

ЭКЗАМЕН ПО ФИЗИКЕ (2-Й СЕМЕСТР)

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

(ЗАДАЧИ)

РЕШЕНИЯ

Небольшая оговорочка...

*Я не претендую на истину в первой инстанции (пока что).
Если что-то не нравится (с чем-то не согласны) можно
открыть Савельева и Google и уточнить тот или иной
момент, плюс связываться со мной никто не запрещал, «через
что?» написано на каждой странице.*

*Примечания вынесены в область с вопросом либо выделены
красным цветом. Ссылки на примечания также выделены
красным цветом и взяты в квадратные скобочки.*

*Если вы просматриваете док и у вас отображаются
квадраты по типу: \square , то это косяк word-a,
переписывать их никуда не надо, тем более на экзамене!*

Все вектора я обозначал по типу \vec{v} , редко \vec{v} .

*Если есть какие-то вопросы по оптике, могу ответить сразу:
я не шарю).*

*Настоятельно рекомендую выучить **правило правой руки!***

12.2 (6)

По тонкому диску радиуса $R = 10$ см равномерно распределен заряд с поверхностной плотностью $\sigma = 10$ нКл/м². Найти потенциал в точке, лежащей на оси диска на расстоянии 8 см от плоскости диска φ .

Дано:

Тонкий диск,

 $R = 10$ см $\sigma = 10 \frac{\text{нКл}}{\text{м}^2}$ $h = 8$ см $\varphi = ?$

Примечания:

В основе

решения лежит

разбиение на

бесконечное

количество

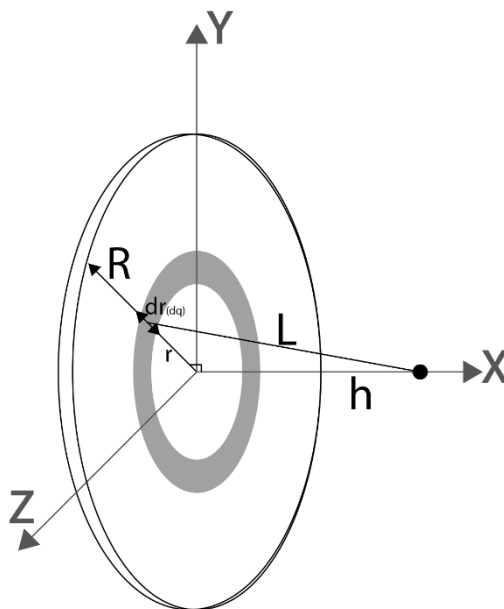
тонких

кольцевых

фрагментов

площадью dS

Решение:



Будем разбивать диск на кольца. В силу симметрии и равноудаленности всех точек кольца от точки расчета потенциал, создаваемый данным кольцом:

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{l}, l = \sqrt{r^2 + h^2}$$

$$\sigma = \frac{dq}{dS}, dS = 2\pi r dr \rightarrow dq = \sigma 2\pi r dr$$

$$\varphi = \int d\varphi = \int_{(q)} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{\sigma 2\pi r dr}{\sqrt{r^2 + h^2}} =$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{1}{2} \int_0^R (r^2 + h^2)^{-\frac{1}{2}} d(r^2) = \left(2 * \frac{\sigma \sqrt{r^2 + h^2}}{4\epsilon_0} \right) \Big|_0^R$$

$$= \frac{\sigma(\sqrt{R^2 + h^2} - h)}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma h}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{\frac{R^2}{h^2} + 1} - 1 \right)$$

Ответ: $\varphi = \frac{\sigma h}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{\frac{R^2}{h^2} + 1} - 1 \right).$

12.4

Найти потенциал в точке A , удаленной на расстоянии r_0 от заряженной нити длиной $(l_1 + l_2)$. Линейная плотность зарядов τ .

Дано:

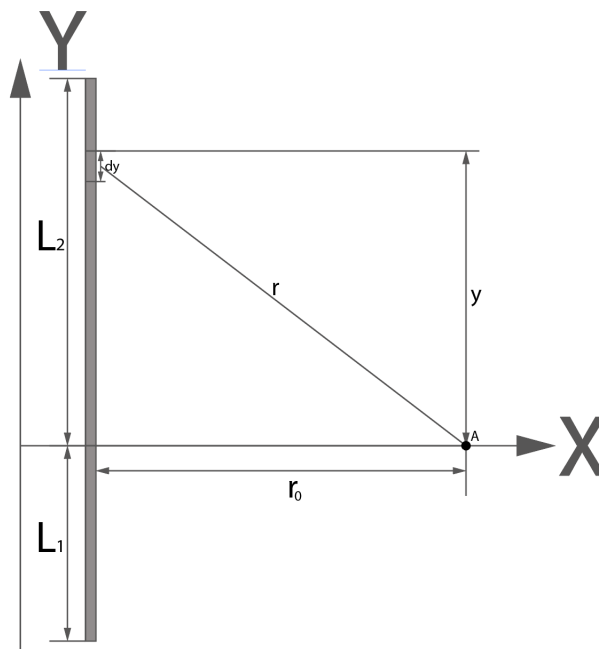
Зар. нить,

$$l = l_1 + l_2$$

τ, r_0

$\varphi_A = ?$

Решение:



Примечания:

1.

Это табличный интеграл – если спросит на экзамене так и скажете (смотреть шпору от Конюх по интегралам где-то среди пунктов 9-12):

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln |\sqrt{u^2 \pm a^2} + u| + C$$

Делим стержень на бесконечно малые части dy , каждая из которых создаёт в точке A

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r}; \quad \tau = \frac{dq}{dy} \rightarrow dq = \tau dy$$

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau dy}{r}; \quad r = \sqrt{y^2 + r_0^2}$$

$$\varphi_A = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l_1}^{l_2} \frac{dy}{\sqrt{y^2 + r_0^2}} = [1]$$

$$= \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \left(\ln(\sqrt{y^2 + r_0^2} + y) \right) \Big|_{-l_1}^{l_2} =$$

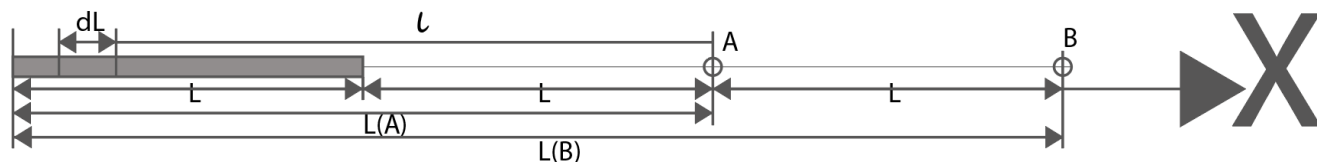
$$= \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \left(\ln(\sqrt{l_2^2 + r_0^2} + l_2) - \ln(\sqrt{l_1^2 + r_0^2} - l_1) \right) =$$

$$= \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{\sqrt{l_2^2 + r_0^2} + l_2}{\sqrt{l_1^2 + r_0^2} - l_1} \right)$$

Ответ: $\varphi_A = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{\sqrt{l_2^2 + r_0^2} + l_2}{\sqrt{l_1^2 + r_0^2} - l_1} \right).$

12.6

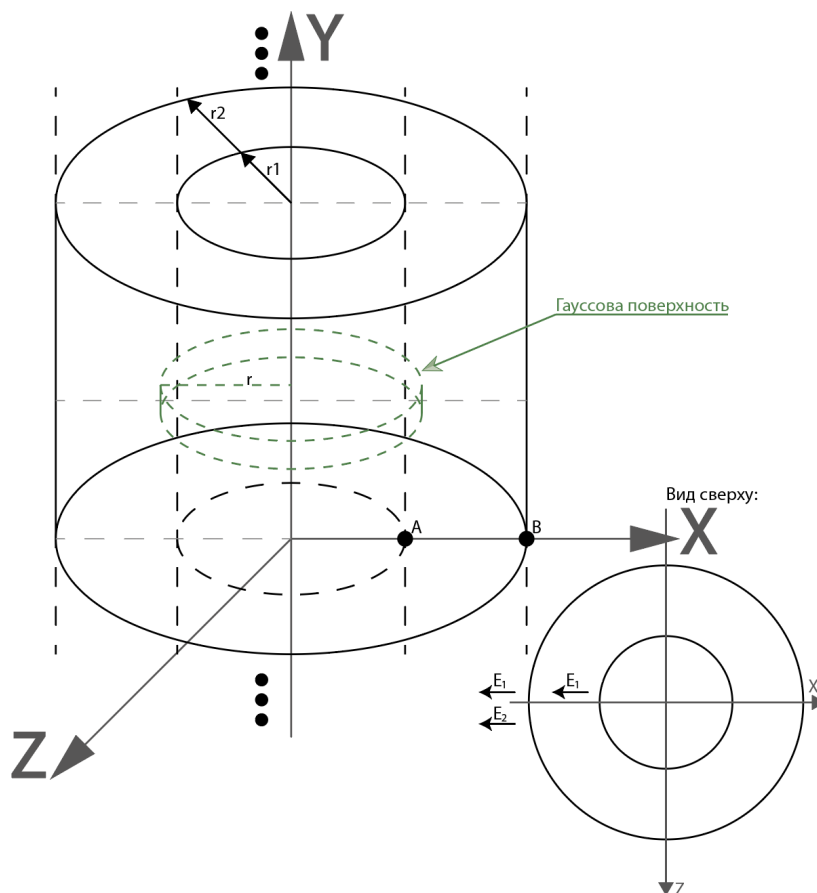
На отрезке тонкого прямого проводника равномерно распределен заряд с линейной плотностью $\tau = 2,5$ нКл/м. Найти разность потенциалов точек А и В.



Дано:	Решение:
Тонкий пр. пров.	$\Delta\varphi_{AB} = \varphi_A - \varphi_B;$
$\tau = 2,5$ нКл/м	<i>Разбиваем проводник на бесконечно малые отрезки dl, каждый участок создаёт потенциал в точке А:</i>
$\Delta\varphi_{AB} - ?$	$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{l}$, где l – расстояние от точки до dl
Примечания:	$\tau = \frac{dq}{dl} \rightarrow dq = \tau dl$
Обозначим	$[1] \varphi_A = \int d\varphi_A = \int_l^{2l} \frac{\tau dl}{4\pi\epsilon_0 l} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \int_l^{2l} \frac{dl}{l} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln(l) \Big _l^{2l}$
L – длина пров.,	$= \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} (\ln(2l) - \ln(l)) = \frac{\tau \ln(2)}{4\pi\epsilon_0}$
l – расстояние от dl до т-ки (А/В)	<i>Аналогично для точки В:</i>
1.	$[1] \varphi_B = \int_{2l}^{3l} \frac{\tau dl}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln(l) \Big _{2l}^{3l} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{3}{2}\right)$
Вычислить	$\Delta\varphi_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \left(\ln(2) - \ln\left(\frac{3}{2}\right) \right) =$
пределы	$= \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(2 * \frac{2}{3}\right) = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{4}{3}\right)$
интегрирования	
проще пареной	
репы: мы	
перемещаем dl	
по проводнику и	
отслеживаем	
изменение	
расстояния от	
точки до dl	
Ответ: $\Delta\varphi_{AB} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{4}{3}\right).$	

12.9

Два бесконечно длинных коаксиальных цилиндра с радиусами $r_1 = 10$ и $r_2 = 20$ мм заряжены одноименными зарядами, причем поверхностная плотность зарядов на внешнем цилиндре $\sigma_2 = 6,66$ нКл/м², а на внутреннем $\sigma_1 = 3,333$ нКл/м². Найти разность потенциалов $\Delta\varphi$ между цилиндрами.



Дано:

Два коакс.цил.

$$r_1 = 10 \text{ мм}$$

$$r_2 = 20 \text{ мм}$$

$$\sigma_1 = 3,333 \frac{\text{нКл}}{\text{м}^2}$$

$$\sigma_2 = 6,66 \frac{\text{нКл}}{\text{м}^2}$$

 $\Delta\varphi = ?$

Примечания:

Решение:

Внутренний цилиндр создаёт электрическое поле напряжённостью E_1 , а внешний – напряжённостью E_2 . Направления силовых линий показаны на рисунке.

Найдём $E_1(r)$ и $E_2(r)$, для $r_1 \leq r \leq r_2$, т.е. между двумя цилиндрами:

Представим цилиндр высотой h и радиусом r ($r_1 \leq r \leq r_2$), тогда поток вектора \vec{E}_1 :

1.

