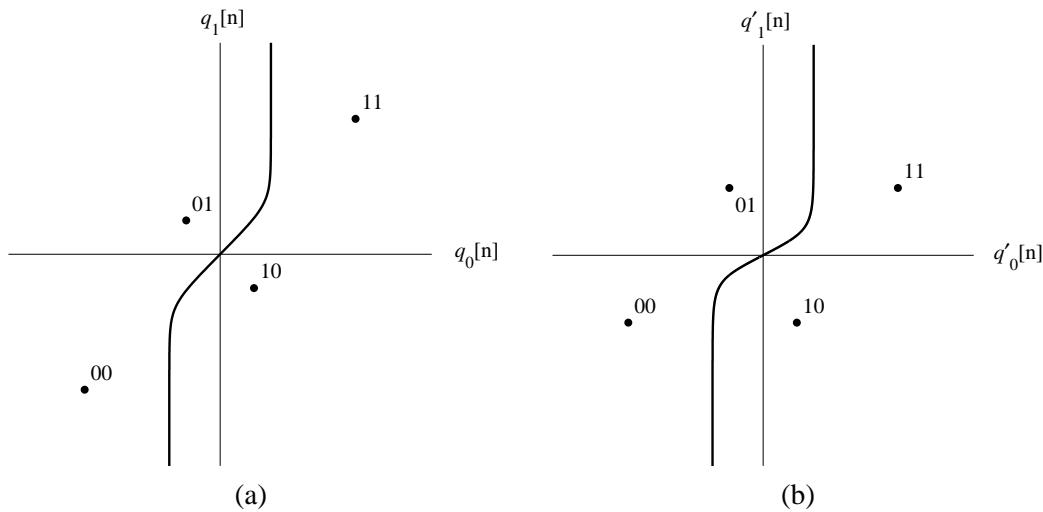


Figura 8.44. Regiones de decisión para el detector óptimo correspondiente al usuario 0 ($\alpha_0 = \alpha_1 = 1$; $\rho = 0,6$; $E_s/N_0 = 3\text{dB}$): (a) En el plano $(q_0[n], q_1[n])$; (b) en el plano $(q'_0[n], q'_1[n])$.

y una relación E_s/N_0 de 3 dB. La Figura 8.44(b) transforma las regiones de decisión al plano $(q'_0[n], q'_1[n])$ para compararlas con las que se obtienen con el detector conjunto (Figura 8.43(a)). Como se ve, el resultado es bastante parecido al obtenido con el detector conjunto, y tanto más cuanto mayor es la relación E_s/N_0 . De hecho, dadas las dificultades que entraña el análisis de la probabilidad de error del detector óptimo para un usuario, la probabilidad de error del detector conjunto sirve como una cota superior, que suele ser muy ajustada. Por ejemplo, a partir de $E_s/N_0 = 15$ dB las dos regiones de decisión para el ejemplo analizado en las figuras son prácticamente indistinguibles.

El último receptor multiusuario que estudiaremos, denominado *detector decorrelacionador*, busca precisamente eliminar la correlación existente entre las señales recibidas a la salida de cada filtro adaptado. De acuerdo con el modelo en (8.181), las componentes del vector $\mathbf{q}[n]$ están correlacionadas a través la matriz \mathbf{M}_ρ ; por tanto, para separar (decorrelacionar) las contribuciones de cada uno de los usuarios, basta con multiplicar $\mathbf{q}[n]$ por la inversa de dicha matriz (suponiendo que ésta exista), obteniéndose en este caso un nuevo vector $\mathbf{q}''[n]$ que responde al modelo siguiente:

$$\begin{aligned}\mathbf{q}''[n] &= \mathbf{M}_\rho^{-1}(\mathbf{M}_\rho \mathbf{A}[n] + \mathbf{z}[n]) \\ &= \mathbf{A}[n] + \mathbf{z}''[n]\end{aligned}\quad (8.192)$$

observándose claramente cómo hemos aislado las contribuciones de cada símbolo, de modo que, por ejemplo, $q''_0[n]$ depende de $A_0[n]$, pero no de $A_i[n]$, $i = 1, \dots, L - 1$. Como consecuencia de esto, el decisor simplemente decidirá que $A_i[n] = +\sqrt{E_s}$ si $q''_i[n] > 0$, y $A_i[n] = -\sqrt{E_s}$ en caso contrario.

Podría parecer que de este modo tan sencillo hemos conseguido construir un decisor

óptimo, gracias a la decorrelación, pero desgraciadamente no es así. La razón es que aunque hemos eliminado la MAI, el ruido $z''[n]$ presente en $q''[n]$ sigue sin tener componentes independientes (recordemos que $z[n]$ tampoco las tenía)³¹. En efecto, la matriz de covarianza del ruido (Problema P8.22) es

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{z''[n]z''[n]^T\} &= \frac{N_0}{2} \mathbf{M}_\rho^{-1} \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \mathbf{M}_\rho^{-1} \\ &= \frac{N_0}{2(1-\rho^2)} \begin{pmatrix} 1/\alpha_0^2 & -\rho/\alpha_1^2 \\ -\rho/\alpha_0^2 & 1/\alpha_1^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8.193)$$

y, por tanto, no es diagonal a no ser que $\rho = 0$.

Para calcular la BER del i -ésimo usuario, simplemente necesitamos conocer el elemento (i, i) -ésimo de la matriz de covarianza del ruido, ya que se corresponde con la varianza de $z_i''[n]$. Por tanto, la BER para el usuario i -ésimo es

$$BER_{e_i} = Q\left(\frac{\sqrt{E_s}}{\sqrt{\text{Var}\{z_i''[n]\}}}\right) \quad (8.194)$$

Por ejemplo, en el caso de 2 usuarios, la BER para el usuario 0 es, usando (8.193) y (8.194),

$$BER_{e_0} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_s(1-\rho^2)\alpha_0^2}{N_0}}\right) \quad (8.195)$$

Comparando la expresión de la probabilidad de error del receptor con filtro adaptado (8.178) con la correspondiente al decorrelacionador (8.195), vemos que si α_1 es pequeño es preferible emplear el filtro adaptado, mientras que el decorrelacionador es conveniente cuando la MAI es considerable. Existen otros detectores en los que no profundizaremos aquí, como la cancelación sucesiva de interferencias, o los detectores de mínimo error cuadrático medio (MMSE). Estos últimos son objeto del Problema P8.23.

8.4. LECTURAS ADICIONALES

El texto de Goldsmith [34] contiene un interesante capítulo sobre OFDM, incluyendo una formulación matricial que permite emplear algunas propiedades interesantes de las matrices circulares. Para un tratamiento más amplio de la OFDM se recomienda [72] que, además, establece interesantes conexiones con algunos sistemas OFDM empleados en estándares. En cambio, el libro de Barry, Lee y Messerschmitt [5] aborda sólo superficialmente las modulaciones multiportadora. Otros textos íntegramente dedicados a OFDM son [4], [60] y [38]. Un excelente libro, que aborda numerosos aspectos de la implementación práctica de sistemas OFDM, incluyendo la sincronización, es [24]. La modulación conocida como Multitono Discreta (DMT, “Discrete MultiTone”) es funcionalmente equivalente

³¹El paralelismo con lo que sucede en los igualadores ZF (Apartado 6.3.1) es evidente: intentando cancelar la ISI podemos acabar aumentando la potencia de ruido.

a la OFDM y se emplea en bucles de abonado digitales asimétricos (ADSL, “*Asymmetric Digital Subscriber Loop*”), donde el carácter punto a punto de la comunicación permite mejoras adicionales a las estudiadas aquí, como la existencia de algoritmos para la reducción de la potencia de pico o de asignación de bits a portadoras (carga de bits). Un buen libro introductorio sobre el tema es [79].

Desde la publicación del algoritmo básico de la FFT, por Cooley y Tukey [20], pensado para un número de puntos que sea potencia de dos, se han propuesto muchos otros algoritmos rápidos para la DFT, llegando a ser un tema muy activo de investigación durante los años 70 y 80. El libro de Oppenheim y Schafer [54] ofrece una explicación excelente de los fundamentos de algunos de los algoritmos más populares, incluyendo detalles de implementación. Otras buenas fuentes de información son los libros de Burrus y Parks [14], Blahut [8] y Brigham [13].

Para la parte de espectro ensanchado, nos hemos guiado fundamentalmente por el libro de Proakis [61], aunque para el apartado de diseño de secuencias ensanchadoras hemos empleado el excelente tutorial de Sarwate y Pursley [70], completado con otros muchos artículos más recientes. Para el apartado de detección multiusuario nos hemos basado de manera especial en el libro de Verdú [89]. El tratamiento de las secuencias m y sus propiedades se encuentra razonablemente bien explicado en [91], donde también se analizan problemas suscitados por el uso de espectro ensanchado en redes celulares.

Clásicos que todavía siguen siendo de recomendada lectura son el libro de Dixon [23] y, especialmente, los tres volúmenes de Simon et al. [74]. Los recientes textos de Goldsmith [34] y Schulze y Lüders [72] también contienen interesantes capítulos sobre modulaciones de espectro ensanchado.

PROBLEMAS

P8.1 Suponga un modulación multiportadora en la que las funciones $\phi_k(t)$, $k = 0, \dots, N-1$, son de la forma:

$$\phi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T_0}} e^{j \frac{2\pi k t}{T}} \cdot w_{T_0}(t)$$

cuya duración T_0 es tal que $T < T_0 < 2T$.

- 1.1. Demuestre que dichas funciones no son ortogonales.
- 1.2. Siguiendo la misma metodología que en las ecuaciones (8.11) y (8.12), demuestre que, aunque los índices se extiendan desde $k = -\infty$ hasta $k = \infty$ (esto es, infinitas portadoras), el espectro ya no es plano.

P8.2 En este problema se demuestra (8.34). Considere una modulación OFDM en tiempo discreto con N portadoras y sin extensión cíclica, en que las secuencias de símbolos $\{A_k[n]\}$, $k = 0, \dots, N-1$ son blancas, mutuamente incorrelacionadas y equienérgicas, con energía E_s .

- 2.1. Demuestre que el proceso discreto $s[m]$ definido en (8.15) es blanco con densidad espectral de potencia

$$S_s(e^{j\omega}) = \frac{NE_s}{T} \quad (8.196)$$

- 2.2. Recordando que la señal transmitida $s_r(t)$ se obtiene tras modular en amplitud el pulso $g(t)$ dado por (8.20) con la secuencia $s[m]$, utilice (3.297) para demostrar (8.34). Tenga en cuenta que el periodo usado en dicha modulación es T/N seg.

- P8.3 La periodicidad espectral intrínseca a las secuencias discretas permite construir de un modo muy simple un sistema OFDM discreto con redundancia, que exploraremos en este problema. Sea un sistema OFDM con $N = 16$ portadoras en el que el filtro $g(t)$ es

$$g(t) = \text{sinc}\left(\frac{3Nt}{T}\right) \quad (8.197)$$

En recepción se emplea un esquema como el de la Figura 8.12(b), muestreando con tasa $3N/T \text{seg}^{-1}$ e implementando una DFT de $3N$ puntos. El canal es gausiano, con ruido blanco.

- 3.1. Represente el espectro de las funciones $\hat{\phi}_0(t)$ y $\hat{\phi}_9(t)$ y compárela con el dibujado en la Figura 8.10.
- 3.2. Calcule el ancho de banda ocupado por la modulación.
- 3.3. Discuta cómo se deben combinar las muestras a la salida del conversor paralelo/serie del receptor para tomar una decisión sobre cada símbolo enviado según el criterio de máxima verosimilitud. Tenga presente que, por cada N símbolos enviados, en el receptor tenemos $3N$ observaciones.
- 3.4. Discuta las ventajas del esquema propuesto para su utilización en canales con propagación multirayecto, especialmente, aquellos con mínimos espectrales pronunciados.
- P8.4 Considere un sistema OFDM en tiempo discreto con N portadoras, prefijo cíclico de $M < N$ muestras y periodo de símbolo T . El canal discreto equivalente a periodo T/N es $d[m] = T/N(\delta[m] + 0,5\delta[m - N])$. Escriba la expresión de $p_{k,i}[n]$, $k, i = 0, \dots, N - 1$ y demuestre que en este caso se tiene tanto ISI como ICI.

- P8.5 Una de las ventajas de la utilización del prefijo cíclico en OFDM es que permite convertir el efecto del canal en *puramente multiplicativo*. Sin embargo, obliga a malgastar energía transmitiendo una señal que se “tira” en el receptor. Una alternativa es el relleno con ceros, porque reduce la potencia transmitida. En este problema se trata de encontrar la relación entre los métodos de prefijo cíclico y relleno con ceros.

La señal con extensión cíclica, $\tilde{s}^{(n)}[m]$, correspondiente al bloque n -ésimo es

$$\tilde{s}^{(n)}[m] = \begin{cases} s^{(n)}[m + N] & m = -M, \dots, -1 \\ s^{(n)}[m] & m = 0, \dots, N - 1 \end{cases}$$

donde $s^{(n)}[m]$ es la IDFT del bloque de símbolos.

La señal rellenada con ceros, $t_0^{(n)}[m]$, correspondiente al bloque n -ésimo es

$$t_0^{(n)}[m] = \begin{cases} 0 & m = -M, \dots, -1 \\ s^{(n)}[m] & m = 0, \dots, N-1 \end{cases}$$

La señal con prefijo cíclico $\tilde{s}^{(n)}[m]$ se transmite a través de un canal que no introduce ruido con respuesta al impulso $d[m]$ causal y de longitud $K+1$ muestras, es decir, $d[m] = 0$ si $m < 0$ o $m > K$, con K tal que $K \leq M$, recibiéndose la señal $\tilde{q}^{(n)}[m] = \tilde{s}^{(n)}[m] * d[m]$, a la que se elimina el prefijo, obteniéndose

$$q^{(n)}[m] = \begin{cases} \tilde{q}^{(n)}[m] & m = 0, \dots, N-1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La señal rellenada con ceros $t_0^{(n)}[m]$ se transmite a través del mismo canal, recibiéndose $r_0^{(n)}[m] = t_0^{(n)}[m] * d[m]$.

Demuestre que a partir de la secuencia $r_0^{(n)}[m]$ es posible obtener $q^{(n)}[m]$. Encuentre la relación existente entre ambas secuencias.

- P8.6 Un sistema emplea una modulación OFDM en tiempo discreto con una constelación QPSK y 64 portadoras, con un prefijo cíclico de 8 muestras. El canal discreto equivalente a periodo T/N , en el que el ruido se puede considerar despreciable, es $d[m] = \delta[m] - \beta\delta[m-1]$, $0 \leq \beta \leq 1$.

- 6.1. Represente en un diagrama de dispersión (Apartado 5.4.4) la señal que se tendría a la salida del conversor paralelo/serie del receptor.
- 6.2. Indique para qué valores de β la probabilidad de error sería 0.

- P8.7 Sea un sistema OFDM con sólo 4 portadoras y que emplea un prefijo cíclico de 2 muestras. La señal se transmite sobre un canal discreto equivalente (muestreado a periodo T/N) de la forma

$$d[m] = \delta[m] - 0,5\delta[m-1].$$

El ruido es aditivo, blanco y gausiano con densidad espectral de potencia $N_0/2$ W/Hz y la constelación empleada en todas las portadoras es idéntica. En recepción se utiliza un igualador ZF.

- 7.1. Determine en qué portadora habrá una mayor probabilidad de error de símbolo.
- 7.2. Calcule la probabilidad de error de símbolo media si en el modulador se emplea una constelación QPSK.

- P8.8 Una de las ventajas de las modulaciones multiportadora es su flexibilidad para asignar distinto número de bits a cada portadora, en función del estado del canal. Es la llamada *carga de bits*. Considere el sistema OFDM discreto del Problema P8.7. Se desea transmitir 8 bits por cada bloque OFDM, con una constelación M -PSK (con $M \in \{2, 4, 8, 16\}$) que puede ser diferente en cada portadora. La asignación de bits a símbolos es de tipo Gray. Si $P_{b,k}$, $k = 0, \dots, 3$, denota la probabilidad de error de bit en el subcanal k -ésimo, encuentre la asignación de símbolos a portadoras tal que

$$\max_{k=0, \dots, 3} P_{b,k}$$

es mínima, suponiendo que la relación señal a ruido es suficientemente grande como para justificar el uso de los símbolos a distancia mínima en el cálculo de las probabilidades de error.

- P8.9 Una alternativa al empleo de igualadores en el dominio de la DFT para modulaciones OFDM es la utilización de modulaciones diferenciales de fase. Suponga que se tiene un sistema OFDM con N portadoras y un prefijo cíclico suficientemente grande en comparación con la longitud de la respuesta al impulso del canal como para conseguir un efecto puramente multiplicativo en el dominio transformado. La modulación/demodulación empleada sobre cada portadora es una DQPSK (Apartado 7.1.3), de modo que si $\phi^{(n-1)}[k]$ es la fase del símbolo transmitido sobre la portadora k -ésima del $(n-1)$ -ésimo bloque de N muestras, entonces la fase de $\phi^{(n)}[k]$ se genera como

$$\phi^{(n)}[k] = \phi^{(n-1)}[k] + \Delta_{\phi,n}[k] \quad (8.198)$$

donde $\Delta_{\phi,n}[k]$ se escoge dentro del conjunto de fases $\{0, \pi/2, \pi, -\pi/2\}$ en función de la información a enviar. En el receptor, la decodificación se realiza diferencialmente.

- 9.1. Demuestre que, en ausencia de ruido, el sistema descrito no produce ningún error, independientemente de la respuesta del canal.
- 9.2. Compare las prestaciones obtenidas para el sistema DQPSK-OFDM propuesto con las de un sistema que emplee QPSK sobre cada portadora y un igualador ZF en el receptor. Suponga que la relación E_s/N_0 es suficientemente grande.

- P8.10 Para simplificar los procesos de filtrado analógico, un sistema OFDM discreto con N portadoras y periodo de símbolo T apaga las $2N_A + 1$ portadoras en el rango $\mathcal{I} = [N/2 - N_A, N/2 + N_A]$. Debido al desajuste en los osciladores, la frecuencia empleada en la conversión a banda base en el receptor ω_d no coincide con la de portadora ω_c , por lo que la señal recibida en banda base $v(t)$ (Figura 8.12) contendrá una modulación residual con la exponencial $\exp(-j\Delta_w t)$, siendo $\Delta_w = (\omega_d - \omega_c)$. El filtro de reconstrucción $g(t)$, así como el canal, son ideales.

- 10.1. Establezca las condiciones sobre N_A , Δ_w y N/T que garantizan que en el filtrado por $g(-t)$ en el receptor no se produce una distorsión significativa.

- 10.2. Bajo las condiciones del apartado anterior, determine qué otras condiciones deben cumplir Δ_w y N/T para que el efecto de la modulación residual se reduzca a un desplazamiento, esto es, para todo $l = 0, \dots, N - 1$, se cumple que $q_k[n] = A_{k+l}[n]$, para algún entero l . Calcule l .
- 10.3. Cuando se cumplen las condiciones del apartado (a) pero no las del (b) se tiene ICI. ¿Por qué?

P8.11 En este problema se realiza una comparación entre los igualadores MSE y ZF. Recuerde que, en el caso de OFDM, tanto el efecto del canal como los igualadores son multiplicativos. Para simplificar el problema sin alterar sus conclusiones, suponga el siguiente modelo:

$$q = A \cdot D + z \quad (8.199)$$

donde A es un símbolo equiprobable de la constelación $\{\pm 1, \pm 3\}$, D es un número real conocido y z es una muestra de ruido gausiano, de media 0 y varianza σ_z^2 e independiente de A . El coeficiente real único del igualador se denota por W . En el decisor se elige el símbolo más próximo a la salida del igualador.

- 11.1. Determine W en los casos ZF y MSE.
- 11.2. Obtenga el error cuadrático medio $E\{|Wq - A|^2\}$ para ambos casos y compare los resultados.
- 11.3. Calcule la probabilidad de error de bit que se obtiene usando cada igualador y demuestre que la correspondiente al ZF nunca es mayor que para el MSE.
- 11.4. Dada la observación q , el decisor ML elige aquel A tal que $|q - A \cdot D|^2$ es mínimo. Demuestre que si $D \neq 0$ la solución al problema de la minimización es equivalente a un igualador ZF seguido de un decisor de símbolo. Como consecuencia, el igualador ZF es también el de mínima probabilidad de error.

P8.12 Uno de los mayores inconvenientes de la OFDM es la elevada relación entre potencia de pico y potencia media (PAR, “Peak-to-Average-Ratio”) que presenta, lo puede obligar a reducir la potencia media para mitigar los efectos de la saturación en los amplificadores. Aquí estudiaremos la que puede considerarse la forma más simple de reducir la PAR, que es un simple recorte de la envolvente de la señal en banda base.

Considere un sistema OFDM que emplea una constelación QPSK sobre todas y cada una de las N portadoras disponibles, esto es, $A_k[n] \in \{\pm \sqrt{E_s}, \pm j\sqrt{E_s}\}$. Las secuencias de símbolos enviados sobre cada una de las portadoras son blancas y mutuamente independientes y los símbolos son equiprobables. Por simplicidad, el prefijo cíclico está ausente. Asimismo, considere la secuencia $s[m]$ de la Ecuación (8.15) cuya representación en magnitud y fase es

$$s[m] = |s[m]| \cdot e^{j\angle s[m]} \quad (8.200)$$

La PAR se puede definir como

$$\text{PAR} = \frac{\max_m |s[m]|^2}{E_s} \quad (8.201)$$

donde E_s es la energía media por símbolo.

- 12.1. ¿Cuál es el valor máximo que puede tomar $|s[m]|$? Utilice este valor para calcular la PAR.
- 12.2. ¿Cuál es la probabilidad de alcanzar el valor máximo de $|s[m]|$? Observe cómo decrece dicha probabilidad al aumentar N .
- 12.3. Una muy buena aproximación (tanto mejor cuanto mayor es N) de las componentes en fase y cuadratura de $s[m]$ se obtiene empleando el teorema central del límite (véase Apartado 3.2.8). Demuestre que $s[m]$ se puede aproximar por un proceso complejo gausiano circularmente simétrico y calcule su varianza.
- 12.4. Suponga un recortador de envolvente cuya entrada es $s[m]$ y salida $s_c[m] = |s_c[m]| e^{j\angle s[m]}$, que actúa sobre la envolvente de la siguiente manera

$$|s_c[m]| = \begin{cases} |s[m]|, & \text{si } |s[m]| \leq \gamma \\ \gamma, & \text{si } |s[m]| > \gamma \end{cases} \quad (8.202)$$

Calcule la PAR en la señal $s_c[m]$.

- 12.5. Usando los resultados del apartado (c) calcule, en función de γ , la probabilidad de que la señal $s[m]$ sea recortada al pasar por el sistema del apartado anterior. Para resolver este apartado necesitará trabajar con una función de densidad de probabilidad Rayleigh (Ecuación (3.39)).
- P8.13 Considere una modulación de espectro ensanchado por secuencia directa con $N = 10$, $\tilde{x}[m] = (-1)^m$ y $g_c(t) * g_c^*(-t)$ que cumple el criterio de Nyquist a periodo T/N . El canal equivalente en banda base es $h_{eq}(t) = \delta(t - \tau)$. Determine el canal discreto equivalente, $p[n]$, (si no es posible simplificar la expresión resultante, déjela en función de $g_c(t)$) y si existirá o no ISI en los siguientes casos:

- 13.1. $\tau = T$
- 13.2. $\tau = T/2$
- 13.3. $\tau = T/4$

- P8.14 Escriba la expresión de la BER que resulta en un sistema de espectro ensanchado por secuencia directa cuando éste está interferido por una portadora de frecuencia ω_J arbitraria y amplitud A_J . Demuestre que, desde el punto de vista del interferente, la limitación sobre ω_J introducida en el Apartado 8.2.6 conduce a resultados óptimos.

- P8.15 Considere un sistema de espectro ensanchado con salto lento, en el que el ruido es despreciable pero existe una interferencia de banda estrecha con una potencia tal que cuando un símbolo de información se transmite en una frecuencia próxima a la de dicha interferencia, la probabilidad de recepción correcta es $1/2$. Escriba la expresión de la probabilidad de error de símbolo en función de T , N y M . ¿Ganaría algo un interferente malintencionado si tuviese la posibilidad de cambiar su frecuencia de acuerdo con cualquier patrón deseado si tanto la secuencia de código $x[m]$ como los símbolos $I[n]$ le resultan impredecibles?

P8.16 Utilice (8.131) para demostrar el porqué del mínimo espectral en continua que se observa en las figuras 8.37 y 8.38. Calcule su nivel en dB en función de N .

P8.17 Los códigos de factor de expansión variable (“Orthogonal Variable Spreading Factor”, OVSF) permiten que diferentes usuarios empleen distintos factores de expansión y, por tanto, diferentes tasas binarias, manteniendo la ortogonalidad entre las secuencias empleadas. En este problema mostraremos cómo construirlos empleando como base los códigos de Walsh-Hadamard. Supondremos un escenario síncrono en el que los símbolos de información son binarios antipodales.

- 17.1. Construya el código de Walsh-Hadamard de longitud $N = 8$. El usuario número 1 emplea la secuencia binaria antipodal correspondiente a la última fila de la matriz \mathbf{H}_8 . Suponga que el usuario número 2 transmite empleando la secuencia correspondiente a la primera fila de la matriz \mathbf{H}_2 , por lo que su tasa binaria de transmisión es 4 veces superior a la del usuario 1. Demuestre que la interferencia mutua entre ambos usuarios es siempre 0. Suponga ahora que el usuario número 2 emplea la secuencia correspondiente a la segunda fila de la matriz \mathbf{H}_2 . Demuestre que en este caso la interferencia mutua entre ambos usuarios no tiene por qué ser 0.
- 17.2. Utilice los resultados del apartado anterior para diseñar un procedimiento de asignación de códigos de tasa variable con longitud máxima N_{max} , que garantice que la interferencia mutua entre cualesquiera dos usuarios es nula. Un diagrama de árbol puede ser de gran ayuda.
- 17.3. Si en el sistema anterior todos los usuarios emplean códigos de longitud N_{max} , entonces la tasa de transmisión total (suma de las de todos los usuarios) máxima es de N_{max}/T símbolos/seg, siendo T el periodo de símbolo. Sea r un entero positivo tal que $r < \log_2 N_{max}$. ¿Cuál es la máxima tasa total si un único usuario emplea un código de longitud $N_{max}/2^r$? ¿Cuántos usuarios caben en el sistema en ese caso?

P8.18 En este problema demostramos algunas propiedades de las funciones de correlación aperiódica e impar. Sean x_i, x_l dos secuencias ensanchadoras de longitud N .

- 18.1. Demuestre que $r_{x_i, x_l}[k] = r_{x_l, x_i}^*[−k]$.
- 18.2. Demuestre que $r_{x_i, x_l}^o[k] = -(r_{x_l, x_i}^o[N − k])^*$.
- 18.3. Demuestre que $\tilde{r}_{\tilde{x}_i, \tilde{x}_l}[k] = \tilde{r}_{\tilde{x}_l, \tilde{x}_i}^*[N − k]$.
- 18.4. Dada la secuencia $x'_l[m] = x_l[(m+1) \bmod N]$, demuestre que se da la siguiente relación, que permite calcular de forma recursiva la correlación aperiódica en conjuntos de secuencias

$$r_{x_i, x'_l}[k] = \begin{cases} r_{x_i, x_l}[k+1] + x_i^*[N-1-k]x_l[0], & k \geq 0 \\ r_{x_i, x'_l}[k+1] - x_i^*[-k-1]x_l[0], & k < 0 \end{cases} \quad (8.203)$$

P8.19 En este problema se aborda el diseño de secuencias de periodo N que cumplan la condición siguiente sobre las correlaciones impar y periódica

$$|r_{x_i,x_l}^o[k]|^2 = |\tilde{r}_{\tilde{x}_i,\tilde{x}_l}[k]|^2, \text{ para todo } k, i \neq l \quad (8.204)$$

Véanse las definiciones en (8.170) y (8.157).

19.1. Demuestre que la Condición (8.204) se puede poner en función de la correlación aperiódica como

$$\mathcal{R}e\{r_{x_i,x_l}[k]r_{x_i,x_l}^*[l-N]\} = 0, \text{ para todo } k, i \neq l \quad (8.205)$$

19.2. Escribiendo la correlación aperiódica en forma polar $r_{x_i,x_l}[k] = |r_{x_i,x_l}[k]| \cdot \exp(j\theta_{x_i,x_l}[k])$ demuestre que la condición anterior se cumple si se da alguna de las dos siguientes

$$|r_{x_i,x_l}[k]| \cdot |r_{x_i,x_l}[k-N]| = 0, \text{ y } \theta_{x_i,x_l}[k] - \theta_{x_i,x_l}[k-N] = \pi p/2 \quad (8.206)$$

con p un número entero impar.

19.3. Sean $y_i[m]$, $y_l[m]$ dos secuencias ensanchadoras de longitud N y que toman valores reales. A partir de ellas construimos las secuencias $x_i[m]$, $x_l[m]$

$$x_i[m] = y_i[m] \exp(j\pi mp/(2N)); x_l[m] = y_l[m] \exp(j\pi mp/(2N)) \quad (8.207)$$

con p un entero impar. Demuestre que las secuencias $x_i[m]$, $x_l[m]$ así construidas satisfacen (8.206).

19.4. Compruebe que si $p = N$ las nuevas secuencias se construyen multiplicando las anteriores por $\pm 1, \pm j$. Por ejemplo, si las secuencias originales son binarias antipodales, ahora se tienen secuencias pertenecientes a una constelación QPSK.

19.5. Demuestre que el método constructivo del apartado (c) no aumenta la magnitud de la correlación impar ni de la periódica.

P8.20 Considere un conjunto de L secuencias ensanchadoras $x_i[m]$, $i = 0, \dots, L-1$, de longitud N , con $L > N$. Dichas secuencias son ortonormales, esto es,

$$\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_l \rangle = \sum_{m=0}^{N-1} x_i[m]x_l^*[m] = \delta[i-l], \text{ para todo } i, l \in \{0, \dots, L-1\} \quad (8.208)$$

Sea \mathbf{X} la matriz $L \times N$ cuya l -ésima fila es \mathbf{x}_l ; denotamos por \mathbf{y}_n , $n \in \{0, \dots, N-1\}$, el vector formado por la n -ésima columna de \mathbf{X} .

20.1. Demuestre que

$$\sum_{i=0}^{L-1} \sum_{l=0}^{L-1} |\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_l \rangle|^2 = \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} |\langle \mathbf{y}_p, \mathbf{y}_q \rangle|^2 \quad (8.209)$$

20.2. Demuestre que

$$\sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} |\langle \mathbf{y}_p, \mathbf{y}_q \rangle|^2 \geq \sum_{p=0}^{N-1} (\|\mathbf{y}_p\|^2)^2 \quad (8.210)$$

con igualdad si y sólo si los vectores \mathbf{y}_i , con $i = 0, \dots, N - 1$ son ortogonales.

20.3. Dado un conjunto de números reales a_0, a_1, \dots, a_{N-1} , se puede demostrar usan-

do la desigualdad de Jensen (Ecuación (9.87)) que $\sum_{p=0}^{N-1} a_p^2 \geq \left(\sum_{p=0}^{N-1} a_p \right)^2 / N$,

con igualdad si y sólo si todos los a_i , $i = 0, \dots, N - 1$ son iguales. Utilice este resultado y los de los apartados (a) y (b) para demostrar que

$$\sum_{i=0}^{L-1} \sum_{l=0}^{L-1} |\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_l \rangle|^2 \geq \frac{1}{N} \left(\sum_{p=0}^{N-1} \|\mathbf{y}_p\|^2 \right)^2 = \frac{L^2}{N} \quad (8.211)$$

con igualdad si y sólo si los vectores \mathbf{y}_i , con $i = 0, \dots, N - 1$ son ortogonales y todos tienen energía L/N .

20.4. Utilice los resultados anteriores para demostrar la cota de Welch en (8.176).

P8.21 Suponga que generamos las L secuencias ensanchadoras de longitud N de forma perfectamente aleatoria, de modo que para cualquier $m \in \{0, 1, \dots, N - 1\}$ y cualquier $l \in \{0, 1, \dots, L - 1\}$, la muestra $x_l[m]$ se obtiene eligiendo con probabilidad uniforme en $\{-1/\sqrt{N}, +1/\sqrt{N}\}$ e independientemente de cualquier otra $x_i[n]$, $i \neq l$, $n \neq m$. Compruebe que los valores esperados de la función de correlación (periódica o aperiódica, según corresponda) del código así generado verifican las cotas de Welch en (8.158), (8.171) y (8.176). A la vista de los resultados obtenidos discuta cuán buenos pueden ser los códigos aleatorios en aplicaciones de CDMA.

P8.22 Considere un sistema de acceso múltiple basado en CDMA en banda base síncrono en el que el canal añade ruido gausiano de densidad espectral de potencia $N_0/2$ W/Hz.

22.1. Suponga que en recepción se emplea el detector basado en el filtro adaptado de la Figura 8.39. Demuestre que el ruido $z_0[n]$ a la entrada del decisor es blanco, con varianza $N_0/2$.

22.2. Suponga que en recepción se proyecta la señal recibida sobre las secuencias $x_0[m]$ y $x_1[m]$, cuya correlación es ρ , para obtener $q_0[n]$ y $q_1[n]$. Si $z_0[n]$ y $z_1[n]$ denotan las componentes de ruido respectivas, demuestre que ambas son blancas. Demuestre que el vector de ruido $\mathbf{z}[n] = (z_0[n], z_1[n])^T$ es conjuntamente gausiano, con matriz de covarianza

$$\mathbb{E}\{\mathbf{z}[n]\mathbf{z}^T[n]\} = \frac{N_0}{2} \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \quad (8.212)$$

¿Cómo sería la matriz de covarianza del ruido en caso de tener un detector conjunto para L usuarios?

- 22.3. Considere el detector conjunto ML de la Figura 8.42. Demuestre que, en este caso, la matriz de covarianza del vector de ruido $\mathbf{z}'[n] = (z'_0[n], z'_1[n])^T$ es diagonal, con elementos en la diagonal idénticos y de valor $N_0/2$.
- 22.4. Suponga que en recepción se emplea el detector decorrelacionador. Demuestre que las componentes del vector de ruido $\mathbf{z}''[n] = (z''_0[n], z''_1[n])^T$ son blancas y la matriz de covarianza es

$$\mathbb{E}\{\mathbf{z}''[n]\mathbf{z}''^T[n]\} = \frac{N_0}{2(1-\rho^2)} \begin{pmatrix} 1/\alpha_0^2 & -\rho/\alpha_1^2 \\ -\rho/\alpha_0^2 & 1/\alpha_1^2 \end{pmatrix} \quad (8.213)$$

siendo α_0 y α_1 las ganancias correspondientes a las señales transmitidas por los usuarios 0 y 1, respectivamente.

- P8.23 Considere el modelo de receptor conjunto para dos usuarios de la Ecuación (8.187). Suponga que se multiplica el vector recibido $\mathbf{q}'[n]$ por una matriz \mathbf{B} tal que se minimiza el error cuadrático medio

$$E\{||\mathbf{A}[n] - \mathbf{B} \cdot \mathbf{q}'[n]||^2\} \quad (8.214)$$

Calcule dicha matriz y compare el error cuadrático medio que se obtiene con esta solución con el que resulta de usar el detector decorrelacionador.

CAPÍTULO 9

LÍMITES FUNDAMENTALES EN LAS COMUNICACIONES DIGITALES

Al analizar tanto los fundamentos de modulación y detección en canales gausianos (Capítulo 4) como los distintos formatos de modulación (Capítulos 5, 7 y 8) hemos comprobado que los símbolos se recuperan en el receptor con una probabilidad de error no nula. También hemos verificado que esta probabilidad de error aumenta cuando disminuimos la relación señal a ruido o cuando, manteniendo constante la relación señal a ruido, aumentamos el número de puntos de la constelación (si bien este último caso no se da en todos los formatos de modulación). Estos hechos se consideraban como ineludibles a principios de los años cuarenta, hasta que Claude Shannon demostró que podemos transmitir con una probabilidad de error tan baja como queramos a una velocidad binaria tan alta como queramos, siempre que esta velocidad esté por debajo de la *capacidad del canal*. Esta demostración se considera el principio de la denominada *teoría de la información*, una de cuyas partes, la dedicada a establecer el límite de la velocidad binaria con la que podemos transmitir por un canal, abordaremos en este capítulo. Nótese que hablamos de “establecer el límite” y no de “cómo llegar a él”, pregunta a la que la teoría de la información, en general, no da respuesta.

Comenzaremos estableciendo distintos modelos de canal definidos mediante sus probabilidades de transición a partir de distintos niveles de abstracción sobre el modelo general de un sistema de comunicación digital, realizando la distinción entre canales digitales (aquellos en los que los alfabetos de entrada y salida poseen un número de elementos finito) y canales gausianos (aquellos en los que la salida, conocida la entrada, posee una distribución continua gausiana). Estos dos tipos de canales serán objeto de un desarrollo paralelo, en el que se comenzará definiendo las distintas medidas objetivas de información para, a continuación, determinar la capacidad de transmisión de información del modelo y las condiciones en las que podemos realizar una transmisión fiable a través de ellos.

9.1. MODELOS PROBABILÍSTICOS DE CANAL

En el Capítulo 4 planteábamos un modelo general de sistema de comunicación digital (Figuras 4.1 y 4.39) en el que considerábamos un canal (el canal aditivo gausiano) que es una abstracción del medio físico de transmisión. Ahora definiremos otros modelos de canal obtenidos a partir del modelo general de comunicación digital haciendo uso de distintos niveles de abstracción. Alguno de estos modelos ya ha sido definido anteriormente, como el canal discreto equivalente que presentábamos en el Apartado 4.3.3 y empleábamos en capítulos posteriores y que, recordemos, estaba compuesto por el modulador, el canal aditivo gausiano y el demodulador.

En primer lugar vamos a modificar ligeramente el modelo para transmisión indefinida de símbolos del Apartado 4.5 (Figura 4.39) para obtener el que muestra la Figura 9.1, donde el decisor ha sido dividido en dos partes: la decisión sobre el símbolo de la constelación que fue transmitido y la decodificación de dicho símbolo a símbolos binarios. Sobre esta figura

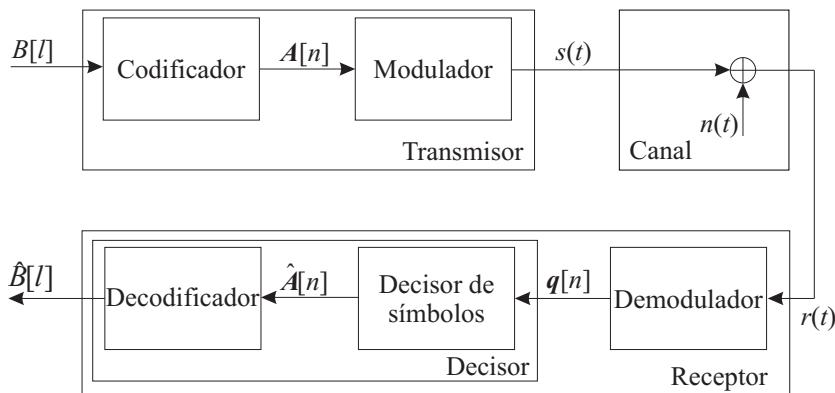


Figura 9.1. Modelo general de un sistema de comunicación digital para transmisión indefinida de símbolos.

definimos los modelos antes mencionados tal y como se muestra en la Figura 9.2, donde podemos ver los siguientes cuatro modelos distintos de canal:

1. **Canal gausiano.** Es el canal considerado hasta ahora. Representa el canal físico propiamente dicho, y transforma la señal de entrada mediante la adición de ruido gausiano, blanco y de media nula para obtener la salida. Las entrada y salida de este canal son señales analógicas en tiempo continuo.
2. **Canal gausiano con entrada digital.** Este modelo es el que denominábamos canal discreto equivalente y que presenta como entrada una secuencia de símbolos de un alfabeto (constelación) de M símbolos y como salida una secuencia analógica (la salida del demodulador). Transforma cada símbolo de la secuencia de entrada, de manera independiente, mediante la adición de ruido gausiano en tiempo discreto, blanco y de media nula para obtener la salida .

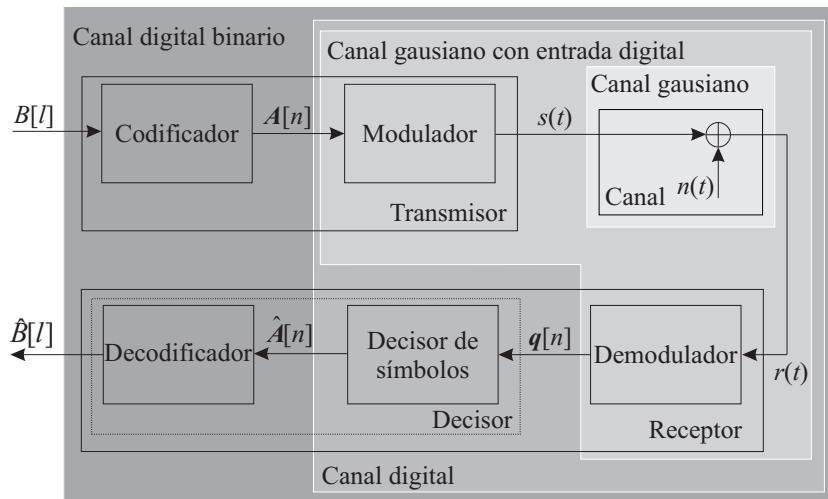


Figura 9.2. Definición de modelos de canal sobre el modelo general de un sistema de comunicación digital.

3. **Canal digital.** En este modelo consideramos el conjunto formado por el modulador, el canal, el demodulador y el decisor de símbolos como un canal que presenta como entrada una secuencia de símbolos de un alfabeto de M símbolos y como salida la secuencia de símbolos del mismo alfabeto que proporciona el decisor de símbolos. La relación entre un símbolo de entrada y su correspondiente de salida habrá de determinarse en función de las probabilidades de acierto y de error en el decisor.
4. **Canal digital binario.** Similar al anterior, en este modelo consideramos todo el sistema de comunicación como un canal, cuyas entrada y salida son secuencias de símbolos binarios. Representa el mayor nivel de abstracción que podemos realizar sobre el sistema de comunicación.

Si aquí hemos renombrado el canal discreto equivalente como canal gausiano con entrada digital es para enfatizar la caracterización que pretendemos realizar sobre cada uno de estos modelos: una caracterización atendiendo fundamentalmente a la relación entre las funciones de densidad de probabilidad de la entrada y la salida. De ahí el nombre de este apartado, “modelos probabilísticos de canal”.

En realidad deberíamos contemplar no sólo una única relación entre las funciones de densidad de probabilidad de la entrada y la salida sino, en general, una relación (entre las funciones de densidad de probabilidad) distinta para cada instante de tiempo, porque, como bien sabemos, la entrada y la salida en nuestros modelos son procesos estocásticos que pueden ser no estacionarios. Sin embargo, con el fin de evitar una complejidad excesiva en el análisis, estableceremos las hipótesis oportunas para eliminar la dependencia temporal en nuestro estudio.

Realizaremos el análisis de los distintos canales por orden creciente de complejidad, comenzando con los canales digitales, continuando con el canal gausiano y finalizando con

el canal gausiano con entrada digital.

9.1.1. Canales digitales

Al sustituir el modelo de canal digital en el modelo general de transmisión indefinida de símbolos (Figura 9.1), este se transforma en el que muestra la Figura 9.3. En este modelo



Figura 9.3. Modelo general de un sistema de comunicación digital para transmisión indefinida de símbolos utilizando el modelo de canal digital.

se considera que cada símbolo de la secuencia $A[n]$ es estadísticamente independiente del resto de símbolos de la secuencia. Por otra parte, en el Apartado 4.5 demostrábamos que, en la transmisión de una secuencia de longitud indefinida de símbolos, si la secuencia de símbolos cumple lo anterior y la duración de las señales empleadas en el modulador no excede del intervalo de símbolo T , la recepción de cada símbolo es independiente del resto de símbolos.

Bajo estas condiciones, un símbolo determinado de la secuencia de salida del canal digital, $\hat{A}[n_0]$, depende únicamente del símbolo de entrada al canal en ese mismo instante temporal, $A[n_0]$, lo que es cierto para cualquier valor concreto del instante temporal, n_0 . En consecuencia, para caracterizar el canal digital podemos eliminar la dependencia temporal y analizar únicamente el caso de la transmisión de un símbolo aislado, entendiendo que cada vez que se use el canal para transmitir un símbolo, no va a modificar su comportamiento.

Pero, ¿qué sucede cuando presentamos un símbolo determinado, a_i , a la entrada del canal digital? O, dicho de otra forma, ¿qué sucede cuando transmitimos un símbolo determinado, a_i ? Sigue que a la salida del canal digital aparecerá el símbolo a_j con una probabilidad $p_{\hat{A}|A}(a_j|a_i)$ (que aprendimos a calcular en el Capítulo 4 a partir de la constelación y la varianza de ruido en el canal). Conociendo los valores de la probabilidad condicional de la salida respecto a la entrada, $p_{\hat{A}|A}(a_j|a_i)$, para todas las combinaciones posibles de símbolos de entrada y salida tendremos perfectamente caracterizado el comportamiento del canal digital.

Existe un modelo probabilístico ampliamente utilizado que contempla como caso particular nuestro canal digital y se denomina *canal discreto sin memoria* (“Discrete Memoryless Channel”, DMC). El DMC es un modelo estadístico que relaciona una variable aleatoria X con función de densidad de probabilidad discreta que denominamos entrada, con otra variable aleatoria Y , también discreta, que denominamos salida. En el DMC los alfabetos de X e Y son, en general, distintos, por lo que el canal digital es un caso particular del DMC.

Una representación del canal discreto sin memoria es la mostrada en la Figura 9.4, donde podemos ver que dentro del bloque que representa el canal no encontramos funciones de transferencia en el dominio de la frecuencia ni respuestas al impulso, sino las probabilidades condicionales de la salida con respecto a la entrada. El calificativo *discreto* proviene de la naturaleza de las probabilidades de X e Y y no de *tiempo discreto*, por lo que no debemos

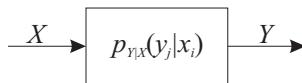


Figura 9.4. Canal discreto sin memoria.

de confundirlo con el *canal discreto equivalente* estudiado en el Capítulo 4. El calificativo *sin memoria* proviene del modelo probabilístico de la entrada y salida, que son variables aleatorias y no procesos estocásticos.

Formalmente, el canal se define mediante un *alfabeto de entrada* $\{x_i, i = 1, \dots, M\}$, un *alfabeto de salida* $\{y_j, j = 1, \dots, L\}$ y el conjunto de probabilidades condicionales

$$p_{Y|X}(y_j|x_i) \quad i = 1, \dots, M \quad j = 1, \dots, L \quad (9.1)$$

denominadas *probabilidades de transición*, que podemos agrupar en la denominada *matriz de canal* como

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{Y|X}(y_1|x_1) & p_{Y|X}(y_2|x_1) & \cdots & p_{Y|X}(y_L|x_1) \\ p_{Y|X}(y_1|x_2) & p_{Y|X}(y_2|x_2) & \cdots & p_{Y|X}(y_L|x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{Y|X}(y_1|x_M) & p_{Y|X}(y_2|x_M) & \cdots & p_{Y|X}(y_L|x_M) \end{bmatrix} \quad (9.2)$$

donde, por la forma en que está definida, la suma a lo largo de cada fila da como resultado 1.

Nótese que en la definición entra el alfabeto de la entrada y el de la salida, pero no la distribución de probabilidades de la entrada, $\{p_X(x_i), i = 1, \dots, M\}$, ni de la salida, $\{p_Y(y_j), j = 1, \dots, L\}$, porque no forman parte de la naturaleza del canal.

Veamos ahora cómo pueden relacionarse las probabilidades de error de símbolo vistas en el capítulo anterior con la matriz de canal del modelo DMC. En primer lugar, hacemos corresponder el alfabeto de entrada, $\{x_i, i = 1, \dots, M\}$, con el alfabeto de símbolos de la constelación, $\{\mathbf{a}_i, i = 0, \dots, M-1\}$, y el alfabeto de símbolos de salida, $\{y_j, j = 1, \dots, M\}$ ($L = M$), con el alfabeto de símbolos de la constelación a la salida del decisor (el mismo que el del transmisor), $\{\mathbf{a}_j, j = 0, \dots, M-1\}$. Los valores $p_{Y|X}(y_j|x_i)$ expresan la probabilidad de decidir que el símbolo transmitido fue \mathbf{a}_{j-1} cuando el símbolo transmitido fue \mathbf{a}_{i-1} y, de esta forma, los elementos de la diagonal de la matriz de canal se corresponden con las probabilidades de acierto condicionadas a la transmisión de cada uno de los símbolos de la constelación

$$p_{Y|X}(y_i|x_i) = p_{\hat{\mathbf{A}}|\mathbf{A}}(\mathbf{a}_{i-1}|\mathbf{a}_{i-1}) = 1 - P_{e|\mathbf{a}_{i-1}} \quad (9.3)$$

y la suma del resto de elementos de cada fila, con la probabilidad de error condicionada a la transmisión del símbolo correspondiente

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M p_{Y|X}(y_j|x_i) = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{M-1} p_{\hat{\mathbf{A}}|\mathbf{A}}(\mathbf{a}_{j-1}|\mathbf{a}_{i-1}) = P_{e|\mathbf{a}_{i-1}} \quad (9.4)$$

Para ilustrar el procedimiento de obtención de la matriz de canal vamos a considerar en el siguiente ejemplo una constelación de cuatro símbolos ($M = L = 4$) ya analizada en el Capítulo 4.

Ejemplo 9.1

Considere la constelación del formato de modulación paso bajo 4-PAM (véase la Figura 4.28, Página 208), en la que los símbolos tienen de coordenadas $\{\pm 1, \pm 3\}$ y cuya probabilidad de error media está dada en (4.71).

Aplicando el procedimiento anteriormente descrito, el DMC equivalente tiene la siguiente matriz de canal

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 - Q\left(\sqrt{\frac{2}{5}\frac{E_s}{N_0}}\right) & Q\left(\sqrt{\frac{2}{5}\frac{E_s}{N_0}}\right) - Q\left(3\sqrt{\frac{2}{5}\frac{E_s}{N_0}}\right) & Q\left(3\sqrt{\frac{2}{5}\frac{E_s}{N_0}}\right) - Q\left(5\sqrt{\frac{2}{5}\frac{E_s}{N_0}}\right) & Q\left(5\sqrt{\frac{2}{5}\frac{E_s}{N_0}}\right) \\ Q\left(\sqrt{\frac{2}{5}\frac{E_s}{N_0}}\right) & 1 - 2Q\left(\sqrt{\frac{2}{5}\frac{E_s}{N_0}}\right) & Q\left(\sqrt{\frac{2}{5}\frac{E_s}{N_0}}\right) - Q\left(3\sqrt{\frac{2}{5}\frac{E_s}{N_0}}\right) & Q\left(3\sqrt{\frac{2}{5}\frac{E_s}{N_0}}\right) \\ Q\left(3\sqrt{\frac{2}{5}\frac{E_s}{N_0}}\right) & Q\left(\sqrt{\frac{2}{5}\frac{E_s}{N_0}}\right) - Q\left(3\sqrt{\frac{2}{5}\frac{E_s}{N_0}}\right) & 1 - 2Q\left(\sqrt{\frac{2}{5}\frac{E_s}{N_0}}\right) & Q\left(\sqrt{\frac{2}{5}\frac{E_s}{N_0}}\right) \\ Q\left(5\sqrt{\frac{2}{5}\frac{E_s}{N_0}}\right) & Q\left(3\sqrt{\frac{2}{5}\frac{E_s}{N_0}}\right) - Q\left(5\sqrt{\frac{2}{5}\frac{E_s}{N_0}}\right) & Q\left(\sqrt{\frac{2}{5}\frac{E_s}{N_0}}\right) - Q\left(3\sqrt{\frac{2}{5}\frac{E_s}{N_0}}\right) & 1 - Q\left(\sqrt{\frac{2}{5}\frac{E_s}{N_0}}\right) \end{bmatrix} \quad (9.5)$$

donde podemos comprobar el cumplimiento de (9.3) y (9.4).

Cada valor posible de la varianza del ruido gausiano que introduce el canal físico, $N_0/2$, genera una matriz de canal distinta. Por ejemplo, para un valor de $N_0/2$ igual a 1, que se corresponde con un valor de E_s/N_0 igual a 2,5, la matriz de canal toma la forma

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,8413 & 0,1573 & 0,0013 & 2,9 \cdot 10^{-7} \\ 0,1587 & 0,6827 & 0,1573 & 0,0013 \\ 0,0013 & 0,1573 & 0,6827 & 0,1587 \\ 2,9 \cdot 10^{-7} & 0,0013 & 0,1573 & 0,8413 \end{bmatrix} \quad (9.6)$$

y para un valor de $N_0/2$ diez veces menor, 0,1, la matriz de canal toma la forma

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,9992 & 7,8 \cdot 10^{-4} & 1,2 \cdot 10^{-21} & 1,3 \cdot 10^{-56} \\ 7,8 \cdot 10^{-4} & 0,9984 & 7,8 \cdot 10^{-4} & 1,2 \cdot 10^{-21} \\ 1,2 \cdot 10^{-21} & 7,8 \cdot 10^{-4} & 0,9984 & 7,8 \cdot 10^{-4} \\ 1,3 \cdot 10^{-56} & 1,2 \cdot 10^{-21} & 7,8 \cdot 10^{-4} & 0,9992 \end{bmatrix} \quad (9.7)$$

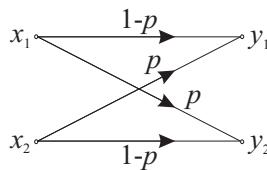
Podemos comprobar que conforme la varianza de ruido tiende a cero, la matriz de canal tiende a la matriz identidad.

Un caso particular del DMC de especial importancia lo obtenemos cuando $M = L = 2$ y la matriz de canal es simétrica. En este caso la matriz de canal toma la forma

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{Y|X}(y_1|x_1) & p_{Y|X}(y_2|x_1) \\ p_{Y|X}(y_1|x_2) & p_{Y|X}(y_2|x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix} \quad (9.8)$$

y se conoce con el nombre de *canal binario simétrico* (“Binary Symmetric Channel”, BSC), que se suele representar de forma gráfica tal y como se muestra en la Figura 9.5.

El BSC es el modelo probabilístico más adecuado para representar el canal digital binario definido anteriormente, cuya sustitución en el modelo general de transmisión indefinida de símbolos (Figura 9.1) da como resultado el que muestra la Figura 9.6. Sin embargo, antes de dar por buena la equivalencia entre canal digital binario y BSC, conviene realizar las siguientes puntualizaciones:

**Figura 9.5.** Canal binario simétrico.**Figura 9.6.** Modelo general de un sistema de comunicación digital para transmisión indefinida de símbolos utilizando el modelo de canal digital binario.

1. El BSC representa un comportamiento medio a lo largo del tiempo del canal digital binario, porque la transmisión de la secuencia $A[n]$ se realiza símbolo a símbolo y, en general, es necesario más de un símbolo de la secuencia binaria $B[l]$ para generar cada símbolo de $A[n]$. O, en otras palabras, podemos decir que mientras que el canal digital no posee memoria (porque la transmisión se realiza símbolo a símbolo de manera independiente) y encaja perfectamente en el modelo del DMC, el canal digital binario tiene la memoria introducida por el codificador que transforma la secuencia $B[l]$ en la secuencia $A[n]$ y, por tanto, no puede considerarse, en puridad, un canal sin memoria. Desde este punto de vista, el BSC es una aproximación al canal digital binario que representa su comportamiento medio a lo largo del tiempo.
2. El valor de la probabilidad p definida para el BSC, (9.8), equivale a la BER del canal digital binario, pero para el cálculo de esta BER (véase Página 228 y siguientes) se emplean las probabilidades de aparición de cada uno de los símbolos de la constelación, lo cual no concuerda con la propia definición del BSC, independiente de la distribución de probabilidades a su entrada.

A pesar de esta discordancia entre las hipótesis del modelo BSC y la naturaleza del canal digital binario, se suele aceptar en la práctica la equivalencia entre ambos, asignando a p el valor de la BER , tal y como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 9.2

Considere la constelación del Ejemplo 9.1 empleada conjuntamente con el codificador del Ejemplo 4.5, tal y como se muestra en la Figura 4.43 (Página 229). Bajo la hipótesis de símbolos equiprobables, se obtiene una BER del sistema, (4.102), igual a

$$BER = \frac{3}{4}Q\left(\sqrt{\frac{4E_b}{5N_0}}\right) + \frac{1}{2}Q\left(3\sqrt{\frac{4E_b}{5N_0}}\right) - \frac{1}{4}Q\left(5\sqrt{\frac{4E_b}{5N_0}}\right)$$

El BSC equivalente tendrá una matriz de canal

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 - BER & BER \\ BER & 1 - BER \end{bmatrix} \quad (9.9)$$

que, para un valor de $N_0/2$ igual a 1, que se corresponde con un valor de E_b/N_0 igual a 1,25, la matriz de canal toma la forma

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,8803 & 0,1197 \\ 0,1197 & 0,8803 \end{bmatrix} \quad (9.10)$$

y para un valor de $N_0/2$ diez veces menor, 0,1, la matriz de canal toma la forma

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,9994 & 0,0006 \\ 0,0006 & 0,9994 \end{bmatrix} \quad (9.11)$$

9.1.2. Canal gausiano

Aparentemente, la obtención de un modelo probabilístico para el canal gausiano debería ser una tarea sencilla, porque la sustitución del canal gausiano en el modelo general de transmisión indefinida de símbolos (Figura 9.1) deja a este prácticamente inalterado, tal y como puede observarse en la Figura 9.7.

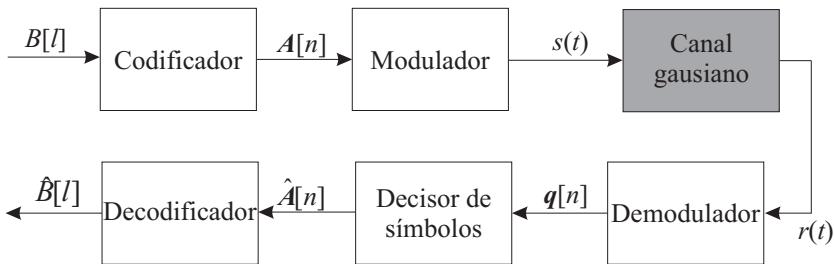


Figura 9.7. Modelo general de un sistema de comunicación digital para transmisión indefinida de símbolos utilizando el modelo de canal gausiano.

Sin embargo, la sencillez termina aquí, como vamos a comprobar de inmediato. La relación entre la entrada y la salida del canal viene dada por

$$r(t) = s(t) + n(t)$$

donde $n(t)$ es un proceso gausiano blanco de media nula y densidad espectral de potencia $N_0/2$. La función de autocorrelación de $n(t)$ es, por tanto

$$R_n(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau) \quad (9.12)$$

lo que implica que la varianza de $n(t)$ en cualquier instante es infinita, que a su vez acarrea no pocos problemas, pero este no es el único hasta obtener un modelo probabilístico que resulte útil. Lo que sigue es el planteamiento de modelos equivalentes al original que nos van a permitir obtener el modelo probabilístico que estamos buscando.

Para limitar la potencia del ruido podemos situar a la salida del canal un filtro selectivo en frecuencia, como se muestra en la Figura 9.8, siempre que este filtro no introduzca ninguna distorsión sobre la señal del transmisor, $s(t)$, o, más concretamente, siempre que seamos capaces de encontrar un conjunto de señales que no sean distorsionadas a su paso por el filtro con respuesta al impulso $g(t)$.

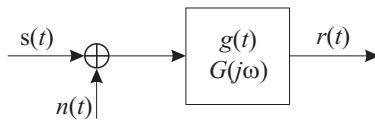


Figura 9.8. Canal gausiano de banda limitada.

Un filtro que cumple esas características es un filtro paso bajo ideal con frecuencia de corte W , con función de transferencia

$$G(j\omega) = \Pi\left(\frac{\omega}{2W}\right) \quad (9.13)$$

y respuesta al impulso

$$g(t) = \frac{W}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right) \quad (9.14)$$

y que da nombre a este modelo de canal, denominado *canal gausiano de banda limitada*.

El ruido a la salida del filtro, que denotaremos como $n'(t)$, es un proceso gausiano estacionario de media nula y densidad espectral de potencia, $S_{n'}(j\omega)$, dada por

$$S_{n'}(j\omega) = S_n(j\omega) |G(j\omega)|^2 = \frac{N_0}{2} \Pi\left(\frac{\omega}{2W}\right) \quad (9.15)$$

Su función de autocorrelación, $R_{n'}(\tau)$, se obtiene como la Transformada de Fourier inversa de $S_{n'}(j\omega)$,

$$R_{n'}(\tau) = \frac{N_0 W}{2\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{W\tau}{\pi}\right) \quad (9.16)$$

De aquí, teniendo en cuenta que $\operatorname{sinc}(0) = 1$, obtenemos que la varianza de $n'(t)$ en cualquier instante es $WN_0/2\pi$, y la función de densidad de probabilidad es

$$f_{n'(t)}(n'(t)) = \frac{1}{\sqrt{WN_0}} e^{-\frac{\pi n'(t)^2}{WN_0}} \quad (9.17)$$

Ahora hay que encontrar un conjunto de elementos de la base del espacio de señal, $\{\phi_j(t), j = 0, \dots, N-1\}$, que no se vea afectado a su paso por el sistema con respuesta al impulso $g(t)$. Esto es, buscamos formas de onda $\phi_j(t)$ que cumplan

$$\phi_j(t) * g(t) = \phi_j(t) \quad (9.18)$$

Al mismo tiempo han de cumplir el criterio de Nyquist generalizado

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_i(t - kT) \phi_j(t - lT) dt = \delta[i-j]\delta[k-l] \quad i, j = 0, \dots, N-1, k, l \in \mathbb{Z} \quad (9.19)$$

que nos garantiza (debido a la condición de ortogonalidad) la independencia con estadística gausiana y, por tanto, que cada elemento de la secuencia $q[n]$, $q[n_0]$, es un estadístico suficiente para la detección del símbolo $A[n_0]$.

Para evitar una formulación excesivamente farragosa vamos a fijar, sin pérdida de generalidad, la dimensionalidad del espacio de señales, N , igual a 1.

Fijando $W = \pi/T$, encontramos el siguiente $\phi_0(t)$, que no es otro que un pulso en raíz de coseno alzado de ancho de banda mínimo

$$\phi_0(t) = \sqrt{\frac{1}{T}} \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{TF} \Phi_0(j\omega) = \sqrt{T} \Pi\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right) \quad (9.20)$$

que cumple (9.18), ya que $\Phi_0(j\omega)G(j\omega) = \Phi_0(j\omega)$ y cumple (9.19) porque ser un filtro en raíz de coseno alzado. Para dimensiones del espacio de señales, N , mayores que uno pueden encontrarse formas de onda basadas en la función sinc modulada en amplitud que cumplen las condiciones de ortonormalidad (9.19) haciendo $W = N\pi/T$, como encontramos en el formato de modulación OFDM tratado en el capítulo anterior.

El siguiente paso consiste en restituir la independencia entre las muestras del ruido que se ha perdido al introducir el filtro de limitación de banda. Para ello vamos a plantear un modelo equivalente en tiempo discreto con ayuda de técnicas de muestreo, que no introduce ninguna limitación adicional a la información que podemos transmitir por el canal.

Tenemos que tanto la entrada (si se quiere, efectiva) como la salida del canal son de banda limitada, y podemos emplear un muestreo uniforme ideal a la frecuencia de Nyquist; esto es, con un periodo de muestro T_s igual a π/W . Como anteriormente, fijaremos, sin pérdida de generalidad, la dimensión del espacio de señales, N , igual a 1.

En estas condiciones, fijando $W = \pi/T$ tenemos $T_s = T$, y definiendo $s[n] \equiv s(nT)$, $n[n] \equiv n'(nT)$ y $r[n] \equiv r(nT)$, nuestro canal se reduce al canal discreto equivalente cuando se cumple el criterio de Nyquist (véase el Apartado 5.2), siendo su relación entre entrada y salida

$$r[n] = s[n] + n[n] \quad (9.21)$$

con $n[n]$ un proceso gausiano y blanco en tiempo discreto, función de autocorrelación $R_n[k] = \frac{N_0}{2T} \delta[k] = \frac{N_0 W}{2\pi} \delta[k]$ y estadísticamente independiente de $s[n]$ (derivado del modelo de comunicaciones). $s[n]$ es un proceso en tiempo discreto con la misma base de tiempo que la secuencia de símbolos $A[n]$ y generado a partir de esta mediante una transformación sin memoria, lo que hace que, si los valores de $A[n]$ eran estadísticamente independientes unos de otros, también lo sean los de la secuencia $s[n]$. La diferencia, en términos de naturaleza probabilística, entre $s[n]$ y $A[n]$, reside en que mientras que la función de densidad de probabilidad de cada muestra de $s[n]$ es continua, la de la secuencia $A[n]$ es discreta.

Una vez conseguida la independencia estadística entre las muestras de $n[n]$ y entre las muestras de $s[n]$ ya podemos suprimir la dependencia temporal y definir formalmente el *canal probabilístico gausiano*¹ como aquel que relaciona dos variables aleatorias X e Y con funciones de densidad de probabilidad continuas sobre \mathbb{R} mediante la función de densidad

¹Siempre que no exista ambigüedad, nos referiremos al canal probabilístico gausiano simplemente como canal gausiano.

de probabilidad condicional

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2}} \quad (9.22)$$

En nuestro caso, $\sigma^2 = N_0 W / 2\pi = N_0 / 2T$, siendo utilizado el canal $1/T$ veces por segundo.

Para dimensiones del espacio de señales, N , mayores que uno puede realizarse un desarrollo paralelo que conduce a una formulación vectorial de (9.21) en la que cada muestra del proceso multidimensional $\mathbf{n}[n]$ es estadísticamente independientemente del resto de muestras, de media nula y matriz de covarianza $C_n = N_0/(2T) \mathbf{I}$, siendo \mathbf{I} la matriz identidad. El canal probabilístico gausiano resultante posee una función de densidad de probabilidad condicional

$$f_{Y|X}(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|^2}{2\sigma^2}} \quad (9.23)$$

con $\sigma^2 = N_0 W / 2\pi = N_0 / 2T$. Este modelo es conocido en la literatura como *canales gausianos en paralelo*.

9.1.3. Canal gausiano con entrada digital

La sustitución del canal gausiano con entrada digital en el modelo general de transmisión indefinida de símbolos (Figura 9.1) da como resultado el que muestra la Figura 9.9. Como

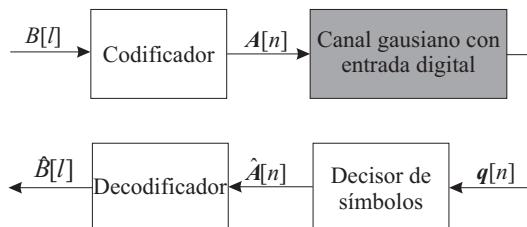


Figura 9.9. Modelo general de un sistema de comunicación digital para transmisión indefinida de símbolos utilizando el modelo de canal gausiano con entrada digital.

quedó establecido en el Apartado 4.5 (Página 224 y siguientes), la entrada a este canal es una secuencia de símbolos $\mathbf{A}[n]$ pertenecientes a la constelación $\{\mathbf{a}_i, i = 0, \dots, M - 1\}$ y estadísticamente independientes. La salida, $\mathbf{q}[n]$, toma la forma (4.99)

$$\mathbf{q}[n] = \mathbf{A}[n] + \mathbf{n}[n]$$

donde $\mathbf{n}[n]$ es la componente de ruido, que es un proceso estocástico discreto multidimensional gausiano independiente de $\mathbf{A}[n]$, cuyas muestras son a su vez mutuamente independientes y con función de densidad de probabilidad

$$f_{\mathbf{n}[n]}(\mathbf{n}[n]) = \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} e^{-\frac{\|\mathbf{n}[n]\|^2}{N_0}} \quad (9.24)$$

A partir de aquí, la obtención del modelo probabilístico es simple. Formalmente, lo definimos como aquel que relaciona dos variables aleatorias \mathbf{X} e \mathbf{Y} , la primera con un alfabeto $\{\mathbf{x}_i, i = 1, \dots, M\}$ y la segunda con una función de densidad de probabilidad continua sobre \mathbb{R} (nótese que la función de densidad de probabilidad de \mathbf{Y} no entra en la definición del canal, sólo su dominio, \mathbb{R}) y el conjunto de funciones de densidad de probabilidad condicionales

$$f_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_i\|^2}{2\sigma^2}} \quad i = 1, \dots, M \quad (9.25)$$

A este canal lo denominamos *canal gausiano con entrada discreta*.

En nuestro caso, $\sigma^2 = N_0/2$, independientemente de la dimensionalidad del espacio de señales.

9.2. CANALES DIGITALES

Una vez establecido el modelo probabilístico para los canales digitales, el DMC, en el apartado anterior, abordaremos ahora el establecimiento de los límites en este tipo de canales con ayuda de la teoría de la información de Shannon. Comenzaremos con el establecimiento de las medidas de información, para definir posteriormente el concepto de capacidad de canal y, finalmente, el teorema de codificación de canal, que es el que realmente establece que podemos realizar una comunicación tan fiable como deseemos siempre que transmitamos una cantidad de información no superior a la de la capacidad del canal.

9.2.1. Información y entropía

Intuitivamente podemos decir que un evento poco frecuente contiene mucha información y un evento frecuente, poca. Que un político dimita de un cargo público tras algún escándalo es un evento que contiene gran información por lo infrecuente y, en cambio, que no dimita en tales circunstancias contiene poca información.

Para evitar la subjetividad que entraña una definición de información como esta es necesario recurrir a la teoría de la probabilidad y definir una medida objetiva de la información sobre una variable aleatoria. Esta medida es la *entropía*, cuya definición y propiedades veremos en este apartado. También analizaremos la medida de la información que una variable aleatoria proporciona sobre otra mediante la *información mutua*.

Entropía, entropía conjunta y entropía condicional

Consideremos una variable aleatoria discreta X que puede tomar uno de entre M valores posibles $\{x_i, i = 1, \dots, M\}$ de acuerdo con la distribución de probabilidades $\{p_X(x_i), i = 1, \dots, M\}$. En el caso del canal digital, esta variable aleatoria X puede corresponderse con la entrada o la salida, siendo M el número de puntos de la constelación de señales y, si X se

corresponde con la entrada, una distribución de probabilidades uniforme ($p_X(x_i) = 1/M$). En el caso del canal digital binario, X puede corresponderse con la entrada o la salida tomando M un valor igual a 2. Aquí vamos a considerar que cada símbolo x_i tiene una probabilidad de aparición $p_X(x_i)$ que es, en general, distinta de $p_X(x_j)$ para $i \neq j$.

Definimos la *entropía* de X , $H(X)$, como

$$H(X) \doteq \sum_{i=1}^M p_X(x_i) \log_2 \frac{1}{p_X(x_i)} = -\sum_{i=1}^M p_X(x_i) \log_2 p_X(x_i) \quad (9.26)$$

que expresamos en *bits*, y donde consideramos $0 \cdot \log_2 0 = 0$. Antes de entrar a analizar esta medida conviene decir que puede aplicarse a cualquier variable aleatoria discreta y que podemos emplear otras bases para el logaritmo, en cuyo caso cambian las unidades en que se expresa la medida, pero no la propia medida; si en lugar de emplear el logaritmo en base 2 hubiésemos empleado el logaritmo neperiano, el resultado se expresaría en *nats*.

La entropía puede interpretarse desde dos puntos de vista distintos. Desde el punto de vista del modelo de sistema de comunicación digital o, en general, desde el punto de vista de un observador que espera a que la variable aleatoria B tome un valor determinado, la entropía representa la incertidumbre sobre el valor concreto que tomará X . Si X tomase siempre el mismo valor (un valor de $p_X(x_i)$ igual a 1 y el resto 0) no tenemos ninguna incertidumbre sobre el valor que tomará X , y podemos comprobar que la entropía en ese caso es igual a 0. Si X deja de tomar siempre el mismo valor, la incertidumbre aumenta y, con ella, la entropía.

Desde el punto de vista de una fuente que genere el símbolo X , la entropía representa el valor medio de la información que contiene el símbolo. No en vano, la entropía puede considerarse como la esperanza matemática de una función sobre x , $\log_2 \frac{1}{p_X(x_i)}$, y esta función es una medida objetiva del concepto intuitivo de información que mencionamos al principio del apartado (un evento contiene más información cuanto menos probable es su ocurrencia). Esta interpretación también está relacionada con el sentido de entropía empleado en física y, concretamente, con el concepto de entropía en termodinámica.

En el Apéndice 9.A puede encontrarse la justificación que ofrece Shannon sobre la adopción de la entropía como medida de incertidumbre o información.

La entropía es un funcional de la distribución de probabilidad de los símbolos, $H(X) = H(\{p_X(x_i), i = 1, \dots, M\})$, y no depende de los valores concretos x_i que tomen estos. Algunas de sus propiedades son:

- $H(X) \geq 0$, ya que $0 \leq p_X(x_i) \leq 1$ y, consecuentemente, $\log_2(1/p_X(x_i)) \geq 0$.
- $H(X) \leq \log_2 M$, produciéndose la igualdad si y sólo si los símbolos son equiprobables ($p_X(x_i) = 1/M$). Esta propiedad se demuestra en el Apéndice 9.B.

Para ilustrar estas propiedades vamos a calcular la entropía en un caso muy sencillo. Si $M = 2$ y $p_X(x_1) = p = 1 - p_X(x_2)$, la entropía de X es igual a

$$H(X) = -p \log_2 p - (1-p) \log_2 (1-p) \doteq H(p) \quad (9.27)$$

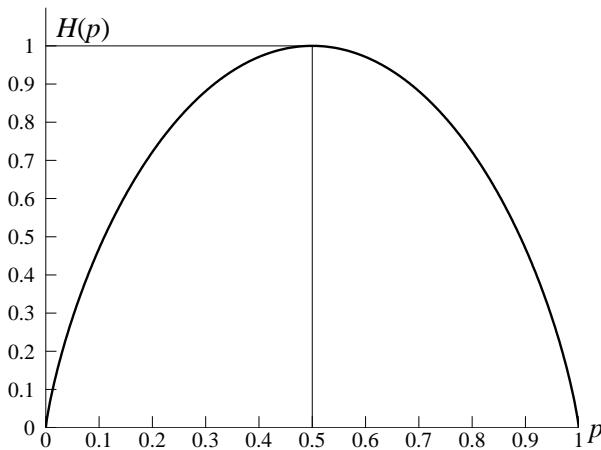


Figura 9.10. Entropía de un alfabeto binario en función de la probabilidad de aparición de uno de los símbolos.

cuyo valor está representado en la Figura 9.10 en función de p . Podemos comprobar que en los casos en que no existe incertidumbre ($p = 0$ y $p = 1$) la entropía es nula. Fuera de estos casos la entropía es siempre mayor que cero, tomando el valor máximo, un bit, cuando los símbolos son equiprobables. La función $H(p)$ definida en (9.27) recibe el nombre de *función entropía*, y no debe confundirse con la entropía de una variable aleatoria, pues su argumento es un número entre 0 y 1.

Podemos extender la definición de entropía a más de una variable aleatoria (por ejemplo, a dos símbolos de la secuencia $B[n]$ del modelo de transmisión de una secuencia indefinida) sin más que considerar su función de probabilidad conjunta. Para mayor generalidad, consideraremos que la segunda variable aleatoria, Y , tiene un alfabeto de L símbolos, $\{y_i, i = 1, \dots, L\}$ y una distribución de probabilidades (marginales) $\{p_Y(y_j), j = 1, \dots, L\}$. La *entropía conjunta* de X e Y con una distribución de probabilidad conjunta $\{p_{X,Y}(x_i, y_j), i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, L\}$, $H(X, Y)$, se define como

$$H(X, Y) \doteq \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^L p_{X,Y}(x_i, y_j) \log_2 \frac{1}{p_{X,Y}(x_i, y_j)} \quad (9.28)$$

y se mide, al igual que la entropía, en bits.

La interpretación de la entropía conjunta no difiere de la de entropía para una variable aleatoria porque, al fin y al cabo, el par de variables X e Y puede considerarse como una única variable aleatoria vectorial con un alfabeto de ML símbolos.

Si las variables X e Y son independientes se cumple que $p_{X,Y}(x_i, y_j) = p_X(x_i)p_Y(y_j)$

y su entropía conjunta es la suma de las entropías individuales

$$\begin{aligned}
 H(X, Y) &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^L p_X(x_i)p_Y(y_j) \log_2 \frac{1}{p_X(x_i)p_Y(y_j)} \\
 &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^L p_X(x_i)p_Y(y_j) \log_2 \frac{1}{p_X(x_i)} + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^L p_X(x_i)p_Y(y_j) \log_2 \frac{1}{p_Y(y_j)} \\
 &= \sum_{i=1}^M p_X(x_i) \log_2 \frac{1}{p_X(x_i)} + \sum_{j=1}^L p_Y(y_j) \log_2 \frac{1}{p_Y(y_j)} \\
 &= H(X) + H(Y)
 \end{aligned} \tag{9.29}$$

Sin embargo, ese es el caso en que la combinación de dos variables produce mayor entropía, ya que si ambas variables no fuesen independientes, el conocimiento del valor de una de ellas nos eliminaría incertidumbre sobre el valor de la otra. Para medir esta incertidumbre definimos la *entropía condicional* de dos variables X e Y , $H(X|Y)$ como

$$\begin{aligned}
 H(X|Y) &\doteq \sum_{j=1}^L p_Y(y_j)H(X|Y = y_j) \\
 &= \sum_{j=1}^L p_Y(y_j) \sum_{i=1}^M p_{X|Y}(x_i|y_j) \log_2 \frac{1}{p_{X|Y}(x_i|y_j)} \\
 &= \sum_{j=1}^L \sum_{i=1}^M p_{X,Y}(x_i, y_j) \log_2 \frac{1}{p_{X|Y}(x_i|y_j)}
 \end{aligned} \tag{9.30}$$

donde $p_{X|Y}(x_i|y_j)$ es la probabilidad de X condicionada a Y , que cumple, de acuerdo con la regla de Bayes, que $p_{X|Y}(x_i|y_j)p_Y(y_j) = p_{X,Y}(x_i, y_j)$. La entropía condicional también se mide en bits.

La entropía condicional puede interpretarse como la medida de la incertidumbre que tenemos sobre el valor de X una vez que conocemos el valor de Y o, visto al contrario, conocido Y , $H(X|Y)$ representa la información nueva que añade el conocimiento de X . Si, como hemos considerado antes, las variables X e Y fuesen independientes, el conocimiento del valor de una no elimina incertidumbre con respecto a la otra y se cumple, como podemos comprobar fácilmente, que $H(X|Y) = H(X)$.

Podemos relacionar la entropía conjunta con la condicional de la forma

$$\begin{aligned}
 H(X, Y) &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^L p_{X,Y}(x_i, y_j) \log_2 \frac{1}{p_{X,Y}(x_i, y_j)} \\
 &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^L p_{X,Y}(x_i, y_j) \log_2 \frac{1}{p_X(x_i)p_{Y|X}(y_j|x_i)} \\
 &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^L p_{X,Y}(x_i, y_j) \log_2 \frac{1}{p_X(x_i)} + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^L p_{X,Y}(x_i, y_j) \log_2 \frac{1}{p_{Y|X}(y_j|x_i)} \\
 &= \sum_{i=1}^M p_X(x_i) \log_2 \frac{1}{p_X(x_i)} + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^L p_{X,Y}(x_i, y_j) \log_2 \frac{1}{p_{Y|X}(y_j|x_i)} \\
 &= H(X) + H(Y|X)
 \end{aligned} \tag{9.31}$$

y realizando un desarrollo similar podemos llegar a demostrar que

$$H(X, Y) = H(Y) + H(X|Y) \tag{9.32}$$

lo que no quiere decir, por comparación con (9.31), que $H(X|Y)$ sea igual a $H(Y|X)$, como podemos comprobar sin más que considerar una situación en la que $H(X|Y) \neq 0$ y $H(X) \neq H(Y)$.

Información mutua

El concepto que podríamos definir como “contrario” a la entropía condicional es la *información mutua* entre dos variables aleatorias X e Y , $I(X; Y)$, ya que representa la incertidumbre que hemos eliminado sobre el valor de X mediante el conocimiento del valor de Y o, visto de otra forma, la información que aporta Y sobre el valor que puede tomar X . Formalmente se define como

$$I(X; Y) \doteq \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^L p_{X,Y}(x_i, y_j) \log_2 \frac{p_{X,Y}(x_i, y_j)}{p_X(x_i)p_Y(y_j)} \tag{9.33}$$

y se mide en bits.

La información mutua es una medida no negativa, $I(X; Y) \geq 0$, como demostramos en el Apéndice 9.B. Además, puede expresarse en función de la entropía si reescribimos (9.33)

de la forma

$$\begin{aligned}
 I(X; Y) &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^L p_{X,Y}(x_i, y_j) \log_2 \frac{p_{X,Y}(x_i, y_j)}{p_X(x_i)p_Y(y_j)} \\
 &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^L p_{X,Y}(x_i, y_j) \log_2 \frac{p_{X|Y}(x_i|y_j)}{p_X(x_i)} \\
 &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^L p_{X,Y}(x_i, y_j) \log_2 \frac{1}{p_X(x_i)} + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^L p_{X,Y}(x_i, y_j) \log_2 p_{X|Y}(x_i|y_j) \\
 &= \sum_{i=1}^M p_X(x_i) \log_2 \frac{1}{p_X(x_i)} - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^L p_{X,Y}(x_i, y_j) \log_2 \frac{1}{p_{X|Y}(x_i|y_j)} \\
 &= H(X) - H(X|Y)
 \end{aligned} \tag{9.34}$$

Con un desarrollo similar llegamos a

$$I(X; Y) = H(Y) - H(Y|X) \tag{9.35}$$

Bien a partir de la definición (9.33), o bien igualando (9.34) a (9.35), obtenemos que la información mutua es una medida simétrica

$$I(X; Y) = I(Y; X) \tag{9.36}$$

Además, sustituyendo (9.32) en (9.34) relacionamos la información mutua con la entropía conjunta como

$$I(X; Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y) \tag{9.37}$$

Estas relaciones podemos expresarlas gráficamente mediante un diagrama de Venn tal y como se muestra en la Figura 9.11, donde cada uno de los conjuntos representa la entropía de cada variable, $H(X)$ y $H(Y)$; la intersección entre ellos es la información mutua, $I(X; Y)$, y la unión la entropía conjunta, $H(X, Y)$. Si X fuese independiente de Y ambos conjuntos

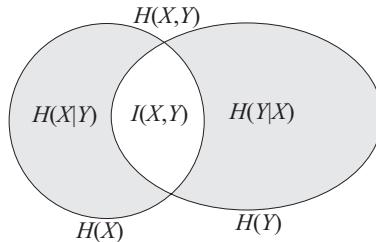


Figura 9.11. Relación entre entropía e información mutua.

tendrían intersección nula, y si X fuese igual a Y , la entropía condicional de una variable con respecto a la otra sería nula.

A partir de la definición de información mutua, (9.33), también podemos obtener la definición de entropía. Para ello basta considerar la información mutua de una variable consigo

misma, $I(X; X)$. Teniendo en cuenta que la distribución conjunta de una variable consigo misma toma la forma $p_{X,X}(x_i, x_j) = \delta[i - j]p_X(x_i)$ tenemos

$$\begin{aligned}
 I(X; X) &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \delta[i - j]p_X(x_i) \log_2 \frac{\delta[i - j]p_X(x_i)}{p_X(x_i)p_X(x_j)} \\
 &= \sum_{i=1}^M p_X(x_i) \log_2 \frac{p_X(x_i)}{p_X(x_i)p_X(x_i)} \\
 &= \sum_{i=1}^M p_X(x_i) \log_2 \frac{1}{p_X(x_i)} \\
 &= H(X)
 \end{aligned} \tag{9.38}$$

De aquí que la entropía también se conoce con el nombre de *autoinformación*.

9.2.2. Capacidad de canal

Una vez definidos los conceptos de entropía e información mutua estamos en condiciones de determinar la cantidad máxima de información que podemos transmitir por el DMC. Para ello vamos a calcular la información mutua entre la entrada y la salida del canal y a través de ella intentaremos averiguar qué parte de la información se transmite y qué parte se pierde a su paso por el canal.

Para calcular la información entre la entrada, X , y la salida, Y , del DMC es necesario conocer las distribuciones de probabilidad de X e Y . Conocida una de ellas, por ejemplo, la distribución de probabilidades de la entrada, $\{p_X(x_i), i = 1, \dots, M\}$, y haciendo uso de las probabilidades de transición que definen el DMC, $\{p_{Y|X}(y_j|x_i), i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, L\}$, queda determinada la distribución de probabilidad conjunta de la entrada y la salida, $p_{X,Y}(x_i, y_j) = p_{Y|X}(y_j|x_i)p_X(x_i)$. A partir de esta, mediante marginalización, obtenemos la distribución de probabilidades de la salida como

$$p_Y(y_j) = \sum_{i=1}^M p_{X,Y}(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^M p_{Y|X}(y_j|x_i)p_X(x_i) \tag{9.39}$$

y tenemos, en definitiva, la caracterización estadística completa de la entrada y la salida.

A partir de todas estas distribuciones de probabilidad podemos calcular la información mutua entre la entrada y la salida del canal; por ejemplo, calculando $H(X)$, $H(Y)$, $H(X, Y)$ y aplicando (9.37).

En primer lugar, podemos decir que la información mutua entre la entrada y la salida del canal representa la información que aporta la salida del canal sobre la entrada, o la incertidumbre que eliminamos sobre el valor de la entrada conociendo la salida o, en definitiva, la información que es transmitida por el canal.

Para aclarar esta idea, emplearemos la igualdad (9.34), $I(X; Y) = H(X) - H(X|Y)$ y analizaremos dos casos extremos en el DMC más sencillo, el BSC: el mejor canal posible,

esto es, un canal libre de errores ($p = 0$ ó, alternativamente, $p = 1$) y el peor canal posible, es decir, un canal con la máxima probabilidad de error ($p = 1/2$)².

La distribución conjunta de probabilidades entrada-salida en el caso en que la probabilidad de error, p , es igual a 0 es la que muestra el Cuadro 9.1. A partir de esta distribución

$p_{X,Y}(x_i, y_j)$	x_1	x_2
y_1	$p_X(x_1)$	0
y_2	0	$p_X(x_2)$

Cuadro 9.1. Distribución de probabilidades en el BSC con $p = 0$.

o, simplemente, teniendo en cuenta que cuando $p = 0$ no se producen errores, podemos establecer la identidad $Y = X$. Empleando la igualdad (9.38), obtenemos que

$$I(X; Y) = H(X)$$

y, teniendo en cuenta (9.34), obtenemos que $H(X|Y) = 0$, lo que también podríamos haber deducido directamente a partir de la definición de entropía condicional: en nuestro caso, conocida Y eliminamos toda incertidumbre sobre el valor de X y, por tanto, $H(X|Y) = 0$.

La distribución conjunta de probabilidades entrada-salida en el caso en que la probabilidad de error, p , es igual a $1/2$ es la que muestra el Cuadro 9.2, donde, como era de

$p_{X,Y}(x_i, y_j)$	x_1	x_2
y_1	$p_X(x_1)/2$	$p_X(x_2)/2$
y_2	$p_X(x_1)/2$	$p_X(x_2)/2$

Cuadro 9.2. Distribución de probabilidades en el BSC con $p = 1/2$.

esperar (téngase en cuenta que en esta situación al enviar un símbolo existe tanta probabilidad de que aparezca el mismo símbolo como el otro) Y posee una distribución equiprobable independientemente de la que posee X o, lo que es lo mismo, X e Y son estadísticamente independientes ($p_{X,Y}(x_i, y_j) = p_X(x_i)p_Y(y_j)$). Como hemos deducido anteriormente, si X e Y son independientes, su información mutua es nula ($I(X; Y) = 0$) y, teniendo en cuenta (9.34), obtenemos que $H(X|Y) = H(X)$, lo que también podríamos haber deducido directamente a partir de la definición de entropía condicional: en nuestro caso, el conocimiento de Y no elimina ninguna incertidumbre sobre el valor de X porque ambas variables son independientes y, por tanto, $H(X|Y) = H(X)$.

De estos dos casos extremos podemos extraer las siguientes conclusiones:

- La información mutua entre la entrada y la salida del canal es la cantidad de información que pasa de la entrada a la salida cuando se utiliza dicho canal. En el caso en el

²Si p fuese mayor de $1/2$ no hay más que intercambiar los símbolos a la salida para tener una probabilidad menor que $1/2$.

que la probabilidad de error es nula, pasa toda la información ($I(X; Y) = H(X)$), y en el caso en que la entrada y la salida son estadísticamente independientes, se “ pierde” toda la información ($I(X; Y) = 0$).

- $H(X|Y)$ puede interpretarse como la información que se “ pierde” en el canal, y así la información que “atraviesa” el canal ($I(X; Y)$) es igual a la que hay a la entrada ($H(X)$) menos la que se “ pierde” ($H(X|Y)$), según (9.34). En el caso en que la probabilidad de error es cero, la “pérdida” es nula, y en el caso en que la entrada y la salida son estadísticamente independientes, la “pérdida” es total, es decir, igual a la información a la entrada del canal.

Estas conclusiones pueden extenderse a cualquier DMC con alfabetos de entrada y salida de, respectivamente, M y L símbolos.

Ahora bien, la información mutua entre la entrada y la salida del canal es función no sólo de las probabilidades de transición del canal, sino también de la distribución de probabilidades a la entrada. Si lo que deseamos es una caracterización sólo del canal, esta debe ser la cantidad de información que es capaz de atravesar dicho canal. Para determinarla, debemos ensayar todas las posibles distribuciones de entrada, tomando el valor máximo de la información mutua entre la entrada y la salida como la verdadera *capacidad* de transmisión de información del canal. Formalmente, definimos la *capacidad de canal*, C , de un canal discreto sin memoria, como

$$C \doteq \max_{\{p_X(x_i)\}} I(X; Y) \quad (9.40)$$

Algunas propiedades de la capacidad de canal son las siguientes:

- $C \geq 0$, ya que $I(X; Y) \geq 0$.
- $C \leq \log_2 M$, ya que $C = \max I(X; Y) \leq \max H(X) = \log_2 M$.
- $C \leq \log_2 L$, ya que $C = \max I(X; Y) \leq \max H(Y) = \log_2 L$.

Para algunos casos sencillos, como el canal binario simétrico, podemos calcular de forma directa la capacidad del canal

$$\begin{aligned} I(X; Y) &= H(Y) - H(Y|X) \\ &= H(Y) - \sum_{i=1}^2 p_X(x_i) H(Y|X = x_i) \\ &= H(Y) - \sum_{i=1}^2 p_X(x_i) \left(- \sum_{j=1}^2 p_{Y|X}(y_j|x_i) \log_2 p_{Y|X}(y_j|x_i) \right) \\ &= H(Y) - \sum_{i=1}^2 p_X(x_i) (-p \log_2 p - (1-p) \log_2 (1-p)) \\ &= H(Y) - \sum_{i=1}^2 p_X(x_i) H(p) \\ &= H(Y) - H(p) \end{aligned} \quad (9.41)$$

donde $H(p)$ es la función entropía definida en (9.27) y representada en la Figura 9.10. El máximo de (9.41) se consigue cuando los símbolos de entrada son equiprobables, lo que produce a la salida símbolos equiprobables y, por tanto, $H(Y) = 1$. La capacidad C en este caso es

$$C = 1 - H(p) \text{ bits} \quad (9.42)$$

Para otros casos sencillos podemos obtener demostraciones similares, buscando siempre la distribución de probabilidades a la entrada que hace máxima la información mutua entre la entrada y la salida. Sin embargo, no existe un procedimiento estándar que nos permita, sistemáticamente, obtener la capacidad de un canal discreto sin memoria de manera analítica. Aunque en algunos casos especiales podemos encontrar resultados en la literatura que ofrecen fórmulas cerradas para el cálculo de la capacidad de canal (véase Problema P9.11), en general se puede calcular la capacidad de canal para valores concretos de la matriz de canal mediante técnicas numéricas de optimización no lineal teniendo en cuenta que $I(X; Y)$ es una función continua respecto al valor de la distribución de probabilidades de entrada, cóncava y con un único máximo³.

Veamos ahora algunos ejemplos de cálculo de la capacidad de canal. En primer lugar, calcularemos la capacidad del BSC equivalente al canal digital binario considerado en el Ejemplo 9.2.

Ejemplo 9.3

Continuando con el Ejemplo 9.2 (recuerde que se obtiene el BSC equivalente a un sistema de comunicaciones que emplea la constelación que muestra la Figura 4.28 y el codificador del Ejemplo 4.5, obteniendo la BER expresada en (4.102)), y empleando la fórmula de la capacidad de un canal BSC previamente obtenida, (9.42), tenemos que para un valor de $N_0/2$ igual a 1 ($E_b/N_0 = 1,25$), que proporcionaba una BER igual a 0,1197, la capacidad del BSC es de 0,4716 bits por uso del canal. Igualmente, para un valor de $N_0/2$ diez veces menor, 0,1, que proporcionaba una BER igual a 0,0006, la capacidad del BSC es de 0,9929 bits por uso del canal.

Variando de forma continua el valor de N_0 , obtenemos la relación entre la relación señal a ruido en el canal (expresada en términos de E_b/N_0) y la capacidad del canal que muestra la Figura 9.12. En ella podemos apreciar cómo al disminuir la relación señal a ruido la capacidad del canal tiende a ser nula.

Analicemos ahora el DMC equivalente al canal digital de cuatro símbolos del Ejemplo 9.1.

Ejemplo 9.4

Empleando la constelación que muestra la Figura 4.28, en el Ejemplo 9.1 calculábamos la matriz de canal del DMC equivalente, (9.5), que particularizábamos para dos valores distintos de N_0 en (9.6) y (9.7).

En este caso no es tan sencillo encontrar analíticamente la distribución de probabilidades a la entrada del canal que hace máxima la información mutua entre la entrada y la salida del canal.

³Estas propiedades de la información mutua facilitan enormemente los procedimientos de búsqueda del máximo respecto a la distribución de probabilidades de la entrada.

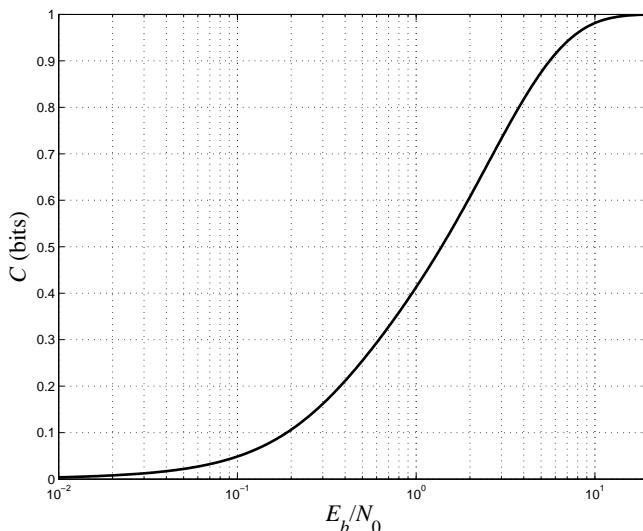


Figura 9.12. Capacidad del canal digital binario considerado en el Ejemplo 9.3 en función de E_b/N_0 .

Podemos, sin embargo, emplear uno de los procedimientos numéricos mencionados anteriormente; concretamente, el descrito en [21, Página 367] consistente en, alternativamente, calcular el conjunto de probabilidades $\{p_{X|Y}(x_i|y_j), i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, L\}$ y encontrar la distribución de probabilidades $\{p_X(x_i), i = 1, \dots, M\}$ que hace máxima $I(X; Y)$ supuestas fijas las probabilidades $\{p_{X|Y}(x_i|y_j), i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, L\}$. El código de una función Matlab que implementa este procedimiento podemos encontrarlo en la Figura 9.13 y en el Problema P9.13 se aborda su desarrollo.

