UNIVERSIDAD DE
MURCIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
ANTONIO J. PALLARÉS Y SALVADOR SANCHEZ-PEDREÑO

CÁLCULO NUMÉRICO EN UNA VARIABLE CURSO 2017-2018 PRÁCTICA 6

Copia en `MetodosFunciones` de tu proyecto el contenido del archivo `AuxiliarPractica6_2017_18` del Aula Virtual de la UMU.

Ejercicio 1 *El aspecto de suavidad en la gráfica de una función no debe hacernos pensar que sus derivadas se comportan de la misma manera. Weierstrass (1812) dio el primer ejemplo de una función continua que no es derivable en ningún punto (http://mathworld.wolfram.com/WeierstrassFunction.html). En el ejemplo que proponemos (Chang, Math. Montly 2012) se esconde la situación al perturbar la función de Weierstrass. Al grano:*

Construye tres paneles de dibujo distribuidos en la pantalla del ordenador de manera que se vean simultáneamente. En ellos representaremos nuestra función y sus dos primeras derivadas. Para que las gráficas se vean bien en los paneles, puedes construir un método en `MetodosFunciones.java` *que nos devuelva aproximaciones de los extremos superior e inferior de una* `Funcion` f *en un intervalo* $[a, b]$ *y utilizar los extremos del intervalo (*a *y* b*) y los de la función para dimensionar el gráfico.*

1. *Representa en el primer panel la función*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{100} \frac{\operatorname{sen}(2\pi k^2 x)}{k^5 4\pi^2} + \frac{x^2}{2k}$$

con $x \in [a, b]$, $a = 0$, $b = 1$.

2. *En el segundo representa la función* $df5(x)$*, la derivada aproximada de* f *calculada con 5 puntos y un paso* h *(*$h = 0.01$ *y* 0.001*).*

   Incluye también en este panel la gráfica de $f'(x)$ *y analiza la aproximación con* $df5$.

3. *En el tercer panel representa la función* $d2f5(x)$*, siendo está última la derivada segunda aproximada calculada con la aproximación de 5 puntos de la derivada de* $df5(x)$ *y un paso* h *(*$h = 0.01$, 0.001 *y* 0.0001*).*

   Incluye también en este panel la gráfica de $f''(x)$ *y analiza la aproximación con* $d2f5$.

4. *Cambiando los valores de* a *y* b *puedes observar el comportamiento de las gráficas.*

5. *¿Te atreves con la tercera derivada?*

Ejercicio 2 *Aproximar el valor de las siguientes integrales:*

1. $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$*, acotando previamente la cola*

2. $\int_0^1 \frac{e^x}{x^{2/3}}\,dx$*, con un cambio de variable previo. Una alternativa podría ser escribir:*

$$x^{-2/3}e^x = x^{-2/3} + (e^x - 1)x^{-2/3},$$

¿qué ventaja tiene esta idea?

Ejercicio 3 *La integral impropia*

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}\,dx$$

es convergente y su valor exacto se calcula con un cambio de variable inmediato; el valor es $2(e - 1)$*. Utilicemos tres formas distintas de aproximar el valor:*

1. *Modificando el integrando en 0, asignándole el valor 0 y utilizando después la regla de Simpson.*

2. *Aproximando mediante el método de cuadratura de Gauss, lo que es posible puesto que ninguna de las evaluaciones de la función en este método se hace en el extremo 0.*

3. *Descomponemos el intervalo* $[0,1]$ *como* $[0,2h] \cup [2h,1]$*,* $h = 1/n$*. Sobre* $[2h,1]$ *utilizamos la regla de Simpson.*

   Sobre $[0,2h]$ *calculamos el polinomio interpolador* $p(x)$ *de* $e^{\sqrt{x}}$ *en los nodos* 0*,* h *y* $2h$ *y aproximamos la integral sobre* $[0,2h]$ *por la integral de* $p(x)x^{-1/2}$*, que puede calcularse de forma exacta.*

   En efecto, si $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$*, resulta* $p(x)x^{-1/2} = a_0 x^{-1/2} + a_1 x^{1/2} + a_2 x^{3/2}$ *y entonces, utilizamos la aproximación:*

$$\int_0^{2h} x^{-1/2}\psi(x)\,dx \approx \int_0^{2h} x^{-1/2}p(x)\,dx = \frac{2}{15}\sqrt{2h}\big(6\psi(0) + 8\psi(h) + \psi(2h)\big).$$

Construye una tabla de aproximaciones a la integral utilizando distinto número de intervalos de división en cada uno de los tres métodos: $n = 2, 4, 8, 16, 32$ *(en el tercer método, usamos* $h = 1/n$ *y hacemos Simpson compuesto con* n *intervalos en* $[2h,1]$*). Compara los valores obtenidos con el valor real* $2(e-1)$*.*

Ejercicio 4 *Aproxima el valor de la integral*

$$\int_0^{10} x \operatorname{sen}\Big(\frac{1}{x}\Big)\,dx$$

utilizando los métodos adaptativos para la regla de Simpson y para la cuadratura de Gauss.