Поток $\Phi_{\text{полн2}}$, создаваемый внешним цилиндром будет равен нулю, т.к. Гауссова поверхность не содержит внутри себя ни заряда q_2 , ни его части. Иначе говоря, количество линий напряжённости «входящих» в Гауссову поверхность равно количеству «выходящих» линий. Таким образом они компенсируют друг друга и не влияют на поле.

2.

Градиент потенциала $\text{grad } \varphi$ – это вектор, указывающий направление наиболее быстрого возрастания потенциала и численно равный изменению потенциала на единицу длины этого направления.

Ответ: $\Delta\varphi = \frac{\sigma_1 r_1}{\varepsilon_0} \ln \left| \frac{r_2}{r_1} \right|$.

$\Phi_{\text{полн1}} = \Phi_{\text{бок1}} + 2\Phi_{\text{осн1}} = \Phi_{\text{бок1}}$, т.к. линии напряжённости параллельны основаниям цилиндра, следовательно они не прокалывают его

$$\Phi_{\text{бок1}} = \oint (\vec{E}_1, \vec{dS}) = \oint E_1 \cos \alpha dS =$$

$\text{Угол } \alpha = 0^\circ - \text{const} \rightarrow \cos \alpha = 1$

$$= E_1 \oint_{(S_{\text{бок}})} dS = E_1 S_{\text{бок}} = E_1 2\pi r h$$

По теореме Гаусса:

$$\Phi_{\text{бок1}} = \frac{q_1}{\varepsilon_0}, \text{ где } q_1 - \text{заряд, заключённый внутри}$$

Гауссовой поверхности

$$\sigma_1 = \frac{dq_1}{dS} = \frac{q_1}{S} \rightarrow q_1 = \sigma_1 S = \sigma_1 2\pi r_1 h$$

$$E_1 2\pi r h = \frac{\sigma_1 2\pi r_1 h}{\varepsilon_0} \rightarrow E_1 = \frac{\sigma_1 r_1}{\varepsilon_0 r}$$

[1]. $\Phi_{\text{полн2}} = 0 \rightarrow E_2 = 0$

Для удобства выберем вектор напряжённости \vec{E} , сонаправленный с осью OX .

$$\vec{E} = \frac{\sigma_1 r_1}{\varepsilon_0 x} \vec{i}$$

Используя связь напряжённости и потенциала

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \right) \quad [2]$$

В нашем случае:

$$\vec{E} = -\frac{d\varphi}{dx} \vec{i} = \frac{\sigma_1 r_1}{\varepsilon_0 x} \vec{i} \rightarrow d\varphi = -\frac{\sigma_1 r_1}{\varepsilon_0 x} dx$$

$$\varphi(x) = -\frac{\sigma_1 r_1}{\varepsilon_0} \int \frac{dx}{x} = -\frac{\sigma_1 r_1}{\varepsilon_0} \ln|x| + C$$

$$\Delta\varphi = \varphi(r_1) - \varphi(r_2) = -\frac{\sigma_1 r_1}{\varepsilon_0} (\ln|r_1| - \ln|r_2|) =$$

$$= -\frac{\sigma_1 r_1}{\varepsilon_0} \ln \left| \frac{r_1}{r_2} \right| = \frac{\sigma_1 r_1}{\varepsilon_0} \ln \left| \frac{r_2}{r_1} \right|$$

12.12

Потенциал некоторого поля имеет вид $\varphi = axz$. Найти вектор напряженности поля \vec{E} , и его модуль E .

Дано:	Решение:
$\varphi = axz$	Воспользуемся связью вектора напряжённости
$\vec{E}, E - ?$	электрического поля \vec{E} и потенциала φ :
Примечания:	$[P.S.] \vec{E} = -\text{grad } \varphi = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}\right) =$
Полагаем $a - \text{const}$, т.к. не сказано обратного	$= -\left(\frac{\partial(axz)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial(axz)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial(axz)}{\partial z} \vec{k}\right) =$
	$= -a\left(\frac{\partial(xz)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial(xz)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial(xz)}{\partial z} \vec{k}\right) =$
	$= -a(z\vec{i} + 0 * \vec{j} + x\vec{k}) = \overbrace{-az}^{E_x} \vec{i} \overbrace{-ax}^{E_z} \vec{k}$
В ответе мы получили	$E = \vec{E} = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} = \sqrt{(-az)^2 + 0 + (-ax)^2} =$
зависимости \vec{E} и E от x, y, z	$= a\sqrt{z^2 + x^2}$
Т.е. можно записать:	<i>P.S. Градиент потенциала $\text{grad } \varphi$ – это вектор, указывающий направление наиболее быстрого возрастания потенциала и численно равный изменению потенциала на единицу длины этого направления.</i>
$\vec{E}(x, y, z)$	
$E(x, y, z)$	
Ответ: $\vec{E} = -az\vec{i} - ax\vec{k}$; $E = a\sqrt{z^2 + x^2}$.	

12.14

Потенциал некоторого поля имеет вид $\varphi = a(x^2 + y^2) - bz^2$. Найти вектор напряженности поля \vec{E} , и его модуль E .

Дано: $\varphi = ax^2 + ay^2 - bz^2$ $a, b - \text{const} > 0$ $\vec{E}, E - ?$	Решение: Воспользуемся связью вектора напряжённости электрического поля \vec{E} и потенциала φ : $[P.S.] \vec{E} = -\text{grad } \varphi = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}\right) =$ $= -\left(\frac{\partial(ax^2 + ay^2 - bz^2)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial(ax^2 + ay^2 - bz^2)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial(ax^2 + ay^2 - bz^2)}{\partial z} \vec{k}\right) =$ $= -(2ax\vec{i} + 2ay\vec{j} - 2bz\vec{k}) =$ $= \overbrace{-2ax}^{E_x} \vec{i} \overbrace{-2ay}^{E_y} \vec{j} + \overbrace{2bz}^{E_z} \vec{k}$ $E = \vec{E} = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} =$ $= \sqrt{(-2ax)^2 + (-2ay)^2 + (2bz)^2} =$ $= 2\sqrt{a^2(x^2 + y^2) + b^2z^2}$ <i>P.S. Градиент потенциала $\text{grad } \varphi$ – это вектор, указывающий направление наиболее быстрого возрастания потенциала и численно равный изменению потенциала на единицу длины этого направления.</i>
Примечания: В ответе мы получили зависимости \vec{E} и E от x, y, z Т.е. можно записать: $\vec{E}(x, y, z)$ $E(x, y, z)$	

Ответ: $\vec{E} = -2ax\vec{i} - 2ay\vec{j} + 2bz\vec{k}; E = 2\sqrt{a^2(x^2 + y^2) + b^2z^2}$.

12.19

Потенциал поля внутри заряженного шара зависит только от расстояния от центра шара по закону $\varphi = ar^2 + b$ ($a, b = \text{const}$). Найти объемную плотность заряда ρ внутри шара.

Дано:	Решение:
$\varphi = ar^2 + b$ $a, b - \text{const}$ <hr/> $\rho - ?$	<p>Воспользуемся теоремой Остроградского-Гаусса в дифференциальной форме:</p> $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad [1] \rightarrow \rho = \varepsilon_0 \text{div } \vec{E}$
Примечания:	Найдём $\text{div } \vec{E}$:
ρ – функция, зависящая от расстояния до центра шара r Т.е. $\rho = \rho(r)$	$\text{div } \vec{E} = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right)$ <p>Воспользуемся связью вектора напряжённости электрического поля \vec{E} и потенциала φ:</p> $[P.S.] \vec{E} = -\text{grad } \varphi = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \right)$
1.	$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow$
$\text{div } \vec{a}$ –	$\rightarrow \varphi = ax^2 + ay^2 + az^2 + b$
дивергенция	$\vec{E} = -\left(\frac{\partial(ax^2 + ay^2 + az^2 + b)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial(ax^2 + ay^2 + az^2 + b)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial(ax^2 + ay^2 + az^2 + b)}{\partial z} \vec{k} \right)$
вектора \vec{a} –	$= -(2ax\vec{i} + 2ay\vec{j} + 2az\vec{k}) = \overbrace{-2ax}^{E_x} \vec{i} \overbrace{-2ay}^{E_y} \vec{j} \overbrace{-2az}^{E_z} \vec{k}$
дифференциальный оператор,	$\text{div } \vec{E} = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = -2a + (-2a) + (-2a) = -6a$
отображающий векторное поле на скалярное, который определяет,	$\rho = \varepsilon_0 * (-6a) = -6a\varepsilon_0$
насколько расходятся входящий и исходящий потоки, характеризует мощность источников векторного поля.	<p><i>P.S. [Градиент потенциала $\text{grad } \varphi$ – это вектор, указывающий направление наиболее быстрого возрастания потенциала и численно равный изменению потенциала на единицу длины этого направления.]</i></p>
Ответ: $\rho = -6a\varepsilon_0$.	

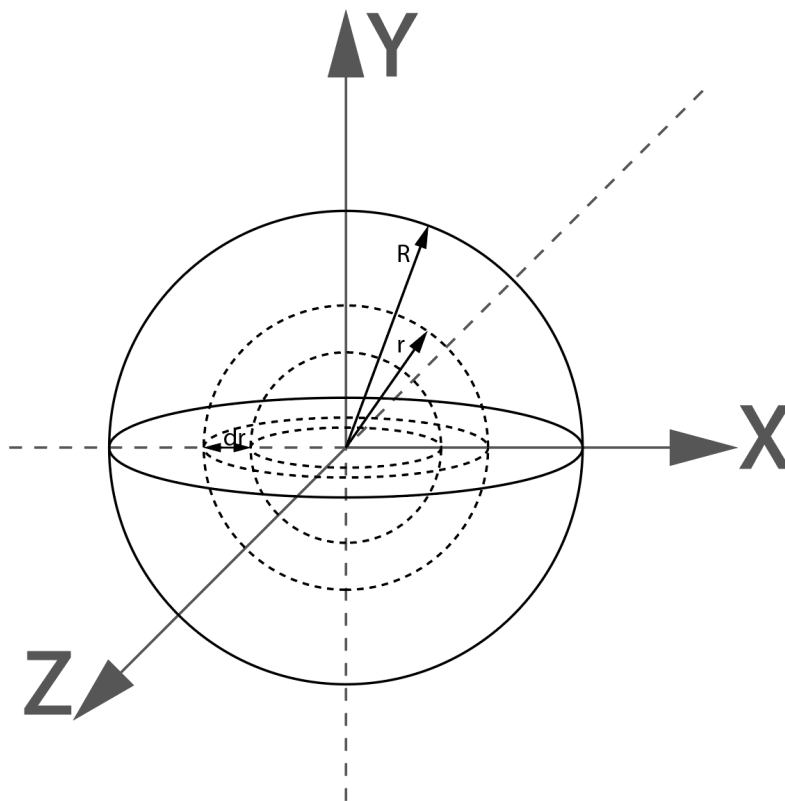
12.50

Пользуясь теоремой Остроградского-Гаусса в дифференциальной форме, найти вектор напряженности \vec{E} внутри и вне шара радиусом R , равномерно заряженного с объемной плотностью ρ .

Дано:
Шар, R, ρ
$\vec{E} - ?$
Примечания:
1.
Только для случая если шар заряжен положительно – если же отрицательно, то $\vec{E} \updownarrow \vec{r}$, тогда:
$\vec{E} = -\frac{\dots}{\dots} \vec{r}$
Т.е. знак изменяется на противоположн.
Т.к. в условии не сказано, как заряжен шар, то мы выбираем знак «+» по умолчанию.
2.
$\text{div } \vec{a}$ –
дивергенция вектора \vec{a} –
дифференциальный оператор, отображающий

Решение:

$$1) \ 0 < r \leq R \text{ [4]}$$



Теорема Остроградского-Гаусса в дифференциальной форме в сферических координатах (r, φ, θ) [2]:

Т.к. задача сферически симметрична, то $\frac{\partial E}{\partial \theta} = 0$ и $\frac{\partial E}{\partial \varphi} = 0$. Дивергенция в сферических координатах:

$$\text{div } \vec{E} = \frac{d\Phi}{dV} = \frac{1}{r^2} \frac{d(\vec{E}, \vec{r}^2)}{dr} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\text{т.к. } \vec{E} \upuparrows \vec{r}, \text{ то } (\vec{E}, \vec{r}^2) = Er^2 \cos 0^\circ = Er^2$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d(Er^2)}{dr} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow d(Er^2) = \frac{\rho r^2}{\epsilon_0} dr$$

$$Er^2 = \frac{\rho}{\epsilon_0} \int_0^r r^2 dr = \frac{\rho r^3}{3\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \text{ [3]}$$

векторное поле на скалярное, который определяет, насколько расходятся входящий и исходящий потоки вектора \vec{a} , характеризует мощность источников векторного поля.