Empleando este procedimiento, los DMC con matrices de canal dadas en (9.6) y (9.7) poseen capacidades de, respectivamente, 1,1095 y 1,9862 bits por uso. Más interesante que estos números resulta obtener la gráfica de capacidad del canal en función de la relación señal a ruido, como hicimos en el ejemplo anterior. Esta gráfica puede observarse en la Figura 9.14, donde se muestra también la distribución de probabilidades para la que se alcanza la capacidad para cada valor de E_s/N_0 . Resulta interesante ahora establecer las similitudes y diferencias de este comportamiento con la relación señal a ruido y el mostrado en la Figura 9.12. Por una parte la capacidad crece cuando lo hace la relación señal a ruido tal y como anteriormente, estando ahora el límite en 2 bits por uso del canal. Por otra, en la Figura 9.14 podemos apreciar dos situaciones distintas: para valores altos de E_s/N_0 la capacidad se alcanza cuando los cuatro símbolos de entrada al canal (recordemos que se corresponden con valores de $A[n]$ de 1, -1, 3 y -3) son equiprobables, pero conforme disminuye la relación señal a ruido, la información mutua se hace máxima aumentando la probabilidad de los símbolos de mayor amplitud (3 y -3) y disminuyendo la de los símbolos de menor amplitud (1 y -1) llegando, para valores de E_s/N_0 menores de 2, a emplear únicamente los símbolos de mayor amplitud, cada uno de ellos con probabilidad 0,5. Este comportamiento nos indica que para relaciones señal a ruido pequeñas una modulación binaria resulta óptima. Recuérdese también que la distribución de probabilidades para la que se alcanza la capacidad en el BSC (como es el caso del ejemplo anterior) es siempre la misma, independiente de la relación señal a ruido.

Si en el proceso de codificación de la secuencia $B[l]$ a la secuencia $A[n]$ no hubiese pérdida

```

function [c,x]=capacidad(p,tol)
%
% Calcula de la capacidad de un DMC
% entradas:
%   p matriz de canal
%   tol tolerancia para condicion de parada
% salidas:
%   c capacidad del canal
%   x distribucion de probabilidades para la que se alcanza
%       la capacidad del canal
%

%
[a b]=size(p);
x=ones(1,a)/a; % equiprobabilidad como punto inicial
continuar=1;
while continuar
    y=x*p; % p(y)
    xy=diag(x)*p; % p(x,y)
    q=xy/diag(y); % p(x|y)
    aux=prod((q.^p)');
    xn=aux/sum(aux); % p(x) que hace maxima I(x,y) dado p(x|y)
    continuar=norm(x-xn)>=tol; % comparacion con la solucion anterior
    x=xn; % actualizar p(x)
end
y=x*p;
c=log2(sum(aux)); % capacidad

```

Figura 9.13. Programa MATLAB® que calcula la capacidad de un DMC.

de capacidad, la curva de la Figura 9.12 debería ser exactamente la mitad de la curva de la Figura 9.14 (haciendo la equivalencia $E_s = 2E_b$), porque se emplean dos símbolos binarios de la secuencia $B[l]$ para codificar cada símbolo de la secuencia. Sin embargo, restando a la capacidad del DMC que muestra la Figura 9.14 el doble de la capacidad del BSC que muestra la Figura 9.12 obtenemos el resultado que puede verse en la Figura 9.15, donde podemos apreciar que, en función de la relación a señal a ruido, pueden perderse hasta casi 0,6 bits por símbolo binario transmitido. Aunque la pérdida real es menor debido a la distribución de probabilidades para la que se alcanza la capacidad tal y como se ha discutido antes, la conclusión que podemos extraer de este ejemplo es que incluso un proceso tan “inocuo” como la codificación de los símbolos de entrada a los símbolos de la constelación puede producir una pérdida de fiabilidad del sistema de comunicaciones.

Un último comentario respecto a la capacidad de canal en relación con estos ejemplos: hay que recordar que la capacidad representa el límite superior de la información que atraviesa el canal, y que ante una determinada distribución de probabilidades a la entrada del canal, la información que realmente atraviesa el canal es la información mutua entre la entrada y la salida.

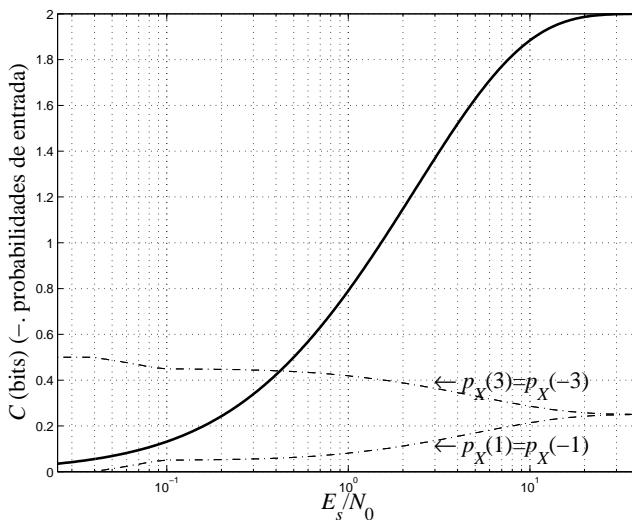


Figura 9.14. Capacidad del canal discreto sin memoria considerado en el Ejemplo 9.4 en función de E_s/N_0 y distribución de probabilidades para la que se alcanza la capacidad.

9.2.3. Teorema de codificación de canal

Hasta ahora lo único que hemos hecho es definir la capacidad de canal como la máxima información que es capaz de atravesarlo, lo que, en sí mismo, no es de utilidad si no somos capaces de demostrar que es posible transmitir esa cantidad de información (la capacidad) de manera fiable.

Tomemos como ejemplo el BSC. Si la probabilidad de error p es igual a cero podemos transmitir un símbolo binario de manera fiable sin más que presentarlo a la entrada del canal. En este caso, el símbolo binario puede contener un bit de información (si los dos posibles símbolos son equiprobables), la capacidad del canal es igual a 1 bit por uso, y la cantidad de información que podemos transmitir de manera fiable es igual a la capacidad del canal. Ahora bien, ¿podemos mantener esta conclusión cuando p es no nula? Veamos con un ejemplo lo que sucede en este caso.

Ejemplo 9.5

Consideremos ahora el caso de BSC con $p = 0,15$, que nos da una capacidad de 0,39 bits por uso del canal, insuficiente para transmitir un símbolo binario equiprobable. Una estrategia que podemos adoptar es utilizar tres veces de manera consecutiva el BSC para transmitir un símbolo binario, con la intención de obtener una capacidad de $3 \cdot 0,39 = 1,17$ bits⁴. La opción más sencilla es transmitir las tres veces el mismo símbolo, decidiendo por mayoría a la salida del

⁴Este valor de capacidad no es exacto, aunque sirve igualmente para ilustrar la necesidad de un mecanismo de codificación cuando el canal es ruidoso. La razón de la inexactitud viene derivada del hecho de que los usos del canal no son independientes. Si los usos del BSC son independientes, $I((X[1], X[2], X[3]); (Y[1], Y[2], Y[3])) = I(X[1]; Y[1]) + I(X[2]; Y[2]) + I(X[3]; Y[3])$ y se suman las capacidades, pero en realidad nuestro alfabeto de entrada es binario porque sólo vamos a transmitir un símbolo binario. Más adelante calcularemos la capacidad exacta en este supuesto.

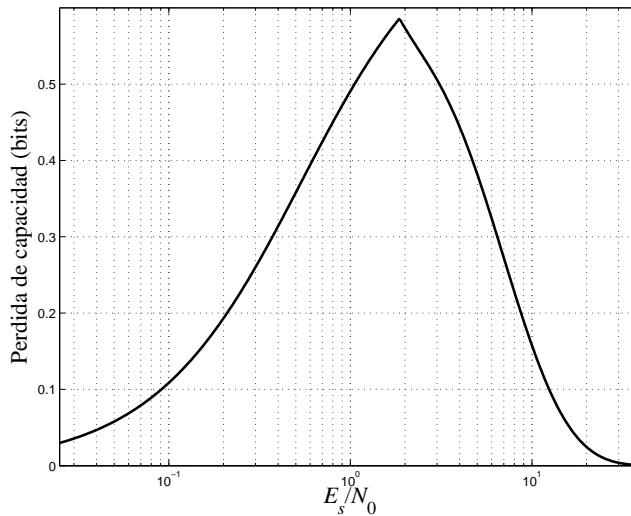


Figura 9.15. Pérdida de capacidad en el proceso de codificación de la secuencia $B[l]$ a la secuencia $A[n]$ por símbolo transmitido de esta última en el sistema considerado en los Ejemplos 9.3 y 9.4, en función de E_s/N_0 .

canal: si los tres símbolos recibidos son el mismo, se decide que fue transmitido ese símbolo, y en el caso en que los tres símbolos recibidos no sean el mismo, se decide que fue transmitido aquél que se haya recibido dos veces. Para que se produzca un error han de recibirse más de dos símbolos erróneos, lo que se produce con una probabilidad $3p^2(1 - p) + p^3$, que es menor que p cuando $0 < p < 0,5$, lo que demuestra que ha aumentado la fiabilidad de la transmisión⁵. En nuestro caso, hemos pasado de una probabilidad de error $p = 0,15$ a una probabilidad de error $3p^2(1 - p) + p^3 = 0,0607$, aunque aún no podemos calificar como fiable la transmisión porque existe una probabilidad de error no nula.

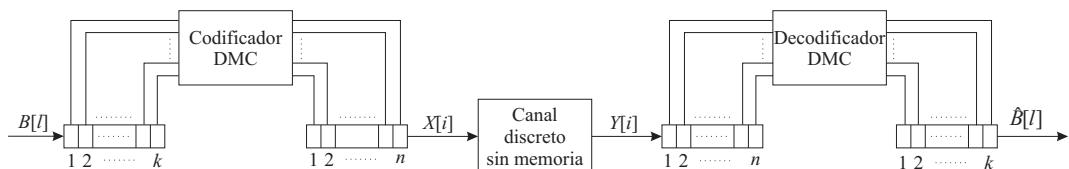


Figura 9.16. Codificador y decodificador para un canal discreto sin memoria.

En este ejemplo hemos utilizado lo que se conoce como un *código para un DMC* (no necesariamente un BSC), cuyo funcionamiento vamos a explicar con ayuda de la Figura 9.16. Un código está compuesto por el codificador, que lleva a cabo la *función de codificación*, y el decodificador, que lleva a cabo la *función de decodificación*. El codificador tiene como entrada un vector de k símbolos binarios, que define un alfabeto de entrada (al codificador), formalmente denominado *conjunto de índices*, de 2^k elementos. Ante cada entrada,

⁵ $3p^2(1 - p) + p^3 = 3p^2 - 2p^3 < \frac{3}{2}p - \frac{1}{4} < p$.

el codificador genera como salida un vector de n símbolos de entrada al DMC, haciendo corresponder a cada combinación de k símbolos binarios una combinación de n símbolos del DMC o *palabra código*. En estas condiciones, decimos que es un código (n, k) , y el valor de n suele denominarse *longitud del código*. El conjunto de todas las palabras código (2^k) recibe el nombre de *diccionario de códigos*. Los vectores de entrada al codificador son el resultado de dividir la secuencia de entrada en bloques de k símbolos, y mediante la concatenación de los vectores de salida del codificador se forma la secuencia $X[i]$ de entrada al DMC. El decodificador funciona de manera recíproca, asignando a cada combinación de n símbolos de salida del DMC una combinación de k símbolos binarios. Formalmente, un código (n, k) queda definido por el conjunto de índices y las funciones de codificación y decodificación.

Para simplificar la notación de lo que sigue vamos a considerar la transmisión de una única palabra código⁶. Denotamos los vectores de símbolos de entrada al codificador y salida del decodificador, respectivamente, como

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B[0] \\ B[1] \\ \vdots \\ B[k-1] \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \hat{B}[0] \\ \hat{B}[1] \\ \vdots \\ \hat{B}[k-1] \end{bmatrix} \quad (9.43)$$

ambos con el mismo alfabeto, $\{b_i, i = 1, \dots, 2^k\}$. Denotamos también los vectores de símbolos de entrada y salida del DMC cuando se transmite una palabra código como

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ \vdots \\ X[n-1] \end{bmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y[0] \\ Y[1] \\ \vdots \\ Y[n-1] \end{bmatrix} \quad (9.44)$$

cuyos alfabetos son $\{x_l, l = 1, \dots, M^n\}$ y $\{y_j, j = 1, \dots, L^n\}$, respectivamente. El cociente entre el número de bits de entrada⁷ al codificador, k , y el número de veces que se utiliza el DMC para transmitir una palabra código o longitud del código, n , se denomina *tasa de transmisión* o, simplemente, *tasa*; se denota como R y se mide en bits por uso del DMC

$$R = \frac{k}{n} \text{ bits por uso} \quad (9.45)$$

El codificador asigna a cada vector b_i una palabra código de entre los posibles vectores $\{x_l, l = 1, \dots, M^n\}$ de la forma $b_i \rightarrow x(i)$. Si el objetivo es lograr una transmisión

⁶Esta simplificación no le resta generalidad a nuestro planteamiento puesto que los símbolos de la secuencia $B[l]$ son independientes y el canal es sin memoria. Por otra parte, el planteamiento general del teorema de codificación de canal es más general que el aquí realizado, ya que no necesita que el número de índices del código sea una potencia de 2, lo que tampoco resta generalidad a nuestro planteamiento.

⁷Nos referiremos indistintamente a símbolos binarios o bits, dado que los símbolos de la secuencia $B[l]$ son estadísticamente independientes y equiprobables y, por tanto, cada uno contiene un bit de información.

fiable en canales con errores, el número de palabras código, 2^k , será menor que el número de posibles vectores \mathbf{x}_l , M^n . A primera vista esto puede parecer un contrasentido si tenemos en cuenta el siguiente razonamiento: para transmitir una palabra código empleamos n veces consecutivas el DMC, con lo que disponemos de una capacidad máxima de nC bits, siendo C la capacidad del DMC; al omitir algunos vectores \mathbf{x}_l (los que no son palabras código) estamos, en apariencia, reduciendo la capacidad. Ilustremos este razonamiento con un ejemplo.

Ejemplo 9.6

Retomando el Ejemplo 9.5, tenemos un caso en que $k = 1$, $n = 3$, $M = L = 2$ (canal binario), $C = 0,39$ bits y una capacidad máxima por palabra código de $3 \cdot 0,39 = 1,17$ bits. Sin embargo, de los ocho posibles valores de \mathbf{x}_l ,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sólo se emplean dos

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si calculamos la capacidad de un canal que tiene estas dos entradas y las ocho posibles salidas correspondientes a los tres usos consecutivos del BSC, su capacidad resulta ser $0,7365$ bits, y no los $3 \cdot 0,39 = 1,17$ bits.

El resultado es aún más desalentador si tenemos en cuenta el decodificador. Empleando el decodificador por mayoría que se planteaba (no hay otro mejor siempre que $p < 0,5$), la probabilidad de error por bit transmitido era $0,0607$, lo que a su vez es asimilable a un BSC con capacidad $0,6696$ bits.

La razón de esta pérdida radica en el hecho de que nC bits es la capacidad del canal que tiene como alfabeto de entrada $\{\mathbf{x}_l, l = 1, \dots, M^n\}$, como alfabeto de salida $\{\mathbf{y}_j, j = 1, \dots, L^n\}$ y unas probabilidades de transición derivadas de n usos independientes del DMC

$$p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}_j|\mathbf{x}_l) = \prod_{i=0}^{n-1} p_{Y|X}(y_j[i]|x_l[i]) \quad l = 1, \dots, M^n \quad j = 1, \dots, L^n \quad (9.46)$$

pero, en realidad, la capacidad de que disponemos es la de un canal con $\{\mathbf{x}(i), i = 1, \dots, 2^k\}$ como alfabeto de entrada, $\{\mathbf{y}_j, j = 1, \dots, L^n\}$ como alfabeto de salida y las mismas probabilidades de transición si consideramos el canal hasta la entrada del decodificador, y $\{\hat{\mathbf{b}}_i, i = 1, \dots, 2^k\}$ como alfabeto de salida si consideramos hasta la salida del decodificador; en este último caso con unas probabilidades de transición resultantes de aplicar la función de decodificación a (9.46).

La cuestión radica en encontrar la forma de hacer esta pérdida despreciable manteniendo la misma tasa de transmisión, R . Veamos con un ejemplo qué sucede en este caso al aumentar el valor de n .

Ejemplo 9.7

Continuando con los Ejemplos 9.5 y 9.6, consideramos el mismo canal BSC con $p = 0,15$, y vamos a plantear y analizar distintos codificadores y decodificadores para distintos valores de k , escogiendo $n = 3k$ para mantener la tasa R igual a $1/3$ como en los ejemplos anteriores.

En lugar de repetir cada símbolo binario tres veces para formar la palabra código, vamos a proceder de la siguiente manera: escogeremos las 2^k palabras código como aquéllas, de entre las $2^n = 2^{3k}$ posibles, que se diferencian entre sí en el mayor número de símbolos. Por ejemplo, para $k = 2$ podrían ser las 4 siguientes

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad (9.47)$$

donde podemos comprobar cómo cualesquiera dos se diferencian entre sí en cuatro símbolos binarios. Estas palabras código no son las únicas que cumplen este criterio (basta con reordenar simultáneamente las filas de cada vector para tener otro diccionario de códigos) pero nos basta con encontrar uno. Téngase en cuenta que el criterio es muy similar al criterio para el diseño de constelaciones en el Apartado 4.4.3: hacer máxima la distancia entre símbolos, siendo la única diferencia la medida de distancia que utilizamos ahora (número de símbolos distintos en el vector).

Podríamos diseñar ahora el decodificador bajo el criterio MAP o bajo el criterio ML, pues el decodificador no es otra cosa que un decisor, pero vamos a diseñar aquí uno que nos permita un análisis más simple. Como vimos en el Apartado 4.4.1, un decisor queda especificado unívocamente mediante sus regiones de decisión, que en este caso son subconjuntos del alfabeto de salida del BSC, $\{\mathbf{y}_j, j = 1, \dots, 2^n\}$. Bastará, por tanto, con asignar un conjunto de símbolos de salida a cada una de las 2^k palabras código transmitidas. Por diseño, cada uno de estos 2^k conjuntos tendrá exactamente $2^n/2^k = 2^{n-k} = 2^{2k}$ elementos; precisamente aquellos que difieren en menor o igual número de símbolos binarios de la palabra código asociada. Así, por ejemplo, para el diccionario de códigos de (9.47), una posible elección (que no la única) de conjunto asociado a la palabra código compuesta por seis ceros sería el constituido por los siguiente $2^4 = 16$ vectores

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Con este diseño, el análisis de la probabilidad de error media por palabra código se simplifica, ya que podemos averiguar fácilmente cuántas salidas difieren en un número dado de símbolos de una dada. Esta probabilidad de error se muestra en función de n en la Figura 9.17, donde se han incluido además las curvas correspondientes a otras probabilidades de error del BSC distinta de la empleada hasta ahora, $p = 0,15$.

Analizando con un poco de detalle los resultados de la Figura 9.17 comprenderemos lo sorprendentes que resultan. Para $n = 1500$ y $p = 0,15$ (el caso que hemos estado analizando),

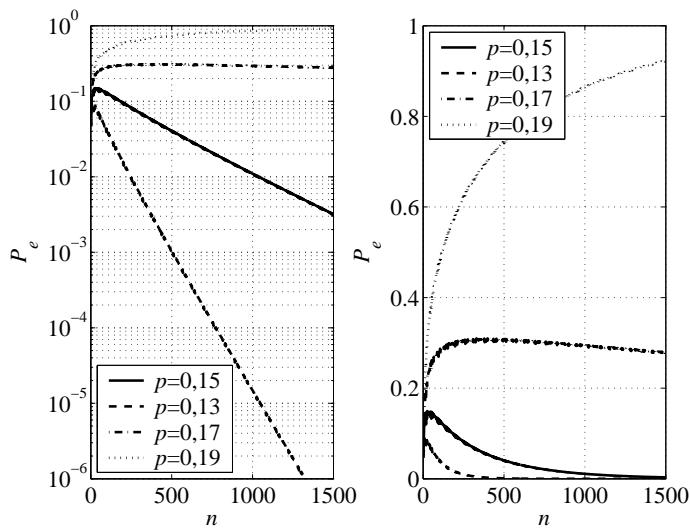


Figura 9.17. Probabilidad de error de palabra código en escala logarítmica (izquierda) y natural (derecha) correspondiente al código del Ejemplo 9.7 en función de la longitud del código, n , para distintas probabilidades de error del BSC, p .

la probabilidad de error por palabra código es aproximadamente $3 \cdot 10^{-3}$ o, equivalentemente, la probabilidad de que una palabra código sea recibida correctamente es de 0,997. Cada palabra código, en este caso, contiene 500 bits ($1500/3$), lo que equivale (en promedio) a que la probabilidad de que 500 bits consecutivos se reciban de forma correcta sea 0,997. Si pensamos en un sistema de comunicaciones con una BER determinada, la probabilidad de que 500 bits consecutivos se reciban sin error es $(1 - BER)^{500}$, e igualando esta cantidad a 0,997 y despejando, obtenemos que $BER \approx \frac{3 \cdot 10^{-3}}{500} = 6 \cdot 10^{-6}$. Lo sorprendente de los resultados radica en que, al aumentar n , no sólo disminuye la BER , sino también la probabilidad de error por palabra código (recordemos que al aumentar n también aumenta el número de bits que contiene cada palabra código con una tasa igual a nR).

En la Figura 9.17 también podemos apreciar cómo para algunos valores de p del BSC distintos de $p = 0,15$ la probabilidad de error también disminuye cuando aumenta n , mientras que para otros, no. Calculando la capacidad del BSC para esos valores de p , tenemos que $C = 0,2985$ para $p = 0,19$, $C = 0,3423$ para $p = 0,17$, $C = 0,3902$ para $p = 0,15$ y $C = 0,4426$ para $p = 0,13$. Curiosamente, cuando $C > R$ la probabilidad de error decrece al aumentar n , y cuando $C < R$ la probabilidad de error aumenta. El decaimiento, cuando $C > R$, es aproximadamente exponencial para valores de n suficientemente grandes, estando en relación directa la tasa de decaimiento con la diferencia entre C y R : si mayor es la diferencia entre C y R más rápidamente decae, y viceversa. Técnicamente, este error se acota superiormente por una exponencial decreciente de la forma $e^{-ne(R)}$, siendo $e(R)$ una función denominada *exponente de error* que depende de la tasa R para unas condiciones dadas (en nuestro caso, para una C dada).

Desgraciadamente, no todos los códigos presentan un comportamiento como el del Ejemplo 9.7. Sin ir más lejos, la secuencia de códigos que resulta de repetir tres veces el

símbolo a transmitir, tal y como lo hemos hecho en los Ejemplos 9.5 y 9.6 (técnicamente, los códigos de repetición de tasa 1/3) presenta un comportamiento en el que la probabilidad de error de palabra código tiende a 1 cuando aumentamos n para cualquier valor de p distinto de 0 (y de 1). También podemos encontrar códigos que funcionen mejor que el del Ejemplo 9.7: códigos en los que el decrecimiento de la probabilidad de error de palabra código sea más rápido para las mismas condiciones o, equivalentemente, con mayor exponente del error. En cualquier caso, lo único importante a reseñar aquí es que el comportamiento va a depender del código concreto, pero que al menos existe un código para el que la probabilidad de error de palabra código tiende exponencialmente a cero conforme aumentamos n cuando $R < C$.

Otra conclusión importante que podemos obtener es que, en general, va a ser imposible realizar una transmisión libre de errores pero, sin embargo, podemos conseguir una probabilidad de error tan pequeña como queramos sin más que hacer n lo suficientemente grande. Esta es, precisamente, la base para definir el término *fiabilidad de la transmisión* que hemos venido utilizando repetidamente a lo largo del capítulo.

Definiremos formalmente en primer lugar la *probabilidad de error de una palabra código* de un código de longitud n como

$$P_e(i, n) = \Pr(\hat{\mathbf{B}} \neq \mathbf{b}_i | \mathbf{B} = \mathbf{b}_i) \quad (9.48)$$

La *probabilidad de error máxima* de un código de longitud n como

$$P_e(\text{máx}, n) = \max_{i \in \{1, \dots, 2^k\}} P_e(i, n) \quad (9.49)$$

y la *probabilidad de error media* de un código de longitud n como

$$P_e(\text{med}, n) = \frac{1}{2^k} \sum_{i=1}^{2^k} P_e(i, n) \quad (9.50)$$

Decimos que podemos realizar una *transmisión fiable* a una tasa R si existe una secuencia de códigos $(n, \lceil nR \rceil)$ (donde $\lceil nR \rceil$ denota el entero más pequeño que es mayor que nR) tal que la probabilidad de error máxima, $P_e(\text{máx}, n)$, tiende a cero cuando n tiende a infinito. Formalmente, si para todo $\epsilon > 0$ existe una secuencia de códigos $(n, \lceil nR \rceil)$ y un valor n_0 para el que $P_e(\text{máx}, n) < \epsilon$ cuando $n > n_0$.

Queda claro, a partir de esta definición, que con códigos como los del Ejemplo 9.7 es posible realizar una transmisión fiable a determinadas tasas. Básicamente, hay que escoger la fiabilidad (probabilidad de error) deseada y, a partir de curvas como las de la Figura 9.17 o de cotas de estas curvas, determinar el valor de n mínimo para el que se cumple el criterio fijado. Existe un pequeño detalle en este razonamiento, y es que la definición de transmisión fiable habla de probabilidad de error máxima y no media (como la mostrada en la curva): sorprendentemente, ambas se encuentran muy cerca para valores de n grandes debido a la ley de los grandes números.

En la definición de transmisión fiable, la tasa R juega el mismo papel que la información mutua en la definición de capacidad: es una medida de la información que atraviesa

un canal. Mientras que la información mutua nos da una medida de la cantidad de información que atraviesa un canal (exactamente la información a la entrada menos la pérdida de información, $I(X; Y) = H(X) - H(X|Y)$), la tasa en una transmisión fiable nos dice la cantidad de información que está atravesando el canal con una pérdida de información tan pequeña como queramos. Algunos autores definen una capacidad “operativa” del canal como la máxima tasa alcanzable para un canal dado, en contraposición a la capacidad de canal tal y como la hemos definido, que es denominada como capacidad “de información” del canal. En realidad, esa doble definición no es necesaria porque ambos conceptos de capacidad coinciden, tal y como demuestra el conocido como *teorema de codificación de canal* o *segundo teorema de Shannon*, que enunciamos formalmente a continuación.

El teorema dice: *Es posible realizar una transmisión fiable a una tasa R por un DMC de capacidad C si $R \leq C$. Además, toda transmisión fiable a través de un DMC de capacidad C debe realizarse a tasas $R \leq C$.*

A causa de este teorema es común referirse a la capacidad C como *límite de Shannon* o *límite de Shannon de la capacidad del canal*, asociando el concepto de distancia al *límite de Shannon* con la diferencia entre C y R .

Aunque el teorema de codificación canal nos garantiza además que existe un codificador de tasa $R = C$ con el que podemos realizar una transmisión fiable, las dificultades para diseñarlo y realizarlo son numerosas, como comprobaremos retomando uno de los resultados del Ejemplo 9.7: aquél que nos permitía obtener una $BER \approx 6 \cdot 10^{-6}$ sobre un BSC con $p = 0,15$ empleando un codificador con $R = 1/3$. Ciertamente la ganancia es espectacular, pero para obtenerla era necesario fijar $n = 1500$ y $k = 500$. Esto nos lleva a utilizar un diccionario con $2^{500} \approx 10^{150}$ palabras código de 1500 símbolos binarios cada una. El primer problema lo tenemos para encontrar esas 2^{500} palabras código de entre un total de 2^{1500} sin que podamos decir *a priori* que posean ninguna característica que nos permita diferenciarlas del resto. Supuesto que hayamos resuelto el monstruoso problema de búsqueda, tenemos que almacenar en el codificador y en el decodificador esas 2^{500} palabras. Para realizar la decodificación tenemos, en general, dos opciones (si las palabras código no poseen ninguna estructura): una de ellas es comparar el vector \mathbf{Y} recibido con cada una de las 2^{500} palabras código, y otra opción es tener una memoria con 2^{1500} posiciones, indicando en cada una de ellas la palabra código que corresponde a cada posible valor de \mathbf{Y} . En resumen, nos encontramos con un *crecimiento exponencial de la complejidad* del código con respecto a su longitud n .

Otra manifestación de la dificultad intrínseca del problema de codificación de canal la encontramos también en el Ejemplo 9.7, y concretamente en la Figura 9.17: cuanto más se acerca la tasa R a la capacidad del canal más lentamente disminuye el error (técticamente, más pequeño es el exponente de error $e(R)$) y, por tanto, mayores serán los valores de n y k necesarios para alcanzar una fiabilidad determinada.

En el Capítulo 10 se presentarán códigos con buenas prestaciones (alto exponente de error para una tasa R dada) y que no presentan este crecimiento exponencial de la complejidad con n . La idea general en la mayoría de esos diseños para limitar la complejidad es encontrar funciones (fórmulas) que permitan generar de forma analítica las palabras código y algoritmos que, en decodificación, permitan convertir la dependencia de la complejidad de

exponencial a polinómica (por ejemplo, lineal).

Aún salvando el problema de la complejidad de codificadores y decodificadores, persiste otro que puede ser crítico en determinadas aplicaciones: el retardo. En este mismo ejemplo que venimos utilizando es necesario trasmitir 1500 símbolos binarios para poder decodificar una palabra, lo que impone el retardo correspondiente a recibir 500 símbolos de entrada al codificador, más el retardo de transmitir 1500 símbolos por el canal, más el retardo correspondiente a ofrecer 500 símbolos de salida del decodificador. Un tipo de códigos con bajo retardo (en relación a la longitud del código) son los códigos convolucionales, que también serán tratados en el Capítulo 10.

9.3. CANAL GAUSIANO

Consideraremos a continuación el canal gausiano con un desarrollo paralelo al del apartado precedente, pero ahora con distribuciones de probabilidad continuas⁸ en lugar de discretas: en primer lugar las medidas de información, para continuar con el análisis de la capacidad del canal gausiano y finalizar con el teorema de codificación de canal.

Sin embargo, hay que ser cuidadoso al hacer comparaciones entre los conceptos de entropía e información sobre distribuciones continuas y discretas de probabilidad porque algunos no resultan equivalentes. No en vano, el propio Shannon conjecturaba que la naturaleza de la información es inherentemente discreta; está asociada a la dicotomía, a la elección entre un conjunto numerable de opciones.

9.3.1. Información mutua y entropía diferencial

Las definiciones de entropía e información mutua para variables aleatorias discretas pueden interpretarse como la esperanza matemática de una determinada función: el logaritmo del inverso de la probabilidad en el caso de la entropía de una variable aleatoria y el logaritmo del cociente entre la probabilidad conjunta y el producto de las probabilidades marginales de dos variables aleatorias en el caso de la información mutua.

Para definir sus equivalentes sobre variables aleatorias continuas no hay más que aplicar el operador esperanza matemática sobre la misma función. Comenzaremos con la definición de información mutua, analizando la relación con la misma medida para variables aleatorias discretas.

Definimos la *información mutua*, $I(X; Y)$, entre dos variables aleatorias X e Y con función de densidad de probabilidad conjunta $f_{X,Y}(x, y)$ y funciones de densidad de probabilidad marginales $f_X(x)$ y $f_Y(y)$, respectivamente, como

$$I(X; Y) \doteq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) \log_2 \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)f_Y(y)} dx dy \quad (9.51)$$

⁸Siempre que no exista confusión, nos referiremos a las variables aleatorias con función de densidad de probabilidad continua como variables aleatorias continuas o variables aleatorias con distribución continua. Análogamente, nos referiremos a las variables aleatorias con distribución discreta de probabilidad como variables aleatorias discretas.

y se mide en bits. También por definición, hacemos $0 \cdot \log_2 0 = 0$ para evitar ambigüedades. Además es necesario añadir el “si la integral existe”, como en toda definición que incluye una integral.

Al igual que para variables aleatorias discretas, para las variables aleatorias continuas la información mutua representa la incertidumbre que hemos eliminado sobre el valor de X mediante el conocimiento del valor de Y , o la información que aporta Y sobre el valor que puede tomar X . La relación entre ambas definiciones, (9.51) y (9.33), podemos establecerla de la siguiente manera: dividimos el dominio de la variable aleatoria continua (la recta real, por ejemplo) en intervalos disjuntos de igual longitud, y creamos una variable aleatoria discreta con tantos valores distintos como intervalos hemos obtenido, siendo la probabilidad de cada uno de los valores igual a la probabilidad de que la variable aleatoria continua tome valor en el intervalo correspondiente. Siguiendo este procedimiento, en el Apéndice 9.C se demuestra que cuando la longitud del intervalo tiende a cero y, por tanto, las variables aleatorias discretas tienden a las continuas, la información mutua entre las variables aleatorias discretas tiende a la información mutua definida en (9.51).

Esta equivalencia hace también que la información mutua, tal como queda definida en (9.51), sea una medida no negativa ($I(X; Y) \geq 0$) que toma valor cero sólo si las variables aleatorias son estadísticamente independientes, y simétrica ($I(X; Y) = I(Y; X)$).

Manipulando la definición de información mutua obtenemos

$$\begin{aligned}
 I(X; Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) \log_2 \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)f_Y(y)} dx dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y)f_Y(y) \log_2 \frac{f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)}{f_X(x)f_Y(y)} dx dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y)f_Y(y) \log_2 \frac{f_{X|Y}(x|y)}{f_X(x)} dx dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y)f_Y(y) \log_2 \frac{1}{f_X(x)} dx dy \\
 &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y)f_Y(y) \log_2 \frac{1}{f_{X|Y}(x|y)} dx dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \log_2 \frac{1}{f_X(x)} dx \\
 &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y) \log_2 \frac{1}{f_{X|Y}(x|y)} dx dy \quad (9.52)
 \end{aligned}$$

donde el primero de los sumandos es la esperanza de $\log_2 \frac{1}{f_X(x)}$, el equivalente para variables aleatorias continuas de la entropía, y el segundo es la esperanza de $\log_2 \frac{1}{f_{X|Y}(x|y)}$, el equivalente a la entropía condicional.

Formalmente, definimos la *entropía diferencial*, $h(X)$, de una variable aleatoria X con función de densidad de probabilidad $f_X(x)$ como

$$h(X) \doteq \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \log_2 \frac{1}{f_X(x)} dx \quad (9.53)$$

Definimos también la *entropía diferencial conjunta*, $h(X, Y)$, de dos variables aleatorias X e Y con función de densidad de probabilidad conjunta $f_{X,Y}(x, y)$ como

$$h(X, Y) \doteq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) \log_2 \frac{1}{f_{X,Y}(x, y)} dx dy \quad (9.54)$$

y definimos la *entropía diferencial condicional*, $h(X|Y)$, entre dos variables aleatorias X e Y con función de densidad de probabilidad conjunta $f_{X,Y}(x, y)$ como

$$\begin{aligned} h(X|Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) \log_2 \frac{1}{f_{X|Y}(x|y)} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y) \log_2 \frac{1}{f_{X|Y}(x|y)} dx dy \end{aligned} \quad (9.55)$$

El uso del calificativo “diferencial” en la definición de la entropía y el empleo de la letra h minúscula en la notación están motivados porque $h(X)$ y $H(X)$ son medidas distintas. Aplicando el procedimiento de definición de una variable aleatoria discreta a partir de una continua descrito anteriormente, tal y como se realiza en el Apéndice 9.C, se demuestra que cuando la longitud del intervalo tiende a cero y, por tanto, las variables aleatorias discretas tienden a las continuas, la entropía tiende a infinito aun cuando la entropía diferencial es una cantidad finita.

Una vez definida la entropía diferencial, podemos reescribir la información mutua en función de aquella sin más que sustituir las definiciones en (9.52), dando como resultado

$$I(X; Y) = h(X) - h(X|Y) \quad (9.56)$$

ecuación análoga a su equivalente para variables aleatorias discretas, (9.34). Dada la simetría de la información mutua (9.56) también puede escribirse como

$$I(X; Y) = h(Y) - h(Y|X) \quad (9.57)$$

El hecho de que podamos expresar la información mutua en función de la entropía diferencial empleando las mismas expresiones que para la entropía de variables aleatorias discretas no debe hacernos creer que la entropía diferencial posee las mismas propiedades que la entropía. Por ejemplo, la entropía diferencial puede ser negativa, como comprobamos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 9.8

Una variable aleatoria X con función de densidad de probabilidad uniforme entre 0 y a posee una entropía diferencial

$$h(X) = \int_0^a \frac{1}{a} \log_2 \frac{1}{1/a} dx = \log_2 a \int_0^a \frac{1}{a} dx = \log_2 a$$

que puede ser positiva o negativa dependiendo del valor de a .

Tampoco está acotada, como podemos comprobar con el mismo ejemplo sin más que hacer que a tienda a cero o a infinito.

Resulta también interesante comprobar cómo varía la entropía diferencial frente a las transformaciones más frecuentes de una variable aleatoria. Por ejemplo, las traslaciones no afectan a la entropía diferencial, como podemos comprobar construyendo una variable aleatoria Y como suma de una variable aleatoria X y una constante real c , $Y = X + c$. La función de densidad de probabilidad de Y es, de acuerdo con (3.49), $f_Y(y) = f_X(y - c)$, y su entropía diferencial

$$h(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(y - c) \log_2 \frac{1}{f_X(y - c)} dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \log_2 \frac{1}{f_X(x)} dx = h(X) \quad (9.58)$$

la misma que la de X . Verifiquemos ahora el caso de los escalados, construyendo la variable aleatoria Y como el producto de una variable aleatoria X por una constante real a , $Y = aX$. La función de densidad de probabilidad de Y es

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y}{a}\right)$$

y su entropía diferencial

$$\begin{aligned} h(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y}{a}\right) \log_2 \left(\frac{1}{\frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y}{a}\right)} \right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X\left(\frac{y}{a}\right) \left(\log_2 \left(\frac{1}{f_X\left(\frac{y}{a}\right)} \right) + \log_2(|a|) \right) \frac{dy}{|a|} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \log_2 \frac{1}{f_X(x)} dx + \log_2 |a| \\ &= h(X) + \log_2 |a| \end{aligned} \quad (9.59)$$

9.3.2. Capacidad del canal gausiano

En la Página 538 definimos el canal gausiano como aquél que relaciona dos variables aleatorias continuas X e Y mediante una función de densidad de probabilidad condicional $f_{Y|X}(y|x)$ gausiana de media X y varianza σ^2 . Alternativamente, también podíamos definirlo mediante la relación

$$Y = X + Z \quad (9.60)$$

donde Z es una variable aleatoria gausiana de media nula, varianza σ^2 y estadísticamente independiente de X . Nuestro objetivo ahora es calcular su capacidad.

La definición de capacidad de canal sigue siendo la misma que para variables aleatorias discretas: la máxima información mutua entre la entrada y la salida del canal obtenida sobre las distribuciones de la señal de entrada.

Aplicando esta definición, la capacidad del canal gausiano sería infinita ya que la entropía diferencial no está acotada y, por lo tanto, tampoco la información mutua. Para comprobar este punto, basta con considerar como entrada al canal, X , una variable aleatoria

uniformemente distribuida como la del Ejemplo 9.8 con un valor de a que tienda a infinito. En este caso, $h(X) = \infty$ y, de acuerdo con (9.60), $h(X|Y) = h(-Z) = h(Z)$ que, como demostraremos más adelante, es una cantidad finita porque la varianza de Z también es una cantidad finita, σ^2 . Aplicando (9.56) tenemos que $I(X;Y) = \infty$. Una explicación más intuitiva pero menos formal es la siguiente: como la potencia del ruido aditivo es fija, si podemos hacer la potencia de la señal de entrada tan grande como queramos podemos hacer la relación señal a ruido tan grande como queramos; en consecuencia, la salida será tan parecida a la entrada como queramos y podremos transmitir tanta información como queramos.

Como este resultado carece de utilidad, impondremos como restricción adicional la limitación de la varianza de la entrada del canal, X , y definimos la *capacidad del canal gausiano con limitación de potencia* o, simplemente, *capacidad del canal gausiano* como

$$C \doteq \max_{\{f_X(x): E\{X^2\} \leq P\}} I(X;Y) \quad (9.61)$$

siendo X e Y , respectivamente, la entrada y la salida del canal gausiano descrito anteriormente.

Para calcular la capacidad expresamos la información mutua en función de las entropías de la entrada y del ruido empleando (9.57) y (9.60)

$$I(X;Y) = h(Y) - h(Y|X) = h(X+Z) - h(Z) \quad (9.62)$$

Calculamos en primer lugar la entropía diferencial de Z

$$\begin{aligned} h(Z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} \log_2 \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}} dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} \left(\frac{1}{2} \log_2 2\pi\sigma^2 + \frac{z^2}{2\sigma^2} \log_2 e \right) dz \\ &= \frac{1}{2} \log_2 2\pi\sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz + \frac{\log_2 e}{2\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz \\ &= \frac{1}{2} \log_2 2\pi\sigma^2 + \frac{\log_2 e}{2\sigma^2} \sigma^2 \\ &= \frac{1}{2} \log_2 2\pi e \sigma^2 \end{aligned} \quad (9.63)$$

que resulta depender sólo de su varianza⁹. Ahora, para encontrar la función de densidad de probabilidad que define la capacidad necesitamos el siguiente resultado, que demostraremos a continuación: *supuesta fija la varianza de una variable aleatoria, la función de densidad de probabilidad que hace máxima su entropía diferencial es la gausiana*.

Para simplificar la demostración de este resultado vamos a considerar únicamente variables aleatorias de media nula, ya que cualquier traslación sobre la variable aleatoria no

⁹Aunque Z fuese una variable aleatoria gausiana de media no nula, de acuerdo con (9.58), su entropía diferencial seguiría dependiendo únicamente de su varianza.

modifica su entropía, como vimos en (9.58). Consideremos dos variables aleatorias, Z y Z' , ambas de media nula y varianza σ^2 ; Z posee una función de densidad de probabilidad gausiana y Z' puede, en principio, tener cualquier función de densidad de probabilidad. Vamos a demostrar que, en estas condiciones, se cumple que $h(Z) \geq h(Z')$, verificándose la igualdad sólo si Z' posee una función de densidad de probabilidad gausiana, lo que demuestra que una variable aleatoria gausiana es la de mayor entropía diferencial a igualdad de varianza.

La esperanza respecto a Z' de la función $\log_2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{z'^2}{2\sigma^2}}$ resulta ser

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \log_2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{z'^2}{2\sigma^2}} f_{Z'}(z') dz' &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \log_2 2\pi\sigma^2 + \frac{z'^2}{2\sigma^2} \log_2 e \right) f_{Z'}(z') dz' = \frac{1}{2} \log_2 2\pi e \sigma^2 \end{aligned}$$

independiente de la función de densidad de probabilidad de Z' siempre que su media sea nula y su varianza sea σ^2 . La diferencia de entropías entre Z y Z' es

$$\begin{aligned} h(Z) - h(Z') &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} \log_2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz - \int_{-\infty}^{\infty} f_{Z'}(z') \log_2 \frac{1}{f_{Z'}(z')} dz' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{Z'}(z) \log_2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz - \int_{-\infty}^{\infty} f_{Z'}(z') \log_2 \frac{1}{f_{Z'}(z')} dz' \quad (9.64) \end{aligned}$$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} f_{Z'}(z) \log_2 \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}}{f_{Z'}(z)} dz \quad (9.65)$$

$$\geq - \log_2 \int_{-\infty}^{\infty} f_{Z'}(z) \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}}{f_{Z'}(z)} dz \quad (9.66)$$

$$= - \log_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz$$

$$= - \log_2 1$$

$$= 0$$

donde la igualdad (9.64) se obtiene del resultado anterior, la desigualdad (9.66) a partir de la desigualdad de Jensen y de la concavidad de la función logaritmo (véase el Apéndice 9.B). Además, como la función logaritmo es estrictamente cóncava, la igualdad sólo se produce en el caso en que se anule el logaritmo en (9.65)

$$\log_2 \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}}{f_{Z'}(z)} = 0 \implies f_{Z'}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$$

Hemos demostrado, como queríamos, que $h(Z) \geq h(Z')$, cumpliéndose la igualdad únicamente en el caso en que Z' tenga una función de densidad de probabilidad gausiana.

Volviendo al cálculo de la capacidad del canal gausiano, teníamos que encontrar el máximo de

$$I(X; Y) = h(Y) - \frac{1}{2} \log_2 2\pi e \sigma^2 = h(X + Z) - \frac{1}{2} \log_2 2\pi e \sigma^2 \quad (9.67)$$

sujeto a la restricción $E\{X^2\} \leq P$. Como X y Z son estadísticamente independientes y Z es de media nula, la varianza de Y es $E\{Y^2\} = E\{(X + Z)^2\} = E\{X^2\} + E\{Z^2\} \leq P + \sigma^2$.

Como la varianza de Y está acotada, la capacidad se alcanza sólo cuando Y es una variable aleatoria gausiana de media nula y varianza igual a $P + \sigma^2$. A su vez, para que esto suceda, X debe ser una variable aleatoria gausiana de media nula y varianza P , porque sólo en ese caso $X + Z$ es una variable aleatoria gausiana de media nula y varianza igual a $P + \sigma^2$.

Finalmente, la capacidad del canal gausiano es

$$C = \frac{1}{2} \log_2 2\pi e(P + \sigma^2) - \frac{1}{2} \log_2 2\pi e \sigma^2 = \frac{1}{2} \log_2 \left(1 + \frac{P}{\sigma^2}\right) \text{ bits} \quad (9.68)$$

alcanzándose cuando la entrada es una variable aleatoria gausiana de media nula y varianza P .

Enlazando el modelo probabilístico con el modelo de canal gausiano de banda limitada (Apartado 9.1.2), tenemos que la potencia de ruido cuando el ancho de banda es W rad/s es $\sigma^2 = N_0 W / 2\pi = N_0 / 2T$, siendo utilizado el canal $1/T = W/\pi$ veces por segundo. Esto nos da una capacidad, en bits por uso del canal

$$C = \frac{1}{2} \log_2 \left(1 + \frac{2\pi P}{N_0 W}\right) \text{ bits (o bits por uso del canal)} \quad (9.69)$$

y en bits por segundo

$$C = \frac{W}{2\pi} \log_2 \left(1 + \frac{2\pi P}{N_0 W}\right) \text{ bits/s} \quad (9.70)$$

que queda más simple si expresamos el ancho de banda en hercios

$$C = W' \log_2 \left(1 + \frac{P}{N_0 W'}\right) \text{ bits/s} \quad (9.71)$$

siendo $W' = W/2\pi$ el ancho de banda en hercios.

Ejemplo 9.9

Consideremos un canal gausiano con un ancho de banda de $2\pi \cdot 2.000$ rad/s. En la Figura 9.18 se muestra (en línea continua) la capacidad del canal en bits/s en función de la relación señal a ruido, $\frac{2\pi P}{W N_0}$. Empleando este canal para transmitir símbolos de la constelación 4-PAM de la Figura 4.28 (Página 208) empleada en los Ejemplos 9.1 y 9.4 a una velocidad de 4.000 baudios, la capacidad ofrecida por el canal digital (a partir del modelo de DMC) es la que muestra la línea discontinua de la figura. Obviamente, esta capacidad es siempre inferior a la del canal gausiano, además de presentar un límite máximo de capacidad de 2 bits por uso.

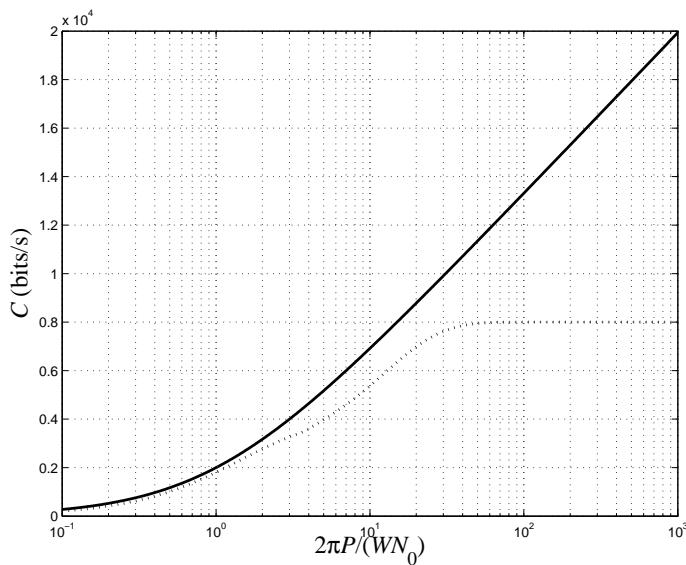


Figura 9.18. Capacidad del canal gausiano del Ejemplo 9.9 (línea continua) y del DMC del Ejemplo 9.1 empleado 4.000 veces por segundo (línea discontinua) en función de la relación señal a ruido.

9.3.3. Teorema de codificación de canal y curva de capacidad

Al igual que sucedía analizando el DMC, hemos calculado la capacidad del canal gausiano, pero no hemos demostrado que es posible transmitir de manera fiable una cantidad de información igual a la capacidad a través del canal gausiano. Esta demostración es el objeto del teorema de codificación de canal para el canal gausiano, que expondremos a continuación siguiendo un desarrollo paralelo al realizado para el DMC.

Para transmitir información a través de un canal gausiano empleamos un *código para el canal gausiano con limitación de potencia*, que no es sino una generalización de los codificadores de canal vistos en los Capítulos 4, 5 y 8, y cuyo funcionamiento explicaremos con ayuda de la Figura 9.19.

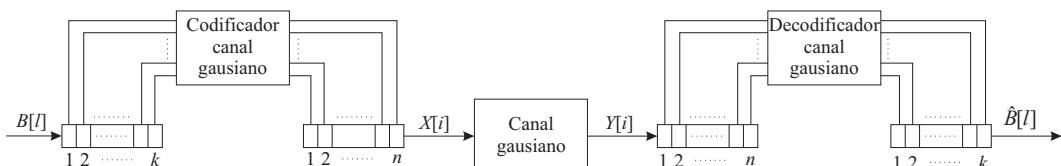


Figura 9.19. Codificador y decodificador para el canal gausiano.

El código queda definido por el codificador y el decodificador. El codificador tiene como entrada un vector de k símbolos binarios, formando índices que pueden tomar 2^k valores distintos. Ante cada entrada, el codificador genera como salida un vector de n valores reales (a diferencia del codificador para DMC, que generaba un vector de símbolos de entrada al

DMC) o palabra código de energía no superior a nP . El decodificador decide, a partir de la versión ruidosa de la palabra código, su índice. Formalmente, el código queda definido por el conjunto de índices $\{b_i, i = 1, \dots, 2^k\}$, la función de codificación que asigna un palabra código (de entre el diccionario $\{\mathbf{x}(i), i = 1, \dots, 2^k\}$) a cada índice de la forma $b_i \rightarrow \mathbf{x}(i)$, y la función de decodificación, que asigna a cada posible vector \mathbf{Y} (definido como en (9.44)) un índice. La tasa del código, como en el caso del DMC, se define como $R = k/n$ y se mide en bits por uso del canal, y cada palabra código debe cumplir la siguiente restricción de energía¹⁰

$$\|\mathbf{x}(i)\|^2 \leq nP \quad i = 1, \dots, 2^k \quad (9.72)$$

Ejemplo 9.10

La modulación 16-QAM (Apartado 5.4) define un codificador en que $k = 4$, $n = 2$ (partes real e imaginaria). Si añadimos, por ejemplo, un decisor de mínima distancia, hemos completado la definición de un código con tasa $R = 2$.

Ejemplo 9.11

Una modulación OFDM en tiempo discreto (Apartado 8.1) con 1.024 portadoras con modulación 16-QAM define un codificador en que $k = 4.096$, $n = 2.048$. Si añadimos, por ejemplo, un decisor de mínima distancia, hemos completado la definición de un código con tasa $R = 2$.

Empleando códigos para el canal gausiano es posible demostrar un teorema de codificación de canal de enunciado idéntico al correspondiente al DMC, aunque su demostración sea distinta. Podemos definir una probabilidad de error máxima igual a la expresada en (9.49), a partir de ella la transmisión fiable a una tasa R , enunciando el teorema de codificación de canal como: “*es posible realizar una transmisión fiable a una tasa R por un canal gausiano de capacidad C si $R \leq C$. Además, toda transmisión fiable a través de un canal gausiano de capacidad C debe realizarse a tasas $R \leq C$* ”.

La demostración del teorema se escapa del alcance de este texto. Sin embargo, vamos a presentar a continuación un argumento que demuestra que es posible construir códigos con los que realizar una transmisión fiable a una tasa C . Para ello vamos a determinar primero la probabilidad de que una realización de una variable aleatoria gausiana n -dimensional de media nula y componentes independientes e idénticamente distribuidas (esto es, cuyas componentes son gausianas independientes de media nula y varianza σ^2) esté a una distancia mayor de d del origen de coordenadas. Sea $\mathbf{Z}_n = [Z[0] \ Z[1] \ \cdots \ Z[n-1]]^T$ una variable aleatoria gausiana de media nula y matriz de covarianza $\sigma^2 \mathbf{I}_n$, siendo \mathbf{I}_n la matriz identidad de tamaño $n \times n$. La distancia al cuadrado de \mathbf{Z}_n al origen dividida por la varianza

$$\frac{\|\mathbf{Z}_n\|^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=0}^{n-1} Z^2[i] = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{Z^2[i]}{\sigma^2}$$

¹⁰Nótese que esta condición es una restricción más dura que la de potencia media (o energía media por símbolo de entrada al canal) no superior a P , aunque garantiza el cumplimiento de esta última sea cual sea la frecuencia de aparición de cada palabra código.

posee una distribución χ^2 con n grados de libertad (Ecuación (3.43)) por ser la suma de los cuadrados de n gausianas independientes de media nula y varianza unidad. En consecuencia

$$Pr(\|\mathbf{Z}_n\| > d) = 1 - F_{\chi^2}(n, d^2/\sigma^2) \quad (9.73)$$

donde $F_{\chi^2}(n, \cdot)$ es la función de distribución de una χ^2 con n grados de libertad. La Figura 9.20 muestra esta probabilidad en función de n cuando $d = \sqrt{n(\sigma^2 + \epsilon)}$ para $\epsilon = 0,05\sigma^2$, donde podemos ver que esta probabilidad decrece exponencialmente con la dimensión, n .

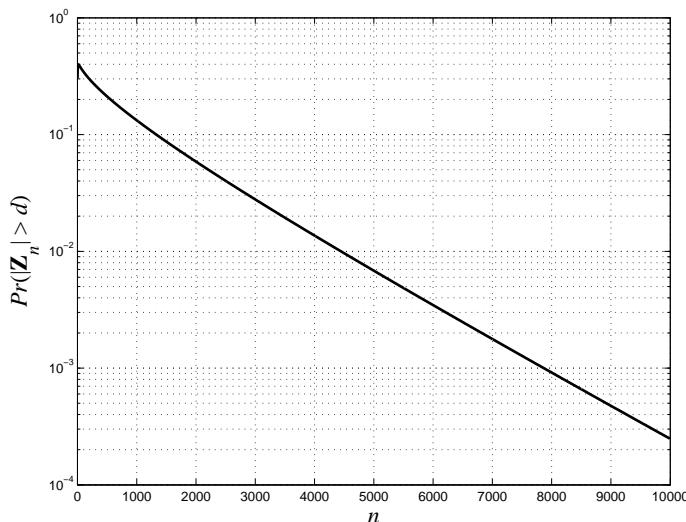


Figura 9.20. Probabilidad de que una realización de una variable aleatoria gausiana n -dimensional con matriz de covarianza $\sigma^2 \mathbf{I}_n$ esté a una distancia mayor que $\sigma\sqrt{1,05n}$ de su media, en función de n .

Las implicaciones de este resultado en el problema del diseño del código son que, puesto que el canal introduce una interferencia aditiva de ruido blanco gausiano, podemos conseguir una probabilidad de error tan baja como queramos si la función de decodificación se diseña asignando al índice b_i todos los puntos del interior de una hiperesfera de radio $\sqrt{n(\sigma^2 + \epsilon)}$ centrada en la palabra código $\mathbf{x}(i)$.

El problema está en determinar cuántas hiperesferas disjuntas de radio $\sqrt{n(\sigma^2 + \epsilon)}$ podemos encajar en la región del espacio n -dimensional a la que podemos llegar manteniendo la restricción de potencia (9.72), esto es, la hiperesfera de radio $\sqrt{n(P + \sigma^2 + \epsilon)}$ centrada en el origen. Teniendo en cuenta que el volumen de una hiperesfera de radio d en un espacio de dimensión n es Kd^n , con $K = \pi^{n/2}/(n/2)!$ para n par y $K = 2^n \pi^{(n-1)/2} ((n-1)/2)!/n!$ para n impar, si hacemos las aproximaciones: 1) el vector recibido $\mathbf{Y}_n = \mathbf{X}_n + \mathbf{Z}_n$ posee una distribución gausiana de media nula y matriz de covarianza $(P + \sigma^2) \mathbf{I}_n$, y 2) si la dimensión del espacio n es lo suficientemente alta es posible empaquetar las hiperesferas sin dejar intersticios entre ellas; el número de hiperesferas (y, por tanto, el de palabras código, M) es el resultado de dividir el volumen de las hiperesferas de radios $\sqrt{n(P + \sigma^2 + \epsilon)}$ y $\sqrt{n(\sigma^2 + \epsilon)}$. Teniendo en cuenta que podemos hacer ϵ tan

pequeño como queramos (siempre que sea positivo), el número de palabras código para una transmisión fiable es

$$M = \left(\sqrt{\frac{P + \sigma^2}{\sigma^2}} \right)^n = \left(1 + \frac{P}{\sigma^2} \right)^{\frac{n}{2}} \quad (9.74)$$

y de aquí la tasa R a la que conseguimos una transmisión fiable como

$$R = \frac{\log_2 M}{n} = \frac{1}{2} \log_2 \left(1 + \frac{P}{\sigma^2} \right) \quad (9.75)$$

igual a la capacidad del canal gausiano, (9.68).

Aunque pueda parecer que debido a las aproximaciones realizadas es imposible alcanzar una tasa $R = C$, una de las partes de la demostración del teorema de codificación está dedicada precisamente a probar que existe al menos un código con el que es posible alcanzar la capacidad del canal. No obstante, no debemos olvidar la definición de transmisión fiable, en la que fijamos en primer lugar la probabilidad de error que consideramos aceptable y, en función de esa, se elige el n mínimo, lo que va a implicar, en general, codificadores de una complejidad inabordable.

Volviendo a (9.70), podemos averiguar en qué condiciones una determinada tasa binaria R está por encima o por debajo de la capacidad del canal C . La potencia de señal, P , puede expresarse en función de la tasa binaria y de la energía por bit como $P = RE_b$, que sustituida en (9.70) nos da un valor de capacidad

$$C = \frac{W}{2\pi} \log_2 \left(1 + \frac{2\pi E_b R}{N_0 W} \right) = \frac{W}{2\pi} \log_2 \left(1 + \frac{2\pi R}{W} \frac{E_b}{N_0} \right) \text{ bits/s} \quad (9.76)$$

El argumento del logaritmo en esta ecuación está expresado en función de dos términos. Uno de ellos es $\frac{E_b}{N_0}$, la medida normalizada de la relación señal a ruido que hemos venido utilizando a lo largo de los capítulos anteriores. El otro es $\frac{2\pi R}{W} = \frac{R}{W'}$, la eficiencia espectral definida en el Apartado 5.1.1.

Si transmitimos a una tasa binaria R igual a la capacidad del canal, $R = C$, (9.76) se transforma en

$$C = \frac{W}{2\pi} \log_2 \left(1 + \frac{2\pi C}{W} \frac{E_b}{N_0} \right) \Rightarrow \frac{2\pi C}{W} = \log_2 \left(1 + \frac{2\pi C}{W} \frac{E_b}{N_0} \right) \quad (9.77)$$

de donde, despejando $\frac{E_b}{N_0}$, obtenemos

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{W}{2\pi C} \left(2^{\frac{2\pi C}{W}} - 1 \right) \quad (9.78)$$

que es la curva en el plano $\frac{E_b}{N_0}$ frente a $\frac{R}{W'}$ que representa la Figura 9.21.

En la región bajo la curva se cumple que $R < C$ y por tanto existe un código (un formato de modulación) con el que podemos realizar una transmisión fiable. La región por encima de la curva es aquélla en la que $R > C$, donde es imposible encontrar un código con el que realizar una transmisión fiable.

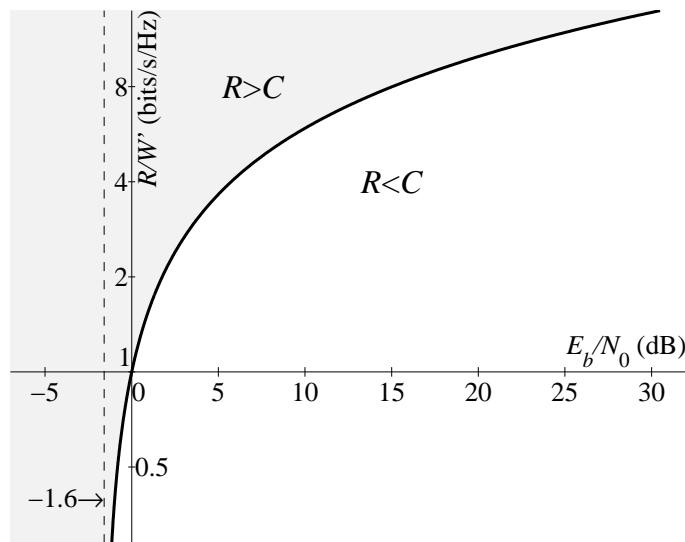


Figura 9.21. Curva de capacidad del canal gausiano.

Veamos ahora dónde se sitúan en el plano eficiencia espectral ($\frac{R}{W}$) frente a relación señal a ruido ($\frac{E_b}{N_0}$) de la Figura 9.21 algunos de los formatos de modulación tratados hasta ahora. Recordemos que un formato de modulación será un punto en este plano para la probabilidad de error a la que consideramos fiable la transmisión, y que tomando distintas probabilidades de error variarán las coordenadas (la relación señal a ruido) de dicho punto. En la Figura 9.22 se muestran las modulaciones lineales (PAM) paso bajo tratadas en el Apartado 5.1 considerando probabilidades de error medias de símbolo de, respectivamente, 10^{-3} , 10^{-6} y 10^{-9} . Dado el decrecimiento de la función Q la diferencia en $\frac{E_b}{N_0}$ conforme disminuimos la probabilidad de error va siendo cada vez más pequeña.

En las Figuras 9.23 y 9.24 se muestran, respectivamente, las gráficas equivalentes para las modulaciones QAM y modulaciones ortogonales paso bajo. Estas últimas se corresponden con un equivalente paso bajo real de las modulaciones FSK en las que las constelaciones de símbolos serían de la forma

$$\begin{bmatrix} \sqrt{E_s} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{E_s} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \sqrt{E_s} \end{bmatrix}$$

La primera conclusión que podemos extraer de estas tres últimas figuras es la gran diferencia que existe, para cada valor de eficiencia espectral en que se sitúan cada una de las modulaciones, entre la $\frac{E_b}{N_0}$ que define la capacidad del canal gausiano y aquélla para la que se consigue una transmisión fiable con la modulación correspondiente.

La segunda conclusión que podemos obtener es que, dentro de la región en que $R < C$, podemos intercambiar eficiencia espectral ($\frac{R}{W}$) por relación señal a ruido ($\frac{E_b}{N_0}$) moviéndo-

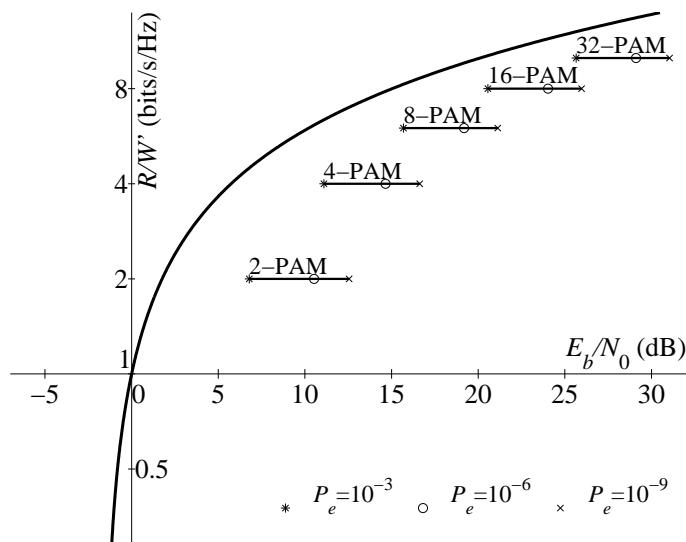


Figura 9.22. Ubicación de las modulaciones lineales paso bajo en el plano eficiencia espectral frente a relación señal a ruido para tres probabilidades de error.

nos desde la parte superior derecha a la inferior izquierda de la Figura 9.21 a base de sustituir una modulación por otra. En la parte superior derecha podemos conseguir una alta eficiencia espectral a costa de una también alta relación señal a ruido, aumentando la capacidad del canal de forma logarítmica con la relación señal a ruido, según podemos deducir de (9.76). Los formatos de modulación que se sitúan en esta parte del plano, por ejemplo, los formatos QAM, suelen denominarse *eficientes en ancho de banda*. Por el contrario, en la zona inferior izquierda del plano, donde se sitúan las modulaciones *eficientes en potencia*, por ejemplo, las modulaciones ortogonales, podemos conseguir transmitir de forma fiable con una baja relación señal a ruido a costa de disminuir la eficiencia espectral. Sin embargo, y a diferencia de la zona de alta eficiencia espectral en que podemos aumentar de forma indefinida la capacidad aumentando la relación señal a ruido, no podemos disminuir de forma indefinida la relación señal a ruido aunque reduzcamos indefinidamente la eficiencia espectral. Calculando, con ayuda de la regla de L'Hopital, el límite de la curva de capacidad, (9.78), cuando la eficiencia espectral tiende a cero obtenemos

$$\lim_{\frac{C}{W'} \rightarrow 0} \frac{E_b}{N_0} = \ln 2 \approx 0,693 \approx -1,6 \text{ dB} \quad (9.79)$$

que podemos ver en la Figura 9.21 y que implica que no es posible realizar una transmisión fiable con una relación señal a ruido ($\frac{E_b}{N_0}$) inferior a $-1,6$ dB.

9.3.4. Canal gausiano con entrada digital

En el apartado anterior hemos comprobado las diferencias existentes entre la relación señal a ruido para la que se alcanza la capacidad del canal gausiano y aquéllas a las que

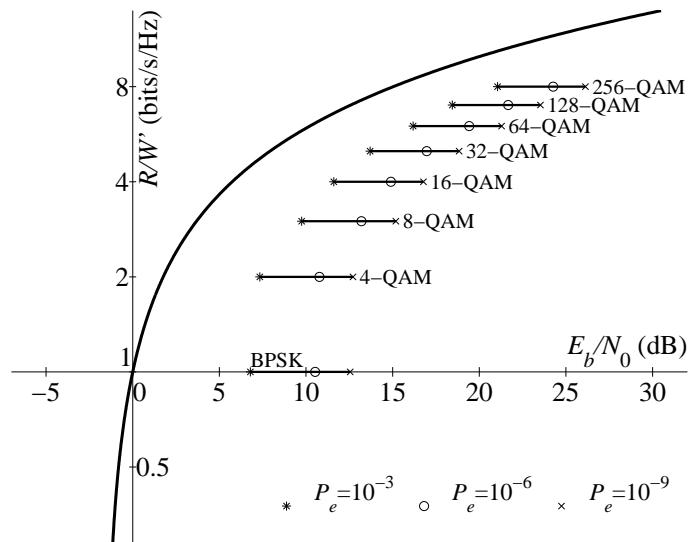


Figura 9.23. Ubicación de las modulaciones QAM en el plano eficiencia espectral frente a relación señal a ruido para tres probabilidades de error.

conseguimos una transmisión fiable empleando los distintos formatos de modulación, diferencias que llegan a superar los 10 dB en algunos casos. Para encontrar las causas de estas diferencias analizaremos en primer lugar la influencia del formato de modulación con la ayuda del modelo de canal gausiano con entrada digital que enunciamos en el Apartado 9.1.3, del que nos proponemos calcular su capacidad.

La información mutua entre la entrada y salida del canal gausiano con entrada digital toma la forma

$$\begin{aligned} I(X; Y) &= E \left\{ \log_2 \frac{f_{Y|X}(y|x)}{f_Y(y)} \right\} \\ &= \int \sum_{i=1}^M p(x_i) f_{Y|X}(y|x_i) \log_2 \frac{f_{Y|X}(y|x_i)}{\sum_{j=1}^M p(x_j) f_{Y|X}(y|x_j)} dy \quad (9.80) \end{aligned}$$

con $f_{Y|X}(y|x)$ según (9.25). Debido a la forma de la función de densidad de probabilidad de la salida del canal (una mezcla de gaussianas) resulta imposible evaluar analíticamente (9.80). Podemos, sin embargo, realizar una evaluación numérica de (9.80) (por ejemplo, mediante el método de Monte Carlo), y las Figuras 9.25 y 9.26 muestran el resultado para el caso de símbolos equiprobables empleando constelaciones, respectivamente, reales de tipo PAM y complejas de tipo QAM.

Como referencia en estas figuras encontramos también la capacidad del canal gausiano y, como podemos apreciar, aun sin emplear la distribución de probabilidades de entrada que hace máximo $I(X; Y)$ (y que nos daría la capacidad del canal gausiano con entrada digital) es posible alcanzar una capacidad muy próxima a la del canal gausiano empleando los formatos de modulación analizados. Recordemos que la capacidad del canal gausiano se alcanzaba con una entrada que poseyese una función de densidad de probabilidad gaussiana,

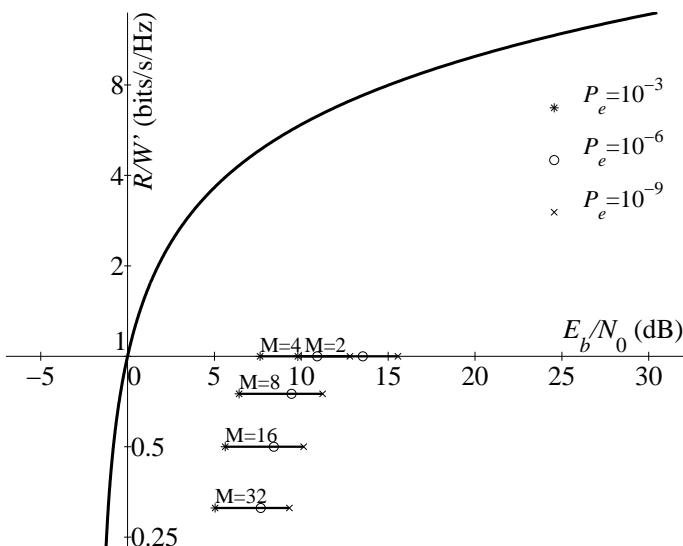


Figura 9.24. Ubicación de las modulaciones ortogonales paso bajo en el plano eficiencia espectral frente a relación señal a ruido para tres probabilidades de error.

y nosotros estamos utilizando aquí una entrada discreta con distribución de probabilidad uniforme.

En el siguiente ejemplo analizaremos de forma más detallada el caso de la modulación 4-PAM tratado en los Ejemplos 9.1, 9.4 y 9.9.

Ejemplo 9.12

Calculando numéricamente el máximo de (9.80) respecto a la distribución de probabilidad de los símbolos a la entrada del canal para el caso de una modulación 4-PAM obtenemos el resultado que muestra la Figura 9.27, donde se compara con la capacidad del canal gausiano y la capacidad del DMC resultante de esta misma modulación que fue presentando en el Ejemplo 9.1 y analizado en el Ejemplo 9.4.

Como es lógico, la capacidad del canal gausiano con entrada digital se sitúa entre la capacidad del canal gausiano y la capacidad del DMC. Del canal gausiano al gausiano con entrada digital la pérdida de capacidad se debe al empleo de una distribución discreta de probabilidades en lugar de una continua gausiana además de, obviamente, el límite máximo de dos bits por símbolo de entrada al canal de la constelación 4-PAM. Del canal gausiano con entrada digital al DMC la pérdida de capacidad se debe a la pérdida de información en el decisor (el decisor no es un sistema invertible). Esta última pérdida de información no se produciría si, además del símbolo decidido, el decisor ofreciese a su salida también la verosimilitud de cada posible símbolo transmitido.

De estos ejemplos cabe concluir que el empleo de un determinado formato de modulación adecuado no limita significativamente la capacidad del canal gausiano.

Ejemplo 9.13

Con una relación señal a ruido de 20 dB en un canal complejo paso banda (véase Figura 9.26) el canal gausiano posee una capacidad aproximada de 3,33 bits por uso (símbolo), pero para conseguir una capacidad mínima de 3 bits por símbolo debemos emplear una constelación QAM

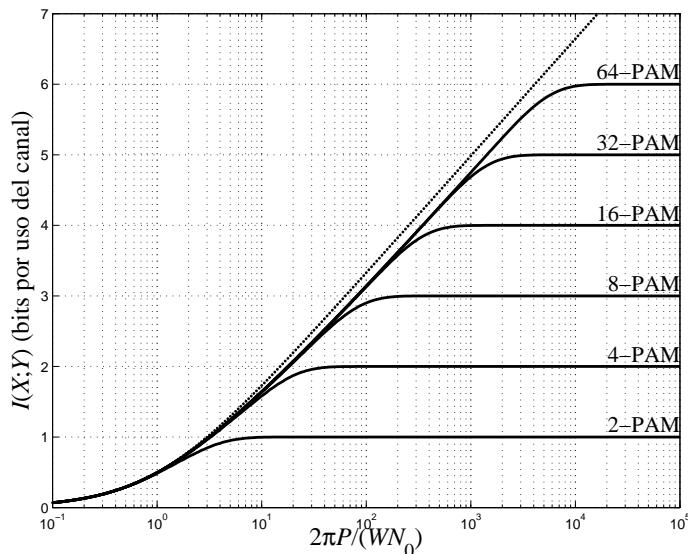


Figura 9.25. Información mutua entre la entrada y la salida de un canal gausiano con entrada digital para distintas modulaciones en banda de base de tipo PAM con símbolos equiprobables en función de la relación señal a ruido. En línea punteada, la capacidad del canal gausiano.

con, al menos, 16 símbolos; empleando una 8-QAM la capacidad está ligeramente por debajo de los 3 bits por símbolo.

Para alcanzar esta capacidad mínima de tres bits por símbolo, el codificador de canal ha de seleccionar las palabras código de entre una constelación QAM de, al menos, 16 puntos. La solución “natural” para enviar tres bits por símbolo, emplear una constelación 8-QAM, necesita un valor de $\frac{E_b}{N_0}$ (véase Figura 9.23) superior a 15 dB (equivalente a una relación señal a ruido aproximada de 20 dB) para conseguir una transmisión fiable, si definimos esta como la que se realiza con una probabilidad de error menor que 10^{-9} .

La diferencia entre la capacidad del canal gausiano y la que conseguimos con los formatos de modulación considerados en las Figuras 9.22 a 9.24 es debida a la simplicidad del codificador (la transmisión de cada símbolo se realiza en un solo uso del canal gausiano) y no al empleo de un formato de modulación. En el capítulo siguiente analizaremos codificadores, como los TCM, en los que es posible acortar la distancia entre la capacidad del canal gausiano y la tasa binaria a la que podemos conseguir una transmisión fiable empleando los mismos formatos de modulación.

9.4. LECTURAS ADICIONALES

A pesar del tiempo transcurrido, aún resulta recomendable la lectura de los artículos originales de Shannon, [76], fundamentalmente [73]. Entre los tratados monográficos sobre teoría de la información caben destacar especialmente dos, el de Cover y Thomas [21] por la calidad del texto en sí y el de Gallager [28] por ser una referencia absoluta en la teoría de

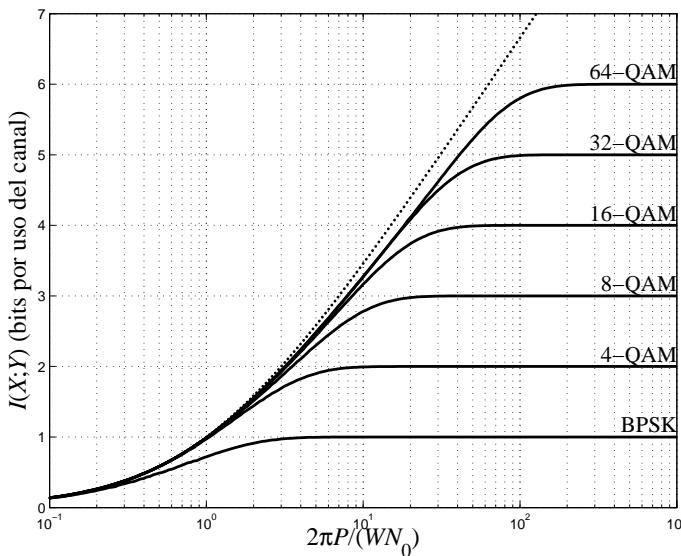


Figura 9.26. Información mutua entre la entrada y la salida de un canal gausiano con entrada digital para distintas modulaciones paso banda de tipo QAM con símbolos equiprobables en función de la relación señal a ruido. En línea punteada, la capacidad del canal gausiano.

la información aplicada a las comunicaciones digitales. Del resto podemos mencionar los de Blahut [9] y Csiszár y Körner [22] entre los de corte más clásico y el de Mackay [47], bastante más heterodoxo. Por último, resúmenes de extensión similar al presente capítulo podemos encontrarlos en un gran número de libros de comunicaciones digitales, como por ejemplo el debido a Haykin en [39].

PROBLEMAS

P9.1 Calcule la matriz de canal del DMC equivalente a un canal digital con una modulación 4-QAM y decisor ML en función de $\frac{E_b}{N_0}$.

P9.2 Calcule las probabilidades de transición del canal gausiano con entrada discreta equivalente a un canal gausiano con entrada digital con una modulación ortogonal de M símbolos en función de $\frac{E_b}{N_0}$. Calcule la matriz de canal del DMC equivalente a un canal digital formado por el anterior seguido de un decisor ML, también en función de $\frac{E_b}{N_0}$ (Ayuda: realice de manera justificada las simplificaciones que considere oportunas en la determinación de la probabilidad de error).

P9.3 La entrada a un sistema de comunicaciones binario, que se denota con una variable aleatoria X toma uno de dos posibles valores 0 ó 1, con probabilidades $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{4}$, respectivamente. La salida de este sistema de comunicaciones se modela con una variable

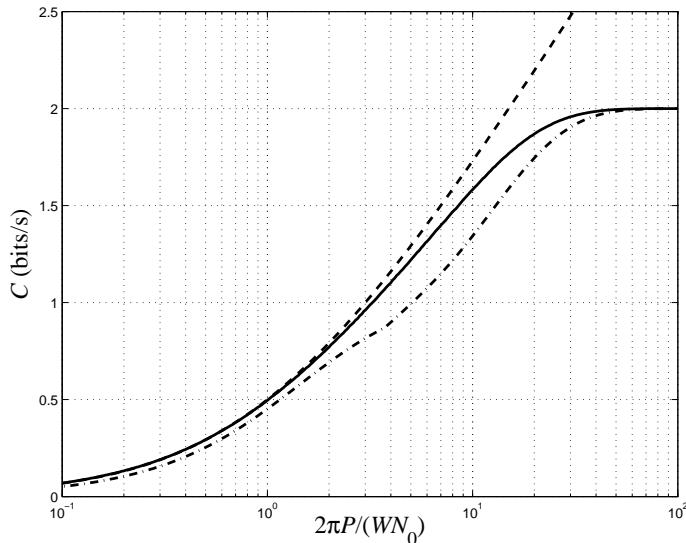


Figura 9.27. Capacidad del canal gausiano con entrada digital y formato de modulación 4-PAM en función de la relación señal a ruido. En línea discontinua, la capacidad del canal gausiano y en línea punteada, la capacidad del DMC del Ejemplo 9.4.

aleatoria Y , y el comportamiento de dicho sistema viene descrito por las probabilidades condicionadas siguientes:

$$P(Y = 1|X = 1) = 3/4 \quad P(Y = 0|X = 0) = 7/8$$

Calcule:

- 3.1. La entropía de X , $H(X)$.
- 3.2. La entropía de la salida, $H(Y)$.
- 3.3. La entropía condicionada de la salida a la entrada, $H(Y|X)$.
- 3.4. La información mutua entre la entrada y la salida, $I(X; Y)$.

- P9.4 Considere un proceso gausiano y blanco que es filtrado con un filtro paso bajo ideal de ancho de banda 15 KHz, y posteriormente muestreado con una frecuencia de muestreo de 30 KHz. A partir de estas muestras, $X[n]$, obtenemos el proceso $Y[n]$ como

$$Y[n] = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq X[n] < \sigma_x \\ 1 & \text{si } X[n] \geq \sigma_x \\ 2 & \text{si } 0 > X[n] \geq -\sigma_x \\ 3 & \text{si } X[n] < -\sigma_x \end{cases}$$

donde σ_x^2 es la varianza de $X[n]$. Determine la cantidad de información por unidad de tiempo (bits por segundo) que proporciona el proceso $Y[n]$.

P9.5 Podemos definir la entropía conjunta de más de dos variables de forma similar a (9.28).

Para tres variables aleatorias X , Y y Z con una distribución de probabilidad conjunta $\{p_{X,Y,Z}(x_i, y_j, z_k), i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, L, k = 1, \dots, K\}$, $H(X, Y, Z)$, se define como

$$H(X, Y, Z) \doteq \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^L \sum_{k=1}^K p_{X,Y,Z}(x_i, y_j, z_k) \log_2 \frac{1}{p_{X,Y,Z}(x_i, y_j, z_k)}$$

Demuestre que $H(X, Y, Z)$ puede descomponerse en términos de entropía condicional como

$$H(X, Y, Z) = H(X) + H(Y|X) + H(Z|X, Y)$$

Lo que se conoce como la *regla de la cadena de la entropía*. Proceda por inducción para determinar la regla de la cadena de la entropía para N variables aleatorias.

P9.6 En el Apéndice 9.B se demuestra que $H(X|Y) \leq H(X)$. Demuestre que la igualdad se produce únicamente cuando X e Y son estadísticamente independientes.

P9.7 Sea X una variable aleatoria discreta y $g(X)$ una función (determinista) de X . Demuestre que $H(X) \geq H(g(X))$. (Ayuda: descomponga $H(X, g(X))$ como en (9.31) y como en (9.32) e iguale ambas expresiones).

P9.8 Demuestre que $H(X, Y|Z) \geq H(X|Z)$ y encuentre las condiciones en las que se cumple la igualdad.

P9.9 La información mutua condicional entre las variables X e Y dado Z con una distribución de probabilidad conjunta $\{p_{X,Y,Z}(x_i, y_j, z_k), i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, L, k = 1, \dots, K\}$, $I(X; Y|Z)$, se define como

$$I(X; Y|Z) \doteq \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^L \sum_{k=1}^K p_{X,Y,Z}(x_i, y_j, z_k) \log_2 \frac{p_{X,Y|Z}(x_i, y_j|z_k)}{p_{X|Z}(x_i|z_k)p_{Y|Z}(y_j|z_k)}$$

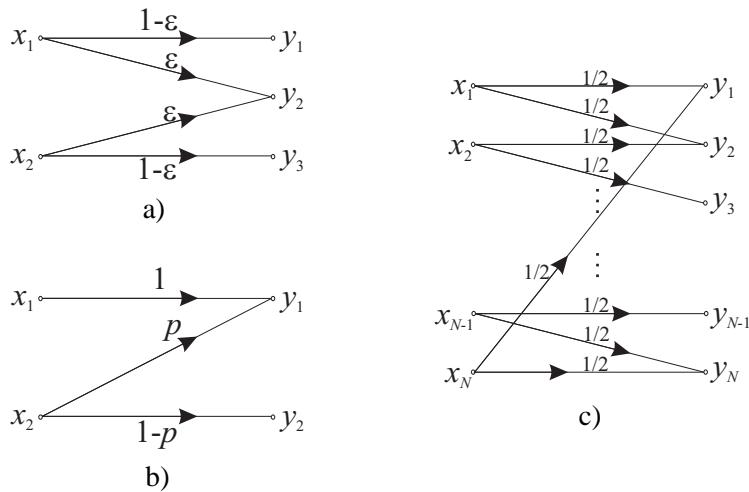
Demuestre que $I(X, Y; Z)$, que se define como

$$I(X, Y; Z) \doteq \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^L \sum_{k=1}^K p_{X,Y,Z}(x_i, y_j, z_k) \log_2 \frac{p_{X,Y,Z}(x_i, y_j, z_k)}{p_{X,Y}(x_i, y_j)p_Z(z_k)}$$

puede descomponerse en términos de información mutua condicional como

$$I(X, Y; Z) = I(X; Z) + I(Y; Z|X)$$

Lo que se conoce como la *regla de la cadena para la información mutua*. Proceda por inducción para determinar la regla de la cadena de la información mutua para N variables aleatorias.

**Figura 9.28.** Canales correspondientes al Problema P9.10.

P9.10 Calcule la capacidad de los DMC de la Figura 9.28. Suponga, por simplicidad, que el valor de N en la Figura 9.28(c) es par.

P9.11 Considere un DMC con un alfabeto de entrada $\{x_1, x_2, x_3\}$, un alfabeto de salida $\{y_1, y_2, y_3\}$ y una matriz de canal

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

11.1. Calcule su capacidad.

11.2. Este canal es un ejemplo de *canal simétrico*, que se define como aquél en el que todas las filas y columnas de su matriz de canal están formadas por la permutación de los mismos elementos. También se definen los canales *simétricos en sentido amplio* como aquellos cuyas matrices de canal no son cuadradas, pero los elementos de cualquier fila se forman mediante la permutación de los mismos elementos y la suma de los elementos de cada columna es la misma. Determine la fórmula general de la capacidad de los canales simétricos y simétricos en sentido amplio.

P9.12 Considere la concatenación de dos BSC con idéntica probabilidad de cruce, p , $0 < p < 1/2$.

- 12.1. Demuestre que pueden ser considerados conjuntamente como un único BSC, determine su probabilidad de cruce en función de p y calcule su capacidad.
- 12.2. Repita el apartado anterior para la concatenación de N BSC.
- 12.3. Determine el resultado cuando N tiende a infinito.

P9.13 Considere un DMC con alfabeto de entrada $\{x_i, i = 1, \dots, M\}$, alfabeto de salida $\{y_j, j = 1, \dots, L\}$ y probabilidades de transición $p_{Y|X}(y_j|x_i)$

13.1. Demuestre que la información mutua entre la entrada y la salida del canal se puede escribir como

$$I(X;Y) = \sum_{i=1}^M p_X(x_i) \log_2 \frac{\alpha_i}{p_X(x_i)}$$

donde

$$\alpha_i \doteq \prod_{j=1}^L (p_{X|Y}(x_i|y_j))^{p_{Y|X}(y_j|x_i)}$$

- 13.2. A partir de la expresión anterior, demuestre que si consideramos fijos los valores de $p_{X|Y}(x_i|y_j)$ (además de las probabilidades de transición), la distribución de entrada que hace máxima $I(X;Y)$ es $p_X(x_i) = c \cdot \alpha_i$, donde c es una constante elegida para que $\sum_{i=1}^M p_X(x_i) = 1$.
- 13.3. Demuestre que el valor máximo de $I(X;Y)$ obtenido según el apartado anterior es igual a $\log \left(\sum_{i=1}^M \alpha_i \right)$.

P9.14 Calcule la entropía diferencial de una variable aleatoria continua para las siguientes distribuciones:

14.1. Laplaciana (ver P4.8).

14.2. Exponencial.

14.3. Rayleigh.

P9.15 Sean X e Y dos variables aleatorias gausianas idénticamente distribuidas, de media μ , varianza σ^2 y covarianza cruzada $E\{(X - \mu)(Y - \mu)\} = \rho\sigma^2$. Determine $h(X + Y)$ e $I(X;Y)$ en los siguientes casos:

15.1. $\rho = 0$

15.2. $\rho = 1$

15.3. $\rho = -1$

P9.16 Podemos modelar el canal telefónico de comunicaciones vocales como un canal gauiano limitado en banda, con una banda de paso de 200 a 3.400 Hz y una relación señal a ruido de 30 dB en recepción. Determine su capacidad.

P9.17 Consideremos un canal discreto equivalente en un espacio de dimensión N en el que el vector de ruido aditivo es gauiano, de componentes independientes, pero cada una de ellas de una varianza distinta. Suponiendo que limitamos la energía media de la señal en cada dimensión a P , determine la capacidad del canal. Indique razonadamente cómo variaría la capacidad si estableciésemos una única limitación de la energía media de la señal a NP .

- P9.18 En un canal gausiano en banda base tenemos una relación señal a ruido de 20 dB. Determine la capacidad del canal, la información mutua entrada salida de los canales gausianos con entrada digital si empleamos las constelaciones 2-PAM, 4-PAM y 8-PAM y símbolos equiprobables (emplee los datos de la Figura 9.25), las probabilidades de error con esas constelaciones y un decisor ML y, en función de todos estos datos, escoja la modulación que considere más adecuada para lograr una transmisión fiable a la mayor velocidad binaria posible.

APÉNDICES

9.A. POR QUÉ LA ENTROPÍA ES LA ÚNICA MEDIDA POSIBLE DE INFORMACIÓN, SEGÚN SHANNON

El contenido de este apéndice es, en sus líneas fundamentales, el desarrollo original que aparece en el artículo “*A Mathematical Theory of Communication*”, de Claude Shannon [73]. En él se establece una definición axiomática de la entropía a partir de tres propiedades que debe de cumplir una medida de incertidumbre sobre una variable aleatoria discreta. Otras definiciones axiomáticas de la entropía podemos encontrarlas en [22].

Consideremos una variable aleatoria discreta X_M que puede tomar uno de entre M valores posibles $\{x_i, i = 1, \dots, M\}$ con probabilidades $\{p_i, i = 1, \dots, M\}$. Queremos definir una medida sobre X_M , $H(X_M)$, que nos indique la incertidumbre sobre el valor concreto que toma la variable aleatoria en una realización, de tal manera que si la incertidumbre es mayor, también lo sea la medida. Una forma de pensar en la medida de incertidumbre es como el número de preguntas que, en media, necesitamos hacer para conocer el valor concreto de una realización; a mayor número de preguntas, mayor incertidumbre sobre el valor concreto. La incertidumbre, definida así, no depende de los valores concretos que puede tomar la variable aleatoria, sino sólo de sus probabilidades; será una función $H(X_M) = H(p_1, p_2, \dots, p_M)$.

Sobre esta medida, $H(p_1, p_2, \dots, p_M)$, impondremos las siguientes tres condiciones:

- C1. $H(p_1, p_2, \dots, p_M)$ debe ser una función continua respecto a los valores $\{p_i, i = 1, \dots, M\}$.
- C2. Para variables aleatorias equiprobables, $H(\frac{1}{M}, \frac{1}{M}, \dots, \frac{1}{M})$ debe ser estrictamente creciente respecto a M .
- C3. Si una variable aleatoria puede expresarse como la composición secuencial de dos variables aleatorias estadísticamente independientes, su entropía será la suma ponderada de las entropías de cada variable aleatoria.

La primera condición nos asegura que una pequeña variación en la distribución de probabilidades no produce cambios bruscos en el valor de la entropía. La segunda condición establece que, en igualdad de condiciones (equiprobabilidad), a mayor número de opciones (M), mayor entropía. Como consecuencia, la medida sobre la probabilidad de cada evento debe ser

decreciente; a mayor probabilidad, menor valor. La tercera es la que establece el carácter logarítmico de la medida de entropía, y vamos a explicar su sentido con el mismo ejemplo que emplea Shannon. Sean dos variables aleatorias con alfabetos $\{x_{11}, x_{12}\}$ y $\{x_{21}, x_{22}\}$, con distribuciones de probabilidad, respectivamente, $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ y $\{\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\}$, y la siguiente forma de composición: si la primera variable aleatoria da como resultado en una realización el símbolo x_{12} , se obtiene una realización de la segunda variable aleatoria y, en caso contrario, no. Esta composición da lugar a una variable aleatoria con tres símbolos con las siguientes probabilidades: $\frac{1}{2}$ (si la realización de la primera variable aleatoria fue x_{11}), $\frac{1}{3}$ (si la realización de la primera variable aleatoria fue x_{12} y la de la segunda x_{21} , ya que $\frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$) y $\frac{1}{6}$ (si la realización de la primera variable aleatoria fue x_{12} y la de la segunda x_{22} , ya que $\frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$). En estas condiciones, la tercera condición dice que

$$H\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right) = H\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}H\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

La derivación de la medida de entropía sigue el siguiente esquema: primero obtenemos la expresión de la entropía para variables con distribuciones de probabilidad uniformes empleando las Condiciones 2 y 3; a continuación obtenemos la entropía para distribuciones de probabilidad con probabilidades racionales agrupando símbolos con ayuda de la Condición 3 y, finalmente, empleando la condición de continuidad, pasamos a valores reales de probabilidad.

Para simplificar la notación definimos $H(M)$ como $H(M) \doteq H(\frac{1}{M}, \frac{1}{M}, \dots, \frac{1}{M})$. Consideramos ahora una variable aleatoria equiprobable con un alfabeto de $M = l^m$ símbolos, siendo l y m números enteros. La condición 3 nos dice que

$$H(l^m) = mH(l)$$

Consideramos también otra variable aleatoria con un alfabeto de o^n símbolos equiprobables ($o, n \in \mathbb{Z}$), que también cumple $H(o^n) = nH(o)$.

Para cada n tan grande como queramos, podemos siempre encontrar un valor de m que satisfaga

$$l^m \leq o^n < l^{m+1} \quad (9.81)$$

Tomando el logaritmo de (9.81) y dividiendo cada término por $n \log_2 l$ obtenemos

$$\frac{m}{n} \leq \frac{\log_2 o}{\log_2 l} < \frac{m}{n} + \frac{1}{n}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\left| \frac{m}{n} - \frac{\log_2 o}{\log_2 l} \right| < \epsilon \quad (9.82)$$

donde ϵ es un número real positivo que podemos hacer tan pequeño como queramos sin más que hacer n lo suficientemente grande.

Por otra parte, la Condición 2 nos dice que

$$H(l^m) \leq H(o^n) < H(l^{m+1})$$

sobre la que aplicamos la Condición 3 para obtener

$$mH(l) \leq nH(o) < (m+1)H(l) \quad (9.83)$$

que dividimos por $nH(l)$ para obtener

$$\frac{m}{n} \leq \frac{H(o)}{H(l)} < \frac{m}{n} + \frac{1}{n}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\left| \frac{m}{n} - \frac{H(o)}{H(l)} \right| < \epsilon \quad (9.84)$$

con el mismo ϵ que en (9.82). Combinando (9.82) y (9.84) tenemos

$$\left| \frac{H(o)}{H(l)} - \frac{\log_2 o}{\log_2 l} \right| < 2\epsilon \quad (9.85)$$

y de aquí, como podemos hacer ϵ tan pequeño como queramos, concluimos que

$$H(o) = K \log_2 o$$

siendo K una constante real y positiva para cumplir con la Condición 2. Esta constante K aparece debido a que en (9.85) encontramos el cociente entre los logaritmos.

Ahora que hemos demostrado la forma que toma la función entropía para variables aleatorias con distribuciones uniformes, vamos a ver qué forma toma para distribuciones con probabilidades racionales.

Consideramos un conjunto de M números enteros, $\{m_i, i = 1, \dots, M\}$. A partir de estos números construimos dos variables aleatorias, la primera con un alfabeto de M símbolos cuyas probabilidades son $\{p_i = \frac{m_i}{\sum_{j=1}^M m_j}, i = 1, \dots, M\}$ y la segunda con un alfabeto de $\sum_{j=1}^M m_j$ símbolos equiprobables. Cada símbolo x_i de la primera puede considerarse como generado a partir de m_i símbolos (equiprobables) de la segunda variable aleatoria o , lo que viene a ser lo mismo, la segunda variable aleatoria puede considerarse como la composición de la primera variable aleatoria con un conjunto de variables aleatorias con alfabetos de m_i ($i = 1, \dots, M$) símbolos equiprobables tal y como se consideraba en la Condición 3.

Como ya sabemos la forma que adopta la entropía para variables aleatorias uniformes, sólo tenemos que despejar la entropía de la variable que tiene M símbolos. Según la Condición 3 tenemos

$$K \log_2 \left(\sum_{j=1}^M m_j \right) = H(p_1, p_2, \dots, p_M) + \sum_{i=1}^M p_i (K \log_2 m_i)$$

y

$$\begin{aligned}
 H(p_1, p_2, \dots, p_M) &= K \log_2 \left(\sum_{j=1}^M m_j \right) - K \sum_{i=1}^M p_i \log_2 m_i \\
 &= -K \sum_{i=1}^M p_i \log_2 \frac{m_i}{\sum_{j=1}^M m_j} \\
 &= K \sum_{i=1}^M p_i \log_2 \frac{1}{p_i}
 \end{aligned} \tag{9.86}$$

A partir de aquí ya sólo queda hacer tender $\sum_{j=1}^M m_j$ hacia infinito para, aplicando la Condición 1 (continuidad), conseguir que (9.86) sea válida para cualquier valor real de p_i contenido entre 0 y 1. El valor de K es arbitrario y nos permite cambiar la base del logaritmo empleando la igualdad $\log_c a = \log_c b \log_b a$.

9.B. DEMOSTRACIÓN DE ALGUNAS DESIGUALDADES

En este apéndice vamos a demostrar algunas desigualdades básicas en la teoría de la información. Comenzaremos antes con las definiciones de concavidad y convexidad:

Definición 1. Una función f (ó $f(x)$) es *convexa* si se cumple

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

para todo $0 \leq \lambda \leq 1$ y cualesquiera x_1 y x_2 en el dominio de f .

Definición 2. Una función f es *estrictamente convexa* si se cumple

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

para todo $0 < \lambda < 1$ y cualesquiera x_1 y x_2 en el dominio de f .

Definición 3. Una función f es *cóncava* si se cumple

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

para todo $0 \leq \lambda \leq 1$ y cualesquiera x_1 y x_2 en el dominio de f .

Definición 4. Una función f es *estrictamente cóncava* si se cumple

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) > \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

para todo $0 < \lambda < 1$ y cualesquiera x_1 y x_2 en el dominio de f .

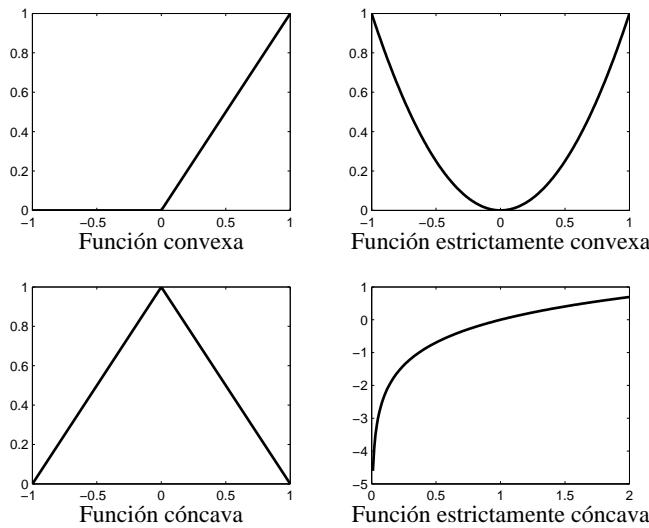


Figura 9.29. Ejemplos de funciones convexas y cónicas.

de los que podemos ver algunos ejemplos en la Figura 9.29.

A continuación demostraremos la conocida como *desigualdad de Jensen*: dada una variable aleatoria X , si f es una función convexa se cumple

$$f(E\{X\}) \leq E\{f(X)\} \quad (9.87)$$

Análogamente, si f es estrictamente convexa se cumple que $f(E\{X\}) < E\{f(X)\}$, si f es cónica se cumple que $f(E\{X\}) \geq E\{f(X)\}$ y si f es estrictamente cónica se cumple que $f(E\{X\}) > E\{f(X)\}$.

Demostraremos únicamente la versión básica de esta desigualdad, indicando posteriormente la forma de extenderla al resto de casos.

Consideremos en primer lugar una variable aleatoria discreta binaria X que puede tomar los valores x_1 y x_2 . En este caso, la desigualdad de Jensen, (9.87), toma la forma

$$f(x_1 p_X(x_1) + x_2 p_X(x_2)) \leq p_X(x_1)f(x_1) + p_X(x_2)f(x_2)$$

que se demuestra directamente a partir de la definición de convexidad.

Procediendo por inducción, suponemos que (9.87) es cierta para distribuciones discretas con alfabetos de M símbolos (con $M \geq 2$) y probaremos que se cumple para distribuciones con alfabetos de $(M+1)$ símbolos. Sea X una variable aleatoria discreta que puede tomar los valores $\{x_i, i = 1, \dots, M+1\}$ de acuerdo con una distribución de probabilidades $\{p_X(x_i), i = 1, \dots, M+1\}$. Tenemos

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{M+1} x_i p_X(x_i)\right) &= f\left(x_{M+1} p_X(x_{M+1}) + (1 - p_X(x_{M+1})) \sum_{i=1}^M x_i \frac{p_X(x_i)}{(1 - p_X(x_{M+1}))}\right) \\ &\leq p_X(x_{M+1})f(x_{M+1}) + (1 - p_X(x_{M+1}))f\left(\sum_{i=1}^M x_i \frac{p_X(x_i)}{(1 - p_X(x_{M+1}))}\right) \end{aligned} \quad (9.88)$$

por la definición de convexidad. Por otra parte, $\sum_{i=1}^M \frac{p_X(x_i)}{(1-p_X(x_{M+1}))} = 1$, y el argumento de f en el segundo término de (9.88) es la esperanza de una distribución de M símbolos. Como la hipótesis de partida es que la desigualdad es cierta para distribuciones con M términos tenemos que

$$f\left(\sum_{i=1}^M x_i \frac{p_X(x_i)}{(1-p_X(x_{M+1}))}\right) \leq \sum_{i=1}^M \frac{p_X(x_i)}{(1-p_X(x_{M+1}))} f(x_i)$$

que, sustituido en (9.88) da como resultado

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{M+1} x_i p_X(x_i)\right) &\leq p_X(x_{M+1})f(x_{M+1}) + (1-p_X(x_{M+1})) \sum_{i=1}^M \frac{p_X(x_i)}{(1-p_X(x_{M+1}))} f(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{M+1} p_X(x_i) f(x_i) \end{aligned}$$

lo que demuestra la desigualdad. Las demostraciones para concavidad es análoga, así como los casos de convexidad o concavidad estricta. Para variables aleatorias continuas, la desigualdad sigue siendo cierta y se puede probar extendiendo la demostración anterior imponiendo continuidad en la función y empleando la continuidad en x .

Basándonos en la desigualdad de Jensen y la concavidad de la función logaritmo demostraremos ahora el límite superior de la entropía de una variable aleatoria discreta, $H(X) \leq \log_2 M$. Hacemos

$$\begin{aligned} \log_2 M - H(X) &= \log_2 M - \sum_{i=1}^M p_X(x_i) \log_2 \frac{1}{p_X(x_i)} \\ &= - \sum_{i=1}^M p_X(x_i) \log_2 \frac{1}{M p_X(x_i)} \\ &\geq - \log_2 \sum_{i=1}^M p_X(x_i) \frac{1}{M p_X(x_i)} \\ &= - \log_2 \sum_{i=1}^M \frac{1}{M} \\ &= - \log_2 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

y de aquí, despejando $\log_2 M$ tenemos que $\log_2 M \geq H(X)$. Como la función logaritmo es estrictamente cóncava, la igualdad sólo se produce en el caso en que los símbolos sean equiprobables ($p_X(x_i) = 1/M$), porque

$$\sum_{i=1}^M p_X(x_i) \log_2 \frac{1}{M p_X(x_i)} = \sum_{i=1}^M \frac{1}{M} \log_2 \frac{1}{1} = \sum_{i=1}^M \frac{1}{M} 0 = 0$$

Utilizando los mismos argumentos, podemos demostrar la no negatividad de la información mutua.

$$\begin{aligned}
 I(X;Y) &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^L p_{X,Y}(x_i, y_j) \log_2 \frac{p_{X,Y}(x_i, y_j)}{p_X(x_i)p_Y(y_j)} \\
 &= - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^L p_{X,Y}(x_i, y_j) \log_2 \frac{p_X(x_i)p_Y(y_j)}{p_{X,Y}(x_i, y_j)} \\
 &\geq - \log_2 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^L p_{X,Y}(x_i, y_j) \frac{p_X(x_i)p_Y(y_j)}{p_{X,Y}(x_i, y_j)} \\
 &= - \log_2 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^L p_X(x_i)p_Y(y_j) \\
 &= - \log_2 1 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

donde la igualdad sólo se produce en el caso en que X e Y sean independientes, porque en ese caso

$$\log_2 \frac{p_{X,Y}(x_i, y_j)}{p_X(x_i)p_Y(y_j)} = \log_2 \frac{p_X(x_i)p_Y(y_j)}{p_X(x_i)p_Y(y_j)} = \log_2 1 = 0$$

Esta última demostración es esencialmente válida también para variables aleatorias continuas ya que los dos argumentos de la demostración (la desigualdad de Jensen y la concavidad de la función logaritmo) siguen siendo de aplicación, aunque la esperanza matemática se evalúe mediante una integral.

A partir de la no negatividad de la información mutua podemos demostrar que el condicionamiento nunca aumenta la entropía y, al contrario, puede reducirla. Para variables aleatorias discretas tenemos que

$$0 \leq I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) \implies H(X|Y) \leq H(X)$$

y para variables aleatorias continuas

$$0 \leq I(X;Y) = h(X) - h(X|Y) \implies h(X|Y) \leq h(X)$$

9.C. RELACIÓN ENTRE LAS MEDIDAS DE INFORMACIÓN DE VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS Y DISCRETAS

En el Apartado 9.3.1 hemos mencionado que la información mutua entre variables aleatorias continuas es, esencialmente, la misma medida que su equivalente para variables aleatorias discretas, mientras que la entropía diferencial es una medida distinta de la entropía de variables aleatorias discretas. Aquí analizaremos de manera estricta estas relaciones, comenzando por la información mutua y finalizando con las entropías.

Para analizar la relación entre la información mutua de variables aleatorias continuas y discretas vamos a discretizar (o cuantificar) las variables aleatorias continuas X e Y . Dividimos el rango de X en intervalos de longitud Δ_x de la forma $[i\Delta_x, (i+1)\Delta_x)$ y el rango de Y en intervalos de longitud Δ_y de la forma $[j\Delta_y, (j+1)\Delta_y)$. A partir de esta división definimos las variables aleatorias discretas X^Δ e Y^Δ de la siguiente forma: X^Δ toma el valor $x_i^{\Delta_x}$ si X está en el intervalo $[i\Delta_x, (i+1)\Delta_x)$, siendo análoga la definición para Y^Δ .

Las distribuciones de probabilidad marginales y conjunta de X^Δ e Y^Δ se obtienen integrando las de X e Y en los intervalos en que están definidas

$$p_{X^\Delta}(x_i^{\Delta_x}) = \int_{i\Delta_x}^{(i+1)\Delta_x} f_X(x) dx \quad (9.89)$$

$$p_{Y^\Delta}(y_j^{\Delta_y}) = \int_{j\Delta_y}^{(j+1)\Delta_y} f_Y(y) dy \quad (9.90)$$

$$p_{X^\Delta, Y^\Delta}(x_i^{\Delta_x}, y_j^{\Delta_y}) = \int_{i\Delta_x}^{(i+1)\Delta_x} \int_{j\Delta_y}^{(j+1)\Delta_y} f_{X,Y}(x, y) dx dy \quad (9.91)$$

Resulta conveniente también definir las siguientes cantidades normalizando respecto a las longitudes de los intervalos Δ_x y Δ_y como

$$p_X(x_i^{\Delta_x}) \doteq \frac{1}{\Delta_x} p_{X^\Delta}(x_i^{\Delta_x}) = \frac{1}{\Delta_x} \int_{i\Delta_x}^{(i+1)\Delta_x} f_X(x) dx \quad (9.92)$$

$$p_Y(y_j^{\Delta_y}) \doteq \frac{1}{\Delta_y} p_{Y^\Delta}(y_j^{\Delta_y}) = \frac{1}{\Delta_y} \int_{j\Delta_y}^{(j+1)\Delta_y} f_Y(y) dy \quad (9.93)$$

$$\begin{aligned} p_{X,Y}(x_i^{\Delta_x}, y_j^{\Delta_y}) &\doteq \frac{1}{\Delta_x \Delta_y} p_{X^\Delta, Y^\Delta}(x_i^{\Delta_x}, y_j^{\Delta_y}) \\ &= \frac{1}{\Delta_x \Delta_y} \int_{i\Delta_x}^{(i+1)\Delta_x} \int_{j\Delta_y}^{(j+1)\Delta_y} f_{X,Y}(x, y) dx dy \end{aligned} \quad (9.94)$$

cuyos límites, cuando las longitudes de los intervalos tienden a cero, son las funciones de densidad de probabilidad de las variables aleatorias continuas. En el caso de X tenemos

$$\lim_{\Delta_x \rightarrow 0} p_X(x_i^{\Delta_x}) = \lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta_x} \int_{i\Delta_x}^{(i+1)\Delta_x} f_X(x) dx = f_X(i\Delta_x)$$

Calculamos ahora la información mutua entre X^Δ e Y^Δ

$$\begin{aligned} I(X^\Delta; Y^\Delta) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} p_{X^\Delta, Y^\Delta}(x_i^{\Delta_x}, y_j^{\Delta_y}) \log_2 \frac{p_{X^\Delta, Y^\Delta}(x_i^{\Delta_x}, y_j^{\Delta_y})}{p_{X^\Delta}(x_i^{\Delta_x}) p_{Y^\Delta}(y_j^{\Delta_y})} \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} p_{X^\Delta, Y^\Delta}(x_i^{\Delta_x}, y_j^{\Delta_y}) \log_2 \frac{\Delta_x \Delta_y p_{X,Y}(x_i^{\Delta_x}, y_j^{\Delta_y})}{\Delta_x p_X(x_i^{\Delta_x}) \Delta_y p_Y(y_j^{\Delta_y})} \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{i\Delta_x}^{(i+1)\Delta_x} \int_{j\Delta_y}^{(j+1)\Delta_y} f_{X,Y}(x, y) dx dy \log_2 \frac{p_{X,Y}(x_i^{\Delta_x}, y_j^{\Delta_y})}{p_X(x_i^{\Delta_x}) p_Y(y_j^{\Delta_y})} \end{aligned} \quad (9.95)$$

y tomamos el límite cuando Δ_x y Δ_y tienden a cero

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\Delta_x \rightarrow 0 \\ \Delta_y \rightarrow 0}} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{i\Delta_x}^{(i+1)\Delta_x} \int_{j\Delta_y}^{(j+1)\Delta_y} f_{X,Y}(x,y) \log_2 \frac{p_{X,Y}(x_i^{\Delta_x}, y_j^{\Delta_y})}{p_X(x_i^{\Delta_x})p_Y(y_j^{\Delta_y})} dx dy = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) \log_2 \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)f_Y(y)} dx dy \quad (9.96) \end{aligned}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\lim_{\substack{\Delta_x \rightarrow 0 \\ \Delta_y \rightarrow 0}} I(X^\Delta; Y^\Delta) = I(X; Y) \quad (9.97)$$

lo que demuestra la identidad de ambas medidas.

Procediendo de igual manera con las entropías, calculamos la entropía de X^Δ , $H(X^\Delta)$, como

$$\begin{aligned} H(X^\Delta) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} p_{X^\Delta}(x_i^{\Delta_x}) \log_2 \frac{1}{p_{X^\Delta}(x_i^{\Delta_x})} \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} p_{X^\Delta}(x_i^{\Delta_x}) \log_2 \frac{1}{\Delta_x p_X(x_i^{\Delta_x})} \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} p_{X^\Delta}(x_i^{\Delta_x}) \log_2 \frac{1}{p_X(x_i^{\Delta_x})} + \sum_{i=-\infty}^{\infty} p_{X^\Delta}(x_i^{\Delta_x}) \log_2 \frac{1}{\Delta_x} \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} p_{X^\Delta}(x_i^{\Delta_x}) \log_2 \frac{1}{p_X(x_i^{\Delta_x})} + \log_2 \frac{1}{\Delta_x} \quad (9.98) \end{aligned}$$

y tomamos el límite cuando Δ_x tiende a cero

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta_x \rightarrow 0} H(X^\Delta) &= \lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \sum_{i=-\infty}^{\infty} p_{X^\Delta}(x_i^{\Delta_x}) \log_2 \frac{1}{p_X(x_i^{\Delta_x})} + \lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \log_2 \frac{1}{\Delta_x} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \log_2 \frac{1}{f_X(x)} dx + \lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \log_2 \frac{1}{\Delta_x} \\ &= h(X) + \lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \log_2 \frac{1}{\Delta_x} \quad (9.99) \end{aligned}$$

que hace que $H(X^\Delta)$ tienda a infinito, demostrando de esta forma la disparidad entre la entropía y la entropía diferencial.

CAPÍTULO 10

CODIFICACIÓN PARA PROTECCIÓN CONTRA ERRORES

Si en el capítulo anterior definíamos el concepto de capacidad de canal como límite de la velocidad binaria con la que podemos transmitir de forma fiable, en este vamos a analizar algunas de las técnicas de diseño de codificadores que permiten, de forma sistemática, aproximarse a él.

Trataremos en primer lugar los códigos que podríamos denominar tradicionales: los bloques y los convolucionales, analizando de forma conjunta los decodificadores para DMC y para el canal gausiano. Estos códigos, sin embargo, no son capaces de proporcionar soluciones con velocidades binarias cercanas al límite de Shannon de la capacidad del canal con codificadores y decodificadores de complejidad moderada. Un primer paso para reducir esta diferencia se consigue con los códigos en rejilla o modulaciones codificadas en rejilla (“*Trellis Coded Modulations*”, TCM) que analizaremos a continuación de los convolucionales y como extensión directa de estos. El asalto definitivo al límite de Shannon se consigue con los códigos analizados en el último apartado: los (mal) llamados turbo códigos y los códigos LDPC (“*Low Density Parity Check*”).

10.1. INTRODUCCIÓN Y DEFINICIONES

La definición que establece la teoría de la información de transmisión fiable a una tasa R es (Página 558): “para todo $\epsilon > 0$ existe una secuencia de códigos $(n, \lceil nR \rceil)$ y un valor n_0 para el que sus probabilidades de error máximas $P_e(\text{máx}, n) < \epsilon$ cuando $n > n_0$ ”. Por otra parte, la demostración de los teoremas de codificación de canal se basa en formular una estructura del codificador y una estrategia de decodificación que permita calcular $P_e(\text{máx}, n)$ de forma simple para poder verificar que es posible transmitir de forma fiable si $R \leq C$.

Aplicado a un caso concreto como el del Ejemplo 9.7, un valor de ϵ de $3 \cdot 10^{-3}$ sobre un BSC con $p = 0,15$ nos proporciona, con el codificador y el decodificador propuestos, un valor de n_0 aproximadamente igual a 500, lo que conduce a un codificador y un decodificador de complejidad inabordable. Este ejemplo pone de manifiesto, por una parte, la dificultad de

alcanzar en la práctica los límites establecidos en la teoría de la información y, por otra, la necesidad de disponer de codificadores y decodificadores que puedan ser realizados con una complejidad moderada, aunque no sean óptimos en términos de probabilidad de error.

Las técnicas de diseño de codificadores y decodificadores de canal que vamos a considerar en este capítulo se centran en esto último, dotando de una estructura algebraica bien definida a los códigos y haciendo uso de métodos de decodificación computacionalmente eficientes. Para no complicar innecesariamente estas técnicas de diseño, en lo sucesivo consideraremos, de entre los canales digitales, únicamente el BSC y, de entre los canales gausianos, el de entrada digital.

Al particularizar el codificador para DMC definido en el Apartado 9.2.3 (Figura 9.16) para BSC igualamos el tamaño del alfabeto de entrada y de salida, y el codificador transforma k bits en n dígitos binarios. Para no incrementar la probabilidad de error del BSC, n debe ser mayor o igual que k ($n \geq k$) y, por tanto, la tasa R del código será menor o igual que 1 ($R \leq 1$). Estrictamente hablando, R se medirá ahora en bits por dígito binario de entrada al BSC pero, salvo que sea necesario distinguir entre bits y dígitos binarios, en lo sucesivo, y por simplicidad, nos referiremos a estos últimos como bits, y R será adimensional. Podemos definir además la *redundancia*, $r = n - k$, como el número de bits que añade el codificador, y expresar R en función de r como $R = \frac{k}{n} = \frac{n-r}{n} = 1 - r/n$.

Vamos diferenciar entre la entrada al canal, \mathbf{X} , cuyo alfabeto tiene 2^n elementos, de la salida del codificador, \mathbf{C} , cuyo alfabeto tiene sólo 2^k elementos (aunque cada elemento sea un vector o palabra de n bits). Empleando la notación mediante vectores fila, más habitual en la literatura de métodos de codificación para protección contra errores, podemos decir que el codificador asigna a cada una de las 2^k palabras de entrada $\mathbf{b}_i = [b_i[0] \dots b_i[k-1]]$ una palabra código $\mathbf{c}_i = [c_i[0] \dots c_i[n-1]]$ para $i \in \{0, 1, \dots, 2^k - 1\}$.

Podemos definir una métrica para vectores o palabras binarias, que se denomina *distancia de Hamming*, y es igual al número de componentes o dígitos en que difieren dos vectores, y que denotaremos como d_H . Así, si $\mathbf{x} = [01100]$ e $\mathbf{y} = [01111]$, $d_H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2$ ó $d_H(01100, 01111) = 2$, $d_H(000, 111) = 3$, etc.¹ Dejamos como ejercicio comprobar que la distancia de Hamming cumple las tres propiedades de distancia (no negatividad, simetría y $d_H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$) y la desigualdad triangular ($d_H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d_H(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d_H(\mathbf{z}, \mathbf{y})$). El número de “unos” de una palabra binaria, que podemos interpretar como la distancia a la palabra compuesta sólo por “ceros” e incluso como una norma de la que podría derivarse la distancia de Hamming, suele denominarse *peso de la palabra*.

De forma similar a la distancia mínima de una constelación definimos la distancia mínima de un código como la menor distancia entre dos palabras código

$$d_{\min} = \min_{\substack{i,j=0,\dots,2^k-1 \\ i \neq j}} d_H(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j) \quad (10.1)$$

Ejemplo 10.1

La distancia mínima del código de repetición de tasa 1/3 del Ejemplo 9.6 es 3. La distancia

¹En realidad, la distancia de Hamming se define sobre cualesquiera dos secuencias m -arias de igual longitud. Podemos, por ejemplo, medir la distancia de Hamming entre dos palabras de texto con el mismo número de letras, $d_H(\text{pepe}, \text{pepa}) = 1$, ó $d_H(\text{pepe}, \text{pato}) = 3$.

mínima del código de tasa 1/3 del Ejemplo 9.7 es 4.

Por lo que respecta al canal gausiano con entrada digital, suponemos que la modulación está fijada de antemano (aunque pueda ser tan compleja como una modulación OFDM con 8.192 portadoras y constelación 256-QAM). El valor de n del codificador será un múltiplo de la dimensión de la constelación, N , y cada palabra código estará compuesta por n/N símbolos de la constelación,

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_i &= [c_i[0], \dots, c_i[n-1]] \\ &= [a_i[0], \dots, a_i[n/N-1]] \\ &= [a_{i0}[0], \dots, a_{i(N-1)}[0], \dots, a_{i0}[n/N-1], \dots, a_{i(N-1)}[n/N-1]]\end{aligned}$$

Por ejemplo, cada palabra código de un codificador con k igual a 4, $R = 1$ y modulación 16-QAM estará compuesta por dos símbolos 16-QAM.

El cálculo de distancias se realiza ahora con distancia euclídea, y la distancia mínima de un código se define como anteriormente

$$d_{min} = \min_{\substack{i,j=0,\dots,2^k-1 \\ i \neq j}} d(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j) \quad (10.2)$$

Los decodificadores que proporcionan la mínima probabilidad de error, como quedó establecido en el Apartado 4.4.1, serán los correspondientes decisores MAP. En el caso de canal gausiano, la salida del decodificador será la palabra \mathbf{b}_i que cumple

$$p_{\mathbf{B}|\mathbf{q}}(\mathbf{b}_i|\mathbf{q}) > p_{\mathbf{B}|\mathbf{q}}(\mathbf{b}_j|\mathbf{q}) \quad j = 0, \dots, 2^k - 1, j \neq i \quad (10.3)$$

donde \mathbf{q} es el vector n -dimensional a la entrada del decodificador, cuya fdp será una gausiana n -dimensional de media la palabra código transmitida y matriz de covarianza diagonal. En el caso de bits equiprobables a la entrada del codificador, el criterio MAP se reduce al ML, y este a hallar la palabra código que se encuentra a menor distancia (euclídea) de la recibida.

La probabilidad de error que se obtiene con este decisor se calcula como en el Apartado 4.4.2, siendo (4.91) una buena aproximación para relaciones señal a ruido altas y valores grandes de k , que reproducimos aquí por comodidad

$$P_e \approx \kappa Q \left(\frac{d_{min}}{2\sqrt{N_0/2}} \right) \quad (4.91)$$

donde ahora κ representa el número de palabras código que están a una distancia d_{min} de una dada. Si suponemos además una codificación de tipo Gray (o pseudo-Gray) de las palabras código, de tal forma que las salidas del decisor correspondientes a dos palabras código separadas d_{min} difiere únicamente en un bit, podemos determinar la BER en función de E_b/N_0 como

$$BER \approx \frac{\kappa}{k} Q \left(\frac{d_{min}}{2\sqrt{N_0/2}} \right) = \frac{\kappa}{k} Q \left(\frac{d_{min}}{\sqrt{2E_b}} \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right) = \frac{\kappa}{k} Q \left(\frac{d_{min}\sqrt{kN}}{\sqrt{2nE_s}} \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right) \quad (10.4)$$

donde hemos utilizado el hecho de que por cada k bits de entrada se generan n/N símbolos de la constelación empleada. Si no es posible realizar una codificación de tipo Gray o pseudo-Gray siempre podemos acotar la BER como en (4.103), teniendo en cuenta que una decisión errónea proporcionará entre 1 y k bits erróneos: $\frac{1}{k}P_e \leq BER \leq P_e$.

En el caso del canal BSC, si denotamos como $\mathbf{r} = [r[0] \dots r[n-1]]$ el vector a la entrada del decodificador, el decisor MAP ofrecerá como salida aquella palabra b_i que cumple

$$p_{\mathbf{B}|\mathbf{r}}(\mathbf{b}_i|\mathbf{r}) > p_{\mathbf{B}|\mathbf{r}}(\mathbf{b}_j|\mathbf{r}) \quad j = 0, \dots, 2^k - 1, j \neq i \quad (10.5)$$

que en el caso de bits equiprobables a la entrada del codificador ofrece la misma salida que el decisor ML; esto es,

$$p_{\mathbf{r}|\mathbf{C}}(\mathbf{r}|\mathbf{c}_i) > p_{\mathbf{r}|\mathbf{C}}(\mathbf{r}|\mathbf{c}_j) \quad j = 0, \dots, 2^k - 1, j \neq i \quad (10.6)$$

Si el BSC tiene una probabilidad de cruce (o de error) igual a p , tenemos que

$$p_{\mathbf{r}|\mathbf{C}}(\mathbf{r}|\mathbf{c}_i) = p^{d_H(\mathbf{r}, \mathbf{c}_i)}(1-p)^{n-d_H(\mathbf{r}, \mathbf{c}_i)} \quad (10.7)$$

lo que, sustituido en (10.6), nos da como resultado

$$p^{d_H(\mathbf{r}, \mathbf{c}_i)}(1-p)^{n-d_H(\mathbf{r}, \mathbf{c}_i)} > p^{d_H(\mathbf{r}, \mathbf{c}_j)}(1-p)^{n-d_H(\mathbf{r}, \mathbf{c}_j)} \quad j = 0, \dots, 2^k - 1, j \neq i \quad (10.8)$$

y que, si $p < 0,5$ (y, por tanto, $1-p > p$), se reduce a

$$d_H(\mathbf{r}, \mathbf{c}_i) < d_H(\mathbf{r}, \mathbf{c}_j) \quad j = 0, \dots, 2^k - 1, j \neq i \quad (10.9)$$

Expresado en palabras, el decisor ML ha de encontrar la palabra código a menor distancia (de Hamming) de la palabra a la entrada del decodificador lo que, además de poner de manifiesto el paralelismo existente entre los decodificadores para canal gausiano y para BSC, demuestra el carácter óptimo de los decodificadores empleados en el capítulo anterior.

Este decisor proporcionará la salida correcta siempre que, en la transmisión a través del BSC, se hayan producido menos de $d_{min}/2$ errores, por lo que decimos que el código es capaz de *corregir* hasta $\lfloor(d_{min}-1)/2\rfloor$ errores del BSC, o que el código tiene una *capacidad de corrección* de $\lfloor(d_{min}-1)/2\rfloor$ errores.

Como, a diferencia de la transmisión a través del canal gausiano, la probabilidad de que la salida del BSC sea igual a la entrada es no nula, el decodificador tiene además capacidad para *detectar* si se han producido errores en la transmisión. Concretamente, podemos asegurar que si se producen menos de d_{min} errores (lo que podría ocasionar que transmitiésemos una palabra código y recibiésemos exactamente otra) el decodificador es capaz de detectarlos.

Este decisor puede cometer un error si se producen más de $\lfloor(d_{min}-1)/2\rfloor$ errores de transmisión², lo que nos permite obtener una cota superior de la probabilidad de error

$$P_e \leq \sum_{i=\lfloor(d_{min}-1)/2\rfloor+1}^n \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \quad (10.10)$$

²Pueden existir, sin embargo, palabras cuya palabra código más cercana está a una distancia mayor que $\lfloor(d_{min}-1)/2\rfloor$.

Cuando, simultáneamente, p toma valores pequeños y d_{min} elevados, esta cota es muy ajustada y, además, se puede aproximar por el primer término de la suma³

$$P_e \approx \binom{n}{\lfloor(d_{min}-1)/2\rfloor + 1} p^{\lfloor(d_{min}-1)/2\rfloor + 1} (1-p)^{n-\lfloor(d_{min}-1)/2\rfloor - 1} \quad (10.11)$$

Si suponemos además una codificación de tipo Gray (o pseudo-Gray) de las palabras código, de tal forma que las salidas del decisor correspondientes a dos palabras código separadas d_{min} difieren únicamente en un bit, podemos determinar la BER en función de la probabilidad de cruce p como

$$BER \approx \frac{1}{k} \binom{n}{\lfloor(d_{min}-1)/2\rfloor + 1} p^{\lfloor(d_{min}-1)/2\rfloor + 1} (1-p)^{n-\lfloor(d_{min}-1)/2\rfloor - 1} \quad (10.12)$$

Como anteriormente, si no es posible realizar una codificación de tipo Gray o pseudo-Gray siempre podemos acotar la BER como $\frac{1}{k} P_e \leq BER \leq P_e$.

Resulta de interés señalar que estas prestaciones no son alcanzadas por todos los decisores que se emplean en la práctica porque, para valores elevados de n , la complejidad del decisor resulta inabordable. Pensemos que evaluar si existe una palabra código a una distancia menor o igual a $\lfloor(d_{min}-1)/2\rfloor$ de la palabra recibida exige explorar $\sum_{i=1}^{\lfloor(d_{min}-1)/2\rfloor} \binom{n}{i}$ posibilidades, y esto no nos garantiza que encontremos una palabra código si se han producido más de $\lfloor(d_{min}-1)/2\rfloor$ errores en la transmisión a través del BSC.

La probabilidad de que se produzcan errores de transmisión que no sean detectados es más difícil de determinar de forma exacta, pero es muy fácil de acotar. Si denotamos como P_{nd} esta probabilidad, sabemos que tienen que producirse al menos d_{min} errores para que, transmitiendo una palabra código, se reciba exactamente otra, por lo que

$$P_{nd} < \sum_{i=d_{min}}^n \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \quad (10.13)$$

A veces, el decisor hace uso no sólo de la salida del BSC, sino también de la salida del canal gausiano o de una medida de la verosimilitud de cada bit transmitido dentro del receptor de comunicaciones. En ese caso hablamos de un decisor o decodificador *con entrada blanda*, o que realiza una *decodificación blanda*. Esta se realiza sustituyendo en (10.6) la verosimilitud de cada palabra código a la salida del BSC por la verosimilitud de cada palabra código a la salida del canal gausiano y que conduce, en el caso de observación directa de la salida del canal gausiano, a una decisión por mínima distancia euclídea. Por contra, decimos que los decisores o decodificadores que hacen uso sólo de la salida del BSC realizan una *decodificación dura*. Generalmente, la decodificación blanda ofrece mejores prestaciones que la decodificación dura, como comprobaremos en el siguiente ejemplo.

³Donde podemos además simplificar la evaluación de $\binom{n}{\lfloor(d_{min}-1)/2\rfloor + 1}$ o, más concretamente, de los factoriales que aparecen en (3.21) haciendo uso de la aproximación de Stirling, $n! \approx n^n e^{-n}$.

Ejemplo 10.2

Consideremos un código de tasa 2/3 que genera cada palabra código concatenando a los dos bits de entrada su suma módulo 2:

b_i	—→	c_i
00	—→	000
01	—→	011
10	—→	101
11	—→	110

La distancia mínima de este código es 2, por lo que el decisor con entrada dura no tiene capacidad para corregir ningún error ($\lfloor (2 - 1)/2 \rfloor = 0$) y es capaz de detectar si se produce un único error en la transmisión.

Estas palabras código se transmiten mediante una modulación PAM en banda base con una constelación binaria antipodal ($A[n] \in \{+1, -1\}$), que posee una probabilidad de error de símbolo dada por (5.35), $P_e = Q\left(\sqrt{2E_s/N_0}\right)$, que asimilamos a la probabilidad de cruce del BSC, p . Aplicando (10.10) obtenemos la probabilidad de error del decisor con entrada dura

$$P_e = 3Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right)\left(1 - Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right)\right)^2 + 3\left(Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right)\right)^2\left(1 - Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right)\right) + \left(Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right)\right)^3$$

que, para relaciones señal a ruido altas, podemos aproximar por

$$P_e \approx 3Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right)$$

siendo la BER

$$BER \approx \frac{2}{3}3Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right)$$

que, en función de E_b/N_0 resulta ser, considerando que empleamos 3 símbolos para enviar 2 bits,

$$BER \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2(2E_b/3)}{N_0}}\right) = 2Q\left(\sqrt{\frac{4E_b}{3N_0}}\right) \quad (10.14)$$

y esta es la probabilidad de que se produzca un error de transmisión en el BSC que no podremos corregir.

Si realizamos una decodificación blanda, el vector q de entrada al decisor tiene dimensión 3 y se compone de la suma de un símbolo de la constelación que se muestra en la Figura 10.1 (compuesta por las 4 posibles combinaciones de los símbolos $A[0]$, $A[1]$ y $A[2]$ que se corresponden con las cuatro palabras código $c_i = [c_i[0], c_i[1], c_i[2]]$) y ruido. La distancia mínima del código es $2\sqrt{2E_s}$ (esto es, $\sqrt{2}$ veces la de la constelación), y la probabilidad de error

$$P_e \approx 3Q\left(2\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)$$

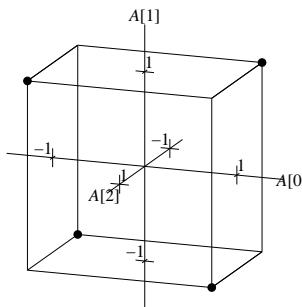


Figura 10.1. Constelación resultante del codificador del Ejemplo 10.2.

y, de aquí, la BER en función de E_b/N_0 resulta ser

$$BER \approx 2Q\left(2\sqrt{\frac{(2E_b/3)}{N_0}}\right) = 2Q\left(\sqrt{\frac{8E_b}{3N_0}}\right) \quad (10.15)$$

Comparando (10.14) con (10.15) vemos que con decodificación blanda necesitamos una relación señal a ruido 3 dB inferior a la necesaria con decodificación dura para obtener la misma BER .

Como conclusión, podemos decir que un código para BSC se puede utilizar para corregir o detectar errores (decodificación dura), pero también para “evitar” que se produzcan errores (decodificación blanda) mediante el aumento de la distancia mínima del código respecto a la distancia mínima de la constelación empleada en el sistema de comunicación. Este triple papel es el que nos lleva a denominar el presente capítulo “codificación para protección contra errores” en lugar de emplear el más tradicional de “códigos correctores de errores”.

El ejemplo anterior, además de ilustrar la diferencia entre decodificación dura y blanda, nos ha permitido introducir una medida para comparar la efectividad de los métodos de protección contra errores que formalizaremos a continuación: la *ganancia de codificación*. Formalmente, se define como la diferencia en decibelios entre las relaciones señal a ruido (medida como E_b/N_0) necesarias para alcanzar una determinada BER sin y con el sistema de protección contra errores. Veamos el procedimiento para su cálculo empleando el ejemplo anterior.

Ejemplo 10.2 (cont.)

Para obtener la ganancia de codificación con decodificación dura igualamos la BER obtenida con la modulación binaria antipodal (que, al ser una modulación binaria, coincide con P_e , siendo además $E_s = E_b$), $Q\left(\sqrt{2E_b/N_0}\right)$, con la expresión de la BER que aparece en (10.14), dando como resultado

$$Q\left(\sqrt{2\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{sc}}\right) = 2Q\left(\sqrt{\frac{4}{3}\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_c}\right) \quad (10.16)$$

donde los subíndices “sc” y “c” hacen referencia, respectivamente, a los sistemas sin y con protección contra errores. Teniendo en cuenta que la función $Q(x)$ decrece como $e^{-x^2/2}$, como

podemos comprobar en (3.32), para relaciones señal a ruido altas podemos depreciar el factor 2 que multiplica a la función Q en (10.16) e igualar los argumentos de las funciones Q

$$\sqrt{2 \left(\frac{E_b}{N_0} \right)_{sc}} = \sqrt{\frac{4}{3} \left(\frac{E_b}{N_0} \right)_c}$$

y, de aquí,

$$G = \frac{\left(\frac{E_b}{N_0} \right)_{sc}}{\left(\frac{E_b}{N_0} \right)_c} = \frac{2}{3} \approx -1,76 \text{dB}$$

o, lo que es lo mismo, una pérdida de 1,76 decibelios.

Repetimos el procedimiento para obtener la ganancia de codificación con decodificación blanda

$$Q \left(\sqrt{2 \left(\frac{E_b}{N_0} \right)_{sc}} \right) = 2Q \left(\sqrt{\frac{8}{3} \left(\frac{E_b}{N_0} \right)_c} \right)$$

y, empleando los mismos argumentos llegamos a

$$G = \frac{\left(\frac{E_b}{N_0} \right)_{sc}}{\left(\frac{E_b}{N_0} \right)_c} = \frac{4}{3} \approx 1,25 \text{ dB}$$

Los valores obtenidos de ganancia de codificación suelen denominarse *ganancia de codificación asintótica*, porque las aproximaciones que hemos realizado (despreciar los términos Q^2 y Q^3 , las constantes que multiplican a Q , etc.) son exactas sólo cuando el argumento de la función Q tiende a infinito (en la práctica, cuando la relación señal a ruido es elevada), ya que la ganancia de codificación, en general, no es igual para cualquier probabilidad de error. Para ilustrar este hecho véase el siguiente ejemplo.

Ejemplo 10.3

Consideremos el código Hamming (7, 4) (estos códigos serán presentados en el siguiente apartado), que con valores de $n = 7$ y $k = 4$ consigue una $d_{min} = 3$ o, lo que es lo mismo, posee una capacidad de corrección de 1 error del BSC. Consideremos, además, que la transmisión se realiza empleando una modulación PAM en banda base con una constelación binaria antipodal.

La Figura 10.2 muestra las curvas de error en función de E_b/N_0 obtenidas sin el código Hamming, y con el código con decodificación dura y blanda, todas ellas empleando decisión de máxima verosimilitud. Observe cómo para BER superiores a, aproximadamente, $3,3 \cdot 10^{-3}$, el código Hamming (7, 4) con decodificación dura ofrece una ganancia de codificación negativa (es decir, que introduce pérdidas), mientras que para BER inferiores, la ganancia es positiva, siendo de, aproximadamente, $0,3$ dB para una BER de $5 \cdot 10^{-5}$ (línea denotada como G_{dura}).

La ganancia de codificación obtenida con decodificación blanda, por el contrario, es siempre positiva, siendo de, aproximadamente, $1,8$ dB para una BER de $2,5 \cdot 10^{-6}$ (línea denotada como G_{blanda}).

También es posible determinar la ganancia de codificación cuando la modulación empleada en la transmisión sin codificación no es binaria, como veremos en el Apartado 10.4.

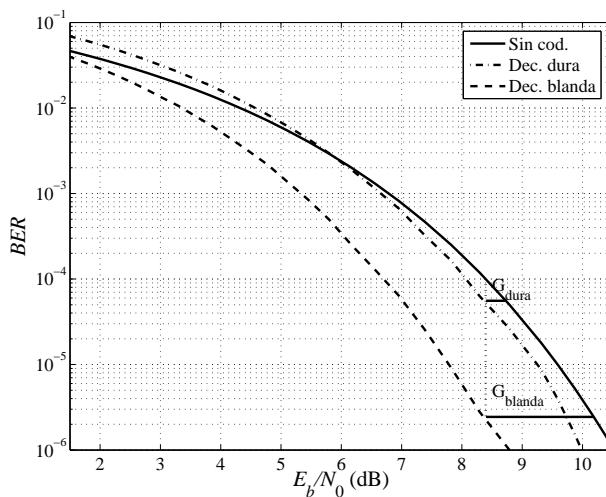


Figura 10.2. Curvas de BER en función de E_b/N_0 del Ejemplo 10.3.

Es importante señalar que la ganancia de codificación, con ser la medida más ampliamente utilizada para evaluar la efectividad de un código, refleja sólo una parte del efecto de la inclusión de un código de protección contra errores en un sistema de comunicaciones: la inmunidad frente al ruido aditivo gausiano. El otro efecto a tener en cuenta es el aumento en el ancho de banda ocupado.

Si queremos mantener la tasa binaria de entrada a nuestro sistema de comunicaciones y no se modifica el formato de modulación, la inclusión de un código de tasa R incrementa el ancho de banda por un factor $1/R$, ya que donde en el sistema sin protección contra errores transmitíamos k bits ahora transmitimos n , y esta proporción se mantiene incluso aunque el formato de modulación no sea binario. Por el contrario, si mantenemos el ancho de banda ocupado y no se modifica el formato de modulación, la inclusión de un código de tasa R disminuye la tasa binaria de entrada en un factor R . Si deseamos mantener al mismo tiempo la tasa binaria de entrada y el ancho de banda no queda otro remedio que modificar el formato de modulación. Esta última solución es la que emplean los TCM que estudiaremos en el Apartado 10.4.

10.2. CÓDIGOS BLOQUE

En este apartado se presentan los códigos bloque para BSC. Centraremos nuestro estudio en los códigos bloque lineales y, dentro de estos, prestaremos especial atención a los códigos bloque cíclicos. Las ventajas de estos últimos residen en que se pueden diseñar con una distancia mínima prefijada y la complejidad de la codificación crece linealmente con n . Además, existe un algoritmo de decodificación cuya salida es igual a la del decisor ML si se producen como máximo $\lfloor (d_{\min} - 1)/2 \rfloor$ errores en la transmisión a través del BSC cuya complejidad crece de forma lineal con k .

10.2.1. Códigos bloque lineales

Comencemos definiendo la estructura algebraica necesaria para la formulación de los códigos, que está basada en cuerpos con un número finito de elementos o *cuerpos de Galois* basados en los números enteros. Definimos el cuerpo de Galois binario o $GF(2)$ basado en los enteros como aquél con dos elementos, 0 y 1, y las operaciones de suma y producto de enteros módulo 2:

$$\begin{aligned} a + b &= ((a + b))_2 \\ a \cdot b &= ((a \cdot b))_2 \end{aligned}$$

Puede comprobarse fácilmente que posee la estructura de cuerpo⁴ al igual que la poseen, por ejemplo, los números reales. Definimos también el espacio vectorial sobre $GF(2)$ formado por vectores de elementos de $GF(2)$ y las operaciones habituales con vectores y matrices, incluido el producto escalar. Así, una palabra código $\mathbf{c}_i = [c_i[0], \dots, c_i[n - 1]]$ es un vector del espacio $GF(2)^n$.

Podemos ya definir un *código bloque lineal* (n, k) como un subespacio de dimensión k de $GF(2)^n$; esto es, cuando el conjunto de las 2^k palabras código forma un subespacio de dimensión k del espacio de todas las posibles palabras código $GF(2)^n$.

Algunas de las propiedades de los códigos bloque lineales son:

- P1 Toda combinación lineal de cualquier conjunto de palabras código es a su vez una palabra código, debido a la estructura de subespacio.
- P2 La palabra todo ceros pertenece a todos los códigos bloque lineales: $0\mathbf{c}_1 + \dots + 0\mathbf{c}_{2^k - 1} = \mathbf{0}$.
- P3 Todas las palabras código poseen al menos otra palabra código a distancia d_{min} , ya que un código bloque lineal es invariante frente a traslaciones por una palabra código (esto es, si a todas las palabras código les sumamos una palabra código dada, \mathbf{c} , el resultado, $\{\mathbf{c}_0 + \mathbf{c}, \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}, \dots, \mathbf{c}_{2^k - 1} + \mathbf{c}\}$, es el mismo conjunto de palabras código) y, en consecuencia, cada palabra código mantiene la misma relación geométrica con el resto de palabras.
- P4 La d_{min} de un código bloque lineal es igual al menor peso (menor número de “unos”) de una palabra código distinta de la todo ceros, ya que en virtud de la propiedad anterior

$$d_{min} = \min_{\substack{i,j=0,\dots,2^k-1 \\ i \neq j}} d_H(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j) = \min_{\substack{i=0,\dots,2^k-1 \\ \mathbf{c}_i \neq \mathbf{0}}} d_H(\mathbf{0}, \mathbf{c}_i) \quad (10.17)$$

⁴Sea \mathcal{F} un conjunto con dos operaciones definidas: “+” y “·”. Se dice que \mathcal{F} es un cuerpo si y sólo si cumple las siguientes propiedades:

1. \mathcal{F} forma un grupo commutativo (abeliano) sobre la operación +. El elemento identidad de la operación + se etiqueta como 0.
2. $\mathcal{F} - \{0\}$ (el conjunto \mathcal{F} sin el elemento identidad de la operación +) forma un grupo commutativo (abeliano) sobre la operación ·. El elemento identidad de la operación · se etiqueta como 1.
3. Las operaciones + y · cumplen la propiedad distributiva: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, para todo $a, b, c \in \mathcal{F}$.

Para generar cualquier palabra código podemos emplear una base del subespacio que define el código, que estará compuesta por k palabras código linealmente independientes, $\{g_0, g_1, \dots, g_{k-1} : a_0g_0 + a_1g_1 + \dots + a_{k-1}g_{k-1} = \mathbf{0} \Leftrightarrow a_0 = a_1 = \dots = a_{k-1} = 0\}$. Agrupando la base en forma matricial obtenemos

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{g}_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{0,0} & \cdots & g_{0,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{k-1,0} & \cdots & g_{k-1,n-1} \end{bmatrix} \quad (10.18)$$

que se denomina *matriz generadora* del código bloque lineal.

El proceso de codificación se reduce así a una simple operación matricial:

$$\mathbf{c} = \mathbf{b} \mathbf{G} \quad (10.19)$$

Ejemplo 10.4

Consideré el código bloque lineal $(5, 2)$ definido por la matriz generadora

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El vector de entrada $\mathbf{b} = [1, 1]$ da como resultado la palabra código

$$[1, 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [1, 1, 0, 1, 1]$$

Resulta de utilidad caracterizar el complemento ortogonal del código en $GF(2)^n$; esto es, todos los vectores de $GF(2)^n$ ortogonales a las palabras código. Este complemento ortogonal tiene dimensión $n - k$ y es a su vez un código bloque lineal $(n, n - k)$. Su matriz generadora se denota como \mathbf{H} y toma la forma

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{h}_{n-k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{0,0} & \cdots & h_{0,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n-k-1,0} & \cdots & h_{n-k-1,n-1} \end{bmatrix} \quad (10.20)$$

donde $\{\mathbf{h}_0, \dots, \mathbf{h}_{n-k-1}\}$ es una base del complemento ortogonal, y se denomina *matriz de comprobación de paridad*.

El nombre de matriz de comprobación proviene de su empleo para comprobar si una palabra es o no una palabra código ya que, por la propia construcción de \mathbf{H} se cumple que, para cualquier palabra código \mathbf{c} ⁵

$$\mathbf{c} \mathbf{H}^T = \mathbf{0} \quad (10.21)$$

En el decodificador se puede calcular el denominado *síndrome*, \mathbf{s} , como $\mathbf{s} = \mathbf{r} \mathbf{H}^T$: si el síndrome es igual al vector nulo $\mathbf{0}$, la palabra recibida \mathbf{r} es una palabra código, y si el

⁵De hecho, una forma de calcular \mathbf{H} es, basándonos en (10.21), encontrar los $n - k$ vectores $\{\mathbf{h}_0, \dots, \mathbf{h}_{n-k-1}\}$ linealmente independientes y que cumplen que $\mathbf{G} \mathbf{H}^T = \mathbf{0}$.

síndrome es distinto del vector nulo podemos asegurar que se han producido errores en la transmisión a través del BSC.

Podemos, incluso, realizar la decodificación basándonos en el síndrome, como analizamos a continuación. La palabra recibida r se puede expresar como $r = c + e$, donde e es un vector que indica los dígitos en que se han producido errores de transmisión. Analizando el síndrome

$$s = (c + e)H^T = cH^T + eH^T = eH^T \quad (10.22)$$

vemos que depende únicamente del error producido y podemos emplearlo para determinar dicho error. Una vez determinado el patrón de error, se resta de la palabra recibida para obtener la palabra código transmitida, $c = r - e$.

Este tipo de decodificación se denomina *decodificación por síndrome* y para realizarla en el decodificador se construye una tabla en la que cada síndrome se asocia con un patrón de error. Existen 2^n patrones de error y únicamente 2^{n-k} síndromes, por lo que cada síndrome puede estar asociado a 2^k patrones de error. El patrón de error correspondiente a cada síndrome en la tabla será el que presente menor número de errores de transmisión de los 2^k patrones posibles. Esta elección garantiza que la decodificación por síndrome proporcione la decodificación de máxima verosimilitud, ya que nos indica la palabra código a menor distancia de Hamming de la palabra recibida. La tabla de síndromes se genera multiplicando todos los patrones de error corregibles (aquellos con un peso menor o igual a $\lfloor \frac{d_{\min}-1}{2} \rfloor$) por la matriz de comprobación de paridad para obtener su síndrome correspondiente.

Ejemplo 10.5

La matriz de comprobación de paridad del código del Ejemplo 10.4 es

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La distancia mínima de este código es tres (la palabra de menor peso contiene 3 unos), siendo capaz de corregir las palabras recibidas con un error. La tabla de síndromes contiene los cinco posibles errores de transmisión de un único bit

e	s
00001	101
00010	011
00100	001
01000	010
10000	100

Es de destacar que en esta tabla no aparecen los síndromes 110 y 111. Si obtuviésemos alguno de ellos sabríamos que se han producido al menos dos errores. El síndrome 110 puede obtenerse mediante los siguientes patrones de error $e_1 = [11000]$, $e_2 = [00011]$, $e_3 = [10110]$ y $e_4 = [01101]$. Es evidente que los dos últimos patrones de error son más improbables que los dos anteriores (si la probabilidad de error de bit es menor que 0,5), y que los otros dos son igual de verosímiles. En el caso que se desee realizar la decodificación de máxima verosimilitud para toda

palabra recibida es necesario completar la tabla con los síndromes 110 y 111. Se deben incluir cualesquiera patrones de error con dos errores que dan lugar a dichos síndromes.

Tener que añadir síndromes para extender la tabla de síndromes sucede en todos los denominados códigos bloques lineales no perfectos (que definiremos un poco más adelante). En los códigos perfectos la tabla de síndromes contiene todos los patrones de error de hasta $\lfloor \frac{d_{\min}-1}{2} \rfloor$ y no queda ninguno sin asignar.

Un caso en que es extremadamente simple encontrar la matriz de comprobación de paridad (además de poseer otras ventajas computacionales en los procesos de codificación y decodificación) ocurre cuando el código es *sistemático*. Un código sistemático es aquél en el que las k primeras columnas de la matriz de comprobación se corresponden con la matriz identidad; esto es,

$$\mathbf{G} = [\mathbf{I}_k \mathbf{P}] \quad (10.23)$$

donde \mathbf{I}_k es la matriz identidad de dimensión $k \times k$ y \mathbf{P} es una matriz de dimensión $k \times (n - k)$. Podemos construir \mathbf{H} como

$$\mathbf{H} = [-\mathbf{P}^T \mathbf{I}_{n-k}] \quad (10.24)$$

ya que

$$\mathbf{G}\mathbf{H}^T = [\mathbf{I}_k \mathbf{P}] \begin{bmatrix} -\mathbf{P} \\ \mathbf{I}_{n-k} \end{bmatrix} = -\mathbf{P}^T + \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (10.25)$$

Como, además, en $GF(2)$, $\mathbf{P} = -\mathbf{P}$, se tiene que $\mathbf{H} = [\mathbf{P}^T \mathbf{I}_{n-k}]$.

En un *código sistemático*, los k primeros bits de la palabra código se corresponden con la palabra de entrada al codificador, y los $n - k$ restantes pueden interpretarse como la redundancia que añade el código

$$\mathbf{c} = \mathbf{b}\mathbf{G} = \mathbf{b}[\mathbf{I}_k \mathbf{P}] = [\mathbf{b} \ \mathbf{b}\mathbf{P}] \quad (10.26)$$

En el caso de que se tenga una matriz \mathbf{G} no sistemática se puede transformar \mathbf{G} en una matriz \mathbf{G}' sistemática, realizando eliminación de Gauss (sumas y permutaciones de las filas de \mathbf{G}), de tal forma que \mathbf{G}' genere el mismo subespacio que \mathbf{G} , idéntico código bloque con las mismas palabras código e igual distancia mínima, pero con distintas asignaciones entre los vectores mensaje \mathbf{b} y las palabras código \mathbf{c} (técticamente, un *isomorfismo*). A partir de \mathbf{G}' se puede generar la matriz de comprobación de paridad para \mathbf{G} .

Ejemplo 10.6

Permutando las dos filas de la matriz generadora del Ejemplo 10.4 obtenemos el código sistemático

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

cuya matriz de comprobación de paridad es

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y se deja como ejercicio determinar qué sumas y permutaciones de filas da lugar a la matriz de comprobación de paridad del Ejemplo 10.5.

Hasta ahora hemos hablado de la construcción del códigos bloque, pero no de las prestaciones que podemos alcanzar con ellos, particularmente cuando fijamos n o k ⁶. La respuesta a esta pregunta la encontramos en la denominada *cota de Hamming*, que establece que un código en $GF(2)^n$ con capacidad para corregir t errores⁷ debe tener una redundancia $r = n - k$ que satisfaga que:

$$r \geq \log_2 V(n, t) \quad (10.27)$$

donde $V(n, t) = \sum_{j=0}^t \binom{n}{j}$ se conoce como la *esfera de Hamming* de radio t e indica el número de vectores que se encuentran a distancia menor o igual a t de cada palabra código.

Los códigos en los que $r = \log_2 V(n, t)$ se conocen como *códigos perfectos* y se detallan en el Cuadro 10.1⁸. Existen cuatro tipos de códigos perfectos. Los códigos triviales

n	k	t	nombre
\mathbb{N}	\mathbb{N}	0	Trivial
impar	1	$(n - 1)/2$	Repetición
$2^r - 1$	$2^r - r - 1$	1	Hamming
23	11	3	Golay

Cuadro 10.1. Códigos bloques binarios perfectos.

son aquéllos en los que no se realiza codificación y tampoco se introduce redundancia. Los códigos de repetición son aquéllos en los que la palabra código se forma repitiendo el bit de entrada n veces. Los códigos Hamming serán estudiados a continuación, y el código de Golay se estudia en el Problema P10.5. Los códigos perfectos son muy limitados, por ello en la mayoría de los casos se emplearán códigos imperfectos con capacidades correctoras y tasas que no permiten los códigos perfectos.

Nótese la equivalencia entre la esfera de Hamming de radio t en el espacio vectorial de dimensión n sobre un cuerpo de Galois y el volumen de una hiperesfera de radio d en el espacio vectorial euclídeo de dimensión n analizado en el Apartado 9.3.3 para construir un codificador para el canal gausiano; y la equivalencia entre el problema de empaquetado de esferas tratado en el Apartado 4.4.3 y el diseño de las palabras código en un código bloque para BSC: un código es perfecto si conseguimos empaquetar las esferas (ahora en un espacio vectorial sobre un cuerpo de Galois) sin que queden “intersticios” entre esferas como los que aparecían en la Figura 4.37 cuando intentábamos resolver el mismo problema en un espacio euclídeo de dimensión 2. Téngase en cuenta que un código no perfecto posee palabras (en nuestro caso, palabras de n bits) en esos intersticios entre esferas, y que esas

⁶Este es un caso radicalmente distinto del considerado en la teoría de la información, donde generalmente se supone que podemos hacer n o k tan grandes como queramos.

⁷En realidad, la cota de Hamming es cierta para cualquier espacio vectorial de dimensión n sobre un cuerpo de Galois.

⁸Se puede demostrar que estos son todos los códigos perfectos binarios. Existe, además, un código perfecto no binario pero su estudio no entra dentro de los objetivos de este libro.

palabras son “inútiles” en el sentido que hacen disminuir la tasa del código sin contribuir al incremento de la d_{min} entre palabras código, de la misma forma que en el espacio euclídeo esos intersticios hacen aumentar E_s sin aumentar d_{min} .

Los códigos Hamming son la única familia de códigos bloque perfectos de estructura elaborada. Estos códigos corrigen un único error. La forma más sencilla de generar un código Hamming (n, k) con $n = 2^r - 1$ y $k = 2^r - r - 1$ para $r \geq 3$, es mediante la matriz de comprobación de paridad, ya que ésta contiene como columnas todos los números binarios desde 1 hasta $2^r - 1$ representados en r bits. A la hora de construir la matriz \mathbf{H} el orden de las columnas no es importante, pero si se sitúan en último lugar las columnas que generan la matriz identidad de orden r y después todas las demás, obtenemos una matriz de comprobación de paridad de un código sistemático. A partir de ésta podemos construir la matriz generadora del código sistemático de manera directa.

Ejemplo 10.7 (Generación de un código Hamming)

Se quiere generar un código Hamming $(15, 11)$ con $r = 4$. Para ello vamos a construir la matriz \mathbf{H} de comprobación de paridad sistemática incluyendo todos los números binarios entre 1 y 15 representados con 4 bits. Resulta:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [\mathbf{P}^T \mathbf{I}_4]$$

La matriz generadora se construye como $\mathbf{G} = [\mathbf{I}_{11} \mathbf{P}]$.

10.2.2. Códigos cíclicos y su estructura algebraica

La representación matricial vista hasta ahora es demasiado pesada para la construcción de códigos con valores de k o n elevados (pensemos que el número de elementos de la matriz generadora de un código Hamming $(255, 247)$ es 62.985). Este hecho nos obliga a buscar clases dentro de los códigos bloque lineales que permitan describir el subespacio que contiene las palabras código o su complemento ortogonal de una forma computacionalmente eficiente, y esta búsqueda nos lleva a los códigos lineales cíclicos y su representación mediante cuerpos de Galois basados en el anillo de los polinomios.

Los códigos bloques lineales cíclicos son un subconjunto de los códigos bloque lineales que presentan la particularidad de que todo desplazamiento cíclico (o circular) de cualquier palabra código también es una palabra código. Esto es, si $\mathbf{c} = [c_0, c_1, \dots, c_{n-2}, c_{n-1}]$ es una palabra código, $\mathbf{c}' = [c_{n-1}, c_0, c_1, \dots, c_{n-2}]$ también lo es.

Los códigos cíclicos se pueden representar mediante polinomios binarios, que permiten realizar la codificación y el cálculo del síndrome de manera eficiente. A cada palabra código $\mathbf{c} = [c_0, c_1, \dots, c_{n-2}, c_{n-1}]$ se le asigna un polinomio

$$c(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_{n-2}x^{n-2} + c_{n-1}x^{n-1} \quad (10.28)$$

que se obtiene multiplicando cada entrada de la palabra código por el monomio x^i , donde

i es la posición de dicha entrada en c ⁹. El desplazamiento cíclico se consigue como el producto de $c(x)$ por x , tal que $xc(x) = c_0x + c_1x^2 + c_{n-2}x^{n-1} + c_{n-1}x^n$ y a continuación reduciendo el resultado módulo $x^n - 1$

$$c_0x + c_1x^2 + c_{n-2}x^{n-1} + c_{n-1}x^n = (x^n - 1) \cdot 1 + c_{n-1} + c_0x + c_1x^2 + \dots + c_{n-2}x^{n-1} \quad (10.29)$$

o, lo que es lo mismo,

$$((xc(x)))_{x^n - 1} = c_{n-1} + c_0x + c_1x^2 + \dots + c_{n-2}x^{n-1} \quad (10.30)$$

Aunque en lo sucesivo no se especifique, todas las operaciones de producto de polinomios se realizarán módulo $x^n - 1$:

$$a(x) \cdot b(x) = ((a(x) \cdot b(x)))_{x^n - 1} \quad (10.31)$$

y la suma de polinomios como suma módulo 2 coeficiente a coeficiente.

Ejemplo 10.8

Para ilustrar el cálculo de las operaciones módulo con polinomios vamos obtener $((x^4 + x^3 + 1))_{x^2 - 1}$, para lo que debemos recordar que la realización de una operación módulo es equivalente a calcular el resto de una operación de división. En nuestro caso, el resto de la división de $x^4 + x^3 + 1$ por $x^2 - 1$.

Calculamos en primer lugar $x^4/x^2 = x^2$ y comenzamos la división como

$$x^4 + x^3 + 1 - x^2(x^2 - 1) = x^4 + x^3 + 1 - x^4 + x^2 = x^3 + x^2 + 1$$

A continuación calculamos $x^3/x^2 = x$ y

$$x^3 + x^2 + 1 - x(x^2 - 1) = x^3 + x^2 + 1 - x^3 + x = x^2 + x + 1$$

Continuamos calculando $x^2/x^2 = 1$ y

$$x^2 + x + 1 - (x^2 - 1) = x^2 + x + 1 - x + 1 = x$$

Agrupando estos cálculos obtenemos

$$x^4 + x^3 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - 1) + x$$

por lo que el resto de la división es x , que es el resultado de la operación módulo, $((x^4 + x^3 + 1))_{x^2 - 1} = x$.

Esta representación polinómica nos puede parecer a primera vista extraña e innecesariamente compleja. Sin embargo, no resulta tan extraña si pensamos que el producto de

⁹Esta representación no es nueva, pues ya fue utilizada en el Apartado 8.2.9 para representar el contenido de un LFSR en (8.124). El desarrollo que vamos a realizar en este y en sucesivos apartados presenta muchos puntos de conexión con el realizado en el Apartado 8.2.9, sobre todo en lo que respecta a la generación de cuerpos de Galois de extensión, que allí era utilizado para encontrar las secuencias de longitud maximal y aquí lo será para diseñar los códigos BCH.

polinomios tal y como lo hemos definido es muy similar a la suma en el cuerpo de Galois definido sobre los enteros $GF(q)$ ¹⁰. Respecto a su aparente complejidad, iremos comprobando en lo sucesivo cómo su estructura permite la sustitución de las operaciones matriciales por operaciones polinómicas más simples de realizar.

Los códigos cíclicos contienen una única palabra código (polinomio) de grado $r = n - k$, que se conoce como el polinomio generador del código bloque cíclico, $g(x)$. A partir de este polinomio se pueden generar todas las palabras del código multiplicando $g(x)$ por todos los polinomios $b(x)$ de grado máximo $k - 1$ formado por la palabra de entrada al codificador como

$$b(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_{k-1}x^{k-1} \quad (10.32)$$

de la forma

$$c(x) = b(x)g(x) \quad (10.33)$$

Si deseamos obtener un realización sistemática del código cíclico (dado que son códigos lineales y que podemos encontrar una matriz generadora sistemática), el procedimiento de codificación es un poco más complicado. Enunciaremos aquí su versión más sencilla, en la que los k bits de entrada son los últimos, y no los primeros como se ha definido anteriormente, de la palabra código. Primero, definimos cada palabra código como

$$c(x) = b(x)x^{n-k} + d(x) \quad (10.34)$$

donde $d(x)$ se elige de tal manera que

$$((c(x)))_{g(x)} = ((b(x)x^{n-k}))_{g(x)} + ((d(x)))_{g(x)} = 0 \quad (10.35)$$

para asegurarnos que $c(x)$ es una palabra código y donde, si imponemos que el grado de $d(x)$ sea menor o igual que $n - k$, obtenemos finalmente

$$d(x) = -((b(x)x^{n-k}))_{g(x)} \quad (10.36)$$

El resultado es que los últimos k bits de la palabra código coinciden con la palabra de entrada.

Ejemplo 10.9

Sea $g(x) = x^3 + x + 1$ el polinomio generador de un código bloque cíclico $n = 7$, por tanto $k = n - \text{grado}(g(x)) = 4$. Si se quiere codificar la palabra 1001 de forma no sistemática, se multiplica $b(x) = x^3 + 1$ por $g(x)$

$$c(x) = b(x)g(x) = (x^6 + x^4 + x^3) + (x^3 + x + 1) = x^6 + x^4 + x + 1$$

¹⁰El cuerpo compuesto por los elementos $0, 1, \dots, q - 1$ y las operaciones de suma y producto de enteros módulo q :

$$\begin{aligned} a + b &= ((a + b))_q \\ a \cdot b &= ((a \cdot b))_q \end{aligned}$$

siendo la palabra código $c = [1100101]$.

Si se quisiera realizar de forma sistemática, se divide $b(x)x^3$ entre $g(x)$, siendo $x^2 + x$ el resto de la división, y a continuación se construye $c(x) = b(x)x^3 + d(x) = x^6 + x^3 + x^2 + x$. La palabra código resultante es $c = [0111001]$.

Para la decodificación de los códigos cíclicos podemos emplear el método expuesto en apartado anterior basado en una tabla de síndromes. Para ello, realizamos la transformación de matrices en polinomios, comenzando por el polinomio de comprobación de paridad $h(x)$, que es aquél de grado k que cumple

$$g(x)h(x) = x^n - 1 \quad (10.37)$$

que, en módulo $x^n - 1$ es $((g(x)h(x)))_{x^n - 1} = ((x^n - 1))_{x^n - 1} = 0$ o, lo que lo mismo, la condición de ortogonalidad (10.21). El síndrome será ahora un polinomio $s(x)$ de grado $n - k - 1$ que se obtiene a partir del polinomio recibido $r(x)$

$$s(x) = ((r(x)h(x)))_{x^n - 1} = ((r(x)))_{g(x)} = ((c(x) + e(x)))_{g(x)} = ((e(x)))_{g(x)} \quad (10.38)$$

siendo $e(x)$ el polinomio que indica los dígitos en que se han producido errores de transmisión.

Hasta ahora hemos estudiado cómo se puede realizar la codificación y decodificación de los códigos bloque lineales cíclicos, incluso cómo medir sus prestaciones y como compararlos entre sí. Pero todavía no hemos visto cómo se diseñan dichos códigos. Supongamos que disponemos de un sistema de comunicaciones que requiere una cierta capacidad de detección y corrección de errores, ¿cómo se construye $g(x)$? Para responder a esta pregunta emplearemos en el apartado siguiente un teorema que indica cómo construir el polinomio generador de menor grado posible que garantiza una distancia mínima para un tamaño de bloque dado. Este teorema lleva el nombre de sus tres autores: Bose, Chaudhuri y Hocquenghem (BCH), que también da nombre a la familia de códigos bloque cíclicos que genera. Sin embargo, antes de enunciar el teorema, incluso en su versión más simple, debemos familiarizarnos con la estructura algebraica de los cuerpos de Galois basados en polinomios, definiendo y enumerando (sin demostración) las herramientas necesarias para entender el alcance de dicho teorema y poder diseñar nuestros propios códigos bloques cíclicos y comprender sus propiedades.

El problema central consiste en factorizar $x^n - 1$ como

$$x^n - 1 = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n) \quad (10.39)$$

de tal manera que podamos construir el polinomio generador $g(x)$ como producto de $n - k$ monomios $(x - \alpha_i)$ haciendo máxima la d_{min} del código. Con el resto de monomios se formará el polinomio de comprobación de paridad, $h(x)$, asegurando que se cumple (10.37).

Las raíces, en general, no van a ser números de $GF(2)$ (cosa que, en principio, tampoco nos importa), pero sí debemos garantizar que los polinomios generador y de comprobación de paridad tengan coeficientes binarios. Para garantizar que podemos hacer factorizaciones

no triviales de $x^n - 1$ que den lugar a polinomios con coeficientes binarios forzamos a que las raíces de $x^n - 1$, junto al cero, estén incluídos en un cuerpo de Galois que sea una extensión del binario, $GF(2^m)$, escogiendo $n + 1 = 2^m$, para algún m . Por último, para generar $GF(2^m)$ necesitaremos un polinomio primitivo de grado m (que definiremos a continuación). Para aclarar toda esta construcción algebraica vamos a proceder en sentido inverso al aquí expuesto y con la ayuda de un ejemplo.

Comenzaremos definiendo un *polinomio irreducible* o *polinomio primo* como aquel que no se puede factorizar en un producto de polinomios binarios de menor grado. Definimos además un *polinomio primitivo* como un polinomio binario irreducible $p(x)$ de grado m que cumple que el menor entero n para el cual $p(x)$ divide a $x^n - 1$ es $n = 2^m - 1$. En el Cuadro 10.2 se muestran polinomios binarios primitivos de grado 2 a 21. Es importante resaltar que hay otros polinomios primitivos del mismo grado, pero con todos ellos se genera el mismo cuerpo de Galois.

$p_2(x) = x^2 + x + 1$	$p_{12}(x) = x^{12} + x^6 + x^4 + x + 1$
$p_3(x) = x^3 + x + 1$	$p_{13}(x) = x^{13} + x^4 + x^3 + x + 1$
$p_4(x) = x^4 + x + 1$	$p_{14}(x) = x^{14} + x^5 + x^3 + x + 1$
$p_5(x) = x^5 + x^2 + 1$	$p_{15}(x) = x^{15} + x + 1$
$p_6(x) = x^6 + x + 1$	$p_{16}(x) = x^{16} + x^5 + x^3 + x^2 + 1$
$p_7(x) = x^7 + x + 1$	$p_{17}(x) = x^{17} + x^3 + 1$
$p_8(x) = x^8 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$	$p_{18}(x) = x^{18} + x^7 + 1$
$p_9(x) = x^9 + x^4 + 1$	$p_{19}(x) = x^{19} + x^5 + x^2 + x + 1$
$p_{10}(x) = x^{10} + x^3 + 1$	$p_{20}(x) = x^{20} + x^3 + 1$
$p_{11}(x) = x^{11} + x^2 + 1$	$p_{21}(x) = x^{21} + x^2 + 1$

Cuadro 10.2. Polinomios binarios primitivos de grado 2 a 21.

Ejemplo 10.10

Vamos a construir $GF(2^3) = GF(8)$ para poder factorizar $x^7 - 1$. Para ello empleamos $p_3(x)$ del Cuadro 10.2 y construimos las operaciones “+” y “.” módulo $p_3(x) = x^3 + x + 1$

$$a(x) \cdot b(x) = ((a(x) \cdot b(x)))_{x^3+x+1}$$

Dejamos como ejercicio comprobar que $x^3 + x + 1$ es un polinomio primitivo.

Para determinar los 8 polinomios en x que son los elementos de $GF(2^3)$ podemos proceder a partir de los elementos que están presentes en todos los cuerpos, los elementos neutros respecto a la suma (el 0) y respecto a la multiplicación (el 1), ensayamos con un polinomio de grado menor que el polinomio primitivo (por ejemplo, x) y empezamos a aplicar las operaciones “+” y “.” con estos elementos hasta completar las tablas de ambas operaciones (sumando x y 1 obtenemos $x + 1$, multiplicando x y x obtenemos x^2 , etc.), que en nuestro caso son las mostradas en la Figura 10.3. Identificando los elementos de estas tablas con las raíces de $x^7 - 1$, tenemos que $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = x$, y así hasta $\alpha_7 = x^2 + 1$. Dejamos como ejercicio comprobar la verificación de (10.39) al sustituir los valores de α_1 a α_7 .

$+$	0	1	x	x^2	$x+1$	x^2+x	x^2+x+1	x^2+1
0	0	1	x	x^2	$x+1$	x^2+x	x^2+x+1	x^2+1
1	1	0	$x+1$	x^2+1	x	x^2+x+1	x^2+x	x^2
x	x	$x+1$	0	x^2+x	1	x^2	x^2+1	x^2+x+1
x^2	x^2	x^2+1	x^2+x	0	x^2+x+1	x	$x+1$	1
$x+1$	$x+1$	x	1	x^2+x+1	0	x^2+1	x^2	x^2+x
x^2+x	x^2+x	x^2+x+1	x^2	x	x^2+1	0	1	$x+1$
x^2+x+1	x^2+x+1	x^2+x	x^2+1	$x+1$	x^2	1	0	x
x^2+1	x^2+1	x^2	x^2+x+1	1	x^2+x	$x+1$	x	0

\cdot	0	1	x	x^2	$x+1$	x^2+x	x^2+x+1	x^2+1
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	x	x^2	$x+1$	x^2+x	x^2+x+1	x^2+1
x	0	x	x^2	$x+1$	x^2+x	x^2+x+1	x^2+1	1
x^2	0	x^2	$x+1$	x^2+x	x^2+x+1	x^2+1	1	x
$x+1$	0	$x+1$	x^2+x	x^2+x+1	x^2+1	1	x	x^2
x^2+x	0	x^2+x	x^2+x+1	x^2+1	1	x	x^2	$x+1$
x^2+x+1	0	x^2+x+1	x^2+1	1	x	x^2	$x+1$	x^2+x
x^2+1	0	x^2+1	1	x	x^2	$x+1$	x^2+x	x^2+x+1

Figura 10.3. Tablas de las operaciones “+” y “.” en $GF(8)$.

Los 2^m elementos de $GF(2^m)$ tienen una estructura cíclica derivada de la construcción del cuerpo y, particularmente, de la estructura cíclica del grupo abeliano sobre la operación de multiplicación (“.”). Concretamente, se derivan de un único α y toman la forma: $0, \alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^{2^m-2}$, donde 0 es el elemento identidad de la operación suma módulo 2 y $\alpha^0 = 1$ es elemento identidad de la operación producto módulo 2. Además $\alpha^{2^m-1} = \alpha^0$, $\alpha^{2^m} = \alpha$, ..., y en general $\alpha^d = \alpha^{((d))_{(2^m-1)}}$. Todos los elementos no nulos de $GF(2^m)$ son las raíces de $x^n - 1$, de tal forma que:

$$x^n - 1 = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n) = (x - \alpha^0)(x - \alpha)(x - \alpha^2) \cdots (x - \alpha^{2^m-2}) \quad (10.40)$$

Esta raíz α que genera el cuerpo de Galois de orden 2^m se denomina raíz primitiva. La representación de los elementos del cuerpo de Galois de orden 2^m construido mediante potencias de α se conoce como *representación exponencial* de $GF(2^m)$, a diferencia de la *representación polinómica* anterior (la representación en polinomios en x del ejemplo anterior).

Para determinar los polinomios binarios $g(x)$ y $h(x)$ debe existir un mecanismo que permita combinar las raíces de $x^n - 1 = (x - 1)(x - \alpha) \cdots (x - \alpha^{2^m-2})$ obteniendo polinomios binarios y, a partir de ellos, generar los polinomios $g(x)$ y $h(x)$ que definen los códigos bloque cíclicos binarios.

Nuestro objetivo es multiplicar varios monomios $(x - \alpha^j)$ de manera que el polinomio resultante sea binario. Esta forma de agrupar los elementos de los cuerpos de Galois de orden 2^m para que den lugar a polinomios binarios se conoce como agrupación por *clases conjugadas*. Para construir una clase conjugada se toma un elemento cualquiera del cuerpo y se crea una secuencia de cuadrados consecutivos, $\alpha^d, \alpha^{2d}, \alpha^{4d}, \alpha^{8d}, \dots$, hasta que se repita el primer elemento, α^d . Si se construye un polinomio que tenga como raíces los elementos de la clase conjugada se obtendrá un polinomio binario, denominado polinomio minimal de la clase conjugada, en el que las x^i sólo aparecen multiplicadas por los valores 0 ó 1.

Ejemplo 10.10 (cont.)

Identificando α y sus potencias en la tabla de la operación “.” de la Figura 10.3 tenemos

$$\begin{aligned}\alpha^0 &= 1 \\ \alpha^1 &= x \\ \alpha^2 &= x^2 \\ \alpha^3 &= ((x^3))_{x^3+x+1} = x + 1 \\ \alpha^4 &= x(x + 1) = x^2 + x \\ \alpha^5 &= ((x(x^2 + x)))_{x^3+x+1} = x^2 + x + 1 \\ \alpha^6 &= ((x(x^2 + x + 1)))_{x^3+x+1} = x^2 + 1\end{aligned}$$

Nótese que podría haberse realizado cualquier ordenación de los elementos de $GF(2^3)$ en las tablas de la Figuras 10.3, pero sólo una pone de manifiesto la estructura cíclica del cuerpo. Si fuese necesario, se reordenan las raíces hasta obtener esta estructura cíclica.

Para calcular la primera clase conjugada tomamos la raíz α y construimos la secuencia de cuadrados consecutivos: $\alpha, \alpha^2, \alpha^4, \alpha^8 = \alpha^{((8))_7} = \alpha$. La primera clase conjugada está formada por $\alpha, \alpha^2, \alpha^4$. Se puede comprobar que si hubiésemos empezado con α^2 ó α^4 , hubiésemos obtenido la misma clase conjugada. A continuación, generamos un polinomio que contenga estas tres raíces

$$\begin{aligned}(x - \alpha)(x - \alpha^2)(x - \alpha^4) &= (x^2 - (\alpha + \alpha^2)x + \alpha^3)(x - \alpha^4) \\ &= x^3 - (\alpha^4 + \alpha^2)x^2 + (\alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^3)x - \alpha^7 \\ &= x^3 - (x + x^2 + x^2 + x)x^2 + (x^2 + 1 + x^2 + x + 1 + x + 1)x + 1 \\ &= x^3 + x + 1\end{aligned}$$

Es importante destacar que este polinomio coincide con el polinomio primitivo empleado para generar el cuerpo de Galois. Esta propiedad es debida a que α es una raíz del polinomio primitivo y por tanto el polinomio minimal que contenga a α debe ser el polinomio primitivo.

Si tomamos otra raíz, por ejemplo, α^3 , y construimos su secuencia de cuadrados consecutivos: $\alpha^3, \alpha^6, \alpha^{12} = \alpha^{((12))_7} = \alpha^5, \alpha^{10} = \alpha^{((10))_7} = \alpha^3$, se obtiene que el polinomio que genera esta clase conjugada es

$$(x - \alpha^3)(x - \alpha^5)(x - \alpha^6) = x^3 + x^2 + 1$$

Por último, consideramos la raíz 1, que forma una clase conjugada por sí sola, ya que $1^2 = 1$. Como hemos utilizado todos los elementos no nulos del cuerpo de Galois de orden 2^3 para generar sus tres clases conjugadas y sus tres polinomios minimales, podemos expresar el polinomio $x^7 - 1$ como $(x^3 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1)(x - 1)$. Empleando combinaciones de estos tres polinomios se pueden crear distintos polinomios generadores de códigos cíclicos con $n = 7$. En el Cuadro 10.3 se muestra la asignación entre clases conjugadas y sus polinomios minimales.

Es importante resaltar que los polinomios provenientes de las clases conjugadas son irreducibles y que aquellos que tengan el mismo grado que el polinomio primitivo también son primitivos del mismo cuerpo de Galois. Sin embargo, si se emplea cualquiera de ellos para generar el cuerpo de Galois de orden 2^m , la asignación entre la representación exponencial y polinómica variará, ya que ésta depende del polinomio primitivo.

Una vez estudiada la manera de transformar los elementos del cuerpo de Galois de orden 2^m en polinomios minimales (binarios), disponemos de toda la información necesaria para

Clases conjugadas	Polinomios minimales
$\{1\}$	$m_0(x) = x - 1$
$\{\alpha, \alpha^2, \alpha^4\}$	$m_1(x) = x^3 + x + 1$
$\{\alpha^3, \alpha^5, \alpha^6\}$	$m_3(x) = x^3 + x^2 + 1$

Cuadro 10.3. Clases conjugadas de $GF(2^3)$ generado por $p(x) = x^3 + x + 1$ y sus polinomios minimales asociados.

Clases conjugadas	Polinomios minimales
$\{1\}$	$m_0(x) = x + 1$
$\{\alpha, \alpha^2, \alpha^4, \alpha^8\}$	$m_1(x) = x^4 + x + 1$
$\{\alpha^3, \alpha^6, \alpha^9, \alpha^{12}\}$	$m_3(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
$\{\alpha^5, \alpha^{10}\}$	$m_5(x) = x^2 + x + 1$
$\{\alpha^7, \alpha^{11}, \alpha^{13}, \alpha^{14}\}$	$m_7(x) = x^4 + x^3 + 1$

Cuadro 10.4. Clases conjugadas de $GF(2^4)$ generado por $p(x) = x^4 + x + 1$ y sus polinomios minimales asociados.

plantear el teorema BCH y analizar la construcción de polinomios generadores para los códigos cíclicos que de él se desprenden. Como ejemplos adicionales, en los Cuadros 10.4, 10.5 y 10.6 se muestran las clases conjugadas y los polinomios minimales de, respectivamente, $GF(2^4)$, $GF(2^5)$ y $GF(2^6)$.

10.2.3. Códigos BCH

Ya disponemos de los elementos necesarios para poder emplear la Cota BCH, que en su versión restringida para los códigos cíclicos binarios dice lo siguiente: sea un código cíclico (n, k) con polinomio generador $g(x)$, y sea α una raíz primitiva del polinomio $x^n - 1$; si el polinomio generador $g(x)$ contiene $\delta - 1$ raíces consecutivas de α (esto es, $g(\alpha^b) =$

Clases conjugadas	Polinomios minimales
$\{1\}$	$m_0(x) = x + 1$
$\{\alpha, \alpha^2, \alpha^4, \alpha^8, \alpha^{16}\}$	$m_1(x) = x^5 + x^2 + 1$
$\{\alpha^3, \alpha^6, \alpha^{12}, \alpha^{17}, \alpha^{24}\}$	$m_3(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$
$\{\alpha^5, \alpha^9, \alpha^{10}, \alpha^{18}, \alpha^{20}\}$	$m_5(x) = x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$
$\{\alpha^7, \alpha^{14}, \alpha^{19}, \alpha^{25}, \alpha^{28}\}$	$m_7(x) = x^5 + x^3 + x^2 + x + 1$
$\{\alpha^{11}, \alpha^{13}, \alpha^{21}, \alpha^{22}, \alpha^{26}\}$	$m_{11}(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x + 1$
$\{\alpha^{15}, \alpha^{23}, \alpha^{27}, \alpha^{29}, \alpha^{30}\}$	$m_{15}(x) = x^5 + x^3 + 1$

Cuadro 10.5. Clases conjugadas de $GF(2^5)$ generado por $p(x) = x^5 + x^2 + 1$ y sus polinomios minimales asociados.

Clases conjugadas	Polinomios minimales
$\{1\}$	$m_0(x) = x + 1$
$\{\alpha, \alpha^2, \alpha^4, \alpha^8, \alpha^{16}, \alpha^{32}\}$	$m_1(x) = x^6 + x + 1$
$\{\alpha^3, \alpha^6, \alpha^{12}, \alpha^{24}, \alpha^{33}, \alpha^{48}\}$	$m_3(x) = x^6 + x^4 + x^2 + x + 1$
$\{\alpha^5, \alpha^{10}, \alpha^{17}, \alpha^{20}, \alpha^{34}, \alpha^{40}\}$	$m_5(x) = x^6 + x^5 + x^2 + x + 1$
$\{\alpha^7, \alpha^{14}, \alpha^{28}, \alpha^{35}, \alpha^{49}, \alpha^{56}\}$	$m_7(x) = x^6 + x^3 + 1$
$\{\alpha^9, \alpha^{18}, \alpha^{36}\}$	$m_9(x) = x^3 + x^2 + 1$
$\{\alpha^{11}, \alpha^{22}, \alpha^{25}, \alpha^{37}, \alpha^{44}, \alpha^{50}\}$	$m_{11}(x) = x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + 1$
$\{\alpha^{13}, \alpha^{19}, \alpha^{26}, \alpha^{38}, \alpha^{41}, \alpha^{52}\}$	$m_{13}(x) = x^6 + x^4 + x^3 + x + 1$
$\{\alpha^{15}, \alpha^{30}, \alpha^{39}, \alpha^{51}, \alpha^{57}, \alpha^{60}\}$	$m_{15}(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + 1$
$\{\alpha^{21}, \alpha^{42}\}$	$m_{21}(x) = x^2 + x + 1$
$\{\alpha^{23}, \alpha^{29}, \alpha^{43}, \alpha^{46}, \alpha^{53}, \alpha^{58}\}$	$m_{23}(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x + 1$
$\{\alpha^{27}, \alpha^{45}, \alpha^{54}\}$	$m_{27}(x) = x^3 + x + 1$
$\{\alpha^{31}, \alpha^{47}, \alpha^{55}, \alpha^{59}, \alpha^{61}, \alpha^{62}\}$	$m_{31}(x) = x^6 + x^5 + 1$

Cuadro 10.6. Clases conjugadas de $GF(2^6)$ generado por $p(x) = x^6 + x + 1$ y sus polinomios minimales asociados.

$g(\alpha^{b+1}) = \dots = g(\alpha^{b+\delta-2}) = 0$, para algún b), entonces la distancia mínima del código es al menos δ , es decir, $d_{min} \geq \delta$.

Los códigos BCH con $b = 1$ se conocen como códigos BCH en sentido estricto, ya que contienen la raíz generadora de $x^n - 1$. Si invertimos el teorema y construimos el polinomio generador, para un n dado, a partir de $\delta - 1$ raíces consecutivas de α , entonces podremos asegurar una distancia mínima del código de δ .

Ejemplo 10.11

Los polinomios minimales de $GF(2^3)$, mostrados en el Cuadro 10.3, permiten construir códigos de longitud $n = 7$. Los posibles polinomios generadores son:

$$\begin{aligned} g_1(x) &= m_1(x) = x^3 + x + 1 \\ g_2(x) &= m_1(x)m_3(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \\ g_3(x) &= m_0(x) = x + 1 \\ g_4(x) &= m_3(x)m_0(x) = x^4 + x^2 + x + 1 \end{aligned}$$

¿Cuál es la distancia mínima de cada uno de estos códigos cíclicos y cuántos bits es posible codificar?

El primer polinomio contiene las raíces $\{\alpha, \alpha^2, \alpha^4\}$, presenta dos raíces consecutivas y, por tanto, da lugar a una distancia mínima de al menos tres. Como el grado del polinomio generador coincide con el número de bits de redundancia, el número de bits de información es $k = n - \text{grado}(g_1(x)) = 4$. Este código es la versión cíclica del código Hamming, con $n = 7$, $k = 4$ y $d_{min} = 3$.

El segundo polinomio contiene las raíces $\{\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5, \alpha^6\}$, seis raíces consecutivas, y por tanto una distancia mínima de al menos siete bits. El número de bits que se puede transmitir es 1.

Se puede probar que las dos palabras código posibles son aquéllas cuyos bits son todos iguales a cero y la de todo unos. Este polinomio da lugar al código de repetición de seis bits.

El tercer polinomio generador sólo presenta una raíz (consecutiva) y, por tanto, $d_{min} = 2$. En este caso, $k = 6$ y las palabras código siempre tienen un número par de unos. Resulta un código de comprobación de paridad par.

Las raíces del cuarto polinomio son $\{1, \alpha^3, \alpha^5, \alpha^6\}$. Contiene tres raíces consecutivas, α^5, α^6 y $\alpha^7 = 1$. Este código tiene una d_{min} garantizada de 4 y el número de bits de información es $k = 3$. Se puede comprobar que $g_1(x)g_4(x) = x^n - 1$, $g_4(x)$ es, por tanto, el polinomio de comprobación de paridad de $g_1(x)$. A este código se le conoce como el código dual del código Hamming $(7, 4)$.

Hasta ahora hemos aprendido cómo encontrar las raíces de $x^n - 1$ para $n = 2^m - 1$, lo que permite construir únicamente códigos de longitud $2^m - 1$. En el caso de que deseemos construir un código de longitud $n \neq 2^m - 1$, ¿cómo obtenemos las raíces de $x^n - 1$? En primer lugar es necesario emplear un polinomio primitivo de orden m tal que $((2^m - 1))_n = 0$. Si $2^m - 1 \neq n$, el polinomio primitivo generará $n' = 2^m - 1$ raíces, entre las que se encuentran las n que nos interesan. Las raíces de $x^n - 1$ serán las α^j tales que j sea múltiplo de $(2^m - 1)/n$.

Una vez localizado m , generamos las n raíces de $x^n - 1$, empleando un polinomio primitivo de grado m (haciendo uso, por ejemplo, del Cuadro 10.2). A partir de las raíces de $x^n - 1$, construimos las clases conjugadas y sus polinomios minimales. Por último, combinamos los polinomios minimales de tal forma que se obtengan $d_{min} - 1$ raíces consecutivas. Como el grado del polinomio generador indica el número de bits de redundancia, es deseable combinar los polinomios de manera que el grado de $g(x)$ sea lo más pequeño posible y por tanto se disponga de mayor número de bits para transmitir información con una distancia mínima garantizada.

A modo de resumen, el procedimiento para construir el polinomio generador de un código BCH de longitud n y capaz de corregir t errores a partir de un código cíclico genérico consta de los siguientes pasos:

1. Localizar m tal que $((2^m - 1))_n = 0$.
2. Encontrar un polinomio primitivo de grado m .
3. Generar los elementos de $GF(2^m)$.
4. Seleccionar las n raíces α^j tales que j sea múltiplo de $(2^m - 1)/n$.
5. Construir las clases conjugadas y los polinomios minimales de las raíces de $x^n - 1$.
6. Construir el polinomio generador de menor grado posible que contenga $2t$ raíces consecutivas de $x^n - 1$ a partir de sus polinomios minimales.

A continuación se presentan varios ejemplos en los que se generan códigos cíclicos para una longitud y una distancia mínima dada.

Clases Conjugadas	Polinomios Minimales
$\{1\}$	$m_0(x) = x - 1$
$\{\beta, \beta^2, \beta^4, \beta^8, \beta^{11}, \beta^{16}\}$	$m_1(x) = x^6 + x^4 + x^2 + x + 1$
$\{\beta^3, \beta^6, \beta^{12}\}$	$m_3(x) = x^3 + x^2 + 1$
$\{\beta^5, \beta^{10}, \beta^{13}, \beta^{17}, \beta^{19}, \beta^{20}\}$	$m_5(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + 1$
$\{\beta^7, \beta^{14}\}$	$m_7(x) = x^2 + x + 1$
$\{\beta^9, \beta^{15}, \beta^{18}\}$	$m_9(x) = x^3 + x + 1$

Cuadro 10.7. Clases conjugadas y polinomios minimales para $x^{21} - 1$.

Ejemplo 10.12

Se desea construir un polinomio generador para un código de longitud $n = 15$ y capaz de corregir dos errores ($t = 2$). Para $m = 4$ se cumple que $((2^m - 1))_n = 0$ y además como $2^m - 1 = n$ empleamos todas sus raíces. Tomamos el polinomio primitivo del Cuadro 10.2, $p(x) = x^4 + x + 1$. Sus clases conjugadas y polinomios minimales se encuentran en el Cuadro 10.4. En él se puede observar que ningún polinomio contiene cuatro raíces consecutivas y por tanto será necesario construir el polinomio cíclico uniendo varios polinomios minimales. Los polinomios

$$\begin{aligned} g_1(x) &= m_1(x)m_3(x) = x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + 1 \\ g_2(x) &= m_3(x)m_7(x) = x^8 + x^4 + x^2 + x + 1 \end{aligned}$$

contienen cuatro raíces consecutivas y los dos tienen el mismo grado. No es posible construir un polinomio de menor grado con $m_0(x)$ o $m_5(x)$ y alguno de los tres polinomios de grado 4. Por ello, los polinomios antes presentados son los de menor grado que protegen contra dos errores en el canal.

Ejemplo 10.13

Se desea construir un polinomio generador para un código cíclico de longitud $n = 21$ y capacidad para corregir tres errores ($t = 3$). El grado del polinomio primitivo debe ser seis, ya que $((63))_{21} = 0$. De los 63 elementos del cuerpo de Galois de orden 2^6 únicamente nos quedamos con: $1, \alpha^3, \alpha^6, \dots, \alpha^{60}$, que son las raíces que anulan a $x^{21} - 1$. Sea $\beta = \alpha^3$. En el Cuadro 10.7 se muestran las clases conjugadas en función de β y los polinomios minimales, que han sido extraídos del Cuadro 10.6, entre aquellas raíces que anulan a $x^{63} - 1$.

Para poder construir un polinomio corrector de tres errores es necesario agrupar seis raíces consecutivas. La forma de hacerlo utilizando el menor número de raíces posibles es mediante $g_1(x) = m_1(x)m_3(x)m_5(x)$ o $g_2(x) = m_1(x)m_5(x)m_9(x)$. En ambos casos se obtiene un polinomio de grado quince.

En estos dos ejemplos se ha mostrado cómo se pueden generar códigos bloque cíclicos para cualquier n impar (un n par nunca dividiría a $2^m - 1$) y para cualquier capacidad correctora. Si la longitud elegida para el código no proporcionara una tasa de codificación suficientemente alta para una aplicación determinada, un código con n mayor presentaría la misma capacidad correctora pero con una mayor tasa. Cuanto mayor sea n , más complejos serán el codificador y el decodificador y más retardo se introducirá en la señal, pues el bloque que se transmite en cada instante será mayor. Al elegir la longitud del código existe un

compromiso entre la complejidad y la capacidad de corrección de errores; este compromiso dependerá de cada aplicación.

En el supuesto de que no existieran restricciones significativas en relación a la longitud del código n , se debe tender a elegir aquellos para los que el cociente entre $2^m - 1$ y n sea lo menor posible, ya que dan lugar a polinomios generadores más cortos dada una misma distancia mínima. Esta regla heurística proporciona códigos de mayor tasa para la misma distancia mínima y para n similares.