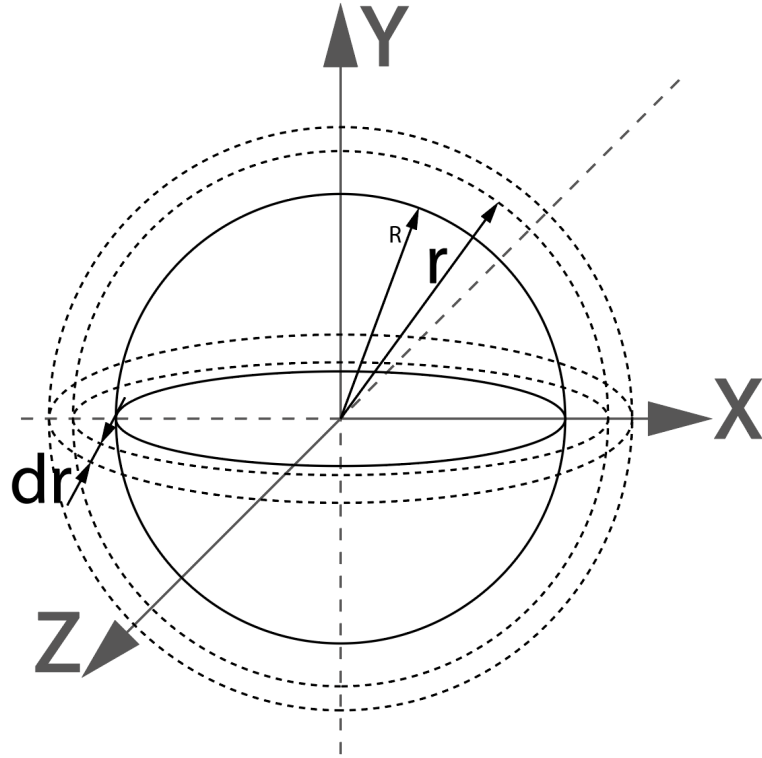
3. Предел интегрирования берётся в соответствии с частью пространства (и её радиусом), в которой заключён заряд. Учитываем, что за пределами шара ($r > R$) заряда уже нет.

4. Пунктирная линия — Гауссова поверхность.

Т.к. в любой точке пространства $\vec{E} \uparrow \vec{r}$ [1]

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}$$

2) $r \geq R$ [4]



Аналогично предыдущему пункту:

$$Er^2 = \frac{\rho}{\epsilon_0} \int_0^R r^2 dr = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} [3]$$

Т.к. в любой точке пространства $\vec{E} \uparrow \vec{r}$ [1]

$$\vec{E} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^3} \vec{r}$$

Ответ: 1) при $0 < r \leq R$: $\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}$; 2) при $r \geq R$: $\vec{E} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^3} \vec{r}$.

13.25

Найти поляризованность \vec{P} кристаллической пластинки, диэлектрическая проницаемость которой $\varepsilon = 3$, если напряженность нормального к пластинке внешнего электрического поля $\vec{E}_0 = 1 \text{ МВ/м}$.

Дано:

Крист.пл., $\varepsilon = 3$

$E_0 = 1 \text{ МВ/м}$

$P = ?$

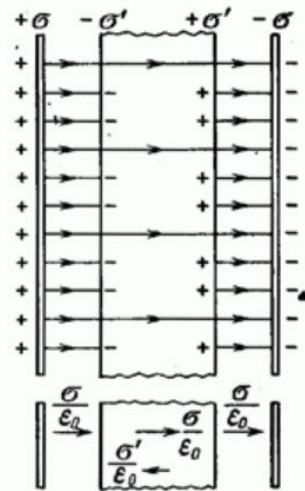
Примечания:

1.

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Параллельные пластины слева и справа на рисунке (прямоугольные) рисовать не надо – только силовые линии поля, которое они порождают.

Ответ: $P = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \varepsilon_0 E_0$.



Решение:

$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}_{\text{внут.пл.}} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}$$

Из рисунка [1]:

$$E = E_0 - E' = E_0 - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} =$$

$$\sigma' = P = \chi \varepsilon_0 E \rightarrow$$

$$E = E_0 - \frac{\chi \varepsilon_0 E}{\varepsilon_0} =$$

$$= E_0 - \chi E$$

$$E = \frac{E_0}{\chi + 1} = \frac{E_0}{\varepsilon}$$

$$P = \chi \varepsilon_0 E = \frac{\chi \varepsilon_0 E_0}{\varepsilon} =$$

$$= \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \varepsilon_0 E_0$$

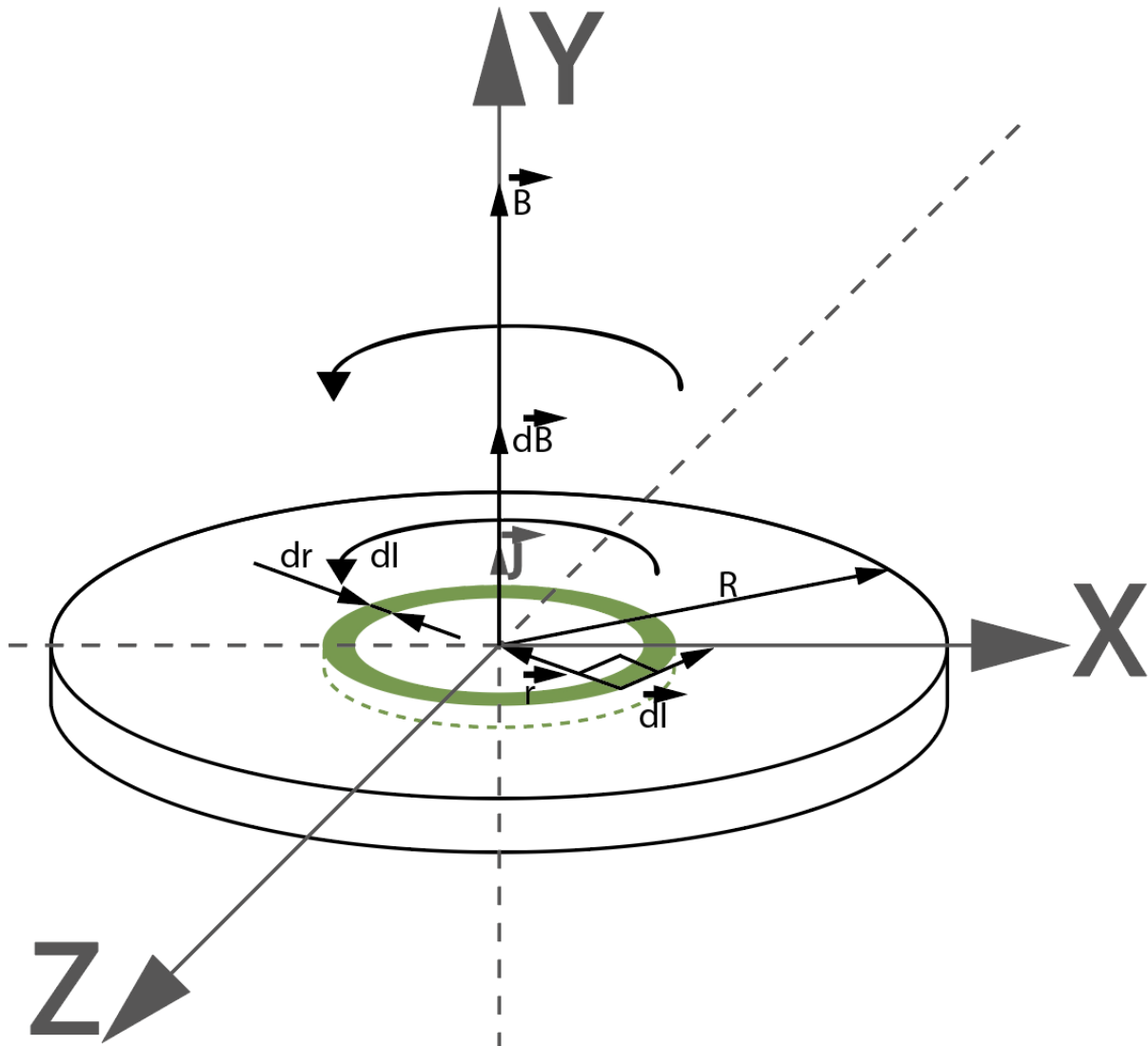
13.26

В некоторой точке изотропного диэлектрика с проницаемостью ε смещение равно \vec{D} . Чему равна поляризованность \vec{P} в этой точке?

Дано:	Решение:
Изотроп. диэл., ε, \vec{D}	$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \chi \varepsilon_0 \vec{E} = (\chi + 1) \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$
$\vec{P} - ?$	$\rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon \varepsilon_0}$
Примечание: $\varepsilon = \chi + 1$	$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E} = \frac{\chi}{\varepsilon} \vec{D} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \vec{D}$
Ответ: $\vec{P} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \vec{D}$.	

16.6

Непроводящий тонкий диск радиусом R , равномерно заряженный с одной стороны с поверхностной плотностью заряда σ , вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω . Определить магнитную индукцию \vec{B} в центре диска.



Дано:	Решение:
Диск, R, σ, ω	Разобъём диск на бесконечно тонкие кольца
$\vec{B} - ?$	толщиной dr , тогда крутящиеся кольца
Примечания:	являются своеобразными токами силой:
1.	$I_k = dI = \frac{dq}{T}; \sigma = \frac{dq}{dS} \rightarrow dq = \sigma dS = \sigma 2\pi r dr \rightarrow$ $I_k = \frac{\sigma 2\pi r dr}{T} = \sigma \omega r dr [1]$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

2.

$$\alpha = 90^\circ$$

$$\sin \alpha = 1$$

 $I_K - \text{const}$ т.к.

мы интегрируем
по одному и
тому же кольцу
радиусом $r -$
 const

Каждое кольцо разобьём на промежутки dl :

Тогда по закону Био — Савара — Лапласа:

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I[\vec{dl}, \vec{r}]}{r^3}; dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \sin \alpha}{r^2} dl$$

$$B_K = \int dB = \frac{\mu_0 I_K}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi r} \sin \alpha dl = \frac{\mu_0 I_K}{4\pi r^2} l \Big|_0^{2\pi r} [2]$$

$$B_K = \frac{\mu_0 I_K}{2r}$$

Тогда B диска — интегральная сумма B колец.

$$B = \int B_K = \int \frac{\mu_0 I_K}{2r} = \int_0^R \frac{\mu_0 \sigma \omega r dr}{2r} = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \int_0^R dr =$$

$$B = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} r \Big|_0^R = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} R$$