10.2.4. Códigos Reed-Solomon

En el apartado anterior hemos presentado los códigos BCH binarios, que permiten generar códigos de la capacidad correctora deseada. Sin embargo, al construir los polinomios generadores es necesario incluir raíces adicionales de $x^n - 1$ que no contribuyen a aumentar la capacidad correctora (ya que no son raíces consecutivas) pero que sí incrementan el grado de $g(x)$, reduciendo así el número de bits de información que se puede codificar. Es decir, existen raíces que no contribuyen a incrementar la distancia mínima, pero que sí disminuyen la tasa de codificación. En el Ejemplo 10.12, $g_1(x)$ presenta ocho raíces, pero sólo cuatro de ellas son consecutivas. Si hubiésemos podido construir un código empleando únicamente las cuatro raíces consecutivas podríamos aumentar la tasa de codificación hasta $11/15$ en lugar de $7/15$ como obtuvimos en ese ejemplo. Es decir, de cada 15 bits, 11 serían de información en lugar de 7. Sin embargo, si en ese ejemplo hubiésemos definido $g(x)$ como

$$g(x) = (x - \alpha)(x - \alpha^2)(x - \alpha^3)(x - \alpha^4)$$

el código no sería binario.

Las raíces adicionales aparecen porque hemos restringido nuestros polinomios generadores a polinomios binarios. Si fuésemos capaces de emplear polinomios no binarios podríamos utilizar polinomios generadores que únicamente tuviesen raíces consecutivas (que son las que aumentan la distancia mínima). Para formar un código en el que cada raíz sea consecutiva con las anteriores, se requiere que todos los polinomios minimales sean de grado 1, asegurándonos de esta forma que sólo incluimos una raíz si es consecutiva y no porque otra raíz del polinomio minimal sea necesaria para incrementar la distancia mínima. Como las raíces de $x^n - 1 = (x - 1)(x - \alpha) \cdots (x - \alpha^{2^m-2})$ pertenecen a $GF(2^m)$, si se quiere construir $g(x)$ sólo a partir de raíces consecutivas, sus coeficientes deberán pertenecer a los cuerpos de Galois de orden 2^m . Una vez construido $g(x)$ la codificación se realiza de manera similar a la de cualquier código cíclico. En este caso $b(x)$ también será un polinomio sobre $GF(2^m)$, al igual que $c(x) = b(x)g(x)$. Si la secuencia que se desea proteger es binaria, pero no los polinomios construidos a partir de elementos $GF(2^m)$, agruparemos los bits de entrada de m en m realizando una codificación binaria como la definida en (10.28) para representar las palabras código como polinomios, ahora para representar cada m bits en un polinomio elemento de $GF(2^m)$ (es decir, transformar m bits en la representación polinómica de $GF(2^m)$). Si la secuencia de salida debe ser binaria, se aplica esta transformación a la inversa sobre la secuencia de palabras código.

Rep. Exponencial	Rep. Polinómica	Rep. Exponencial	Rep. Polinómica
0	0	α^7	$x^3 + y + 1$
1	1	α^8	$x^2 + 1$
α	y	α^9	$x^3 + y$
α^2	x^2	α^{10}	$x^2 + y + 1$
α^3	x^3	α^{11}	$x^3 + x^2 + y$
α^4	$y + 1$	α^{12}	$x^3 + x^2 + y + 1$
α^5	$x^2 + y$	α^{13}	$x^3 + x^2 + 1$
α^6	$x^3 + x^2$	α^{14}	$x^3 + 1$

Cuadro 10.8. Representaciones exponencial y polinómica de $GF(2^4)$ generado por $p(x) = x^4 + x + 1$.

Los códigos cíclicos que se construyen sobre los cuerpos de Galois de orden 2^m con $n = 2^m - 1$ y donde los polinomios generadores únicamente se forman a partir de raíces consecutivas, se conocen como códigos Reed-Solomon (RS). Estos códigos reciben el nombre de sus descubridores en los años sesenta. En los siguientes ejemplos mostramos cómo se construyen tres códigos RS. Veremos que estos códigos se generan como los BCH (el teorema BCH se puede extender a códigos no binarios), pero con la particularidad de que los polinomios generadores no son binarios.

Ejemplo 10.14

Se desea construir un polinomio generador para un código RS corrector de 1 error y de longitud $n = 7$. Para generar este código se emplean los cuerpos de Galois de orden 2^3 . Para ello utilizamos el polinomio primitivo $p(x) = x^3 + x + 1$, ya analizado en el Ejemplo 10.10. Como queremos corregir un error tomamos dos raíces consecutivas, obteniendo $g(x)$ como

$$g(x) = (x - \alpha)(x - \alpha^2) = x^2 - (\alpha + \alpha^2)x + \alpha^3 = x^2 - \alpha^4x + \alpha^3$$

Ejemplo 10.15

Se desea construir un polinomio generador para códigos RS capaz de corregir 2 errores y de longitud $n = 255$. Para ello empleamos un polinomio primitivo de los cuerpos de Galois de orden 2^8 , $p(x) = x^8 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$, obtenido del Cuadro 10.2. El polinomio generador será

$$g(x) = (x - \alpha)(x - \alpha^2)(x - \alpha^3)(x - \alpha^4) = x^4 - \alpha^{76}x^3 + \alpha^{31}x^2 - \alpha^{81}x + \alpha^{10}$$

Ejemplo 10.16

Se quiere codificar la secuencia 0110010110000... empleando un código RS con $n = 15$ y capaz de corregir 2 errores.

Para construir el código RS(15,11) se deben tomar cuatro raíces consecutivas de tal forma que nuestro polinomio generador sea

$$g(x) = (x - \alpha)(x - \alpha^2)(x - \alpha^3)(x - \alpha^4) = \alpha^{10} - \alpha^3x + \alpha^6x^2 - \alpha^{13}x^3 + x^4$$

(para calcular $g(x)$ hemos empleado el polinomio primitivo $p(x) = x^4 + x + 1$ y hemos calculado sus representaciones exponencial y polinómica, que se muestran en el Cuadro 10.8). Para

codificar la secuencia binaria se seleccionan los bits de cuatro en cuatro y se construye el polinomio $b(x)$ transformando cuatro bits en un elemento de $GF(2^4)$ a partir de su representación polinómica, lo que da como resultado

$$b(x) = \alpha^5 + \alpha^9x + x^2$$

El polinomio código es

$$\begin{aligned} c(x) &= b(x)g(x) \\ &= (\alpha^{15} - \alpha^8x + \alpha^{11}x^2 - \alpha^{18}x^3 + \alpha^5x^4) + (\alpha^{19}x - \alpha^{12}x^2 + \alpha^{15}x^3 - \alpha^{22}x^4 + \alpha^9x^5) \\ &\quad + (\alpha^{10}x^2 - \alpha^3x^3 + \alpha^6x^4 - \alpha^{13}x^5 + x^6) \\ &= 1 + \alpha^5x + \alpha^5x^2 + x^3 + x^4 + \alpha^{10}x^5 + x^6 \end{aligned}$$

que en formato binario es $c = [1000011001101000100011101000\dots]$ completando con ceros hasta los 60 bits (15×4).

La cota BCH para un código RS de longitud $n = 2^m - 1$ nos indica que no existe otro código bloque cíclico sobre $GF(2^m)$ con mayor distancia mínima, ya que todas las raíces cuentan para aumentar la cota de la distancia mínima. Adicionalmente, podemos demostrar que no existe otro código bloque lineal (cíclico o no) con mayor d_{min} que un código RS y que la distancia mínima de los códigos RS es igual a la cota BCH. Para ello vamos a utilizar la *cota de Singleton*, que establece que la distancia mínima de un código bloque (n, k) está acotada por

$$d_{min} \leq n - k + 1 = r + 1 \quad (10.41)$$

Para los códigos RS la cota BCH establece que su $d_{min} \geq n - k + 1$, por lo que, dada la cota de Singleton, la distancia mínima de los códigos RS será $d_{min} = n - k + 1$. La cota BCH proporciona un límite superior de la distancia mínima, pero para los RS es el valor exacto y además estos códigos presentan la mayor distancia mínima posible para cualquier código bloque (n, k) . A los códigos que cumplen con igualdad la cota de Singleton se conocen como *códigos de máxima distancia separable* (“Maximum Distance Separable”, MDS).

Los códigos RS no son los únicos códigos MDS. Se pueden construir códigos MDS mediante las siguientes operaciones:

Perforado (punctured). Un código bloque es un código perforado si se elimina uno de los bits de redundancia. Un código (n, k) se transforma en un código $(n - 1, k)$.

Acortado (shortened). Un código bloque es acortado si se elimina uno de los bits de entrada y uno de los bits de salida. Un código (n, k) se transforma en un código $(n - 1, k - 1)$.

Se puede demostrar que un código MDS perforado o acortado sigue siendo un código MDS. Si tenemos un código RS de longitud n demasiado grande, podemos emplear las operaciones de perforado y acortado tantas veces como sea necesario para construir un código de menor longitud, sabiendo que la distancia mínima del nuevo código seguirá siendo $d_{min} = n - k + 1$. En general, un código RS acortado o perforado deja de ser cíclico, aunque sigue siendo lineal. Por ejemplo, los discos compactos (“Compact Disc”, CD) emplean dos

códigos RS acortados a (32,28) y (28,24), que parten del código RS descrito en el Ejemplo 10.15 sobre $GF(2^8)$. En los CD se emplean estos códigos porque permiten utilizar palabras de ocho bits como entrada (la mitad de los bits asignado a cada muestra de audio), pero se acortan para reducir la complejidad del codificador y decodificador, ya que de lo contrario cada palabra código tendría 256×8 bits.

10.2.5. Decodificación de los códigos BCH y RS

El principal factor limitante en el empleo de códigos para protección contra errores es la complejidad de los procesos de codificación y decodificación, fundamentalmente de este último. En los apartados precedentes hemos reducido la complejidad de la codificación de códigos cíclicos, transformando una matriz de tamaño $k \times n$ en un polinomio de grado $n - k$, y la multiplicación de un vector por una matriz en una multiplicación de polinomios que puede ser realizada eficientemente. Sin embargo, la complejidad de la decodificación sigue estando marcada, en el mejor de los casos, por el tamaño de la tabla de síndromes, que depende exponencialmente de la redundancia, $n - k$. La aplicabilidad de los códigos cíclicos va a depender de la existencia de algoritmos de decodificación que eviten construir la tabla de síndromes.

En la literatura existen diversos algoritmos de complejidad no exponencial para la decodificación de códigos bloque cíclicos tipo BCH. En este apartado estudiaremos el más eficiente para los códigos no binarios: el *algoritmo de Berlekamp-Massey*, cuya complejidad crece linealmente con la distancia mínima del código. Este algoritmo se puede simplificar si se utilizan códigos binarios.

Antes de la presentación del algoritmo introduciremos la notación e ideas básicas de su planteamiento, que son comunes a la mayor parte de algoritmos para la decodificación de códigos BCH y RS. Al construir el polinomio $g(x)$ con capacidad para corregir t errores se impuso que tuviese $2t$ raíces consecutivas de α , por tanto, $g(\alpha^b) = g(\alpha^{b+1}) = \dots = g(\alpha^{b+2t-1}) = 0$. Como cualquier palabra código se obtiene como $c(x) = b(x)g(x)$ para algún $b(x)$, si α^j es una raíz de $g(x)$, también lo será de $c(x)$. Definimos $2t$ síndromes evaluando la palabra recibida, r , en las $2t$ raíces

$$S_l = r(\alpha^l) = c(\alpha^l) + e(\alpha^l) = \sum_{j=0}^{n-1} e_j \cdot (\alpha^l)^j \quad l = 1, \dots, 2t \quad (10.42)$$

donde $c(\alpha^l) = 0$ por definición de palabra código, e_j es el coeficiente j -ésimo del polinomio de error $e(x) = e_0 + e_1x + \dots + e_{n-1}x^{n-1}$ y, adicionalmente, hemos supuesto que el código es un código BCH en sentido estricto ($b = 1$). Como ya indicamos para los códigos bloque lineales, los síndromes son cero únicamente si el polinomio de error es cero (o si el error es otra palabra código) y el síndrome sólo depende del error producido y no de la palabra código transmitida.

El algoritmo de Berlekamp-Massey se encuentra detallado en el Cuadro 10.9. Una vez que finaliza el algoritmo el polinomio $\Lambda(x) = \Lambda^{(2t)}(x)$, denominado *polinomio localizador de errores*, es un polinomio de grado menor o igual que t que indica dónde se encuentran

- 1.- Calcular los síndromes S_1, S_2, \dots, S_{2t} .
Iniciarizar $\Lambda^{(0)}(x) = 1, L = 1, T(x) = 1$ y $k = 1$.
- 2.- Calcular $\Delta^{(k)} = S_k - \sum_{i=1}^L \Lambda_i^{(k-1)} S_{k-i}$.
- 3.- Si $\Delta^{(k)} = 0$, ir al Paso 7.
- 4.- Modificar $\Lambda^{(k)}(x) = \Lambda^{(k-1)}(x) - \Delta^{(k)}T(x)$.
- 5.- Si $2L \geq k$, ir al Paso 7.
- 6.- Igualar $L = k - 1$ y $T(x) = \Lambda^{(k-1)}(x)/\Delta^{(k)}$.
- 7.- Igualar $T(x) = xT(x)$.
- 8.- Si $k < 2t$, entonces $k = k + 1$ e ir al Paso 2.

Cuadro 10.9. Algoritmo de Berlekamp-Massey para decodificación de códigos BCH no binarios.

los errores en la palabra código recibida. $\Lambda(x)$ se puede factorizar como

$$\Lambda(x) = (1 + \alpha^{l_1} x)(1 + \alpha^{l_2} x) \cdots (1 + \alpha^{l_t} x) \quad (10.43)$$

y los errores se encuentran en las posiciones l_1, l_2, \dots, l_t . Si $\Lambda(x)$ no se puede factorizar o aparece una raíz doble indica que se han producido más de t errores y dicha palabra no se puede decodificar, produciéndose lo que se denomina un *fallo de decodificación*. Recorremos que esto también sucedía cuando calculamos la tabla de síndromes en el Ejemplo 10.5, en la que había síndromes que no aparecían en la tabla. Aunque no es nuestro propósito realizar una descripción detallada del funcionamiento del algoritmo, mencionaremos que está basado en la expresión recursiva de los síndromes en función de los síndromes anteriores y los coeficientes del polinomio localizador de errores

$$\Lambda_i S_{k-i} + \Lambda_{i-1} S_{k-i-1} + \cdots + \Lambda_1 S_{k-1} = -S_k \quad (10.44)$$

que se emplea para construir recursivamente $\Lambda(x)$ mediante el *polinomio corrector* $T(x)$, siempre que Δ , la *discrepancia* entre los síndromes calculados y los obtenidos mediante (10.44) a partir de $\Lambda(x)$ en la iteración en curso, sea distinta de cero.

Si empleamos este algoritmo para decodificar un código binario, si en la posición l_1 había un 1, sabemos que el bit transmitido fue un 0 y viceversa. Pero si el código no es binario y en la posición l_1 hay un α^k sabemos qué elemento no se transmitió, pero no podemos decir cuál de los otros $2^m - 1$ elementos de $GF(2^m)$ se envió. Una vez localizada la posición del error habrá que calcular la magnitud, es decir, cuál es la diferencia entre el símbolo correcto y el recibido. Para calcular dicha magnitud podemos emplear el *algoritmo de Forney* que establece que, dadas las posiciones de los errores $X_1 = \alpha^{l_1}, X_2 = \alpha^{l_2}, \dots, X_t = \alpha^{l_t}$ (las raíces de $\Lambda(x)$), la magnitud de los errores se puede calcular como:

$$e_{l_k} = -\frac{X_k \Omega(X_k^{-1})}{\Lambda'(X_k^{-1})} \quad (10.45)$$

donde $\Omega(x) = ((\Lambda(x)S(x)))_{x^{2t+1}}$, $S(x)$ es el conjunto de $2t$ síndromes expresados en

k	S_k	$\Lambda^{(k)}(x)$	$\Delta^{(k)}$	L	$T(x)$
0	–	1	–	0	x
1	α^{12}	$1 - \alpha^{12}x$	α^{12}	1	α^3x
2	α^{14}	$1 - \alpha^2x$	α^4	1	α^3x^2
3	α^3	$1 - \alpha^2x + \alpha^{12}x^2$	α^9	2	$\alpha^6x + \alpha^8x^2$
4	α^{13}	$1 - \alpha^{13}x + \alpha^{13}x^2$	α^8	–	–

Cuadro 10.10. Resumen de la decodificación RS mediante el algoritmo de Berlekamp-Massey.

forma polinómica, $S(x) = \sum_{j=1}^{2t} S_j x^j$, y $\Lambda'(x)$ es la derivada formal de $\Lambda(x)$ ¹¹.

Una vez calculada la magnitud del error podemos construir $e(x)$ y obtener la palabra código transmitida como la diferencia entre la palabra recibida $r(x)$ y el error $e(x)$. La mejor forma de comprender el funcionamiento de los algoritmos de Berlekamp-Massey y Forney es mediante un ejemplo.

Ejemplo 10.17

En el decodificador de un código RS (15, 11) en sentido estricto con polinomio generador

$$g(x) = \alpha^{10}x^2 - \alpha^3x + \alpha^6x^2 - \alpha^{13}x^3 + x^4$$

se ha recibido la siguiente palabra código

$$r(x) = 1 + \alpha^5x^2 + x^3 + x^4 + \alpha^{10}x^5 + x^6 + \alpha^7x^{12}$$

y vamos a determinar cuál fue la palabra código transmitida.

En primer lugar se calcula el síndrome de la palabra recibida:

- $S_1 = r(\alpha) = 1 + \alpha^7 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^{15} + \alpha^6 + \alpha^{19} = \alpha^{12}$
- $S_2 = r(\alpha^2) = 1 + \alpha^9 + \alpha^6 + \alpha^8 + \alpha^{20} + \alpha^{12} + \alpha^{31} = \alpha^{14}$
- $S_3 = r(\alpha^3) = 1 + \alpha^{11} + \alpha^9 + \alpha^{12} + \alpha^{25} + \alpha^{18} + \alpha^{43} = \alpha^3$
- $S_4 = r(\alpha^4) = 1 + \alpha^{13} + \alpha^{12} + \alpha^{16} + \alpha^{30} + \alpha^{24} + \alpha^{55} = \alpha^{13}$

donde se ha utilizado el Cuadro 10.8 para transformar la representación exponencial en polinómica, además de $\alpha^d = \alpha^{((d))_{15}}$. Como los síndromes son distintos de cero, se ha producido algún error.

Luego se obtiene el polinomio de error empleando el algoritmo de Berlekamp-Massey mostrado en el Cuadro 10.9. Las iteraciones del algoritmo se detallan en el Cuadro 10.10 y las operaciones necesarias para formar esta tabla se especifican a continuación.

- Iteración $k = 1$:

1. $\Delta^{(1)} = S_1 - 0 = \alpha^{12}$.
2. $\Lambda^{(1)}(x) = 1 - \alpha^{12}x$.

¹¹Hablamos de derivada formal porque $\Lambda'(x)$ se calcula aplicando las reglas de derivación de polinomios sobre el cuerpo de los números reales. Sin embargo, no es una derivada porque no tiene la interpretación del cociente entre la variación infinitesimal de la función y la variación infinitesimal en la variable independiente.

- Iteración $k = 2$:
 1. $\Delta^{(2)} = S_2 - S_1 \Lambda_1^{(1)} = \alpha^{14} - \alpha^{12}\alpha^{12} = \alpha^4$.
 2. $\Lambda^{(2)}(x) = 1 - \alpha^{12}x + \alpha^7x = 1 - \alpha^2x$.
- Iteración $k = 3$:
 1. $\Delta^{(3)} = S_3 - S_2 \Lambda_1^{(2)} = \alpha^3 - \alpha^{14}\alpha^2 = \alpha^9$.
 2. $\Lambda^{(3)}(x) = 1 - \alpha^2x + \alpha^{12}x^2$.
- Iteración $k = 4$:
 1. $\Delta^{(4)} = S_4 - S_3 \Lambda_1^{(3)} - S_2 \Lambda_2^{(3)} = \alpha^{13} - \alpha^3\alpha^2 - \alpha^{12}\alpha^{14} = 1 + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha + \alpha^2 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 = \alpha^8$.
 2. $\Lambda^{(4)}(x) = 1 - \alpha^2x - \alpha^{12}x^2 + \alpha^{14}x + \alpha x^2 = 1 - \alpha^{13}x + \alpha^{13}x^2$.

Una vez generado el polinomio $\Lambda(x) = \Lambda^{(4)}(x)$ es necesario encontrar sus raíces para determinar dónde se localizan los errores. Para ello, dividimos el polinomio $\Lambda(x)$ entre $(1 - \alpha^j x)$ para $j = 0, 1, \dots, n$ hasta encontrar sus dos raíces (ya que se trata de un código corrector de dos errores). En primer lugar, se ensaya la división de $\Lambda(x)$ entre $(1 - x)$ y se obtiene $1 - \alpha^{13}x + \alpha^{13}x^2 = (x - 1)\alpha^{13}x + 1$. Como el resto de la división no es nulo no se ha producido un error en la primera componente del vector recibido. A continuación consideramos $j = 1$ y se ensaya la división de $\Lambda(x)$ entre $(1 - \alpha x)$, obteniendo $1 - \alpha^{13}x + \alpha^{13}x^2 = (1 - \alpha x)(1 - \alpha^{12}x)$ (donde se ha utilizado que $\alpha^{12} + \alpha = \alpha^{13}$, como podemos comprobar en el Cuadro 10.8). En este caso, el resto de la división es 0 y por tanto existe un error en la segunda componente de $r(x)$. De acuerdo con el algoritmo continuaríamos con $j = 2, \dots$, pero gracias al cociente de la división anterior, sabemos que el segundo error se encuentra en la decimotercera componente de $r(x)$. El polinomio de error será $e(x) = e_1 x + e_{12} x^{12}$.

Por último, para poder recuperar la palabra recibida es necesario hallar la magnitud del error (los valores de e_1 y e_{12}). Esta magnitud se puede obtener empleando el algoritmo de Forney. Para ello necesitamos calcular el polinomio $\Omega(x) = ((\Lambda(x)S(x)))_{x^5} = 1 + \alpha x + \alpha^4 x^2$ y a continuación la derivada formal de $\Lambda(x)$: $\Lambda'(x) = \alpha^{13} + 2\alpha^{13}x = \alpha^{13}$. La magnitud de los dos errores es:

$$\begin{aligned} \bullet \quad e_1 &= \frac{\alpha \Omega(\alpha^{-1})}{\alpha^{13}} = \frac{\alpha \left(1 + \frac{\alpha}{\alpha} + \frac{\alpha^4}{\alpha^2}\right)}{\alpha^{13}} = \alpha^3(1 + 1 + \alpha^2) = \alpha^5. \\ \bullet \quad e_{12} &= \frac{\alpha^{12} \Omega(\alpha^{-12})}{\alpha^{13}} = \frac{\alpha^{12} \left(1 + \frac{\alpha}{\alpha^{12}} + \frac{\alpha^4}{\alpha^{24}}\right)}{\alpha^{13}} = \alpha^{14}(1 + \alpha^2 + \alpha^{10}) = \alpha^{22} = \alpha^7. \end{aligned}$$

Por tanto, el polinomio de error es $e(x) = \alpha^5x + \alpha^7x^{12}$ y la palabra transmitida más verosímil $c(x) = 1 + \alpha^5x + \alpha^5x^2 + x^3 + x^4 + \alpha^{10}x^5 + x^6$, que es la palabra que se transmitió en el Ejemplo 10.16 donde se empleaba el mismo polinomio generador.

10.2.6. Prestaciones de los códigos bloque

Para evaluar las prestaciones de un código bloque debemos seguir los siguientes pasos:

1. Determinación de la d_{min} .
2. Cálculo de la P_e y la BER a partir de d_{min} y del algoritmo de decodificación.

3. Obtención de la ganancia de codificación.

Este procedimiento puede ser tedioso pero realizable para un código concreto. Repasemos cada uno de estos pasos. d_{min} puede obtenerse como el menor número de “unos” de una palabra código distinta de la todo ceros, (10.17), dada la linealidad del código. P_e puede evaluarse con la ayuda de (10.10) si el algoritmo de decodificación realiza la detección de máxima verosimilitud con decodificación dura, pero incluso si la decodificación es incompleta (como, por ejemplo, la realizada por el algoritmo de Berlekamp-Massey) y sólo es capaz de realizar la decodificación correctamente si se produce un número de errores menor o igual que t . Podemos acotar la probabilidad de error como

$$P_e = 1 - \sum_{i=0}^t \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \quad (10.46)$$

siendo p la probabilidad de cruce del BSC. En el caso en que las palabras código se transmiten mediante una modulación lineal binaria podemos incluso determinar la P_e obtenida mediante decodificación blanda con un decisor ML, teniendo en cuenta que la contribución de cada bit a la distancia euclídea puede analizarse independientemente. Así, la distancia euclídea entre dos palabras código es

$$\begin{aligned} d(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j) &= d([a_i[0], \dots, a_i[n-1]], [a_j[0], \dots, a_j[n-1]]) \\ &= \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} d(a_i[k], a_j[k])^2} \\ &= \sqrt{d_H(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j) d(a_0, a_1)^2} \\ &= \sqrt{d_H(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j)} d(a_0, a_1) \end{aligned} \quad (10.47)$$

donde $d(a_0, a_1)$ es la distancia entre los dos símbolos de la constelación binaria. La modulación binaria más frecuente es la antipodal, en la que $d(a_0, a_1) = 2\sqrt{E_s}$. En lo sucesivo, y salvo indicación en contrario, nos referirnos a esta modulación en el estudio de los códigos bloque y los códigos convolucionales. A partir de aquí sólo hay que sustituir $d_H(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j)$ por d_{min} calculada según (10.1) para obtener la distancia mínima en el espacio euclídeo y, a partir de esta, la P_e como

$$P_e \approx \kappa Q \left(\frac{d(a_0, a_1) \sqrt{d_{min}}}{2\sqrt{N_0/2}} \right) = \kappa Q \left(\sqrt{\frac{2d_{min}E_s}{N_0}} \right) \quad (10.48)$$

A partir de P_e se obtiene la BER que, expresada en función de E_b/N_0 , se emplea para calcular la ganancia de codificación con procedimientos como el utilizado en el Ejemplo 10.2. Para valores altos de k la obtención de la BER no resulta fácil porque, por una parte, la cota $\frac{1}{k} P_e \leq BER \leq P_e$ no resulta ajustada y, por otra parte, la hipótesis de una codificación Gray o pseudo-Gray es, en general, poco realista.

Además este procedimiento no da respuestas a preguntas como ¿cuál es la mínima *BER* que puede obtenerse con un canal, una tasa *R* y un valor de *n* determinados?, o ¿cuál es el código que permite esa *BER*? (a no ser, claro está, que repitamos el procedimiento anterior con todos los códigos posibles). Para dar respuesta a estas preguntas debemos aplicar resultados como la cota de Singleton visto anteriormente, que establece una cota superior para d_{min} en función de *R* y *n*. En la literatura encontramos, por ejemplo, cotas tanto inferiores como superiores de d_{min} más elaboradas y ajustadas que el límite de Singleton¹², cotas superiores de las probabilidades de error de los decodificadores empleados y cotas de la *BER*, e incluso expresiones analíticas de la ganancia asintótica de codificación que nos ayudan a analizar de forma mucho más general las prestaciones de los códigos bloque lineales, pero su estudio está fuera del alcance de este texto.

Como alternativa, vamos a estudiar un par de casos particulares empleando técnicas de simulación de Monte Carlo a partir de los cuales realizaremos consideraciones generales sobre las prestaciones de los códigos más potentes de entre los presentados, los BCH y los RS.

En el primero de estos casos vamos a considerar un BSC concreto, con una probabilidad de cruce $p = 0,0563$, que proporciona una capacidad de 0,6874 bits/transmisión, y analizaremos la *BER* que se obtiene con distintos códigos BCH binarios. En la Figura 10.4 se presentan estos valores de *BER* para distintas tasas de codificación. En la figura, el código Hamming (7, 4) está representado por • y los códigos BCH con $n = 15$ y $k = 5, 7$ y 11 están representados mediante círculos (○). Los ▽, □ y ▷ representan, respectivamente, todos los códigos BCH con $n = 31, n = 63$ y $n = 127$. Por último las probabilidades de error para los códigos BCH con $n = 255, 511$ y 1023 se muestran, respectivamente, mediante una línea discontinua con puntos y rayas, una línea discontinua con rayas y una línea continua. En lugar de representar en esta gráfica la capacidad del canal como referencia para la comparación de los distintos códigos se presenta un resultado más elaborado, que es la tasa máxima que puede obtenerse con un codificador permitiendo una *BER* dada, que toma la forma

$$R = \frac{C}{1 - H(BER)} \quad (10.49)$$

donde *C* es la capacidad del BSC y *H* la función entropía. Obviamente, cuando la *BER* tiende a 0, *R* tiende a *C*. Esta curva está representada en la figura mediante una línea continua más fina que el resto.

Analizado la Figura 10.4 podemos observar que para valores bajos de *BER* (por ejemplo, inferiores a 10^{-4}) existe una diferencia considerable entre la capacidad del canal y la tasa de codificación y, aunque se aumente el tamaño del bloque, esta diferencia no se reduce significativamente.

En el segundo caso vamos a evaluar la evolución de la *BER* con respecto a la relación señal a ruido para distintos códigos. En la Figura 10.5 se muestra esta *BER* de varios códigos BCH para distintos valores de *n* frente a la relación señal a ruido (E_b/N_0) en el canal. Aunque la decodificación se realiza de forma dura (se emplea el canal digital binario

¹²Caben destacar la cota inferior de Varshamov-Gilbert, y la superior de McEliece-Rodemich-Rumsey-Welch.

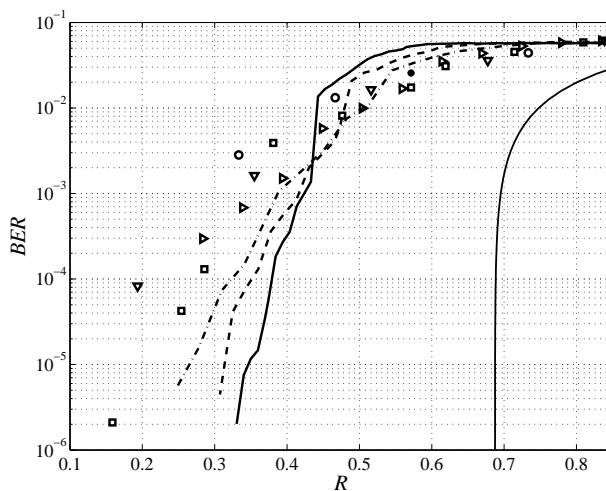


Figura 10.4. BER obtenida por distintos códigos BCH binarios sobre un BSC con probabilidad de cruce $p = 0,0563$ y tasa máxima alcanzable.

con $BER = Q\left(\sqrt{2E_b/N_0}\right)$, se ha representado la BER frente la relación señal a ruido porque nos va a permitir comparar las prestaciones de estos códigos con otros códigos de protección contra errores. Los códigos representados son aquéllos que tienen una tasa de codificación próxima a $1/2$, para poder realizar comparaciones entre ellos a igual redundancia. Para relaciones señal a ruido superiores a 5 dB podemos obtener probabilidades de error tan pequeñas como deseemos, pero la capacidad de canal para esta relación señal a ruido es de $0,77$ bits/transmisión, muy superior a la tasa de estos códigos. Además, para relaciones señal a ruido inferiores a 4 dB (que proporciona una capacidad de $0,69$ bits/transmisión) todos los códigos BCH binarios de tasa $1/2$ presentan una BER mayor que la del sistema sin codificar, y aunque aumentemos el tamaño del bloque no mejoran las prestaciones de estos códigos.

Estos dos ejemplos muestran la incapacidad de los códigos bloque cíclicos de aproximarse a la capacidad del canal. Esta limitación se debe fundamentalmente a la decodificación subóptima proporcionada por el algoritmo de Berlekamp-Massey. Este algoritmo decodifica únicamente las palabras recibidas con a lo sumo $(d_{min} - 1)/2$ errores y descarta las restantes como fallos de decodificación. Para los códigos perfectos esta decodificación coincide con la decodificación de máxima verosimilitud, porque no existen palabras recibidas con distancia Hamming superior a $(d_{min} - 1)/2$ de alguna palabra código. Pero los restantes códigos bloque cíclicos son imperfectos y existe una fracción significativa de las posibles palabras recibidas (esta fracción tiende a 1 conforme aumenta n para una tasa fija) que no se pueden corregir con el algoritmo de Berlekamp-Massey, lo que limita la calidad de su aproximación a la decodificación de máxima verosimilitud.

Los códigos bloque cíclicos, en particular los RS, son de utilidad práctica aunque no puedan aproximarse a la capacidad de canal. En general, para construir códigos que se aproximen a la capacidad del canal tendremos que aumentar el tamaño del código bloque

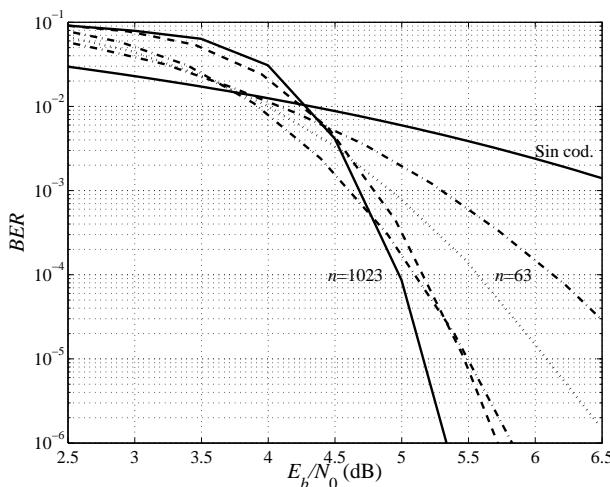


Figura 10.5. BER en función de la relación señal a ruido del canal gausiano empleando una modulación binaria antipodal y distintos códigos BCH binarios: (1023, 513), (511, 259), (255, 131), (127, 64) y (63, 30).

($n > 10.000$ bits). Pero no es posible emplear dichos valores de n en todas las aplicaciones, ya que códigos bloque de gran longitud presentan un retardo considerable y una complejidad alta. Los códigos bloque cíclicos son de utilidad en aplicaciones en las que se transmiten bloques de hasta centenares de bits, en las que sus prestaciones son competitivas (probabilidad de error y complejidad) con otros esquemas de codificación. Probablemente, la mayor limitación de estos códigos es que no disponen de un algoritmo de decodificación eficiente cuando se dispone de la salida del demodulador (salida blanda), lo que limita sus prestaciones frente a otros códigos como los convolucionales cuando dicha información está disponible.

A modo de resumen, podemos mencionar como características más relevantes de los códigos BCH y RS las siguientes:

- Los códigos BCH y, sobre todo, los RS presentan prestaciones competitivas para tasas altas de codificación ($R \approx 1$) sobre canales digitales binarios y tamaño de bloque moderado ($n < 1.000$).
- Los algoritmos de decodificación eficiente (Berlekamp-Massey y similares) proporcionan la detección de máxima verosimilitud sólo si el número de errores no excede de $t = \left\lfloor \frac{d_{min}-1}{2} \right\rfloor$, declarando en caso contrario un fallo de decodificación. Este comportamiento hace que muchas palabras recibidas queden sin decodificar, lo que reduce las prestaciones de estos códigos al aumentar n y disminuir R .
- No existen algoritmos eficientes para la decodificación del canal gausiano con entrada digital (decodificación blanda) y, en consecuencia, no es posible aprovechar las ventajas de la decodificación blanda en receptores de comunicaciones en los que se puede acceder a la salida del demodulador.

10.3. CÓDIGOS CONVOLUCIONALES

En este apartado analizaremos la segunda aproximación clásica a la protección contra errores: los códigos convolucionales. La principal diferencia respecto de los códigos bloque es que el codificador ahora es un sistema con memoria y su salida se calcula como una convolución en $GF(2)$. De ahí el nombre de *códigos convolucionales*.

10.3.1. Códigos convolucionales lineales

Para exponer sus fundamentos vamos a recurrir a ejemplos, comenzando por los mostrados en la Figura 10.6, donde podemos ver los codificadores de sendos códigos convolucionales lineales de tasas 1/2 y 2/3, respectivamente. Siguiendo la notación habitual en la literatura sobre códigos convolucionales, D representa un retardo unidad (equivalente al z^{-1} de la Transformada Z) y las sumas son, obviamente, módulo 2. Las relaciones entrada-salida

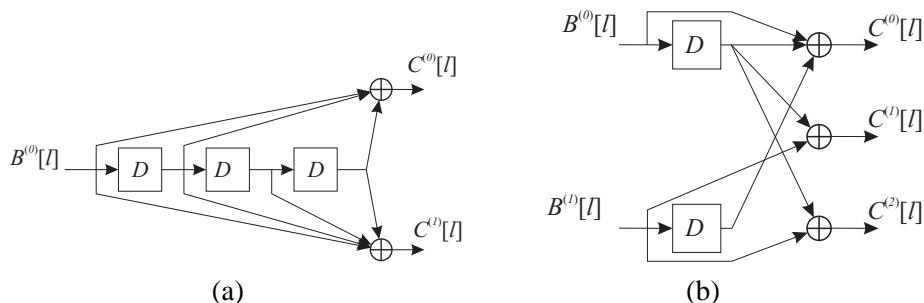


Figura 10.6. Codificadores convolucionales de tasas 1/2 (a) y 2/3 (b).

del codificador de la Figura 10.6(a) pueden expresarse como

$$\begin{aligned} C^{(0)}[l] &= B^{(0)}[l] + B^{(0)}[l-1] + B^{(0)}[l-3] \\ C^{(1)}[l] &= B^{(0)}[l] + B^{(0)}[l-1] + B^{(0)}[l-2] + B^{(0)}[l-3] \end{aligned} \quad (10.50)$$

y pueden escribirse de forma más compacta si expresamos las entradas y salidas como polinomios en D , en una estructura muy similar a la Transformada Z pero para funciones (señales) binarias, como

$$B^{(i)}(D) = \sum_l B^{(i)}[l] D^l \quad (10.51)$$

que, aplicado a (10.50), da como resultado

$$\begin{aligned} C^{(0)}(D) &= (D^3 + D + 1) B^{(0)}(D) \\ C^{(1)}(D) &= (D^3 + D^2 + D + 1) B^{(0)}(D) \end{aligned} \quad (10.52)$$

y en forma matricial

donde $\mathbf{G}(D)$ es la matriz generadora del código. La Ecuación (10.53) que pone de manifiesto que los códigos bloque lineales son un caso particular (sin memoria) de los códigos convolucionales lineales. La matriz generadora del código cuyo codificador es el mostrado en la Figura 10.6(b) es

$$\mathbf{G}(D) = \begin{bmatrix} D+1 & D & D \\ D & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.54)$$

Además de la tasa, R , (o, alternativamente, los valores de k y n) se emplean otros parámetros que definen la complejidad del código. Uno de ellos es la *memoria total* del código, M_t ¹³, que es el número de unidades de retardo del codificador, y otro es la *longitud de restricción* (*constraint length*), K , que se define como la máxima longitud de las respuestas al impulso del codificador¹⁴, o 1 más el máximo grado de los polinomios en D que conforman $\mathbf{G}(D)$

$$K = 1 + \max_{i,j} \{\text{grado}(g_{ij}(D))\} \quad (10.55)$$

Para el codificador de la Figura 10.6(a) estos parámetros toman los valores $M_t = 3$ y $K = 4$; y para el codificador de la Figura 10.6(b), $M_t = 2$ y $K = 2$.

Podemos definir, a semejanza de los códigos bloque lineales, una matriz de comprobación de paridad, $\mathbf{H}(D)$, e incluso un vector de síndrome. Sin embargo, resulta de mayor interés desarrollar el análisis de los códigos convolucionales en base a la consideración de los codificadores como máquinas de estados finitos, pues va a permitir de manera natural la aplicación del algoritmo de Viterbi como decodificador de máxima verosimilitud.

El estado $\psi[l]$ del codificador queda definido por el contenido de todas las células de retardo del codificador, y el número de estados es igual a 2^{M_t} . A menudo resulta conveniente, para lograr una representación más compacta, etiquetar los distintos estados. Por ejemplo, los $2^3 = 8$ estados del codificador de la Figura 10.6(a) pueden etiquetarse siguiendo la convención $\psi_i \leftrightarrow (B^{(0)}[l-1], B^{(0)}[l-2], B^{(0)}[l-3])$ y realizando las asignaciones

$$\begin{array}{ll} \psi_0 \longleftrightarrow (0, 0, 0) & \psi_4 \longleftrightarrow (0, 0, 1) \\ \psi_1 \longleftrightarrow (1, 0, 0) & \psi_5 \longleftrightarrow (1, 0, 1) \\ \psi_2 \longleftrightarrow (0, 1, 0) & \psi_6 \longleftrightarrow (0, 1, 1) \\ \psi_3 \longleftrightarrow (1, 1, 0) & \psi_7 \longleftrightarrow (1, 1, 1) \end{array}$$

Téngase en cuenta que esta asignación es arbitraria, y que cualquier otra únicamente cambiaría las etiquetas asignadas a los distintos estados.

Para representar la dinámica de transición entre estados podemos emplear los diagramas de rejilla, ya utilizados en los Apartados 6.2.2 y 7.4.1 para representar, respectivamente, el estado del canal en detección de secuencias de máxima verosimilitud en presencia de ISI y los distintos estados de fase de las modulaciones de fase continua. También podemos

¹³Generalmente, en la literatura este parámetro se denota como M , pero para evitar confusiones con el tamaño de las constelaciones lo denotaremos como M_t .

¹⁴Algunos autores definen este parámetro como nK y otros como kK , siendo K la definición que empleamos en este texto.

emplear los denominados *diagramas de estados* o *diagramas de transición entre estados*, que son grafos dirigidos y etiquetados empleados comúnmente en la definición de autómatas.

En la Figura 10.7 podemos ver el diagrama de rejilla del código convolucional especificado por el codificador de la Figura 10.6(a), y en la Figura 10.8 podemos ver el diagrama de transición entre estados del mismo código. En ambas figuras cada rama o arco está eti-

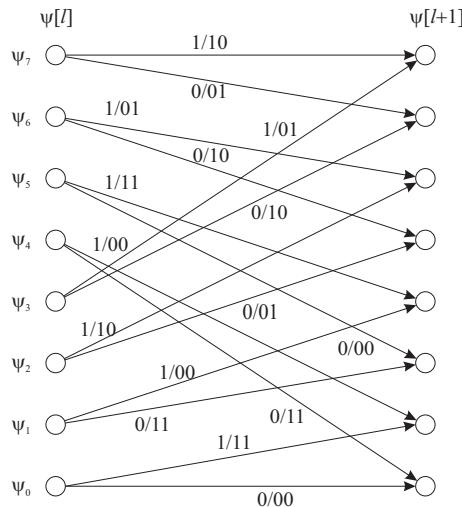


Figura 10.7. Diagrama de rejilla del código convolucional de la Figura 10.6(a).

tado con su relación entrada-salida, $B^{(0)}[l]/C^{(0)}[l]C^{(1)}[l]$.

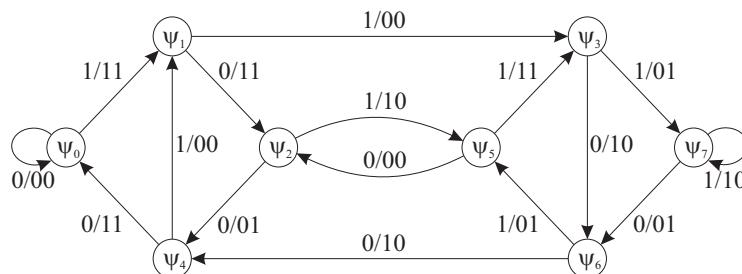


Figura 10.8. Diagrama de estados del código convolucional de la Figura 10.6(a).

Al igual que en los códigos bloque es posible construir códigos convolucionales sistemáticos, donde la matriz generadora toma la forma

$$\mathbf{G}(D) = [\mathbf{I}_k \quad \mathbf{P}(D)] \quad (10.56)$$

y en los que las k primeras salidas son una copia de las entradas. En la Figura 10.9 se muestra el esquema de codificación de un código convolucional sistemático cuya matriz generadora es

$$\mathbf{G}(D) = [\mathbf{I}_k \quad \mathbf{P}(D)] = [1 \quad D^2 + D + 1]$$

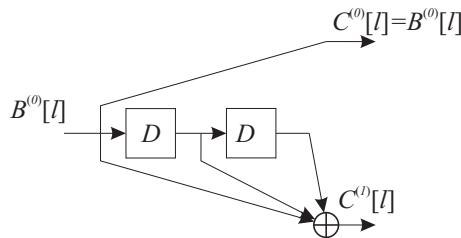


Figura 10.9. Ejemplo de código convolucional sistemático.

En el Apartado 10.4.3 presentaremos otros códigos convolucionales que no consideramos aquí, los sistemáticos recursivos y los no lineales, dentro de los denominados TCM.

10.3.2. Decodificación de los códigos convolucionales

El principal problema para la decodificación de forma óptima de los códigos convolucionales radica en que, al ser los codificadores sistemas con memoria, el estadístico suficiente para la detección de una única palabra código es toda la secuencia binaria recibida. Este problema es el mismo que el de detección de modulaciones PAM en canales con ISI tratado en el Capítulo 6, y adoptaremos la misma solución que se utilizó en el Apartado 6.2: la detección de una secuencia completa en lugar de una detección símbolo a símbolo.

Consideramos una secuencia de L símbolos $\mathbf{C}[0], \mathbf{C}[1], \dots, \mathbf{C}[L-1]$, generada a partir de kL bits de entrada y compuesta por nL bits que son transmitidos a través de un BSC. Los estados inicial, $\psi[0]$, y final, $\psi[L+K-2]$, se suponen conocidos. El detector de secuencias de máxima verosimilitud, a partir de la secuencia de $n(L+K-2)$ bits recibidos \mathbf{r} proporcionará como salida aquella secuencia de L símbolos \mathbf{c} que haga mínima la métrica de camino

$$l_H(\mathbf{r}, \mathbf{c}) \doteq \sum_{l=0}^{L+K-3} d_h(r[l], c[l]) = \sum_{l=0}^{L+K-3} l_{Hl}(\mathbf{r}, \mathbf{c}) \quad (10.57)$$

donde $l_{Hl}(\mathbf{r}, \mathbf{c})$ es la métrica de rama en la transición l -ésima. Obsérvese que la secuencia de símbolos define un camino a través de la rejilla del código.

La separabilidad de la métrica de camino en una suma de métricas de rama de (10.57) se deriva de la distancia de Hamming, y posibilita el empleo del algoritmo de Viterbi como decodificador. La única diferencia entre el algoritmo de Viterbi desarrollado en el Apartado 6.2.2 y el empleado para la decodificación de códigos convolucionales consiste en que el primero emplea métrica euclídea y el segundo métrica binaria. Nos limitaremos aquí simplemente a ilustrar su funcionamiento con la ayuda de un ejemplo.

Ejemplo 10.18

Considere el código convolucional mostrado en la Figura 10.10. Para codificar la secuencia 110101 consideramos ψ_0 como estado inicial (todos los elementos de retraso o registros con

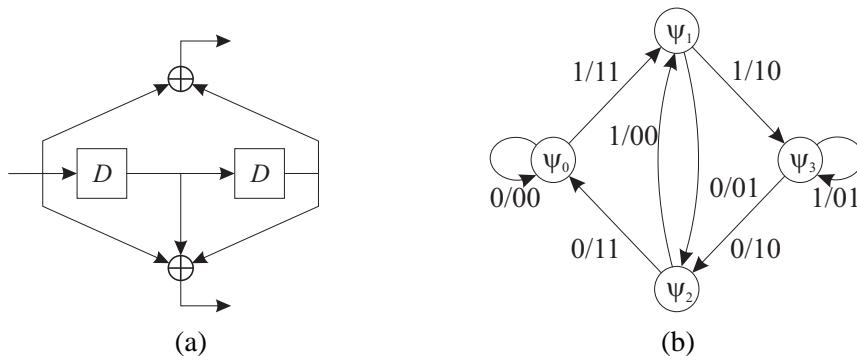


Figura 10.10. Código convolucional de tasa 1/2, $M_t = 2$ y $K = 3$: codificador (a) y diagrama de estados (b).

0) y deseamos que ψ_0 sea también el estado final. Para forzar que el estado final sea ψ_0 (sea cual sea la secuencia a codificar) añadimos dos ceros a la secuencia a codificar (así nos aseguramos que el contenido de los dos registros es 0), que finalmente queda como 11010100. La salida del codificador ante esta entrada es 111010001000111 (esto es, $c = [1110100001000111]$).

Supondremos en primer lugar que la secuencia recibida es igual a la transmitida, $r = c$.

Para decodificar, dividimos la secuencia recibida en bloques de $n = 2$ bits y los comparamos con los bits correspondientes a las posibles transiciones entre los estados del convolucional, calculando la métrica de rama. En la Figura 10.11 se muestra el diagrama de rejilla donde las etiquetas de cada rama se corresponden con las métricas de rama calculadas con la secuencia recibida y el número dentro de cada estado representa la métrica acumulada. Debajo de la rejilla se representan los bits recibidos.

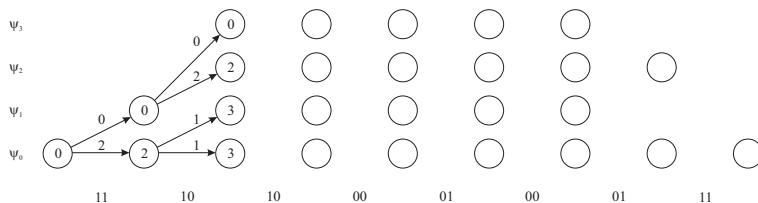


Figura 10.11. Dos primeras iteraciones del algoritmo de Viterbi en el Ejemplo 10.18.

En la primera iteración se mide la distancia de Hamming entre los dos primeros bits recibidos (11) y los dos bits de salida de las dos transiciones posibles que parten del estado ψ_0 . A partir del estado ψ_0 se puede alcanzar el estado ψ_0 , cuando se transmiten dos ceros, o el estado ψ_1 si se envían dos unos (véase el diagrama de estados en la Figura 10.10(b)). Las distancias de Hamming entre la secuencia recibida y los bits de estas transiciones son, respectivamente, 2 y 0.

En la segunda transición se calcula la distancia de Hamming entre los dos siguientes bits recibidos (10) y los bits de salida de las cuatro transiciones posibles ($\psi_0 \xrightarrow{00} \psi_0$, $\psi_0 \xrightarrow{11} \psi_1$, $\psi_1 \xrightarrow{01} \psi_2$, $\psi_1 \xrightarrow{10} \psi_3$). Las ramas de la segunda iteración en la Figura 10.11 se etiquetan con las distancias correspondientes a cada una de estas transiciones.

En la tercera iteración se compara la tercera pareja de bits, 10, con los bits correspondientes a todas las transiciones posibles entre los estados del convolucional, según se muestra en la Figura 10.12. A cada estado se podrá llegar desde varios estados anteriores y, de acuerdo con el algoritmo de Viterbi, será necesario eliminar los de mayor métrica acumulada (líneas punteadas en la Figura 10.12) y determinar los 2^{M_t} caminos supervivientes (líneas continuas en la Figura 10.12).

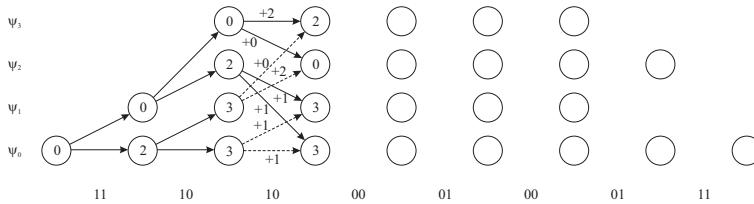


Figura 10.12. Tercera iteración del algoritmo de Viterbi en el Ejemplo 10.18.

En la Figura 10.18 podemos ver el resultado final, donde no se han eliminado los caminos no supervivientes (que se representan en línea punteada) para ilustrar mejor la dinámica del algoritmo. Podemos ver cómo la métrica acumulada en el camino superviviente al finalizar el algoritmo es 0, ya que no se ha producido ningún error de transmisión. Si recorremos los estados indicados por este camino, los bits de entrada que causaron estos cambios de estado son los bits que fueron codificados.

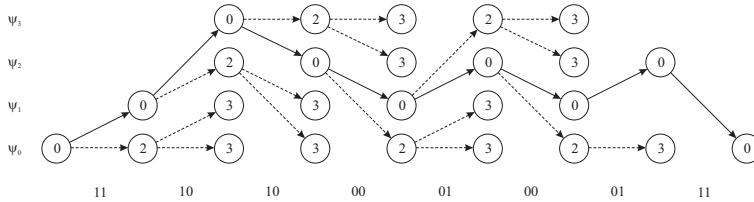


Figura 10.13. Resultado final del algoritmo de Viterbi en el Ejemplo 10.18.

A continuación consideraremos que se han producido tres errores de transmisión, recibiéndose la secuencia $r = [1010100101010111]$. En la Figura 10.14 se muestra el resultado final proporcionado por el algoritmo de Viterbi donde, como en la figura anterior, no se han eliminado los caminos no supervivientes (que se representan en línea punteada). Podemos observar que el camino superviviente es el mismo que en el caso anterior, si bien la métrica acumulada final es igual a 3, el número de errores de transmisión.

Si en el receptor está disponible la salida del canal gausiano podemos realizar la decodificación de forma blanda, para lo cual emplearemos el algoritmo de Viterbi con métrica euclídea, de forma idéntica a como fue descrito en el Apartado 6.2.2.

Tanto si la métrica empleada es binaria como euclídea, podemos forzar las decisiones sin esperar a tener un único camino superviviente, mediante el truncamiento del algoritmo de Viterbi. Algo que tampoco cambia en función de la métrica es la complejidad del algoritmo, exponencial tanto en el número de estados en función de la memoria total (2^{M_t})

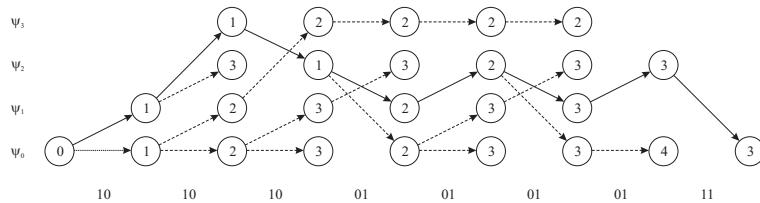


Figura 10.14. Resultado final del algoritmo de Viterbi en el Ejemplo 10.18 con tres errores de transmisión.

como en el número de ramas que conectan con un nodo en función del número de bits de entrada al codificador (2^k). Esta complejidad limita el uso de códigos con altos valores de n y k y decodificación ML, aunque existen algoritmos de decodificación subóptimos como el algoritmo de Fano, en los que la complejidad crece linealmente, y no exponencialmente, en función de la memoria total.

10.3.3. Prestaciones de los códigos convolucionales

Para evaluar las prestaciones de los códigos convolucionales debemos seguir los pasos descritos con anterioridad en este capítulo: obtener la distancia mínima del código (ahora D_{min} en lugar de d_{min} , al tratarse de detección de secuencias), las P_e y BER a partir de esta distancia mínima, y finalmente la ganancia de codificación.

Abordaremos en primer lugar el cálculo de D_{min} empleando dos métodos distintos para, a continuación, presentar algunos de los mejores códigos convolucionales conocidos y los códigos convolucionales perforados como forma de obtener códigos con R cercana a 1 y baja complejidad. Finalizaremos con el cálculo de las probabilidades de error y la ganancia de codificación.

Cálculo de D_{min}

Para calcular la distancia (de Hamming) mínima entre dos secuencias de palabras código, D_{min} , que determinará las prestaciones de un código convolucional, aprovecharemos la linealidad de los códigos convolucionales presentados y su propiedad de invarianza frente a traslaciones por una secuencia de símbolos de salida del codificador. Esta propiedad ya fue empleada para el cálculo de d_{min} en los códigos bloques lineales, e implica que cualquier secuencia de palabras código posee al menos otra secuencia a distancia D_{min} . En consecuencia, basta calcular la distancia mínima de cualquier secuencia a una dada que, por conveniencia y de forma similar al cálculo de d_{min} en los códigos bloques, es la secuencia todo ceros, que siempre es una secuencia de símbolos como consecuencia de la propiedad de linealidad.

El primer método que vamos a emplear para calcular D_{min} hace uso del propio algoritmo de Viterbi para determinar la distancia mínima a la secuencia compuesta por todo ceros. El evento o suceso erróneo de distancia mínima será aquel que, partiendo del estado en que el contenido de todos los registros es 0, vuelve a este estado con la menor métrica acumulada.

Como la secuencia de referencia está compuesta sólo por ceros, la métrica de rama es igual al número de “unos” de la salida del codificador.

Vamos a calcular a modo de ejemplo la D_{min} para el código convolucional presentado en la Figura 10.10. Partimos del estado ψ_0 y consideramos todas las transiciones que lleven a un estado distinto del estado inicial (para evitar obtener la secuencia todo ceros). En este caso, se trata de un código con 1 bit de entrada, $k = 1$, por lo que sólo existe una posible transición: del estado ψ_0 al estado ψ_1 , como se muestra en la Figura 10.15(a). En el caso en que el codificador tuviese dos bits de entrada ($k = 2$), existirían tres transiciones posibles: las provocadas por los bits de entrada 10, 01 y 11, y así sucesivamente.

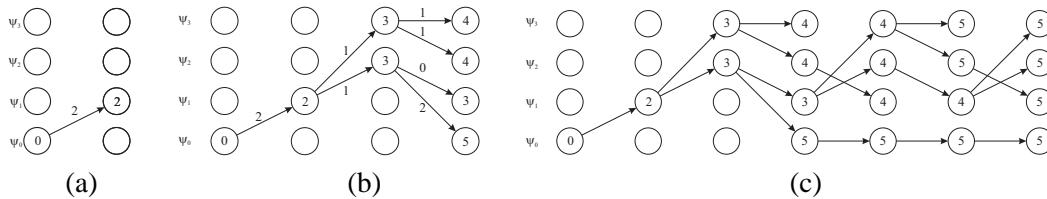


Figura 10.15. Cálculo de la distancia mínima del código convolucional de la Figura 10.10.

En la Figura 10.15, como anteriormente, la etiqueta de cada rama se corresponde con la métrica de rama (ahora, el número de unos de la salida del codificador) y el número dentro de cada estado representa la métrica acumulada. En la Figura 10.15(b) se muestran las dos siguientes transiciones, donde ya tenemos un camino que ha vuelto al estado ψ_0 con métrica acumulada 5 y tenemos métricas acumuladas no nulas en todos los estados. A partir de aquí, cuando en una transición dos ramas (o más, si fuese $k > 1$) nos lleven a un mismo nodo conservamos sólo la de menor métrica acumulada; es decir, el camino superviviente, como en decodificación.

En esta tercera iteración se podría pensar que la distancia mínima de este código es 5; sin embargo pueden existir secuencias que terminen en ψ_0 producidas por más “unos” a la entrada, pero con menos “unos” de salida, es decir, es posible que alguno de los estados a los que hemos llegado con métrica acumulada inferior a 5 pueda volver al estado ψ_0 con una métrica acumulada menor que 5. Por ello, continuaremos el procedimiento hasta que la métrica acumulada en cada uno de los estados sea al menos la acumulada en el estado ψ_0 . En ese caso no es posible que una secuencia alcance el estado ψ_0 con menor métrica acumulada y por tanto habremos calculado la D_{min} del código convolucional. El resultado final es el mostrado en la Figura 10.15(c), y podemos concluir que $D_{min} = 5$.

En este ejemplo se ha cumplido que el evento erróneo de menor longitud está a una distancia D_{min} , pero esto no es siempre así, como comprobaremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 10.19

En la Figura 10.16 se muestra el cálculo de D_{min} para el código de la Figura 10.6(a). Se observa que la distancia mínima es 6. Sin embargo, si nos hubiésemos quedado con la primera secuencia que llega al estado ψ_0 , habríamos concluido erróneamente que $D_{min} = 7$, ya que la secuencia de entrada al codificador 1000 proporciona a su salida una secuencia con siete unos. Para este

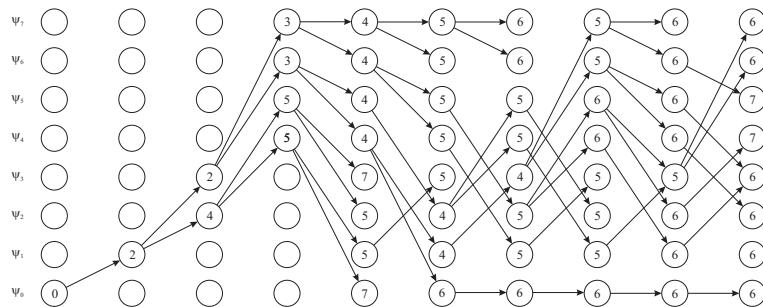


Figura 10.16. Cálculo de D_{min} para el código de la Figura 10.6(a).

código la secuencia de entrada que da lugar a la salida con 6 unos es la secuencia 11000. En los códigos convolucionales la secuencia de bits de entrada que da lugar a la secuencia con menor número de “unos” (aquélla que define la distancia mínima), también es relevante para conocer las prestaciones del código. D_{min} indica cuán verosímil es que una secuencia se confunda con otra. El patrón de error más común es aquél indicado por D_{min} (siempre que la probabilidad de cruce del BSC sea menor que 0,5) y el número de errores a la salida del decodificador es el número de “unos” del mensaje que define la secuencia de menor distancia. Para este código, cuando se produce el error de decodificación más común, se obtienen dos errores de bit en la secuencia mensaje recuperada, ya que la entrada que define el camino a D_{min} es 11000. Es deseable que la distancia mínima sea lo mayor posible y que venga determinada por la secuencia 100... (como en la Figura 10.15.c) para que cuando se produzca el patrón de error más común únicamente resulte un único error a la salida del convolucional.

Este último ejemplo ha puesto de manifiesto que puede ser de interés conocer no sólo D_{min} , sino también el número de transiciones de los eventos erróneos, los errores que provocan estos eventos en la secuencia decodificada e incluso el número de eventos a D_{min} . Toda esta información puede obtenerse con el segundo método para la determinación de D_{min} que expondremos a continuación, y que consiste en obtener la función de transferencia de los eventos erróneos, denominada generalmente *función generadora del código, enumerador de caminos o enumerador de pesos*.

Para obtenerla, modificamos el diagrama de estados del código, dividiendo en dos el estado en que el contenido de todos los registros es 0 (supongamos que es ψ_0), un nodo inicial (ψ_{0i}) y un nodo final (ψ_{0o}). Este nuevo diagrama de estados se denomina *diagrama de estados aumentado*. El nodo inicial representa la salida del camino correcto (secuencia de palabras código compuesta únicamente por ceros) y, por tanto, el inicio del evento erróneo, mientras que el nodo final representa la vuelta al camino correcto y, por tanto, la finalización del evento erróneo. Cada rama se etiqueta con X^xY^yZ , donde x es el número de “unos” de la salida del codificador asociada a esa rama (esto es, la distancia de Hamming entre las salidas errónea y correcta del codificador), y es el número de “unos” de la salida del decodificador asociada a esa rama (esto es, el número de errores a la salida del decodificador). El término Z , presente en todas las transiciones, nos va a indicar la longitud del camino erróneo. La función generadora del código, $H(X, Y, Z)$, se obtiene como

$$H(X, Y, Z) = \psi_{0o}/\psi_{0i}.$$

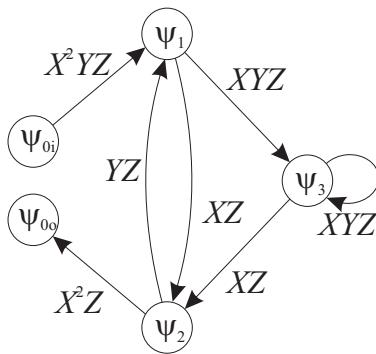


Figura 10.17. Diagrama de estados aumentado del código convolucional de la Figura 10.10.

En la Figura 10.17 se muestra el diagrama de estados aumentado del código de la Figura 10.10. A partir de este diagrama obtenemos las siguientes relaciones entre estados

$$\begin{aligned}\psi_1 &= X^2YZ\psi_{0i} + YZ\psi_2 \\ \psi_2 &= XZ\psi_1 + XZ\psi_3 \\ \psi_3 &= XYZ\psi_1 + XYZ\psi_3 \\ \psi_{0o} &= X^2Z\psi_2\end{aligned}\tag{10.58}$$

Sustituyendo sucesivamente ψ_1 , ψ_3 y ψ_2 obtenemos la relación entre ψ_{0i} y ψ_{0o}

$$\psi_{0o} = \frac{X^5YZ^3}{1 - XY(Z + Z^2)}\psi_{0i}\tag{10.59}$$

de donde obtenemos $H(X, Y, Z)$

$$\begin{aligned}\frac{\psi_{0o}}{\psi_{0i}} &= H(X, Y, Z) = \frac{X^5YZ^3}{1 - XY(Z + Z^2)} = \\ &= X^5YZ^3 + X^6Y^2(Z^4 + Z^5) + X^7Y^3(Z^5 + Z^6) + \dots\end{aligned}\tag{10.60}$$

que nos dice que existe un camino, X^5YZ^3 , a distancia 5 (el factor X^5) del camino todo ceros, que provoca un error de decisión (el factor Y) y está compuesto por 3 transiciones erróneas (el factor Z^3); dos errores a distancia 6 y que provocan 2 errores de decisión, uno compuesto por 4 transiciones erróneas y otro por 5; y así sucesivamente. Si expresamos $H(X, Y, Z)$ como suma de términos $X^xY^yZ^z$, cada uno de ellos representa un posible evento erróneo.

Algunos de los mejores códigos convolucionales

Una vez analizados los códigos convolucionales, la pregunta que surge de forma natural es ¿cómo se obtienen códigos con la mayor D_{min} posible?. En el caso de códigos bloque

cíclicos la búsqueda de los mejores códigos estaba basada en su estructura algebraica, pero las tentativas de diseño de códigos convolucionales explotando su estructura algebraica no siempre han proporcionado códigos con buenas propiedades de distancia. La mayoría de los mejores códigos convolucionales conocidos han sido obtenidos mediante búsqueda exhaustiva entre todos los códigos posibles con unas características (R , K y M_t) predeterminadas.

En los Cuadros 10.11, 10.12 y 10.13 se muestran los mejores códigos convolucionales conocidos para valores pequeños de K y tasas, respectivamente, $1/2$, $1/3$ y $2/3$. En ellas, y por compacidad, se representan los elementos de la matriz generadora del código, $\mathbf{g}(D) = g_0 + g_1 D + \dots + g_{K-1} D^{K-1} + g_K D^K$, mediante la codificación binaria de los polinomios en D , como $\mathbf{g} = (g_0, g_1, \dots, g_{K-1}, g_K)$. Obsérvese que los dos primeros códigos del

K	\mathbf{g}_{00}	\mathbf{g}_{01}	D_{min}
3	101	111	5
4	1101	1111	6
5	10011	11101	7
6	110101	101111	8
7	1011011	1111001	10
8	11100101	10011111	10
9	101110001	111101011	12
10	1001110111	1101100101	12
11	10011011101	11110110001	14
12	100011011101	101111010011	15

Cuadro 10.11. Los mejores códigos convolucionales de tasa $1/2$ para una K dada.

K	\mathbf{g}_{00}	\mathbf{g}_{01}	\mathbf{g}_{02}	D_{min}
3	101	111	111	8
4	1011	1101	1111	10
5	10101	11011	11111	12
6	100111	101011	111101	13
7	1011011	1100101	1111101	15
8	10010101	11011001	11110111	16
9	101101111	110110011	111001001	18
10	1001001111	1011110101	1110011011	20
11	10011101011	10110111001	11001111101	22
12	100111110111	101111010011	110010110101	24

Cuadro 10.12. Los mejores códigos convolucionales de tasa $1/3$ para una K dada.

Cuadro 10.11 se corresponden con los representados, respectivamente, en las Figuras 10.10 y 10.6(a).

K	M_t	\mathbf{g}_{00}	\mathbf{g}_{01}	\mathbf{g}_{02}	D_{min}
		\mathbf{g}_{10}	\mathbf{g}_{11}	\mathbf{g}_{12}	
2	2	11	01	11	3
		01	10	10	
3	3	10	01	11	4
		001	110	111	
3	4	111	001	110	5
		010	101	111	
4	5	110	011	111	6
		0011	1000	1111	
4	6	1101	0110	1101	7
		0110	1101	1111	
5	7	1100	0111	1011	8
		00111	10011	11110	
5	8	11010	00101	10101	8
		01011	11011	10010	
6	9	10101	00011	11110	9
		000101	111000	101011	
6	10	110011	001101	100110	10
		011010	110101	110001	

Cuadro 10.13. Los mejores códigos convolucionales de tasa 2/3 para K y M_t dadas.

A la vista de estos cuadros, y comparando los códigos convolucionales con los códigos bloque, podemos extraer las siguientes conclusiones:

- Es posible aumentar D_{min} sin modificar n y k (y, por tanto, R) incrementando la memoria total del código. Esto no era posible con los códigos bloque lineales, donde para cada par de valores (n, k) teníamos que $d_{min} \leq n - k - 1$. El precio que se paga por aumentar D_{min} es la complejidad del decodificador, que aumenta exponencialmente con la memoria total del código.
- A diferencia de los códigos bloque binarios, donde siempre encontrábamos una realización sistemática de cualquier código sin disminuir d_{min} , en los códigos convolucionales esto no siempre es posible. La razón de este hecho estriba en que al imponer el carácter de sistemático en un código convolucional estamos forzando que una parte de la matriz generadora (exactamente, la matriz identidad de tamaño $k \times k$) sea fija (polinomio en D de grado 0).

Códigos perforados

En los códigos convolucionales la manera más evidente de construir códigos de tasa próxima a 1 es imponer $n = k + 1$ (esto es, códigos $(k + 1, k)$) incrementando k hasta la tasa

$R = k/(k+1)$ deseada. Sin embargo, para obtener buenas propiedades de distancia debemos poner al menos un retardo en cada una de las k entradas, lo que provoca un incremento lineal respecto a k de la memoria total del codificador y, en consecuencia, un crecimiento exponencial respecto a k de la complejidad del decodificador.

Una técnica alternativa para obtener códigos convolucionales con valores de R cercanos a 1 consiste en emplear una técnica conocida como perforado (“puncturing”), que ya estudiámos en los códigos bloques para reducir el tamaño de los códigos RS. El perforado sobre los códigos convolucionales consiste en descartar o eliminar, de acuerdo con un patrón cíclico, bits de salida del codificador. Se reduce así el número de bits a la salida del codificador por cada bit de entrada, sin modificar k y sin aumentar la complejidad del decodificador. Otra ventaja adicional derivada del empleo de esta técnica es que con un único codificador y decodificador podemos variar R adaptándonos a las condiciones del canal de transmisión.

Por ejemplo, si empleamos un código de tasa 1/2 y en los instantes pares se transmiten ambas salidas pero en los impares sólo una de ellas, la tasa resultante del código convolucional perforado será 2/3, ya que por cada dos bits de mensaje sólo se transmiten tres. El patrón de perforado en este caso sería (11,10), donde los ceros indican los perforados y cada palabra se repite periódicamente sobre cada una de las salidas. Es decir, un patrón de perforado está compuesto por n palabras de tantos bits como la periodicidad con la que se aplica el patrón.

En la Figura 10.18 se muestra a modo de ejemplo la construcción de un código convolucional de tasa 3/4 a partir de un código de tasa 1/2 empleando un patrón de perforado (110,101). La decodificación de estos códigos se realiza de la misma manera que la de los códigos convolucionales sin perforar, simplemente los bits perforados no se tienen en consideración en la métrica de rama.

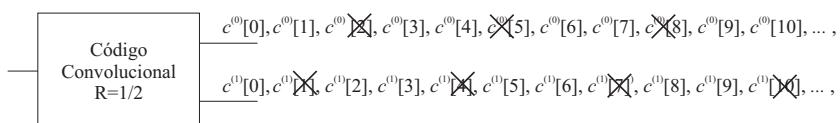


Figura 10.18. Código convolucional perforado de tasa 3/4 con patrón de perforado (110,101) (los bits tachados no se transmiten).

Ejemplo 10.20

Se ha construido un código de tasa 2/3 empleando el código convolucional de la Figura 10.10 y un patrón de perforado (10,11). La entrada al codificador, como en el Ejemplo 10.18, es 11010100, que produce una salida antes del perforado 1110100001000111. Tras aplicarle el perforado esta secuencia se transforma en 110100010011. En la Figura 10.19 se muestra el diagrama de rejilla para decodificar esta secuencia empleando el algoritmo de Viterbi. El funcionamiento es idéntico al detallado en el apartado anterior para el código original de tasa 1/2, a excepción de los bits que han sido eliminados, que no se tienen en cuenta para el cálculo de la métrica de rama. En esta figura, aunque el camino correcto es el mismo que en el Ejemplo 10.18 y las mostradas en la Figura 10.18, las métricas acumuladas en los estados intermedios son distintas debido a la no acumulación de distancia en los bits eliminados.

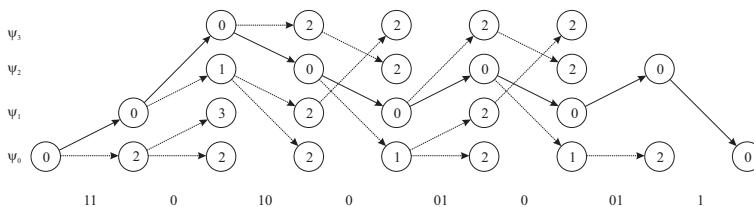


Figura 10.19. Decodificación del código con perforado del Ejemplo 10.20.

Como consecuencia del perforado de bits se produce una disminución de D_{min} , pero dado el carácter variante en el tiempo del mecanismo de perforado no resulta fácil evaluar su efecto sobre las prestaciones del código. Una opción para obtener D_{min} consiste en agrupar los bits de entrada y los símbolos de salida del codificador convolucional en bloques de longitud la periodicidad del perforado, construyendo su diagrama de rejilla equivalente. Sobre este diagrama de rejilla, ya invariante en el tiempo, calculamos la D_{min} del código con perforado. Así, para el código convolucional perforado de la Figura 10.18, con periodicidad del perforado igual a 3, agrupamos tres bits de entrada y tres salidas del codificador tras el perforado (un total de 4 bits). Obtenemos un diagrama de rejilla con 2^3 (todas las combinaciones de los tres bits de entrada que hemos agrupado) transiciones partiendo del mismo nodo, cada una de ellas produciendo una salida de 4 bits. Nótese que, con el codificador convolucional del Ejemplo 10.20, existirán transiciones distintas entre los mismos nodos (transiciones paralelas), porque el número de estados de la rejilla (cuatro) es el mismo que el de código sin perforado. Se deja como ejercicio calcular D_{min} para este ejemplo.

Para realizar la decodificación de los códigos convolucionales perforados es necesario, como ha quedado de manifiesto en el Ejemplo 10.20, modificar el algoritmo de Viterbi para que no tenga en cuenta los bits que se han eliminado en el perforado. Existe un caso en el que esta modificación no es necesaria, y es aquél en que, con decodificación blanda, existe un punto equidistante a todos los símbolos de la constelación. Si, como suele ser habitual, la modulación es binaria antipodal, este punto es el 0, pero también en modulaciones de tipo PSK, o en modulaciones ortogonales, existe este punto. En el caso de modulación binaria antipodal, la forma de proceder es insertar un valor igual a 0 en lugar de los símbolos que han sido eliminados por el borrado, y decodificar con el algoritmo de Viterbi correspondiente al código original. Al ser igual la distancia del 0 a los dos símbolos de la constelación no se penaliza ningún camino y, aunque la métrica acumulada no sea la correcta, el camino de menor métrica acumulada es el mismo con este mecanismo que modificando el decodificador para que no tenga en cuenta los símbolos eliminados. En las otras modulaciones, en lugar de 0 insertamos la coordenada del punto equidistante a todos los símbolos de la constelación.

Probabilidad de error y ganancia de codificación

Una vez determinado el valor de D_{min} de un código, el siguiente paso es calcular la probabilidad de error. Distinguiremos ahora entre los procedimientos de decodificación dura y blanda, comenzando por la decodificación blanda, por ser de aplicación directa el análisis de la probabilidad de error del detector de secuencias ML del Apartado 6.2.3. Restringiremos nuestro análisis al caso de transmisión mediante modulaciones lineales binarias antipodales, donde podemos encontrar una relación directa entre la D_{min} binaria medida anteriormente y la distancia mínima euclídea necesaria para calcular la probabilidad de error del detector de secuencias mediante (10.47).

Aplicando (6.33), la probabilidad de que una palabra de k bits de entrada al codificador sea incorrectamente decodificada es

$$P_e \approx \kappa_2 Q \left(\sqrt{\frac{2D_{min}E_s}{N_0}} \right) = \kappa_2 Q \left(\sqrt{\frac{2kD_{min}}{n}} \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right) \quad (10.61)$$

donde $d(a_0, a_1)$ y E_s son, respectivamente, la distancia entre los dos símbolos y la energía media por símbolo de la constelación binaria y κ_2 , según se define en la propia (6.33), es el número medio de errores que provoca en el decodificador el evento a D_{min} . En nuestro caso, por la linealidad de los códigos este número es igual al número de errores que provoca en el decodificador cualquier evento a D_{min} . Por ejemplo, para el código de la Figura 10.10, $\kappa_2 = 1$ y para el código de la Figura 10.6(a), $\kappa_2 = 2$.

En el caso de decodificación dura debemos sustituir la función Q en la ecuación anterior por la probabilidad de cometer más de $\lfloor (D_{min} - 1)/2 \rfloor$ errores en un número nz de bits consecutivos, donde z es la longitud del evento erróneo a D_{min} (si hay más de uno, lo podemos aproximar por la menor longitud de los eventos erróneos a D_{min}). Téngase en cuenta que en la obtención de las cotas de P_e en el Apartado 6.2.3 sólo se emplea la métrica de rama en el último paso, siendo el resto del desarrollo idéntico para cualquier métrica separable (como es la de Hamming). Realizando esta sustitución obtenemos

$$P_e \approx \kappa_2 \sum_{i=\lfloor (D_{min}-1)/2 \rfloor + 1}^{nz} \binom{nz}{i} p^i (1-p)^{nz-i} \quad (10.62)$$

donde p es la probabilidad de cruce del BSC y κ_2 la misma constante que en (10.61).

Las Ecuaciones (10.61) y (10.62) resultan en general una buena aproximación a la verdadera P_e , sobre todo para relaciones señal a ruido elevadas. Hay un caso, sin embargo, donde estas aproximaciones sirven de poco, y se produce cuando el código es *catastrófico*. Los códigos catastróficos son aquéllos que poseen un bucle con salidas todo ceros (es decir, que no acumula métrica) en su diagrama de estados. Este bucle que no acumula métrica hace que existan un número infinito de caminos erróneos a una distancia finita (que puede ser D_{min}) lo que tiene como consecuencia que $P_e = 1$ (puede verse también como que κ_2 tiende a infinito¹⁵). Podemos detectar el carácter catastrófico de un código si encontramos

¹⁵Si los infinitos caminos no están a D_{min} lo que ocurre es que la cota definida por κ_2 como el número de errores que provocan la totalidad de los eventos erróneos de D_{min} no es exacta porque se estarán despreciando infinitos términos no nulos.

factores comunes entre los elementos de la matriz generadora o, dicho de forma más precisa, un código de tasa $1/n$ no es catastrófico si y sólo si el máximo común divisor de los elementos de la matriz generadora toma la forma D^l para algún entero l negativo (para códigos con $k > 1$ también existe otra condición similar basada en los determinantes de todas las posibles submatrices de tamaño $k \times k$).

A guisa de ejemplo, si eliminamos una de las conexiones inferiores del codificador de la Figura 10.10 y lo transformamos en el codificador de la Figura 10.20 lo habremos convertido en catastrófico, como podemos apreciar en su diagrama de estados aumentado, donde en el bucle formado por la transición $\psi_3 \rightarrow \psi_3$ no se acumula distancia. Podemos comprobar

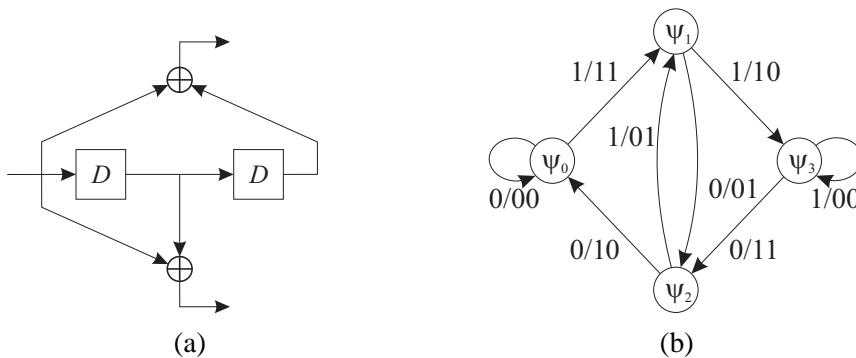


Figura 10.20. Código convolucional catastrófico de tasa 1/2: codificador (a) y diagrama de estados (b).

también cómo su matriz generadora

$$\mathbf{G}(D) = [D^2 + 1 \quad D + 1]$$

es divisible por $D + 1$, lo que nos demuestra el carácter catastrófico del código.

A partir de P_e podemos acotar la BER por el procedimiento habitual, (4.103), teniendo en cuenta que un error de decodificación se traducirá en entre 1 y k bits erróneos, $\frac{1}{k} P_e \leq BER \leq P_e$. A diferencia de los códigos bloque lineales, donde no son infrecuentes valores de k superiores a 100, en los códigos convolucionales es raro encontrar valores de k superiores a 5 ó 6, por lo que por este sencillo procedimiento se proporciona un cota bastante ajustada.

La ganancia de codificación se obtiene a partir de aquí sin más que igualar las BER del sistema sin y con código convolucional. En el caso de decodificación blanda es posible obtener un valor de la ganancia de codificación asintótica de forma analítica. Sin embargo, en el caso de decodificación dura, la obtención de esta ganancia de codificación no es tan fácil, requiriendo la mayoría de las veces su evaluación numérica. Veámoslo mediante un ejemplo.

Ejemplo 10.21

La probabilidad de error con detección blanda que obtenemos con el código especificado en la

Figura 10.10 y una modulación binaria antipodal es ($k = 1, n = 2, \kappa_2 = 1$ y $D_{min} = 5$)

$$P_e \approx Q \left(\sqrt{5} \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right) \quad (10.63)$$

Como además $k = 1$, $BER = P_e$. Igualando las BER con y sin codificación

$$Q \left(\sqrt{2 \left(\frac{E_b}{N_0} \right)_{sc}} \right) = 2Q \left(\sqrt{5 \left(\frac{E_b}{N_0} \right)_c} \right)$$

e igualando los argumentos de las funciones Q

$$\sqrt{2 \left(\frac{E_b}{N_0} \right)_{sc}} = \sqrt{5 \left(\frac{E_b}{N_0} \right)_c}$$

y, de aquí,

$$G = \frac{\left(\frac{E_b}{N_0} \right)_{sc}}{\left(\frac{E_b}{N_0} \right)_c} = \frac{5}{2} \approx 4 \text{dB}$$

o, lo que es lo mismo, una ganancia de 4 decibelios. El precio a pagar por esta ganancia es un incremento del ancho de banda de transmisión del 100 %.

Con decodificación dura, la probabilidad de error es

$$P_e \approx \sum_{i=3}^6 \binom{6}{i} p^i (1-p)^{6-i}$$

que podemos aproximar por su primer término si la relación señal a ruido es lo suficientemente alta

$$P_e \approx \binom{6}{3} p^3 (1-p)^3 = 20 p^3 (1-p)^3 = 20 p^3 (1 - 3p + 3p^2 - p^3) \approx 20 p^3$$

Sustituyendo la probabilidad de cruce del BSC, p por la probabilidad de error de una modulación binaria antipodal; teniendo en cuenta además que $R = 1/2$ y que, como anteriormente, $BER = P_e$, obtenemos finalmente

$$BER \approx 20 \left(Q \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right) \right)^3$$

Para obtener la ganancia de codificación igualamos las BER con y sin codificación

$$Q \left(\sqrt{2 \left(\frac{E_b}{N_0} \right)_{sc}} \right) = 20 \left(Q \left(\sqrt{\left(\frac{E_b}{N_0} \right)_c} \right) \right)^3 \quad (10.64)$$

de donde no resulta fácil despejar el cociente $\left(\frac{E_b}{N_0} \right)_{sc} / \left(\frac{E_b}{N_0} \right)_c$ para obtener una expresión explícita de la ganancia de codificación. Podemos obtener una solución aproximada igualando la función Q a su cota superior más sencilla, dada por la Ecuación (3.32), de la forma $Q(x) \approx \frac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{2}}$, transformando (10.64) en

$$\left(\frac{E_b}{N_0} \right)_{sc} = \frac{3}{2} \left(\frac{E_b}{N_0} \right)_c - \ln 20$$

y, de aquí,

$$G = \frac{\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{sc}}{\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_c} = \frac{3}{2} - \frac{\ln 20}{\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_c}$$

que varía dependiendo del valor de la SNR, y que cuando $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_c$ tiende a infinito (ganancia asintótica) da como resultado

$$G = \frac{\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{sc}}{\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_c} = \frac{3}{2} \approx 1,76 \text{dB}$$

Dada la dificultad para obtener la ganancia de codificación con decodificación dura, además de la validez limitada del valor de la ganancia de codificación con decodificación blanda para relaciones señal a ruido bajas, procederemos en lo sucesivo a una evaluación mediante técnicas de simulación de Monte Carlo de las prestaciones de los códigos convolucionales.

Procediendo del mismo modo que en el análisis de prestaciones de los códigos bloque en el Apartado 10.2.6, consideraremos en primer lugar un BSC concreto, el mismo empleado anteriormente, que recordemos estaba definido por una probabilidad de cruce $p = 0,0563$ que proporciona una capacidad de 0,6874 bits/transmisión. En la Figura 10.21 se representa la BER frente a la tasa de codificación de los códigos convolucionales de tasa 1/2 para K entre 6 y 12 (círculos) con decodificación dura y su comparación con las probabilidades de error de los códigos BCH (n entre 7 y 1023) para este canal. En esta figura se observa

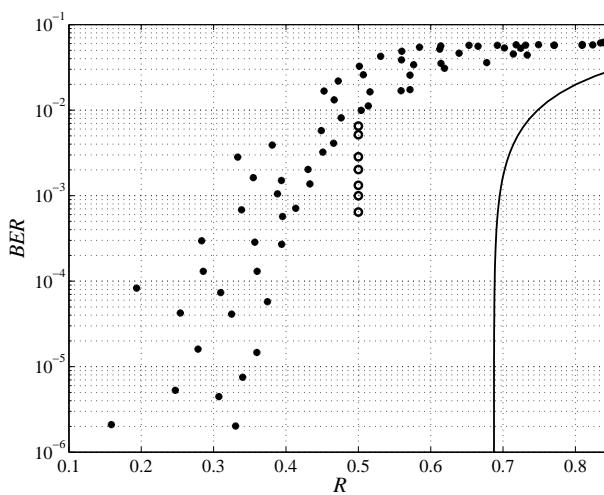


Figura 10.21. BER obtenida por distintos códigos convolucionales (círculos) y por los códigos BCH binarios (puntos) mostrados en la Figura 10.4 sobre un BSC con probabilidad de cruce $p = 0,0563$ y tasa máxima alcanzable.

que conforme aumenta K la probabilidad de error baja y podemos obtener una BER tan pequeña como deseemos, mientras que en los códigos BCH necesitábamos que la tasa fuese aproximadamente menor que 0,4 para garantizar que se pudiese reducir todo lo que se desease la BER a la salida del decodificador.

En la Figura 10.22 se muestra la *BER* a la salida del código convolucional frente a la relación señal a ruido en el canal gausiano empleando modulación binaria antipodal para dos códigos convolucionales de tasa 1/2 y $K = 3$ y 9. En esta figura podemos comprobar

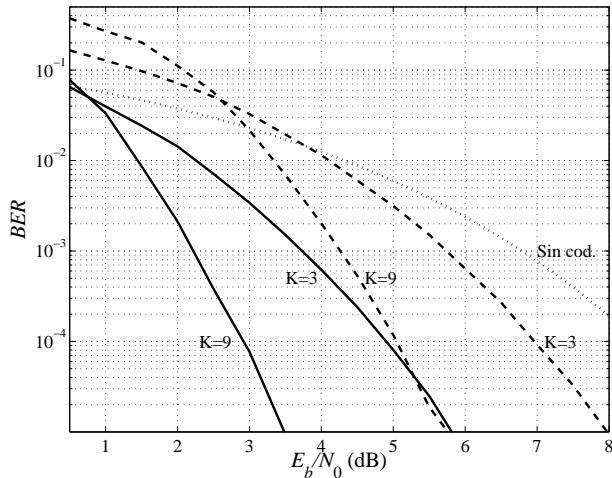


Figura 10.22. *BER* en función de la relación señal a ruido del canal gausiano empleando modulación binaria antipodal y códigos convolucionales de tasa 1/2 con $K = 3$ y 9 y decodificación dura (línea discontinua) y blanda (línea continua).

la diferencia de prestaciones entre decodificación dura (línea discontinua) y decodificación blanda (línea continua), así como la variación de la ganancia de codificación para distintos valores de la *BER*. Los 4 dB obtenidos como ganancia de codificación con decodificación blanda en el Ejemplo 10.21 se corresponden en esta figura con la separación a la que se tiende, conforme se aumenta la relación señal a ruido, entre la curva de *BER* para $K = 3$ y decodificación blanda (línea continua), y la curva de *BER* de la modulación sin codificar (línea de puntos).

Esta figura además nos sirve para comparar las prestaciones de los códigos convolucionales con los códigos bloque; concretamente, con los resultados que se muestran en la Figura 10.5. Para los códigos bloque vimos que cuando la tasa era aproximadamente igual a 1/2 eran necesarios más de 5 dB de E_b/N_0 y valores elevados de n para obtener reducciones significativas de la *BER*. Para los códigos convolucionales con decodificación blanda se pueden obtener probabilidades de error tan pequeñas como se desee para valores de E_b/N_0 inferiores a estos 5 dB sin más que aumentar el valor de K , y no son necesarios valores de K elevados (al menos, en comparación con los valores de k necesarios en los códigos bloque de la Figura 10.5 para obtener pequeños valores de *BER*). No debemos olvidar, sin embargo, que los resultados de la Figura 10.5 están obtenidos realizando la decodificación con el algoritmo de Berlekamp-Massey, que proporciona la decodificación de máxima verosimilitud únicamente cuando las palabras recibidas contienen a lo sumo $\lfloor(d_{\min} - 1)/2\rfloor$ errores, pero con un aumento lineal de la complejidad con k , mientras que los de la Figura 10.22 están obtenidos con el algoritmo de Viterbi, que realiza siempre la decodificación de máxima verosimilitud, pero con un aumento exponencial de la complejidad con M_t .

Por último, en la Figura 10.23 se muestra la *BER* frente a la relación señal a ruido para los códigos convolucionales con $K = 3$ hasta 9 de tasa 1/2 y decodificación blanda, donde podemos observar además del resultado obtenido de forma teórica de aumento de la ganancia conforme se aumenta la memoria del codificador, la forma en que va creciendo esta ganancia conforme lo hace E_b/N_0 .

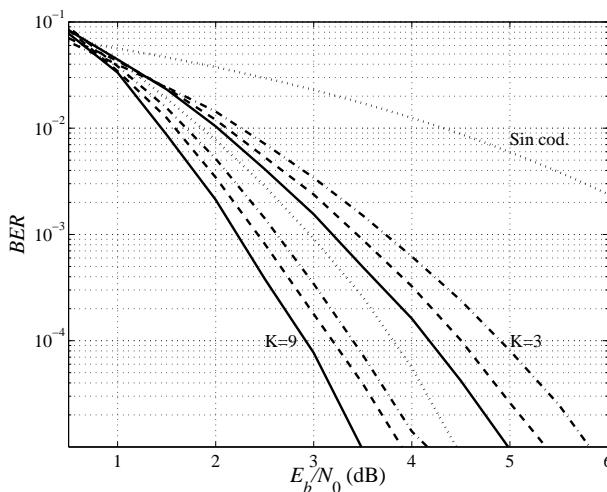


Figura 10.23. *BER* en función de la relación señal a ruido del canal gausiano empleando modulación binaria antipodal y códigos convolucionales de tasa 1/2 con K entre 3 y 9 y decodificación blanda.

A modo de resumen, podemos mencionar como características más relevantes de los códigos convolucionales las siguientes:

- Existe un algoritmo, el de Viterbi, que realiza la decodificación de máxima verosimilitud con complejidad lineal en el número de bits transmitidos pero exponencial en la memoria total del codificador. Debido a esta restricción, la mayoría de códigos convolucionales empleados en la práctica poseen valores de M_t moderados.
- Si está disponible en el receptor la salida del demodulador, es preferible emplear decodificación blanda porque consigue un aumento de prestaciones con un incremento insignificante de la complejidad (cálculo de distancias euclídeas en lugar de distancias de Hamming).
- Existen códigos con buenas propiedades de distancia para un amplio margen de tasas.

10.4. MODULACIONES CODIFICADAS EN REJILLA

En los apartados anteriores ha quedado clara la ventaja del empleo de la decodificación blanda sobre la decodificación dura, especialmente cuando se aplica a códigos convolucionales que son los que disponen de un algoritmo de decodificación de máxima verosimilitud “completo” de complejidad moderada para códigos con buenas propiedades de distancia.

La decodificación blanda es, de hecho, un procedimiento de detección para canales gaussianos con entrada digital pero, hasta ahora, la hemos aplicado a códigos diseñados para BSC. Cuando se diseña un código convolucional lineal, por ejemplo, una vez que se especifica la memoria total y el valor de K queda fijado el diagrama de rejilla (o el de estados) a excepción de la salida asociada a cada rama, y los coeficientes de los polinomios de la matriz generadora se eligen de tal forma que en esa salida la distancia de Hamming entre caminos sea la máxima posible. Escogiendo distintos coeficientes podemos pasar de un buen código a uno catastrófico o viceversa, como se demuestra en los códigos de las Figuras 10.10 y 10.20, donde cambiando un único coeficiente pasamos del mejor código posible a uno catastrófico.

Ahora bien, si empleamos decodificación blanda, ¿no es más sensato seleccionar los coeficientes de los polinomios de la matriz generadora para que la distancia euclídea entre caminos sea la máxima posible o, mejor aún, seleccionar directamente los símbolos de la constelación utilizada que asignamos como salida en cada rama de tal forma que la distancia euclídea sea máxima? Esto es, en esencia, un código en rejilla, también denominada modulación codificada en rejilla (“Trellis Coded Modulation”, TCM) que, a diferencia de los códigos bloque y convolucionales, es un código específico para canales gaussianos digitales.

10.4.1. TCM básicos

Un TCM se compone de un codificador convolucional seguido de un codificador de canal gausiano (típicamente un modulador PAM paso banda), como el que muestra la Figura 10.24, obtenido a partir del codificador convolucional de la Figura 10.10. Para comprender

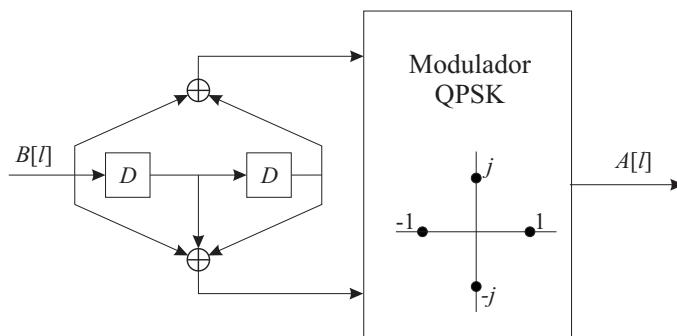


Figura 10.24. TCM basado en el codificador de la Figura 10.10 y modulación QPSK.

mejor cómo debemos diseñar este TCM, comenzemos analizando por qué el codificador convolucional del que parte, que posee el mismo diagrama de rejilla que nuestro TCM (salvo, obviamente, la salida asignada a cada rama), es el mejor entre los de tasa $1/2$ y $K = 3$. Si observamos su diagrama de estados (Figura 10.10(b)) o su diagrama de estados aumentado (Figura 10.17) podemos apreciar que la distancia de 5 se alcanza porque tanto al abandonar el camino correcto como al incorporarse a él existe la máxima métrica posible (2) entre el camino correcto y el erróneo: si consideramos el camino todo ceros como el correcto, la sa-

lida del codificador cuando se abandona el camino (transición $\psi_0 \rightarrow \psi_1$) es 11 (la de mayor distancia a 00), y la salida cuando volvemos a él (transición $\psi_2 \rightarrow \psi_0$) también es 11.

Aplicando esta misma idea al diseño de nuestro TCM, a las ramas o transiciones que salen del mismo estado les asignamos como salidas los símbolos de la constelación más distantes entre sí (1 y -1 , j y $-j$), al igual que a las ramas que llegan al mismo nodo. De esta forma conseguimos acumular la máxima distancia tanto al salir como al volver del camino correcto. En nuestro ejemplo este procedimiento da como resultado un diagrama de rejilla como el que muestra la Figura 10.25, aunque existen otros equivalentes. Además de

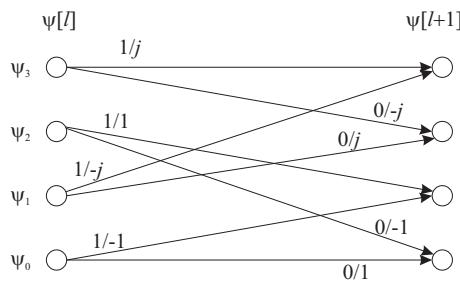


Figura 10.25. Diagrama de rejilla del codificador TCM de la Figura 10.24.

esta regla, en esta asignación hemos evitado que bucles distintos posean las mismas salidas para obtener un código no catastrófico.

Para comparar este código con el código convolucional del que parte debemos encontrar la D_{min} del TCM y, a partir de esta, la P_e y la BER . La determinación de D_{min} es una operación más compleja en los TCM que en los códigos bloque lineales y convolucionales lineales porque los TCM no son invariantes frente a traslaciones por una palabra código (símbolo de la constelación) y, en general, no podemos garantizar que todas las secuencias de símbolos posean un evento erróneo a distancia D_{min} . En consecuencia, es necesario calcular la distancia mínima a cualquier posible secuencia de símbolos.

En el TCM que estamos analizando podemos comprobar que el evento erróneo de menor distancia a cada uno de los posibles caminos es el de menor longitud (3 transiciones erróneas) y para evaluar todas las secuencias posibles sólo tenemos que considerar todas las secuencias de longitud 3, que son 32, y para cada una ellas determinar el evento erróneo a menor distancia. Como toda distancia es simétrica, sólo tenemos que evaluar la mitad de esas secuencias, que originan los 16 pares de caminos que se muestran en la Figura 10.26. Podemos comprobar que la distancia entre cualesquiera de estos pares de caminos es la misma, $\sqrt{2^2 + (1^2 + 1^2) + 2^2} = \sqrt{4 + 2 + 4} = \sqrt{10} = D_{min}$. A primera vista parecería que hubiésemos salido perdiendo respecto al codificador convolucional del que partíamos, ya que con este último y una modulación binaria antipodal podemos conseguir, de acuerdo con (10.47), una distancia euclídea mínima de $2\sqrt{5}$ con una constelación con símbolos $\{\pm 1\}$. Esta diferencia se compensa porque en el convolucional con modulación binaria antipodal es necesario transmitir dos símbolos por cada bit de entrada y en el TCM sólo uno, teniendo ambas constelaciones (binaria antipodal y QPSK) la misma E_s . La P_e de nuestro TCM es, por tanto, la misma que para el código convolucional con decodificación blanda, (10.63).

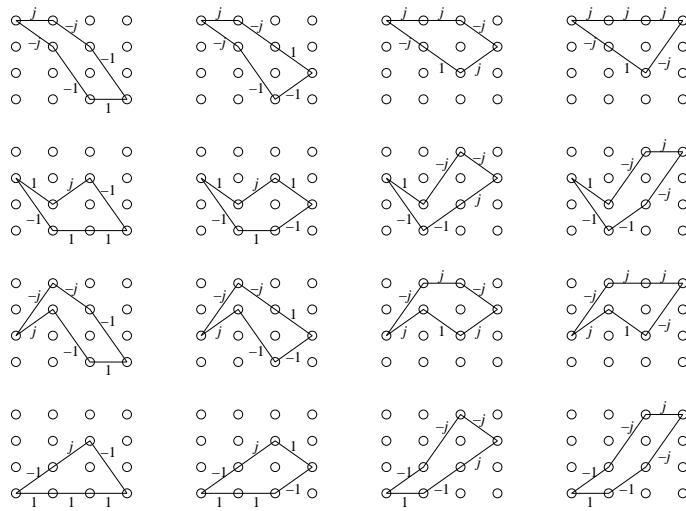


Figura 10.26. Pares de caminos a menor distancia del TCM de la Figura 10.24.

La razón de esta igualdad de prestaciones radica en que si realizamos la siguiente asignación de bits de salida al convolucional a símbolos de la constelación QPSK

$$[00] \rightarrow 1 \quad [11] \rightarrow -1 \quad [01] \rightarrow j \quad [10] \rightarrow -j$$

obtenemos el TCM, conservando la relación de distancias entre las métricas de Hamming (convolucional) y euclídea (TCM).

Otros TCM sí obtienen ventajas en términos de *BER* frente a relación señal a ruido sobre el convolucional del que parten, pero aunque las prestaciones sean idénticas, como en el ejemplo que estamos considerando, los TCM aún presentan una ventaja sobre los códigos convolucionales. Esta ventaja consiste en la incorporación de manera natural en el diseño de los TCM de restricciones de eficiencia espectral o ancho de banda ocupado, restricciones no tan fáciles de incorporar en códigos convolucionales o bloque.

Supongamos que se desea obtener una eficiencia espectral de 3 bits/s/Hz en un canal gausiano paso banda (equivalentes a 3 bits por uso del canal gausiano bidimensional con entrada digital) con modulaciones de tipo QAM, representado por la línea continua horizontal de la Figura 10.27. Supongamos además que la relación señal a ruido (medida como $2\pi P/WN_0$) que tenemos en este canal es de 13 dB (línea continua vertical en la Figura 10.27). La capacidad del canal gausiano (línea punteada en la Figura 10.27) para esta relación señal a ruido es superior a 4 bits (cruce de las líneas punteada y continua vertical) y en consecuencia es posible encontrar un codificador para el canal gausiano que nos proporcione una comunicación fiable.

Si basamos nuestro diseño en códigos bloque o convolucionales tenemos que escoger en primer lugar un formato de modulación. Podemos escoger la modulación que posee la eficiencia espectral deseada, 8-QAM, pero la información mutua entre la entrada y la salida

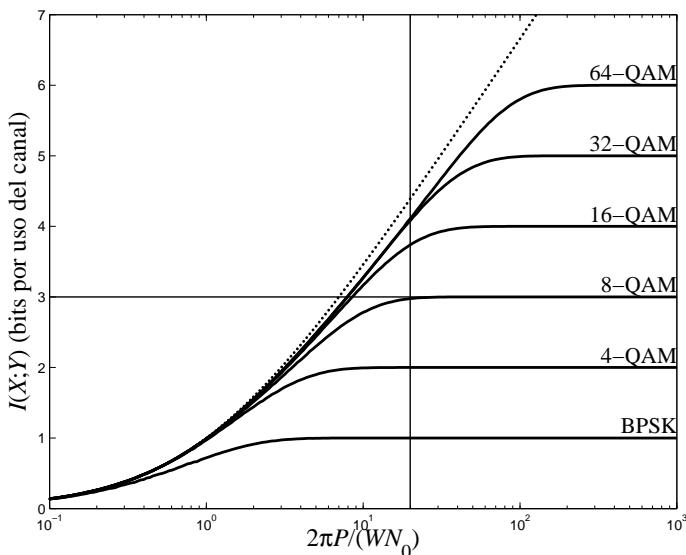


Figura 10.27. Punto de trabajo deseado (relación señal a ruido de 13 dB y eficiencia espectral de 3 bits/uso) respecto a la curva de capacidad del canal gausiano paso banda y las curvas de información mutua de las modulaciones QAM con símbolos equiprobables de la Figura 9.26.

de este canal con símbolos equiprobables¹⁶ de una 8-QAM para esta relación señal a ruido es ligeramente inferior a 3 bits, como podemos apreciar en esta figura. Para poder conseguir una transmisión fiable debemos, con esta modulación, enviar menos de 3 bits por símbolo a base de reducir la tasa de transmisión con un codificador bloque o convolucional; por ejemplo, si empleamos un código con tasa 1/2 podemos conseguir una transmisión fiable, pero la eficiencia espectral baja a $3 \cdot 1/2 = 1,5$ bits/s/Hz. Para mantener la eficiencia espectral de 3 bits/s/Hz podemos emplear constelaciones más densas; por ejemplo, podemos emplear una modulación 16-QAM (que tiene una información mutua entre la entrada y la salida superior a 3 bits) y un código bloque o convolucional con tasa 3/4, o una modulación 64-QAM con un codificador de tasa 1/2, etc. Sin embargo, para la decodificación de estos códigos bloque o convolucionales no siempre encontraremos un decodificador blando que sea eficiente, perdiendo las ventajas de la decodificación blanda.

Por el contrario, si basamos nuestro diseño en un TCM, la solución aparece de forma natural: si deseamos mantener una eficiencia espectral de 3 bits/s/Hz escogemos un formato de modulación cuya información mutua entre la entrada y la salida del canal gausiano con entrada digital sea superior a estos 3 bits/s/Hz, acomodando la tasa del codificador convolucional para conseguir esta eficiencia espectral, añadiendo tanta memoria en el convolucional

¹⁶Recordemos que, en este canal, para obtener la capacidad tenemos que buscar el máximo de información mutua respecto de la distribución de probabilidades *a priori* de los símbolos de la constelación, por lo que si imponemos que los símbolos sean equiprobables esta información mutua es la “capacidad” que podemos alcanzar.

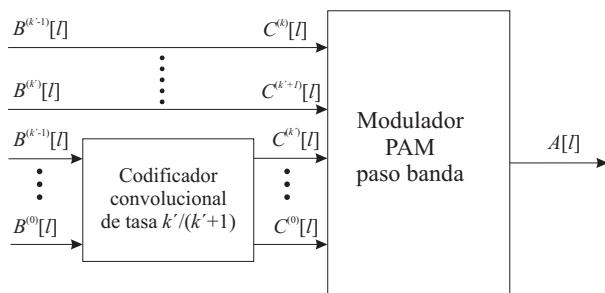
como sea necesaria para obtener la fiabilidad (*BER*) deseada, y empleando las reglas mencionadas antes para asignar puntos de la constelación a las salidas correspondientes a cada una de las ramas del diagrama de rejilla. En nuestro caso podríamos escoger una modulación 16-QAM y un convolucional con tasa 3/4, una modulación 32-QAM con un convolucional de tasa 3/5, etc.

En la práctica se suelen emplear codificadores convolucionales de tasa $k/(k+1)$, donde k se corresponde, en el caso de las modulaciones QAM, con la eficiencia espectral deseada. La memoria total del codificador convolucional suele escogerse en función de la complejidad que resulta admisible para el decodificador, y generalmente este número es moderado (< 10).

Por último, si en los códigos bloque y convolucionales utilizábamos como referencia (sistema sin codificación) una modulación binaria antipodal para determinar la ganancia de codificación, en un TCM empleamos como referencia un modulación de la misma familia que la empleada en el TCM con un constelación de 2^k puntos. Así, para un TCM basado en una modulación 8-PSK el sistema sin codificación será una modulación QPSK, y para un TCM que emplee una 64-QAM, una 32-QAM. Por ejemplo, para el TCM de la Figura 10.24 tomamos como referencia una BPSK y, teniendo en cuenta la discusión anterior sobre la D_{min} y *BER*, y que una BPSK es una modulación binaria antipodal, la ganancia de codificación de este TCM son los 4 dB obtenidos en el Ejemplo 10.21 para decodificación blanda.

10.4.2. TCM con bits sin codificar

Cuando deseamos una alta eficiencia espectral el valor de k es elevado y, en consecuencia, también la memoria total del codificador convolucional, el número de estados y la complejidad del decodificador. Una forma de reducir esta complejidad es limitar la memoria total permitiendo que algunos de los bits de entrada al TCM pasen directamente al modulador de la constelación PAM paso banda, tal y como se muestra en la Figura 10.28.



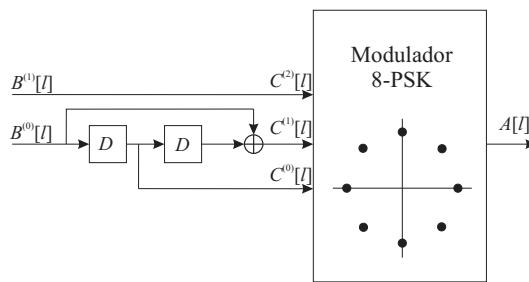


Figura 10.29. Ejemplo de TCM con bits sin codificar.

$2^{k-k'}$ valores posibles que pueden tomar los $k - k'$ bits restantes, $B^{(k')}[l], \dots, B^{(k-1)}[l]$, ($B^{(1)}[l]$ en nuestro caso particular) han de representarse en el diagrama de rejilla como *transiciones paralelas* entre dos estados, como podemos ver en la Figura 10.30, donde cada rama está etiquetada sólo con la entrada al TCM de la forma $B^{(0)}[l]B^{(1)}[l]$. A la hora de

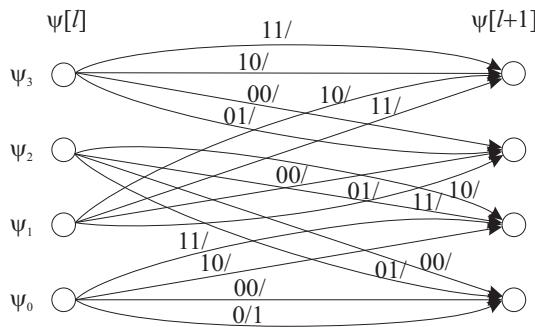


Figura 10.30. Diagrama de rejilla con transiciones paralelas correspondiente al codificador de la Figura 10.29.

asignar puntos de la constelación a cada rama del diagrama de rejilla es necesario tener en cuenta estas transiciones paralelas porque pueden constituir eventos erróneos de una única transición errónea. Para aumentar la distancia entre estas transiciones paralelas seguimos el siguiente procedimiento: dividimos la constelación PAM paso banda de 2^{k+1} puntos en $2^{k'+1}$ subconstelaciones de $2^{k-k'}$ puntos cada una; los $k' + 1$ bits de salida del codificador convolucional seleccionan la subconstelación y los $k - k'$ bits sin codificar seleccionan el símbolo dentro de la subconstelación. De esta forma, hacer máxima la distancia entre transiciones paralelas equivale a aumentar la distancia mínima entre puntos de cada subconstelación, y para conseguir esto existe un procedimiento recursivo sistemático (aunque no necesariamente óptimo) de partición en subconstelaciones.

Este procedimiento comienza dividiendo la constelación original en dos subconstelaciones, de tal forma que los símbolos que se encuentran a d_{min} de uno dado estén la subconstelación opuesta a este (si es posible) para aumentar la distancia mínima de cada subconstelación. Repetimos este procedimiento otras k' veces de forma recursiva, dividiendo cada subconstelación en dos, hasta obtener las $2^{k'+1}$ subconstelaciones. En la

Figura 10.31 se muestra este procedimiento sobre la constelación 8-PSK hasta lograr las 4 subconstelaciones binarias del codificador de la Figura 10.29. La distancia mínima de

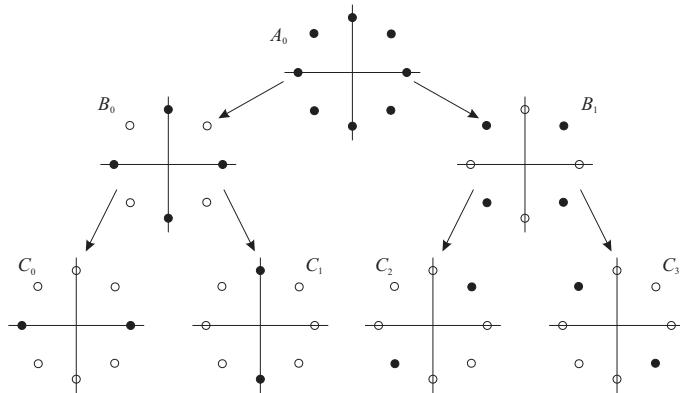


Figura 10.31. División recursiva de una constelación 8-PSK en 4 subconstelaciones binarias.

una subconstelación n -PSK con $E_s = 1$ es $2 \sin(\pi/n)$, que en nuestro caso resulta ser $2 \sin(\pi/8) = 0,7654$, $2 \sin(\pi/4) = \sqrt{2}$ y $2 \sin(\pi/2) = 2$ para, respectivamente, la constelación A_0 , las subconstelaciones B_0 y B_1 y las subconstelaciones C_0 a C_3 . El aumento de d_{min} en cada una de la dos divisiones es, respectivamente, $\sin(\pi/4)/\sin(\pi/8) = 1,8478$ y $\sin(\pi/2)/\sin(\pi/4) = \sqrt{2}$.

Ejemplo 10.22

En las Figura 10.32 se muestra la división en subconstelaciones de una constelación 16-QAM en ocho constelaciones binarias. En este tipo de constelaciones es fácil observar que el aumento de distancia mínima es $\sqrt{2}$ en cada división. En otras constelaciones como, por ejemplo, cuando el número de símbolos a distancia mínima es superior a 4 (como sucede, por ejemplo, en las constelaciones hexagonales), no siempre puede aumentarse la distancia mínima en cada división.

La distancia mínima entre transiciones paralelas, que denotaremos como $D_{||}$, se corresponde con la d_{min} de las subconstelaciones en el nivel $(k' + 1)$ -ésimo de división (si fuesen distintas, la menor de ellas). En nuestro caso será la d_{min} de las subconstelaciones C_0 a C_3 de la Figura 10.31, que es igual a 2.

Una vez determinadas y analizadas las transiciones paralelas procedemos a asignar las salidas en el diagrama de rejilla del TCM, agrupando las transiciones paralelas en una única rama a la que asignaremos como salida una subconstelación. Para asignar subconstelaciones a las ramas del diagrama de rejilla seguiremos el mismo procedimiento empleado en el diseño de los TCM del apartado anterior: a las ramas que salen del mismo estado les asignamos como salidas las subconstelaciones más distantes entre sí, al igual que a las ramas que llegan al mismo nodo.

Hay que tener en cuenta que el hecho de agrupar las transiciones paralelas en una única transición, a la que asignamos una subconstelación, es simplemente una convención que resulta cómoda para diseñar un TCM, pero que cuando hablamos de distancia entre dos

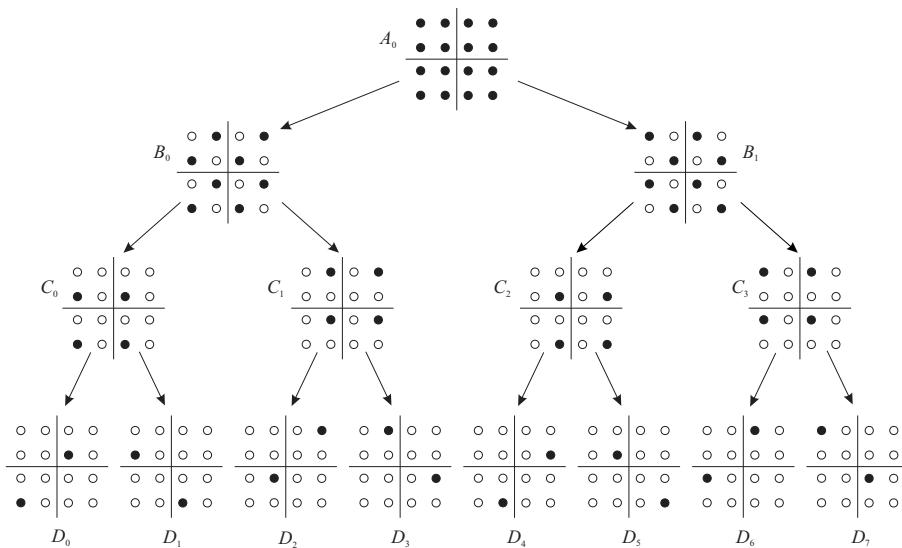


Figura 10.32. División de una constelación 16-QAM en 8 subconstelaciones binarias.

subconstelaciones estamos hablando de la menor distancia entre transiciones no paralelas, que se corresponde con la menor distancia entre dos símbolos pertenecientes cada uno a una de las subconstelaciones. Es decir, si denotamos $d(A_i, A_j)$ como la distancia entre las subconstelaciones A_i y A_j , esta toma la forma

$$d(A_i, A_j) = \min_{a_l \in A_i, a_k \in A_j} d(a_l, a_k) \quad (10.65)$$

Para las subconstelaciones de la Figura 10.31 obtenemos $d(C_0, C_1) = d(C_2, C_3) = \sqrt{2}$ y $d(C_0, C_2) = d(C_0, C_3) = d(C_1, C_2) = d(C_1, C_3) = 2 \operatorname{sen}(\pi/8) = 0,7654$. Obsérvese cómo la distancia entre dos subconstelaciones es la d_{\min} de la constelación de nivel más bajo en que están presentes ambas: la distancia entre C_0 y C_1 es la d_{\min} de B_0 o la distancia entre C_0 a C_2 es la d_{\min} de A_0 .

Aplicando estas reglas al TCM de la Figura 10.29 obtenemos la asignación de subconstelaciones que muestra la Figura 10.33. Para finalizar con el diseño del TCM, es pertinente

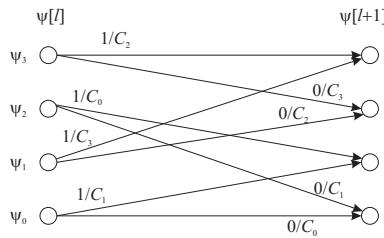


Figura 10.33. Diagrama de rejilla del codificador de la Figura 10.29.

mencionar que para disminuir la *BER* debemos realizar una codificación Gray de los sím-

bolos de las subconstelaciones que son seleccionados por los bits sin codificar. En el ejemplo que estamos desarrollando no tiene sentido hablar de codificación Gray puesto que las subconstelaciones son binarias.

Los códigos que siguen el esquema general de la Figura 10.28 cuando el codificador convolucional es lineal se denominan *códigos de Ungerboeck* en honor de la persona que los propuso, y las reglas que hemos aplicado para el diseño de estos TCM se denominan *reglas de Ungerboeck* que se enuncian formalmente como:

Regla 1: Hacer máxima la distancia entre transiciones paralelas asignándoles los símbolos de las subconstelaciones del último nivel de partición necesario.

Regla 2: Hacer máxima la distancia entre transiciones que salen o llegan al mismo estado asignándoles para ello las constelaciones que derivan de una misma en el penúltimo nivel de partición necesario.

Regla 3: Emplear los símbolos de la constelación con la misma frecuencia.

Una vez diseñado el TCM debemos evaluar sus prestaciones, para lo cual es necesario determinar la distancia mínima entre dos caminos no paralelos, que denominaremos D_{\nparallel} . Esta se calcula como D_{min} en los TCM sin transiciones paralelas, pero empleando las distancias entre subconstelaciones en lugar de distancias entre símbolos.

Para el codificador de la Figura 10.29 podemos comprobar que el evento erróneo no paralelo de menor distancia a cada uno de los posibles caminos es el de menor longitud (3 transiciones erróneas) y para evaluar todas las secuencias posibles sólo tenemos que considerar todas las secuencias de tres subconstelaciones consecutivas, que son 32, y para cada una ellas determinar el evento erróneo a menor distancia. Procediendo de forma similar a como se muestra en la Figura 10.26 para TCM sin transiciones paralelas, podemos comprobar que todos los caminos poseen un evento erróneo no paralelo a distancia

$$D_{\nparallel} = \sqrt{d^2(C_0, C_1) + d^2(C_0, C_2) + d^2(C_1, C_2)} = 2,1414$$

La distancia mínima del TCM puede venir dada por las transiciones paralelas o por las no paralelas, y será

$$D_{min} = \min \{ D_{\parallel}, D_{\nparallel} \} \quad (10.66)$$

En el caso del codificador de la Figura 10.29 la distancia mínima se produce entre los símbolos de las subconstelaciones, y es $D_{min} = 2$.

A partir de D_{min} se determina la P_e y la BER y, con estas, la ganancia de codificación como hemos hecho para los TCM sin bits sin codificar.

Ejemplo 10.23

Para el codificador de la Figura 10.29, la P_e a altas relaciones señal a ruido viene determinada por las transiciones paralelas, que es la misma que la de una BPSK, pero provoca errores sólo en uno de los bits de entrada al codificador (el que va directamente al modulador 8-PSK), por lo que

$$BER \approx \frac{1}{2} Q \left(\sqrt{2 \left(\frac{E_s}{N_0} \right)_c} \right) = \frac{1}{2} Q \left(\sqrt{4 \left(\frac{E_b}{N_0} \right)_c} \right)$$

Para obtener la ganancia de codificación empleamos como referencia una modulación QPSK, cuya P_e viene dada por (4.83) y su BER será aproximadamente la mitad si empleamos codificación Gray. Igualando ambas BER y despreciando el término en Q^2 de (4.83)

$$Q\left(\sqrt{2\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{sc}}\right) = \frac{1}{2}Q\left(\sqrt{4\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_c}\right)$$

de donde, despreciando el factor $\frac{1}{2}$ e igualando los argumentos de la función Q obtenemos una ganancia de codificación

$$G = \frac{\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{sc}}{\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_c} = \frac{4}{2} \approx 3\text{dB}$$

En los códigos convolucionales resultaba extremadamente importante la forma en que combinábamos las entradas y sus versiones retardadas para formar las salidas del codificador, hasta tal punto que, como vimos en la Página 642, modificando un solo coeficiente pasábamos del mejor código posible a uno catastrófico. En los TCM no hemos prestado atención a la obtención de la salida del codificador convolucional porque asignábamos directamente símbolos de la constelación a cada rama del diagrama de rejilla, pero ¿hasta qué punto influye la forma en que construyamos la salida del convolucional?. La respuesta a esta pregunta la encontramos analizando cómo se realiza la correspondencia entre las ramas del diagrama de rejilla y los símbolos de la constelación. En primer lugar formamos la salida del convolucional y posteriormente en el modulador asignamos un símbolo de la constelación (o una subconstelación) a cada posible combinación de entrada. Para poder realizar la asignación de símbolos que hemos diseñado, el único requisito que debemos imponer al codificador convolucional es que proporcione salidas distintas para aquellas ramas que tienen asignados símbolos (o subconstelaciones) distintos.

Así, si sustituimos el código convolucional del codificador de la Figura 10.29, definido por una matriz generadora $\mathbf{G}(D) = [D^2 + 1 \ D^2 + D + 1]$ y que posee una $D_{min} = 5$ por el codificador con matriz generadora $\mathbf{G}(D) = [D + 1 \ D^2 + D + 1]$ cuya $D_{min} = 3$ aún es posible realizar la asignación definida en la Figura 10.33. Se deja como ejercicio al lector determinar la relación entre bits de salida del convolucional y subconstelaciones. Sin embargo, si empleamos un código con matriz generadora $\mathbf{G}(D) = [D^2 + 1 \ D + 1]$ no es posible realizar la asignación especificada en la Figura 10.33, cuya comprobación también se deja como ejercicio al lector.

Una última cuestión sobre el diseño de un TCM es la relativa al valor de k' (o, alternativamente, el número de bits que dejamos sin codificar) con el que obtenemos mejores prestaciones. Si no tuviésemos restricciones de complejidad en el decodificador, la mejor solución es $k' = k$ y tanta memoria como fuese necesaria para situarnos tan cerca del límite de la capacidad del canal como deseáramos. Sin embargo, el motivo que nos llevó a formular los TCM con bits sin codificar fue, precisamente, la limitación de la complejidad del decodificador y, en este caso, la determinación del valor de k' óptimo es tremadamente complejo. Podemos, eso sí, enumerar algunas reglas que nos dicta el sentido común:

- Para un k' dado, podemos ir aumentando la memoria del codificador convolucional hasta que D_{min} venga dominada por las transiciones paralelas. La mejor solución será, en general, esta última; es decir, la de menos memoria para la que D_{min} viene dominada por las transiciones paralelas.
- Para una memoria total del codificador dada, podemos partir de $k' = 1$ e ir incrementándolo hasta que D_{min} venga dominada por las transiciones no paralelas quedándonos, por lo general, con la penúltima solución; es decir, con el menor valor de k' para el que D_{min} viene dominada por las transiciones paralelas.

10.4.3. Otros TCM

Además de los códigos ya analizados existen otros TCM que son frecuentemente empleados en la práctica. Comenzamos presentando los TCM basados en códigos convolucionales sistemáticos y recursivos, que permiten conseguir buenas prestaciones empleando las reglas de Ungerboeck con constelaciones QAM y PSK (al contrario de lo que sucede cuando se emplean estos convolucionales en solitario) y una asignación sencilla entre las salidas del convolucional y los símbolos de las constelaciones. La representación esquemática de un codificador convolucional sistemático y recursivo de memoria total M_t con $k - k'$ bits sin codificar se muestra en la Figura 10.34. A diferencia de los códigos convolucionales no

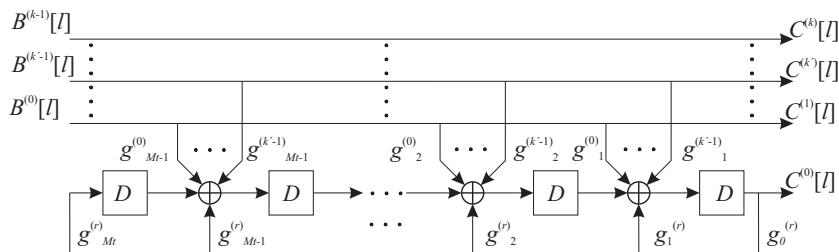


Figura 10.34. Representación esquemática de un código convolucional recursivo y sistemático genérico.

recursivos analizados hasta ahora, cuya respuesta impulsional era finita, los códigos convolucionales recursivos poseen una respuesta impulsional infinita.

La forma de diseñar estos códigos es mediante búsqueda exhaustiva de los valores de los coeficientes y la aplicación de las reglas de Ungerboeck. Nótese que ahora las transiciones del diagrama de rejilla no son siempre las mismas, sino que dependen de los coeficientes del código. En los Cuadros 10.14 y 10.15 se muestran los códigos convolucionales recursivos y sistemáticos que generan los mejores TCM y las ganancias de codificación empleando estos códigos sobre las modulaciones 8-PSK y 8, 16, 32 y 64-QAM para distintos valores de M_t y, salvo para $M_t = 2$, con 2 bits de entrada al convolucional ($k' = 2$). Para representar los coeficientes del codificador convolucional se ha empleado la notación $\mathbf{g}^{(i)} = \begin{bmatrix} g_M^{(i)} & \dots & g_1^{(i)} & g_0^{(i)} \end{bmatrix}$. A guisa de ejemplo, en la Figura 10.35 se muestra la representación esquemática del código convolucional recursivo y sistemático con $M_t = 4$ para modulaciones QAM.

M_t	$\mathbf{g}^{(r)}$	$\mathbf{g}^{(0)}$	$\mathbf{g}^{(1)}$	G (dB)
2	110	010	—	3,0
3	1001	0010	0100	3,6
4	10011	00010	01110	4,1
5	100101	001110	011100	4,6
6	1000110	0011110	0111100	4,8
7	10000011	00001100	00001110	5,0
8	100000101	010101000	001111110	5,4
9	1000000111	0001110100	00101100000	5,7

Cuadro 10.14. Códigos recursivos y sistemáticos para TCM con modulación 8-PSK y ganancia de codificación.

M_t	$\mathbf{g}^{(r)}$	$\mathbf{g}^{(0)}$	$\mathbf{g}^{(1)}$	G_8	G_{16}	G_{32}	G_{64}
2	110	010	—	2,0	3,0	2,8	3,0
3	1001	0010	0100	3,0	4,0	3,8	4,0
4	10011	00010	01110	3,8	4,8	4,6	4,8
5	100001	000110	001000	3,8	4,8	4,6	4,8
6	1000001	0001110	0011100	4,5	5,4	5,2	5,4
7	10000011	00001100	00100010	5,1	6,0	5,8	6,0
8	100000001	000101110	011101100	5,1	6,0	5,8	6,0

Cuadro 10.15. Códigos recursivos y sistemáticos para TCM con modulaciones QAM y ganancias de codificación empleado las constelaciones 8-QAM (G_8), 16-QAM (G_{16}), 32-QAM (G_{32}) y 64-QAM (G_{64}) (en dB).

El primer TCM que se incluía en un estándar de telecomunicación no era, sin embargo, ninguno de los analizados hasta ahora. Se trataba de un TCM basado en un codificador convolucional no lineal, y ese estándar era (y sigue siendo) la Recomendación V.32 de la ITU-T (*International Telecommunication Union, Telecommunication standardization sector*) para transmisión por canal vocal telefónico hasta velocidades de 9.600 bits/s [85].

Este codificador se muestra en la Figura 10.36, donde podemos apreciar, además de la presencia de multiplicadores entre bits que fuerzan el carácter no lineal del codificador,

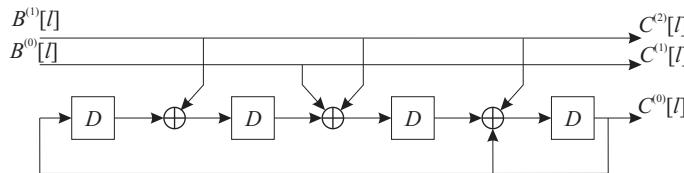


Figura 10.35. Codificador convolucional recursivo y sistemático de 4 retardos indicado en la tabla 10.14: $\mathbf{g}^{(r)} = 10011$, $\mathbf{g}^{(0)} = 00010$ y $\mathbf{g}^{(1)} = 01110$.

la existencia de un codificador diferencial¹⁷ con el propósito de hacer al TCM *invariante rotacionalmente* a rotaciones de múltiplos de $\pi/2$; esto es, que la decodificación de cualquier secuencia de símbolos de la forma $A[l]e^{jp\pi/2}$, siendo p un número entero, produce el mismo resultado sea cual sea el valor de p (véanse las modulaciones de fase diferencial del Apartado 7.1.3 para un tratamiento más general de la invarianza rotacional).

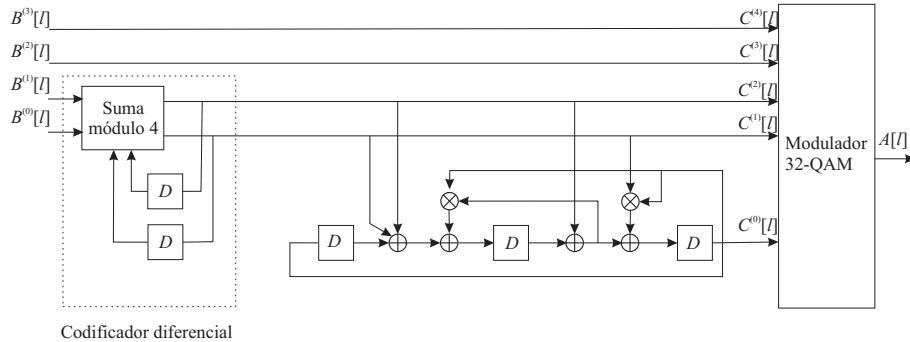


Figura 10.36. TCM para transmisión a 9.600 bits/s de la recomendación ITU-T V.32.

Para conseguir la invarianza rotacional es necesario en primer lugar que la constelación lo sea, como sucede en nuestro caso según podemos apreciar en la Figura 10.37: cualquier rotación de un múltiplo de $\pi/2$ da como resultado la misma constelación (obviamente, no con la misma asignación de bits a símbolos).

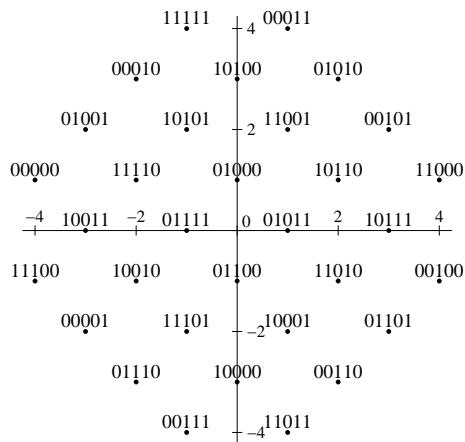


Figura 10.37. Constelación QAM para transmisión a 9.600 bits/s de la recomendación ITU-T V.32. La etiqueta sobre cada símbolo se corresponde con la asignación $C^{(4)}[l]C^{(3)}[l]C^{(2)}[l]C^{(1)}[l]C^{(0)}[l]$.

En segundo lugar es necesario que las subconstelaciones también lo sean; esto es, que

¹⁷Si denotamos por $B[l]$ y $C[l]$ dos secuencias sobre $GF(4)$ que formamos como, respectivamente, $B[l] = 2B^{(1)}[l] + B^{(0)}[l]$ y $C[l] = 2C^{(2)}[l] + C^{(1)}[l]$, el codificador diferencial realiza la operación $C[l] = B[l] + C[l - 1]$.

una subconstelación rotada cualquier múltiplo de $\pi/2$ sea otra subconstelación. Podemos comprobar en la Figura 10.38, donde se muestran las 8 subconstelaciones que genera el codificador de la Figura 10.36, que se cumple este segundo requisito.

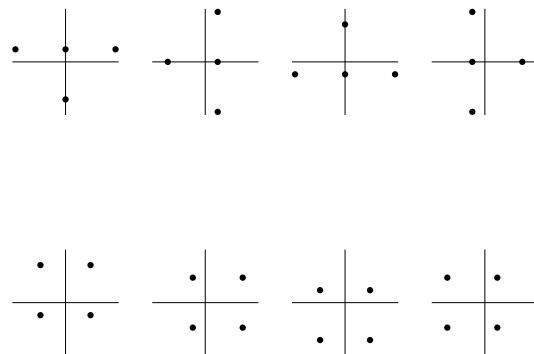


Figura 10.38. Subconstelaciones de la constelación de la Figura 10.37 obtenidas con el codificador de la Figura 10.36.

En tercer y último lugar, las asignaciones de subconstelaciones a la rejilla y de los bits sin codificar a los símbolos de las subconstelaciones se debe realizar de tal forma que una rotación de la secuencia de símbolos produzca la misma salida en el decodificador. La comprobación de la propiedad de invarianza rotacional del codificador de la Recomendación V.32 se deja para el Problema P10.20.

Para otras constelaciones QAM la invarianza rotacional requerida también es con respecto a múltiplos de $\pi/2$. En las constelaciones de tipo M -PSK, sin embargo, suele requerirse una invarianza rotacional con respecto a múltiplos de $2\pi/M$.

Hasta ahora nos hemos referido a TCM definidos sobre constelaciones PAM paso banda, pero es posible definir TCM sobre constelaciones definidas sobre espacios de dimensión más alta. Pensemos, por ejemplo, en un TCM definido sobre una constelación 16-QAM: esta constelación se puede considerar como concatenación (técticamente, el producto externo o cartesiano) de dos constelaciones 4-PAM en banda base. Si deseamos transmitir empleando una constelación 16-QAM y disponemos de un canal en banda de base podemos transmitir la parte real de cada símbolo como uno de una 4-PAM y la parte imaginaria como otro. Pues bien, si concatenamos dos símbolos 16-QAM tenemos una constelación de $16 \times 16 = 256$ puntos sobre un espacio de dimensión 4.

Esta posibilidad no es sólo un ejercicio académico, sino que se emplea en la práctica, como demuestra el hecho de que el módem para transmisión por canal vocal telefónico más avanzado, el que se especifica la Recomendación ITU-T V.34, [86], incluye un TCM sobre una constelación en un espacio de dimensión 4.

10.5. TÉCNICAS DE CODIFICACIÓN AVANZADA

Como se ha comentado con anterioridad en este capítulo, el factor limitante en la obtención de buenas capacidades de corrección de errores o de inmunidad frente al ruido es

la complejidad del decodificador. En los códigos convolucionales, la complejidad del algoritmo de Viterbi crece exponencialmente con la memoria total del convolucional. La mayor limitación de los decodificadores de los códigos bloque es su no optimalidad, ya que únicamente decodifican las palabras que tienen $t \leq \lfloor \frac{d_{\min}-1}{2} \rfloor$ errores y las demás las descartan como errores no decodificables. En el Apartado 10.2.6 se comprobó que estos códigos no se aproximan a la capacidad del canal conforme aumentan su tamaño y en el Apartado 10.5.2 mostraremos que la causa de este comportamiento es que el número de palabras posibles en recepción que se pueden decodificar con este tipo de decodificadores es una fracción muy pequeña del total de posibles palabras recibidas. Para poder aproximarnos al límite de Shannon habría que decodificar palabras con más de $\lfloor \frac{d_{\min}-1}{2} \rfloor$ errores, que en muchos casos únicamente tendrán una palabra código a mínima distancia y, por tanto, se podrán decodificar sin ambigüedad. Además, no existen decodificadores blandos eficientes para los códigos bloque estudiados, lo que limita su uso a canales digitales.

Los códigos que se estudian en este apartado se basan en el diseño de un decodificador subóptimo de carga computacional lineal en el número de bits recibidos y que son capaces de decodificar cualquier palabra recibida. Para que estos decodificadores subóptimos presenten una buena aproximación a la decodificación de máxima verosimilitud los codificadores se deben diseñar siguiendo ciertas restricciones que no permiten maximizar la distancia mínima. De hecho, para un tamaño de código dado, pueden tener una distancia mínima inferior a los códigos antes estudiados. A cambio, estos códigos aumentan su distancia mínima con el tamaño del código; en consecuencia, podemos emplear códigos tan grandes como deseemos porque la complejidad de estos códigos es lineal en el número de bits de mensaje. Es este incremento de distancia mínima el que nos va a permitir acercarnos a la capacidad del canal.

10.5.1. Códigos turbo

Los *códigos turbo*, o *turbo códigos* se construyen concatenando dos codificadores convolucionales a través de una memoria que recibe el nombre de *barajador de bits* (“*bit interleaver*”) en un esquema como el que muestra la Figura 10.39. Aunque la variedad de códigos turbo disponibles es mucho mayor, a efectos de facilitar la exposición nos centremos exclusivamente en códigos de tasa 1/3 basados en una concatenación en paralelo de codificadores convolucionales sistemáticos de tasa 1/2, que son los que muestra la figura. La decodificación se basa en el algoritmo BCJR, una generalización del algoritmo de Viterbi que realiza la detección MAP de cada bit de información (y no de la secuencia completa, como el algoritmo de Viterbi) dada toda la secuencia recibida. Como veremos, esta característica impone un funcionamiento como un código bloque, generando $n = 3k$ bits de salida por cada k de entrada, aunque los codificadores que emplee sean convolucionales. La idea que subyace a los códigos turbo es incrementar la memoria total del código mediante el empleo de un barajador, manteniendo acotada la complejidad del decodificador mediante el algoritmo BCJR. Antes de entrar en mayor detalle en los códigos turbo vamos a analizar los barajadores de bits y el algoritmo BCJR.

Los barajadores de bits se propusieron inicialmente para evitar los errores en ráfagas y no específicamente para los códigos turbo. En algunos sistemas de comunicaciones los

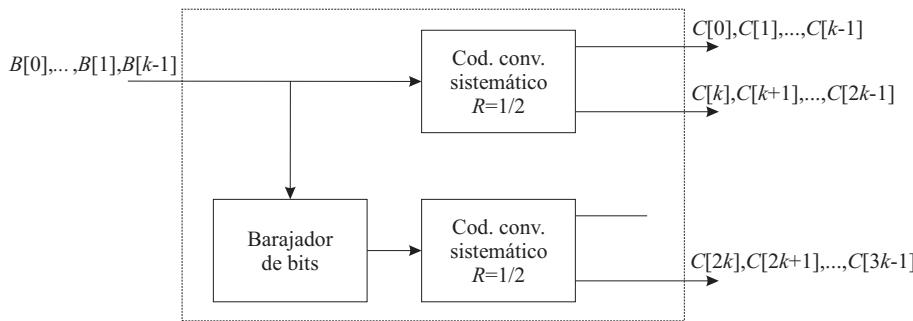


Figura 10.39. Representación esquemática de un código turbo genérico.

errores producidos por ciertos canales variantes en el tiempo de comunicaciones no son independientes bit a bit, y pueden existir instantes en los que la probabilidad de error de bit es sensiblemente superior a la media. Por ejemplo, en canales radio si tenemos un desvanecimiento no instantáneo de la señal, la probabilidad de error puede aumentar varios órdenes de magnitud durante un cierto intervalo de tiempo. Para evitar estas ráfagas de bit erróneos se emplean los barajadores de bit a la salida del codificador de canal. Si aparecen errores en ráfaga a la entrada del receptor, la operación inversa al barajador de bits (*desbarajador*) los presentará como errores no consecutivos al decodificador, que así será capaz de detectarlos y corregirlos. En la Figura 10.40 se muestra de forma esquemática el funcionamiento directo (transmisor) e inverso (receptor) de un barajador de bits de tipo matricial¹⁸.

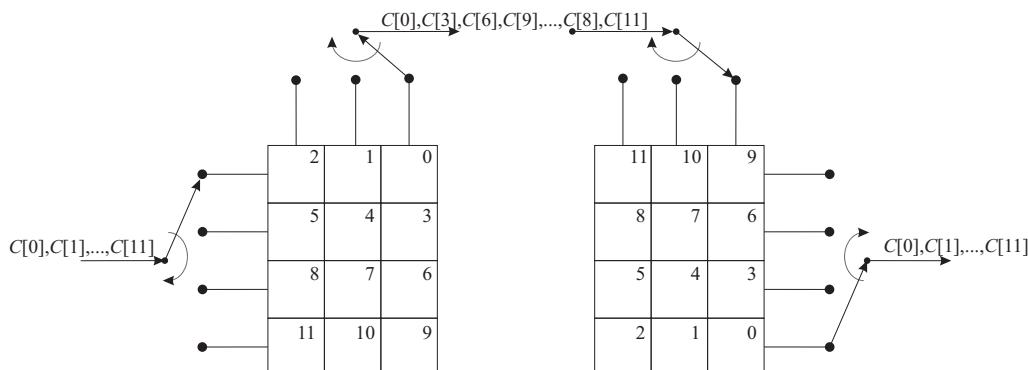


Figura 10.40. Representación esquemática de un barajador de bits de tipo matricial, operación directa (transmisor) e inversa (receptor).

En la figura podemos observar que si se produce una ráfaga de 4 errores consecutivos en los bits transmitidos que afectan a los 4 primeros bits (es decir, $C[0]$, $C[3]$, $C[6]$ y $C[9]$), a la salida del desbarajador del receptor estarán separados por dos bits correctos. En general,

¹⁸Existen otros barajadores como los convolucionales que presentan menos retardo que los bloques, y por ese motivo son frecuentemente empleados en sistemas de comunicaciones vía radio, pero raramente para construir códigos turbo.

en el supuesto de que se produce una única ráfaga, la longitud de la ráfaga máxima sin que se produzcan errores consecutivos vendrá determinada por el número de filas. El número de columnas nos indica la separación entre bits consecutivos en el canal de comunicaciones a la salida del desbarajador. El tamaño del barajador se tendrá que fijar como un compromiso entre la longitud de las ráfagas de errores y el retardo que se puede añadir. Además de barajadores de bits matriciales sistemáticos como el presentado en la Figura 10.40, existen otras estrategias distintas al relleno por filas y vaciado por columnas, tales como aleatorias o con distintos retardos para cada bit, aunque no profundizaremos en ellas en este texto.

Algoritmo BCJR

Como veremos, la decodificación de los códigos turbo se basa en el intercambio de mensajes entre los decodificadores correspondientes a cada uno de los dos convolucionales sobre cuan fiable es cada bit de información. Esta medida suele ser función de la probabilidad *a posteriori* de cada bit de información dada toda la secuencia recibida, es decir, $Pr\{b[l]|\mathbf{r}\}$, $l = 0, \dots, L - 1$, siendo L la longitud del bloque de bits de información. El algoritmo *BCJR*, nombrado así en honor a sus 4 autores: Bahl, Cocke, Jelinek y Raviv, calcula dicha probabilidad y decide la secuencia de bits transmitidos según el criterio MAP. Esta decisión minimiza la probabilidad de error de cada bit y no tiene por qué coincidir con la proporcionada por el algoritmo de Viterbi¹⁹, que minimiza la probabilidad de error sobre la secuencia transmitida completa.

Para facilitar la exposición del algoritmo BCJR vamos a considerar un código convolucional de tasa $1/n$, de modo que por cada rama del diagrama de rejilla transmitimos n símbolos. Además, supondremos que el estado inicial del convolucional es tal que comienza en el estado $\psi_0 \doteq (0, 0, \dots, 0)$ en el instante 0 y que finaliza en el mismo estado al cabo de $k + K - 3$ transiciones, siendo K la longitud de restricción del convolucional (véase Apartado 10.3). Recordemos que si la memoria total del código es M_t el número de estados es de 2^{M_t} . Vamos a centrarnos en el cálculo de la probabilidad *a posteriori* para un bit de información genérico $b[l]$ cuando se dispone de la secuencia recibida \mathbf{r} , es decir, $Pr\{b[l]|\mathbf{r}\}$. Como sabemos, el bit l -ésimo, junto con el estado del codificador $\psi[l]$ determinan por completo los n bits de salida $c[l]$ del codificador y el estado siguiente $\psi[l+1]$. Alternativamente, podemos calcular la probabilidad $Pr\{b[l] = 1\}$ sumando las probabilidades $Pr\{\psi[l], \psi[l+1]\}$ para todos aquellos pares de estados $(\psi[l], \psi[l+1])$ que en el diagrama de rejilla están conectados por una rama que se recorre cuando $b[l] = 1$. La situación descrita se puede entender mejor con la ayuda de la Figura 10.41, en la que las ramas correspondientes a $b[l] = 1$ se marcan con trazo continuo.

Por tanto, la probabilidad deseada se puede escribir como

$$Pr(b[l] = 1|\mathbf{r}) = \frac{\sum_{\substack{(\psi[l], \psi[l+1]) \\ b[l]=1}} f_{\psi', \psi, \mathbf{r}}(\psi[l], \psi[l+1], \mathbf{r})}{f_{\mathbf{r}}(\mathbf{r})} \quad (10.67)$$

¹⁹La explicación es muy similar a la que ofrecíamos en el Apartado 8.3.3 de por qué el detector conjunto multiusuario no minimizaba la probabilidad de error.

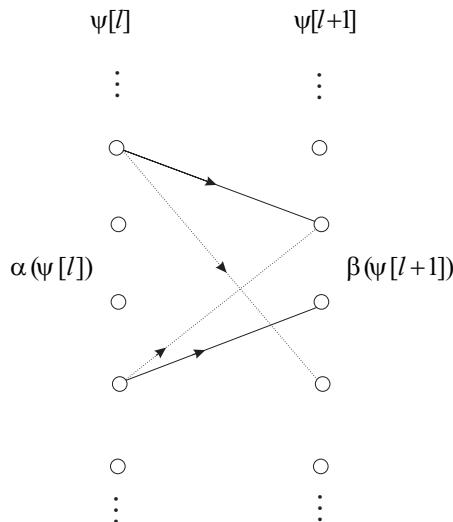


Figura 10.41. Diagrama de rejilla ilustrando algunas de las transiciones correspondientes a $b[l] = 1$ en trazo continuo y a $b[l] = 0$ en trazo discontinuo.

con una expresión análoga para el caso $b[l] = 0$. Como hemos señalado, la interpretación del sumatorio en (10.67) es como sigue: debemos sumar sobre todos aquellos pares de nodos $(\psi[l], \psi[l+1])$ tales que $b[l] = 1$. Como el convolucional es de tasa $1/n$ (un bit a la entrada) es fácil ver que de cada estado del diagrama sale una única transición cuando $b[l] = 1$, por lo que en (10.67) habremos de sumar 2^{M_t} términos, de cuyo cálculo nos ocuparemos a continuación. Por supuesto, idénticas consideraciones sirven para $b[l] = 0$. Dado que el divisor $f_r(r)$ no depende de $b[l]$, nos concentraremos exclusivamente en $f_{\psi', \psi, r}(\psi', \psi, r)$. Para una mayor claridad, en lo sucesivo, y salvo que se especifique lo contrario, prescindiremos de los subíndices en las fdp.

En breve veremos que es útil separar el vector recibido en tres partes: $r[l]$ denota la salida del canal cuando se transmiten los bits $C[l] \doteq [C^{(0)}[l], C^{(1)}[l], \dots, C^{(n-1)}[l]]$; $r_{<[l]} \doteq [r[0], \dots, r[l-1]]$ y $r_{>[l]} \doteq [r[l+1], \dots, r[k+K-3]]$. Obsérvese que $r_{<[l]}$ y $r_{>[l]}$ contienen las muestras recibidas correspondientes a las transiciones anteriores y posteriores, respectivamente, a la l -ésima. El vector con la secuencia recibida se puede escribir $r = [r_{<[l]}, r[l], r_{>[l]}]$. Alternativamente, si suponemos el cursor situado en el instante l , entonces $r_{<[l]}$ contiene las muestras precursoras y $r_{>[l]}$ las postcursoras.

Obsérvese que tanto para el BSC como para el canal gausiano con modulación binaria los tres vectores recién definidos son estadísticamente independientes (es más, sus compo-

nentes también lo son). Ahora podemos escribir:

$$\begin{aligned}
 f(\psi[l], \psi[l+1], \mathbf{r}) &= f(\psi[l], \psi[l+1], \mathbf{r}_{<[l]}, \mathbf{r}[l], \mathbf{r}_{>[l]}) \\
 &= f(\psi[l], \psi[l+1], \mathbf{r}_{<[l]}, \mathbf{r}[l]) \cdot f(\mathbf{r}_{>[l]} | \psi[l], \psi[l+1], \mathbf{r}_{<[l]}, \mathbf{r}[l]) \\
 &= f(\psi[l], \mathbf{r}_{<[l]}) \cdot f(\psi[l+1], \mathbf{r}[l] | \psi[l], \mathbf{r}_{<[l]}) \\
 &\quad \cdot f(\mathbf{r}_{>[l]} | \psi[l], \psi[l+1], \mathbf{r}_{<[l]}, \mathbf{r}[l]) \\
 &= f(\psi[l], \mathbf{r}_{<[l]}) \cdot f(\psi[l+1], \mathbf{r}[l] | \psi[l]) \cdot f(\mathbf{r}_{>[l]} | \psi[l+1])
 \end{aligned} \tag{10.68}$$

donde la última línea es consecuencia de que dado $\psi[l]$, se tiene que $\psi[l+1]$ y $\mathbf{r}[l]$ no dependen de $\mathbf{r}_{<[l]}$ y, análogamente, dado $\psi[l+1]$, se tiene que $\mathbf{r}_{>[l]}$ tampoco depende de $\mathbf{r}_{<[l]}$, de $\mathbf{r}[l]$ ni de $\psi[l]$.

Como vemos en (10.69), la probabilidad deseada se puede descomponer en tres términos que denotaremos respectivamente por $\alpha(\psi[l])$, $\gamma(\psi[l], \psi[l+1])$ y $\beta(\psi[l+1])$. El primero es proporcional a la probabilidad de estar en el estado $\psi[l]$ dada la secuencia precursora; el tercero es la probabilidad de recibir la secuencia postcursora cuando el codificador se encuentra en el estado $\psi[l+1]$; finalmente, el segundo se corresponde con la probabilidad de recibir $\mathbf{r}[l]$ y pasar al estado $\psi[l+1]$ cuando el codificador está en el estado $\psi[l]$.

Como cabe suponer, para construir el algoritmo BCJR se necesita encontrar una forma recursiva en l de escribir tanto $\alpha(\psi[l])$ como $\beta(\psi[l+1])$. Así, para $l = 0, \dots, k+K-3$,

$$\begin{aligned}
 \alpha(\psi[l+1]) &= f(\psi[l+1], \mathbf{r}_{<[l+1]}) = \sum_{\psi[l]} f(\psi[l+1], \psi[l], \mathbf{r}_{<[l+1]}) \\
 &= \sum_{\psi[l]} f(\psi[l], \mathbf{r}_{<[l]}) \cdot f(\psi[l+1], \mathbf{r}[l] | \psi[l], \mathbf{r}_{<[l]}) \\
 &= \sum_{\psi[l]} f(\psi[l], \mathbf{r}_{<[l]}) \cdot f(\psi[l+1], \mathbf{r}[l] | \psi[l]) \\
 &= \sum_{\psi[l]} \alpha(\psi[l]) \gamma(\psi[l], \psi[l+1])
 \end{aligned} \tag{10.69}$$

define la llamada *recursión hacia adelante*, que se inicializa con $\alpha(\psi[0]) = 1$ para $\psi[0] = \psi_0$ y $\alpha(\psi[0]) = 0$ si $\psi[0] \neq \psi_0$.

Un desarrollo similar lleva a concluir que

$$\beta(\psi[l]) = \sum_{\psi[l+1]} \beta(\psi[l+1]) \gamma(\psi[l], \psi[l+1]) \tag{10.70}$$

que se inicializa con $\beta(\psi[n+K-2]) = 1$ para $\psi[k+K-2] = \psi_0$ y $\alpha(\psi[k+K-2]) = 0$ si $\psi[k+K-2] \neq \psi_0$. La Ecuación (10.70) define la denominada *recursión hacia atrás*. A la vista de la construcción del algoritmo, se puede entender fácilmente el nombre de *adelante-atrás* (“forward-backward”) con el que también se conoce.

Es interesante identificar los tres términos que hemos definido con el algoritmo de Viterbi: $\alpha(\psi[l])$ es similar a la métrica acumulada hasta el nodo $\psi[l]$ en dicho algoritmo. De

todas formas, mientras el algoritmo de Viterbi almacena la forma más verosímil de llegar hasta dicho nodo, el BCJR guarda la probabilidad (promedio sobre todas las secuencias posibles) de estar en $\psi[l]$. A su vez, el término $\gamma(\psi[l], \psi[l+1])$ se parece a la métrica de rama empleada en el algoritmo de Viterbi. Por lo que respecta al término $\beta(\psi[l+1])$, que permite recorrer hacia atrás el diagrama de rejilla, no tiene equivalente en el algoritmo de Viterbi. Otra diferencia importante es que el algoritmo BCJR necesita haber recibido toda la secuencia para poder comenzar a operar, mientras que en el algoritmo de Viterbi era posible el uso de una cierta profundidad de truncamiento, que equivalía a un enventanado de la secuencia recibida. Este enventanado permite una decodificación que, aunque subóptima, evita tener que esperar a recibir toda la secuencia (véase Apartado 6.2.2).

Hasta ahora hemos explicado cómo se pueden calcular las probabilidades *a posteriori* utilizando el algoritmo BCJR. Una vez éstas están disponibles, la secuencia de bits decodificados $\hat{\mathbf{b}} = [\hat{b}[0], \hat{b}[1], \dots, \hat{b}[k-1]]$ se obtiene según la regla MAP, es decir,

$$\hat{b}[l] = \begin{cases} 1, & \text{si } Pr(b[l] = 1 | \mathbf{r}) > Pr(b[l] = 0 | \mathbf{r}) \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad l = 0, 1, \dots, k-1 \quad (10.71)$$

Es interesante ver que en todos aquellos canales cuyo efecto sobre cada símbolo transmitido es estadísticamente independiente de los demás, es posible descomponer $\gamma(\psi[l], \psi[l+1])$ como:

$$\begin{aligned} \gamma(\psi[l], \psi[l+1]) &= f(\mathbf{r}[l] | b[l]) \cdot p(b[l]) \\ &= f(r^{(0)}[l] | b[l]) \cdot \prod_{i=1}^{n-1} f(r^{(i)}[l] | c^{(i)}[l]) \cdot p(b[l]) \end{aligned} \quad (10.72)$$

siempre que en el diagrama de rejilla haya una rama que conecta $\psi[l]$ y $\psi[l+1]$, mientras que si dicha rama no existe $\gamma(\psi[l], \psi[l+1]) = 0$. Para escribir la segunda línea de (10.72) hemos tenido en cuenta que el código es sistemático, por lo que $C^{(0)}[l] = B[l]$.

Sustituyendo (10.72) en (10.67) obtenemos una expresión para la probabilidad *a posteriori* deseada como

$$\begin{aligned} Pr\{b[l] = 1 | \mathbf{r}\} &= C_0 Pr\{b[l] = 1\} \cdot f(r^{(0)}[l] | b[l] = 1) \\ &\cdot \sum_{\substack{(\psi[l], \psi[l+1]) \\ b[l]=1}} \alpha(\psi[l]) \beta(\psi[l+1]) \prod_{i=1}^{n-1} f(r^{(i)}[l] | c^{(i)}[l]) \end{aligned} \quad (10.73)$$

donde $C_0 \doteq 1/f(\mathbf{r})$ es una constante (no depende de $b[l]$). El bit decodificado es aquél que maximiza la probabilidad $p(b[l] | \mathbf{r})$ de acuerdo con (10.73) y la expresión análoga para el caso $b[l] = 0$.

La Ecuación (10.73) admite una interesante interpretación como producto de tres términos (descartando C_0): el primero refleja la probabilidad a priori del bit de información; el segundo recoge la influencia del canal sobre el bit de información (recuérdese que este bit

sale del convolucional por ser sistemático); finalmente, el tercero tiene en cuenta los bits de paridad y la propia composición de probabilidades en la rejilla. En principio podría parecer que la primera probabilidad es irrelevante, ya que sin otra información a priori, es razonable hacer que $Pr\{b[l] = 1\} = Pr\{b[l] = 0\} = 1/2$. Sin embargo, veremos que cuando tenemos un código turbo, el intercambio de información entre los dos decodificadores se produce precisamente a través de esta probabilidad a priori.

Obsérvese que tanto el canal BSC como el gausiano cumplen las condiciones que permiten llegar a (10.72). De hecho, es posible escribir una expresión cerrada para las probabilidades condicionales que aparecen en (10.73). Así, en el canal BSC con probabilidad de cruce p , r es un vector binario y, por ejemplo, $p(r^{(0)}[l] | b[l])$ es $1 - p$ cuando $r^{(0)}[l] = b[l]$ y p en otro caso. Para un canal gausiano con entradas binarias antipodales y varianza σ^2

$$f(r^{(0)}[l] | b[l]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(r^{(0)}[l] - a[l])^2 / 2\sigma^2} \quad (10.74)$$

donde $a[l]$ es el símbolo antipodal correspondiente al bit de información $b[l]$. Para los bits de paridad se pueden escribir expresiones completamente análogas.

Aquí encontramos otra diferencia importante con el algoritmo de Viterbi para decodificación de códigos convolucionales: para poder aplicar el algoritmo BCJR necesitamos conocer la probabilidad de transición si vamos a transmitir sobre el BSC, y la varianza del ruido (equivalentemente, la relación señal a ruido) si la transmisión se realiza sobre el canal gausiano. Esta información sobre el canal no es necesaria en el algoritmo de Viterbi.

Decodificación de los códigos turbo

La codificación de los códigos turbo se realiza como la de los códigos convolucionales: los bits a transmitir se codifican con el primer código a la vez que se emplean para llenar la memoria del barajador de bits. Cuando el barajador ha llenado la memoria, se pasan a codificar los bits de información con el segundo convolucional con el orden proporcionado por el barajador de bits. Por cada bit de información generamos 3 bits (véase Figura 10.39). Los k primeros son los bits de información ($b[l]$, $l = 0, \dots, k - 1$) ya que estamos empleando un código sistemático. Los siguientes k son los de redundancia del primer código convolucional y los últimos k son los de redundancia del segundo código convolucional. Los bits de información se comparten por ambos códigos convolucionales pero en distinto orden.

La decodificación de los códigos turbo emplea dos decodificadores BCJR encadenados: primero empleamos el algoritmo BCJR con los primeros $2k$ bits recibidos correspondientes al primer codificador. Obsérvese que, de acuerdo con la notación establecida, el primer decodificador emplea $r^{(0)}[l] = r[l]$ y $r^{(1)}[l] = r[k + l]$, con $l = 0, \dots, k - 1$. Aunque en principio el decodificador BCJR nos proporcionaría la probabilidad $p(b[l] | r[0], \dots, r[k - 1], r[k], r[k + 1], \dots, r[2k - 1])$, en realidad estamos más interesados en la información de fiabilidad que nos proporcionan los bits de redundancia. Esto es así porque suponemos que a priori los bits de información son equiprobables y porque el segundo decodificador va a tener también acceso a la parte de la señal recibida correspondiente a los bits de información, véase (10.73). En otras palabras, la información “nueva” que el segundo decodificador va a

demandar del primero es la que depende de los bits de redundancia²⁰. A esta información se le llama extrínseca (desde el punto de vista del segundo decodificador) y viene dada por

$$Pr\{b[l] = 1|r[0], \dots, r[2k-1]\} = C_1 \sum_{\substack{(\psi[l], \psi[l+1]) \\ b[l]=1}} \alpha(\psi[l])\beta(\psi[l+1])f(r[k+l]|c[k+l]) \quad (10.75)$$

para todo $l = 0, \dots, k-1$ y con C_1 constante.

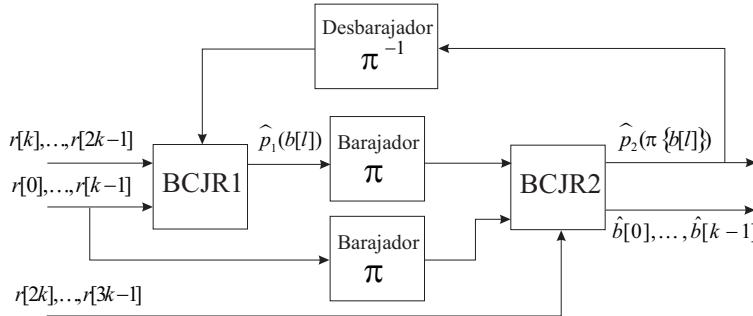


Figura 10.42. Diagrama de bloques de un decodificador turbo. Las probabilidades de salida del BCJR2 se inicializan de modo que $\hat{p}(b[l]) = 1/2$, para todo $l = 0, \dots, k-1$.

Un cálculo análogo serviría para obtener la información extrínseca para el caso $b[l] = 0$. La información extrínseca (tanto para $b[l] = 0$ como para $b[l] = 1$) se pasa al segundo decodificador, que ahora la utiliza como probabilidades *a priori* de los bits de información. Para ello es necesario barajarlas, de modo que el segundo decodificador las encuentre en el mismo orden que las muestras de la señal recibida, véase Figura 10.42. Ahora el segundo decodificador emplea el algoritmo BCJR con la asignación $r^{(0)}[l] = \pi\{r[l]\}$ y $r^{(1)}[l] = r[2k+l]$, $l = 0, \dots, k-1$ y extrae la información “nueva” para el primer decodificador a partir de los bits de redundancia, donde $\pi\{\cdot\}$ denota la operación del barajador. Lo que se entrega en esta ocasión al primer decodificador como información extrínseca es una estimación de la probabilidad $p(b[l]|r)$ para lo que ahora ya se ha empleado directa o indirectamente (a través del primer decodificador) toda la secuencia recibida. Esta información se obtiene para $b[l] = 1$ como

$$\begin{aligned} \hat{p}_2(b[l] = 1) &\doteq \widehat{Pr}(b[l] = 1|r) \\ &= C_2 \sum_{\substack{(\psi[l], \psi[l+1]) \\ \pi\{b[l]\}=1}} \alpha(\psi[l])\beta(\psi[l+1])f(\pi\{r[2k+l]\}|\pi\{c[2k+l]\}) \end{aligned} \quad (10.76)$$

para todo $l = 0, \dots, k-1$ y con C_2 constante. La información extrínseca del segundo decodificador se emplea (después de haberla desbarajado) como probabilidades *a priori* para el primer decodificador BCJR, que va a refinar su estimación $\hat{p}_1(b[l])$ de $p(b[l]|r)$ y que a su

²⁰En todo caso, obsérvese que para la operación del algoritmo BCJR se necesita la secuencia recibida desde $r[0]$ hasta $r[2k-1]$, no sólo la correspondiente a los bits de redundancia.

vez servirá como información extrínseca para el segundo decodificador, y así sucesivamente. El principio de funcionamiento recuerda a los motores “turbocomprimidos” en los que los gases de escape del motor sirven para mover una turbina que comprime el aire admitido en los cilindros y por tanto da entrada a un mayor volumen de combustible, lo que en definitiva hace que aumente la potencia. En cualquier caso la denominación *códigos turbo* es algo desafortunada, ya que lo que si cabe es “turbo” es únicamente la decodificación. Por esta razón, en muchas ocasiones se habla de *códigos concatenados en paralelo*²¹ (lo que el codificador de la Figura 10.39 es en realidad) y de *decodificación iterativa* o *decodificación turbo*.

El proceso iterativo habrá convergido cuando las probabilidades *a posteriori* estimadas por ambos decodificadores estén próximas. La secuencia de bits de información decodificados $\hat{b}[0], \dots, \hat{b}[k-1]$ es la estimada por el segundo decodificador empleando la información extrínseca procedente del primero y la influencia del canal sobre los bits de información y de redundancia del segundo codificador.

Es importante señalar que la decodificación turbo no es óptima porque el codificador turbo se puede ver como un gran codificador bloque en el que entran k bits y salen $n = 3k$ bits. Un decodificador óptimo debería considerar el codificador como una gran matriz de codificación G y obtener los bits transmitidos comparando los n bits recibidos con las 2^k secuencias posibles. Para valores típicos de k (mayor de 1000 bits) la decodificación óptima es inviable. También se puede observar que el codificador no es óptimo porque no se ha diseñado maximizando la distancia mínima, sino concatenando dos convolucionales. Probablemente un código del mismo tamaño construido para maximizar la distancia mínima proporcionaría mejores prestaciones que los códigos turbo si fuésemos capaces de decodificarlo. Aún así el empleo de esta aproximación nos permite usar códigos de gran tamaño y mejores prestaciones que los códigos previamente estudiados.

Antes de completar esta sección con varios ejemplos de códigos turbo vamos a tratar de entender intuitivamente por qué la decodificación turbo proporciona una gran ganancia en decodificación. En estos códigos cada bit de información que se codifica a través de 2 códigos de tasa 1/2 está rodeado por bits diferentes en cada código gracias al barajador. Si una parte de la secuencia recibida tiene mucho ruido y las probabilidades *a posteriori* de los bits de información no proporcionan una evidencia clara sobre el valor del bit transmitido ($\hat{p}_1(b[l] = 1) \simeq 0,5$), pero en el segundo codificador la probabilidad de este bit es mucho más clara (por ejemplo, $\hat{p}_2(b[l] = 1) \simeq 1$), al enviar esta información al primer codificador va a permitir mejorar las estimaciones de probabilidad de los bits a su alrededor, que tienen vecinos diferentes en el segundo codificador, que a su vez se van a beneficiar de esta información en las iteraciones futuras.

La decodificación de los códigos turbo recuerda a un “efecto dominó” en el que los bits más fiables (aquellos con probabilidades *a posteriori* próximas a 0 ó a 1) fuerzan a los bits de su alrededor a tomar valores acordes con estas probabilidades para cumplir las

²¹Existen también códigos concatenados en serie cuyo principio de decodificación iterativa es similar al expuesto aquí. Un ejemplo sencillo de códigos concatenados en serie lo constituyen los códigos RA, que presentamos más adelante en este mismo apartado.

restricciones de la rejilla. El barajador consigue que esta fiabilidad se comparta por todos los bits al esparcir los bits de información entre los dos códigos. Al realizar la iteración entre los decodificadores de los dos convolucionales, el algoritmo de decodificación permite que la gran fiabilidad de algunos bits se extienda a todos los bits de información y que después de varias iteraciones (del orden de decenas) se obtengan estimas de muy alta calidad para toda la secuencia de información con probabilidades de error muy bajas a la salida del decodificador, incluso para relaciones señal a ruido bajas.

Códigos de repetición y acumulación

Los códigos RA (“Repeat and Accumulate”), como su propio nombre indica, repiten cada bit a transmitir 3 veces, a continuación barajan los bits de salida empleando un barajador aleatorio, y el resultado se transmite finalmente empleando un codificador diferencial (acumulador). El esquema de codificación para estos códigos se muestra en el Figura 10.43.

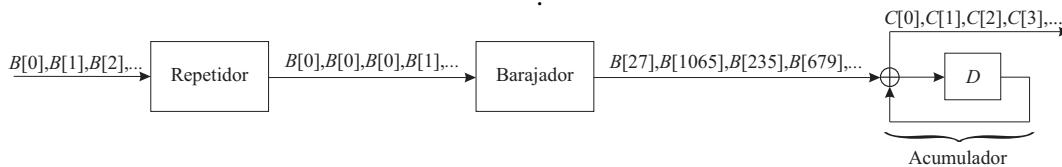


Figura 10.43. Esquema de un código RA.

En el receptor, los bits recibidos primero se decodifican con un BCJR para el codificador diferencial y después se pasan por el desbarajador para ver si las estimas de los 3 bits correspondientes a cada bit de mensaje son idénticas. Si no lo son, se estiman las probabilidades *a posteriori* de cada bit de información y se reenvían al decodificador BCJR correspondiente al codificador diferencial. La decodificación BCJR del código de repetición es sumamente sencilla, ya que al no tener memoria, las probabilidades *a posteriori* se calculan como el producto de las probabilidades individuales correspondientes a cada bit de salida del código de repetición. La operación descrita se repite hasta que los 3 bits estimados para cada bit de información sean consistentes. A pesar de su sencillez estos códigos son capaces de acercarse a la capacidad de canal para los canales gaussianos con entrada digital y para los canales digitales binarios.

En la Figura 10.44 se muestra la *BER* para estos códigos RA con, respectivamente, decodificación blanda y dura. En las dos gráficas se puede comprobar cómo las prestaciones del código mejoran con el tamaño y cuando este es muy grande (superior a 10.000 bits) los RA son capaces de reducir la *BER* tanto como deseemos para E_b/N_0 en torno a 0,6 dB. Para canales digitales binarios estos códigos pueden reducir la *BER* tanto como queramos para probabilidades de error inferiores a 0,14. Para estos canales la capacidad del canal es 0,4 bits por uso de canal (observemos que la tasa de estos códigos es $R = 1/3$).

Los códigos RA se propusieron como una extensión a los códigos turbo que permitiese realizar análisis teóricos de sus prestaciones, algo que no es posible en otras configuraciones

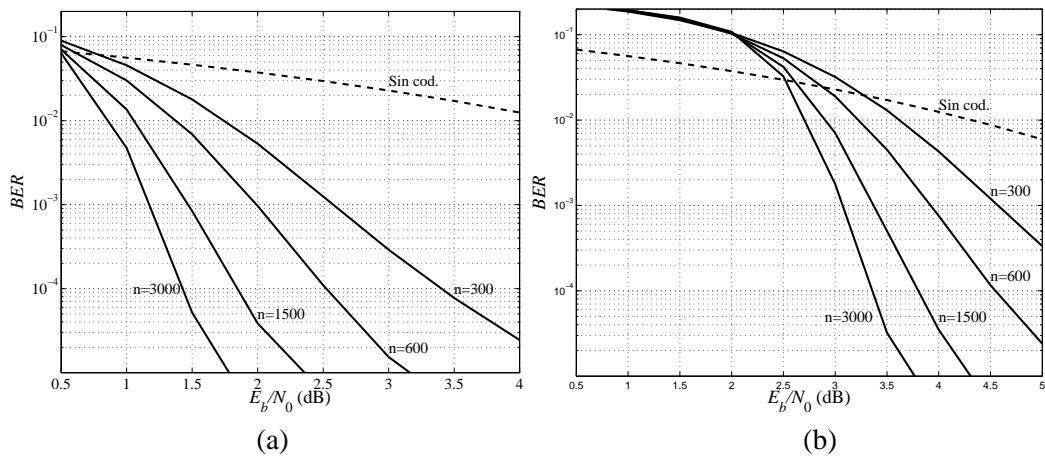


Figura 10.44. BER en función de E_b/N_0 para códigos RA con decodificación blanda (a) y dura (b).

más complejas. Pero sus prestaciones son muy competitivas con respecto a los códigos turbo y han ido reemplazando a éstos por sus buenas prestaciones y sencillez.

10.5.2. Códigos LDPC

En este apartado se presenta una familia de códigos bloque con una baja densidad de “unos” en la matriz de comprobación de paridad, por lo que reciben el nombre de *códigos de comprobación de paridad de baja densidad* (“Low-Density Parity-Check”, LDPC). Esta familia permite trabajar con matrices generadoras del código de gran tamaño (k y n pueden ser decenas de miles de bits), ya que su algoritmo de decodificación es de baja carga computacional. El decodificador de estos códigos obtiene una aproximación a la probabilidad *a posteriori* $p_{C|r}(c[l]|r)$, $l = 0, \dots, n - 1$, de los bits de salida del codificador dada la secuencia recibida. El procedimiento de decodificación es una instancia de la llamada *propagación de la creencia* (“belief propagation”), de la que la decodificación BCJR también puede considerarse un caso particular. La calidad de la aproximación y la carga computacional del algoritmo dependen en gran medida de la existencia de una baja densidad de “unos” en la matriz H . También se puede demostrar que los códigos LDPC presentan buenas propiedades de distancia mínima y resultan competitivos con los ya presentados en términos de protección contra errores y de carga computacional asociada.

Justificación

En la primera parte de este capítulo presentamos los códigos bloques y estudiamos cómo construir códigos bloques de cualquier distancia mínima asegurando una tasa de codificación lo mayor posible (teorema BCH). Dichos códigos se pueden decodificar de forma eficiente (lineal con la distancia mínima mediante el algoritmo de Berlekamp-Massey), lo que nos permitía construir códigos bloques de gran tamaño. Es pertinente preguntarse entonces por

qué estos códigos bloque no nos permiten acercarnos a la capacidad del DMC. La respuesta es que la “no perfección” de los códigos bloque en general y la de los cíclicos en particular constituye el principal obstáculo. Cuando presentamos los códigos bloque hablamos de los códigos perfectos, que eran aquéllos en los que todas las posibles palabras recibidas se encontraban a lo sumo a una distancia de Hamming $\lfloor \frac{d_{\min}-1}{2} \rfloor$ de alguna palabra código. Entonces señalamos que, por desgracia, el número de códigos perfectos disponibles era muy reducido (únicamente disponemos de la familia de códigos Hamming y del código Golay) por lo que se hacía necesario emplear códigos no perfectos para conseguir otras tasas de codificación y otras distancias mínimas.

Podría pensarse que otros códigos bloque presentados a lo largo del capítulo son casi perfectos, en el sentido de que existen pocas posibles palabras recibidas a distancia mayor de $\lfloor \frac{d_{\min}-1}{2} \rfloor$ de alguna palabra código, por lo que una decodificación limitada exclusivamente a aquellas palabras recibidas con no más de $\lfloor \frac{d_{\min}-1}{2} \rfloor$ errores arrojaría resultados casi idénticos a la de máxima verosimilitud. Desgraciadamente, la realidad es bien distinta y los códigos cíclicos estudiados, incluyendo los Reed-Solomon, son altamente imperfectos, de modo que los decodificadores que corrigen $\lfloor \frac{d_{\min}-1}{2} \rfloor$ o menos errores, están muy lejos de la decodificación de máxima verosimilitud. Como ejemplo de la imperfección de la que hablamos, tomemos el código BCH binario (63, 30) con $d_{\min} = 13$, que corrige hasta 6 errores. El número de palabras posibles en recepción es 2^{63} y el número de palabras decodificables es $2^{30} \sum_{i=0}^6 \binom{63}{i} \simeq 2^{56,2}$. Para este código la fracción de palabras decodificables sobre el total de las posibles es $2^{56,2}/2^{63} = 2^{-6,8}$, que únicamente supone el 0,89 % del total. Otro ejemplo es el de un código RS (63, 51), con $d_{\min} = 13$, para el que la fracción de palabras decodificables baja a un 0,01 % de todas las posibles.

En la Figura 10.45 se muestra para varios códigos BCH binarios la fracción de las palabras recibidas que se pueden corregir por un decodificador limitado a $\lfloor \frac{d_{\min}-1}{2} \rfloor$ errores para distintas longitudes de código y tasas de codificación. Como se observa, muy pocos códigos decodifican una fracción significativa de las palabras recibidas a excepción de los códigos Hamming (los de mayor tasa para cada n). En el siguiente ejemplo se muestra la diferencia en términos de *BER* entre utilizar decodificador limitado a $\lfloor \frac{d_{\min}-1}{2} \rfloor$ errores (algoritmo de Berlekamp-Massey) y uno de máxima verosimilitud para todas las palabras código.

Ejemplo 10.24

Se va a decodificar el código BCH binario (127, 8) que tiene una distancia mínima $d_{\min} = 63$ y es capaz de corregir todas las palabras de hasta 31 errores con el algoritmo de Berlekamp-Massey. Se ha elegido este código por dos motivos: porque se puede realizar un decodificador de máxima verosimilitud midiendo la distancia Hamming entre la palabra recibida y todas las palabras código (existen solo 256) y porque la fracción de palabras no decodificadas por el algoritmo de Berlekamp-Massey es 0,9999992.

En la Figura 10.46 se puede comprobar que la diferencia en la probabilidad de error es de cuatro órdenes de magnitud (para $E_b/N_0 = 8$ dB) y emplear un decodificador limitado a $\lfloor \frac{d_{\min}-1}{2} \rfloor$ errores desaprovecha gran parte de la capacidad de decodificación de los códigos empleados.

El ejemplo anterior es ilustrativo de lo que se pierde por emplear un decodificador li-

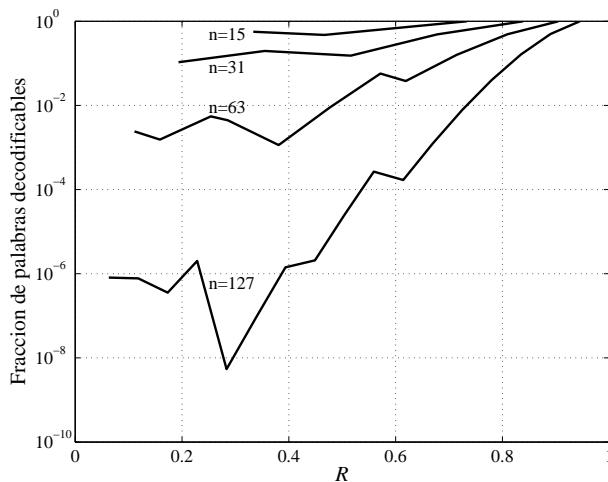


Figura 10.45. Fracción de palabras recibidas que se pueden decodificar con el algoritmo de Berlekamp-Massey.

mitado a $\lfloor \frac{d_{\min}-1}{2} \rfloor$ errores, pero el empleo de un decodificador de máxima verosimilitud no supone una solución al problema porque su complejidad crece exponencialmente con el número bits del mensaje, lo que limita su uso a códigos con muy pocas palabras código. La diferencia entre la probabilidad de error de bit entre ambos decodificadores aumenta conforme disminuye la fracción de palabras recibidas que el algoritmo de Berlekamp-Massey es capaz de decodificar. Conforme aumenta n para una tasa de codificación dada esta fracción disminuye (véase Figura 10.45), por lo que la decodificación de códigos bloque de gran tamaño mediante el algoritmo de Berlekamp-Massey supone una gran pérdida de la capacidad correctora presente en el código original y que sólo es alcanzable con la decodificación ML. Naturalmente, la mayor limitación de la decodificación de máxima verosimilitud es su carga computacional, ya que necesita una tabla con las 2^k palabras código o, en su defecto, una tabla con 2^{n-k} síndromes, cifras ambas que crecen exponencialmente con n para un código de tasa fija, por lo que la decodificación ML sólo es práctica para códigos de tasas próximas a 1 o a 0. En resumen, la limitación de los códigos bloques cíclicos no se debe a su capacidad protectora sino a que el algoritmo de decodificación es insuficiente para aprovechar dicha capacidad. Es por ello que cobra sentido buscar otros algoritmos de decodificación que proporcionen una aproximación a la decodificación ML, para lo que se puede pensar en esquemas iterativos, a semejanza de los decodificadores para códigos turbo o RA.

Algoritmo de paso de mensajes

Para la exposición del algoritmo de paso de mensajes vamos a emplear una herramienta conocida como *grafo de Tanner* que sirve para representar de forma gráfica la estructura de un código bloques. Los nodos del grafo de Tanner separan en dos conjuntos los bits de la palabra recibida y el resultado de las ecuaciones de comprobación de paridad (síndrome). Los nodos del primer tipo se conocen como *nodos variables* y los del segundo *nodos de paridad*.

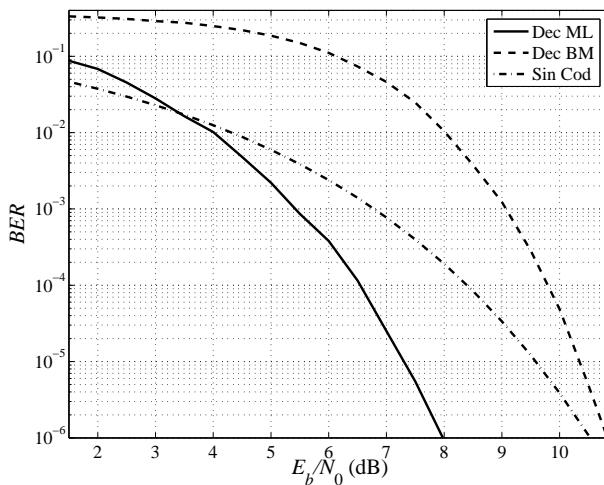


Figura 10.46. BER en función de la relación señal a ruido para el código BCH binario (127,8) decodificado con el algoritmo Berlekamp-Massey (Dec BM) y la decodificación de máxima verosimilitud (Dec ML).

comprobación. Para un código (n, k) el número de nodos variables es n y el número de nodos de comprobación es $n - k$. La construcción de un grafo de Tanner es inmediata a partir de la matriz de comprobación de paridad \mathbf{H} : basta con ver que el nodo de comprobación $f[i]$ estará conectado con el nodo variable $c[l]$ ²² si y sólo si el elemento (i, l) de la matriz \mathbf{H} toma el valor 1, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 10.25

Sea un código $(5, 2)$ con matriz de comprobación de paridad

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

cuyo grafo de Tanner se representa en la Figura 10.47, con los nodos variables como círculos y los de comprobación como cuadrados. En el nodo de comprobación $f[0]$ se implementa la ecuación $f[0] = c[0] + c[1] + c[3]$, donde las sumas se efectúan en $GF(2)$.

En general, los nodos de comprobación (representados como cuadrados en la Figura 10.47) realizan la suma de los nodos variables conectados con aquéllos. La decodificación se basa en el paso de mensajes de los nodos variables a los de comprobación y viceversa. Vamos a ilustrar el principio de funcionamiento de dicho algoritmo de con una especie de versión binaria del mismo conocida como *volteo de bits* (“bit-flipping”). En la primera fase del algoritmo de volteo de bits los nodos variables envían un mensaje con su contenido a los nodos de comprobación. Al principio, cada nodo variable contiene el bit correspondiente de

²²Con un cierto abuso de notación, utilizaremos $c[l]$ para denotar el l -ésimo nodo variable y el l -ésimo bit de una palabra código. La razón es que a menudo usaremos el grafo de Tanner para verificar propiedades que deben cumplir las palabras código.

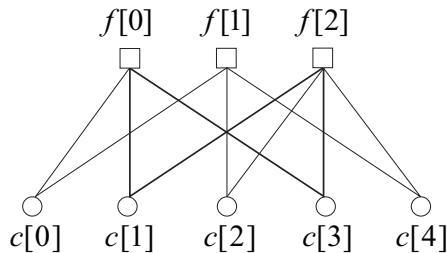


Figura 10.47. Grafo de Tanner del Ejemplo 10.25.

la palabra recibida r . En la segunda etapa, cada nodo de comprobación $f[i]$ envía a cada nodo variable $c[l]$ conectado con él el valor que cree que debería tomar para que se cumpliese la ecuación de paridad que en aquél se implementa. Por supuesto, si todas las ecuaciones de comprobación de paridad se satisfacen simultáneamente (es decir, si todos los bits del síndrome son cero), el algoritmo finaliza. En la siguiente etapa cada nodo variable examina la información disponible: el bit correspondiente de la palabra recibida y las sugerencias de los nodos de comprobación con los que está conectado. Con esta información decide qué valor almacenar en el nodo y se vuelve a la segunda etapa arriba descrita. Veámoslo con el ejemplo anterior.

Ejemplo 10.25 (cont.)

Supongamos que se transmite la palabra código $c_0 = [1, 0, 0, 1, 1]$ por un BSC de modo que el primer bit se recibe con error, esto es, $r = [0, 0, 0, 1, 1]$. Esto implica que el contenido inicial de los nodos variables es $c = [0, 0, 0, 1, 1]$. Por tanto, el nodo $c[0]$ envía un mensaje con un 0 a los nodos de comprobación $f[0]$ y $f[1]$; el nodo $c[1]$ envía un mensaje con otro 0 a los nodos $f[0]$ y $f[2]$, etc.

Ahora es el turno de los nodos de comprobación de paridad: cada nodo calcula qué valor debería tomar $c[l]$ para que se satisficiesen las ecuaciones de comprobación de paridad. Por ejemplo, como $f[0] = c[0] + c[1] + c[3]$; $c[1] = 0$ y $c[3] = 1$, entonces $f[0]$ va a sugerir a $c[0]$ que pase a tomar el valor 1 en la próxima iteración. Como $c[0] = 0$ y $c[3] = 1$, entonces $f[0]$ va a sugerir a $c[1]$ que la próxima vez tome el valor 1. Finalmente, como $c[0] = 0$ y $c[1] = 0$, el valor sugerido por $f[0]$ a $c[3]$ es de 0. Esta operación se realiza para todos los nodos de comprobación y se resume en la tabla siguiente, en la que se indican los valores que cada nodo $f[i]$, $i = 0, 1, 2$, sugiere a cada nodo $c[l]$, $l = 0, \dots, 4$. Las entradas vacías en la tabla se deben a que entre los nodos implicados no hay conexión.

	$c[0]$	$c[1]$	$c[2]$	$c[3]$	$c[4]$
$f[0]$	1	1	—	0	—
$f[1]$	1	—	1	—	0
$f[2]$	—	0	0	1	1

De nuevo es el turno de los nodos variables. Cada uno examina las dos sugerencias de los nodos de comprobación y el bit correspondiente de la palabra recibida. En total, cada nodo variable dispone de tres fuentes de información para decidir voltear o no su contenido. En el algoritmo del volteo de bits, esta decisión se toma por mayoría. Por ejemplo, el nodo $c[0]$ conoce que $r[0] = 0$,

pero los dos nodos de comprobación de paridad (columna correspondiente a $c[0]$ en la tabla) sugieren que tome el valor 1, por lo que decide aceptar la sugerencia. El lector puede comprobar que una vez realizado este proceso, el contenido de los nodos variables es $c = [1, 0, 0, 1, 1]$ que, como se ve, coincide con la palabra código transmitida. El algoritmo finaliza en cuanto los nodos de comprobación verifican que la información enviada por los nodos variables satisface todas las ecuaciones de paridad.

Uno de los problemas del código empleado en el Ejemplo 10.25 es que la información que recibe un nodo variable de los nodos de comprobación tras la primera iteración no es realmente independiente de la información aportada por el bit homólogo de la palabra recibida. Por ejemplo, la respuesta de los nodos $f[0]$ y $f[2]$ al nodo $c[3]$ depende del valor del nodo $c[1]$; del mismo modo, la respuesta de $f[0]$ y $f[2]$ a $c[3]$ depende del valor de $c[1]$. Es fácil entender que estas interdependencias contaminan la información que maneja el algoritmo; esto es precisamente lo que tratábamos de evitar con el paso de solamente la información extrínseca entre los decodificadores BCJR de un decodificador turbo. En el caso del algoritmo en cuestión esto debería traducirse en la ausencia de ciclos o, cuando menos, en ciclos lo más largos posible. Por ejemplo, el caso que hemos descrito se corresponde con el ciclo $c[1] \rightarrow f[0] \rightarrow c[3] \rightarrow f[2] \rightarrow c[1]$, que se denomina un *ciclo corto*²³, y que se marca en la Figura 10.47 con trazo grueso. El lector puede comprobar con la palabra recibida $r = [1, 0, 0, 0, 1]$ cómo estos ciclos cortos dan lugar a ciclos en el contenido de c sin que se llegue a converger a una palabra código. Como ya debemos intuir, para que un código bloque presente pocos ciclos y que éstos sean largos, la matriz de comprobación de paridad debe tener pocas entradas a uno, de ahí el nombre de éstos códigos. Además, se puede demostrar (lo veremos más adelante con un ejemplo) que las matrices de comprobación de paridad con al menos 3 “unos” por columna producen códigos bloque a 1 dB del límite de Shannon para canales gausianos. Existen matrices de comprobación de paridad sin ciclos, pero sus prestaciones son malas.

Ejemplo 10.26

La matriz de comprobación de paridad de un código LDPC de tasa 1/2 con 3 “unos” por columna y 6 “unos” por fila es

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.77)$$

El objetivo del algoritmo de paso de mensajes que vamos a describir más adelante es el de encontrar las probabilidades *a posteriori* de los bits transmitidos $c[l]$, $l = 0, \dots, n - 1$, condicionadas a la recepción del vector r y a que se cumplen las ecuaciones de comprobación de paridad (de modo que c sea una palabra código). Una vez encontrada esta palabra

²³De hecho, los ciclos más cortos son aquellos en los que intervienen 4 nodos diferentes.

código, la decodificación es inmediata, dado que, como sabemos, existe una correspondencia biunívoca entre palabras código y mensajes.

Primero vamos a buscar una forma conveniente de escribir la probabilidad deseada para el bit l -ésimo, $\Pr\{c[l] = 1 | \mathbf{r}, S\}$, donde S es el suceso “es una palabra código”, que fuerza a que simultáneamente se satisfagan *todas* las ecuaciones de comprobación de paridad relativas a $c[l]$. Como en el caso de códigos turbo, trabajaremos equivalentemente con la fdp $f(c[l], \mathbf{r}, S)$. La suposición más frecuente para el cálculo de la probabilidad deseada es que el grafo de Tanner del código no posee ciclos. Aunque esta hipótesis no se cumple en la mayoría de los códigos LDPC, resulta una buena aproximación cuando los ciclos son suficientemente largos. Un grafo de Tanner sin ciclos se puede representar de forma alternativa como en la Figura 10.48, en la que explícitamente se aísla el nodo $c[l]$. Además, por razones que luego se comprenderán, también hemos aislado el i -ésimo nodo de comprobación de paridad $f[i]$. Sea $\mathcal{F}[l]$ el conjunto de índices de nodos de comprobación conectados a $c[l]$ (de un modo similar, denotaremos por $\mathcal{C}[i]$ el conjunto de índices de nodos variables conectados directamente a $f[i]$). Por ejemplo, en la matriz de comprobación de paridad del Ejemplo 10.77, $\mathcal{F}[2] = \{2, 3, 4, 5, 7, 11\}$ y $\mathcal{C}[3] = \{0, 2, 5\}$.