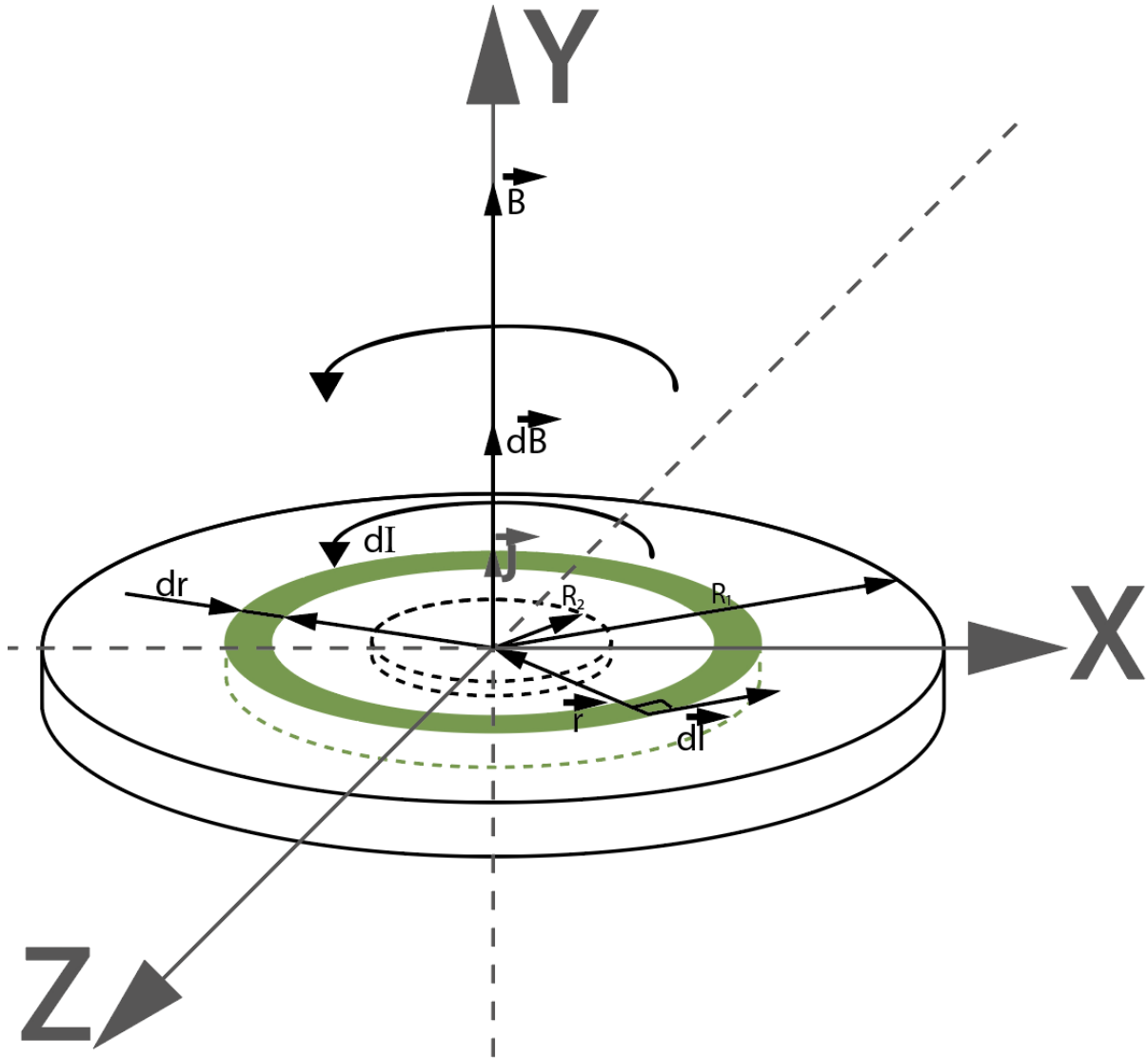
Направление \vec{B} можно определить по правилу правой руки (правого винта):

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} R \vec{j}$$

Ответ: $\vec{B} = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} R \vec{j}$.

16.8

Плоское диэлектрическое кольцо, внешний и внутренний радиусы которого R_1 и R_2 , равномерно заряжено зарядом q и вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω . Определить магнитную индукцию в центре кольца. [3]



Дано:

Пл. диэл. кол.,

 R_1, R_2, q, ω $\vec{B} - ?$

Примечания:

1.

Решение:

Разобъём диск на бесконечно тонкие кольца толщиной dr , тогда крутящиеся кольца являются своеобразными токами силой:

$$I_k = dI = \frac{dq}{T}; \sigma = \frac{dq}{dS}; dS = 2\pi r dr \rightarrow$$

$dq = \sigma 2\pi r dr$; Интегрируем:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

2.

$$\alpha = 90^\circ$$

$$\sin \alpha = 1$$

 $I_K - \text{const}$ т.к.

мы интегрируем

по одному и

тому же кольцу

радиусом $r -$ const

3.

Пунктирный

круг в центре

диска – это

вырез радиусом

 R_2 .

$$q = \sigma 2\pi \int_{R_1}^{R_2} r dr = \sigma \pi (R_2^2 - R_1^2) \rightarrow$$

$$\sigma = \frac{q}{\pi (R_2^2 - R_1^2)}$$

$$I_K = \frac{\sigma 2\pi r dr}{T} = \sigma \omega r dr [1]$$

Каждое кольцо разобьём на промежутки dl :

Тогда по закону Био — Савара — Лапласа:

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I [\vec{dl}, \vec{r}]}{r^3}; dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \sin \alpha}{r^2} dl$$

$$B_K = \int dB = \frac{\mu_0 I_K}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi r} \sin \alpha dl = \frac{\mu_0 I_K}{4\pi r^2} l \Big|_0^{2\pi r} [2]$$

$$B_K = \frac{\mu_0 I_K}{2r}$$

Тогда B диска – интегральная сумма B колец.

$$B = \int B_K = \int \frac{\mu_0 I_K}{2r} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 \sigma \omega r dr}{2r} = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \int_{R_1}^{R_2} dr$$

$$B = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} r \Big|_{R_1}^{R_2} = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} (R_2 - R_1) =$$

$$= \frac{\mu_0 \omega}{2} (R_2 - R_1) * \frac{q}{\pi (R_2^2 - R_1^2)} = \frac{q \mu_0 \omega}{2\pi (R_2 + R_1)}$$

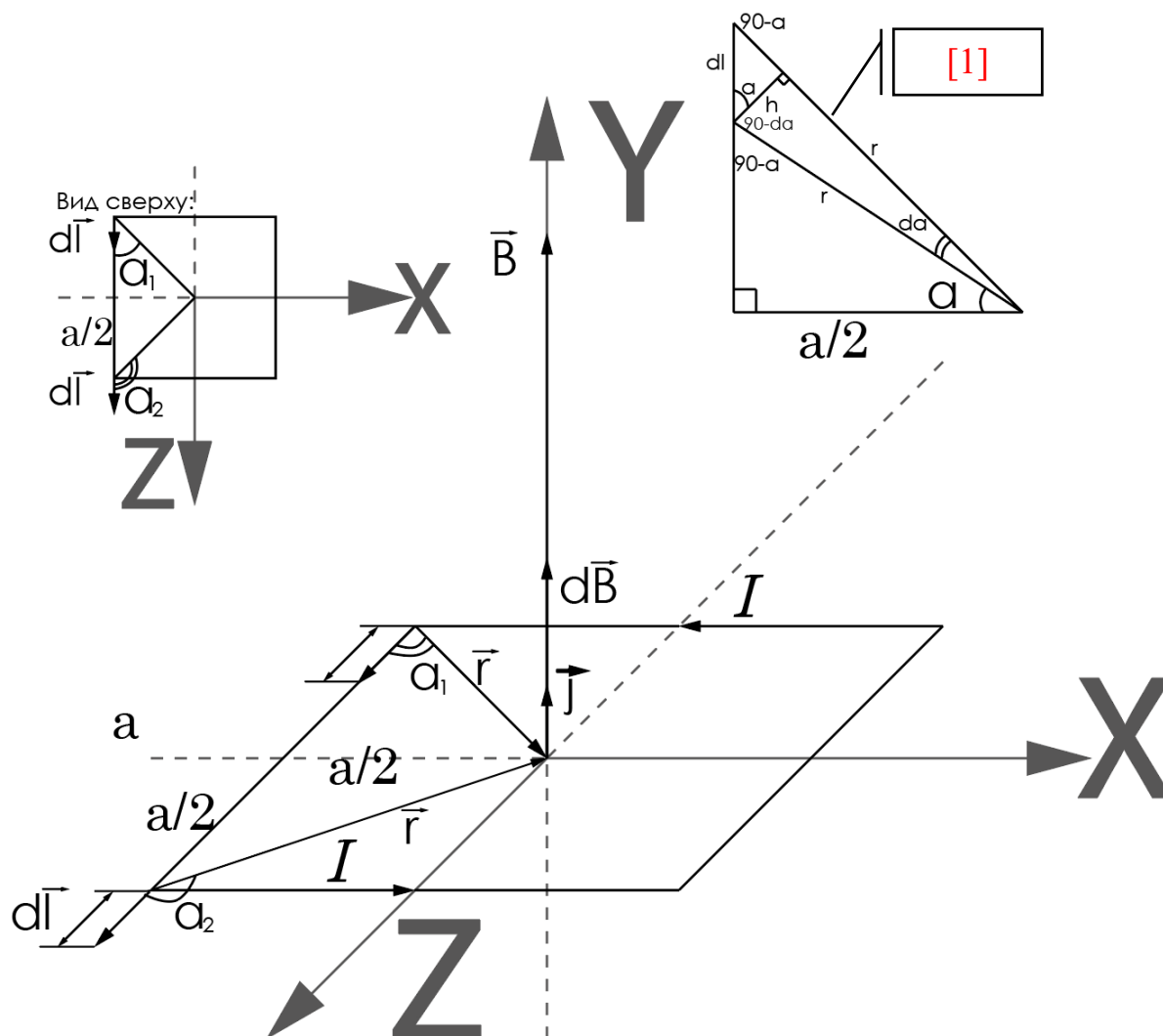
Направление \vec{B} можно определить по правилу правой руки (правого винта):

$$\vec{B} = \frac{q \mu_0 \omega}{2\pi (R_2 + R_1)} \vec{j}$$

Ответ: $\vec{B} = \frac{q \mu_0 \omega}{2\pi (R_2 + R_1)} \vec{j}$.

16.15

Определить магнитную индукцию квадратной рамки со стороной $a = 100$ мм, если по рамке течет ток $I = 2$ А.



Дано:

Квадратная
рамка,

$a = 100$ мм

$I = 2$ А

$\vec{B} = ?$

Примечания:

Решение:

Каждое ребро рамки разобьём на промежутки dl :

Тогда по закону Био — Савара — Лапласа каждая сторона порождает вектор магнитной индукции:

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 I [\vec{dl}, \vec{r}]}{4\pi r^3}; dB = \frac{\mu_0 I \sin \alpha}{4\pi r^2} dl$$

$$[1] \cos \alpha = \frac{h}{r}; d\alpha = \sin \alpha d\alpha = \frac{h}{r} \rightarrow dl = \frac{h}{\cos \alpha} = \frac{r d\alpha}{\cos \alpha}$$

1.

На выносном
треугольнике
нарушен масштаб
для наглядности и
использована
малость угла $d\alpha$
относительно угла
 α , т.е.

$$\alpha \pm d\alpha \approx \alpha$$

А также
тригонометрическое
свойство:

$$\cos(90^\circ + \alpha) =$$

$$= \sin \alpha$$

$$\sin(90^\circ + \alpha) =$$

$$= \cos \alpha$$

Ответ: $\vec{B} = \frac{2\mu_0 I \sqrt{2}}{\pi a} \vec{j}$.

$$[1] \cos \alpha = \frac{a}{2r} \rightarrow r = \frac{a}{2 \cos \alpha}$$

$$dB = \frac{\mu_0 I \sin \alpha}{4\pi r^2} d\alpha = \frac{\mu_0 I \sin \alpha}{2\pi a} \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} =$$

$$B_1 = \int dB = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} (-\cos \alpha \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2}) =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi a} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} (\cos 45^\circ - \cos 135^\circ) =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\mu_0 I \sqrt{2}}{2\pi a}$$

Всего сторон 4, значит:

$$B = 4B_1 = \frac{2\mu_0 I \sqrt{2}}{\pi a}$$

Направление \vec{B} можно определить по правилу правой
руки (правого винта):

$$\vec{B} = \frac{2\mu_0 I \sqrt{2}}{\pi a} \vec{j}$$

16.25

Прямой длинный провод на одном из участков переходит в полуокружность радиусом R . По проводу проходит ток I . Определить магнитную индукцию \vec{B} поля в центре полуокружности.

Дано:

Пр.дл.пров., R, I $\vec{B} - ?$

Примечания:

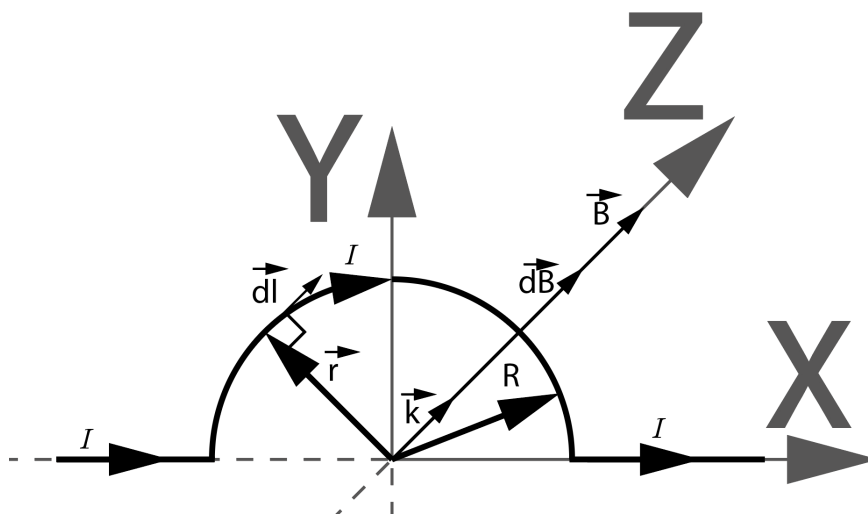
1.