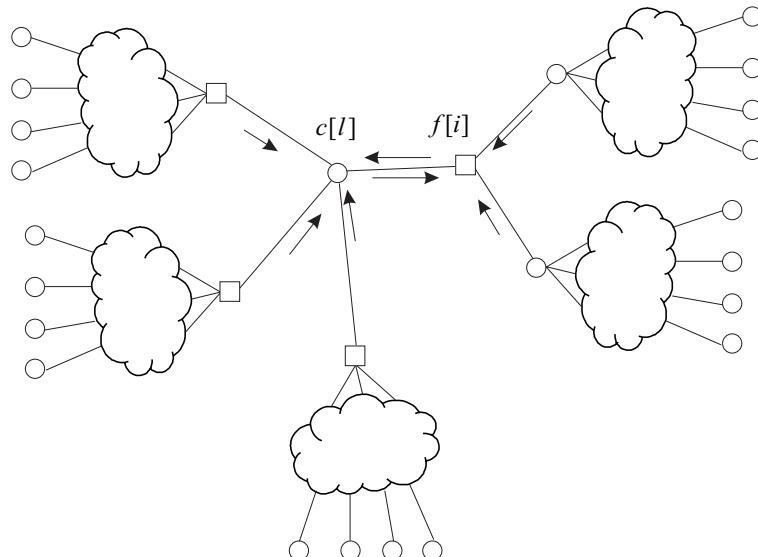


Figura 10.48. Grafo de Tanner sin ciclos, ilustrando el paso de mensajes. Si se elimina el nodo $c[l]$ los nodos de comprobación de paridad tienen entradas independientes.

Es fácil ver que, bajo la hipótesis de ausencia de ciclos, un nodo dado $c[j]$, $j \neq l$, no puede estar conectado (directa o indirectamente) a más de un nodo con índice en $\mathcal{F}[l]$ si no es a través de $c[l]$. La situación se ilustra en la Figura 10.48. En otras palabras, exceptuando $c[l]$, cualquier otro nodo variable $c[j]$ participará en un único nodo de comprobación cuyo índice pertenezca a $\mathcal{F}[l]$. Sea $S_{m,l}$ el resultado de sumar todos los nodos conectados a $f[m]$, excepto $c[l]$. Como en $f[m]$ se debe satisfacer la paridad para todo $m \in \mathcal{F}[l]$, entonces se ha de cumplir que $c[l] + S_{m,l} = 0$ (con sumas módulo-2) o, equivalentemente, que $c[l] = S_{m,l}$.

Pero, además, fijado $c[l]$, la hipótesis de ausencia de ciclos nos garantiza la independencia entre los $S_{m,l}$, por lo que podemos escribir

$$\Pr\{S|c[l] = 1\} = \prod_{m \in \mathcal{F}[l]} \Pr\{S_{m,l} = 1\} \quad (10.78)$$

con una expresión análoga para el caso $c[l] = 0$. Para calcular cada uno de los factores en (10.78) podemos recurrir al siguiente resultado: si tenemos una secuencia de P dígitos binarios independientes con probabilidad p_i , $i = 0, \dots, P - 1$ de que tomen el valor 1, entonces la probabilidad de que su suma tome un valor par es $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \prod_{i=0}^{P-1} (1 - 2p_i)$. Por tanto, podemos escribir

$$\begin{aligned} \Pr\{S_{m,l} = 0\} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \prod_{\substack{i \in \mathcal{C}[m] \\ i \neq l}} (1 - 2\Pr\{c[i] = 1\}) \\ \Pr\{S_{m,l} = 1\} &= 1 - \Pr\{S_{m,l} = 0\} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \prod_{\substack{i \in \mathcal{C}[m] \\ i \neq l}} (1 - 2\Pr\{c[i] = 1\}) \end{aligned} \quad (10.79)$$

Para separar las contribuciones del vector recibido r en la parte directamente afectada por $c[l]$ y el resto, denotaremos por $r_{\neq[l]}$ el vector que contiene todas las componentes de r excepto $r[l]$. Así,

$$\begin{aligned} f(c[l], r, S) &= f(c[l], r_{\neq[l]}, r[l], S) \\ &= f(r[l] | S, c[l], r_{\neq[l]}) \cdot \Pr\{S|c[l], r_{\neq[l]}\} \cdot f(c[l], r_{\neq[l]}) \end{aligned} \quad (10.80)$$

Dado $c[l]$, se tiene que $r[l]$ es estadísticamente independiente de $r_{\neq[l]}$ y de S ; por tanto, $f(r[l] | S, c[l], r_{\neq[l]}) = f(r[l] | c[l])$. Por otra parte, sin condicionar al cumplimiento de las ecuaciones de paridad, $c[l]$ y $r_{\neq[l]}$ son independientes, lo que añadido a la equiprobabilidad (a priori) de que $c[l]$ tome el valor 0 ó 1, hace que podamos considerar que $f(c[l], r_{\neq[l]})$ es constante (desde el punto de vista de hacer máxima la probabilidad *a posteriori*).

Como consecuencia de todo lo anterior, podemos escribir

$$\begin{aligned} \Pr\{c[l] = 0 | r\} &= C_l f(r[l] | c[l] = 0) \cdot \prod_{m \in \mathcal{F}[l]} \Pr\{S_{m,l} = 0 | r_{\neq[l]}\} \\ \Pr\{c[l] = 1 | r\} &= C_l f(r[l] | c[l] = 1) \cdot \prod_{m \in \mathcal{F}[l]} \Pr\{S_{m,l} = 1 | r_{\neq[l]}\} \end{aligned} \quad (10.81)$$

donde C_l es una constante que garantiza que las dos probabilidades anteriores suman 1.

Las ecuaciones (10.79) y (10.81) nos sugieren el mecanismo de un algoritmo recursivo que va actualizando la probabilidad *a posteriori* de $c[l]$ mediante el paso de mensajes entre los nodos variables y los nodos de comprobación, de un modo similar al algoritmo de volteo de bits (véase Figura 10.48). En la inicialización, dado que no hay ninguna otra información disponible, se fija $\Pr\{c[l] = 0 | r\} = f(r[l] | c[l] = 0)$, con una expresión similar para

$c[l] = 1$. Ambas probabilidades se calculan exactamente como indicamos en el apartado dedicado a códigos turbo (véase (10.74)). Recuérdese que para canales BSC (decodificación dura) ello implica conocer la probabilidad de transición, mientras que para canales gausianos (decodificación blanda), se necesita conocer la relación señal a ruido. Una vez iniciado el algoritmo, los nodos de comprobación emplean (10.79) para calcular su mensaje destinado a cada nodo variable. Dicho mensaje es la probabilidad de que la suma de paridad produzca 0 (respectivamente 1) cuando se elimina el nodo variable destinatario; esta probabilidad coincide con la probabilidad de que el nodo destino tome el valor 0 (1) (a partir de la evidencia disponible en el nodo de comprobación en cuestión). Una vez que los nodos variables han recibido la información de los nodos de comprobación, emplean (10.81) para generar los mensajes hacia los nodos de comprobación, y el proceso se repite hasta que se verifican todas las ecuaciones de comprobación de paridad o se ha superado un número de iteraciones fijado de antemano.

Cuando el nodo $c[i]$ emplea (10.81) para generar el mensaje hacia $f[i]$ (suponiendo que ambos estén conectados) es importante eliminar del producto $f[i]$ ²⁴; es decir, se debe realizar para todo $m \in \mathcal{F}[l], m \neq i$. La razón es la misma que la que nos llevaba a intercambiar únicamente la información extrínseca en el caso de códigos turbo: los mensajes de $c[l]$ a $f[i]$ deben contener sólo aquella información que $f[i]$ no tiene ya disponible. Por contra, si se desea obtener una estimación de la probabilidad *a posteriori* de $c[l]$, entonces todos los términos en el producto de (10.81) han de ser empleados.

Construcción de la matriz de comprobación de paridad

En la introducción de los códigos LPDC se comentó que el algoritmo BCJR iterado proporciona mejores aproximaciones a la probabilidad *a posteriori* de cada bit si la matriz de comprobación de paridad contiene pocos unos. Las matrices de comprobación de paridad para estos códigos se generan de forma aleatoria con J “unos” por columna, para controlar de esta forma el número de “unos” totales en \mathbf{H} . Cuanto menor sea J , menor será el número de ciclos y mejor la aproximación del algoritmo BCJR iterado.

El valor de J resulta de un compromiso entre la distancia mínima del código bloque y las prestaciones del algoritmo de decodificación para aproximar la detección de máximo *a posteriori*. En un ejemplo se mostrará que $J = 3$ presenta las mejores prestaciones para los distintos valores de n .

Una vez construida \mathbf{H} , obtenemos la matriz generadora del código \mathbf{G} empleando el método explicado en el Apartado 10.2.1, que incluye la utilización de la técnica de eliminación de Gauss en caso de que la matriz generadora no sea sistemática. Para los códigos LDPC conocemos la matriz \mathbf{H} y queremos determinar \mathbf{G} : puesto que \mathbf{G} y \mathbf{H} son intercambiables como matrices generadoras y de comprobación de paridad, podemos aplicar eliminación de Gauss sobre las filas de \mathbf{H} , obtener $\mathbf{H}' = [\mathbf{I}_{n-k} \mathbf{P}^T]$ y construir la matriz generadora del código como $\mathbf{G} = [\mathbf{P} \ \mathbf{I}_k]$.

²⁴Ello obliga a recalcular la constante C_l .

Prestaciones de los códigos LDPC

En este apartado se examinan las prestaciones de los códigos LDPC y cómo son capaces de proporcionar probabilidades de error tan pequeñas como se desee para relaciones E_b/N_0 iguales o mayores que 1 dB para modulaciones binarias antipodales en canales gausianos. En la Figura 10.49 se muestra la *BER* obtenida empleando códigos LDPC de tasa 1/2 para un BSC con probabilidad de transición 0,075, que proporciona una capacidad de 0,6157 bits/transmisión. Los círculos (\circ) muestran la *BER* de los códigos LDPC con 3 unos por columna para n desde 100 hasta 20.000, siendo la menor *BER* para $n = 20.000$. Asimismo, a efectos de comparación, se muestran las probabilidades de error de bit de los códigos BCH binarios con n entre 7 y 1023 para distintas tasas de codificación (puntos \bullet) y los códigos convolucionales de tasa 1/2 con $K = 11$ y 12 (aspas \times). En esta figura se puede ver que los códigos LDPC pueden proporcionar probabilidades de error muy bajas para tasas de codificación próximas a la capacidad de canal, aunque no son capaces de alcanzar dicha capacidad porque el algoritmo de decodificación únicamente proporciona una aproximación a la solución de máxima verosimilitud.

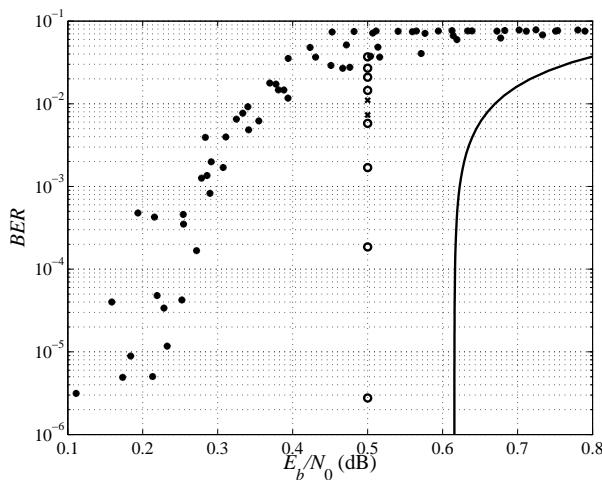


Figura 10.49. *BER* en función de E_b/N_0 para los códigos LPDC con $n = 100, 250, 500, 1.000, 2.500, 5.000, 10.000$ y 20.000 (círculos \circ); códigos BCH (\bullet) y convolucionales (\times). La línea continua muestra la tasa máxima alcanzable.

En la Figura 10.50 se muestra la decodificación de los códigos LDPC empleando la salida del canal BSC (decodificación dura) y la salida del canal gausiano (decodificación blanda). En esta gráfica, se puede ver que los códigos LDPC pueden reducir la probabilidad de error conforme aumenta n para la decodificación dura con $E_b/N_0 \geq 3$ dB (equivalente a un probabilidad de error de bit en el canal de 0,079 y una capacidad de 0,6 bits/transmisión). Para la decodificación blanda se puede reducir la *BER* conforme aumenta n si E_b/N_0 es superior a 1 dB.

Para completar la presentación de los códigos LDPC se muestra en la Figura 10.51 el efecto que tiene en los códigos LDPC el tamaño de la matriz de decodificación y el número

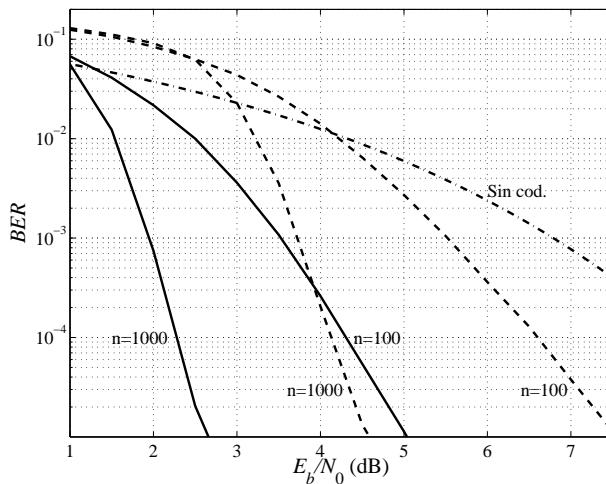


Figura 10.50. BER en función de E_b/N_0 para dos códigos LDPC con 3 “unos” por columna, de tasa 1/2 y tamaños de bloque $n = 100$ y 1.000, decodificación blanda (línea continua) y decodificación dura (línea discontinua).

de “unos” por columna. En la Figura 10.51(a) se representa la BER en función de número de “unos” por columna para $n = 100$, observándose que para 2 “unos” por columna las prestaciones del código son muy pobres porque la distancia mínima del código es baja, y en consecuencia su BER disminuye lentamente con la relación señal a ruido. Cuando empleamos 3 “unos” por columna obtenemos las mejores prestaciones para los códigos LDPC, porque se dispone de una distancia mínima suficientemente elevada (crece conforme aumenta n) y a la vez se consigue una buena aproximación a la solución de máxima verosimilitud para cada palabra recibida. Para 4 o más “unos” por columna, aunque aumenta la distancia mínima del código, el decodificador LDPC presenta mayores fallos de decodificación y, por tanto, approxima peor la solución de máxima verosimilitud. Aunque únicamente se presenta una comparativa para $n = 100$, este resultado es representativo de los resultados que se obtienen para otros tamaños de bloque con códigos LDPC.

En la Figura 10.51(b) se muestra la BER para los códigos LDPC conforme aumenta el tamaño del bloque. El resultado es el esperable: la probabilidad de error disminuye conforme aumenta n para una E_b/N_0 fija, si ésta es mayor que 1 dB. Para relaciones E_b/N_0 menores de 1 dB los códigos LDPC con 3 “unos” por columna presentan una BER constante con el tamaño del código bloque y superior a la probabilidad de error del sistema sin codificación.

10.6. LECTURAS ADICIONALES

Existen excelentes textos sobre codificación para protección contra errores, sin duda, el libro de Lin y Costello [45], todo un clásico del que acaba salir la segunda edición actualizada con los avances producidos en los últimos 20 años, es la referencia básica para la codificación de canal. Los libros de Wicker [92] y Blahut [10] son grandes guías para los

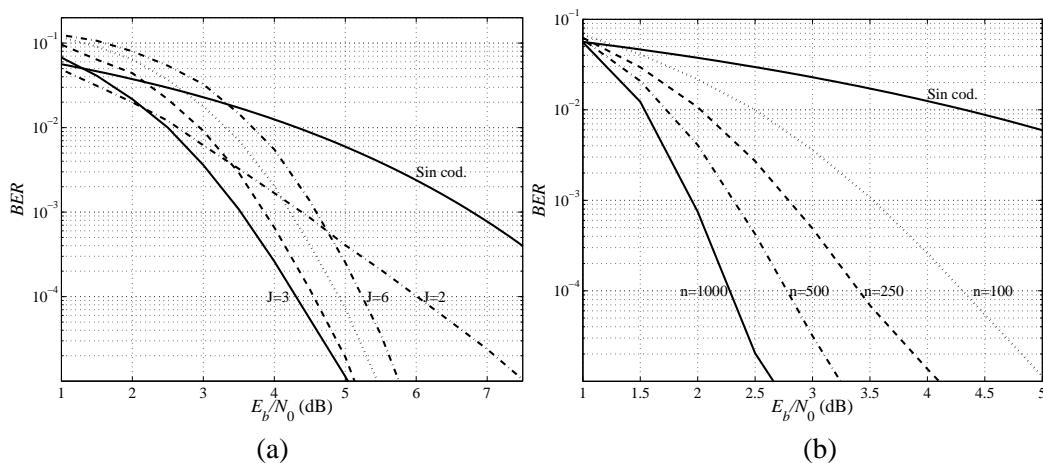


Figura 10.51. BER en función de E_b/N_0 para códigos LDPC de tasa 1/2: (a) de $n = 100$ y valores del número de “unos” por columna (J) de 2 a 6; (b) $J = 3$ y valores de n de 100 a 1.000.

códigos algebraicos y de estos libros están tomadas las ideas para exponer la estructura algebraica de los cuerpos de Galois. Entre los libros de comunicaciones digitales, caben destacar los de Wilson [94] y Barry, Lee y Messerschmitt [5], en los que se presentan de forma detallada los conceptos básicos de la codificación para la protección contra errores. El manual de Benedetto y Biglieri [7] contiene una descripción pormenorizada de los códigos turbo y de las modulaciones codificadas en rejilla, y un tratamiento exhaustivo de estos últimos podemos encontralo en el libro de Biglieri, Divsalar, McLane y Simon [11]

Entre los libros recientes que abordan las técnicas de decodificación iterativas caben destacar los libros de Schlegel y Perez [71] y MacKay [47]. En este último se presentan los códigos LDPC, propuestos por Gallager en 1963 [27] y redescubiertos por el propio MacKay en 1999 [46] y su algoritmo de decodificación.

Entre los temas más relevantes que no hemos abordado en este capítulo caben destacar las extensiones irregulares de los códigos LDPC y RA. Los trabajos de Richardson, Urbanke y colaboradores [66, 65, 17, 18] permiten acercar a los códigos LDPC irregulares a 0,0045 dB de límite de Shannon, así como analizar sus prestaciones de forma teórica. Los códigos RA irregulares [42, 41, 69] también permiten acercarse a la capacidad de canal con esquemas de codificación que son de complejidad lineal en el número de bits codificados.

PROBLEMAS

P10.1 Un código tiene las siguientes siete palabras código

0010 0100 1110 1000 1010 1100 0110

¿Es un código lineal?

P10.2 La matriz de codificación de un código lineal Reed-Muller (3, 1) es

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Determine la tasa del código, su distancia mínima y la tabla de síndromes.

(Sugerencia: el cálculo de la tabla de síndromes se realiza de forma más sencilla si antes se transforma el código en uno sistemático.)

P10.3 Dada la matriz generadora para un código lineal (7, 3):

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- 3.1. Construya la matriz generadora de un código sistemático equivalente.
- 3.2. Encuentre la matriz de control de paridad \mathbf{H} .
- 3.3. Construya la tabla con todos los posibles síndromes y obtenga el patrón de errores más probable asociado a cada síndrome.
- 3.4. Calcule la distancia mínima del código (7, 3), d_{min} . ¿Qué capacidad correctora de errores tiene este código?
- 3.5. Compare las prestaciones de este código con las de un código Hamming (7, 4). ¿Existe alguna relación entre ambos?
- 3.6. Calcule la palabra codificada, cuando a la entrada tiene la palabra 101. Verifique que su síndrome es 0.

P10.4 Calcule la ganancia de codificación de un código Hamming (15, 11) con decodificaciones dura y blanda cuando la relación señal a ruido es alta.

P10.5 El código Golay (23, 12) es un código perfecto que es capaz de corregir 3 errores. El código Golay se puede definir de forma cíclica mediante el polinomio generador $g_1(x) = x^{11} + x^{10} + x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + 1$ o $g_2(x) = x^{11} + x^9 + x^7 + x^6 + x^5 + x + 1$.

- 5.1. Verifique que se cumple la cota de Hamming con igualdad.
- 5.2. Codifique la palabra $b = [010001100001]$ de forma sistemática empleando $g_1(x)$ y de forma directa multiplicando $b(x)$ por $g_2(x)$.

P10.6 Demuestre que para los códigos bloque cíclicos (n, k) únicamente existe una palabra código de grado $n - k$. Esta palabra será el polinomio generador del código.

P10.7 Construya un código BCH capaz de corregir 3 errores con una tasa de codificación superior a 0,6 y con $n = 2^m - 1$, para m entero.

P10.8 Para el código del ejemplo anterior codifique de forma no sistemática la siguiente palabra mensaje: 01110100010... (complete el mensaje con ceros). Introduzca tres errores de bit aleatorios en la palabra codificada y decodifíquela empleando el algoritmo de Berlekamp-Massey.

P10.9 Obtenga el polinomio generador del código RS (63,57).

P10.10 Dado el código RS del ejercicio anterior obtenga la probabilidad de error de bloque en función de la relación señal a ruido en el canal. Suponga una modulación 64-QAM y cada elemento de $GF(2^6)$ es un símbolo de la constelación, de tal forma que la probabilidad de error de símbolo en la constelación coincide con la de los elementos del cuerpo de Galois de extensión de orden 64.

Represente la probabilidad de error de bloque para este código acortado en 1, 2 y 3 bits. Compárela con la probabilidad de error de símbolo sin codificar.

P10.11 Calcule la distancia mínima del código convolucional de tasa 2/3, $K = 3$ y $M = 3$ en el Cuadro 10.13. Dibuje su diagrama de estados y su diagrama de rejilla.

P10.12 Calcular la ganancia de codificación del código convolucional de Tasa 1/3 y $K = 4$ en el Cuadro 10.12.

P10.13 Considere un código convolucional de tasa 1/2 con matriz generadora

$$\mathbf{G} = [D \quad D^2 + 1]$$

- 13.1. Dibuje su diagrama de estados y su diagrama de rejilla etiquetando cada transición con el bit de entrada y los dos bits de salida.
- 13.2. Determine el evento de error de mínima distancia de Hamming, la BER y la ganancia de codificación con decodificación dura.
- 13.3. Repita el apartado anterior con decodificación blanda y compare ambos resultados.

P10.14 Repita el problema anterior con el código convolucional de tasa 1/2 y matriz generadora

$$\mathbf{G} = [1 \quad D + 1]$$

P10.15 Los códigos bloque cíclicos se pueden ver como códigos convolucionales de tasa 1/1 y con un número máximo de bits a codificar (n).

- 15.1. Obtenga la representación esquemática y el diagrama de estados para el código Hamming cíclico (7,4).
- 15.2. Codifique la palabra 1001 empleando la convolución en la representación esquemática (introduzca los ceros necesarios para que el estado del convolucional sea el idénticamente nulo). Compruebe que los bits transmitidos son los mismos que los obtenidos multiplicando el mensaje por el polinomio generador.

- 15.3. Decodifique la palabra 0100100 empleando el algoritmo de Viterbi.
- 15.4. ¿Por qué cree que este código no se puede emplear para transmitir más bits?.
- 15.5. Discuta qué es lo que limita el uso del algoritmo de Viterbi para decodificar los códigos cíclicos.

P10.16 Se desea diseñar un módem de 400 bits/s para un canal paso banda que permite una transmisión a una velocidad de 100 símbolos/s.

- 16.1. Sin utilizar codificación, calcule el tamaño del alfabeto necesario y elija una constelación.
- 16.2. Empleando un TCM, ¿cuál es el tamaño del alfabeto requerido? Elija una constelación.
- 16.3. Suponga que para obtener una probabilidad de error aceptable el sistema requiere 4 dB más de potencia de los que el canal puede tolerar. ¿Cómo resolvería este problema?.

P10.17 Realice la división de la constelación hexagonal de la Figura 10.52 hasta obtener subconstelaciones binarias y calcule la distancia entre subconstelaciones.

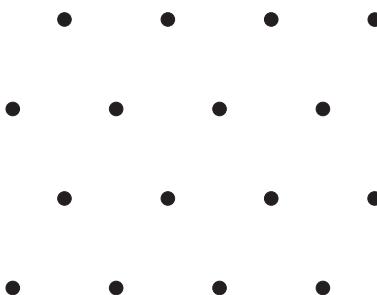


Figura 10.52. Constelación hexagonal con 16 símbolos.

P10.18 Diseñe el mejor TCM basado en un codificador convolucional lineal no recursivo con 8 estados y una constelación 32-QAM. Obtenga su ganancia de codificación.

P10.19 Obtenga la ganancia de codificación TCM del convolucional en el Cuadro 10.15 $M_t = 3$ con constelación de salida 16-QAM.

P10.20 Demuestre que el TCM de la Recomendación ITU-T V.32 de las Figuras 10.36 y 10.37 es invariante a rotaciones múltiplo de $\pi/2$.

P10.21 Calcule la ganancia de codificación del codificador del problema anterior.

P10.22 Decodifique la secuencia

$$\begin{aligned} \mathbf{r} = & 3,06, 1,08, -0,70, -1,06, -0,58, -2,89, -1,37, -0,82, 1,92, -2,63, \\ & -1,64, -1,37, -0,70, -0,85, 2,30 \end{aligned}$$

con el decodificador BCJR, que ha sido codificada con el código convolucional de la Figura 10.10. La secuencia ha sido transmitida a través un canal gausiano empleando una modulación binaria antipodal con símbolos $\{\pm 1\}$ y $E_b/N_0 = -5,93$ dB.

- P10.23 Decodifique la secuencia $r = [1010100101010111]$ con el decodificador BCJR, que ha sido codificada con el código convolucional de la Figura 10.10. La secuencia ha sido transmitido a través de un BSC con una probabilidad de cruce $p = 0,1$.
- P10.24 Obtenga (con la ayuda de un ordenador) una matriz de comprobación de paridad H aleatoria para un código LDPC (100, 50) con 3 “unos” por columnas y 6 por filas. Simule un BSC con una probabilidad de cruce $p = 0,05$. Obtenga la probabilidad de error de bit empleando el algoritmo de decodificación basada en paso de mensajes pero inicialice las probabilidades de error de los bits a 0,01, 0,025, 0,05, 0,07 y 0,1. Comente si cree que el algoritmo de decodificación basada en paso de mensajes es robusto frente a la inicialización de las probabilidades de error de los bits recibidos.

CAPÍTULO 11

SINCRONIZACIÓN

Este capítulo detalla una buena parte de las labores auxiliares que son necesarias para el correcto funcionamiento de los esquemas que se han venido estudiando en este libro. Así, hasta el momento se suponía el conocimiento exacto tanto de los instantes adecuados de muestreo en el receptor como de la fase de la oscilación portadora. En la práctica hay que llevar a cabo la estimación de dichos parámetros, con el fin de dar soporte a las tareas de igualación y decodificación.

11.1. CARACTERÍSTICAS DE LA SEÑAL RECIBIDA: EL PROBLEMA DE LA SINCRONIZACIÓN

Un receptor de comunicaciones, además de invertir las operaciones efectuadas por el transmisor con el fin de recuperar la secuencia de bits transmitidos, debe indagar en la señal que recibe con el fin de extraer la información de apoyo para dicha decodificación. Así, frente a un modelo idealizado de un sistema de comunicaciones característico de Teoría de la Información (Figura 11.1), presentamos un modelo más cercano a la realidad física (Figura 11.2), en el que es necesaria la estimación de ciertos parámetros desconocidos para el receptor (fase de la portadora, por ejemplo), de tal modo que idealmente se reproduzcan las condiciones del esquema de la Figura 11.1. La igualación analizada en el Capítulo 6 responde en parte a esta necesidad, en la medida en la que trata de compensar los efectos de un canal lineal e invariante que introduce interferencia entre símbolos. Este capítulo aborda la sincronización entendida como la estimación de la frecuencia y fase de la portadora y la búsqueda del correcto alineamiento temporal con respecto a la señal recibida. La sincronización se puede ver, en primer lugar, como el proceso de alineamiento de la fase y la frecuencia de un conjunto de osciladores remotos. Es decir, haciendo una simplificación del problema como la mostrada en la Figura 11.3, se trata de generar en el receptor una onda con la misma frecuencia y fase que la recibida desde el transmisor. La generación de un tono igual al que ya recibimos podría parecer una frivolidad, pero no es tal si pensamos que en general la oscilación que queremos emular en el receptor se encuentra “escondida” en la

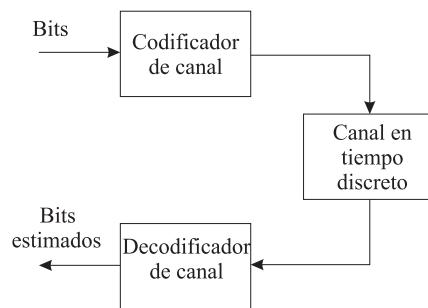


Figura 11.1. Modelo idealizado de un sistema de comunicaciones.

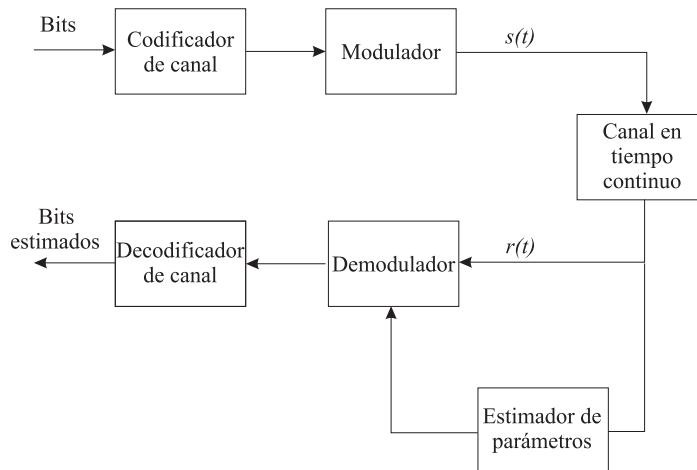


Figura 11.2. Modelo de un sistema de comunicaciones al nivel físico.

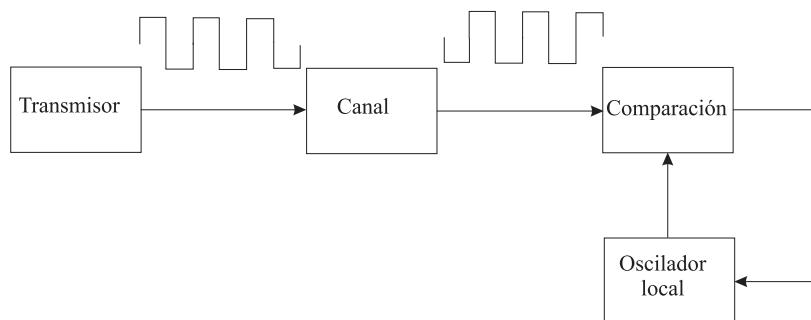


Figura 11.3. Sincronización con una señal de reloj recibida.

señal recibida, ya que no se suele recurrir al envío de tonos adicionales, debido al gasto en potencia y/o ancho de banda que esto supone. En segundo lugar, el alineamiento es necesario a varios niveles, desde las muestras tomadas sobre la señal recibida hasta las fronteras lógicas de cabeceras, tramas, etc. En este capítulo nos centraremos en la sincronización sobre el nivel físico y, en concreto, en los siguientes aspectos:

- **Recuperación de portadora.** En los sistemas paso banda (Apartado 5.4) es necesario generar una oscilación de la misma frecuencia y fase que la del transmisor para efectuar la conversión a banda base¹. Así, para una señal recibida de la forma

$$r(t) = s(t) \cos(\omega_c t + \theta)$$

o, más en general,

$$r(t) = \sqrt{2}s_I(t) \cos(\omega_c t + \theta) + \sqrt{2}s_Q(t) \sin(\omega_c t + \theta)$$

es necesario sintetizar en el receptor los tonos $\cos(\omega_c t + \theta)$ y $\sin(\omega_c t + \theta)$ para proceder a la demodulación que se muestra en cualquiera de las Figuras 5.37 y 5.38, en las cuales se supone $\theta = 0$. Esto obliga al conocimiento de la frecuencia ω_c y la fase θ .

- **Recuperación del instante de muestreo.** Los símbolos transmitidos modulan la amplitud de los pulsos de transmisión. El receptor debe muestrear la señal que le llega con el fin de recuperar los símbolos, para lo cual debe conocer el instante de muestreo adecuado. La Figura 4.41(b) representa el receptor óptimo basado en el filtro adaptado al pulso recibido, a cuya salida se procede a un muestreo cada T segundos, siendo T el periodo de símbolo. Dicha estructura pone de manifiesto la necesidad de conocer la fase con la que hay que tomar las muestras de la señal. En cualquier esquema de recepción mostrado en los capítulos anteriores se hace necesario muestrear la señal en algún momento, lo que obliga a determinar la fase del reloj que dirige dicho muestreo.
- **Sincronización multipulso.** En las modulaciones multipulso expuestas en el Capítulo 8 debemos procesar bloques de muestras consecutivas, para lo cual es necesario segmentar la señal de entrada correctamente para aplicar la DFT en el caso de las modulaciones multiportadora o proceder al desensanchado en el caso del espectro ensanchado por secuencia directa.

Cualquier error en la estimación de dichos parámetros repercute en la probabilidad de error de bit, que ya no depende exclusivamente de la relación señal a ruido, sino que padece cierta degradación en función del error de los valores estimados. Dado que trabajamos con realizaciones de procesos estocásticos, las estimaciones que se hacen a partir de las mismas de los parámetros de sincronización se pueden modelar como variables aleatorias. Es de gran importancia conocer si la media de dichas variables es el parámetro que se desea estimar,

¹Es muy común desglosar estas conversiones en frecuencia en dos o incluso tres pasos, con el fin de facilitar el funcionamiento de los transmisores y receptores.

en cuyo caso se habla de *estimaciones insesgadas*. Además, la varianza de estas variables aleatorias se toma como el parámetro de calidad: a menor varianza, mayor calidad de la estimación.

Los condicionantes de los mecanismos de estimación de parámetros son muy variados. Así, una buena relación señal a ruido facilita mucho las cosas, frente a aquellos casos en los que la relación señal a ruido es muy reducida, como pueden ser los sistemas con una codificación de canal tan potente que permite trabajar en condiciones de relación señal a ruido muy baja. Es importante, además, tener en cuenta la influencia mutua entre las variables que se desean estimar. Así, no es lo mismo recuperar el instante de muestreo conociendo la frecuencia de la portadora que hacerlo en presencia de incertidumbre en la misma, y viceversa. Como veremos, la estimación conjunta o simultánea de todos los parámetros es un proceso complicado, por lo que es más habitual su separación en diferentes tareas de estimación, con el fin de diseñar receptores realizables aunque no óptimos.

11.2. RECEPTOR ML ÓPTIMO

Consideremos el problema de la detección de una secuencia de N símbolos. Dicho problema ya fue abordado en capítulos previos, considerando que la sincronización era perfecta. La señal recibida $r(t)$ se escribe como

$$r(t) = s(t) + z(t) = \sum_{n=0}^{N-1} A[n] g_r(t - nT - \epsilon_0 T) e^{j\theta_0} + z(t) \quad (11.1)$$

donde $g_r(t)$ es la convolución del pulso de transmisión $g(t)$ con la respuesta del canal equivalente en banda base $h_{eq}(t)$,

$$g_r(t) = g(t) * h_{eq}(t) \quad (11.2)$$

La respuesta $h_{eq}(t)$ incluye los efectos del canal y del filtro de entrada analógico $f_{aa}(t)$ que necesariamente debe preceder cualquier operación de muestreo. Los parámetros ϵ_0 y θ_0 , que se suponen constantes en esta primera aproximación al problema, reflejan la incertidumbre en relación con el comienzo de cada intervalo de símbolo y la fase de la portadora, respectivamente. Obsérvese que se trabaja con la señal en banda base, es decir, si se trata de un sistema paso banda la demodulación se supone ya realizada², y todos los filtros se refieren a su equivalente paso bajo en el caso en el que se implementen en la banda de trabajo. Además, contemplamos la posible separación de un filtro de entrada $f_{aa}(t)$ analógico, que sirva para eliminar ruido e interferencias y evitar “aliasing” (véase Apartado 5.5), de un posterior filtro receptor $f(t)$, que se puede implementar en tiempo continuo o en tiempo discreto. Por conveniencia, supondremos que la respuesta al impulso del filtro $f_{aa}(t)$ se incluye en el canal equivalente en banda base $h_{eq}(t)$. Si el ruido es blanco con densidad espectral de potencia $N_0/2$ W/Hz, entonces la densidad espectral de potencia del término $z(t)$ se puede

²Si la transmisión se realiza directamente en banda base no existe portadora sinusoidal y, por tanto, la fase θ_0 se puede considerar igual a cero.

escribir como

$$S_z(j\omega) = \sigma_n^2 |F_{aa}(j\omega)|^2 \quad (11.3)$$

con $\sigma_n^2 = N_0/2$ para modulaciones reales y $\sigma_n^2 = N_0$ para modulaciones complejas, tal y como se expuso en el Capítulo 5³. Una primera aproximación a la sincronización y su problemática nos lleva a considerar la estimación de los parámetros (θ_0, ϵ_0) , fase residual tras la demodulación y fase del reloj de muestreo, respectivamente. El primero aparece en la demodulación mostrada en el Apartado 5.4.2 para señales paso banda, dado que si suponemos que la frecuencia de la portadora transmitida coincide con la frecuencia de la oscilación generada en el receptor, tenemos $e^{j(\omega_ct+\theta_0)}e^{-j\omega_ct} = e^{j\theta_0}$, es decir, tal y como se puede entender a partir de la Figura 11.3, la fase de ambas oscilaciones no coincide necesariamente en un principio, por lo que habrá que tratar de encontrar esa fase residual. A esto hay que añadir que cualquier receptor digital, tal y como se puso de manifiesto en los Capítulos 4 y 5, debe muestrear la señal de entrada de forma periódica, para lo que se debe conocer la referencia temporal que indica cuándo hay que tomar las muestras; esto viene expresado por el parámetro ϵ_0 de la señal recibida (11.1).

Trabajaremos con parámetros de sincronización (θ_0, ϵ_0) constantes a lo largo de varios símbolos, suposición válida cuando la escala temporal de variación de los parámetros es mucho mayor que el periodo de símbolo T . Esta suposición considera además que no existe ninguna desviación apreciable $\Delta\omega$ entre las frecuencias de portadora del transmisor y receptor, o lo que es lo mismo, $T\Delta\omega/2\pi \ll 1$, con T el periodo de símbolo. Cuando esto no es así, la corrección de la frecuencia es el primer paso imprescindible para que se pueda abordar la estimación y detección del resto de parámetros.

La señal recibida $r(t)$ puede procesarse íntegramente de forma discreta si el muestreo realizado no viola el teorema del muestreo aplicado sobre $s(t)$. La misión del filtro “anti-aliasing” $f_{aa}(t)$ consiste en eliminar ruido y ajustar el ancho de banda de la entrada para garantizar el cumplimiento del teorema del muestreo. Sean por tanto las muestras de la señal filtrada $r(t)$, $r(kT_s)$, con T_s el periodo de muestreo⁴, tal que $T_s \leq T/2$, muestras que vamos a incluir en el vector \mathbf{r} :

$$\mathbf{r} \doteq [r(0) \quad r(T_s) \quad \cdots \quad r((K-1)T_s)]^T \quad (11.4)$$

Suponemos además que el filtro anti-aliasing $f_{aa}(t)$ es un filtro paso bajo ideal con ancho de banda $1/2T_s$, con lo que el ruido a su salida será blanco⁵, como se puede deducir a partir de (11.3). La varianza de dichas muestras será representada por

$$\sigma_z^2 = \sigma_n^2/T_s \quad (11.5)$$

El criterio de máxima verosimilitud o criterio ML (“Maximum Likelihood”), presentado en el Apartado 4.4.1, se basa en la función de densidad de probabilidad de los datos observados.

³Recuérdese que en el caso de modulaciones complejas el ruido resultante es circularmente simétrico con varianza por dimensión $N_0/2$.

⁴Tal y como se detalló en el Capítulo 5, el uso de filtros en raíz cuadrada de coseno alzado garantiza que el máximo ancho de banda en banda base de la señal portadora de información $s(t)$ es $2\pi/T$ rad/s.

⁵Con carácter más general, el ruido será blanco siempre que la función de ambigüedad $f_{aa}(t) * f_{aa}(-t)$ cumpla el criterio de Nyquist a periodo T_s .

La misma es una generalización de la presentada en el Apartado 6.2.1, dado que es necesario incorporar la incertidumbre existente sobre los parámetros de sincronización:

$$f_{\mathbf{r}|\mathbf{A},\epsilon,\theta}(\mathbf{r} | \mathbf{a}, \epsilon, \theta) = \frac{1}{(\pi\sigma_z^2)^K} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma_z^2} \|\mathbf{r} - \mathbf{s}\|^2 \right\} \quad (11.6)$$

con los símbolos $a[n], n = 0, \dots, N - 1$ incluidos en el vector \mathbf{a} . Las muestras de la señal recibida $r(t)$ tienen una función de densidad de probabilidad (fdp) gausiana que, por lo tanto, depende directamente de la distancia euclídea $\|\mathbf{r} - \mathbf{s}\|$, es decir, la distancia entre el vector de muestras recibidas y el vector de muestras libres de ruido sintetizadas con los parámetros a los que está condicionada la fdp:

$$\mathbf{s} \doteq [s(0) \quad s(T_s) \quad \cdots \quad s((K-1)T_s)]^T \quad (11.7)$$

con

$$s(t) = \sum_{n=0}^{N-1} a[n]g_r(t - nT - \epsilon T)e^{j\theta} \quad (11.8)$$

Por simplicidad en la notación hemos evitado etiquetar $s(t)$ y \mathbf{s} con los símbolos \mathbf{a} y parámetros ϵ y θ de los que dependen.

Este planteamiento conduce a una detección y estimación conjuntas, es decir, a la búsqueda de la combinación de símbolos y valores de sincronización más verosímiles, que serán aquellos para los que la fdp (11.6) se hace máxima o, equivalentemente, para los que la distancia euclídea entre el vector recibido \mathbf{r} y el vector sintetizado sin ruido \mathbf{s} se hace más pequeña. Obsérvese que a diferencia de capítulos precedentes, el detector óptimo ahora debe minimizar la distancia entre el vector recibido y los vectores \mathbf{s} que resultan de considerar todas las combinaciones posibles de símbolos transmitidos \mathbf{a} , fases correctoras e instantes de símbolo. Las operaciones involucradas en dicho procedimiento pueden entenderse mejor si manipulamos apropiadamente la distancia euclídea a minimizar:

$$\|\mathbf{r} - \mathbf{s}\|^2 = \|\mathbf{r}\|^2 + \|\mathbf{s}\|^2 - 2\operatorname{Re}\{\langle \mathbf{r}, \mathbf{s} \rangle\} \quad (11.9)$$

La influencia de los símbolos y parámetros $\{\mathbf{a}, \epsilon, \theta\}$ se concreta en el término $\operatorname{Re}\{\langle \mathbf{r}, \mathbf{s} \rangle\}$, ya que para un número de símbolos N y de muestras K elevado, tenemos que la norma euclídea $\|\mathbf{s}\|$, que no depende de θ , es prácticamente insensible a la secuencia de símbolos \mathbf{a} y la fase temporal ϵ (véase Apéndice 11.A).

Por tanto, si nos quedamos únicamente con el término de la fdp (11.6) sensible a la secuencia de símbolos y parámetros de sincronización, e incluimos el resto en una constante C , tenemos que

$$f_{\mathbf{r}|\mathbf{A},\epsilon,\theta}(\mathbf{r} | \mathbf{a}, \epsilon, \theta) = C \cdot \exp \left\{ \frac{2}{\sigma_z^2} \operatorname{Re}\{\mathbf{s}^H \mathbf{r}\} \right\} \quad (11.10)$$

donde aparece el producto escalar $\langle \mathbf{r}, \mathbf{s} \rangle = \mathbf{s}^H \mathbf{r}$ o correlación entre la secuencia recibida \mathbf{r} y la secuencia sin ruido \mathbf{s} ; esta última contiene los parámetros a optimizar. En el mismo

Apéndice 11.A se demuestra que en el producto escalar anterior interviene el filtro adaptado al pulso recibido $g_r(t)$ si el tamaño de la secuencia r es suficientemente grande:

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{s} \rangle = \frac{1}{T_s} e^{-j\theta} \sum_{n=0}^{N-1} a^*[n]q(nT + \epsilon T) \quad (11.11)$$

donde $q(t) = r(t)*g_r^*(-t)$. Como se vio en el Apartado 5.5, para el tipo de señales limitadas en banda que se maneja habitualmente, los filtrados se pueden efectuar en tiempo discreto. Así, en el caso de filtros de raíz de coseno alzado, el periodo de muestreo T_s es tal que $T_s < T/2$. De este modo, el filtrado digital nos permite obtener cualquier valor de la salida $q(t)$ del filtro adaptado; en concreto, la variación de ϵ en $q(nT + \epsilon T)$ equivale a la modificación de la fase del muestreo a periodo de símbolo T de la salida del filtro adaptado $q(t)$. En definitiva, la búsqueda de los parámetros óptimos según el criterio de máxima verosimilitud requiere muestrear la salida del filtro adaptado al pulso recibido a periodo de símbolo, como se desprende de la siguiente expresión, obtenida tras sustituir (11.11) en (11.10):

$$f_{\mathbf{r}|\mathbf{A},\epsilon,\theta}(\mathbf{r} | \mathbf{a}, \epsilon, \theta) = C \cdot \exp \left\{ \frac{2}{\sigma_n^2} \operatorname{Re} \left\{ e^{-j\theta} \sum_{n=0}^{N-1} a^*[n]q(nT + \epsilon T) \right\} \right\} \quad (11.12)$$

donde el periodo de muestreo T_s del término $s^H r$ se ha eliminado con el correspondiente de σ_z^2 en virtud de (11.5). La aplicación del criterio ML en presencia de incertidumbre en

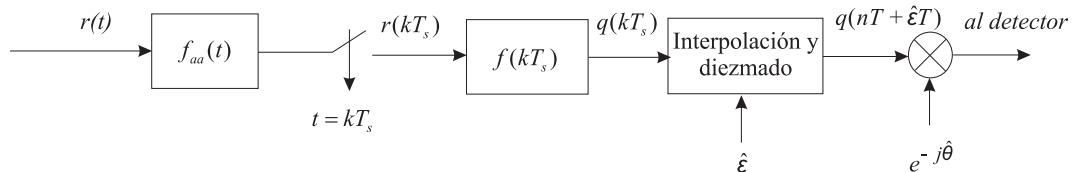


Figura 11.4. Estructura del receptor basado en el criterio ML.

los parámetros de sincronización obliga a efectuar una búsqueda en el espacio de $N + 2$ dimensiones compuesto por los N símbolos posibles y los parámetros $\epsilon \in [0, 1)$ y $\theta \in [0, 2\pi)$. Y todo ello a partir del filtro adaptado al pulso recibido, bajo la hipótesis de que este se conoce. En la práctica se utilizará un filtro receptor $f(t)$ adaptado al pulso transmitido $g(t)$ de tal forma que $f(t) = g(-t)$, lo cual no garantiza su completa adaptación al pulso recibido teniendo en cuenta los efectos del canal, salvo en aquellos casos donde la influencia del mismo es escasa. En la Figura 11.4 se muestra la arquitectura de un receptor inspirada en el criterio ML bajo el cual se debe maximizar (11.12); los parámetros $\hat{\epsilon}$ y $\hat{\theta}$ se corresponden con las estimaciones ML del instante de muestreo y la fase residual, respectivamente. Es importante destacar que, en ausencia de ISI, es decir, si $g_r(t) * f(t)$ cumple el criterio de Nyquist a periodo T , las muestras tomadas con dicho periodo en los instantes adecuados serán estadísticos suficientes (véase Apéndice 4.B). Por ello resulta de especial importancia obtener la fase adecuada del reloj, tal y como se puede apreciar en el Ejemplo 6.17. El

sobremuestreo a periodo T_s permite obtener las muestras de la señal recibida en los instantes que corresponda, ya que

$$\begin{aligned} q(nT + \epsilon T) &= r(t) * f(t)|_{t=nT+\epsilon T} \\ &= T_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} r(kT_s) f(nT + \epsilon T - kT_s) \end{aligned} \quad (11.13)$$

donde hemos hecho uso de la equivalencia entre el procesado analógico y el procesado discreto para señales limitadas en banda que se presentó en el Apartado 2.4.3. La realización práctica puede diferir según el caso, aunque resulta muy habitual el uso de un filtro $f(kT_s)$ fijo y la posterior interpolación de su salida $q(kT_s)$ para obtener los valores en los instantes de muestreo deseados. Así, para señales limitadas en banda, como es el caso, es posible interpolar idealmente su valor en cualquier instante de tiempo t_0 a partir de sus muestras equiespaciadas tal y como se mencionó en el Apartado 5.5:

$$q(t_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q(kT_s) \operatorname{sinc}\left(\frac{t_0 - kT_s}{T_s}\right) \quad (11.14)$$

El uso de un número pequeño de términos en el sumatorio anterior no suele acarrear errores de importancia en la práctica. Cabe señalar que sería posible evitar la interpolación si se controlase la operación de muestreo que aparece en la Figura 11.4 a partir de la estimación de la fase de muestreo $\hat{\epsilon}$. Ello implicaría dirigir la operación del conversor analógico/digital que realiza el muestreo con el valor $\hat{\epsilon}$ obtenido digitalmente, lo que es preferible evitar en algunos casos con el objeto de desacoplar la parte analógica del receptor de la parte digital.

A continuación vamos a tratar de comprender un poco mejor la casuística que rodea el concepto de la estimación del instante de muestreo. Para ello podemos suponer que existe una referencia temporal óptima, es decir, que maximiza la fdp (11.6) y para la cual no hay ISI. Supongamos por un momento que la relación entre el periodo de símbolo y el periodo de muestreo es $T/T_s = 2$. Lo más habitual es que ϵ_0 no sea ni 0 ni 0,5, es decir, la muestra deseada en cada periodo no se encontrará entre las muestras tomadas por el conversor analógico/digital del receptor. Esta forma de muestreo se denomina asíncrona, frente al modo sincrónico en el que la fase del muestreador se iría corrigiendo en función del valor $\hat{\epsilon}$ estimado para cada símbolo, tal y como hemos indicado anteriormente. De ahí que sea necesario interpolar el valor deseado, además de dividir la tasa de muestras por dos. Estas dos operaciones se realizan en el bloque interpolación/diezmando de la Figura 11.4. En circunstancias reales la relación T/T_s no será exactamente entera (por ejemplo, 2,0000112...), ya que no es posible precisar totalmente la frecuencia de un reloj y, por tanto, no es posible garantizar una relación determinada entre las frecuencias de dos relojes distintos. Esto implica que la posición relativa de la muestra deseada con respecto a las muestras tomadas de forma asíncrona va cambiando con el tiempo; dicha evolución será más acusada cuanto más alejado se encuentre el cociente T/T_s de una relación entera. Equivalentemente, podemos decir que

$$q(nT + \epsilon T) = q((m[n] + \mu[n])T_s) \quad (11.15)$$

con $m[n]$ entero y $\mu[n]$ un valor fraccionario en el rango $[0, 1)$. La principal consecuencia de un cociente T/T_s próximo a un valor entero es que $\mu[n]$ evoluciona lentamente con el tiempo, aun en el caso de que ϵ_0 se mantenga constante. Todo esto se puede entender mejor con ayuda de la Figura 11.5, donde se muestran los instantes escogidos a periodo de muestreo T_s junto con los instantes a periodo de símbolo T . En la figura, la señal $q(t)$ representa la envolvente continua de las muestras de salida $q(kT_s)$ en el caso de que el filtrado se implemente digitalmente. Los instantes etiquetados $nT + \epsilon_0 T$, con n entero, son los que proporcionan los valores deseados. Las barras más oscuras indican los instantes en los que inicialmente se muestrea (a una tasa nominal aproximadamente igual al doble de la tasa de símbolo), cuya posición relativa con respecto a los instantes deseados va evolucionando, por lo que es necesario interpolar de forma variante con el tiempo para generar las muestras deseadas.

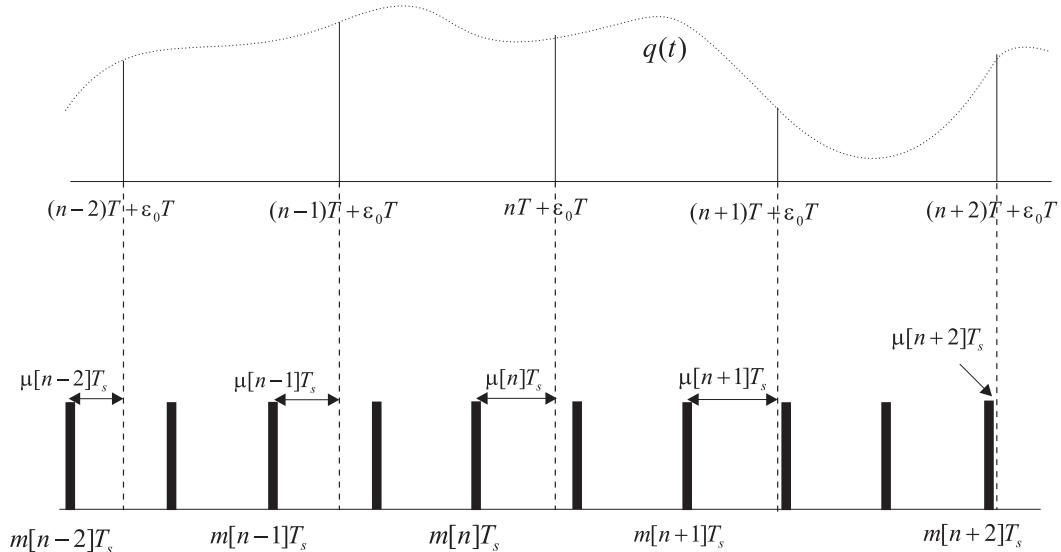


Figura 11.5. Ilustración de la interpolación variante en el tiempo en el caso de un muestreo asíncrono.

Como se puede apreciar a partir de las consideraciones anteriores, la solución ML ofrecida no es realizable, ya que a la complejidad de trabajar con la secuencia completa para poder evaluar la distancia euclídea para cada una de las posibles secuencias enviadas, hay que añadir la búsqueda sobre el conjunto de parámetros (ϵ, θ) . Por tanto, aunque el receptor óptimo realizaría la estimación de parámetros conjuntamente con la detección de símbolos, las realizaciones prácticas separan ambas tareas. En este punto existen diversas opciones que se comentan a continuación. Una primera solución consiste en el envío de un preámbulo de símbolos conocidos a_0 antes de enviar los símbolos de información, por lo que la función de densidad de probabilidad (11.6) se particulariza para $\mathbf{a} = \mathbf{a}_0$:

$$f_{\mathbf{r}|\epsilon,\theta}(\mathbf{r}|\epsilon,\theta) = f_{\mathbf{r}|\mathbf{A},\epsilon,\theta}(\mathbf{r}|\mathbf{a} = \mathbf{a}_0, \epsilon, \theta) \quad (11.16)$$

en lo que se conoce como *estimación asistida por datos* (“*Data Aided*”, DA). Con el fin de mantener una actualización constante de los parámetros para acomodar las variaciones lentas de los mismos se pueden utilizar los símbolos decodificados $\hat{\mathbf{a}}$, evitando de este modo el uso sistemático de secuencias de entrenamiento que reducirían la eficiencia de la transmisión. En este caso, la fdp (11.6) se formula como sigue:

$$f_{\mathbf{r}|\epsilon,\theta}(\mathbf{r}|\epsilon,\theta) = f_{\mathbf{r}|\mathbf{A},\epsilon,\theta}(\mathbf{r}|\mathbf{a} = \hat{\mathbf{a}}, \epsilon, \theta) \quad (11.17)$$

Los algoritmos de esta categoría se conocen como *algoritmos dirigidos por decisión* (“*Decision Driven*”, DD), cuyo funcionamiento sólo está garantizado con una buena estimación inicial de los parámetros (ϵ_0, θ_0) .

También es posible efectuar la estimación de los parámetros independientemente de los símbolos enviados, para lo que es necesario promediar sobre todas las posibles secuencias de datos para eliminar la dependencia de los mismos. En este caso, la fdp que se debe maximizar se escribiría como

$$f_{\mathbf{r}|\epsilon,\theta}(\mathbf{r}|\epsilon,\theta) = \sum_{\{\mathbf{a}_i\}} f_{\mathbf{r}|\mathbf{A},\epsilon,\theta}(\mathbf{r}|\mathbf{a} = \mathbf{a}_i, \epsilon, \theta) p_{\mathbf{A}}(\mathbf{a}_i) \quad (11.18)$$

El sumatorio se realiza sobre todas las posibles secuencias de símbolos $\{\mathbf{a}_i, i = 1, \dots, M^N\}$, siendo M el número de símbolos en la constelación. Este tipo de algoritmos se conocen como *no asistidos por datos* (“*Non-Data-Aided*”, NDA). La posterior detección de la secuencia \mathbf{a} se lleva a cabo suponiendo que la sincronización ha sido perfecta en cualquiera de los casos planteados anteriormente, lo que se conoce como *detección sincronizada*, y que se corresponde con el modelo manejado en los capítulos anteriores.

Una vez descartada la estimación y detección conjuntas por razones de complejidad, queda por valorar cómo se puede llevar a cabo la estimación de los parámetros (ϵ, θ) . Para obtener una formulación matemáticamente tratable es necesario suponer que $g_r(t) * f(t)$ satisface el criterio de Nyquist, es decir, que no hay interferencia entre símbolos tras el filtro adaptado. De este modo se obtienen algoritmos manejables que también se utilizan en casos más generales. Siendo así, demostramos que la maximización de la función de densidad de probabilidad (11.6) era equivalente a la maximización de la Expresión (11.12). A partir de la misma se pueden extraer algunas pautas acerca de cómo abordar la estimación de los parámetros de sincronización. Así, resulta deseable que los algoritmos trabajen a la velocidad de muestreo más baja posible; por ello, a la vista de (11.12), se puede decir que lo más habitual es que la estimación de la fase θ se realice después de la estimación del instante de muestreo ϵ , dado que si se conoce ϵ , la estimación de θ y la posterior detección de \mathbf{a} se pueden realizar a periodo de símbolo, dado que el sumatorio $e^{-j\theta} \sum_{n=0}^{N-1} a^*[n]q(nT + \epsilon T)$ en (11.12) incluye sólo una muestra en cada periodo de símbolo.

La gran mayoría de los algoritmos digitales de estimación de ϵ trabajan con una tasa de muestreo $1/T_s$ mayor que la de símbolo $1/T$, y permiten que la relación T/T_s , es decir, el número de muestras por símbolo, no sea necesariamente entera, lo cual es extremadamente importante en la práctica dada la posibilidad de muestrear en el receptor asíncronamente con

respecto al transmisor. A diferencia de los esquemas de estimación de la fase, y fruto de su relación con el muestreo de la señal analógica, los algoritmos de estimación del instante de muestreo son muy variados y en algunos casos difíciles de sistematizar. En el Apartado 11.4 abordaremos algunos esquemas a partir de su método de diseño y su interpretación intuitiva.

11.3. LAZO ENGANCHADO EN FASE (PLL)

La estimación de un parámetro de interés se reduce en muchos casos a la localización del máximo (o mínimo) de un determinado funcional. En particular, el planteamiento de máxima verosimilitud se basa en la maximización de la función de densidad de probabilidad de los datos recibidos con respecto a la variable de interés. En algunos casos se puede obtener dicha estimación explícitamente a partir de los valores observados, aunque en otros resulta mucho más complicado. Afortunadamente, y siempre que el funcional tenga un único máximo (o mínimo), se puede recurrir a procesos iterativos que progresivamente van reduciendo el error con respecto al valor deseado. En comunicaciones digitales resulta muy común el uso de dichos esquemas iterativos: suelen ser relativamente simples de implementar, como se puso de manifiesto en el Capítulo 6, donde se presentó el algoritmo adaptativo LMS para igualación de canal. En este apartado utilizaremos la estimación de fase como ilustración para comprender el funcionamiento de este tipo de esquemas, si bien la estimación de la misma, al igual que la del instante de muestreo y la frecuencia, serán el objeto específico de estudio en sus respectivos apartados. Es importante señalar que las ideas expuestas en este apartado serán empleadas ampliamente en el resto del capítulo para deducir estimadores óptimos de los parámetros de sincronización así como circuitos para su extracción.

Consideremos la fdp conjunta de los datos recibidos (11.12), suponiendo los símbolos conocidos y el instante de muestreo ideal, para el que además se evita la ISI. En tal caso, tenemos que

$$q(nT + \epsilon_0 T) = A[n]e^{j\theta_0} + z[n] \quad (11.19)$$

y que el funcional que debemos maximizar para estimar la fase viene dado por

$$L(\theta) = \mathcal{R}e \left\{ e^{-j\theta} \sum_{n=0}^{N-1} A^*[n]q(nT + \epsilon_0 T) \right\} \quad (11.20)$$

$L(\theta)$ se hará máximo cuando el giro producido por θ sea tal que el argumento complejo de la parte real tenga parte imaginaria nula, es decir,

$$\hat{\theta}_{ML} = \angle \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} A^*[n]q(nT + \epsilon_0 T) \right\} \quad (11.21)$$

La Figura 11.6 muestra la función anterior para $\theta_0 = \pi/4$ para el caso en el que $q(nT + \epsilon_0 T)$ no contiene ruido. En ciertos casos puede resultar más deseable algún esquema que pueda ir refinando la estimación y adaptándola a los posibles cambios de la fase a lo largo de la transmisión. Para ello utilizaremos la derivada como criterio para localizar el máximo, ya

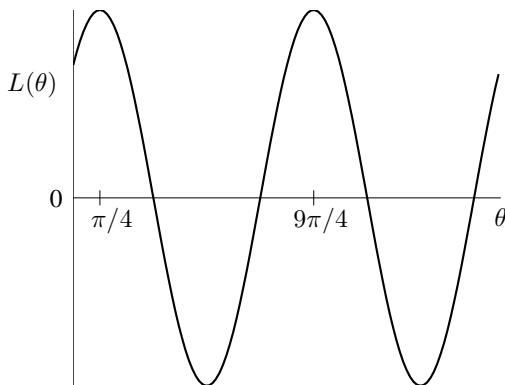


Figura 11.6. Funcional $L(\theta)$ para estimar la fase de los datos observados. $\theta_0 = \pi/4$.

que tal y como se aprecia en la Figura 11.6, la derivada será nula en el valor óptimo de θ , y para el resto de valores será tal que nos acercará a dicho valor óptimo⁶:

$$\hat{\theta}[n+1] = \hat{\theta}[n] + \mu \left. \frac{\partial}{\partial \theta} L(\theta) \right|_{\hat{\theta}[n]} \quad (11.22)$$

donde μ es el paso de adaptación que multiplica el término de la derivada, ya que estamos buscando un máximo⁷. Obsérvese la más que clara similitud con el algoritmo LMS del Apartado 6.7.2, aunque allí buscábamos un mínimo de la función de coste. Si escribimos la ecuación anterior en función de un término de error $e[n]$ que iterativamente se va haciendo más pequeño, tenemos

$$\hat{\theta}[n+1] = \hat{\theta}[n] + \mu e[n] \quad (11.23)$$

con

$$e[n] \doteq \left. \frac{\partial}{\partial \theta} L(\theta) \right|_{\hat{\theta}[n]} \quad (11.24)$$

para la derivada de $L(\theta)$ obtenida como

$$\frac{\partial}{\partial \theta} L(\theta) = \sum_{n=0}^{N-1} \operatorname{Im} \left\{ e^{-j\theta} A^*[n] q(nT + \epsilon_0 T) \right\} \quad (11.25)$$

Esta recursión, así planteada, suscita algunos problemas. Por un lado, si queremos un algoritmo causal, debemos renunciar a calcular la derivada del sumatorio completo de $L(\theta)$ en (11.20), dado que necesitaríamos esperar a completar el bloque de datos desde $n = 0$ hasta $n = N - 1$. Por otro lado, y siendo rigurosos, la evaluación de la derivada en $\hat{\theta}[n]$ obliga a

⁶Aunque la derivada también es cero en el mínimo de $L(\theta)$, correspondiente a $\theta_0 + \pi$, en dicho punto no habrá un equilibrio estable, ya que los valores de la derivada de $L(\theta)$ en su vecindad son tales que nos alejan del mismo.

⁷Si el objetivo fuese un mínimo, la derivada debería cambiarse de signo en la recursión.

sustituir θ por $\hat{\theta}[n]$ en todos los términos del sumatorio en (11.25). Con el fin de conseguir una recursión que pueda ser calculada de forma causal y con una complejidad asumible, redefinimos el error para soslayar los problemas previos:

$$e[n] \doteq \frac{\partial L(\theta, n)}{\partial \theta} \approx \sum_{k=0}^n \alpha^{n-k} \operatorname{Im} \left\{ e^{-j\hat{\theta}[k]} A^*[k] q(kT + \hat{\epsilon}T) \right\} \quad (11.26)$$

donde $0 < \alpha \leq 1$ es un factor que otorga menos peso a los valores estimados de θ_0 más antiguos (si $\alpha \neq 1$), pensando especialmente en aquellos casos en los que la fase a estimar evolucione con el tiempo⁸. En la expresión anterior ya hemos incluido la estimación $\hat{\epsilon}$ de ϵ_0 , dado que este será desconocido en general, aunque suponemos que los sucesivos símbolos $A[n]$ son conocidos. El algoritmo recursivo para obtener de forma aproximada la estimación ML de la fase de los valores recibidos en el caso ideal que estamos considerando quedaría por tanto de la siguiente forma:

$$\hat{\theta}[n+1] = \hat{\theta}[n] + \mu \sum_{k=0}^n \alpha^{n-k} \operatorname{Im} \left\{ e^{-j\hat{\theta}[k]} A^*[k] q(kT + \hat{\epsilon}T) \right\} \quad (11.27)$$

El término corrector es un promedio temporal que sirve para estimar la derivada de $L(\theta)$ utilizando las muestras disponibles en cada instante, de modo que se puede implementar causalmente, tal y como queda recogido en la Figura 11.7. El lazo mostrado se conoce como PLL (“Phase-Locked Loop”), o *lazo enganchado en fase*. El bloque etiquetado como

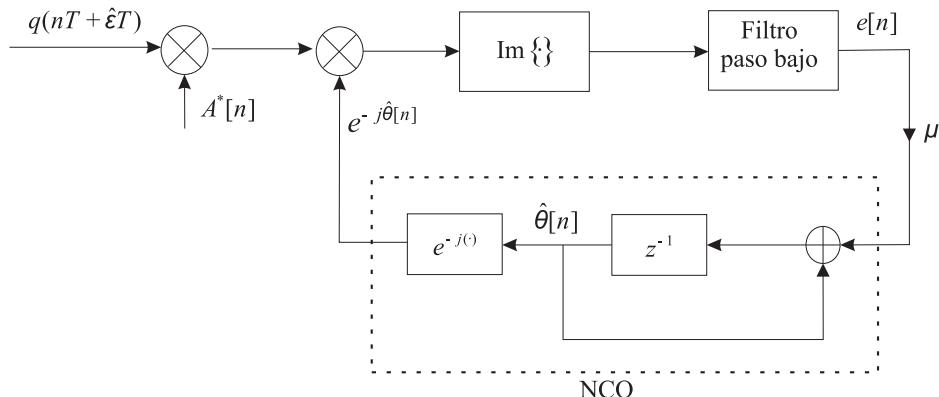


Figura 11.7. Estimador ML recursivo de la fase (PLL).

NCO se corresponde con un *oscilador controlado numéricamente* (“Numerically Controlled

⁸Podría parecer que α se puede escoger arbitrariamente pequeño, con lo que el error $e[n]$ tomaría a su vez valores muy pequeños. Sin embargo, para ser estrictos, habría que acompañar la definición de $e[n]$ de una ganancia que compensase dicho efecto. No lo hemos hecho así dado que cualquier constante multiplicativa en $e[n]$ se puede incluir en el paso de adaptación μ de la Ecuación (11.23). El valor que deberá tomar dicho paso va a depender también de la potencia de la señal de entrada, que normalmente está fijada por un control automático de ganancia.

Oscillator'), que tiene como salida una exponencial compleja cuya fase es el resultado de acumular las muestras presentes a su entrada

$$e^{j\hat{\theta}[n+1]} = e^{j(\hat{\theta}[n] + \mu e[n])} \quad (11.28)$$

con el error $e[n]$ obtenido como el filtrado paso bajo de la secuencia de valores

$$\mathcal{I}m \left\{ e^{-j\hat{\theta}[n]} A^*[n] q(nT + \hat{\epsilon}T) \right\} \quad (11.29)$$

El filtro paso bajo, conocido como *filtro de lazo*⁹ y que denotaremos como $L(z)$ (no confundir con la verosimilitud $L(\theta)$), se corresponde en el caso anterior con

$$L(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} \quad (11.30)$$

En la Figura 11.7 aparece además la constante multiplicativa μ . En el resto del capítulo no la incluiremos explícitamente en los esquemas, dado que se puede considerar bien como parte del filtro de lazo $L(z)$ o bien del NCO.

Ejemplo 11.1

Con el fin de obtener la necesaria dosis de intuición para comprender el funcionamiento de un PLL, analicemos la estimación de θ_0 en (11.19) en el caso sin ruido. Sea $\alpha = 0$, de modo que el filtro de lazo se reduce a $L(z) = 1$, en cuyo caso se habla de un PLL de primer orden. A partir de (11.28) y de (11.29), tenemos la siguiente recursión para la fase estimada:

$$\hat{\theta}[n+1] = \hat{\theta}[n] + \mu \mathcal{I}m \left\{ |A[n]|^2 e^{j(\theta_0 - \hat{\theta}[n])} \right\} \quad (11.31)$$

Para constelaciones PSK, tenemos que la magnitud $|A[n]|^2$ es constante, en cuyo caso, suponiendo esta igual a uno sin pérdida de generalidad, la recursión se reduce a

$$\hat{\theta}[n+1] = \hat{\theta}[n] + \mu \operatorname{sen}(\theta_0 - \hat{\theta}[n]) \quad (11.32)$$

Es decir, el algoritmo dirige la evolución de un NCO a partir de una función no lineal, en concreto $\operatorname{sen}(\cdot)$, de la diferencia entre la fase de entrada y la fase estimada a lo largo de sucesivas iteraciones. Este es el principio de funcionamiento de los PLL que se emplean normalmente en sus diversas variantes, tanto analógicas como digitales.

11.3.1. Análisis del PLL

El análisis de un sistema realimentado no lineal como el lazo enganchado en fase resulta complicado, debido precisamente a que la diferencia de fase $\theta_0 - \hat{\theta}[n]$ ejerce una influencia no lineal sobre el bucle típicamente como $e[n] = \operatorname{sen}(\theta_0 - \hat{\theta}[n])$, tal y como se ha visto en el ejemplo anterior. En este tipo de sistemas hay dos modos de operación:

⁹La denominación *filtro de lazo* se debe al papel que este desempeña en la dinámica del lazo cerrado de ajuste de la fase, como veremos más adelante.

- **Adquisición.** Proceso que transcurre desde el estado inicial hasta que el error es suficientemente pequeño. Es un fenómeno propio de todos los lazos realimentados como el PLL. La adquisición es un fenómeno intrínsecamente no lineal, y acarrea algunos efectos que comentaremos más adelante.
- **Seguimiento o régimen estacionario.** El error es lo suficientemente pequeño como para que tenga validez un estudio lineal del sistema.

A continuación nos centraremos en este último caso. Para comprender con más claridad la dinámica del lazo evitaremos introducir ruido y consideraremos constelaciones de magnitud constante, tal y como se ha hecho en el Ejemplo 11.1. En condiciones de seguimiento se puede considerar que la estimación $\hat{\theta}[n]$ es lo suficientemente cercana a θ_0 para efectuar la aproximación

$$e[n] = \operatorname{sen}(\theta_0 - \hat{\theta}[n]) \approx \theta_0 - \hat{\theta}[n] \quad (11.33)$$

es decir, se opera en el rango en el que la función $\operatorname{sen}(\cdot)$ es aproximadamente lineal. Bajo esta hipótesis, el lazo del PLL de la Figura 11.7 se simplifica en la Figura 11.8. El último

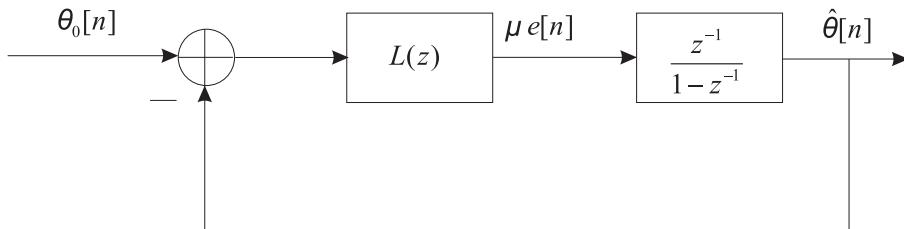


Figura 11.8. Aproximación lineal de un PLL.

bloque etiquetado como $z^{-1}/(1 - z^{-1})$ recoge la función de transferencia del acumulador del NCO, tal y como se desprende de la Ecuación (11.28). Como ya hemos señalado, a efectos del análisis, la constante μ la consideraremos incluida en el filtro de lazo $L(z)$, sin alterar el resultado final. Por tanto, la función de transferencia de la fase de entrada a la fase de salida en la Figura 11.8, para el rango de validez de la aproximación lineal, queda finalmente como

$$\frac{\hat{\Theta}(z)}{\Theta_0(z)} = \frac{L(z)z^{-1}}{L(z)z^{-1} + 1 - z^{-1}} \quad (11.34)$$

donde $\Theta_0(z)$ y $\hat{\Theta}(z)$ representan, respectivamente, las Transformadas Z de las fases $\theta_0[n]$ y $\hat{\theta}[n]$. Conviene destacar en este punto que, aunque la estructura del PLL se ha desarrollado a partir de la suposición de una fase constante, estamos generalizando los resultados a una fase de entrada $\theta_0[n]$ variante con el tiempo. La función de transferencia de la fase de entrada a la fase de salida es válida mientras el error de fase sea lo suficientemente pequeño como para aproximar la función $\operatorname{sen}(x)$ por x , en cuyo caso podemos decir que el PLL se comporta como un filtro lineal que actúa sobre la fase. La dinámica de dicho filtro viene determinada por el filtro de lazo $L(z)$, tal y como se muestra en los siguientes ejemplos. Nos referiremos al *orden del PLL* como el número de polos de su función de transferencia (11.34).

Ejemplo 11.2

Un PLL de primer orden tiene un filtro de lazo de la forma $L(z) = K$, que da lugar a una función de transferencia de fase de la forma

$$\frac{\hat{\Theta}(z)}{\Theta_0(z)} = \frac{Kz^{-1}}{1 + (K - 1)z^{-1}}$$

que para que actúe como filtro paso bajo estable requiere que $0 < K < 1$, ya que tiene un polo en $z = 1 - K$, como fácilmente se puede comprobar. En la Figura 11.9 se muestra la respuesta en frecuencia asociada para $L(z) = 0,5$, claramente con un perfil paso bajo. Consideraremos a continuación un cambio de fase en $n = 0$ que el PLL debe estimar, de la forma $\theta_0[n] = \theta_0 u[n]$, donde $u[n]$ es la función escalón definida en el Capítulo 2. A partir de la función de transferencia anterior, tenemos que

$$\hat{\Theta}(z) = \frac{Kz^{-1}}{1 + (K - 1)z^{-1}} \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}} \theta_0$$

Esta expresión sirve para obtener el comportamiento en el régimen permanente de la fase estimada. Así, por el Teorema del valor final de la Transformada Z (véase Cuadro 2.6), tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\theta}[n] = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \hat{\Theta}(z) = \theta_0$$

La Figura 11.10 muestra cómo la fase de salida $\hat{\theta}[n]$ del NCO se aproxima a su valor final.

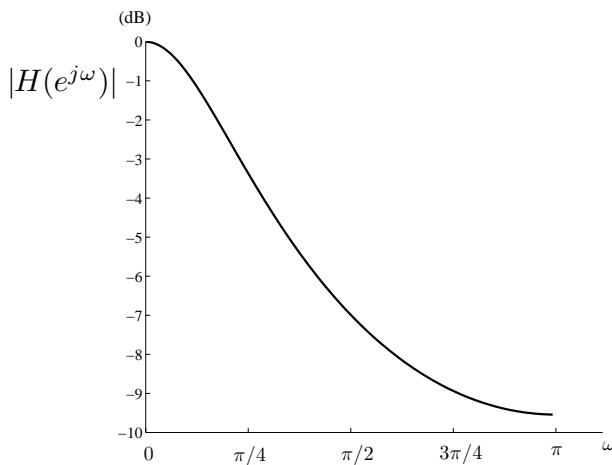


Figura 11.9. Respuesta en frecuencia de un PLL de primer orden $H(e^{j\omega}) = \hat{\Theta}(e^{j\omega})/\hat{\Theta}_0(e^{j\omega})$, $L(z) = 0,5$.

Ejemplo 11.3

Una de las razones por las que cabe esperar una fase de entrada θ_0 variante con el tiempo es la presencia de un error en la frecuencia que no se consigue corregir completamente antes de la estimación de la fase. De este modo la fase a estimar sigue una evolución lineal con el tiempo, que para un error de $\Delta\omega$ radianes se escribe como

$$\theta_0[n] = (\theta_0 + \Delta\omega n)u[n]$$

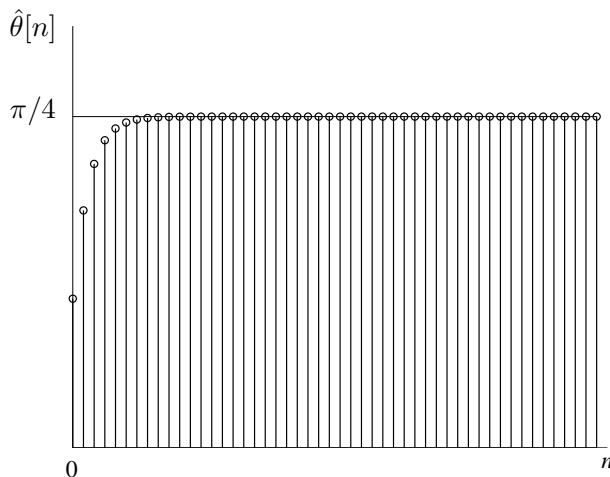


Figura 11.10. Fase de salida de un PLL de primer orden como respuesta a un cambio de fase de la entrada de $\pi/4$. $L(z) = 0,5$.

En este caso, tenemos que la Transformada Z de la fase de entrada es (véase Cuadro 2.5)

$$\Theta_0(z) = \frac{\theta_0}{1 - z^{-1}} + \frac{\Delta\omega z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$$

Dado que la diferencia entre las fases de entrada y de salida se puede escribir en el dominio transformado como

$$\Theta_0(z) - \hat{\Theta}(z) = \left[1 - \frac{\hat{\Theta}(z)}{\Theta_0(z)} \right] \Theta_0(z)$$

y utilizando, al igual que en el ejemplo anterior, (11.34) y el teorema del valor final, tenemos que el error en la estimación de la fase convergerá de la siguiente forma:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\theta_0[n] - \hat{\theta}[n]) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \left[1 - \frac{L(z)z^{-1}}{L(z)z^{-1} + 1 - z^{-1}} \right] \Theta_0(z) = \frac{\Delta\omega}{L(1)}$$

Por tanto, para que el error de fase se haga cero es necesario que el filtro de lazo $L(z)$ tenga un polo en $z = 1$, lo cual sólo es posible para filtros de lazo de orden mayor o igual que uno. Así, el siguiente filtro

$$L(z) = \frac{a + bz^{-1}}{1 - z^{-1}} \quad (11.35)$$

tiene un polo en $z = 1$, y da lugar a una función de transferencia del PLL de segundo orden, es decir, con dos polos. Conviene destacar que sólo es posible seguir la variación temporal de la fase de la entrada si el filtro de lazo $L(z)$ pone a su salida un valor constante para una entrada que se va a cero, para lo cual es necesario que cuente con al menos un polo en $z = 1$. La Figura 11.11 muestra la evolución de la fase de salida del PLL en un caso como este, comprobándose cómo el error de fase tiende a cero. Por tanto, en todas aquellas situaciones en las que se prevea una diferencia apreciable de frecuencia entre la señal de entrada y la generada localmente en el NCO hay que recurrir a un PLL de segundo orden. Para cualquier otro filtro de lazo de primer orden el error de fase será distinto de cero en el límite, tal y como ocurre en la Figura 11.12, en

la que se constata que la fase de la salida no iguala a la de la entrada para un filtro de lazo $L(z)$ de primer orden que no tiene un polo en $z = 1$. En muchos casos puede ser aceptable este error residual si es suficientemente pequeño.

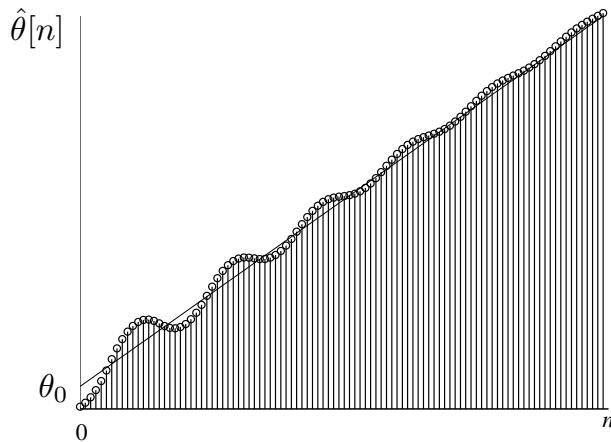


Figura 11.11. Fase de salida con respecto a la fase de entrada en un PLL de segundo orden ante un cambio en la frecuencia de la entrada: $\theta_0[n] = (\theta_0 + \Delta\omega n)u[n]$.

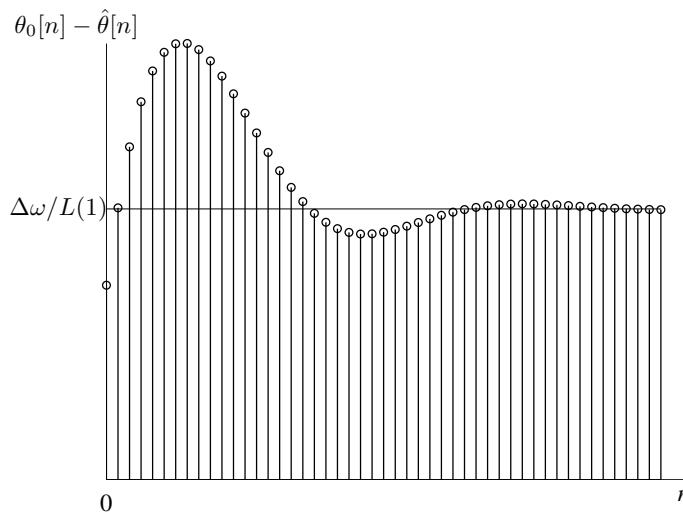


Figura 11.12. Error de fase para un PLL con $L(z) = 0,1(1 - 0,15z^{-1})/(1 - 0,8z^{-1})$.

De todo lo anterior es fácil deducir que el filtro de lazo $L(z)$ determina el comportamiento del PLL en régimen permanente, es decir, el régimen estacionario para el que los errores de fase son pequeños y es válido el análisis lineal estudiado. Se puede decir que un PLL es un mecanismo que sirve para reproducir una fase de entrada, eliminando ruido y filtrando

aquellas variaciones de la misma que caen fuera del ancho de banda del PLL. Dicho ancho de banda se refiere a la función de transferencia en régimen permanente (11.34). La selección del ancho de banda constituye un compromiso importante en la práctica. Por un lado, resulta deseable un ancho de banda suficientemente grande como para seguir cualquier variación temporal de la fase de entrada $\theta_0[n]$, acelerando la fase de adquisición, lo cual resulta importante en las transmisiones a ráfagas. Por otro lado, un mayor ancho de banda permite la entrada de más ruido en el lazo, lo que afecta a la calidad de la estimación de la fase. La disminución del ancho de banda otorga un mayor grado de “limpieza” de la entrada, a costa de ralentizar el proceso de enganche.

Por último, debemos indicar que el término *ruido de fase* suele emplearse en referencia a las fluctuaciones sobre una fase constante de una oscilación. En concreto, si tenemos una oscilación de la forma

$$s[n] = \cos(\omega_0 n + \Delta\omega n + \theta_0 + \phi[n]) \quad (11.36)$$

el término $\phi[n]$ representa el ruido de fase aleatorio, no atribuible a una variación determinista $\Delta\omega$ sobre la frecuencia de referencia o una fase constante θ_0 . La pureza de las oscilaciones viene determinada por el nivel del ruido de fase que presentan. Dicho ruido puede acarrear grandes inconvenientes en algunos tipos de modulaciones, como veremos más adelante.

11.3.2. Otras consideraciones

En la práctica el ajuste en un PLL puede padecer algunos fenómenos que no son explicables con el modelo lineal de los ejemplos anteriores, que sólo es válido si el error es suficientemente pequeño. En concreto, destacamos dos que detallamos a continuación.

- **Fenómeno de encallado** (“hang-up”). Para algunos valores de la diferencia de fase inicial, la fase de adquisición del PLL puede ser muy larga, lo cual plantea grandes problemas en aplicaciones en las que es necesaria una rápida convergencia, por ejemplo, con transmisiones cortas de datos. A partir de la Figura 11.6 se puede comprender que la estimación del máximo de la función a partir de la derivada de la misma presenta un punto de equilibrio inestable en $\theta = 5\pi/4$ radianes, para el que la derivada es cero, aunque cualquier mínima alteración conduce a los puntos de equilibrio estables $\theta = \pi/4$ ó $\theta = 9\pi/4$ radianes. Los valores de la derivada $\partial L(\theta)/\partial\theta$ son muy pequeños en torno al punto de equilibrio inestable, por lo que la convergencia al punto deseado resulta lenta si las condiciones iniciales son tales que se comienza en su proximidad.
- **Deslizamiento de ciclos.** En la Figura 11.6 se aprecia que $L(\theta)$ no contiene un único máximo. En este sentido, se dice que un PLL salta o desliza un ciclo cuando la fase estimada se desplaza entre dos máximos consecutivos. Por ejemplo, si el ruido de la entrada es lo suficientemente grande, la fase estimada puede deslizarse desde $\pi/4$ radianes progresivamente hasta $\pi/4 + 2\pi$ ó $\pi/4 - 2\pi$ radianes. Las consecuencias de este fenómeno distan de ser triviales, como se ilustrará a través de un ejemplo al final

del apartado dedicado a la estimación de fase. Su estudio analítico es extremadamente complicado, aunque conviene destacar que su probabilidad de aparición debe ser lo más baja posible en un sistema práctico.

11.4. SINCRONIZACIÓN DE SÍMBOLO

La sincronización de símbolo estima los instantes de tiempo en los que tomar las muestras que deben entrar al detector o decisor, lo que equivale a ubicar la posición de máxima apertura del diagrama de ojo mostrado en el Capítulo 5. Tal y como se ha puesto de manifiesto en el Apartado 11.2, el receptor digital óptimo muestrea la señal de entrada en instantes que no tienen por qué incluir los correspondientes a la máxima apertura del diagrama de ojo. Sin embargo, con una tasa de muestreo superior a la frecuencia de Nyquist es posible interpolar cualquier valor de la señal que porta la información una vez que se estime el instante adecuado. En este apartado nos centraremos en este tipo de técnicas, partiendo para ello de criterios de máxima verosimilitud que, con la ayuda de aproximaciones, permiten obtener mecanismos realizables para extraer de forma digital las muestras deseadas a partir de la señal analógica de entrada al receptor.

En el Apartado 11.2 se detalló la estructura del receptor óptimo en presencia de incertidumbre en las referencias temporales. En concreto, para una señal recibida de la forma

$$r(t) = s(t) + z(t) = \sum_{n=0}^{N-1} A[n]g_r(t - nT - \epsilon_0 T)e^{j\theta_0} + z(t) \quad (11.37)$$

el receptor de la Figura 11.4 precisa del conocimiento del parámetro ϵ_0 para interpolar los valores adecuados a la salida del filtro receptor $f(kT_s)$, el cual se implementa en tiempo discreto. Tal y como señalamos en dicho apartado, la estimación de ϵ_0 y θ_0 será preferiblemente abordada por separado de la detección de los símbolos, por razones de complejidad. En este apartado nos centraremos en la estimación de ϵ_0 , para lo que partiremos de la fdp de las muestras recibidas, que deberemos maximizar como función de ϵ . Por conveniencia, repetimos la Expresión (11.12):

$$f_{\mathbf{r} | \mathbf{A}, \epsilon, \theta}(\mathbf{r} | \mathbf{a}, \epsilon, \theta) = C \cdot \exp \left\{ \frac{2}{\sigma_n^2} \operatorname{Re} \left\{ e^{-j\theta} \sum_{n=0}^{N-1} a^*[n]q(nT + \epsilon T) \right\} \right\}$$

Dado que en este caso únicamente nos interesa la influencia del parámetro ϵ en la anterior fdp, podemos obtener la fdp marginal de la misma con respecto a ϵ , $f_{\mathbf{r} | \epsilon}(\mathbf{r} | \epsilon)$, para lo que es necesario promediar con respecto a todas las posibles secuencias de símbolos $\{\mathbf{a}_i\}$, $i = 1, \dots, M^N$ y la fase θ :

$$f_{\mathbf{r} | \epsilon}(\mathbf{r} | \epsilon) = \int f_\theta(\theta) \sum_{\{\mathbf{a}_i\}} f_{\mathbf{r} | \mathbf{A}, \epsilon, \theta}(\mathbf{r} | \mathbf{a}_i, \epsilon, \theta) p_A(\mathbf{a}_i) d\theta \quad (11.38)$$

siendo C una constante. El promediado que se requiere con respecto a la secuencia de símbolos a en la fdp anterior no permite llegar a ninguna expresión manejable analíticamente para las distribuciones habituales de símbolos, salvo que se efectúe algún tipo de aproximación. En este tipo de situaciones es común recurrir a escenarios extremos, por ejemplo, con niveles de ruido muy altos con relación a la señal deseada o viceversa. En el caso que nos ocupa, el promediado anterior para una relación señal a ruido muy baja se presenta en el Apéndice 11.B. De este modo, la exponencial en (11.12) se puede aproximar por los primeros términos de su desarrollo en serie de Taylor, y la función a maximizar, tras promediar con respecto a los símbolos y la fase, queda como sigue:

$$L(\epsilon) = \sum_{n=0}^{N-1} |q(nT + \epsilon T)|^2 \quad (11.39)$$

Si bien la función anterior se ha obtenido para una SNR baja, sirve como punto de partida para numerosos algoritmos que pueden operar en condiciones de ruido muy diversas, incluso aquéllas para las que la aproximación empleada es menos precisa. La fase de muestreo óptima es tal que la energía media de las muestras tomadas a periodo de símbolo se hace máxima, que cuantifica lo que en el Capítulo 5 se definía como el instante de máxima apertura vertical del ojo.

Ejemplo 11.4

En la Figura 11.13 se muestra el diagrama de ojo de una constelación binaria antipodal, correspondiente a un factor de caída $\alpha = 0,5$, y para un caso sin ruido. Junto a él, la función (11.39), cuyo máximo coincide con el instante de máxima apertura del ojo. Como se puede apreciar, la función $L(\epsilon)$, que ha sido obtenida a partir del criterio ML para una SNR baja, sirve para estimar el instante de muestreo adecuado también en ausencia de ruido. La función $L(\epsilon)$ es periódica con ϵ , ya que este parámetro sólo toma valores con significado diferente en un rango de tamaño 1; en este caso el rango considerado es $[-1/2, 1/2]$.

La maximización de la función $L(\epsilon)$ proporciona el instante de muestreo adecuado. Ahora bien, la búsqueda exhaustiva del máximo requiere interpolar los valores $q(nT + \epsilon T)$ a la salida del filtro receptor para todas las posibles fases de muestreo relativas ϵ . Sin embargo, es posible evitar dicha búsqueda manipulando adecuadamente la función $L(\epsilon)$. A tal efecto, la primera solución pasa por reescribir $L(\epsilon)$, de modo que se pueda extraer la posición de su máximo explícitamente. La segunda aproximación al problema estima la derivada de $L(\epsilon)$ y la iguala a cero. Ambas alternativas dan lugar a esquemas de sincronización diferentes, que funcionan sin el conocimiento de los símbolos transmitidos y la fase, y que pasamos a presentar a continuación.

La periodicidad de la función $L(\epsilon)$ permite utilizar un desarrollo en serie de Fourier para su representación, de donde podremos extraer la posición relativa del máximo de $L(\epsilon)$ a partir de la fase de una exponencial compleja. Así, en el Apéndice 11.C se demuestra que el uso de pulsos en raíz cuadrada de coseno alzado limita el rango de variación de dicha

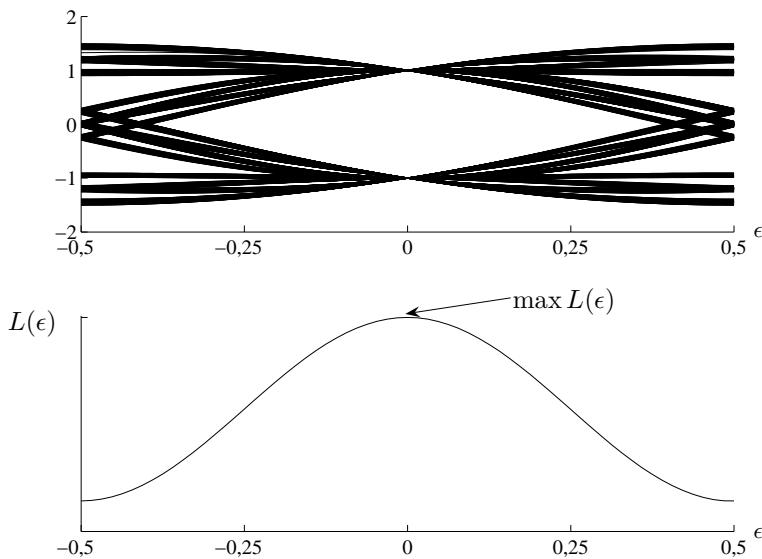


Figura 11.13. Diagrama de ojo de una constelación binaria antipodal y función $L(\epsilon)$. Caso sin ruido; $\alpha = 0,5$.

periodicidad, de modo que la función $L(\epsilon)$ se puede aproximar como

$$L(\epsilon) = \sum_{n=0}^{N-1} |q(nT + \epsilon T)|^2 \approx c_0 + 2\Re \{c_1 e^{j2\pi\epsilon}\} \quad (11.40)$$

con c_0 un parámetro independiente de ϵ , y

$$c_1 = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N_s} \sum_{k=0}^{N_s-1} |q((nN_s + k)T_s)|^2 e^{-j\frac{2\pi}{N_s}k} \right] \quad (11.41)$$

siendo $N_s = T/T_s$ el número de muestras por periodo de símbolo que maneja el receptor digital de la Figura 11.4. Es decir, $L(\epsilon)$ es una función sinusoidal con respecto a ϵ , como la que se muestra en la Figura 11.13, en la que sólo aparece representado un periodo de la misma. La razón estriba en la cicloestacionariedad del proceso aleatorio $\{q(t)\}$ por la que los estadísticos de $q(t)$ son periódicos con periodo T . En concreto, aunque tengamos que $E\{q(nT_s)\} = 0$, el valor cuadrático medio $E\{|q(nT_s)|^2\}$ es periódico con periodo $N_s = T/T_s$. La información relativa a ϵ_0 se encuentra en la fase de la componente espectral asociada a este periodo, de tal modo que el valor de ϵ que hace máximo $L(\epsilon)$ será aquel que produzca una rotación sobre c_1 en (11.40) tal que $c_1 e^{j2\pi\epsilon}$ sea real, en concreto,

$$\hat{\epsilon} = -\frac{1}{2\pi} \angle c_1 \quad (11.42)$$

Este esquema de estimación se denomina *algoritmo de Oerder y Meyr*, quienes lo desarrollaron a finales de los años ochenta.

En la práctica la estimación de ϵ_0 se va actualizando de forma permanente. Así, para $N_s = 4$ tenemos (véase Figura 11.14)

$$\hat{\epsilon}[m] = -\frac{1}{2\pi} \triangleleft \left\{ \sum_{k=4Nm}^{4N(m+1)-1} |q(kT_s)|^2 (-j)^k \right\}, \quad m \text{ entero} \quad (11.43)$$

donde hemos empleado que $e^{-jk\pi/2} = (-j)^k$. En la ecuación anterior m indica el índice de la estimación calculada a partir de N símbolos, equivalentes a $4N$ muestras. El valor de $\hat{\epsilon}$ se va calculando para sucesivos bloques de N símbolos, para de este modo seguir las variaciones de ϵ_0 . El número de símbolos N dentro de la ventana empleada para determinar $\hat{\epsilon}$ condiciona el ancho de banda de seguimiento del algoritmo, es decir, la capacidad para seguir las variaciones del instante de muestreo óptimo. Cuanto más larga sea la ventana, menor será la varianza del valor estimado de ϵ_0 , y menor será también el rango de variación de ϵ_0 que el algoritmo puede asimilar. Es importante señalar que la función \triangleleft obtiene la fase

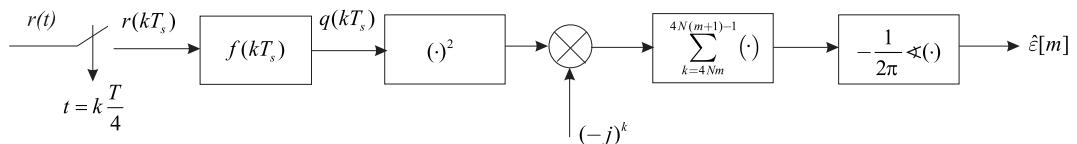


Figura 11.14. Diagrama de bloques del estimador de Oerder y Meyr. $N_s = T/T_s = 4$.

módulo 2π , es decir, en el rango $(-\pi, \pi]$, por lo que la estimación $\hat{\epsilon}$ pertenecerá al rango $[-1/2, 1/2]$, como se deduce de (11.43). Dicha estimación es empleada posteriormente por un interpolador que obtiene $q(nT + \hat{\epsilon}T)$ a partir de las muestras $q(kT_s)$; este esquema es viable, dado que el sobremuestreo necesario para estimar ϵ garantiza la disponibilidad de las muestras necesarias para interpolar en cualquier instante la señal $q(t)$ a la salida del filtro adaptado. Un aspecto bastante técnico a tener en cuenta es la asincronía en el muestreo del receptor, es decir, que el cociente T/T_s no es exactamente entero, y que la posición relativa del instante óptimo con respecto a las muestras tomadas en el receptor puede variar de un bloque de N muestras al siguiente. Esto se puede visualizar en la Figura 11.5, en la que la posición relativa del instante de muestreo óptimo con respecto a las (dos) muestras por intervalo de símbolo va evolucionando con el tiempo. Desde luego la situación está exagerada en la figura, ya que la evolución en un caso práctico es mucho más lenta, pero da pie a pensar en los posibles problemas que suscita que el valor óptimo de ϵ se encuentre cerca de $-1/2$ ó $1/2$. Este tipo de ambigüedades es propio de los algoritmos no realimentados, y también se produce en los algoritmos de estimación de fase hacia adelante, tal y como veremos. Para manejarlos es necesario hacer un seguimiento de la evolución de los valores estimados con la ayuda de algoritmos del tipo “unwrapping” para “desenrollar” la fase, que garanticen la continuidad de las diferentes estimaciones, tal y como estudiaremos en el Apartado 11.5.2.

11.4.1. Esquemas realimentados

La segunda forma de abordar la maximización de (11.39) pasa por estimar su derivada y emplearla en un típico esquema de gradiente. En el caso que nos ocupa, tenemos que

$$\hat{\epsilon}[n+1] = \hat{\epsilon}[n] + \mu \left. \frac{\partial L(\epsilon)}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=\hat{\epsilon}[n]} \quad (11.44)$$

Derivando la función $L(\epsilon)$ en (11.39) con respecto a ϵ tenemos

$$\frac{\partial L(\epsilon)}{\partial \epsilon} = \frac{\partial}{\partial \epsilon} \sum_{n=0}^{N-1} |q(nT + \epsilon T)|^2 = 2T \sum_{n=0}^{N-1} \operatorname{Re} \left\{ q(nT + \epsilon T) \frac{\partial}{\partial \epsilon} q^*(nT + \epsilon T) \right\} \quad (11.45)$$

En este punto se debe tener especial cuidado: a pesar de que estamos trabajando con muestras, la expresión $\partial q(\cdot)/\partial \epsilon$ se refiere a la derivada de la función continua $q(t) = r(t) * f(t)$, con $r(t)$ la señal de entrada y $f(t)$ la respuesta del filtro receptor en tiempo continuo. Para poder proceder en tiempo discreto con el algoritmo es necesario aproximar la derivada $\partial q^*(\cdot)/\partial \epsilon$ a partir de las muestras de $q^*(t)$. Por tanto, y aunque podría parecer a la vista de la señal de error (11.45) que el algoritmo realimentado que estamos presentando puede trabajar a tasa de símbolo, para aproximar la derivada se hace necesario tomar, por ejemplo, dos muestras por intervalo de símbolo, en los instantes de la forma $(n + 1/2)T$, además de nT

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon} q^*(nT + \epsilon T) \approx \frac{1}{T} q^* \left(nT + \epsilon T + \frac{T}{2} \right) - \frac{1}{T} q^* \left(nT + \epsilon T - \frac{T}{2} \right) \quad (11.46)$$

La derivada así aproximada debe emplearse en el algoritmo de gradiente (11.44), y constituirá la señal de error a minimizar en el correspondiente esquema recursivo:

$$\hat{\epsilon}[n+1] = \hat{\epsilon}[n] + \mu e[n] \quad (11.47)$$

con

$$e[n] = \sum_{k=0}^n \operatorname{Re} \{ q(kT + \hat{\epsilon}[k]T) [q^*(kT + T/2 + \hat{\epsilon}[k]T) - q^*(kT - T/2 + \hat{\epsilon}[k-1]T)] \} \quad (11.48)$$

Hemos suprimido el factor 2 presente en (11.45), que se considera incluido en la constante μ . El sumatorio en (11.48) se corresponde con un filtrado paso bajo, el cual se efectúa en el filtro de lazo $L(z)$ en el esquema del sincronizador mostrado en la Figura 11.15 y que, como tal, puede incluir algún tipo de ponderación como en la Ecuación (11.26). El bloque que estima el error calcula en cada periodo de símbolo la parte real del producto de $q(nT + \epsilon[n]T)$ por el valor estimado de $\partial q^*(nT + \epsilon T)/\partial \epsilon$ en $\epsilon = \epsilon[n]$. En el esquema se incluye el interpolador que debe obtener las muestras de la señal, en este caso dos por periodo de símbolo, a partir de las muestras de la señal filtrada $q(kT_s)$ y de la información proporcionada por el estimador. El interpolador podría estar colocado antes del filtro de

respuesta $f(kT_s)$, y de este modo dicho filtro operaría con dos muestras por periodo de símbolo independientemente de la tasa a la que han sido tomadas las muestras de entrada $1/T_s$.

Este tipo de esquemas son denominados *pronto-tarde* (“early-late”), debido a que tratan de ubicar el instante de muestreo óptimo usando muestras adelantadas y retrasadas con respecto al mismo, con la premisa de que la señal recibida es simétrica en promedio con respecto al instante de muestreo óptimo. Para confirmar esta idea, no hay más que ver un diagrama de ojo como el de la Figura 11.13, en el que se aprecia la simetría en torno al instante de muestreo correcto. El uso de un algoritmo de gradiente propicia una estrategia

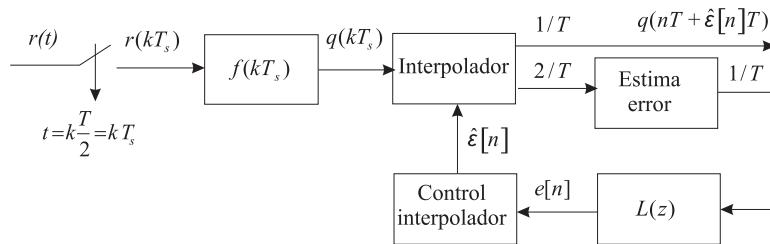


Figura 11.15. Bucle pronto-tarde de recuperación del instante de muestreo. Los valores $1/T$ y $2/T$ indican la tasa de muestras por segundo en aquellas ramas en las que aparecen.

realimentada que va refinando la estimación, en este caso del instante de muestreo, hasta que el promedio del error es nulo. Esto conlleva un estado transitorio inicial, que puede ser asumible en aquellas situaciones en las que no sea necesaria una adquisición inicial demasiado rápida. Dicho de otro modo, el uso de esquemas realimentados quedará descartado siempre que la velocidad de adquisición deba ser la mayor posible, por ejemplo, en la recepción de tramas de símbolos muy cortas. En la Figura 11.16 se presenta la evolución de $\hat{\epsilon}[n]$ junto con los valores muestreados a periodo de símbolo. Como se observa, una vez lograda la convergencia, el muestreo resulta ser el adecuado. El valor estimado del instante de muestreo fluctúa ligeramente en torno al valor correcto, causando un pequeño ruido en los valores muestreados. Ello se debe a que cualquier esquema de sincronización tiene siempre un error asociado, que no sólo aparece por causa del ruido aditivo, sino que también es debido a la propia aleatoriedad de los símbolos. En cualquier caso, las fluctuaciones en torno al valor correcto se pueden reducir disminuyendo el paso μ en (11.44), lo cual alarga el régimen transitorio, y dificulta el seguimiento del instante de muestreo cuando la posición relativa del mismo cambia debido a una diferencia en los relojes de símbolo, tal y como ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 11.5

En la Figura 11.17 se puede observar el instante de muestreo estimado junto con la parte real de los valores que se muestrean con el mismo, en presencia de un desajuste en el reloj de muestreo del receptor de una parte por mil con respecto al reloj de símbolo del transmisor. En este caso el receptor está muestreando a una frecuencia de símbolo igual a 1,001 veces la frecuencia de símbolo empleada en el transmisor y que, por tanto, marca el ritmo al que están llegando los símbolos. En consecuencia, el error en el instante de muestreo se acumula hasta completar

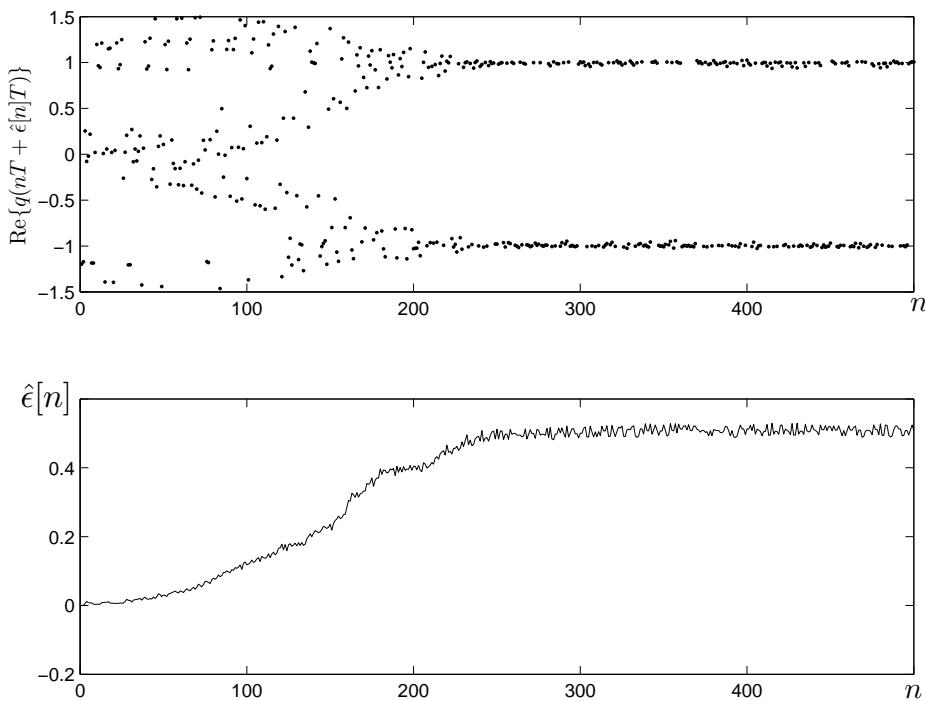


Figura 11.16. Uso de un esquema pronto-tarde para recuperar el instante de muestreo en una modulación lineal. Factor de caída del coseno alzado $\alpha = 0,5$; constelación QPSK; ruido y errores de interpolación despreciables.

un símbolo completo por cada 1000 símbolos recibidos, como se deduce de la pendiente de la evolución de $\hat{\epsilon}[n]$.

Otro algoritmo perteneciente a esta familia es el *algoritmo de Gardner*, que también se puede obtener a partir del criterio ML, con aproximaciones que no serán detalladas aquí. El término de error en el algoritmo de Gardner se puede escribir como

$$e[n] = \sum_{k=0}^n \mathcal{R}e \left\{ q^* \left(kT - \frac{T}{2} + \hat{\epsilon}[k-1]T \right) \cdot (q((k-1)T + \hat{\epsilon}[k-1]T) - q(kT + \hat{\epsilon}[k]T)) \right\} \quad (11.49)$$

Obsérvese que al igual que ocurría con el error (11.48) del esquema pronto-tarde, se usan conjuntamente en cada instante de tiempo k las estimaciones $\hat{\epsilon}[k-1]$ y $\hat{\epsilon}[k]$, evitando de ese modo actualizar la interpolación de los valores de $q(t)$ que intervienen dos veces en el cálculo del error.

La diferencia entre ambos algoritmos queda clara tras una cuidadosa comparación de las señales de error en (11.48) y (11.49), analizando en cada caso bajo qué condiciones el error se hace pequeño. Resulta de nuevo muy útil acudir al diagrama de ojo de la Figura 11.13 para ofrecer una interpretación intuitiva. En el esquema pronto-tarde el instante de muestreo se obtiene buscando aquel punto tal que los valores equidistantes en $\pm T/2$ son

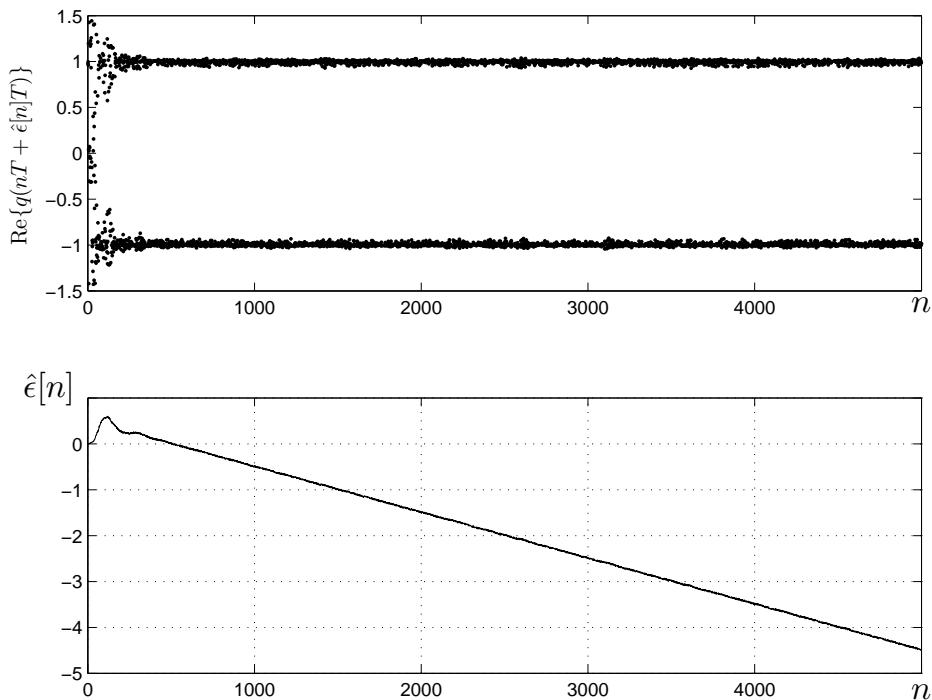


Figura 11.17. Uso de un esquema pronto-tarde para recuperar el instante de muestreo en presencia de un desajuste en los relojes de muestreo. Factor de caída del coseno alzado $\alpha = 0,5$; constelación QPSK; ruido y errores de interpolación despreciables.

iguales en promedio. En el algoritmo de Gardner se busca que los valores separados $T/2$ del instante de muestreo óptimo se correspondan con cruces por cero; así, para símbolos consecutivos de polaridad opuesta, el valor intermedio será muy pequeño, mientras que el signo de la diferencia será tal que propiciará el desplazamiento del instante de muestreo en la dirección adecuada. Es decir, en el primer caso se buscan los máximos de la forma de onda y en el segundo los cruces por cero a ambos lados del máximo en la Figura 11.13. Estas afirmaciones son válidas en media, ya que las señales están compuestas por numerosos símbolos, por lo que las estimaciones serán ruidosas incluso en ausencia de ruido de fondo. La aleatoriedad de los símbolos, junto con los efectos de la interpolación no ideal, son elementos que contribuyen a deteriorar los valores estimados.

Para concluir este apartado, cabe hacer algunas consideraciones acerca de la recuperación del instante de muestreo:

- En términos de prestaciones y a favor de una implementación enteramente digital resulta más conveniente efectuar el muestreo a la salida del filtro “anti-aliasing” de entrada $f_{aa}(t)$ por encima de la velocidad de símbolo, para posteriormente realizar el filtro adaptado e interpolar su salida a partir de la información proporcionada por el estimador del instante de muestreo. Si el sistema requiere de un igualador, en algunos casos puede ser conveniente hacerlo funcionar a la tasa fijada por el teorema del

muestreo, es decir, con dos muestras por periodo de símbolo o más, ya que será menos sensible a los errores producidos en la recuperación del instante de muestreo. Este tipo de igualadores se denominan fraccionarios, y fueron estudiados en el Apartado 6.5.

- La estimación puede efectuarse en lazo cerrado o hacia adelante, esto es, sin realimentación. Los métodos hacia adelante son más comunes en sistemas que necesitan una rápida adquisición, como los que trabajan a ráfagas. En aquellos sistemas en los que se puede tolerar un cierto periodo de adquisición inicial, los esquemas realimentados son muy empleados por su mayor simplicidad.
- La práctica totalidad de los algoritmos de sincronización se basa en la independencia entre los símbolos transmitidos. En concreto, una secuencia de símbolos iguales de gran longitud resulta problemática a la hora de extraer el instante de muestreo más adecuado. Así, muchos sistemas reales incorporan aleatorizadores para evitar las ocasionales ráfagas de símbolos iguales que con cierta probabilidad podrían ocurrir, y que dañarían las prestaciones de la sincronización. En concreto, basta con sumar en el transmisor una secuencia de seudoruido (Apartado 8.2.9) a la secuencia binaria que se desea transmitir; en el receptor la misma secuencia debe ser añadida, en ambos casos con sumas módulo-2, tal y como se muestra en la Figura 11.18. Evidentemente, es necesaria la sincronización de ambas secuencias, lo cual pertenece a una etapa de sincronización de nivel superior.

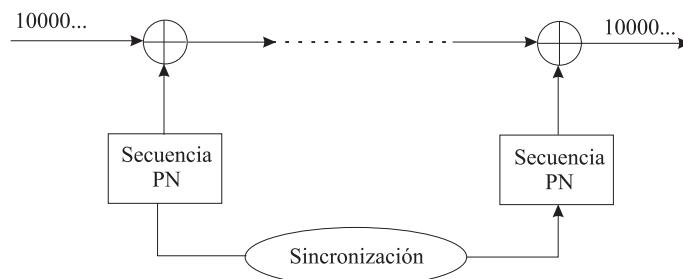


Figura 11.18. Aleatorizado y desaleatorizado añadiendo una secuencia de seudoruido en módulo-2.

11.5. RECUPERACIÓN DE FASE

En los sistemas paso banda, introducidos en el Apartado 5.4, es necesario efectuar etapas de conversión en frecuencia, que en última instancia dejan una fase residual fruto de la falta de sincronización entre los osciladores de los equipos transmisor y receptor. Dicha fase residual θ_0 se aprecia en la expresión de la señal en banda base que hemos venido manejando

hasta el momento

$$r(t) = \sum_{n=0}^{N-1} A[n]g_r(t - nT - \epsilon_0 T) e^{j\theta_0} + z(t) \quad (11.50)$$

Con el fin de garantizar una correcta detección de los símbolos transmitidos $A[n]$ hay que compensar la rotación de la constelación de símbolos complejos que provoca el término $e^{j\theta_0}$, y que se puede apreciar en la Figura 11.19. Los receptores digitales suelen incorporar la recuperación de fase después de la recuperación del instante de muestreo, ya que esta última tarea necesita un mayor número de muestras por intervalo de símbolo. Abordaremos el problema igualmente desde una perspectiva de máxima verosimilitud, suponiendo que el error en frecuencia es despreciable. De lo contrario, la aproximación de fase quasi-constante no se podría realizar, y los métodos expuestos dejarían de funcionar. Aunque trabajaremos de forma digital, lo haremos a tasa de símbolo, tal y como quedó de manifiesto en el Apartado 11.2, donde se presentó el receptor ML óptimo.

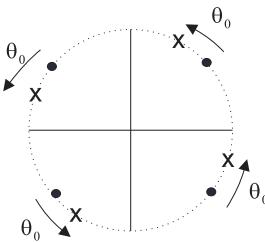


Figura 11.19. Símbolos de una constelación QPSK rotados θ_0 radianes.

11.5.1. Recuperación de fase dirigida por decisión

Recordemos que la práctica totalidad de los algoritmos que estamos presentando se derivan de una formulación de máxima verosimilitud, es decir, buscan los parámetros que hacen máxima la evaluación de la función de densidad de probabilidad en los datos observados. Este mismo planteamiento se va a emplear para obtener estimadores de fase. Con este fin, tomamos como punto de partida la maximización del funcional $L(\theta)$ en la Ecuación (11.20). Aunque, como ya hemos mencionado, el estimador óptimo abordaría la estimación conjunta de la fase de la portadora, los símbolos transmitidos y el instante de muestreo, el sentido práctico obliga a desglosar dichas tareas. Por tanto, si consideramos como instante de muestreo el estimado en una etapa previa, tenemos varias opciones para tratar con los símbolos $A[n]$. La primera de ellas se puede utilizar cuando los símbolos enviados son conocidos, por ejemplo durante el preámbulo de una transmisión. Este caso fue considerado en el Apartado 11.3, donde se concluyó que la estimación recursiva de la fase conduce al lazo recuperador de portadora conocido como PLL. Del mismo modo podemos abordar el caso *dirigido por decisión*, en donde hacemos uso de los símbolos decididos. El error en (11.26) se escribe

ahora como

$$e[n] \doteq \sum_{k=0}^n \alpha^{n-k} \operatorname{Im} \left\{ e^{-j\hat{\theta}[k]} \hat{A}^*[k] q(kT + \hat{\epsilon}T) \right\} \quad (11.51)$$

donde se han sustituido los símbolos por las decisiones correspondientes. El diagrama completo del algoritmo se muestra en la Figura 11.20 y se conoce como *PLL dirigido por decisión* (“*Decision Directed PLL*”), obteniéndose como solución ML de la estimación de la fase en presencia de una señal moduladora. El oscilador controlado numéricamente (NCO) sintetiza el fasor $e^{-j\hat{\theta}[n]}$. Naturalmente, cuando el nivel de ruido aumenta, también lo hace la probabilidad de que aparezcan errores en las decisiones, por lo que las prestaciones de este tipo de esquema se degradan. En tal caso cobra sentido plantear una recuperación en la que no sean necesarios los símbolos transmitidos (ya sean de entrenamiento o decididos). Esta solución se conoce como *no asistida por los datos*.

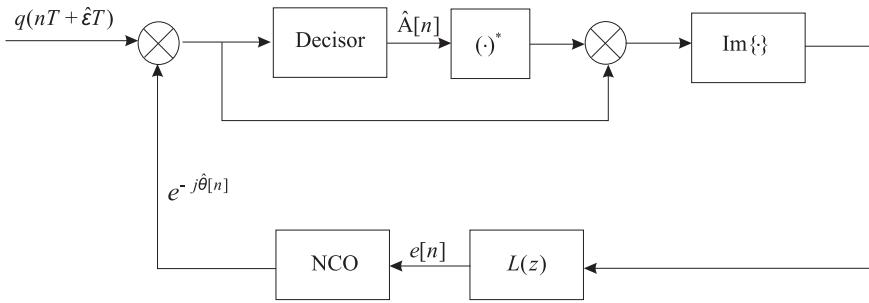


Figura 11.20. PLL dirigido por decisión para recuperación de fase.

11.5.2. Recuperación de fase no asistida por los datos

A continuación estudiamos cómo resolver el problema de la adquisición de la fase sin ayuda de los símbolos y con el instante de muestreo conocido. Supongamos que una vez recuperado este último no hay interferencia entre símbolos, y que por tanto las muestras se pueden escribir como

$$q(nT + \hat{\epsilon}T) = A[n]e^{j\theta_0} + z[n], \quad n = 0, \dots, N - 1 \quad (11.52)$$

con $z[n]$ muestras complejas de ruido blanco gausiano circularmente simétrico de media cero y varianza σ_z^2 . La fdp de las muestras q se puede escribir por tanto como

$$f_{\mathbf{q}|\mathbf{A},\theta}(\mathbf{q} | \mathbf{a}, \theta) = \frac{1}{(\pi\sigma_z^2)^N} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma_z^2} \|\mathbf{q} - e^{j\theta} \mathbf{a}\|^2 \right\} \quad (11.53)$$

donde

$$\mathbf{q} \doteq [q(0 + \hat{\epsilon}T) \quad q(T + \hat{\epsilon}T) \quad \cdots \quad q((N-1)T + \hat{\epsilon}T)]^T \quad (11.54)$$

y

$$\mathbf{a} \doteq [\ a[0] \ a[1] \ \cdots \ a[N - 1] \]^T \quad (11.55)$$

Para obtener un estimador de θ_0 independiente de los símbolos es necesario promediar la fdp (11.53) con respecto a los mismos, tal y como se detalló en el Apartado 11.2. Cuando se estudió la estimación del instante de muestreo ya se apreció la dificultad de dicho promediado, y la necesidad de recurrir a aproximaciones. Las más comunes suponen una relación señal a ruido extrema. Así, algunas manipulaciones algebraicas que no mostraremos aquí muestran que la suposición de una SNR elevada conducirá al PLL dirigido por decisión del apartado anterior, dado que en este caso los símbolos decididos son muy fiables. Por lo tanto, cuando la relación señal a ruido es buena, resulta óptimo desde el punto de vista de máxima verosimilitud el uso de los símbolos detectados para guiar la corrección de la fase.

En condiciones de SNR reducida, por ejemplo en sistemas con una ganancia de codificación muy alta que permita trabajar en presencia de mucho ruido, los símbolos decididos antes del decodificador no son fiables. Sin embargo, es posible extraer igualmente información acerca de la fase cuando los símbolos empleados pertenecen a una constelación invariante a rotaciones de $2\pi/M$ radianes. Así, para constelaciones PSK, M coincide con el número de símbolos. Por otro lado, si usamos una constelación QAM, entonces $M = 4$. La aplicación del criterio ML, aunque complicada en este caso, conduce a un resultado revelador: para el tipo de constelaciones invariante a rotaciones considerado, la estimación de fase se debe efectuar a partir de la potencia M -ésima de las muestras recibidas, $q^M(nT + \hat{\epsilon}T)$. Así, considerando el caso ideal para el que el instante de muestreo es tal que no hay ISI, tenemos

$$q^M(nT + \hat{\epsilon}T) = \left(A[n]e^{j\theta_0} + z[n] \right)^M = A^M[n]e^{jM\theta_0} + z'[n] \quad (11.56)$$

donde el nuevo término de ruido aditivo $z'[n]$ se corresponde con el término ruidoso que queda tras la exponentiación. En el caso particular de una constelación M-PSK, los símbolos son de la forma $\sqrt{E_s} \exp\{j2\pi m/M\}$, $m = 0, 1, \dots, M - 1$ (véase Capítulo 5), con lo que $A^M[n] = E_s^{M/2}$, desapareciendo así la aleatoriedad causada por los mismos:

$$q^M(nT + \hat{\epsilon}T) = E_s^{M/2}e^{jM\theta_0} + z'[n] \quad (11.57)$$

Si se trata de una constelación QAM entonces la exponentiación no consigue reducir todos los símbolos al mismo valor, con lo que permanece una aleatoriedad residual que degrada las prestaciones del estimador que ahora pasamos a presentar, tanto más cuanto mayor sea el orden de la constelación. Así, el criterio ML proporciona la estimación de la fase $\hat{\theta}_{ML}$ como el máximo de la siguiente función de coste, en la que los símbolos en (11.20) han sido sustituidos por la media de su potencia M -ésima¹⁰

$$L(\theta) = \sum_{n=0}^{N-1} \mathcal{R}e \left\{ e^{-jM\theta} E \left\{ A^{*M} \right\} q^M(nT + \hat{\epsilon}T) \right\} \quad (11.58)$$

¹⁰El criterio ML lleva a un resultado similar a los anteriormente considerados, a pesar de que el término de ruido $z'[n]$ ya no es gausiano. Los cálculos son, no obstante, complicados, y no serán incluidos en este texto.

El término $E \{ A^{*M} \}$ representa la media de los símbolos conjugados de la constelación elevados a la M -ésima potencia. Es importante resaltar qué diferencia esta función de coste de la correspondiente al caso en el que los símbolos son conocidos (11.20). Si pensamos en el caso M-PSK, el criterio ML elimina la modulación de los símbolos mediante la potencia M -ésima, y posteriormente promedia para minimizar los efectos del ruido. Es decir, aunque no se conozcan los símbolos, se aprovecha una propiedad que cumplen los mismos. Evidentemente el ruido perjudicará más a este estimador que a aquél que conoce los símbolos transmitidos, aunque de este modo se evita el envío de símbolos de entrenamiento.

La función de coste (11.58) se hace máxima para el siguiente valor de la fase:

$$\hat{\theta}_{ML} = \frac{1}{M} \triangleleft \left\{ E \{ A^{*M} \} \sum_{n=0}^{N-1} q^M(nT + \hat{\epsilon}T) \right\} \quad (11.59)$$

La versión realimentada de este estimador autónomo, que no se basa en el conocimiento de los datos transmitidos, calcula de forma iterativa el máximo de la función (11.58), utilizando para ello como señal de error la derivada de la función que se intenta maximizar, es decir:

$$e[n] \doteq \sum_{k=0}^n \alpha^{n-k} \operatorname{Im} \left\{ e^{-jM\theta} E \{ A^M \} q^M(kT + \hat{\epsilon}T) \right\} \quad (11.60)$$

donde no se muestran las constantes que se consideran incluidas en el filtro de lazo.

Ejemplo 11.6

Consideremos el caso de una constelación BPSK, es decir, $M = 2$. La Figura 11.21 muestra el esquema resultante. Obsérvese que la señal de error de la Figura 11.21 es una versión filtrada de

$$\operatorname{Re} \left\{ e^{-j\hat{\theta}[n]} q(nT + \hat{\epsilon}T) \right\} \operatorname{Im} \left\{ e^{-j\hat{\theta}[n]} q(nT + \hat{\epsilon}T) \right\}$$

haciendo $M = 2$ en (11.60). Para el caso sin ruido y sin ISI, teniendo en cuenta (11.52), la anterior expresión es igual a $E_s \operatorname{sen}(\theta_0 - \hat{\theta}[n]) \cos(\theta_0 - \hat{\theta}[n]) = E_s/2 \operatorname{sen}(2\theta_0 - 2\hat{\theta}[n])$, dado que los símbolos únicamente pueden tomar los valores $\pm \sqrt{E_s}$.

Una generalización del estimador anterior es la conocida como *algoritmo de Viterbi* y Viterbi; A.J. Viterbi y A.M. Viterbi investigaron cómo mejorar las prestaciones del algoritmo anterior para niveles de SNR medios y bajos, la situación más común cuando se emplea codificación. Concluyeron que un estimador más versátil es el siguiente:

$$\hat{\theta} = \frac{1}{M} \triangleleft \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} F(|q(nT + \hat{\epsilon}T)|) e^{jM \triangleleft \{ q(nT + \hat{\epsilon}T) \}} \right\} \quad (11.61)$$

donde $F(\cdot)$ es una función en principio arbitraria (compárese con el estimador en (11.59), para el que $F(x) = x^M$). En la expresión anterior habría que añadir el término $\triangleleft E \{ A^M \} / M$ si la media de A^M tiene fase no nula (véase Problema P11.12). Normalmente se obtienen mejores prestaciones haciendo $F(x) = x^p$, con $p < M$; el valor de p empleado depende de la SNR y del tamaño de la constelación. Así, por ejemplo, para una constelación QPSK,

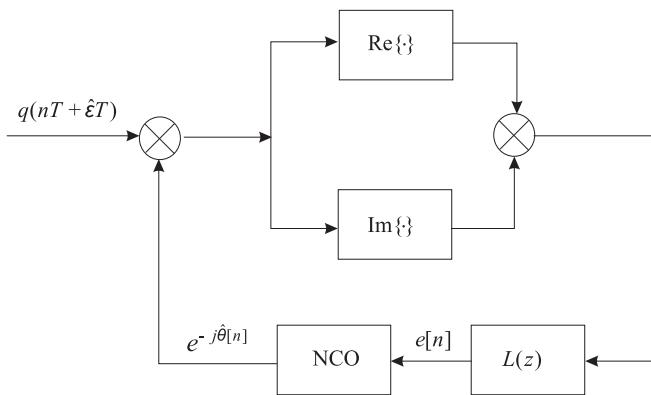


Figura 11.21. Bucle de estimación de fase para BPSK.

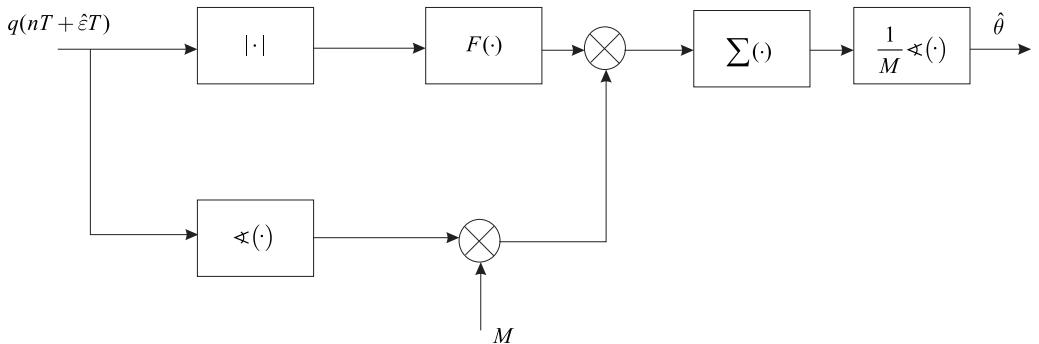


Figura 11.22. Algoritmo de Viterbi y Viterbi para estimación de fase en constelaciones PSK sin ayuda de decisiones.

para la que $M = 4$, es muy habitual emplear $p = 2$. El algoritmo de Viterbi y Viterbi se puede implementar siguiendo la Figura 11.22.

Existe un claro problema de ambigüedad en los esquemas de recuperación de fase no asistidos por los datos en general, que por supuesto afecta a los esquemas que se acaban de presentar. En concreto, la ausencia de referencias acerca de los símbolos transmitidos, junto con la simetría angular de las constelaciones empleadas, provoca la imposibilidad de estimar giros sobre las mismas de $2\pi k/M$ radianes, con $k = 1, 2, 3, \dots$. Obsérvese que la solución de (11.59) se encuentra en el intervalo $[-\pi/M, \pi/M)$, por lo que si la fase real se halla fuera del mismo, habrá un error. Esta ambigüedad angular se puede corregir bien con el envío de símbolos piloto, al menos al comienzo de la transmisión, bien empleando modulaciones diferenciales como las expuestas en el Apartado 7.1.3. Recordemos que este tipo de modulaciones no necesitan recuperación de fase en un receptor con detección incoherente, o son insensibles a las ambigüedades en la estimación de la misma en el caso de la detección coherente. En última instancia, si no es posible ninguna de las opciones señala-

das, será la decodificación de canal la que determine la referencia angular de la constelación, eliminando aquellas posibilidades para las que el decodificador no funciona adecuadamente.

Consideremos a continuación un problema de índole práctica, que encontramos cuando la fase θ_0 que se debe estimar no es constante. Pensemos, por ejemplo, en un error de frecuencia residual $\Delta\omega$. En el próximo apartado se abordará la corrección de las desviaciones en la frecuencia; sin embargo, dicha corrección no será perfecta, por lo que quedará un error residual que introducirá una variación lineal de la fase con el tiempo de la forma $\theta_0[n] = \theta_0 + \Delta\omega n$. Con el fin de conectar las sucesivas estimaciones de la fase, que no olvidemos que se ciñen al intervalo $[-\pi/M, \pi/M]$, se puede aplicar un esquema de seguimiento de la fase, como el que se muestra en la Figura 11.23. La estimación continua $\hat{\theta}_d[n]$,

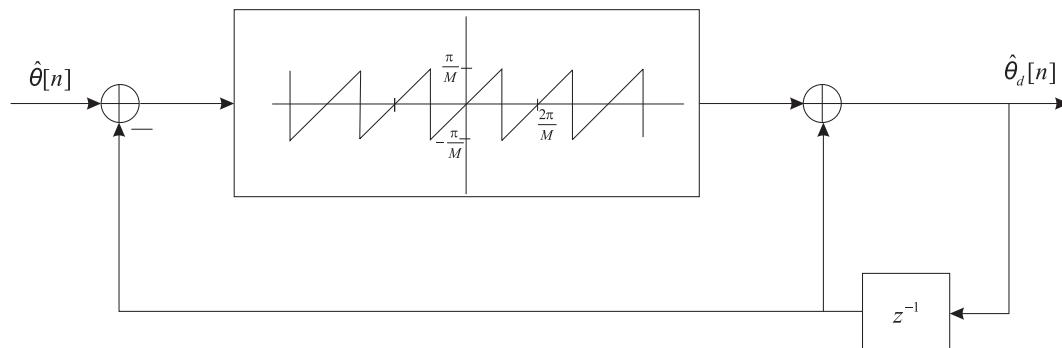


Figura 11.23. Postprocesado para estimadores no realimentados.

donde el subíndice d indica “desenrollado” (“unwrapped”), se puede escribir en función de la estimación discontinua $\hat{\theta}[n]$ como

$$\hat{\theta}_d[n] = \hat{\theta}_d[n-1] + W(\hat{\theta}[n] - \hat{\theta}_d[n-1]) \quad (11.62)$$

donde la función no lineal $W(x)$ es la incluida en el esquema de la Figura 11.23 y refiere x al intervalo $[-\pi/M, \pi/M]$. Así, se puede dar continuidad a la estimación $\hat{\theta}_d[n]$, evitando de este modo saltos de $2\pi/M$ radianes, que de otro modo ocurrirían cuando la fase a estimar cruza algún múltiplo de π/M . Es evidente que este esquema introduce realimentación, con lo cual pueden aparecer problemas propios de los bucles realimentados como el *deslizamiento de ciclos*, discutido en el Apartado 11.3.2.

Ejemplo 11.7

Supongamos que la fase a estimar es constante y nula para una constelación recibida correspondiente a $M = 4$, y que la estimación de entrada $\hat{\theta}[n]$ al esquema de la Figura 11.23 fluctúa de forma ruidosa en torno al valor cero. A continuación mostramos cómo un pico de ruido en la estimación de la fase puede provocar que la salida $\hat{\theta}_d[n]$ se deslice hasta $\pi/2$:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}[n] &= \{ 0,01, \quad 0,0, \quad -\pi/4 - 0,03, \quad -0,06, \quad 0,005, \quad -0,01, \quad \dots \} \\ \hat{\theta}_d[n] &= \{ 0,01, \quad 0,0, \quad \pi/4 - 0,03, \quad \pi/2 - 0,06, \quad \pi/2 + 0,005, \quad \pi/2 - 0,01, \quad \dots \} \end{aligned}$$

El pico de ruido en la tercera muestra de $\hat{\theta}[n]$ causa que la salida se deslice al entorno de $\pi/2$, a pesar de que la entrada continúa en torno a 0.

La consecuencia del deslizamiento mostrado es que, para una rotación fija de fase de los símbolos recibidos, el estimador concluye que dicha rotación difiere antes y después del deslizamiento, lo cual provocaría una ráfaga de errores hasta que en algún punto de control se detecte la rotación producida.

Los métodos presentados en este apartado son de uso necesario cuando no existen símbolos conocidos y la SNR no es lo suficientemente buena como para justificar métodos dirigidos por decisión. En lo que se refiere al método que se debe adoptar, cabe decir que el uso de bucles realimentados se desaconseja en determinadas aplicaciones en las que la adquisición debe ser rápida, como en la transmisión a ráfagas propia de sistemas de acceso múltiple por división en tiempo.

11.6. AJUSTE DE FRECUENCIA

En comunicaciones paso banda es necesario corregir las posibles diferencias entre la frecuencia portadora de la señal recibida y la frecuencia del mezclador local. Si las diferencias esperadas son muy grandes, como por ejemplo ocurre en sistemas con algún tipo de movimiento relativo entre transmisor y receptor, o en el caso de que los osciladores empleados sean poco precisos, es necesario corregir la frecuencia en dos pasos: una corrección gruesa en tiempo continuo o en tiempo discreto con tasa $1/T_s$ suficientemente alta, y una corrección del error residual en el dominio digital con tasa $1/T$ como paso previo a la recuperación de fase. Sea la señal recibida

$$r(t) = \sum_{n=0}^{N-1} A[n]g_r(t - nT - \epsilon_0 T)e^{j(\omega_0 t + \theta_0)} + z(t) \quad (11.63)$$

con $g_r(t)$ el pulso recibido. El ruido se incluye en el término $z(t)$. Nótese la incorporación del término $e^{j\omega_0 t}$; dicho término puede ser debido al desajuste entre las frecuencias de los equipos transmisores y receptores, así como a un movimiento relativo que causa el desplazamiento en frecuencia conocido como *Doppler*. Este desplazamiento Doppler en la frecuencia recibida podría ser incluso variante con el tiempo cuando así lo sea la velocidad relativa, en cuyo caso habría que hablar además de un término de segundo orden (por lo menos) en el exponente de la forma $e^{j(\frac{1}{2}\alpha_0 t^2 + \omega_0 t + \theta_0)}$. Aquí centraremos la explicación en cómo estimar desplazamientos de frecuencia estáticos, considerando que la variación de dichos desplazamientos, de existir, es lo suficientemente lenta como para ser abordada por los algoritmos que se presentarán.

La Figura 11.24 representa el conjunto de operaciones de sincronización de un receptor digital, incluyendo la corrección de frecuencia. Para esta hay que contemplar dos situaciones distintas que condicionan el secuenciamiento de las operaciones de sincronización: 1) error de frecuencia mucho menor que la tasa de símbolo $1/T$; 2) error comparable a $1/T$. En el primer caso, para el que consideramos errores en torno al 15 % de $1/T$ como máximo, es

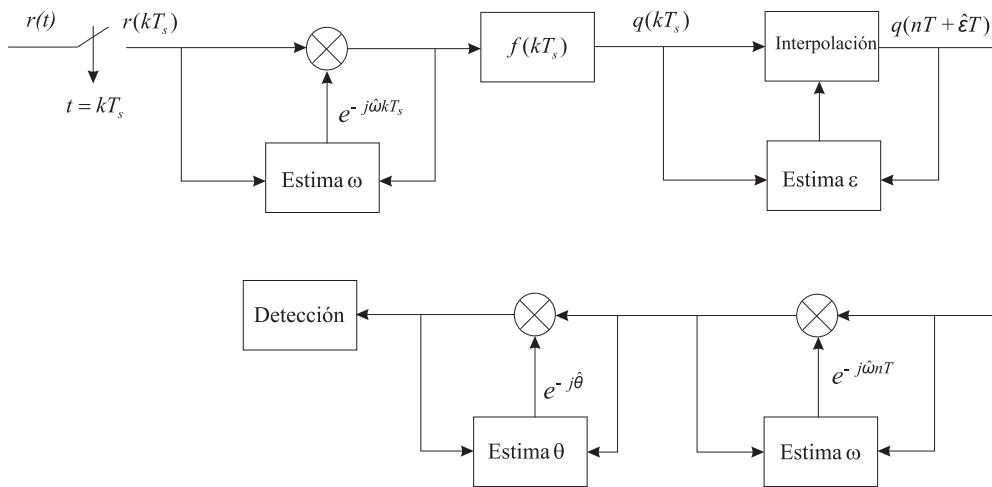


Figura 11.24. Esquema general de la sincronización en un receptor. En todos los casos se contemplan las dos variantes, realimentada y hacia delante, para los diferentes esquemas de sincronización.

possible realizar la recuperación del instante de muestreo sin corregir la frecuencia, mientras que en el segundo caso hay que acudir a métodos de corrección de frecuencia que funcionen independientemente del instante de muestreo. En situaciones como esta última resulta habitual una primera etapa de corrección gruesa trabajando a la tasa $1/T_s$ antes de estimar el instante de muestreo, y una posible etapa de corrección fina operando a $1/T$ para el error residual de frecuencia.

11.6.1. Ajuste de errores de frecuencia grandes

En la Expresión (11.63) de la señal recibida, el término exponencial $e^{j\omega_0 t}$ provoca un desplazamiento en el espectro de ω_0 rad/s. A no ser que dicho desplazamiento sea convenientemente corregido, por lo menos en su mayor parte, la banda de paso del filtro receptor no estará alineada con la banda ocupada por la señal recibida. Por ello es totalmente necesario abordar el posicionamiento en frecuencia de la señal recibida.

La salida $q(kT_s)$ del filtro adaptado en la Figura 11.24 se puede escribir como

$$q(kT_s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} r(mT_s) e^{-j\hat{\omega}mT_s} f(kT_s - mT_s) \quad (11.64)$$

donde se ha aplicado una corrección de frecuencia de la forma $e^{-j\hat{\omega}kT_s} r(kT_s)$ antes de la convolución discreta con $f(kT_s)$.

Para relaciones señal a ruido bajas podemos retomar la función de coste obtenida en el

Apéndice 11.B, a la que se incorpora un nuevo parámetro ω :

$$L(\epsilon, \omega) = \sum_{n=0}^{N-1} |q(nT + \epsilon T, \omega)|^2 \quad (11.65)$$

siendo $q(nT + \epsilon T, \omega)$ las muestras a la salida del filtro adaptado a velocidad de símbolo para una desplazamiento temporal ϵT y una corrección de frecuencia ω :

$$q(nT + \epsilon T, \omega) \doteq \sum_{k=-\infty}^{\infty} r(kT_s) e^{-j\omega kT_s} f(nT + \epsilon T - kT_s) \quad (11.66)$$

Para evitar una búsqueda bidimensional en ω y ϵ , es necesario romper la dependencia con este último parámetro de la función a maximizar (11.65). Además, salvo que el error de frecuencia sea mucho menor que $1/T$, su corrección debe preceder a la estimación del resto de parámetros, ya que no olvidemos que hasta ahora hemos supuesto en los esquemas desarrollados a lo largo del capítulo que el error de frecuencia era poco significativo. Con este fin, se puede promediar $L(\epsilon, \omega)$ con respecto a ϵ (véase Problema P11.10), obteniéndose así la energía a la salida del filtro adaptado

$$L(\omega) = \sum_{k=0}^{N_s(N-1)} |q(kT_s, \omega)|^2 \quad (11.67)$$

donde $N_s = T/T_s$ es el factor de sobremuestreo. Esta nueva función de coste presenta una tendencia similar a la de (11.65) maximizada con respecto a ϵ , tal y como se muestra en la Figura 11.25, donde se observa que en este caso el máximo de ambas funciones se sitúa en el cero (lo que indica que en este caso $\omega_0 = 0$). La curva inferior se corresponde con la energía a periodo de símbolo, buscando la fase de muestreo que maximice esta. La curva superior es la energía de la señal sobremuestreada, evitando la búsqueda sobre ϵ . El precio que se paga por lograr un estimador independiente del instante de muestreo es una mayor sensibilidad frente al ruido, que se puede apreciar a partir de la caída de ambas funciones en torno a la frecuencia correcta: una caída más abrupta implica una mayor resistencia a los cambios en la posición del máximo ocasionados por la presencia de ruido. Con el fin de comprender la forma de la función de coste anterior, podemos analizar el valor de la energía a la salida del filtro adaptado como función de la diferencia entre la frecuencia recibida ω_0 y la estimada $\hat{\omega}$. Para ello hacemos uso de los resultados expuestos en el Apéndice 11.D, donde tenemos que la función a maximizar $L(\omega)$ en (11.67) es proporcional a la siguiente integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G_r(j(\Omega - \omega_0 + \omega)) G_r^*(j\Omega)|^2 d\Omega \quad (11.68)$$

si $f(t) = g_r^*(-t)$, es decir, el filtro receptor se corresponde con el filtro adaptado al pulso recibido. De la relación anterior, y a partir de la desigualdad de Cauchy-Schwarz (véase (2.53)), tenemos que el máximo se obtendrá cuando $\omega = \omega_0$. Por otro lado, a medida que

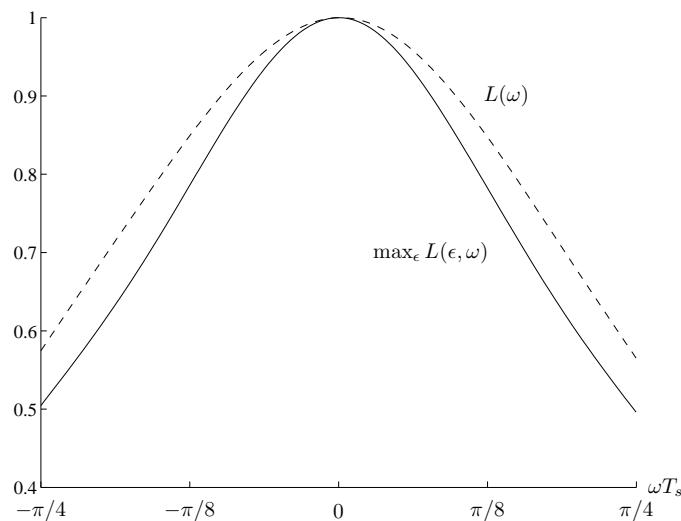


Figura 11.25. Funciones de coste (11.65) y (11.67) normalizadas en un caso sin ruido.

aumenta la diferencia entre ω y ω_0 , la coincidencia de los espectros en la integral anterior es menor, con lo que el valor de la misma va decreciendo.

No existe una solución en forma cerrada para encontrar el máximo de la función (11.67), por lo que una primera alternativa resulta ser la búsqueda exhaustiva para un conjunto discreto de valores $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_J$, tal y como se muestra en la Figura 11.26. A la vista de la

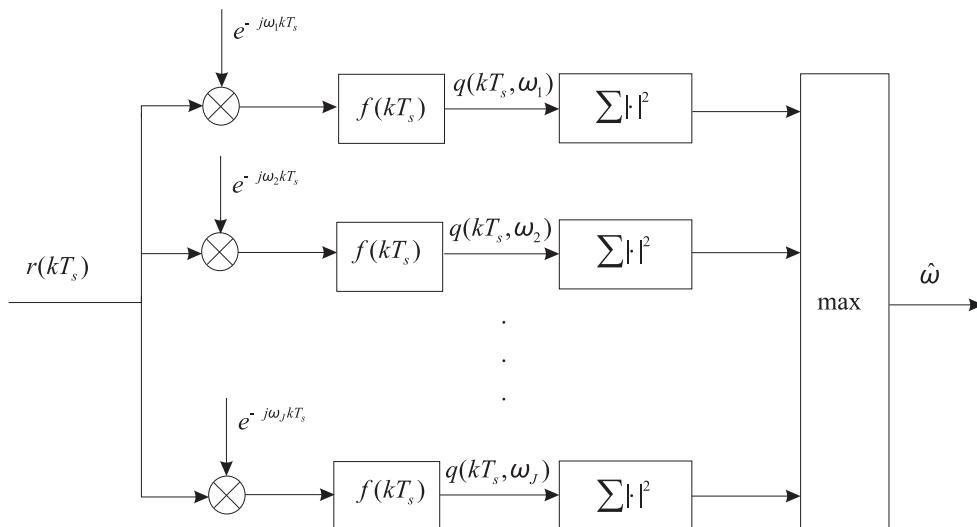


Figura 11.26. Estimador de frecuencia por búsqueda exhaustiva, independiente de los símbolos y del instante de muestreo.

forma de $L(\omega)$ en la Figura 11.25, se puede plantear un esquema realimentado de la forma habitual, es decir, cuya evolución estará guiada por un error proporcional a la derivada de (11.67). En el Apéndice 11.D se demuestra que

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \sum_{k=0}^{N_s(N-1)} |q(kT_s, \omega)|^2 = -2 \sum_{k=0}^{N_s(N-1)} \operatorname{Re} \{q(kT_s, \omega) q_d^*(kT_s, \omega)\} \quad (11.69)$$

donde intervienen las muestras $q(kT_s, \omega)$, que salen del filtro receptor previa corrección de la frecuencia por ω . Asimismo, también se emplean las muestras $q_d(kT_s, \omega)$, que se obtienen haciendo pasar la secuencia recibida (tras la corrección en frecuencia) por el filtro que implementa la derivada en frecuencia de $f(kT_s)$, tal y como se indica en la Figura 11.28:

$$q_d(kT_s, \omega) = [r(kT_s)e^{-j\omega kT_s}] * [-jkT_s f(kT_s)] \quad (11.70)$$

Obsérvese que, de acuerdo con la propiedad de derivación en frecuencia en (2.100), las muestras de dicho filtro son, simplemente, $-jkT_s f(kT_s)$. Cuando el filtro receptor es del tipo raíz cuadrada de coseno alzado, su derivada en frecuencia es tal que sólo presenta contenido en el rango $[\pi(1 - \alpha)/T, \pi(1 + \alpha)/T]$ rad/s y su correspondiente en frecuencias negativas, tal y como se observa en la Figura 11.27. En este caso, el filtro que implementa la derivada en la Figura 11.28 tendrá una respuesta en frecuencia no nula únicamente en las frecuencias de transición del pulso en raíz de coseno alzado. En el Problema P11.18 se esboza la demostración de que la señal de error es proporcional a la diferencia de energía entre las dos regiones con contenido espectral de la Figura 11.27, de modo que sólo cuando ambas energías se igualen la frecuencia de la señal recibida será la correcta.

En algunos casos puede resultar más interesante un método sencillo que opere directamente sobre la señal de entrada sin filtrar, y que proporcione directamente el valor estimado de frecuencia sin recursión de ningún tipo. Así, si consideramos despreciable el ruido, y suponemos un factor de sobremuestreo $N_s = T/T_s$ elevado, tendrá sentido realizar la siguiente aproximación a partir de la expresión (11.63) de la señal recibida:

$$r(kT_s) \approx e^{j\omega_0 T_s} r((k-1)T_s) \quad (11.71)$$

Es decir, a partir de la comparación de la fase de muestras sucesivas, podríamos obtener una estimación de la frecuencia ω_0 . Evidentemente es necesario promediar para atenuar los efectos del ruido y de la modulación, que impiden que la anterior aproximación sea una igualdad. En este caso, el estimador se convierte en

$$\hat{\omega} = \frac{1}{T_s} \triangleleft \left\{ \sum_{k=1}^{N_s(N-1)} r(kT_s) r^*((k-1)T_s) \right\} \quad (11.72)$$

Como hemos visto anteriormente, el criterio ML exige calcular la salida del filtro adaptado para todos los posibles desplazamientos de frecuencia de la señal de entrada. La opción recién planteada evita el filtrado de la señal desplazada en frecuencia, bien como en la Figura 11.26 o como en la Figura 11.28, a costa de una degradación de prestaciones que en la práctica puede ser asumible.

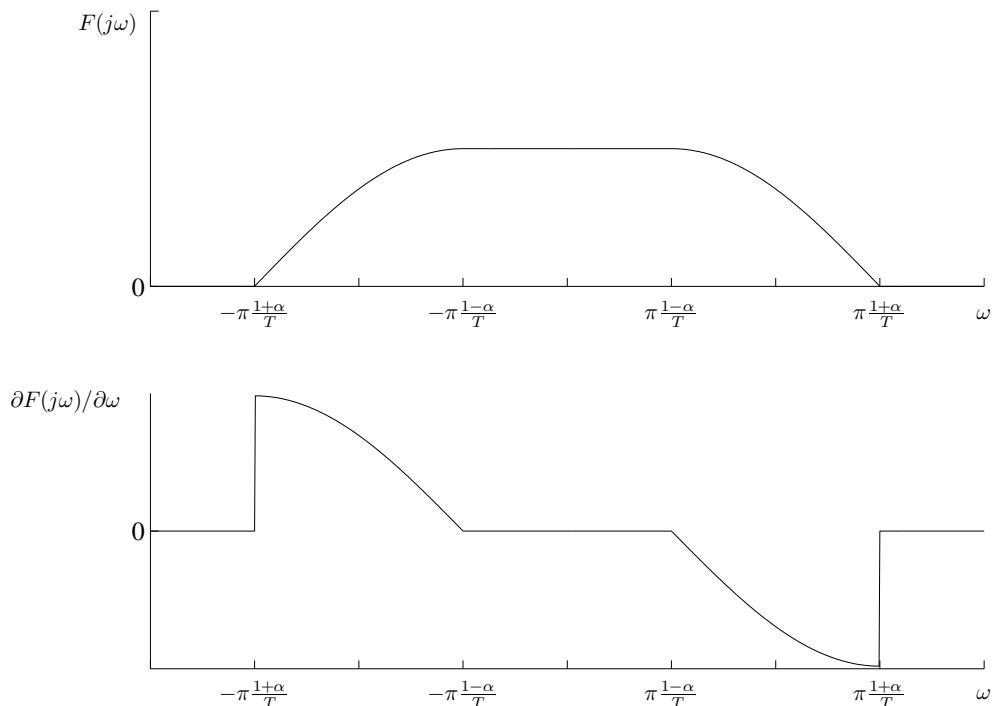


Figura 11.27. Representación de la Transformada de Fourier del pulso en raíz cuadrada de coseno alzado y su derivada en frecuencia.

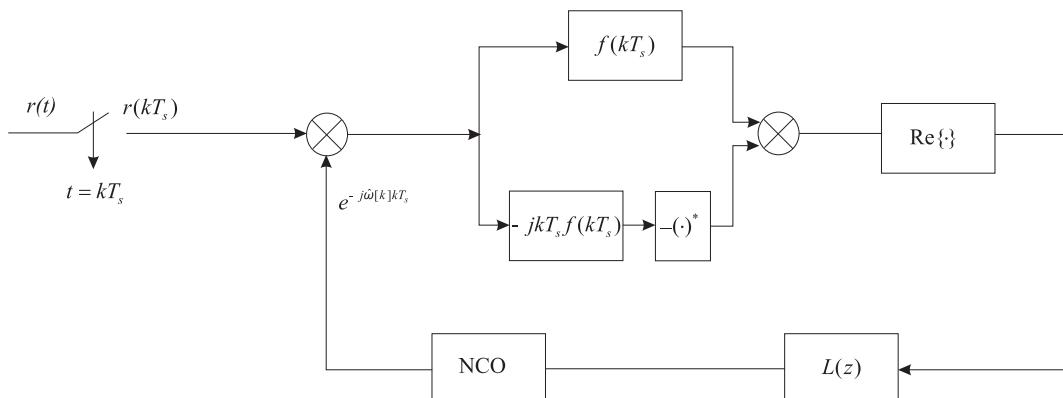


Figura 11.28. Estimador de frecuencia en lazo cerrado, independiente de los símbolos y del instante de muestreo.

11.6.2. Ajuste de errores de frecuencia pequeños

Por errores de frecuencia pequeños entendemos aquellos que no obstaculizan de forma significativa la recuperación del instante de muestreo, para lo cual deben estar aproximadamente centrados en cero.

mente por debajo del 15 % de la tasa de símbolo, es decir, $|\omega T/2\pi| < 0,15$. Un error de frecuencia grande no corregido impide el funcionamiento de los esquemas analizados hasta ahora, en los que se filtra la señal supuesta esta en banda base y se estima el instante de muestreo adecuado. Es por ello que la primera tarea a abordar en un receptor es la correcta ubicación espectral de la señal de entrada, en el caso de que se esperen errores importantes, con esquemas como los del apartado anterior o relacionados. Como resultado quedará un error residual de frecuencia que, si bien no impide el filtrado y muestreo con tasa de símbolo de la señal, sí debe ser subsanado antes de detectar los símbolos recibidos. En consecuencia, los algoritmos analizados en este apartado trabajarán con las muestras a periodo de símbolo, y necesariamente tendrán un rango de enganche pequeño, es decir, se supone que el ajuste grueso de frecuencia ya ha sido realizado.

Vamos a ceñirnos al caso de modulaciones M-PSK, suponiendo que no hay ISI tras el filtro adaptado, es decir:

$$q(nT + \hat{\epsilon}T) \approx A[n]e^{j(\omega_0 nT + \theta_0)} + z[n] \quad (11.73)$$

con $A[n] = \sqrt{E_s}e^{j2\pi m/M}$, $m = 0, \dots, M - 1$. La aleatoriedad de los símbolos $A[n]$ complica la tarea, ya que a efectos de la estimación de ω_0 pueden ser considerados como ruido en el caso en el que no sean conocidos. Veamos a continuación la reformulación de este problema como la estimación de la frecuencia de una oscilación en presencia de ruido. A tal efecto, distinguimos dos posibilidades:

- Si los símbolos transmitidos son conocidos, por ejemplo en el preámbulo de una transmisión, la fase de los mismos se elimina multiplicando por su complejo conjugado:

$$A^*[n]q(nT + \hat{\epsilon}T) = E_s e^{j(\omega_0 nT + \theta_0)} + A^*[n]z[n] \quad (11.74)$$

con lo que el problema se reduce a la estimación de la frecuencia de una exponencial compleja en ruido.

- Si no se dispone de símbolos de entrenamiento hay que acudir a métodos independientes de los datos, dado que las decisiones de los símbolos que se puedan tomar en presencia de errores de frecuencia no son fiables. En este contexto se pueden emplear ideas similares a las de Viterbi y Viterbi (véase Apartado 11.5.2 para su uso con constelaciones M-PSK). Así, para eliminar la influencia de los símbolos transmitidos se eleva $q(nT + \hat{\epsilon}T)$ a la M -ésima potencia:

$$q^M(nT + \hat{\epsilon}T) = E_s^M e^{j(M\omega_0 nT + M\theta_0)} + z'[n] \quad (11.75)$$

y de nuevo nos encontramos con un problema de estimación de la frecuencia de una oscilación compleja en ruido.

Bajo cualquiera de las dos hipótesis anteriores, el ruido resultante es blanco si $z[n]$ es un proceso aleatorio blanco y los símbolos son independientes entre sí. Podemos por tanto abordar el problema del ajuste del error en frecuencia como la estimación de la frecuencia de una exponencial compleja en ruido blanco, que resulta ser un problema clásico. Obsérvese

que el ruido tras la exponenciación no es gausiano en (11.75), aunque dicha eventualidad, si fuera tenida en cuenta, no permitiría obtener un estimador óptimo manejable, por lo que se suele trabajar con la hipótesis de que dicho ruido es gausiano. Supongamos entonces que deseamos estimar la frecuencia ω_0 en una secuencia de la forma

$$p[n] = e^{j(\omega_0 n T + \theta_0)} + z[n], \quad n = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (11.76)$$

con $z[n]$ un proceso aleatorio blanco, gausiano, circularmente simétrico y de media cero. Es fácil ver que el estimador de máxima verosimilitud de la frecuencia es aquel valor que maximiza

$$L(\omega) = \left| \sum_{n=0}^{N-1} p[n] e^{-j\omega n T} \right|^2 \quad (11.77)$$

Esta función se conoce como *periodograma*, y no es más que una estimación de la densidad espectral de potencia del proceso aleatorio $p[n]$. Dicha densidad presenta un máximo en $\omega = \omega_0$, por lo que la estimación ML escoge la posición del máximo en la densidad estimada. La posición del máximo no admite una solución explícita, y por tanto la precisión en el cálculo del estimador ML dependerá de la cantidad de frecuencias discretas sobre las que se evalúe el periodograma. Para reducir el coste computacional de este método existen alternativas subóptimas como las presentadas a continuación, que obtienen prestaciones muy similares al método de máxima verosimilitud para desviaciones de frecuencia pequeñas. Dichas aproximaciones están basadas en que el periodograma se puede escribir como la Transformada de Fourier de la estimación $\hat{R}_p[m]$ de la autocorrelación:

$$\hat{R}_p[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-m-1} p[n+m] p^*[n], \quad m = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (11.78)$$

con $\hat{R}_p[-m] = \hat{R}_p^*[m]$. La calidad del estimador es menor a medida que m aumenta, dado que la longitud finita (N muestras) limita el número de términos del sumatorio. En el caso que nos ocupa, si tenemos una exponencial compleja en ruido como en (11.76), la función de autocorrelación es

$$R_p[m] = e^{j\omega_0 m T} + \sigma_z^2 \delta[m] \quad (11.79)$$

donde se encuentra la información relativa a la frecuencia. A partir de la estimación $\hat{R}_p[m]$ se puede aproximar la frecuencia ω_0 . Entre los diversos estimadores existentes, incluimos a continuación dos que presentan un buen compromiso entre complejidad y calidad de la estimación:

$$\hat{\omega} = \frac{2}{T L(L+1)} \sum_{m=1}^L \triangleleft \left\{ \hat{R}_p[m] \right\}, \quad (\text{estimador de Fitz}) \quad (11.80)$$

$$\hat{\omega} = \frac{2}{T(L+1)} \triangleleft \left\{ \sum_{m=1}^L \hat{R}_p[m] \right\}, \quad (\text{estimador de Luise y Reggiannini}) \quad (11.81)$$

L representa el número de términos de la autocorrelación estimada que se emplean. Suele ser mucho menor que N para garantizar la calidad de las estimaciones, ya que como hemos

dicho, los valores estimados de $R_p[m]$ son peores para índices m altos, debido a que el número de términos que interviene en su cálculo decrece con m .

Existen también alternativas realimentadas para los casos DA y NDA que no analizaremos aquí. Baste decir que resultan apropiadas si la varianza de la estimación conseguida con los esquemas no realimentados es demasiado grande, dado que en un esquema realimentado el ruido se puede promediar en mayor medida.

11.7. SINCRONIZACIÓN DE MODULACIONES MULTIPORTADORA

En este apartado planteamos el problema de la sincronización en modulaciones multiportadora. Comenzaremos considerando un canal ideal que solamente introduce ruido; más adelante, analizaremos la interacción del canal con las tareas de sincronización.

Supongamos una modulación multiportadora que emplea un prefijo cíclico de M muestras, para la que la señal a transmitir en tiempo discreto $\tilde{s}[m]$ viene dada por (8.56). Si el canal discreto equivalente a periodo T/N es $d[m] = T/N\delta[m]$ ¹¹, entonces la secuencia $v[m]$ a la salida del muestreador a periodo T/N del receptor toma la forma

$$v[m] = \frac{\sqrt{T}}{N} \sum_n \sum_{k=0}^{N-1} A_k[n] e^{j \frac{2\pi k}{N} (m - n(N+M))} w_{N+M}[m - n(N+M) + M] + z[m] \quad (11.82)$$

donde $A_k[n]$, N y $z[m]$ representan, respectivamente, el símbolo transmitido sobre la portadora k -ésima en el intervalo de símbolo n -ésimo, el número de exponentiales complejas o portadoras y el ruido aditivo.

Las muestras de $v[m]$ deben ser agrupadas en bloques de longitud $N + M$ para eliminar las M muestras del prefijo cíclico que garantizan la ausencia de ICI e ISI ante distorsiones de canal, para posteriormente aplicar una DFT de N puntos, tal y como se muestra en la Figura 8.16.

Por desgracia, en la práctica existen varios problemas que no son aparentes en la Expresión (11.82). Así, en sistemas paso banda cabe esperar una diferencia ω_0 entre las frecuencias del modulador y demodulador, así como un desfase θ_0 . Además, la necesidad de una sincronización temporal aquí es, por lo menos en principio, doble: por un lado es necesario conocer el instante de comienzo de cada bloque OFDM de N portadoras, para poder eliminar su prefijo cíclico y aplicar la DFT de N puntos; por otro lado, hay que ajustar los instantes óptimos de muestreo¹². Conviene por tanto modificar (11.82) para incorporar los

¹¹Recuérdese que la ganancia T/N se debe a la ganancia de los filtros $g(t)$ y $g(-t)$.

¹²Aunque en este caso estos instantes no guardan relación con la máxima apertura del ojo, ya que la señal en tiempo es el resultado de aplicar una transformación a la secuencia de símbolos.

parámetros señalados

$$v[m] = \frac{\sqrt{T}}{N} e^{j(\omega_0 \frac{m}{N} T + \theta_0)} \times \sum_n \sum_{k=0}^{N-1} A_k[n] e^{j \frac{2\pi k}{N} (m - n(N+M) - \epsilon_0)} w_{N+M}[m - n(N+M) + M - \epsilon_0] + z[m] \quad (11.83)$$

El filtro receptor de respuesta $g(-t)$ es, idealmente, un filtro selectivo en frecuencia con una banda de paso de $2\pi N/T$ rad/s. En la práctica la selectividad del filtro no será tal, y existirá un cierto margen para absorber aquellos errores ω_0 rad/s que provocan un desalineamiento entre la banda ocupada por la señal recibida y el rango de frecuencias esperado. En este sentido, como comentamos en el Capítulo 8, en los sistemas OFDM es habitual poner a cero las portadoras extremas para facilitar la implementación del filtro de reconstrucción. Esta operación contribuye a aumentar el rango de valores de ω_0 para el que el sistema puede seguir funcionando.

Antes de abordar mecanismos concretos de estimación de los diversos parámetros reflejados en la Expresión (11.83), analizaremos en el siguiente apartado los inconvenientes causados por un conocimiento incompleto de dichos parámetros.

11.7.1. Impacto de los errores de sincronización en modulaciones multiportadora

Comenzaremos por analizar qué ocurre cuando la señal está desplazada en frecuencia en mayor o menor medida con respecto a la referencia esperada. Así, la principal consecuencia de una desviación de frecuencia ω_0 es la pérdida de ortogonalidad de las diferentes portadoras entre sí. En la Figura 11.29 se muestra una forma sencilla de visualizar este efecto: al igual que en una modulación monoportadora un muestreo deficiente provoca ISI, en el caso multiportadora una desviación en frecuencia ocasiona un muestreo en frecuencia incorrecto, por lo que las portadoras dejan de ser ortogonales y se produce ICI (véase Apartado 8.1.5), es decir, interferencia entre portadoras. Un caso extremo sería aquel en el que el error en frecuencia ω_0 fuese un múltiplo de la separación entre portadoras $2\pi/T$. En este caso las portadoras seguirían siendo ortogonales, pero los símbolos llegarían asociados a la portadora incorrecta. Con el fin de analizar las consecuencias del desalineamiento del resto de parámetros, supondremos que el error de frecuencia ω_0 es nulo debido, por ejemplo, a que ha sido corregido previamente. Además, por conveniencia, emplearemos la notación del Apartado 8.1.7, en el que contemplamos la OFDM como un proceso por bloques. En este caso, para el bloque OFDM n -ésimo, y tras la DFT de tamaño N convenientemente alineada, tenemos que si despreciamos el efecto del ruido la observación en la portadora k -ésima será

$$\hat{Q}^{(n)}[k] = \text{DFT} \left\{ e^{j\theta_0} \text{IDFT} \left\{ A^{(n)}[k] e^{-j \frac{2\pi k}{N} \epsilon_0} \right\} \right\} \quad (11.84)$$

Obsérvese que el error de muestreo ϵ_0 se traduce en un término de fase creciente con el índice de la portadora k , que puede ser estimado y corregido con el uso de portadoras piloto-

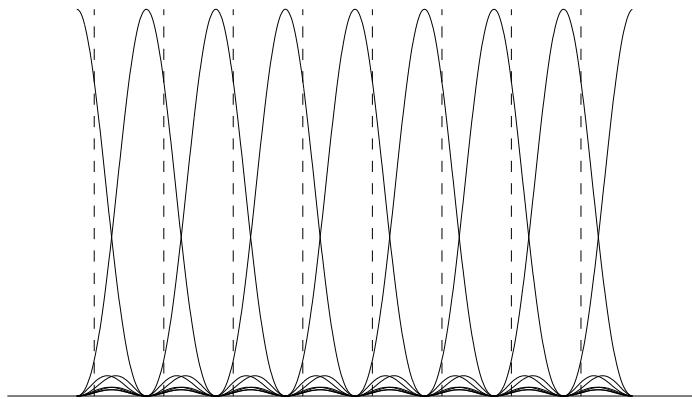


Figura 11.29. Pérdida de ortogonalidad causada por una desviación en frecuencia. Las líneas punteadas indican las frecuencias en que se realiza el muestreo.

to¹³. Asimismo, el término de fase $e^{j\theta_0}$ en las muestras recibidas (11.83) supone la rotación en θ_0 rad de los símbolos de la constelación, efecto similar al existente en modulaciones monoportadora y analizado en el Apartado 11.5. Dicho término de fase, igual para todas las portadoras, puede agruparse junto con la rotación inducida por el canal, por lo que su corrección se incluye en la igualación del canal en frecuencia (Apartado 8.1.8), donde cada portadora es corregida para compensar los efectos multiplicativos del canal en frecuencia que analizaremos en breve.

Cuando el error en frecuencia no es nulo, podemos pensar en un error de fase que varía con el tiempo, por lo que escribiremos $\theta[m]$. De hecho, al permitir que $\theta[m]$ varíe con el tiempo, estamos considerando un caso más general que puede incluir no sólo un desfase fijo θ_0 , sino también una desviación de frecuencia residual ω_0 , así como ruido de fase presente en los osciladores. Así, considerando el bloque n -ésimo de N muestras sin prefijo cíclico antes de realizar la DFT como

$$q^{(n)}[m] = \frac{1}{N} e^{j\theta^{(n)}[m]} \sum_{k=0}^{N-1} A^{(n)}[k] e^{j\frac{2\pi km}{N}} + z^{(n)}[m], m = 0, \dots, N-1 \quad (11.85)$$

tenemos que la salida de la DFT de N puntos se puede escribir como

$$\begin{aligned} Q^{(n)}[k] &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} e^{j\theta^{(n)}[m]} A^{(n)}[l] e^{j\frac{2\pi lm}{N}} e^{-j\frac{2\pi km}{N}} + \sum_{m=0}^{N-1} z^{(n)}[m] e^{-j\frac{2\pi km}{N}} \\ &= A^{(n)}[k] I^{(n)}[0] + \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^{N-1} A^{(n)}[l] I^{(n)}[k-l] + Z^{(n)}[k], k = 0, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (11.86)$$

¹³Si se estima ϵ_0 también se podría efectuar una interpolación antes de la DFT para obtener las muestras en el instante adecuado.

con

$$I^{(n)}[k] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi mk}{N}} e^{j\theta^{(n)}[m]} \quad (11.87)$$

El análisis de las expresiones previas permite hablar de dos tipos de errores asociados al ruido de fase:

- **Error de fase común** (“Common Phase Error”, CPE), que afecta a todas las portadoras de la misma manera, $I^{(n)}[0] = (\sum_{m=0}^{N-1} e^{j\theta^{(n)}[m]})/N$. Este término se puede ver como un promedio de las exponenciales para todas las portadoras, y es el mismo para todos los índices, con lo que su corrección es factible. No obstante, obsérvese que es un error que varía con el índice n del bloque, tal y como se pone de manifiesto en la notación empleada. Ello es debido a que el error de fase cambia con el tiempo, no sólo dentro de un mismo bloque, sino a lo largo de bloques sucesivos.
- **Interferencia entre portadoras** (ICI). El error de fase variante con el tiempo causa la pérdida de ortogonalidad entre portadoras, ya que origina un término interferente en cada portadora participado por los símbolos del resto de portadoras, patente en el segundo sumando de (11.86). Este término debe ser lo más pequeño posible, ya que de lo contrario el sistema puede ser inoperativo. Las componentes en frecuencia de $\theta^{(n)}[m]$ comparables o superiores a $2\pi/N$ son las más problemáticas, lo que se explica porque $2\pi/N$ es la diferencia entre la frecuencia de portadoras consecutivas. Conviene por tanto que los niveles de ruido de fase que introducen los relojes sean lo más bajos posible o, equivalentemente, que se desvanezcan en frecuencia lo más rápidamente posible.

Podemos decir, en consecuencia, que los errores de frecuencia en particular, y de fase variante con el tiempo en general, son más dañinos que en el caso de modulaciones monoportadora. En estas últimas, los errores de fase y de frecuencia pequeños se trasladan directamente y de forma aislada a los símbolos de la constelación observada. En cambio, en una modulación multiportadora, se produce además la influencia mutua entre los diferentes símbolos debido a la ICI ocasionada. Por tanto, resulta extremadamente importante subsanar los errores de frecuencia, así como reducir al mínimo el ruido de fase de los osciladores empleados.

En la Expresión (11.84) y siguientes hemos supuesto el correcto alineamiento de la DFT con las muestras recibidas en un canal gausiano. Sin embargo, no es una cuestión trivial el cómo conseguirlo. Así, la sincronización de bloque es la encargada de determinar el conjunto de N muestras que entran en la DFT; de las $N + M$ muestras que conforman cada bloque, las primeras M deben ser desecharadas y las N restantes pasan a la DFT. Si consideramos la casi inevitable presencia de un canal dispersivo, tenemos que si el prefijo cíclico tiene una duración mayor que la de la respuesta de dicho canal, existe al menos una posición válida para el inicio de la ventana de N muestras que evita la ISI, tal y como se muestra en la Figura 11.30. Diferentes posiciones se corresponden con diferentes desplazamientos cílicos en el dominio temporal, los cuales se traducen en un término de fase en el dominio de la

frecuencia, fase que se incrementa con el índice de la portadora, y que provoca una rotación en la constelación asociada a cada una de las mismas. Así, tras la DFT de N puntos, tenemos que los valores obtenidos se pueden escribir para el bloque n -ésimo como

$$Q^{(n)}[k] = \frac{T}{N} e^{-j2\pi k \epsilon_0/N} A^{(n)}[k] \cdot D[k] + Z^{(n)}[k], \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (11.88)$$

donde $D[k]$ es la DFT de N puntos de la respuesta en tiempo del canal, supuesta esta entre 0 y K , con $K \leq M$, y $Z^{(n)}[k]$ es la DFT de N puntos del ruido aditivo. El desplazamiento $0 \leq \epsilon_0 \leq (M - K)$ indica el número de muestras de la zona rayada en la Figura 11.30 que se incluyen en el bloque OFDM. Las rotaciones de fase ocasionadas en (11.88) pueden considerarse parte de la respuesta del canal $D[k]$, y como tales se corrigen en la igualación en frecuencia que se realiza tras la estimación de canal a partir de portadoras piloto con símbolos conocidos (véase Apartado 8.1.8).

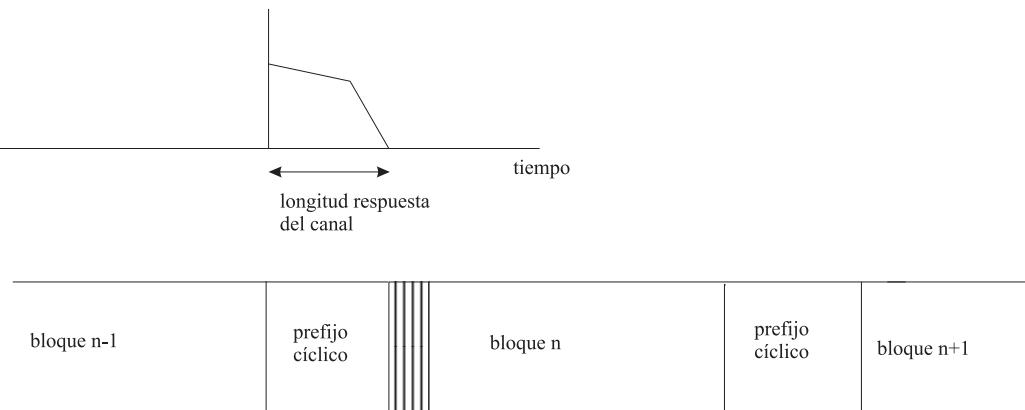


Figura 11.30. Ilustración de la sincronización de bloque. La zona rayada representa el rango de posiciones iniciales que evitan la ISI.

La desviación temporal ϵ_0 en la Ecuación (11.83) se ha supuesto constante, al igual que en apartados anteriores. Sin embargo, debemos mencionar que este valor puede variar con el tiempo debido a la diferencia entre los relojes del transmisor y del receptor, lo cual obligará a monitorizar constantemente la posición de comienzo de los sucesivos bloques.

Ejemplo 11.8

Una diferencia de 100 partes por millón entre las frecuencias de los respectivos relojes del transmisor y del receptor significa que, por ejemplo, 10.000 muestras para el transmisor equivalen a 10.001 muestras para el receptor. En la práctica es posible llegar a emplear valores de N cercanos a 10.000 en algunos casos, con lo que en un solo bloque OFDM se puede haber producido un desplazamiento de casi una muestra en la referencia temporal del receptor con respecto a la del transmisor.

En general, cabe indicar que las modulaciones multiportadora son muy sensibles a los errores de fase y frecuencia, como consecuencia de la pérdida de ortogonalidad que ocasionan. En cuanto a las referencias temporales, si bien existe cierta tolerancia dada la asimilación de los desfases temporales a rotaciones, deben ser manejadas con cautela, dado que las

prestaciones de la posterior estimación de canal se pueden resentir de dichas rotaciones. De todas formas, esta cuestión no será abordada en este texto, y simplemente queda planteada para ilustrar la complejidad de todo el proceso que implica el diseño de un buen receptor de OFDM. En la Figura 11.31 se ilustra cómo algunas tareas deben ser abordadas antes de la DFT, para garantizar la ortogonalidad, mientras que otras se efectúan con posterioridad, tal y como se detalla a continuación.

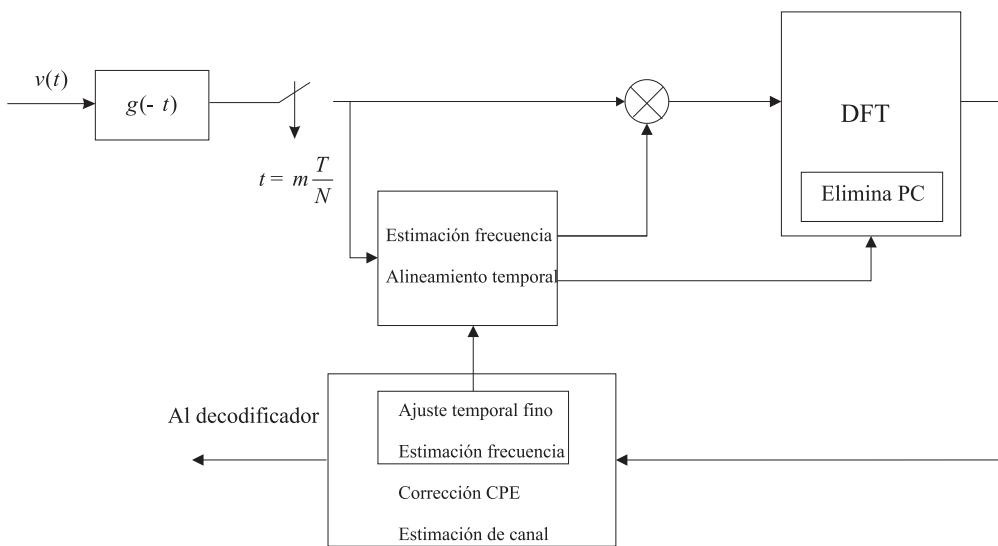


Figura 11.31. Disposición de las principales tareas de sincronización en un receptor de OFDM.

11.7.2. Sincronización pre-DFT

Para garantizar el mayor grado posible de ortogonalidad entre las diferentes portadoras es necesario, antes de realizar la DFT que extraiga los valores asociados a las mismas, subsanar el error de frecuencia ilustrado en la Figura 11.29 para evitar la ICI, y tratar de garantizar el correcto alineamiento de los sucesivos bloques para evitar la ISI, que aquí se puede interpretar como interferencia entre bloques sucesivos (véase Figura 11.30). Ambas tareas deben realizarse antes de efectuar la DFT, mientras que otras correcciones deben abordarse tras la misma, como se muestra en la Figura 11.31. Para ello, resulta habitual insertar un preámbulo con secciones repetidas, aunque también son posibles técnicas que aprovechen la redundancia introducida por el prefijo cíclico, que son la única posibilidad en algunos casos prácticos.

Dado que el prefijo cíclico o intervalo de guarda consiste en la repetición de una porción de datos, podemos efectuar la adquisición en tiempo y frecuencia aprovechando dicha redundancia. Para ello, supongamos que las muestras de la señal recibida tras el filtro receptor son de la forma

$$v[m] = \tilde{s}[m - \epsilon_0] e^{j\omega_0 m T/N} + z[m] \quad (11.89)$$

tomadas a una tasa de muestreo N/T seg $^{-1}$ y con un error en frecuencia de ω_0 rad/s. El desplazamiento ϵ_0 se considera entero, ya que buscamos una aproximación gruesa al instante de comienzo del bloque. Consideremos que disponemos de $2N + M$ muestras, siendo M la longitud del prefijo cíclico (PC). Dado que, en ausencia de canal, las M muestras del PC se repiten, tiene sentido minimizar la siguiente función para tratar de estimar ϵ_0 :

$$D(\epsilon) = \sum_{m=\epsilon}^{\epsilon+M-1} |v[m] - v[m+N]|^2 \quad (11.90)$$

Si el error en frecuencia ω_0 es nulo, entonces, para $\epsilon = \epsilon_0$, tendríamos que $v[m]$ y $v[m+N]$ sólo se diferenciarían a causa del ruido aditivo. En otro caso, es fácil comprobar que $D(\epsilon)$ depende además de ω_0 , por lo que para lograr desacoplar ambas estimaciones, resulta más apropiado modificar la función anterior de la siguiente forma:

$$D(\epsilon) = \sum_{m=\epsilon}^{\epsilon+M-1} |v[m]|^2 + |v[m+N]|^2 - 2 \left| \sum_{m=\epsilon}^{\epsilon+M-1} v[m] v^*[m+N] \right| \quad (11.91)$$

Es fácil comprobar que la diferencia entre (11.91) y (11.90) se concreta en el último término de (11.91), gracias al cual $D(\epsilon)$ no depende de ω_0 . Las prestaciones mejoran si se promedia a lo largo de varios bloques OFDM, dado que en algunos casos el PC puede ser muy corto, y los valores estimados ruidosos en exceso. En otros casos interesa que el enganche sea lo más rápido posible, lo cual se puede conseguir si es posible introducir redundancia apropiada al efecto. Así, en transmisiones a ráfagas es deseable inducir un patrón de repetición usando preámbulos con partes repetidas. En la Figura 11.32 se presenta el preámbulo de una transmisión OFDM especialmente diseñado para acoger una rápida adquisición. A tal efecto, los dos bloques etiquetados como “preámbulo” son iguales, por lo que las M últimas muestras del primero desempeñan el papel de prefijo cíclico del segundo. Si suponemos despreciables los efectos del canal, las $2N$ primeras muestras que siguen al primer prefijo cíclico se pueden escribir como

$$\begin{aligned} v[m] &= \frac{\sqrt{T}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} B[k] e^{j\frac{m}{N}(\omega_0 T + k)} e^{j(\theta_0 - \frac{2\pi k}{N}\epsilon_0)} w_N[m] \\ &+ \frac{\sqrt{T}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} B[k] e^{j\frac{m}{N}(\omega_0 T + k)} e^{j(\theta_0 - \frac{2\pi k}{N}\epsilon_0)} w_N[m-N] + z[m] \end{aligned} \quad (11.92)$$

con $B[k], k = 0, \dots, N-1$, los símbolos introducidos en el preámbulo, los cuales no contienen datos. Obsérvese que los dos sumatorios en (11.92) toman valores en los rangos $0 \leq m \leq N-1$ y $N \leq m \leq 2N-1$ respectivamente, tal y como se deduce de la posición de las ventanas $w_N[m]$ y $w_N[m-N]$. La aplicación del esquema anterior para estimar el instante de comienzo de los sucesivos bloques es sencilla si tenemos en cuenta que el sumatorio en (11.91) abarca N muestras consecutivas, que se corresponden con el tamaño del bloque que se repite (en ausencia de canal).

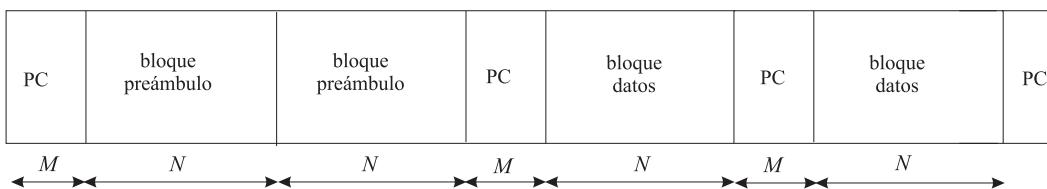


Figura 11.32. Estructura del preámbulo para la estimación de frecuencia en OFDM.

Igualmente se puede estimar la desviación de frecuencia en cualquiera de los casos expuestos, es decir, siempre que tengamos bloques de datos que se repiten, ya sea por la estructura del PC, o bien porque se introduce un preámbulo como el de la Figura 11.32. Así, a partir de la expresión de las muestras recibidas (11.92), y suponiendo que se ha estimado la referencia temporal ϵ_0 , tenemos que

$$v[m+N] = v[m]e^{j\omega_0 T} + z[m+N] - z[m]e^{j\omega_0 T}, m = 0, \dots, N-1 \quad (11.93)$$

Por tanto, el problema inicial de estimación de la frecuencia ω_0 se ha transformado en un problema de estimación de la fase $\omega_0 T$ asistido por datos, que ya ha sido estudiado en el Apartado 11.3, dado que si hacemos $q_1[m] \doteq v[m]$ y $q_2[m] \doteq v[m+N]$, para $m = 0, \dots, N-1$, nos queda

$$q_2[m] = q_1[m]e^{j\omega_0 T} + z'[m], m = 0, \dots, N-1 \quad (11.94)$$

donde si las componentes de $z[m]$ son independientes e idénticamente distribuidas (gausianas), las componentes de $z'[m]$ también lo serán. Obsérvese que la varianza de $z'[m]$ es el doble de la de $z[m]$. A partir de las Ecuaciones (11.20) y (11.21), tenemos que la solución ML a este problema queda de la forma

$$\hat{\omega}_{ML} = \frac{1}{T} \triangleleft \left\{ \sum_{m=0}^{N-1} q_1^*[m]q_2[m] \right\} \quad (11.95)$$

Como se deduce fácilmente, la ambigüedad angular limita los valores de la frecuencia que se pueden estimar al rango $|\omega_0/2\pi| < 1/(2T)$, siendo $1/T$ la separación entre portadoras en hercios. Para resolver errores de frecuencia mayores se puede recurrir a una mayor separación entre portadoras, lo que equivale a utilizar bloques más cortos en tiempo (T más pequeño) con menos portadoras. En un caso práctico se pueden abordar estas cuestiones empleando dos tipos diferentes de bloques en el preámbulo: una primera repetición de dos bloques cortos seguida por la repetición de dos bloques largos¹⁴, tal y como muestra la Figura 11.33. Finalmente, todos aquellos errores que potencialmente puedan ser mayores que la ambigüedad que se puede resolver deben ser abordados con posterioridad a la DFT. Para

¹⁴Hay que tener en cuenta que los preámbulos se emplean para abordar otras tareas, como la estimación de canal, por lo que no es únicamente la estimación de frecuencia la que dictamina la estructura de los mismos.

ello, será necesario usar algún tipo de referencia en frecuencia para poder determinar el alineamiento entre portadoras, lo que se puede conseguir bien con símbolos piloto en algunas portadoras, bien buscando las portadoras nulas que normalmente se insertan en los extremos de cualquier transmisión OFDM.

PC	Ajuste grueso	Ajuste grueso	PC	Ajuste fino	Ajuste fino	PC	Datos	
----	---------------	---------------	----	-------------	-------------	----	-------	--

Figura 11.33. Estructura del preámbulo para la estimación de frecuencia en OFDM en dos etapas, gruesa y fina.

La implementación de estos bloques tan especiales en el transmisor resulta muy sencilla, dado que, si tenemos en cuenta las propiedades de la DFT, en concreto, la inserción de ceros expuesta en el Apartado 2.3.5, las dos mitades de un bloque serán iguales si uno de cada dos símbolos es cero antes de hacer la IDFT en el transmisor. En general, la inserción de $L - 1$ ceros genera la repetición de la DFT original L veces.

Si no se dispone de un preámbulo como los que se acaban de ilustrar, es necesario recurrir a la repetición del PC entre dos bloques sucesivos. Por lo demás, las expresiones son totalmente análogas a las recién expuestas.

11.7.3. Sincronización post-DFT

Una vez efectuada la DFT se puede completar la labor de sincronización, haciendo uso, por ejemplo, del conocimiento de los símbolos transmitidos en ciertas portadoras y conocidos como símbolos piloto, los cuales permiten estimar la respuesta del canal en la respectiva portadora (recuérdese el Apartado 8.1.8). En primer lugar, es posible subsanar posibles errores en frecuencia que hayan podido desplazar los símbolos de unas portadoras a otras, identificando las posiciones de símbolos conocidos. Por otro lado, el canal recoge, además de los fenómenos de la propagación y el filtrado, gran parte de los efectos señalados anteriormente, tales como el error de fase común o CPE, el instante escogido de inicio del bloque, el error de fase, etc. Sin embargo, la simple estimación de canal y su posterior interpolación en las portadoras que carecen de símbolos pilotos no garantiza una correcta solución a los errores de sincronización que han llegado hasta esta etapa, y que ofrecen características distintas. Por ejemplo, el CPE altera por igual los símbolos asociados a todas las portadoras, mientras que el comienzo del bloque determina una fase que varía linealmente a lo largo de las mismas. Resultan especialmente problemáticas las variaciones con el tiempo, incluso en canales quasi-estáticos, causadas por el CPE, tal y como se ha visto en el Apartado 11.7.1, o un inicio de bloque que no se mantiene constante porque el valor estimado del mismo cambia o porque los relojes del transmisor y receptor presentan frecuencias ligeramente diferentes. En este sentido, es necesario incorporar mecanismos de seguimiento como el mostrado en la Figura 11.31, donde la realimentación señalada sirve para ajustar el comienzo del bloque a partir de la información obtenida después de la DFT. Las posibles formas de abordar estas

cuestiones no son únicas, y conforman, sin duda, algunos de los aspectos más delicados y diferenciales de un receptor OFDM.

11.8. SINCRONIZACIÓN PARA MODULACIONES DE ESPECTRO ENSANCHADO

El rasgo más característico de un sistema de espectro ensanchado es el gran ancho de banda utilizado, muy por encima de lo estrictamente necesario, lo que produce ventajas como las mencionadas en el Capítulo 8. Con objeto de establecer una comparación, en este apartado utilizaremos el término *banda estrecha* en contraposición a espectro ensanchado.