Мы «идём по проводнику» от о до половины длины окружности:

$$\frac{2\pi r}{2} = \pi r$$

Решение:

Разобьём проводник на три участка: 1, 2, 3 – до полуокружности, полуокружность, после полуокружности.



По закону Био — Савара — Лапласа:

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 I [\vec{dl}, \vec{r}]}{4\pi r^3}; dB = \frac{\mu_0 I \sin \alpha}{4\pi r^2} dl$$

Для участков 1 и 3: $\vec{dl} \parallel \vec{r} \rightarrow [\vec{dl}, \vec{r}] = 0$, иначе говоря $\sin \alpha = \sin 0^\circ = 0 - \text{const} \rightarrow \vec{dB} = 0 \rightarrow \vec{B}_1 = \vec{B}_3 = 0$

Для участка 2:

$\sin \alpha = \sin 90^\circ = 1 - \text{const}, r = R - \text{const} \rightarrow$

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} dl; B = \int dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi r} dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} l \Big|_0^{2\pi r}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} 2\pi r = \frac{\mu_0 I}{2r}$$

Направление \vec{B} можно определить по правилу правой руки (правого винта):

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2r} \vec{j}$$

Ответ: $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2r} \vec{j}$.

16.45

Вычислить циркуляцию магнитной индукции вдоль контура, охватывающего прямые бесконечные токи $I_1 = 10 \text{ A}$, $I_2 = 15 \text{ A}$, проходящие в одном направлении, и тока $I_3 = 20 \text{ A}$, проходящего в противоположном направлении.

Дано:

$$I_1 = 10 \text{ A}$$

$$I_2 = 15 \text{ A}$$

$$I_3 = 20 \text{ A}$$

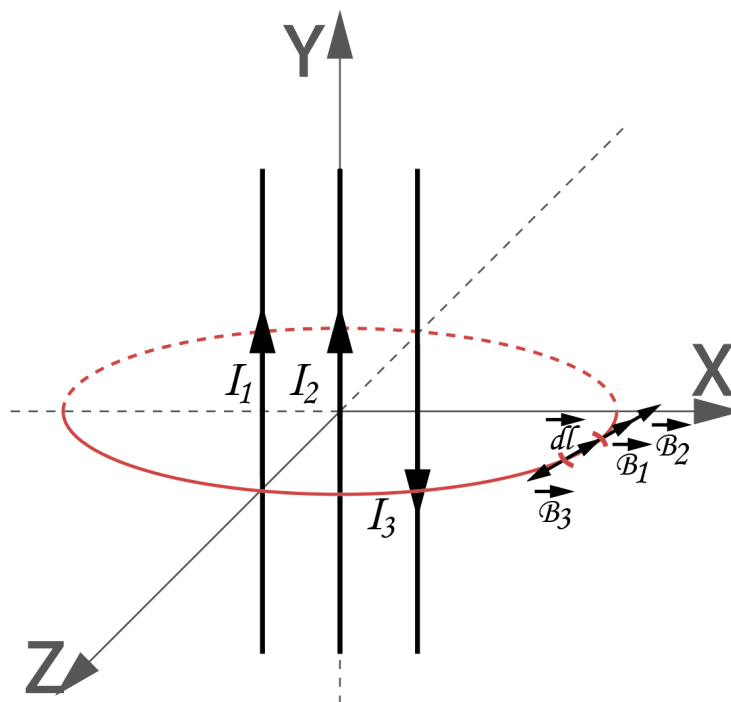
$$\oint_{(L)} (\vec{B}, d\vec{l}) = ?$$

Примечания:

1.

Возьмем округлый контур, радиусом значительно превышающим расстояние между проводниками с токами (на рисунке это плохо заметно) – т.о. можно будет считать, что контур совпадает с силовыми линиями каждого из полей, создаваемых токами

Решение:

[1]

$$\oint_{(L)} (\vec{B}, d\vec{l}) = \oint_{(L)} ((\vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3), d\vec{l}) =$$

$$= \oint_{(L)} (\vec{B}_1, d\vec{l}) + \oint_{(L)} (\vec{B}_2, d\vec{l}) + \oint_{(L)} (\vec{B}_3, d\vec{l}) =$$

$$= \oint_{(L)} B_1 \cos \alpha_1 dl + \oint_{(L)} B_2 \cos \alpha_2 dl + \oint_{(L)} B_3 \cos \alpha_3 dl$$

Где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – углы между $d\vec{l}$ и $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \vec{B}_3$ соответственно, из рисунка:

$$= \oint_{(L)} B_1 \cos 0^\circ dl + \oint_{(L)} B_2 \cos 0^\circ dl + \oint_{(L)} B_3 \cos 180^\circ dl$$

$$= \oint_{(L)} B_1 dl + \oint_{(L)} B_2 dl - \oint_{(L)} B_3 dl = \mu_0(I_1 + I_2 - I_3)$$

Ответ: $\oint_{(L)} (\vec{B}, d\vec{l}) = \mu_0(I_1 + I_2 - I_3)$.

17.48

На железном тороидальном сердечнике со средним радиусом R имеется обмотка с общим числом витков N . В сердечнике сделана поперечная прорезь малой ширины b ($b \ll 2\pi R$). При токе силой I в обмотке магнитная индукция в зазоре B . Пренебрегая рассеиванием магнитного потока на краях зазора, определить магнитную проницаемость железа μ в этих условиях.

Дано:

Тороид.сердеч.,
 $R, N, B \ll 2\pi R$
 I, B

 μ —?

Примечания:

1.

Просто вывод
 формулы.

Можно удалить
 всё между
 первым и
 последним
 знаками
 равенства.

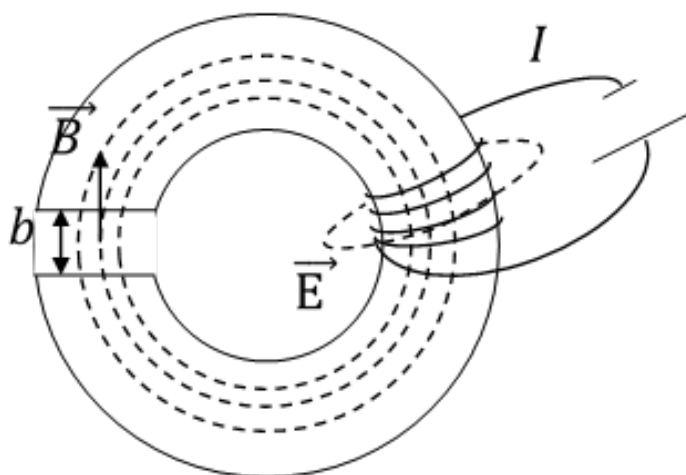
2.

Ибо у нас N
 витков обмотки,
 каждый из
 которых
 проводит ток
 силой I .

3.

Из формулы [1]
 следует, что

Решение:



В сердечнике (тороиде):

$B_1, H_1, \mu_{\text{сер}} = \mu$ — нам надо найти

В зазоре:

$B_2, H_2, \mu_{\text{зазора}} = 1$ — ибо это воздух

[P.S.] — постскриптум надо будет переписать полностью

$$\text{Т.к. } \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \chi \vec{H} \rightarrow \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0(\chi+1)} = \frac{\vec{B}}{\mu\mu_0} \quad [1]$$

При переходе к скалярам получим:

$$H_1 = \frac{B_1}{\mu_{\text{серд}}\mu_0} = \frac{B}{\mu\mu_0}; H_2 = \frac{B_2}{\mu_{\text{зазора}}\mu_0} = \frac{B}{\mu_0}$$

Воспользуемся теоремой о циркуляции вектора \vec{H} :

$$\oint_{(L)} \vec{H} d\vec{l} = \sum I_i = N * I \quad [2]$$

Выберем в качестве замкнутого контура кольцо в сердечнике, радиусом R .

$$\oint_{(L)} \vec{H} d\vec{l} = \oint_{(L_{\text{зазора}})} \vec{H}_2 d\vec{l} + \oint_{(L_{\text{серд}})} \vec{H}_1 d\vec{l} =$$

$\vec{H} \uparrow \vec{B}$, а из

рисунка, – что

\vec{B} направленно

по касательной к

кольцу, т.е. для

любой точки на

кольце:

$\vec{B} \uparrow \vec{H} \uparrow \vec{dl} \rightarrow$

$\cos \alpha = \cos \beta =$

$= \cos 0^\circ = 1$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^b H_2 \cos \alpha \, dl + \int_b^{2\pi R} H_1 \cos \beta \, dl \quad [3] \\
 &= \int_0^b H_2 \, dl + \int_b^{2\pi R} H_1 \, dl = H_2 b + H_1 (2\pi R - b) = \\
 &= \frac{B}{\mu_0} \left(b + \frac{2\pi R - b}{\mu} \right) = \frac{B}{\mu_0} \left(b + \frac{2\pi R - b}{\mu} \right) = NI \rightarrow \\
 &\frac{2\pi R - b}{\mu} = \frac{NI\mu_0}{B} - b = \frac{NI\mu_0 - bB}{B} \\
 &\mu = \frac{B(2\pi R - b)}{NI\mu_0 - bB} \\
 &\text{Т.к. } b \ll 2\pi R \rightarrow 2\pi R - b \approx 2\pi R, \text{ тогда} \\
 &\mu = \frac{2\pi RB}{NI\mu_0 - bB}
 \end{aligned}$$

Ответ: $\mu = \frac{2\pi RB}{NI\mu_0 - bB}$.

P.S.:

Ток, проходящий по обмотке, обуславливает существование внутри тороида магнитного поля, силовые линии которого замкнуты (рис. ↑↑↑). Учитывая, что $2\pi R \gg b$, можем считать величину $B = \text{const}$ во всех точках сечения тороида, а так как воздушный зазор в тороиде узкий, то рассеянием линий индукции можно пренебречь.

При переходе через границу раздела двух сред нормальная составляющая напряженности магнитного поля H изменяется, в то время как нормальная составляющая вектора магнитной индукции B остается неизменной, т.е.

$$B_1 = B_2 = B = \text{const}; H_1 \neq H_2$$

17.49

Постоянный магнит изготовлен в виде кольца с узким зазором между полюсами. Средний диаметр кольца D , ширина зазора $b \ll \pi D$. Индукция магнитного поля в зазоре B . Пренебрегая рассеиванием магнитного потока на краях зазора, определить напряженность магнитного поля H внутри магнита.

Дано:

Кольц.магнит.,
 $D, b \ll \pi D, B$ $H = ?$

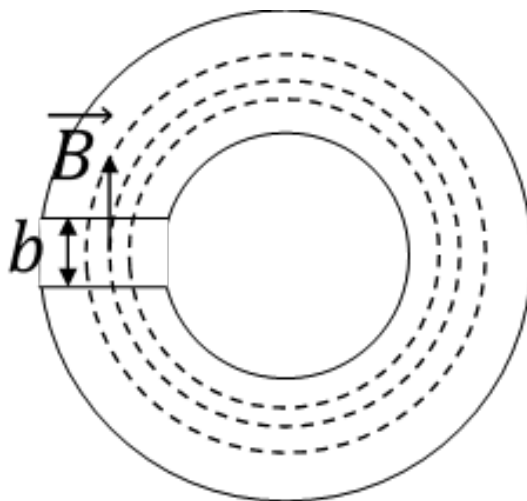
Примечания:

1.
Просто вывод формулы.
Можно удалить всё между первым и последним знаками равенства.