Partiendo de la expresión de la señal de espectro ensanchado en banda base en (8.79), considerando un canal ideal que introduce ruido blanco y gausiano $z(t)$ y teniendo en cuenta los mismos problemas de sincronización que en el apartado anterior, podemos escribir la señal recibida en banda base como

$$\begin{aligned} r(t) &= e^{j(\omega_0 t + \theta_0)} \sum_n A[n]g(t - nT - \epsilon_0 T) + z(t) \\ &= e^{j(\omega_0 t + \theta_0)} \sum_n \sum_{m=0}^{N-1} A[n]x[m]g_c(t - mT_c - nT - \epsilon_0 T) + z(t) \end{aligned} \quad (11.96)$$

donde ω_0 representa el error residual en frecuencia, mientras que θ_0 indica la fase residual y ϵ_0 el desplazamiento temporal relativo a un periodo de símbolo T . Recordemos que el pulso $g_c(t)$ determina el ancho de banda en transmisión, que es N veces superior al de un sistema de banda estrecha. Por tanto, podemos aplicar el planteamiento del Apartado 11.4 para encontrar el instante de muestreo óptimo, lo que conduce a la maximización de la misma función de coste, en concreto,

$$L(\epsilon) = \sum_{n=0}^{N_e-1} |q(nT + \epsilon T)|^2 \quad (11.97)$$

donde $q(t)$ representa la salida del filtro adaptado al pulso recibido $g(t)$ y N_e el número de símbolos incluidos en la señal de espectro ensanchado. La diferencia sustancial radica, sin embargo, en la forma de dicho pulso, tal y como ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 11.9

La Figura 11.34 muestra la función a maximizar $L(\epsilon)$ para una realización sin ruido, con un tamaño del código $N = 8$. Las diferencias son claras con respecto a la gráfica correspondiente de la Figura 11.13. En concreto, existen diversos máximos locales asociados a las N posibles posiciones relativas del código $x[m]$, $m = 0, \dots, N - 1$, a emplear en el receptor.

Tenemos por tanto que la función $L(\epsilon)$ presenta varios máximos locales, que se corresponden con una fase de muestreo correcta, pero asociada a un incorrecto alineamiento de la secuencia ensanchadora. Se deduce por tanto que es necesaria una sincronización a dos niveles, con el fin de obtener bloques de N muestras correctamente alineados con el código

de ensanchado $x[m]$ y resolver el instante de muestreo adecuado. Así, a partir de la Figura 11.34 y de la arquitectura receptora presentada en el Apartado 8.2.3, cabe considerar una doble tarea en la sincronización. Por un lado, hay que resolver el instante de muestreo más adecuado en el rango de la duración de chip T_c . Por otro lado, a la hora de efectuar el producto por la secuencia ensanchadora para realizar el desensanchado, es necesario establecer un alineamiento temporal entre la señal recibida y la secuencia $x[m]$ generada en el receptor. Ambas cuestiones quedan reflejadas en el factor $\epsilon_0 T$ de (11.96) si este se divide en dos términos:

$$\epsilon_0 T = m_c T_c + \epsilon_c T_c, \quad 0 \leq m_c < N, \quad -\frac{1}{2} \leq \epsilon_0, \epsilon_c < \frac{1}{2} \quad (11.98)$$

con m_c entero. Aunque la solución óptima sería buscar simultáneamente los parámetros m_c y ϵ_c trabajando con (11.97), resulta más conveniente separar este proceso en dos etapas. En este sentido, cabe indicar que la energía de cada *chip* es normalmente muy reducida -no olvidemos que la relación señal a ruido mejora en un factor de N tras deshacer el ensanchado-, por lo que la posibilidad de considerar como pulso básico el pulso $g_c(t)$, modulado por los valores $A[n]x[m]$, previsiblemente no conseguiría la exactitud suficiente en el muestreo fino para poder abordar el posterior desensanchado con garantías. Por tanto, se suele recurrir a una primera etapa de *adquisición*, en la que se busca el alineamiento correcto de la secuencia ensanchadora,¹⁵ lo que equivale a localizar el lóbulo de mayor nivel en la Figura 11.34. Posteriormente, ya con una relación señal a ruido más alta, se procede a un *ajuste fino* para ubicar el máximo del lóbulo anterior, es decir, el instante de muestreo más adecuado. Además, para el caso de sistemas paso banda, se debe realizar la sincronización de fase y de frecuencia. Esta doble faceta de la sincronización es propia de modulaciones multipulso. No olvidemos que en el apartado anterior valoramos la necesidad de establecer las fronteras de los bloques de la señal OFDM con el fin de calcular la DFT, sin menoscabo de precisar posteriormente el muestreo de forma más fina.

11.8.1. Adquisición

Siguiendo los principios del procesado discreto en el receptor expuestos hasta el momento, dos muestras por periodo de chip son suficientes a la hora de muestrear la señal de espectro ensanchado por secuencia directa si se utilizan pulsos limitados en frecuencia como es el caso de los pulsos en raíz de coseno alzado (véase Apartado 11.2). El filtrado por $g^*(-t)$, el filtro adaptado a $g(t)$, se puede dividir en dos partes, en concreto, el filtrado por $g_c(-t)$ y la multiplicación de las muestras por la secuencia $x^*[m]$, tal y como se mostró en la Expresión (8.2.3). Por tanto, la búsqueda del valor m_c en (11.98) que maximiza (11.97) se puede efectuar tras el filtro adaptado al nivel de chip $g_c(-t)$, probando el alineamiento de $x[m]$ que consigue el valor máximo. Dicha búsqueda ha de realizarse con saltos de medio chip, ya que hemos dicho que necesitamos dos muestras por periodo de chip para este procesado digital, aunque una muestra por periodo de chip es suficiente para la operación de desensanchado una vez que se conoce el instante óptimo de muestreo. Obsérvese que esta operación es incoherente ya que no depende de la fase que pueda acompañar a la señal en el

¹⁵Una estimación semejante se lleva a cabo en el caso de un receptor RAKE, véase Apartado 8.2.8.

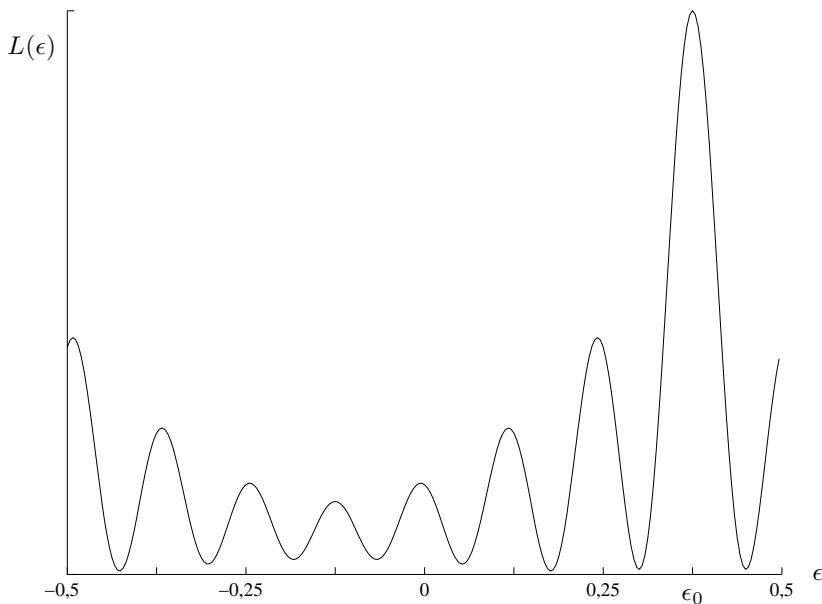


Figura 11.34. Función de coste $L(\epsilon)$ para la estimación del instante de muestreo en espectro ensanchado por secuencia directa. No hay ruido, y el factor de caída del coseno alzado es $\alpha = 0,5$. La posición correcta es la indicada por ϵ_0 , igual a 0,375.

caso de sistemas paso banda. Dadas las buenas propiedades de las secuencias ensanchadoras utilizadas con relación a su autocorrelación, basta con realizar la búsqueda del alineamiento utilizando un solo periodo de la secuencia, equivalente a un símbolo, a pesar de que la función de coste (11.97) fue derivada suponiendo un gran número de símbolos. En este sentido ayuda que la autocorrelación del pulso de entrada tenga un pico muy acusado gracias al carácter de seudoruido de la secuencia ensanchadora (véase Apartado 8.2.9). Para perfilar el modo de realizar la adquisición de código o sincronización gruesa, podemos abordar los cálculos de un modo similar al mostrado en el Apartado 8.2.3:

$$\begin{aligned}
 q(kT_c/2) &= r(t) * g^*(-t)|_{t=kT_c/2} = r(t) * \sum_{m=0}^{N-1} x^*[m]g_c(-t - mT_c) \Big|_{t=kT_c/2} = \\
 &\sum_{m=0}^{N-1} x^*[m] [r(t) * g_c(-t - mT_c)] \Big|_{t=kT_c/2} = \sum_{m=0}^{N-1} x^*[m] [r(t) * g_c(-t)] \Big|_{t=(k+2m)\frac{T_c}{2}} \quad (11.99)
 \end{aligned}$$

El procedimiento de sincronización gruesa se muestra en la Figura 11.35. En resumen, el estimador ML de la posición de la secuencia ensanchadora correlaciona las muestras de entrada con una réplica local $x[m]$ de la secuencia ensanchadora, y busca el retardo que maximiza la magnitud al cuadrado de la salida del correlacionador.

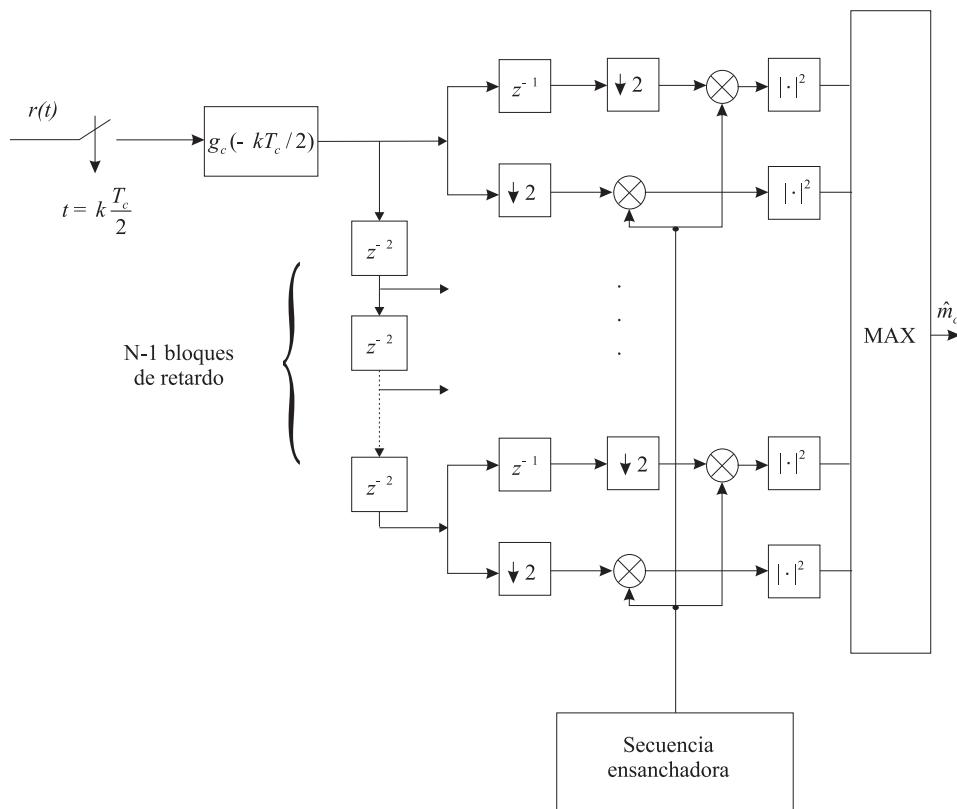


Figura 11.35. Adquisición de código en un sistema de espectro ensanchado por secuencia directa.

11.8.2. Seguimiento

Una vez obtenido el alineamiento del código, es decir, el parámetro m_c en (11.98), falta por precisar ϵ_c igualmente en (11.98). El procedimiento de estimación de este último se denomina *ajuste fino o seguimiento*. El nombre de seguimiento se debe a que esta segunda fase de la sincronización debe ser mantenida de forma permanente, al contrario que la primera, que sólo debe realizarse en la inicialización. De este modo se podrán seguir las alteraciones en el retardo que sufre la señal desde el transmisor hasta el receptor que se traducen directamente en variaciones del instante de muestreo óptimo, sin necesidad de volver a realizar la adquisición, a pesar de que dichas alteraciones puedan llegar a suponer cambios mayores que la anchura de un chip. Obsérvese que el rango de posibles valores para ϵ_c se encuentra en el intervalo $|\epsilon_c| \leq 1/2$, al igual que ocurre en el problema de ajuste temporal en sistemas de banda estrecha.

En la función $L(\epsilon)$ en (11.97) tenemos que una vez estimado m_c queda

$$L(\epsilon_c) = \sum_{n=0}^{N_e-1} |q(nT + m_c T_c + \epsilon_c T_c)|^2 \quad (11.100)$$

para la que podemos proceder del mismo modo que en el Apartado 11.4.1 para obtener un algoritmo recursivo que permita realizar un seguimiento de la evolución de ϵ_c con el tiempo. En función de en qué momento aproximemos la derivada obtendremos uno de entre dos posibles algoritmos. Así, podemos utilizar como término de error

$$e[n] = \sum_{k=0}^n |q(kT + m_c T_c + \hat{\epsilon}_c[n] T_c + \frac{1}{2} T_c)|^2 - |q(kT + m_c T_c + \hat{\epsilon}_c[n] T_c - \frac{1}{2} T_c)|^2 \quad (11.101)$$

que da lugar a un lazo enganchado en retardo (“*Delay-Locked Loop*”), conocido como DLL y mostrado en la Figura 11.36. Obsérvese que es necesario efectuar un muestreo con periodo

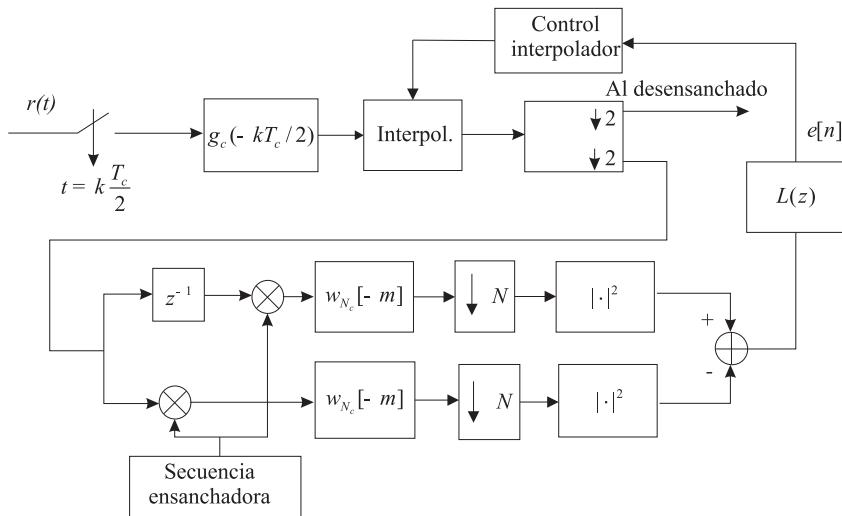


Figura 11.36. Lazo enganchado en retardo (DLL) para ajuste fino en DS-SS.

$T_c/2$, y utilizar la secuencia ensanchadora como parte de la operación del filtro adaptado tal y como explicamos en la parte de adquisición. El objetivo es equilibrar la energía de la salida muestreada $T_c/2$ antes del instante de muestreo escogido con respecto a la energía de la salida muestreada $T_c/2$ después. Como resultado de la comparación, el error $e[n]$ se actualiza en cada periodo de símbolo.

La otra posibilidad surge de aplicar el mismo desarrollo que en el Apartado 11.4.1, lo que lleva a un algoritmo en el que el error del bucle se escribe como

$$e[n] = \sum_{k=0}^n \Re \left\{ q(kT + m_c T_c + \hat{\epsilon}_c[n] T_c) \cdot \left(q^*(kT + m_c T_c + \hat{\epsilon}_c[n] T_c + \frac{1}{2} T_c) - q^*(kT + m_c T_c + \hat{\epsilon}_c[n] T_c - \frac{1}{2} T_c) \right) \right\} \quad (11.102)$$

Este algoritmo se denomina *pronto-tarde* al igual que el correspondiente de banda estrecha. Tiene una complejidad similar a la del DLL expuesto anteriormente, y al igual que el mismo,

es incoherente, dado que el término de error $e[n]$ no varía ante una rotación de las muestras de entrada. El error cometido en la estimación de ϵ_c es menor que el correspondiente con el DLL cuando la relación señal a ruido es muy baja.

11.8.3. Ajuste de fase y frecuencia

Tal y como hemos mencionado anteriormente, resulta prioritario que el error de frecuencia sea muy pequeño en relación con la tasa de símbolo en cualquier sistema convencional, a fin de facilitar la sincronización temporal y maximizar la relación señal a ruido. Esto sigue siendo así en el caso de espectro ensanchado, con la dificultad añadida del código de ensanchado: sin adquirir correctamente la posición del mismo no resulta factible resolver la desviación en frecuencia de la señal recibida. Igualmente, sin conocer la posición en frecuencia de la señal de entrada no se puede afrontar la adquisición tal y como la presentamos en el Apartado 11.8.1. Por tanto, en principio es necesario afrontar una búsqueda bidimensional tiempo/frecuencia, que viene a ser una combinación de los esquemas mostrados en las Figuras 11.26 y 11.35.

Con respecto a la fase, y sin hacer consideraciones acerca de la interferencia multiusuario, cabe decir que los principios son los mismos que en los esquemas de banda estrecha. En algunos casos la sincronización de fase se puede efectuar a partir de una señal piloto si el diseño del sistema así lo permite.

11.8.4. Salto en frecuencia

La sincronización de sistemas FH-SS (“Frequency Hopping Spread Spectrum”), Apartado 8.2.7, presenta las mismas necesidades analizadas para DS-SS: adquisición y seguimiento, o ajuste grueso y ajuste fino. En la adquisición hay que sincronizar la secuencia que controla el patrón de salto en frecuencia. Para ello se deben combinar las salidas del filtro adaptado en el receptor convenientemente en tiempo y frecuencia, es decir, para cada intervalo de chip la salida en la frecuencia correspondiente, hasta que se supere un determinado umbral que indicará que se ha hecho la combinación en el orden correcto. Posteriormente, el ajuste fino se encarga de determinar con mayor precisión la frontera de los intervalos de chip durante los cuales las frecuencias se mantienen constantes, haciendo uso de nuevo de un algoritmo realimentando en el que el error indica si hay que avanzar o retroceder para alinear los patrones de frecuencia recibido y generado, respectivamente, en el receptor.

11.9. LECTURAS ADICIONALES

En 1963 tuvo lugar un encuentro entre algunos de los más destacados expertos por aquel entonces en teoría de la comunicación. En concreto, se reunieron S.W. Golomb, J.R. Davey, I.S. Reed, H.L. Van Trees y J.J. Stiffler para discutir acerca de los problemas relacionados con la sincronización. Su conclusión fue clara: la sincronización no constituye una mera cuestión de detalle final, sino que es en sí misma un problema fundamental de las comunicaciones digitales como lo puede ser la detección [35]. Cuarenta años de avances les han

venido a dar la razón y a constatar la importancia de la sincronización en todos sus niveles. Este capítulo ha tratado de cubrir los aspectos más reseñables de la misma en lo referido al nivel físico de la comunicación, buscando la presentación de los problemas fundamentales y modos sistemáticos de resolverlos. En este sentido, las dos principales fuentes de referencia son los libros de Meyr, Moeneclaey y Fechtel por un lado [50] y de Mengali y D'Andrea por otro [49]. Estos excelentes textos han venido a llenar un hueco ante la falta de tratados que permitiesen abordar de forma global la problemática de la sincronización. Asimismo, en [88] se muestran numerosos aspectos prácticos de la sincronización y su solución para entornos muy diversos.

La importancia de la interpolación en los esquemas de sincronización temporal fue constatada por primera vez por Gardner en [29], y se puede encontrar todo un capítulo dedicado a la misma en [50].

Los sistemas basados en modulaciones multiportadora presentan una problemática muy particular en lo referente a la sincronización, tal y como se ha tratado de poner de manifiesto en este capítulo. Para profundizar en esta cuestión, se puede consultar [59], [77] y [96].

Por lo que respecta a las modulaciones de espectro ensanchado, el libro de Proakis [61] constituye una muy buena referencia general y, en particular, en lo relativo a la sincronización. Este texto permite ahondar en este delicado problema, que se ha cubierto de forma somera en este capítulo, y que constituye uno de los puntos críticos de la implementación práctica de sistemas basados en espectro ensanchado.

PROBLEMAS

P11.1 Sea un lazo de estimación de fase o PLL de primer orden que incorpora el filtro de lazo $L(z) = K$. Se pretende que dicho PLL pueda realizar el seguimiento de una exponencial de entrada de la forma

$$q[n] = e^{j(\omega_0 n + \theta_0)}$$

donde ω_0 es un error residual de frecuencia tal que $|\omega_0| < 0,1 \cdot \pi$ radianes. Tal y como se ha detallado en el capítulo, un PLL de primer orden dejará un error permanente de fase en este caso.

- 1.1. Determine el mínimo valor de K que garantiza que la diferencia de fase entre la exponencial de entrada y la exponencial generada por el PLL sea una constante. Tenga en cuenta para ello que en régimen permanente el término $K \operatorname{sen}(\omega_0 n + \theta_0 - \hat{\theta}[n])$ debe ser constante para que en la exponencial $\exp(j\hat{\theta}[n])$ la fase estimada $\hat{\theta}[n]$ pueda seguir una evolución lineal con el tiempo.
- 1.2. A la vista de la función de transferencia expuesta en el Ejemplo 11.2, razoné qué consecuencias implica el aumento de K .
- 1.3. Si en una realización práctica se mide el error residual de fase $\omega_0 n + \theta_0 - \hat{\theta}[n]$ para n grande, se obtiene un valor mayor que ω_0/K , el que predice el modelo lineal. Explique la discrepancia teniendo en cuenta las limitaciones de la aproximación lineal.

P11.2 La correlación es una operación fundamental para la estimación de parámetros, como se ha puesto de manifiesto a lo largo de este capítulo. Veamos algunas consideraciones para casos de especial interés.

- 2.1. Sea $p[n]$ una exponencial compleja de la forma $p[n] = e^{j(\omega_0 n + \theta_0)}$, $0 \leq n \leq N - 1$. Obtenga la estimación $\hat{R}_p[m]$ de su autocorrelación, usando para ello la siguiente expresión:

$$\hat{R}_p[m] = \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-m-1} p[n+m]p^*[n], m = 0, 1, \dots, N-1$$

$$\text{y } \hat{R}_p[-m] = \hat{R}_p^*[m].$$

- 2.2. Repita el cálculo anterior con el estimador

$$\hat{R}_p[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-m-1} p[n+m]p^*[n], m = 0, 1, \dots, N-1$$

que en la práctica se emplea a menudo debido a sus mejores propiedades estadísticas.

- 2.3. Sea $p[n]$, $0 \leq n \leq N-1$, una secuencia de seudoruido de la que podemos decir, con un buen grado de aproximación, que

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-m-1} p[n+m]p^*[n] \approx \delta[m]$$

Si dicha secuencia atraviesa un canal de la forma $h[n] = h_0\delta[n-n_0] + h_1\delta[n-n_1]$, obtenga, utilizando el estimador del apartado anterior, la autocorrelación entre la salida del canal $y[n] = p[n] * h[n]$ y $p[n]$, justificando la existencia de dos picos en la misma que permitirían identificar los retardos presentes en el canal.

P11.3 El rango de enganche de un estimador de frecuencia incluye aquellas desviaciones de frecuencia que pueden ser asumidas por el estimador. Determine dicho rango en los siguientes casos, para un pulso de transmisión en raíz cuadrada de coseno alzado con factor de caída α :

- 3.1. Estimador de máxima verosimilitud recursivo del Apartado 11.6.1. Se puede suponer que se verifica la siguiente relación:

$$\frac{1+\alpha}{2T} + \omega_{max} < \frac{1}{2T_s}$$

es decir, no se produce aliasing en el muestreo de la señal desplazada en frecuencia.

- 3.2. Estimador de Fitz. Obtenga el resultado en función del número L de términos de la autocorrelación empleados.
- 3.3. Estimador de Luise y Regiannini. Idem.

P11.4 Respecto al estimado de Gardner del instante de muestreo:

- 4.1. Demuestre que el estimador ofrece un funcionamiento independiente de la fase residual θ_0 presente en la señal de entrada

$$r(t) = \sum_{n=0}^{N-1} A[n]g_r(t - nT - \epsilon_0 T) e^{j\theta_0} + z(t)$$

- 4.2. Si se conoce la fase, es posible usar un estimador relacionado con el de Gardner y dirigido por decisión:

$$e[n] = \sum_{k=0}^n \mathcal{R}e \left\{ q^* \left(kT - \frac{T}{2} + \hat{\epsilon}[k-1]T \right) (\hat{A}[k-1] - \hat{A}[k]) \right\}$$

donde $\hat{A}[k-1]$ y $\hat{A}[k]$ representan los símbolos decididos a partir de las muestras $q((k-1)T + \hat{\epsilon}[k-1]T)$ y $q(kT + \hat{\epsilon}[k]T)$ respectivamente. Este estimador se corresponde con el clásico *detector de cruces por cero* (“Zero-crossing Detector”). Justifique razonadamente para una constelación QPSK por qué un cambio de polaridad en símbolos consecutivos beneficia el ajuste del instante de muestreo.

P11.5 Consideremos una modulación 2-PAM paso banda de la forma

$$x(t) = \sqrt{2} \mathcal{R}e \left\{ \sum_n A[n]g(t - nT) e^{j(\omega_c t + \theta_0)} \right\}$$

donde los símbolos $A[n]$ pueden tomar los valores ± 1 . Proponemos dos posibles formas de realizar la demodulación en el receptor, el cual dispone de un oscilador que genera la sinusoide $\cos(\omega_c t)$, y puede generar su versión en cuadratura $\sin(\omega_c t)$:

- Si tenemos en cuenta que los símbolos son reales, $x(t)$ también se puede escribir como $x(t) = s(t) \cos(\omega_c t + \theta_0)$. Sea la señal recibida $y(t) = x(t)$ y la correspondiente señal en banda base la obtenida como el filtrado paso bajo de $y(t) \cos(\omega_c t)$.
- Demodulación en cuadratura, como la mostrada en la Figura 5.34.

- 5.1. Si $\theta_0 = 0$, determine cuál de los dos receptores resulta más sencillo para la modulación planteada.

- 5.2. Deduzca la expresión de la señal demodulada en banda base $q(t)$ en ambos casos para el caso general de θ_0 arbitrario. Compruebe que si la conversión a banda base se realiza de forma incoherente, es decir, sin control de ningún tipo sobre la fase de la sinusoides empleada, $q(t)$ puede llegar a hacerse nula en el caso real.
- 5.3. Concluya que en el primer caso es necesario efectuar la demodulación empleando $\cos(\omega_c t + \hat{\theta})$, mientras que en el segundo podemos desacoplar las operaciones de mezclado con la sinusoides y estimación de θ_0 , haciendo uso, por ejemplo, del esquema de la Figura 11.21.

P11.6 Obtenga los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de la siguiente señal:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |p(t - nT - \epsilon_0 T)|^2$$

en función de la Transformada de Fourier $P(j\omega)$ de $p(t)$. Demuestre que si $P(j\omega)$ es nulo para $|\omega| \geq 2\pi/T$, entonces sólo habrá tres coeficientes no nulos, en concreto:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{T} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |P(j\omega)|^2 d\omega \\ c_1 &= \frac{1}{T} e^{-j2\pi\epsilon_0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(j(2\pi/T - \Omega)) P^*(-j\Omega) d\Omega \\ c_{-1} &= \frac{1}{T} e^{j2\pi\epsilon_0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(j(-2\pi/T - \Omega)) P^*(-j\Omega) d\Omega \end{aligned}$$

Demuestre además que $c_1 = c_{-1}^*$.

P11.7 Como se ha visto a lo largo del capítulo, la interpolación resulta un elemento esencial en la recuperación del instante de muestreo. Los interpoladores que se emplean no son exactos, dado que los filtros deben ser necesariamente limitados en tiempo, aunque los errores atribuibles a este concepto suelen ser poco importantes. En este problema vamos a presentar una estructura de interpolación muy empleada en la práctica.

7.1. La operación

$$y(kT_s + \mu T_s) \doteq \hat{x}(kT_s + \mu T_s) = \sum_{m=-I_1}^{I_2} x(kT_s - mT_s) h_\mu[m]$$

sirve para interpolar de forma aproximada el valor $x(kT_s + \mu T_s)$, con $0 \leq \mu < 1$, a partir de las muestras recibidas en múltiplos de T_s . Esta operación se corresponde con el filtrado de la secuencia $x(kT_s)$ por un filtro FIR. Determine los valores de k para los que la respuesta al impulso $h_\mu[k]$ de dicho filtro es no nula. Asimismo, obtenga los valores de dicha respuesta para un simple interpolador lineal.

- 7.2. La respuesta al impulso anterior depende del desplazamiento μ . Vamos a parametrizar cada uno de sus coeficientes como

$$h_\mu[k] = \sum_{l=0}^L c_l[k] \mu^l$$

Esta relación polinómica restringe la dependencia de los coeficientes con μ , pero permite una implementación eficiente. Utilizando estos coeficientes, demuestre que la salida interpolada $y(kT_s + \mu T_s)$ se puede escribir como la combinación de las salidas de $L + 1$ filtros independientes de μ . El factor μ controla el modo en el que se combinan dichas salidas, y es el único factor en el interpolador que depende del resultado de la estimación del instante de muestreo. Este tipo de esquema se denomina *estructura de Farrow*.

- P11.8 Para comprender un poco mejor cómo la maximización de la energía en el instante de muestreo sirve para sincronizar el receptor, consideremos un caso simplificado. Así, sea la señal recibida de la forma

$$r(t) = \sum_n A[n] w_T(t - nT)$$

donde el pulso $w_T(t)$ es rectangular, definido en el intervalo $0 \leq t < T$.

- 8.1. Sea la salida del filtro adaptado $q(t) = r(t) * w_T(-t)$. Justifique que $q(t)$ se puede escribir como $q(t) = \sum_n A[n] p(t - nT)$, siendo $p(t)$ un pulso de Nyquist.
- 8.2. Obtenga la energía media $E\{|q(\epsilon T)|^2\}$ como función de la fase de muestreo $0 \leq \epsilon < 1$, comprobando que tiene un máximo en $\epsilon = 0$.

- P11.9 El estimador de Luise y Reggiannini de la Ecuación (11.81) hace uso de la estimación de la autocorrelación para los índices $m = 1, \dots, L - 1$.

- 9.1. Determine el número de multiplicaciones necesarias sobre las N muestras de entrada para el cálculo de $\sum_{m=1}^L \hat{R}_p[m]$. Demuestre cómo se puede reducir este número a $N - 1$ haciendo los agrupamientos correspondientes.
- 9.2. El estimador anterior precede a un estimador de fase, el cual necesita que la variación de la fase a lo largo de las N_θ muestras que usa (con N_θ no necesariamente igual a N), para estimar la misma sea inferior a $2\pi \cdot 10^{-2}$ radianes. Determine el máximo error en frecuencia que asegura un correcto funcionamiento de la recuperación de fase.

- P11.10 La función de coste asociada a la estimación conjunta del instante de muestreo y la desviación de frecuencia se puede escribir como:

$$L(\epsilon, \omega) = \sum_{n=0}^{N-1} |q(nT + \epsilon T, \omega)|^2 \approx c_0(\omega) + 2\Re \{c_1(\omega)e^{j2\pi\epsilon}\}$$

Obtenga la expresión de $c_0(\omega)$, que debe servir para demostrar que la función de coste $L(\omega)$ en (11.67) se puede obtener promediando $L(\epsilon, \omega)$ sobre una distribución uniforme de todas las posibles fases de muestreo ϵ en el rango $[-1/2, 1/2]$.

- P11.11 En numerosas ocasiones una misma arquitectura receptora debe mantener su funcionalidad para diferentes tasas de símbolo. Así, supongamos que en la Figura 11.15 el parámetro T no está fijado de antemano, y puede tomar diferentes valores asociados a distintas señales de entrada. En ese caso, los coeficientes del filtro adaptado dependen de la tasa de entrada, y el interpolador ajusta la tasa a dos muestras por periodo de símbolo, que son las necesarias para el esquema pronto-tarde.

- 11.1. Si el filtro adaptado es un filtro en raíz cuadrada de coseno alzado, determine el número de coeficientes de su respuesta al impulso en función del cociente T/T_s , para el caso en el que esta se trunca a una duración de 10 períodos de símbolo.
- 11.2. Una posible estructura alternativa, con menos complicaciones en su implementación, pasa por colocar el interpolador antes del filtro adaptado, de modo que este último trabaje con dos muestras por periodo de símbolo independientemente de la tasa de símbolo. Razone las diferencias entre ambas estructuras, valorando la robustez ante el ruido y posibles interferencias en bandas adyacentes.
- 11.3. Determine el número de coeficientes del filtro adaptado en esta configuración alternativa, para la misma duración del Apartado (a).

- P11.12 El estimador de fase de la M-ésima potencia se basa en la simetría a rotaciones de $2\pi/M$ radianes de la constelación. Demuestre que para este tipo de constelaciones, los símbolos verifican la siguiente propiedad:

$$E\{A^p\} = 0, \quad 1 \leq p \leq M - 1$$

Consideremos ahora una constelación QPSK en la que los símbolos se sitúan originalmente en alguna de las siguientes posiciones:

$$\sqrt{E_s} e^{j(k\pi/2 + \pi/4)}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

es decir, rotada $\pi/4$ radianes con respecto a los ejes real e imaginario. Obtenga el valor $E\{A^4\}$.

- P11.13 Un reemisor de señales tiene como función principal la amplificación, aunque para ello es necesario abordar una serie de tareas de filtrado y mezclado en frecuencia. Consideremos la señal de entrada

$$x(t) = \mathcal{R}e \{ s(t) e^{j\omega_c t} \}$$

que es procesada tal y como se indica en la Figura 11.37. En primer lugar la señal es trasladada desde la frecuencia ω_c a una frecuencia inferior ω_i , donde es filtrada, para posteriormente ser devuelta a la frecuencia original ω_c , donde será de nuevo filtrada y amplificada, tareas que ya no se muestran en la figura. Obsérvese que el oscilador

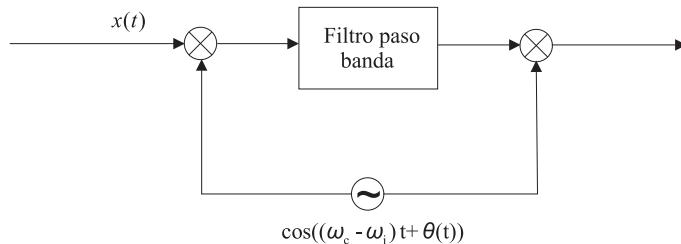


Figura 11.37. Esquema simplificado de un reemisor de señales.

empleado para la conversión en frecuencia es el mismo para la bajada y la subida, y contiene un término de ruido de fase etiquetado como $\theta(t)$, que puede llegar a afectar a las prestaciones del receptor final. Obtenga analíticamente la componente de la señal de salida centrada en ω_c , determinando explícitamente el término de ruido de fase. Se puede suponer que $\omega_c \gg \omega_i > W$, siendo W el ancho de banda que ocupa $s(t)$ en banda base. El filtro paso banda tiene una respuesta en frecuencia $H(j\omega)$ de módulo constante en $(\omega_i - W, \omega_i + W)$, retardo de grupo igualmente constante en dicho rango, y fase θ_0 en ω_i . El ancho de banda del ruido de fase $\theta(t)$ se puede considerar pequeño en relación al de la señal $s(t)$.

- P11.14 Con el fin de analizar el impacto de un error residual de frecuencia en un sistema multiportadora, sea la siguiente expresión:

$$\hat{A}[k] = \text{DFT} \{ e^{j\omega_0 n} \text{IDFT} \{ A[k] \} \}$$

donde $A[k], k = 0, \dots, N - 1$ es una secuencia de N símbolos complejos, $\hat{A}[k], k = 0, \dots, N - 1$, es la secuencia estimada, y ω_0 es la frecuencia residual tras la demodulación, tal que $|\omega_0| < 2\pi/N$. Obsérvese que si $\omega_0 = 0$, entonces tenemos que $\hat{A}[k] = A[k], k = 0, \dots, N - 1$, escenario ideal. Deduzca la expresión del valor asociado a la portadora en $k = 0$, $\hat{A}[0]$, constatando la presencia de ICI causada por las restantes $N - 1$ portadoras.

- P11.15 Tal y como se ha precisado en el texto, se puede variar el comienzo del bloque OFDM en el receptor de un sistema multiportadora sin introducir ISI, siempre y cuando se respete el margen indicado en la Figura 11.30. La principal consecuencia será una rotación de los símbolos, vinculada al índice de la portadora correspondiente. Dicha rotación queda asimilada al canal y, como tal, debe ser identificada. Así, si escribimos los valores obtenidos como en la Ecuación (11.88), es decir,

$$Q^{(n)}[k] = \frac{T}{N} e^{-j2\pi k \epsilon_0 / N} A^{(n)}[k] \cdot D[k] + Z^{(n)}[k], \quad k = 0, \dots, N - 1$$

debemos estimar

$$e^{-j2\pi k\epsilon_0/N} D[k], \quad k = 0, \dots, N-1$$

lo que en muchos casos se hace interpolando los valores estimados en las posiciones de ciertas portadoras piloto. Si consideramos un canal ideal, es decir, $D[k]T/N = 1$ para todo k , determine, para un cociente ϵ_0/N dado:

- 15.1. La máxima separación entre dos portadoras piloto que garantiza una diferencia de fase menor de 45° entre los valores a identificar asociados a ambas portadoras.
- 15.2. Si efectuamos una interpolación lineal para estimar el canal entre las dos portadoras piloto anteriores, razoné por qué, incluso en ausencia de ruido, estaremos cometiendo un error en la estimación de la respuesta del canal asociada a las portadoras intermedias.

Para tratar de estimar ϵ_0 de forma sencilla podemos suponer que la respuesta del canal $D[k]$ varía mínimamente entre portadoras próximas. Por tanto, suponiendo que se conoce el cociente $Q^{(n)}[k_1]/A^{(n)}[k_1]$ y $Q^{(n)}[k_2]/A^{(n)}[k_2]$, y podemos usar que $D[k_1] \approx D[k_2]$, proponga una manera de estimar ϵ_0 .

- P11.16 Justifique en qué frecuencia en radianes presentará un pico espectral muy significativo la secuencia $|q(kT/4)|^2$, teniendo en cuenta que $q(t)$ se puede escribir como

$$q(t) = \sum_n A[n]g(t - nT)$$

siendo $A[n]$ una secuencia de símbolos independientes y $g(t)$ un pulso en coseno alzado con factor de caída $0 < \alpha < 1$ y, por tanto, un ancho de banda de $\pi(1 + \alpha)/T$ rad/s. Repita el razonamiento igualmente con la secuencia $|q(kT/4)|^2$, si ahora $q(t)$ se escribe como

$$q(t) = \sum_n A[n] \sum_{m=0}^1 g_c(t - mT_c - nT)$$

con $T_c = T/2$ y $g_c(t)$ un pulso en coseno alzado con factor de caída $0 < \alpha < 1$ y ancho de banda $\pi(1 + \alpha)/T_c$ rad/s.

- P11.17 Consideremos un caso especial de modulaciones denominadas APSK (Amplitude Phase Shift Keying), que consisten en la unión de diferentes constelaciones M-PSK con radios distintos. En concreto, los puntos de la constelación correspondiente a la modulación 4+12-APSK se pueden escribir como

$$\begin{aligned} r_1 e^{j(\pi/4 + k2\pi/4)}, \quad k = 0, 1, 2, 3 \\ r_2 e^{j(\pi/12 + k2\pi/12)}, \quad k = 0, \dots, 11 \end{aligned}$$

donde $r_2/r_1 > 1$.

- 17.1. Compruebe que esta constelación es invariantes a ciertas rotaciones, determinando la magnitud de las mismas.
- 17.2. Determine el mínimo exponente M necesario para eliminar la modulación de la fase por medio de A^M , siendo A un símbolo arbitrario de la constelación.
- 17.3. El exponente anterior es demasiado elevado y, por tanto, no se usa en la práctica. Por el contrario, se utiliza uno más pequeño que convierte los dos anillos de la constelación 4+12-APSK en sendas constelaciones QPSK de radios distintos. Determine el valor de dicho exponente.
- 17.4. Finalmente, la rotación de fase se puede estimar con un esquema dirigido por decisiones que actúa sobre la constelación de radio mayor obtenida en el anterior apartado. Deduzca la ambigüedad de fase de la técnica de estimación expuesta.

P11.18 18.1. Considere el error en el esquema realimentado de recuperación de frecuencia a partir de la Expresión (11.69). Demuestre que dicho error, que para el funcionamiento en lazo cerrado y a periodo T_s toma la forma

$$e[k] = 2 \sum_{m=0}^k \operatorname{Re} \{q(mT_s, \omega[m]) q_d^*(mT_s, \omega[m])\}$$

se puede reescribir como

$$\begin{aligned} e[k] = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^k & (|q(mT_s, \omega[m]) + q_d(mT_s, \omega[m])|^2 - \\ & |q(mT_s, \omega[m]) - q_d(mT_s, \omega[m])|^2) \end{aligned}$$

- 18.2. De lo anterior se deduce que el lazo de ajuste de frecuencia está dirigido por la diferencia de energías a la salida de los filtros $f(kT_s) + f_d(kT_s)$ y $f(kT_s) - f_d(kT_s)$ para la entrada $r(kT_s)e^{-j\hat{\omega}[k]kT_s}$, siendo $f_d(kT_s)$ la respuesta en tiempo correspondiente a la derivada en frecuencia del filtro con respuesta $f(kT_s)$. Represente gráficamente la respuesta en frecuencia de los dos filtros anteriores, en concreto, el filtro suma y el filtro diferencia, constatando aquellas bandas de frecuencia en las que difieren y aquellas en las que coinciden.
- 18.3. Dado que los filtros equivalentes presentan zonas en frecuencia en las que coinciden, se puede desechar la información de la entrada en dichas bandas. Por tanto, es posible sustituir los filtros anteriores por otros más simples. Sea por tanto un esquema alternativo en el que el error se calcula como

$$e[k] = \sum_{m=0}^k |q_1(mT_s, \omega[m])|^2 - |q_2(mT_s, \omega[m])|^2$$

siendo $q_i(mT_s, \omega[m])$ el resultado de filtrar la entrada por el filtro $h_i(kT_s)$ para $i = 1, 2$. Explicar qué condición deben cumplir en frecuencia los filtros $h_1(kT_s)$

y $h_2(kT_s)$ para que el esquema realimentado siga ejerciendo su función. Este tipo de esquema, concebido inicialmente en su momento a partir de consideraciones *ad-hoc*, se conoce como detector de *filtros duales* o de *filtros espejo*.

APÉNDICES

11.A. RESULTADOS ASINTÓTICOS

A lo largo del capítulo se emplean diversas aproximaciones, las cuales resultan muy convenientes para obtener esquemas prácticos de sincronización. Una de ellas considera secuencias muy largas de muestras, así como un número de símbolos muy elevado. Otra suposición importante es que el pulso recibido $g_r(t)$ es tal que $g_r(t)*g_r^*(-t)$ verifica el criterio de Nyquist, es decir, no hay ISI si se muestrea adecuadamente. A continuación mostraremos en detalle cómo dichas aproximaciones ayudan a manipular las expresiones involucradas en el desarrollo del receptor ML óptimo. En la práctica, los esquemas de sincronización obtenidos se aplican a muchos casos que no tienen por qué verificar necesariamente las suposiciones realizadas.

En primer lugar tenemos que la función de densidad de probabilidad (11.6) de los datos recibidos es función de la distancia euclídea $\|\mathbf{r} - \mathbf{s}\|$, ya que el ruido es blanco y gausiano. A continuación repetimos el desglose de dicha distancia al cuadrado, tal y como se hizo en la Expresión (11.9):

$$\|\mathbf{r} - \mathbf{s}\|^2 = \|\mathbf{r}\|^2 + \|\mathbf{s}\|^2 - 2\Re \{\langle \mathbf{r}, \mathbf{s} \rangle\} \quad (11.103)$$

Comenzamos por desarrollar $\|\mathbf{s}\|^2$. Para ello, a partir de (11.8), y considerando un número de muestras tan elevado como sea necesario, tenemos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{s}\|^2 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=0}^{N-1} a^*[n] g_r^*(kT_s - nT - \epsilon T) e^{-j\theta} \right] \left[\sum_{m=0}^{N-1} a[m] g_r(kT_s - mT - \epsilon T) e^{j\theta} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} a^*[n] \sum_{m=0}^{N-1} a[m] \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} g_r^*(kT_s - nT - \epsilon T) g_r(kT_s - mT - \epsilon T)}_{\frac{1}{T_s} \int_{-\infty}^{\infty} g_r^*(t - nT - \epsilon T) g_r(t - mT - \epsilon T) dt} \end{aligned} \quad (11.104)$$

donde hemos utilizado la siguiente equivalencia para señales limitadas en banda:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)dt = T_s \sum_k x(kT_s)y(kT_s) \quad (11.105)$$

que se puede demostrar fácilmente escribiendo $x(t)$ e $y(t)$ como $\sum_k x(kT_s) \text{sinc}((t - kT_s)/T_s)$ y $\sum_k y(kT_s) \text{sinc}((t - kT_s)/T_s)$ respectivamente, siempre que el ancho de banda

de $x(t)$ e $y(t)$ no sea superior a π/T_s rad/s. La integral que sustituye al sumatorio no depende de ϵ , como se puede demostrar con un simple cambio de variable, por lo que finalmente tenemos

$$\|\mathbf{s}\|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} a^*[n]a[m] \frac{1}{T_s} \int_{-\infty}^{\infty} g_r^*(t - nT)g_r(t - mT)dt \quad (11.106)$$

Si consideramos que $g_r(t) * g_r^*(-t)$ es un pulso de Nyquist, entonces la integral anterior, que se puede poner como $g_r(t) * g_r^*(-t)$ evaluada en $(m - n)T$, se anula para $m \neq n$, y por tanto aproximamos, para un número de símbolos N elevado,

$$\|\mathbf{s}\|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |a[n]|^2 \frac{1}{T_s} \int_{-\infty}^{\infty} |g_r(t)|^2 dt \approx N E_s \frac{1}{T_s} \int_{-\infty}^{\infty} |g_r(t)|^2 dt \quad (11.107)$$

con $E_s = E\{|A[n]|^2\}$ la energía media por símbolo. La aproximación anterior se convierte en una igualdad estricta si los símbolos son de módulo constante.

Existe un segundo término en (11.9) que depende de las muestras s , en concreto, la parte real de su producto escalar con las muestras recibidas r . Dicho producto escalar se puede escribir en función de los parámetros a estimar si expresamos s a partir de (11.8) y consideramos secuencias de longitud infinita:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}, \mathbf{s} \rangle &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} s^*(kT_s)r(kT_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{N-1} a^*[n]g_r^*(kT_s - nT - \epsilon T)e^{-j\theta}r(kT_s) \\ &= e^{-j\theta} \sum_{n=0}^{N-1} a^*[n] \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_r^*(kT_s - nT - \epsilon T)r(kT_s) \end{aligned} \quad (11.108)$$

que admite una lectura en términos del filtro adaptado al pulso recibido $g_r(t)$, ya que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} g_r^*(kT_s - nT - \epsilon T)r(kT_s) = \frac{1}{T_s} q(nT + \epsilon T) \quad (11.109)$$

siendo $q(t) = r(t) * g_r^*(-t)$, donde de nuevo hemos utilizado la equivalencia (11.105). Por tanto, tenemos que

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{s} \rangle = \frac{1}{T_s} e^{-j\theta} \sum_{n=0}^{N-1} a^*[n]q(nT + \epsilon T) \quad (11.110)$$

En la práctica el uso de un número finito de términos en \mathbf{r} no altera los resultados anteriores, teniendo en cuenta que la longitud de los pulsos de transmisión es necesariamente finita en su implementación.

11.B. CRITERIO ML PARA SNR REDUCIDA

Con el fin de obtener estimaciones manejables de los diferentes parámetros de sincronización que no dependan del conocimiento de los símbolos transmitidos, es necesario promediar la fdp (11.12) con respecto a los mismos, es decir:

$$f_{\mathbf{r} \mid \epsilon, \theta}(\mathbf{r} \mid \epsilon, \theta) = E_{\mathbf{A}} \{ f_{\mathbf{r} \mid \mathbf{A}, \epsilon, \theta}(\mathbf{r} \mid \mathbf{a}, \epsilon, \theta) \} \quad (11.111)$$

Esta operación de promediado o marginalización resulta muy complicada analíticamente, y no permite llegar a expresiones abordables salvo que se hagan ciertas simplificaciones. La más común es suponer que la relación señal a ruido es baja, lo cual es muy habitual en la práctica. En cualquier caso, los estimadores obtenidos se suelen emplear para diferentes puntos de operación, aun cuando no sean los óptimos para los casos no incluidos en las aproximaciones empleadas. Veamos por tanto cómo llegar a una expresión que se pueda promediar analíticamente.

Consideremos la exponencial en (11.12), que se hará máxima cuando el argumento de la parte real incluida en el exponente sea real, lo cual ocurrirá para la fase convenientemente escogida:

$$\hat{\theta}_{ML} = \arg \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} a^*[n]q(nT + \hat{\epsilon}T) \right\} \quad (11.112)$$

De este modo desacoplamos la estimación del instante de muestreo de la estimación de la fase. Las diferentes consideraciones acerca del estimador anterior $\hat{\theta}_{ML}$ están incluidas en el Apartado 11.5. La expresión a maximizar se reduce ahora a

$$\exp \left\{ \frac{2}{\sigma_n^2} \left| \sum_{n=0}^{N-1} a^*[n]q(nT + \epsilon T) \right| \right\} = \exp \left\{ \frac{2}{\sigma_n^2} |\langle \mathbf{q}(\epsilon), \mathbf{a} \rangle| \right\} \quad (11.113)$$

donde interviene el producto escalar entre la secuencia de símbolos \mathbf{a} y los valores muestrados en los instantes $nT + \epsilon T$ e incluidos en el vector $\mathbf{q}(\epsilon)$. Si la SNR fuese elevada se podría emplear la estimación de los símbolos obtenida a partir de un simple decisor, en la certeza de que un gran porcentaje de los mismos sería decidido correctamente. En el caso en que la SNR sea baja, como es de esperar en muchas situaciones prácticas, debemos promediar con respecto a los símbolos. Así, si nos quedamos con los dos primeros términos del desarrollo de Taylor $\exp\{x\} \approx 1 + x$, que constituirán una buena aproximación para x pequeño, tenemos que con $x = \frac{2}{\sigma_n^2} |\langle \mathbf{q}(\epsilon), \mathbf{a} \rangle|$, dado que la SNR es baja, la aproximación anterior se concreta en

$$\exp \left\{ \frac{2}{\sigma_n^2} |\langle \mathbf{q}(\epsilon), \mathbf{a} \rangle| \right\} \approx 1 + \frac{2}{\sigma_n^2} |\langle \mathbf{q}(\epsilon), \mathbf{a} \rangle| \quad (11.114)$$

con lo que la función a maximizar se ha reducido al módulo del producto escalar $|\langle \mathbf{q}(\epsilon), \mathbf{a} \rangle|$. Por lo tanto, la estimación del instante de muestreo se puede obtener como el máximo de la siguiente función:

$$L(\epsilon) = E_{\mathbf{A}} \{ |\langle \mathbf{q}(\epsilon), \mathbf{a} \rangle| \} \quad (11.115)$$

El promedio del producto escalar del vector $q(\epsilon)$ con la secuencia a será máximo para aquel vector $q(\epsilon)$ que tenga norma máxima. Esta afirmación, que se puede demostrar analíticamente de una forma sencilla, resulta fácilmente comprensible si consideramos que los sucesivos símbolos son independientes entre sí, siguen la misma distribución y tienen media cero. De este modo, no hay ninguna dirección preferente en el conjunto de vectores a , con lo que la maximización del producto escalar anterior promediado sobre todos ellos se reduce a maximizar la energía de los valores muestrados a periodo de símbolo. En definitiva, la función a maximizar se corresponde con la energía de la secuencia a la salida del filtro adaptado muestrada a periodo de símbolo:

$$L(\epsilon) = \sum_{n=0}^{N-1} |q(nT + \epsilon T)|^2 \quad (11.116)$$

11.C. CICLOESTACIONARIEDAD Y SINCRONIZACIÓN

Una señal PAM es un proceso cicloestacionario (Capítulos 3 y 5) y, por tanto, sus estadísticos son funciones periódicas. Así, la señal PAM de la forma

$$q(t) = \sum_n A[n]p(t - nT - \epsilon_0 T) \quad (11.117)$$

tiene un valor cuadrático medio instantáneo periódico que, como tal, admite un desarrollo en serie de Fourier:

$$E\{|q(t)|^2\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j \frac{2\pi}{T} kt} \quad (11.118)$$

Vamos a suponer que no hay error de frecuencia; en el siguiente apartado abordaremos esta cuestión. Igualmente, por claridad en la exposición, no incluimos el ruido aditivo estacionario, dado que no altera el carácter cicloestacionario de la señal. En un proceso estacionario tendríamos que el valor cuadrático medio es invariante con el tiempo. En el caso que nos ocupa, tenemos que si los símbolos son independientes, podemos escribir

$$\begin{aligned} E\{|q(t)|^2\} &= E\left\{\sum_n A[n]p(t - nT - \epsilon_0 T) \sum_m A^*[m]p^*(t - mT - \epsilon_0 T)\right\} \\ &= \sum_n \sum_m E\{A[n]A^*[m]\} p(t - nT - \epsilon_0 T)p^*(t - mT - \epsilon_0 T) \\ &= E_s \sum_n |p(t - nT - \epsilon_0 T)|^2 \end{aligned} \quad (11.119)$$

donde $E_s = E\{|A[n]|^2\}$ es la energía media por símbolo que, sin pérdida de generalidad, vamos a suponer igual a uno a partir de este momento. El último sumatorio de la expresión anterior permite comprobar la periodicidad con periodo T del valor cuadrático medio

instantáneo a través de un simple cambio de variable. Por tanto, estamos en disposición de calcular los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_T E \{ |q(t)|^2 \} e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} dt = \frac{1}{T} \int_T \left[\sum_n |p(t - nT - \epsilon_0 T)|^2 \right] e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} dt \quad (11.120)$$

En el Problema P11.6 se calculan dichos coeficientes, y se demuestra que si $p(t)$ no presenta contenido espectral por encima de $2\pi/T$ rad/s, como es el caso de los pulsos en coseno alzado, únicamente los coeficientes c_{-1}, c_0, c_1 , correspondientes a las frecuencias $-2\pi/T, 0$ y $2\pi/T$ respectivamente, serán distintos de cero. Obsérvese que el ancho de banda del ruido, si este se incluye en el análisis, coincide con el de la señal una vez que ambos han atravesado el filtro receptor. Por tanto, la expansión anterior se reduce a

$$E \{ |q(t)|^2 \} = c_0 + 2\Re \{ c_1 e^{j\frac{2\pi}{T}t} \} \quad (11.121)$$

En consecuencia, el valor cuadrático medio instantáneo del proceso cicloestacionario $q(t)$ tiene una componente continua, la única en el caso de un proceso estacionario, junto con una variación sinusoidal de periodo T . Ambas componentes contienen información de interés para las labores de sincronización. Así, las magnitudes de c_0 y c_1 están relacionadas con el desplazamiento en frecuencia del pulso recibido a la entrada del filtro $f(t)$ (véase el siguiente apéndice). Por otro lado, en el Problema P11.6 se comprueba que c_0 es independiente de ϵ_0 , mientras que la fase de c_1 sí depende de la fase temporal ϵ_0 . Estas afirmaciones son ciertas para un número de símbolos suficientemente elevado, para el cual la función de coste en (11.116), obtenida con el criterio de máxima verosimilitud, se puede aproximar del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} |q(nT + \epsilon T)|^2 &\approx \sum_{n=0}^{N-1} E \{ |q(nT + \epsilon T)|^2 \} = \sum_{n=0}^{N-1} \left[c_0 + 2\Re \left\{ c_1 e^{j\frac{2\pi(nT+\epsilon T)}{T}} \right\} \right] \\ &= Nc_0 + 2\Re \{ Nc_1 e^{j2\pi\epsilon} \} \doteq d_0 + 2\Re \{ d_1 e^{j2\pi\epsilon} \} \end{aligned} \quad (11.122)$$

cuya maximización proporciona el estimador ML de ϵ_0 :

$$\hat{\epsilon} = -\frac{1}{2\pi} \triangleleft c_1 \quad (11.123)$$

El coeficiente c_1 (o equivalentemente d_1) debe ser necesariamente estimado, dado que no disponemos de $E\{|q(t)|^2\}$ en (11.120). Para su cálculo, podemos sustituir en (11.120) la integral por un sumatorio a partir de las muestras $q(kT_s)$, mientras que la esperanza se approxima por un promedio temporal, dado el carácter periódico de la misma:

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{1}{T} \int_T NE \{ |q(t)|^2 \} e^{-j2\pi t/T} dt \approx \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{n=0}^{N-1} |q(t + nT)|^2 e^{-j2\pi t/T} dt \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N_s} \sum_{k=0}^{N_s-1} |q((nN_s + k)T_s)|^2 e^{-j\frac{2\pi}{N_s}k} \right] \end{aligned} \quad (11.124)$$

donde $N_s = T/T_s$ es el número de muestras por símbolo tomadas de forma asíncrona.

11.D. ESTIMACIÓN GRUESA DE FRECUENCIA

El caso más general es aquél en el que incluimos un desplazamiento de frecuencia ω_0 sobre la señal recibida, el cual se intenta estimar en el receptor junto con el resto de parámetros. La nueva función de coste surgida del criterio ML es una extensión de la obtenida en el Apéndice 11.B, en concreto

$$\sum_{n=0}^{N-1} |q(nT + \epsilon T, \omega)|^2 \quad (11.125)$$

donde $q(t)$ es de nuevo la señal modulada linealmente de (11.117), con un pulso básico que esta vez se puede escribir como

$$p(t, \omega) \doteq \left(e^{j(\omega_0 - \omega)t} g_r(t) \right) * f(t) \quad (11.126)$$

Se pueden repetir por tanto las consideraciones del apéndice anterior, teniendo en cuenta que los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier, a través de su relación con el pulso $p(t)$, dependerán también de ω ; nos referiremos a ellos por tanto como $c_k(\omega)$. Pasamos en consecuencia a plantear de nuevo la aproximación a la función de coste obtenida con el criterio ML:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} |q(nT + \epsilon T, \omega)|^2 &\approx \sum_{n=0}^{N-1} E\{|q(nT + \epsilon T, \omega)|^2\} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[c_0(\omega) + 2\mathcal{R}e \left\{ c_1(\omega) e^{j\frac{2\pi(nT+\epsilon T)}{T}} \right\} \right] = Nc_0(\omega) + 2\mathcal{R}e \left\{ Nc_1(\omega) e^{j2\pi\epsilon} \right\} \end{aligned} \quad (11.127)$$

El desplazamiento de frecuencia ω influye en ambos términos $c_0(\omega)$ y $c_1(\omega)$, aunque para desacoplar la estimación de la frecuencia y del instante de muestreo se puede utilizar por simplicidad únicamente $c_0(\omega)$. Para ello, si suponemos $f(t) = g_r^*(-t)$, empleando (11.120) y (11.126) podemos escribir

$$c_0(\omega) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |p(t, \omega)|^2 dt = \frac{1}{T} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G_r(j(\Omega + \omega - \omega_0)) G_r^*(j\Omega)|^2 d\Omega \quad (11.128)$$

donde hemos usado el teorema de Rayleigh y la Expresión (11.126) de $p(t, \omega)$. El coeficiente $c_0(\omega)$ presenta un máximo en $\omega = \omega_0$, como se demuestra en el Apartado 11.6.1. Con efectos prácticos, podemos estimar $c_0(\omega)$ de la siguiente forma:

$$c_0(\omega) = \frac{1}{T} \int_T E\{|q(t, \omega)|^2\} dt \approx \frac{1}{N_s} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N_s(N-1)} |q(kT_s, \omega)|^2 \quad (11.129)$$

es decir, se estima a partir de la energía de la salida de los filtros adaptados a las diferentes versiones desplazadas en frecuencia de la entrada. Si definimos $L(\omega) \doteq c_0(\omega)N_sN$ obtenemos (11.67). Con el fin de obtener un esquema realimentado, debemos utilizar su derivada

como término de error. Sea, por tanto,

$$\frac{\partial}{\partial \omega} L(\omega) = \frac{\partial}{\partial \omega} \sum_{k=0}^{N_s(N-1)} |q(kT_s, \omega)|^2 = 2 \sum_{k=0}^{N_s(N-1)} \operatorname{Re} \left\{ q(kT_s, \omega) \frac{\partial}{\partial \omega} q^*(kT_s, \omega) \right\} \quad (11.130)$$

donde, a partir de la Expresión (11.66), tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial \omega} q^*(kT_s, \omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} r^*(mT_s) e^{j\omega m T_s} j m T_s f^*(kT_s - mT_s) \quad (11.131)$$

y, por tanto, $\frac{\partial}{\partial \omega} \sum_{k=0}^{N_s(N-1)} |q(kT_s, \omega)|^2$ se puede escribir como

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{k=0}^{N_s(N-1)} \operatorname{Re} \left\{ q(kT_s, \omega) \sum_m r^*(mT_s) e^{j\omega m T_s} j(mT_s - kT_s + kT_s) f^*(kT_s - mT_s) \right\} \\ &= 2 \sum_{k=0}^{N_s(N-1)} \operatorname{Re} \left\{ q(kT_s, \omega) \sum_m r^*(mT_s) e^{j\omega m T_s} (-j)(kT_s - mT_s) f^*(kT_s - mT_s) \right\} \\ &\quad + 2 \sum_{k=0}^{N_s(N-1)} \operatorname{Re} \left\{ q(kT_s, \omega) \sum_m r^*(mT_s) e^{j\omega m T_s} j k T_s f^*(kT_s - mT_s) \right\} \\ &= 2 \sum_{k=0}^{N_s(N-1)} \operatorname{Re} \left\{ q(kT_s, \omega) \sum_m r^*(mT_s) e^{j\omega m T_s} (-j)(kT_s - mT_s) f^*(kT_s - mT_s) \right\} \\ &\quad + 2 \sum_{k=0}^{N_s(N-1)} \operatorname{Re} \{ q(kT_s, \omega) j k T_s q^*(kT_s, \omega) \} \end{aligned}$$

En la última expresión es fácil comprobar que el segundo término es cero, mientras que en el primero aparece el filtrado de la secuencia $r(kT_s) e^{-j\omega k T_s}$ por parte del filtro cuya respuesta en frecuencia es la derivada de la correspondiente respuesta del filtro adaptado. Por tanto, si denominamos a la salida de este último filtro $q_d(kT_s, \omega)$, concluimos finalmente que

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \sum_{k=0}^{N_s(N-1)} |q(kT_s, \omega)|^2 = -2 \sum_{k=0}^{N_s(N-1)} \operatorname{Re} \{ q(kT_s, \omega) q_d^*(kT_s, \omega) \} \quad (11.132)$$

BIBLIOGRAFÍA

- [1] J. B. Anderson, T. Aulin y C.-E. Sundberg. *Digital Phase Modulation*. Plenum Press, New York, NY, EEUU, 1986.
- [2] J. B. Anderson y A. Svensson. *Coded Modulation Systems*. Kluwer Academic Publishers, New York, NY, EEUU, 2003.
- [3] T. Aulin y C.-E. Sundberg. Continuous Phase Modulation (CPM), Parts I and II. *IEEE Transactions on Communications*, COM-29:196–225, marzo 1981.
- [4] A. S. Bahai, B. R. Saltzberg y M. Ergen. *Multi-Carrier Digital Communications: Theory and Applications of OFDM*. Springer, New York, NY, EEUU, segunda edición, 2004.
- [5] J. R. Barry, E. A. Lee y D. G. Messerschmitt. *Digital Communication*. Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, EEUU, tercera edición, 2004.
- [6] C. Belfiore y J. J.H. Park. Decision Feedback Equalization. *Proceedings of the IEEE*, 67(8):1143–1156, agosto 1979.
- [7] S. Benedetto y E. Biglieri. *Principles of Digital Transmission With Wireless Applications*. Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York, NY, EEUU, 1999.
- [8] R. E. Blahut. *Fast Algorithms for Digital Signal Processing*. Addison-Wesley, Reading, MA, EEUU, 1985.
- [9] R. E. Blahut. *Principles and Practice of Information Theory*. Addison-Wesley, Reading, MA, EEUU, 1987.
- [10] R. E. Blahut. *Algebraic Codes for Data Transmission*. Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido, 2003.
- [11] E. Biglieri, D. Divsalar, P. J. McLane y M. K. Simon. *Introduction to Trellis-Coding Modulation with Applications*. Macmillan Publishing Company, New York, NY, EEUU, 1991.
- [12] R. N. Bracewell. *The Fourier Transform and Its Applications*. Electrical and Electronic Engineering Series. McGraw-Hill, New York, NY, EEUU, segunda edición, 1986.

- [13] E. Brigham. *The Fast Fourier Transform and Its Applications*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, EEUU, segunda edición, 1988.
- [14] C. Burrus y T. Parks. *DFT/FFT and Convolution Algorithms: Theory and Implementation*. John Wiley and Sons, New York, NY, EEUU, 1985.
- [15] J. C. R. Johnson, P. Schniter, T. J. Endres, J. D. Behm, D. R. Brown y R. A. Casas. Blind Equalization Using the Constant Modulus Criterion: A Review. *Proceedings of the IEEE*, 86(10):1927–1950, octubre 1998.
- [16] L. Chaumont y M. Yor. *Exercises in Probability. A Guided Tour from Measure Theory to Random Processes, via Conditioning*. Cambridge University Press, Englewood Cliffs, NJ, EEUU, 2004.
- [17] S.-Y. Chung, G. D. J. Forney, T. Richardson y R. Urbanke. On the Design of Low-Density Parity-Check Codes Within 0.0045 dB of the Shannon Limit. *IEEE Communications Letters*, 5(2):58–60, 2001.
- [18] S.-Y. Chung, T. Richardson y R. Urbanke. Analysis of Sum-Product Decoding of Low-Density Parity-Check Codes Using a Gaussian Approximation. *IEEE Transactions on Information Theory*, 47(2):657–670, 2001.
- [19] J. H. Conway y N. J. A. Sloane. *Sphere Packings, Lattices and Groups*. Springer-Verlag, New York, NY, EEUU, tercera edición, 1999.
- [20] J. Cooley y J. Tukey. An Algorithm for the Machine Computation of the Complex Fourier Series. *Mathematics of Computation*, 19:297–301, abril 1965.
- [21] T. M. Cover y J. A. Thomas. *Elements of Information Theory*. John Wiley and Sons, New York, NY, EEUU, segunda edición, 2006.
- [22] I. Csiszár y J. Körner. *Information Theory. Coding Theorems for Discrete Memoryless Systems*. Akadémiai Kiadó, Budapest, Hungría, 1981.
- [23] R. C. Dixon. *Spread Spectrum Systems*. John Wiley and Sons, New York, NY, EEUU, 1990.
- [24] M. Engels. *Wireless OFDM Systems: How to Make Them Work?* Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, EEUU, 2002.
- [25] K. Feher. *Wireless Digital Communications*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, EEUU, 1995.
- [26] L. E. Franks. *Teoría de la Señal*. Editorial Reverté, Barcelona, España, 1975.
- [27] R. G. Gallager. Low density parity check codes. *The MIT Press*, 1963.
- [28] R. G. Gallager. *Information Theory and Reliable Communication*. John Wiley and Sons, New York, NY, EEUU, 1968.

- [29] F. Gardner. Interpolation in Digital Modems - Part I: Fundamentals. *IEEE Transactions on Communications*, 41(3):502–508, marzo 1993.
- [30] W. A. Gardner. *Statistical Spectral Analysis. A Nonprobabilistic Theory*. Prentice-Hall, New York, NY, EEUU, 1988.
- [31] W. A. Gardner, editor. *Cyclostationarity in Communications and Signal Processing*. IEEE Press, New York, NY, EEUU, 1994.
- [32] J. G.D. Forney. Maximum-Likelihood Sequence Estimation of Digital Sequences in the Presence of Intersymbol Interference. *IEEE Transactions on Information Theory*, 18(3):363–378, mayo 1972.
- [33] D. N. Godard. Self-Recovering Equalization and Carrier Tracking in Two-Dimensional Data Communication Systems. *IEEE Transactions on Communications*, 28(11):1867–1875, noviembre 1980.
- [34] A. Goldsmith. *Wireless Communications*. Cambridge University Press, New York, NY, EEUU, 2005.
- [35] S. W. Golomb, J. R. Davey, I. S. Reed, H. L. V. Trees y J. J. Stiffler. Synchronization. *IEEE Transactions on Communication Systems*, CS-11:481–491, diciembre 1963.
- [36] G. Grimmett y D. Stirzaker. *One Thousand Exercises in Probability*. Oxford University Press, segunda edición, 2001.
- [37] G. Grimmett y D. Stirzaker. *Probability and Random Processes*. Oxford University Press, tercera edición, 2001.
- [38] L. Hanzo, M. Münster, B. Choi y T. Keller. *OFDM and MC-CDMA for Broadband Multi-User Communications, WLANs and Broadcasting*. Wiley-IEEE Press, Chichester, Reino Unido, 2003.
- [39] S. Haykin. *Digital Communications*. John Wiley and Sons, New York, NY, EEUU, 1988.
- [40] S. Haykin. *Adaptive Filter Theory*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, EEUU, cuarta edición, 2001.
- [41] H. Jin, A. Khandekar y R. J. McEliece. Irregular Repeat-Accumulate Codes. In *International Conference on Turbo Codes*, Brest, Francia, 9 2000.
- [42] H. Jin y R. J. McEliece. RA Codes Achieve AWGN Channel Capacity. In *13th International Symposium, AAECC*, Honolulu, Hawaii, EEUU, 1999.
- [43] E. A. Lee y D. G. Messerschmitt. *Digital Communication*. Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, EEUU, segunda edición, 1994.

- [44] A. Leon-Garcia. *Probability and Random Processes for Electrical Engineering*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, EEUU, segunda edición, 1994.
- [45] S. Lin y D. J. Costello. *Error Control Coding*. Prentice Hall, New York, NY, EEUU, segunda edición, 2004.
- [46] D. J. C. MacKay. Good Error Correcting Codes Based on Very Sparse Matrices. *IEEE Transactions on Information Theory*, 45(2):399–431, 1999.
- [47] D. J. C. Mackay. *Information Theory, Inference, and Learning Algorithms*. Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido, 2003.
- [48] D. R. McDonald. *Elements of Applied Probability for Engineering, Mathematics and Systems Science*. World Scientific Publishing, 2004.
- [49] U. Mengali y A. N. D'Andrea. *Synchronization Techniques for Digital Receivers*. Plenum Press, New York, NY, EEUU, 1997.
- [50] H. Meyr, M. Moeneclaey y S. A. Fechtel. *Digital Communication Receivers: Synchronization, Channel Estimation and Signal Processing*. John Wiley and Sons, New York, NY, EEUU, 1998.
- [51] T. M. Mills. *Problems in Probability*. World Scientific Publishing, segunda edición, 2001.
- [52] P. Monsen. Feedback Equalization for Fading Dispersive Channels. *IEEE Transactions on Information Theory*, IT-17(1):56–64, enero 1971.
- [53] H. Nyquist. Certain Topics in Telegraph Transmission Theory (reimpresión del artículo de 1928). *Proceedings of the IEEE*, 90:280–305, febrero 2002.
- [54] A. V. Oppenheim, R. W. Schafer y J. R. Buck. *Discrete-Time Signal Processing*. Signal Processing Series. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, EEUU, segunda edición, 1999.
- [55] A. V. Oppenheim, A. S. Willsky y S. H. Nawab. *Signals and Systems*. Signal Processing Series. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, EEUU, segunda edición, 1996.
- [56] A. Papoulis. *The Fourier Integral and Its Applications*. McGraw-Hill, New York, NY, EEUU, 1962.
- [57] A. Papoulis. *Signal Analysis*. McGraw-Hill, New York, NY, EEUU, 1977.
- [58] A. Papoulis. *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*. McGraw-Hill, New York, NY, EEUU, tercera edición, 1991.
- [59] T. Pollet, M. V. Bladel y M. Moeneclaey. BER Sensitivity of OFDM Systems to Carrier Frequency Offset and Wiener Phase Noise. *IEEE Transactions on Communications*, 43(2):191–193, febrero 1995.

- [60] R. Prasad. *OFDM for Wireless Communications Systems*. Artech House Publishers, Norwood, MA, EEUU, 2004.
- [61] J. G. Proakis. *Digital Communications*. McGraw-Hill, New York, NY, EEUU, cuarta edición, 2001.
- [62] J. G. Proakis y D. G. Manolakis. *Introduction to Digital Signal Processing*. Macmillan Publishing Company, New York, NY, EEUU, segunda edición, 1996.
- [63] J. G. Proakis y M. Salehi. *Communication Systems Engineering*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, EEUU, segunda edición, 2002.
- [64] S. U. Qureshi. Adaptive Equalization. *Proceedings of the IEEE*, 73(9):1349–1387, septiembre 1985.
- [65] T. Richardson, A. Shokrollahi y R. Urbanke. Design of Capacity-Approaching Irregular Low-density Parity-Check Codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, 47(2):619–637, 2001.
- [66] T. Richardson y R. Urbanke. The Capacity of Low-Density Parity Check Codes Under Message-Passing Decoding. *IEEE Transactions on Information Theory*, 47(2):599–618, 2001.
- [67] C. Rose y M. D. Smith. *Mathematical Statistics with Mathematica*. Springer, New York, NY, EEUU, 2002.
- [68] S. Ross. *A First Course in Probability*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, EEUU, sexta edición, 2001.
- [69] A. Roumy, S. Guemgar, G. Caire y S. Verdu. Design Methods for Irregular Repeat Accumulate Codes. In *International Symposium on Information Theory*, Yokohama, Japón, 6 2003.
- [70] D. V. Sarwate y M. B. Pursley. Crosscorrelation Properties of Pseudorandom and Related Sequences. *Proceedings of the IEEE*, 68(5):593–619, 1980.
- [71] C. Schlegel y L. Perez. *Trellis and Turbo Coding*. Wiley-IEEE Press, New York, NY, EEUU, 2004.
- [72] H. Schulze y C. Luders. *Theory and Applications of OFDM and CDMA*. John Wiley and Sons, Chichester, Reino Unido, 2005.
- [73] C. E. Shannon. A Mathematical Theory of Communication. *Bell Sys. Tech. Journal*, 27:379–423, 623–656, julio, octubre 1948.
- [74] M. K. Simon, J. K. Omura, R. A. Scholtz y B. K. Levitt. *Spread spectrum communications; vols. 1-3*. Computer Science Press, New York, NY, EEUU, 1985.

- [75] M. K. Simon, S. M. Hinedi y W. C. Lindsey. *Digital Communication Techniques. Signal Design and Detection*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, EEUU, 1995.
- [76] N. J. Sloane y A. D. Wyner, editores. *Claude Elwood Shannon: Collected Papers*. IEEE Press, Piscataway, NJ, EEUU, 1993.
- [77] M. Speth, S. A. Fechtel, G. Fock y H. Meyr. Optimum Receiver Design for OFDM-Based Broadband Transmission - Part II: A Case Study. *IEEE Transactions on Communications*, 49(4):571–578, abril 2001.
- [78] H. Stark y J. W. Woods. *Probability and Random Processes with Applications to Signal Processing*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, EEUU, tercera edición, 2002.
- [79] T. Starr, J. M. Cioffi y P. J. Silverman. *Understanding Digital Subscriber Line Technology*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, EEUU, 1999.
- [80] G. L. Stuber. *Principles of Mobile Communication*. Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, 1996.
- [81] H. L. V. Trees. *Detection, Estimation, and Modulation Theory: Part I*. John Wiley and Sons, New York, NY, EEUU, 1968.
- [82] J. R. Treichler, I. Fijalkow y C. R. J. Jr. Fractionally Spaced Equalizers: How Long Should They Really Be? *IEEE Signal Processing Magazine*, 13(3):65–81, mayo 1996.
- [83] J. R. Treichler, M. G. Larimore y J. C. Harp. Practical Blind Demodulators for High-order QAM Signals. *Proceedings of the IEEE*, 86(10):1907–1926, octubre 1998.
- [84] G. Ungerboeck. Fractional Tap-Spacing Equalizer and Consequences for Clock Recovery in Data Modems. *IEEE Transactions on Communications*, 24(8):856–864, agosto 1976.
- [85] Unión Internacional de Telecomunicaciones. *Recomendación UIT-T V.32: familia de modems dúplex a dos hilos que funcionan a velocidades binarias de hasta 9600 bit/s para uso en la red telefónica general conmutada y en circuitos arrendados de tipo telefónico*.
- [86] Unión Internacional de Telecomunicaciones. *Recomendación UIT-T V.34: módem que funciona a velocidades de señalización de datos de hasta 33 600 bit/s para uso en la red telefónica general conmutada y en circuitos arrendados punto a punto a 2 hilos de tipo telefónico*.
- [87] P. P. Vaidyanathan. *Multirate Systems and filter Banks*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, EEUU, 1993.
- [88] Varios autores. Signal Synchronization in Digital Transmission Systems (Número monográfico). *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 19(12), diciembre 2001.

- [89] S. Verdú. *Multiuser Detection*. Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido, 1998.
- [90] A. Viterbi. Error Bounds for Convolutional Codes and an Asymptotically Optimum Decoding Algorithm. *IEEE Transactions on Information Theory*, IT-13(2):260–269, abril 1967.
- [91] A. J. Viterbi. *CDMA: Principles of Spread Spectrum Communication*. Addison-Wesley, Reading, MA, EEUU, 1995.
- [92] S. B. Wicker. *Error Control Systems for Digital Communication and Storage*. Prentice-Hall, New York, NY, EEUU, 1995.
- [93] B. Widrow y S. D. Stearns. *Adaptive Signal Processing*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, EEUU, 1985.
- [94] S. G. Wilson. *Digital Modulation and Coding*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, EEUU, 1996.
- [95] J. M. Wozencraft y I. M. Jacobs. *Principles of Communication Engineering*. John Wiley and Sons, New York, NY, EEUU, 1965.
- [96] B. Yang, K. B. Letaief, R. S. Cheng y Z. Cao. Timing Recovery for OFDM Transmission. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 18(11):2278–2291, noviembre 2000.

ÍNDICE ALFABÉTICO

- BER*, 228
- Acceso múltiple, 493
- Acceso múltiple por división en código, 496
- Acceso múltiple por división en tiempo, 493
- Acceso múltiple por división en frecuencia, 493
- Adquisición, 701, 739
- Ajuste fino, 741
- Aleatorizador, 714
- Algoritmo BCJR, 663
- Algoritmo CMA, 370
- Algoritmo de Berlekamp-Massey, 619
- Algoritmo de Forney, 620
- Algoritmo de Gardner, 712
- Algoritmo de Oerder y Meyr, 708
- Algoritmo de Viterbi, 313, 422
- Algoritmo de Viterbi y Viterbi, 718
- Algoritmo de Viterbi truncado, 320
- Algoritmo LMS, 367
- AM-PM, 282
- Ambigüedad de fase, 709, 719
- Apertura del ojo, 272
- Aproximación lineal al PLL, 701
- ASK, 248
- Autocorrelación de un proceso estocástico, 130
- Autocorrelación determinista aperiódica, 474
- Banda base, 248
- Banda lateral única, 276
- Banda lateral vestigial, 276
- Barajador, 661
- Baudio, 226
- BPSK, 281
- Canal binario simétrico, 116
- Canal aditivo gausiano, 176
- Canal binario simétrico, 534
- Canal discreto equivalente, 194, 253
- Canal discreto equivalente en banda base, 289
- Canal discreto sin memoria, 532
- Canal equivalente en banda base, 289
- Canal gausiano, 176, 263, 536
- Canal gausiano con entrada discreta, 540
- Canal gausiano de banda limitada, 537
- Canal lineal gausiano, 263
- Canal magnético, 6
- Canal radioeléctrico, 5
- Canal simétrico, 579
- CAP, 279
- Capacidad de corrección de un código, 594
- Capacidad de detección de errores de un código, 594
- Carga de bits, 521
- CDMA, 496
- CDMA asíncrono, 497
- CDMA síncrono, 497
- Chip, 468
- Cicloergodicidad, 143
- Circularmente simétrico, 287
- Clases conjugadas de $GF(2^m)$, 610
- CMA, 370
- Codificación Gray, 230
- Codificador, 175
- Componente en cuadratura, 277
- Componente en fase, 277
- Componente en cuadratura de una señal paso banda, 73

- Componente en fase de una señal paso banda, 73
- Comunicaciones analógicas, 1
- Comunicaciones digitales, 1
- Condición de Nyquist, 257
- Conjuntos WBE, 509
- Constelación, 176
- Constelación binaria antipodal, 248
- Constelación en cruz, 280
- Constelación hexagonal, 282
- Constelación jerárquica, 301
- Continuidad de fase, 399
- Convolución circular, 68, 462
- Convolución en tiempo continuo, 29
- Convolución en tiempo discreto, 28
- Convolución periódica, 49
- Corrección de frecuencia, 722
- Correlación cruzada aperiódica, 501
- Correlación cruzada de un proceso estocástico, 130
- Correlación cruzada periódica, 502
- Correlación impar, 507
- Coseno alzado, 259
- Cota BCH, 612
- Cota de Hamming, 604
- Cota de la unión, 213
- Cota de Singleton, 618
- Cota del filtro adaptado, 309
- Cotas de la función Q , 103
- Covarianza de un proceso estocástico, 130
- CPFSK, 399
- CPM, 413
- CPM de respuesta completa, 416
- CPM de respuesta parcial, 416
- Criterio de decisión de máxima verosimilitud, 197
- Criterio de Nyquist, 257
- Criterio de Nyquist para la ausencia de ISI, 257
- Criterio de decisión de máximo *a posteriori*, 197
- Criterio de Nyquist generalizado, 453
- Criterio forzador de ceros, 328
- Quadratura, 277
- Cuerpos de Galois, 600
- Código sistemático, 603
- Códigos Walsh-Hadamard, 501
- Códigos convolucionales catastróficos, 641
- Códigos convolucionales perforados, 638
- Códigos de Ungerboeck, 655
- Códigos de máxima distancia separable, 618
- Códigos Gold, 503
- Códigos Hamming, 605
- Códigos Kasami, 504
- Códigos LDPC, 671
- Códigos MDS, 618
- Códigos perfectos, 604
- Códigos RA, 670
- Códigos turbo, 661
- dB, 44
- Decibelio, 44
- Decisor símbolo a símbolo, 255
- Decodificación blanda, 595
- Decodificación dura, 595
- Decodificación iterativa, 667
- Decodificación por síndrome, 602
- Decodificación turbo, 667
- Delta de Dirac, 16
- Delta de Kronecker, 17
- Demodulación coherente de FSK, 403
- Demodulación coherente de PSK, 396
- Demodulación incoherente de FSK, 404
- Demodulación incoherente de PSK, 397
- Demodulador en cuadratura, 72
- Densidad espectral de energía, 40
- Densidad espectral de potencia, 148
- Densidad espectral de potencia de pulsos modulados en amplitud, 153
- dep, 149
- Desarrollo en Serie de Fourier para secuencias, 50
- Desarrollo en Serie de Fourier para señales en tiempo continuo, 41
- Desbarajador, 662
- Descenso por gradiente, 364

- Desenrollado de fase, 709
Desensanchado, 472
Desequilibrio entre fase y cuadratura, 303
Desigualdad de Jensen, 585
Deslizamiento de ciclos, 705, 720
Desplazamiento Doppler, 721
Desviación de frecuencia de pico, 414
Detección multiusuario, 511
Detector conjunto, 516
Detector conjunto ML óptimo, 512
Detector de cruces por cero, 746
Detector decorrelacionador, 516
DFE, 337
DFE con predicción de ruido, 358
DFT, 66, 451
Diafonía, 7
Diagrama de rejilla, 314
Diagrama de Bode, 45
Diagrama de dispersión, 291
Diagrama de estados aumentado de un código convolucional, 635
Diagrama de estados de un código convolucional, 629
Diagrama de ojo, 271
Diagrama de polos y ceros de un sistema lineal e invariante, 58
Diagrama de rejilla, 417
Diezmador, 84
Dirigido por decisión, 370
Distancia mínima de una constelación, 217
Distancia de Hamming, 592
Distorsión de apertura, 81
Distorsión de pico, 308
Distribución de probabilidad de orden N de un proceso estocástico, 129
División en subconstelaciones en TCM, 652
Divisor de fase, 73
DLL, 742
Doble banda lateral, 276
Dominio natural, 34
Dominio transformado, 34
DPSK, 397
DQPSK, 397
DSB, 276
DSSS, 469
Efecto cerca-lejos en detección multiusuario, 511
Eficiencia espectral, 252, 570
Encallado, 705
Energía media por símbolo, 180
Energía media por bit, 231
Enlace ascendente, 497
Enlace descendente, 497
Entrenamiento, 361
Entropía, 541
Entropía condicional, 543
Entropía conjunta, 542
Entropía diferencial, 561
Entropía diferencial condicional, 562
Entropía diferencial conjunta, 562
Enumerador de caminos de un código convolucional, 635
Enumerador de pesos de un código convolucional, 635
Envolvente constante, 390
Envolvente de una señal paso banda, 73
Equivalente paso bajo, 72
Ergodicidad en la autocorrelación, 142
Ergodicidad en la media, 139
Error residual de frecuencia, 727
Error cuadrático medio, 332
Error de fase común, 732
Esfera de Hamming, 604
Espectro ensanchado, 464
Espectro ensanchado por salto en frecuencia, 477
Espectro ensanchado de secuencia directa, 469
Espectro ensanchado por salto en el tiempo, 480
Esperanza matemática de una función de una variable aleatoria, 109
Esperanza matemática, 99
Esquema pronto-tarde, 742
Esquema pronto-tarde, 711
Estacionariedad, 133

- Estacionariedad en sentido amplio, 134
 Estadístico suficiente para la detección, 189
 Estimación lineal de mínima varianza, 383
 Estimación asistida por datos, 696
 Estimación de fase, 697
 Estimación del canal, 361
 Estimación lineal óptima, 382
 Estimador de Fitz, 728
 Estimador de Luise y Reggiannini, 728
 Estructura de Farrow, 748
 Exceso de ancho de banda, 261
 Exponenciales complejas en tiempo continuo, 19
 Exponenciales complejas en tiempo discreto, 19
 Exponenciales reales en tiempo continuo, 18
 Exponenciales reales en tiempo discreto, 18
 Exponente de error, 557
 Extensión cíclica, 458
 Factor de caída, 260
 Factor de expansión, 467
 Factor de roll-off, 260
 Fase, 277
 FDM, 436
 FDMA, 493
 fdp, 97
 FFH, 478
 FFT, 66
 FH, 477
 Filtrado complejo de un proceso complejo, 159
 Filtro de realimentación, 341
 Filtro adaptado, 190, 253
 Filtro anti-aliasing, 297
 Filtro de lazo, 700
 Filtro precursor, 341
 Filtro transmisor, 248
 Filtros duales, 753
 Filtros espejo, 753
 Filtros ideales, 44
 Firma, 496
 Forma de onda, 34
 Forzador de ceros, 257
 Fronteras de decisión, 199
 FSK, 399
 FSK de fase continua, 399
 Funciones escalón, 17
 Función Q , 103
 Función de distribución, 97
 Función de ambigüedad temporal periódica, 488
 Función de ambigüedad temporal, 22
 Función de autocorrelación complementaria, 157
 Función de autocorrelación de un proceso estacionario, 135
 Función de densidad de probabilidad, 97
 Función de densidad de probabilidad de orden N de un proceso estocástico, 129
 Función de distribución de orden N de un proceso estocástico, 129
 Función de transferencia, 32
 Función de transferencia en el dominio de Laplace, 32
 Función de transferencia en el dominio Z, 33
 Función entropía, 542
 Función generadora de un código convolucional, 635
 Función generadora de una secuencia periódica en $GF(2)$, 489
 Función indicatriz de Euler, 491
 Función racional, 57
 Función sinc, 19
 Ganancia de codificación asintótica, 598
 Ganancia de codificación, 597
 GMSK, 419
 Gradiente, 364
 Grafo de Tanner, 673
 Gráfica I/Q, 425
 ICI, 442, 732
 IDFT, 66, 443
 Igualación adaptativa, 364
 Igualación lineal, 326

- Igualador DFE, 337
Igualador fraccionario, 347
Igualador MSE, 332
Igualador ZF, 328
Incorrelación, 123
Independencia de sucesos, 120
Independencia de variables aleatorias, 120
Información extrínseca, 668
Información mutua de dos variables aleatorias discretas, 544
Información mutua de dos variables aleatorias continuas, 560
Interferencia multiacceso, 500
Interferencia radioeléctrica, 7
Interferencia entre portadoras, 442
Interferencia entre portadoras, 732
Interferencia intersimbólica, 255, 306
Interferencia multiusuario, 7
Interpolador, 84
Intervalo de bit, 225
ISI, 255
ISI precursora, 339
ISI postcursora, 339
Jammer, 7, 475
Lazo enganchado en fase, 699
Ley cuadrática de combinación, 405
LFSR, 488
LMS, 367
Longitud de restricción de un código convolucional, 628
LS, 363
MAI, 500
Marginalización de una variable aleatoria, 110
Matriz de covarianzas, 111
Matriz de canales discretos equivalentes, 452
Matriz de comprobación de paridad de un código bloque, 601
Matriz generadora de un código bloque, 601
Matriz generadora de un código convolucional, 628
Media de un proceso estocástico, 130
Memoria total de un código convolucional, 628
Modulaciones de espectro ensanchado, 465
Modulaciones de fase, 389
Modulaciones de fase continua, 413
Modulación APSK, 751
Modulación compleja de procesos gausianos complejos, 161
Modulación de amplitud, 247
Modulación de fase diferencial, 397
Modulación en cuadratura, 277
Modulación multiportadora, 437
Modulación por cambio de fase, 280
Modulación por desplazamiento mínimo, 408
Modulación por desplazamiento de frecuencia, 399
Modulación sin portadora, 279
Modulador, 176
MSE, 332
MSK, 408
Muestreo de procesos estacionarios, 154
Multitrayecto, 306
Mínimos cuadrados, 363
Módem, 5
Múltiplex por división en frecuencia, 436
Múltiplex por división en frecuencia ortogonal, 438
NCO, 699
OFDM, 438
OFDM en tiempo continuo, 438
OFDM en tiempo discreto, 444
OFDMA, 494
Ojo, 272
OQPSK, 391
Oscilador controlado numéricamente, 699
OVSF, 524
PAM, 248
PAM en banda base, 247
PAM paso banda, 274
PAM-DSB, 276
PAM-SSB, 276

- PAM-VSB, 276
 Par preferido de secuencias, 503
 Paso de adaptación, 366
 Paso de mensajes, 673
 Periodo de bit, 225
 Periodo de chip, 468
 Periodo de salto, 477
 Periodo fundamental de una señal periódica, 12
 Periodograma, 728
 Peso de una palabra binaria, 592
PLL, 699
 PLL dirigido por decisión, 716
 PLL de primer orden, 702
 PLL de segundo orden, 703
 Polinomio característico, 490
 Polinomio irreducible, 609
 Polinomio primitivo, 490, 609
 Polinomio primo, 609
 Portadora, 275
 Prefijo cíclico, 460
 Preámbulo, 734
 Principio de ortogonalidad, 383
 Probabilidad condicional, 115
 Probabilidad de error condicionada a la transmisión de un símbolo, 204
 Probabilidad de error de símbolo, 176
 Probabilidad de error de un código convolucional, 641
 Proceso cicloestacionario, 137
 Proceso blanco, 137
 Proceso circularmente simétrico, 158
 Procesos conjuntamente estacionarios, 136
 Procesos gausianos complejos, 157
 Procesos gausianos complejos en tiempo discreto, 161
 Profundidad de truncamiento, 319
 Propagación multirayecto, 264
 Propagación multirayecto, 481
 Propagación de errores, 339
 Propagación de la creencia, 671
 Propagación multirayecto, 6
 Proyección real de procesos cicloestacionarios modulados, 163
PSK, 280
 PSK binaria, 281
 PSK codificada diferencialmente, 396
 Pulso conformador, 248
 Pulso en coseno alzado, 259
 Pulso en raíz de coseno alzado, 261
QAM, 280
QPSK, 282
 QPSK con desplazamiento, 391
 Raíz de coseno alzado, 261
 Realce de ruido, 330
 Realimentación de decisiones, 337
 Receptor RAKE, 481
 Recuperación de portadora, 689
 Recuperación de fase, 714
 Recuperación del instante de muestreo, 689
 Recuperación dirigida por decisión, 715
 Redundancia de un código, 592
 Regiones de decisión, 199
 Región de convergencia de la Transformada Z, 52
 Regla de la cadena de la entropía, 578
 Regla de la cadena de la probabilidad condicional, 115
 Regla de la cadena para la información mutua, 578
 Reglas de Ungerboeck, 655
 Relación señal a ruido, 156
 Rellenado con ceros, 519
 Representación exponencial de $GF(2^m)$, 610
 Retardo de grupo, 43
 Ruido, 155
 Ruido de fase, 732
 Ruido de adaptación, 368
 Ruido de fase, 705
 Ruido térmico, 5, 155
 Salto en frecuencia, 477
 Salto lento en frecuencia, 478
 Salto rápido en frecuencia, 478

- Saltos de fase, 390
Secuencia de código, 496
Secuencia de chip, 468
Secuencia de longitud maximal, 490
Secuencia directa, 469
Secuencia ensanchadora, 468
Secuencia m, 490
Seguimiento, 701, 741
Seudoruido, 470
Señal analítica, 73
Señales de energía finita, 15
Señales ortogonales, 22
SFH, 478
Simetría circular, 158
Sincronización, 687
Sincronización asistida por datos, 696
Sincronización dirigida por decisión, 696
Sincronización de modulaciones multiportadora, 729
Sincronización de símbolo, 706
Sincronización en espectro ensanchado, 738
Sincronización no asistida por datos, 696
Sincronización post-DFT, 737
Sincronización pre-DFT, 734
Sincronización realimentada, 710
Sinuoides complejas en tiempo continuo, 17
Sinuoides complejas en tiempo discreto, 18
Sistema lineal con entrada estocástica, 144
Sistema causal, 25
Sistema de fase lineal, 43
Sistema de fase mínima, 59
Sistema estable BIBO, 26
Sistema invariante, 27
Sistema invertible, 26
Sistema lineal, 27
Sistema paso todo, 62
Sistema sin memoria, 25
Sobremuestreo, 256, 294
SSB, 276
Subcanal, 436, 438
Suceso erróneo, 322
Suma de variables aleatorias independientes, 122
Tasa de bit, 225
Tasa de error de bit, 228
TCM invariante rotacionalmente, 659
TCM no lineal, 658
TDMA, 493
Teorema central del límite, 125
Teorema de codificación de canal, 559
Teorema de Bayes, 118
Teorema de factorización espectral, 359
Teorema de la probabilidad total, 116
Teorema de muestreo de Nyquist, 78
TH, salto en el tiempo, 480
Transformada de Laplace para señales en tiempo continuo, 32
Transformada Z para señales en tiempo discreto, 34
Transformador de Hilbert, 73
Turbo códigos, 661
Umbrales de decisión, 199
Variable aleatoria χ^2 , 105
Variable gausiana multidimensional, 113
Variable aleatoria, 96
Variable aleatoria exponencial, 105
Variable aleatoria binomial, 100
Variable aleatoria compleja, 114
Variable aleatoria de Bernoulli, 100
Variable aleatoria de Poisson, 101
Variable aleatoria de Weibull, 104
Variable aleatoria gamma, 105
Variable aleatoria gausiana, 103
Variable aleatoria geométrica, 101
Variable aleatoria lognormal, 105
Variable aleatoria uniforme, 102
Vector aleatorio, 110
Velocidad de convergencia, 368
Volteo de bits, 674
ZF, 328
Árbol de fases, 415
Índice de modulación, 415