2.
Около магнита нет ничего, что бы могло проводить электрический ток,
 $\rightarrow \sum I_i = 0$

3.
Из формулы [1] следует, что $\vec{H} \uparrow \vec{B}$, а из

Решение:

 B магните (кольце): $B_1, H_1 = H$ — нам надо найти B зазоре: $B_2, H_2, \mu_{\text{зазора}} = 1$ — ибо это воздух

При переходе через границу раздела двух сред нормальная составляющая напряженности магнитного поля H изменяется, в то время как нормальная составляющая вектора магнитной индукции B остается неизменной, т.е.

$$B_1 = B_2 = B = \text{const}; H_1 \neq H_2$$

$$\text{Т.к. } \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \chi \vec{H} \rightarrow \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0(\chi+1)} = \frac{\vec{B}}{\mu\mu_0} \quad [1]$$

При переходе к скалярам, пренебрегая рассеиванием магнитного потока на краях зазора, получим:

$$H_2 = \frac{B}{\mu_{\text{зазора}}\mu_0} = \frac{B}{\mu_0}$$

Воспользуемся теоремой о циркуляции вектора \vec{H} .

$$\oint_{(L)} \vec{H} d\vec{l} = \sum I_i = 0 \quad [2]$$

Выберем в качестве замкнутого контура кольцо диаметром D (радиусом $R = D/2$).

рисунка, — что \vec{B} направленно по касательной к кольцу, т.е. для любой точки на кольце:
 $\vec{B} \uparrow \vec{H} \uparrow \vec{dl} \rightarrow$
 $\cos \alpha = \cos \beta =$
 $= \cos 0^\circ = 1$

$$\oint_{(L)} \vec{H} d\vec{l} = \oint_{(L_{\text{зазора}})} \vec{H}_2 d\vec{l} + \oint_{(L_{\text{магнита}})} \vec{H}_1 d\vec{l} =$$

$$= \int_0^b H_2 \cos \alpha dl + \int_b^{2\pi R} H_1 \cos \beta dl \quad [3]$$

$$= \int_0^b H_2 dl + \int_b^{2\pi R} H_1 dl = H_2 \int_0^b dl + H_1 \int_b^{2\pi R} dl =$$

$$= H_2 b + H_1 (2\pi R - b) = \frac{B}{\mu_0} b + H_1 (2\pi R - b)$$

$$\frac{B}{\mu_0} b + H_1 (2\pi R - b) = 0$$

$$H_1 (\pi D - b) = -\frac{B}{\mu_0} b$$

Т.к. $b \ll \pi D \rightarrow \pi D - b \approx \pi D$, тогда

$$H_1 = -\frac{Bb}{\pi D \mu_0} = H$$

Знак «-» показывает, что вектор \vec{H} внутри магнита имеет направление обратное \vec{B} .

Ответ: $H = -\frac{Bb}{\pi D \mu_0}$.

18.7

В однородном магнитном поле, индукция которого $B = 20$ мТл, расположена прямоугольная рамка $abcd$, подвижная сторона которой длиной $l = 20$ см перемещается со скоростью $v = 20$ м/с перпендикулярно к направлению поля. Найти ЭДС ε_i , индуцируемую в контуре.

Дано:

Пр.рамка $abcd$ $B = 20$ мТл $l = 20$ см $v = 20$ м/с $\varepsilon_i = ?$

Примечания:

1.

$$\alpha = \angle(\vec{B}, \vec{dS}) = \angle(\vec{B}, \vec{n})$$

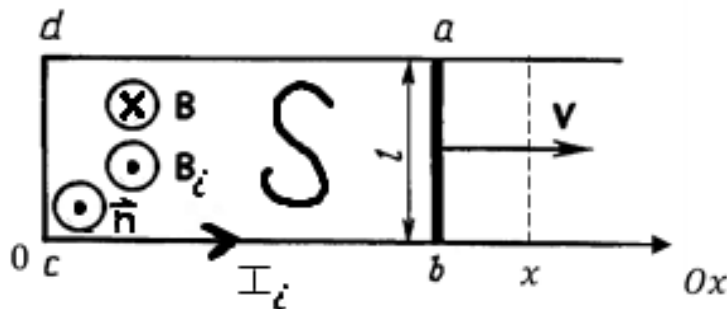
Где \vec{n} – вектор нормали к площадке S (к рамке)

Тут и далее $\vec{n} \odot$: $\rightarrow \cos \alpha =$ $= \cos 180^\circ = -1$

Можно выбрать

и $\vec{n} \otimes \rightarrow \cos \alpha =$ $= \cos 0^\circ = 1$

Решение:



По определению:

$$\varepsilon_i = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Т.к. с течением времени

$S \uparrow \rightarrow \vec{B}_i \downarrow \vec{B} \rightarrow \vec{B}_i \odot \rightarrow I_i$ течёт как бы «против часовой стрелки» по проводнику \rightarrow

 $\vec{n} \odot$ [P.S.][1]Найдём по определению $d\Phi$:

$$d\Phi = \vec{B} d\vec{S} = \vec{B} \vec{n} dS = B \cos \alpha dS = -B dS [1]$$

Введя ось Ox :

$$S = f(x) = lx$$

$$dS = d(lx) = ldx$$

$$d\Phi = -B l dx$$

$$\varepsilon_i = - \frac{d\Phi}{dt} = Bl \frac{dx}{dt} = Blv$$

Ответ: $\varepsilon_i = Blv$ [может быть и $\varepsilon_i = -Blv$ в зависимости от выбранного направления \vec{n}].

P.S.:

 \odot – к себе \otimes – от себя

19.43

Плоская электромагнитная волна $\vec{E} = \vec{E}_{max} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})$ распространяется в вакууме. Найти модуль вектора Пойнтинга $|\vec{P}|$ этой волны.

Дано:

Плоская ЭМВ [1]

$$\vec{E} = \vec{E}_{max} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})$$

$$\varepsilon = \mu = 1 [2]$$

$|\vec{P}| = ?$

Примечания:

1.

ЭМВ – электромагнитная волна

2.

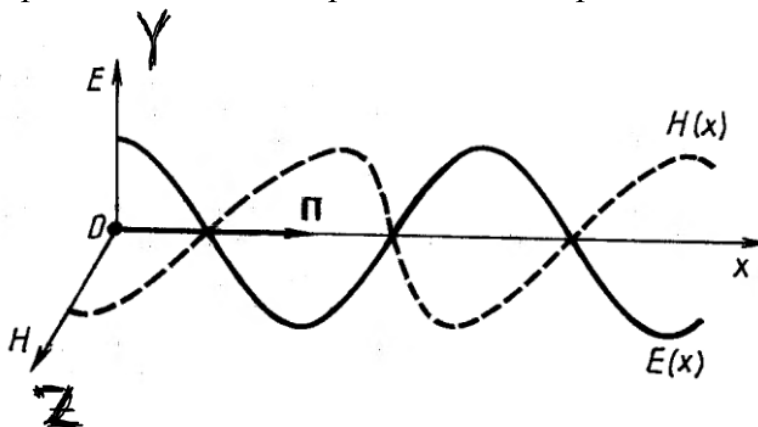
Константы для вакуума

3.

Можно оставить в таком виде, а можно продолжить и рассчитать $\langle |\vec{P}| \rangle$, соответственно и $\langle \cos^2(\omega t - kx) \rangle$ – смотрите следующую задачу.

Решение:

Направим ось Ox в направлении вектора \vec{k} .



Используем связь \vec{E} и \vec{H} для плоской ЭМВ:

$$\vec{E} = \vec{E}_{max} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}) \rightarrow \vec{H} = \vec{H}_{max} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})$$

А так же связь \vec{E}_{max} и \vec{H}_{max} для плоской ЭМВ:

$$\vec{E}_{max} \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0} = \vec{H}_{max} \sqrt{\mu \mu_0}$$

$$|\vec{P}| = |\vec{E} \times \vec{H}| = E_{max} H_{max} \cos^2(\omega t - \vec{k}\vec{r}) =$$

$$= E_{max}^2 \frac{\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0}}{\sqrt{\mu \mu_0}} \cos^2(\omega t - \vec{k}\vec{r}) =$$

$$= E_{max}^2 \cos^2(\omega t - \vec{k}\vec{r}) \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} =$$

Учитывая, что:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \rightarrow \mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \rightarrow$$

$$|\vec{P}| = E_{max}^2 \varepsilon_0 c \cos^2(\omega t - \vec{k}\vec{r})$$

Из приведенного рисунка очевидно:

$$\vec{k}\vec{r} = kr \cos 0^\circ = kr = kx \rightarrow$$

$$|\vec{P}| = \varepsilon_0 c E_{max}^2 \cos^2(\omega t - kx) [3]$$

Ответ: $|\vec{P}| = \varepsilon_0 c E_{max}^2 \cos^2(\omega t - kx)$. Либо $\langle |\vec{P}| \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_{max}^2$.

19.44

Плоская гармоническая линейно-поляризованная волна распространяется в вакууме. Амплитуда напряженности электрической составляющей волны E_{max} . Определить среднюю за период колебания плотность потока энергии $|\bar{\Pi}|$.

Дано:

Плоская ЭМВ [1]

$$\vec{E} = \vec{E}_{max} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})$$

$$\varepsilon = \mu = 1 \text{ [2]}$$

$$\langle |\bar{\Pi}| \rangle = ?$$

Примечания:

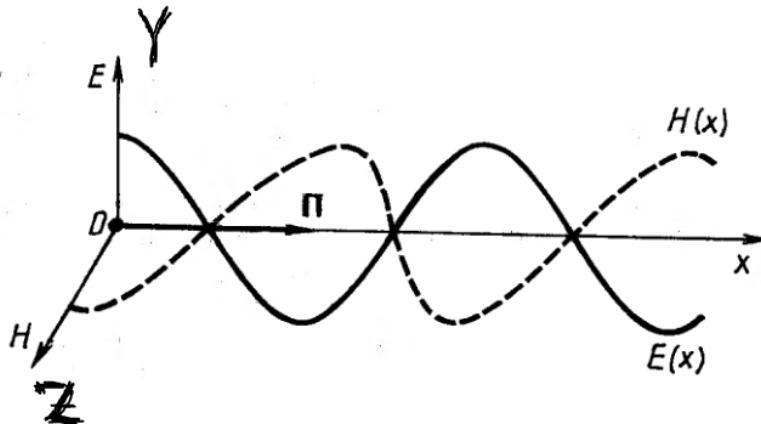
1.

ЭМВ – электро-магнитная волна

2.

Константы для вакуума

Решение:

Направим ось Ox в направлении вектора \vec{k} .Используем связь \vec{E} и \vec{H} для плоской ЭМВ:

$$\vec{E} = \vec{E}_{max} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}) \rightarrow \vec{H} = \vec{H}_{max} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})$$

А так же связь \vec{E}_{max} и \vec{H}_{max} для плоской ЭМВ:

$$\vec{E}_{max} \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0} = \vec{H}_{max} \sqrt{\mu \mu_0}$$

$$|\bar{\Pi}| = |\vec{E} \times \vec{H}| = E_{max} H_{max} \cos^2(\omega t - \vec{k}\vec{r}) =$$

$$= E_{max}^2 \frac{\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0}}{\sqrt{\mu \mu_0}} \cos^2(\omega t - \vec{k}\vec{r}) =$$

$$= E_{max}^2 \cos^2(\omega t - \vec{k}\vec{r}) \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} =$$

Учитывая, что:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \rightarrow \mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \rightarrow$$

$$|\bar{\Pi}| = E_{max}^2 \varepsilon_0 c \cos^2(\omega t - \vec{k}\vec{r})$$

Из приведенного рисунка очевидно:

$$\vec{k}\vec{r} = kr \cos 0^\circ = kr = kx \rightarrow$$

$$|\bar{\Pi}| = \varepsilon_0 c E_{max}^2 \cos^2(\omega t - kx)$$

$$\langle |\bar{\Pi}| \rangle = \langle \varepsilon_0 c E_{max}^2 \cos^2(\omega t - kx) \rangle =$$

$$= \varepsilon_0 c E_{max}^2 \langle \cos^2(\omega t - kx) \rangle$$

Определим $\langle \cos^2(\omega t - kx) \rangle$ за период (T) – время за которое α изменяется с 0 до 2π :

$$\langle f(\alpha) \rangle = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(\alpha) d\alpha \rightarrow$$

$$\langle \cos^2(\alpha) \rangle = \frac{1}{2\pi - 0} \int_0^{2\pi} \cos^2(\alpha) d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha) \frac{1}{2} d(2\alpha) =$$

$$= \frac{1}{8\pi} (2\alpha + \sin 2\alpha \Big|_0^{2\pi}) = \frac{4\pi}{8\pi} = \frac{1}{2} \rightarrow$$

$$\langle |\vec{\Pi}| \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_{max}^2$$

Ответ: $\langle |\vec{\Pi}| \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_{max}^2$.

20.1

Показать, что если разность двух складываемых колебаний беспорядочно меняется во времени, то средняя по времени энергия результирующего колебания равна сумме энергий исходных колебаний.

Указание: Считать, что за время наблюдения все значения разности фаз равновероятны.

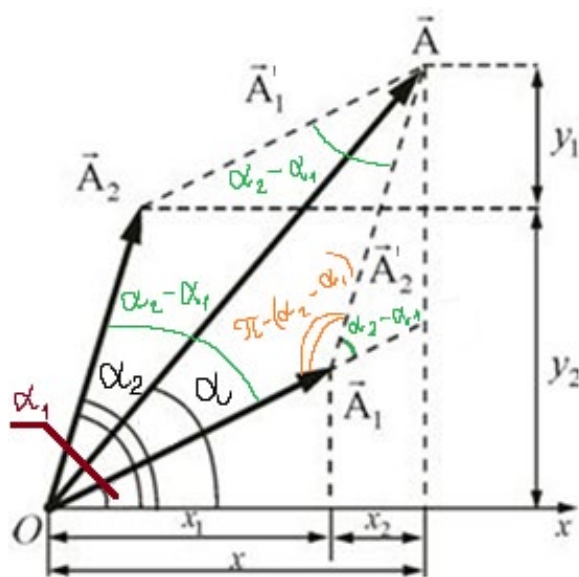
Пусть две волны одинаковой частоты распространяются в пространстве с одной скоростью, накладываются друг на друга, и возбуждают в некоторой точке пространства колебания одинакового направления:

$$\xi_1 = A_1 \cos(\omega t - \alpha_1)$$

$$\xi_2 = A_2 \cos(\omega t - \alpha_2)$$

Поставим в соответствие каждому из колебаний свой вектор (\vec{A}_1, \vec{A}_2).

Для определения амплитуды результирующего колебания в данной точке воспользуемся сложением векторов методом векторных диаграмм (рисунок):



Результирующее колебание будет вектором амплитуды \vec{A} , вращающимся вокруг точки O с той же угловой скоростью ω , что и \vec{A}_1 и \vec{A}_2 . Результирующее колебание должно быть также гармоническим с частотой ω :

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$$

На рисунке рассмотрим параллелограмм, образованный \vec{A}_1, \vec{A}_2 (и их параллельными переносами \vec{A}'_1, \vec{A}'_2 , на рисунке – пунктирные линии, параллельные \vec{A}_1 и \vec{A}_2 соответственно).

Угол между \vec{A}_1 и \vec{A}_2 будет равен: $\angle(\vec{A}_1, \vec{A}_2) = \alpha_2 - \alpha_1 = \angle(\vec{A}'_1, \vec{A}'_2)$

Тогда $\angle(\vec{A}_1, \vec{A}'_2) = \angle(\vec{A}_2, \vec{A}'_1) = \pi - (\alpha_2 - \alpha_1)$

Рассмотрим треугольник, образованный сторонами \vec{A}_1, \vec{A}'_2 и \vec{A} :

Зная стороны и угол между \vec{A}_1 и \vec{A}_2' запишем теорему косинусов для стороны \vec{A} :

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos(\pi - (\alpha_2 - \alpha_1)) = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)$$

Найдём среднее значение квадрата результирующей амплитуды:

$$\begin{aligned} \langle A^2 \rangle &= \langle A_1^2 \rangle + \langle A_2^2 \rangle + \langle 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1) \rangle = \\ &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \langle \cos(\alpha_2 - \alpha_1) \rangle = \end{aligned}$$

Так как все значения разности фаз $\delta = \alpha_2 - \alpha_1$ равновероятны, то можно найти среднее значение функции $\cos \delta$:

$$\langle \cos \delta \rangle = \frac{1}{2\pi - 0} \int_0^{2\pi} \cos(\delta) d\delta = \frac{\sin \delta}{2\pi} \Big|_0^{2\pi} = \frac{\sin 2\pi}{2\pi} = 0$$

Таким образом:

$$\langle A^2 \rangle = A_1^2 + A_2^2;$$

При рассмотрении распространения волны в однородной среде можно считать, что интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды волны: $I \sim A^2$ следовательно:

$$\langle I \rangle = I_1 + I_2$$

Т.к. интенсивность волны связана с плотностью энергии соотношением $I = \omega v$, а скорость результирующей волны равна скорости исходных, то

$$\langle \omega \rangle v = \omega_1 v + \omega_2 v \rightarrow \langle \omega \rangle = \omega_1 + \omega_2$$

А плотность энергии связана с энергией, переносимой волной и равномерно распределённой в пространстве (*а в нашем случае энергия равномерно распределена в пространстве*), соотношением:

$\omega = W/V$, следовательно:

$$\frac{\langle W \rangle}{V} = \frac{W_1}{V} + \frac{W_2}{V} \rightarrow$$

$$\langle W \rangle = W_1 + W_2$$

Что и требовалось показать.

20.2

На сколько полос Δm сместится интерференционная картина, если на пути одного из интерферирующих лучей ввести пластинку толщиной $d = 3,67$ мкм и показателем преломления $n = 1,6$? Длина волны $\lambda = 550$ нм.

Дано:

$$d = 3,67 \text{ мкм}$$

$$n = 1,6$$

$$\lambda = 550 \text{ нм}$$

 $\Delta m = ?$

Примечания:

1.

Часть

оптического

пути, пройденная

вторым лучом в

воздухе

2.

Часть

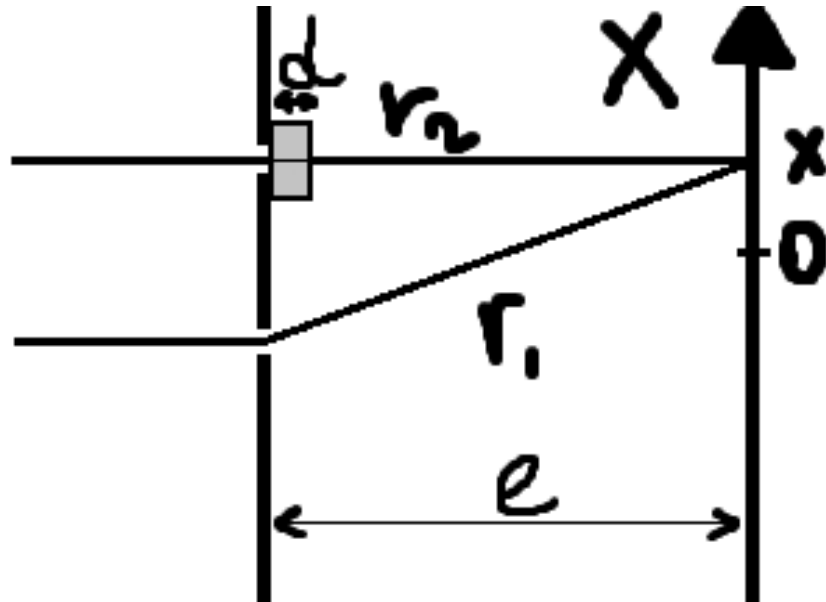
оптического

пути, пройденная

вторым лучом в

пластинке

Решение:



Разность фаз двух падающих лучей равна:

$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} (l_1 - l_2)$, где l_1 и l_2 – оптическая длина путей, пройденных 1-м и 2-м лучами соответственно.

В случае, когда оба луча распространяются в воздухе, не встречая препятствий, оптические пути лучей равны геометрическим: $l_1 = r_1$; $l_2 = r_2$

$$\Delta\varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} (r_1 - r_2)$$

В случае, когда второй луч проходит через пластинку толщиной d , его оптическая длина пути:

$$l_2 = \overbrace{r_2 - d}^{[1]} + \overbrace{d \cdot n}^{[2]} = r_2 + d(n - 1)$$

Для первого луча всё ещё $l_1 = r_1$

Тогда разность фаз:

$$\Delta\varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} (r_1 - r_2 - d(n - 1))$$

В отсутствие пластинки, центральный максимум интерференционной картины будет расположен в точке $x=0$; а при её наличии – будет смещён в

некоторую точку, для которой разность фаз будет равна нулю:

$$\Delta\varphi_2 = 0 \rightarrow r_1 - r_2 - d(n - 1) = 0 \rightarrow$$

$$r_1 - r_2 = d(n - 1)$$

Таким образом, точка, в которую сместится центральный максимум определена разностью геометрических путей $r_1 - r_2 = d(n - 1)$

В случае, когда оба луча распространяются в воздухе, не встречая препятствий, такая разность путей $\Delta = r_1 - r_2 = d(n - 1)$ будет соответствовать интерференционному максимуму:

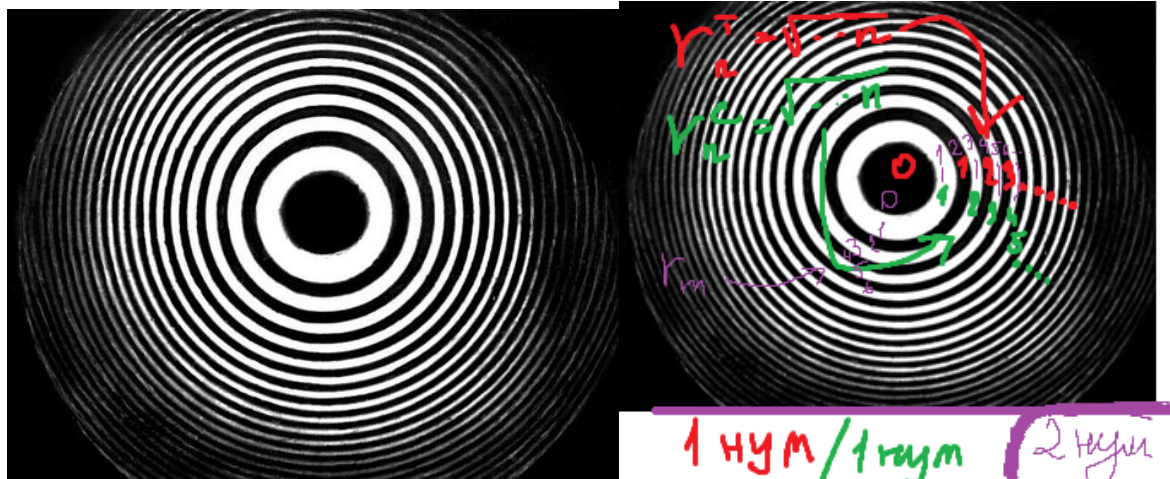
$$\Delta = m\lambda \rightarrow m = \frac{\Delta}{\lambda} = m = \frac{d(n - 1)}{\lambda}$$

$$\Delta m = m_{\text{нов.макс.}} - m_0 = m - 0 = \frac{d(n - 1)}{\lambda}$$

Ответ: $\Delta m = \frac{d(n-1)}{\lambda}$.

20.21

Найти расстояние l между десятым и одиннадцатым кольцом Ньютона, наблюдаемым в отраженном свете, если расстояние между вторым и третьим $l_1 = 3$ мм. Свет падает нормально.



Дано:

Кольца Ньютона

$$l_1 = d(r_2, r_3) = 3 \text{ мм}$$

$$l = d(r_{10}, r_{11}) - ?$$

Примечания:

1.

Ответ в любом случае не сходится с указанным в ключах

2.

Мы переходим от порядковой нумерации (только светлые/тёмные кольца) к фактической

Решение:

Проблема в этой задаче в том, что хз как авторы нумеруют кольца: какое первое, какое второе и т.д. в зависимости от нумерации радиусы колец могут считаться по разным формулам.

Положим нумерация следующая: 0-е кольцо: тёмный круг в центре – место касания пластинки и линзы, 1-е кольцо – первое тёмное кольцо после центра, n -е кольцо – n -е тёмное кольцо.

Воспользуемся формулой для радиусов тёмных колец Ньютона:

$$r_m = \sqrt{R\lambda m}, \begin{cases} m = 0 - \text{место касания пл. и лин.} \\ m = 1, 2, 3 \dots - \text{тёмные кольца} \end{cases}$$

$$l_1 = d(r_2, r_3) = r_3 - r_2 = \sqrt{R\lambda}\sqrt{3} - \sqrt{R\lambda} = \sqrt{R\lambda}(\sqrt{3} - 1) \rightarrow \sqrt{R\lambda} = \frac{l_1}{\sqrt{3} - 1}$$

$$l = d(r_{10}, r_{11}) = r_{11} - r_{10} = \sqrt{R\lambda}\sqrt{11} - \sqrt{R\lambda}\sqrt{10} = \sqrt{R\lambda}(\sqrt{11} - \sqrt{10}) = \frac{\sqrt{11} - \sqrt{10}}{\sqrt{3} - 1} l_1 = 1,456 \text{ мм} [1]$$

НО 75% УВЕРЕН НУМЕРАЦИЯ ТАКАЯ:

0-е кольцо: тёмный круг в центре – место касания пластинки и линзы, 1-е кольцо – первое светлое

m-нумерации
(смешанной: и
светлые и
тёмные кольца)
где n –
выражается
через m.

Для чётных:

$$n = \frac{m}{2}$$

Для нечётных:

$$n = \frac{m+1}{2}$$

кольцо сразу после центра, 2-е кольцо – тёмное
кольцо сразу после первого и т.д., то:

Для тёмных колец [2]:

$$r_n = \sqrt{R\lambda n}, \begin{cases} n = 0 - \text{место касания пл. и лин.} \\ n = 1, 2, 3 \dots - \text{пор. номер тёмн. кольца} \end{cases}$$

$$r_m = \sqrt{\frac{R\lambda m}{2}}, \begin{cases} m = 0 - \text{место касания пл. и лин.} \\ m = 2, 4, 6 \dots - \text{физ. номер тёмн. кольца} \end{cases}$$

Для нечётных колец [2]:

$$r_n = \sqrt{R\lambda \frac{2n-1}{2}}, n = 1, 2, 3 - \text{пор. номер св. кольца}$$

$$r_m = \sqrt{R\lambda \frac{\frac{2(m+1)}{2} - 1}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{R\lambda m}{2}}, m = 1, 3, 5 \dots - \text{физ. номер светл. кольца}$$

Таким образом для любого кольца:

$$r_m = \sqrt{\frac{R\lambda m}{2}}, m - \text{фактический номер кольца (св/т)}$$

$$l_1 = d(r_2, r_3) = r_3 - r_2 = \sqrt{R\lambda} \sqrt{3/2} - \sqrt{R\lambda} =$$

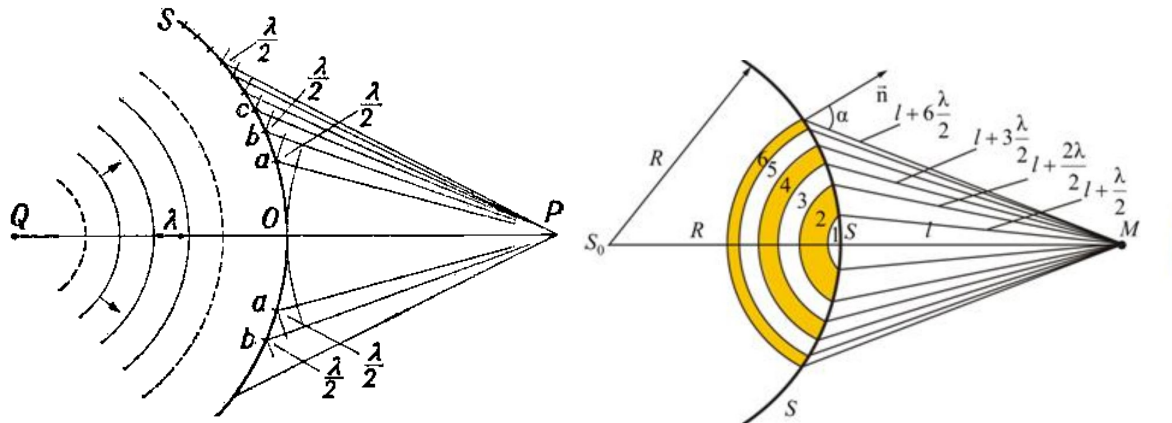
$$= \sqrt{R\lambda} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1 \right) \rightarrow \sqrt{R\lambda} = \frac{l_1}{\sqrt{\frac{3}{2}} - 1}$$

$$l = d(r_{10}, r_{11}) = r_{11} - r_{10} = \sqrt{R\lambda} \sqrt{\frac{11}{2}} - \sqrt{R\lambda} \sqrt{\frac{10}{25}} =$$

$$= \sqrt{R\lambda} \left(\sqrt{\frac{11}{2}} - \sqrt{\frac{10}{25}} \right) = \frac{\sqrt{\frac{11}{2}} - \sqrt{\frac{10}{25}}}{\sqrt{\frac{3}{2}} - 1} l_1 = 1,456 \text{ мм} [1]$$

Ответ: $l = \frac{\sqrt{11} - \sqrt{10}}{\sqrt{3} - 1} l_1 = 0,633 \text{ мм}$; либо $l = \frac{\sqrt{\frac{11}{2}} - \sqrt{\frac{10}{25}}}{\sqrt{\frac{3}{2}} - 1} l_1 = 1,456 \text{ мм}$.

Небольшая теория перед задачами 21.XX



Зоны Френеля – участки, на которые можно разбить поверхность световой (или звуковой) волны для вычисления результатов дифракции света (или звука). Впервые этот метод применил О. Френель в 1815—19. Суть метода такова. Пусть от светящейся точки Q (*рис. выше*) распространяется сферическая волна и требуется определить характеристики волнового процесса, вызванного ею в точке P . Разделим поверхность волны S на кольцевые зоны; для этого проведём из точки P сферы радиусами PO , $Pa = PO + \lambda/2$, $Pb = Pa + \lambda/2$, $Pc = Pb + \lambda/2$, (O — точка пересечения поверхности волны с линией PQ ; λ — длина световой волны). Кольцеобразные участки поверхности волны, «вырезаемые» из неё этими сферами, и называется З. Ф. Волновой процесс в точке P можно рассматривать как результат сложения колебаний, вызываемых в этой точке каждой З. Ф. в отдельности. Амплитуда таких колебаний медленно убывает с возрастанием номера зоны (отсчитываемого от точки O), а фазы колебаний, вызываемых в P смежными зонами, противоположны. Поэтому волны, приходящие в P от двух смежных зон, гасят друг друга, а действие зон, следующих через одну, складывается. Если волна распространяется, не встречая препятствий, то, как показывает расчёт, её действие (сумма воздействий всех З. Ф.) эквивалентно действию половины первой зоны. Если же при помощи экрана с прозрачными концентрическими участками выделить части волны, соответствующие, например, N нечётным зонам Френеля, то действие всех выделенных зон сложится и амплитуда колебаний $U_{\text{нечёт}}$ в точке P возрастёт в $2N$ раз, а интенсивность света в $4N^2$ раз, причём освещённость в точках, окружающих P , уменьшится. То же получится при выделении только чётных зон, но фаза суммарной волны $U_{\text{чёт}}$ будет иметь противоположный знак. Такие зонные экраны (т. н. линзы

Френеля) находят применение не только в оптике, но и в акустике и радиотехнике — в области достаточно малых длин волн, когда размеры линз получаются не слишком большими (сантиметровые радиоволны, ультразвуковые волны). Метод З. Ф. позволяет быстро и наглядно составлять качественное, а иногда и довольно точное количественное представление о результате дифракции волн при различных сложных условиях их распространения. Он применяется поэтому не только в оптике, но и при изучении распространения радио- и звуковых волн для определения эффективной трассы «луча», идущего от передатчика к приёмнику; для выяснения того, будут ли при данных условиях играть роль дифракционные явления; для ориентировки в вопросах о направленности излучения, фокусировке волн и т.п.

21.1 (a)

Монохроматический свет ($\lambda = 550$ нм) падает нормально на диафрагму с круглым отверстием $R = 1/5$ мм. На каком расстоянии от диафрагмы находится точка наблюдения если отверстие равно двум зонам Френеля.

ОБЯЗАТЕЛЬНО ПРОЧИТАТЬ ТЕОРИЮ!

Дано:

$$\lambda = 550 \text{ нм}$$

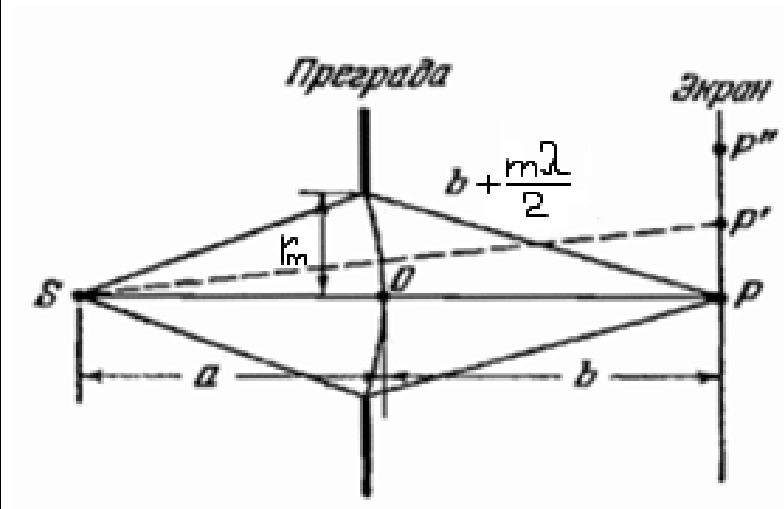
$$v = c$$

$$R = 1/5 \text{ мм}$$

$$m = 2$$

$$b = ?$$

Решение:



$$r_m^2 + b^2 = \left(b + m \frac{\lambda}{2}\right)^2 = b^2 + bm\lambda + \frac{m^2 \lambda^2}{4}$$

Используя малость λ относительно b пренебрегаем

$$\lambda^2: \lambda \ll b \rightarrow \lambda^2 \approx 0$$

$$r_m^2 + b^2 = b^2 + bm\lambda$$

$$r_m^2 = bm\lambda \rightarrow$$

$$b = \frac{r_m^2}{m\lambda} = \frac{R^2}{2\lambda}$$

$$\text{Ответ: } b = \frac{R^2}{2\lambda}.$$

21.1 (6)

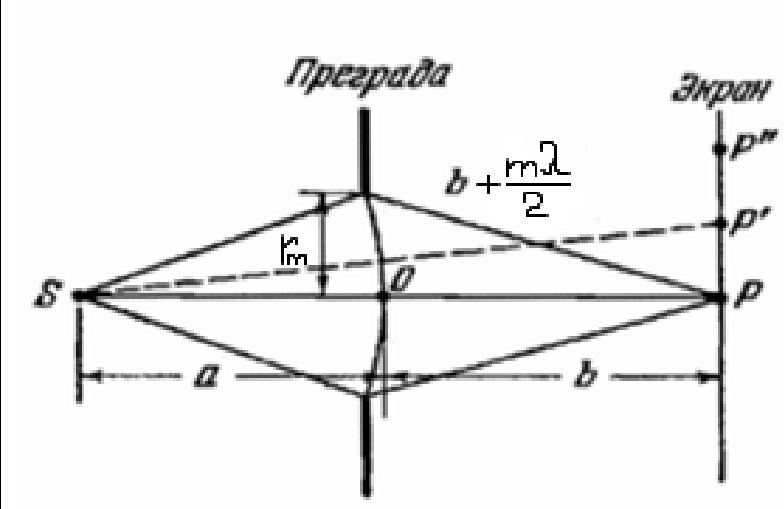
Монохроматический свет ($\lambda = 550$ нм) падает нормально на диафрагму с круглым отверстием $R = 1/5$ мм. На каком расстоянии от диафрагмы находится точка наблюдения если отверстие равно пяти зонам Френеля.

ОБЯЗАТЕЛЬНО ПРОЧИТАТЬ ТЕОРИЮ!

Дано:
 $\lambda = 550$ нм
 $v = c$
 $R = 1/5$ мм
 $m = 5$

 $b = ?$

Решение:



$$r_m^2 + b^2 = \left(b + m \frac{\lambda}{2}\right)^2 = b^2 + bm\lambda + \frac{m^2 \lambda^2}{4}$$

Используя малость λ относительно b пренебрегаем

$$\lambda^2: \lambda \ll b \rightarrow \lambda^2 \approx 0$$

$$r_m^2 + b^2 = b^2 + bm\lambda$$

$$r_m^2 = bm\lambda \rightarrow$$

$$b = \frac{r_m^2}{m\lambda} = \frac{R^2}{5\lambda}$$

Ответ: $b = \frac{R^2}{5\lambda}$.

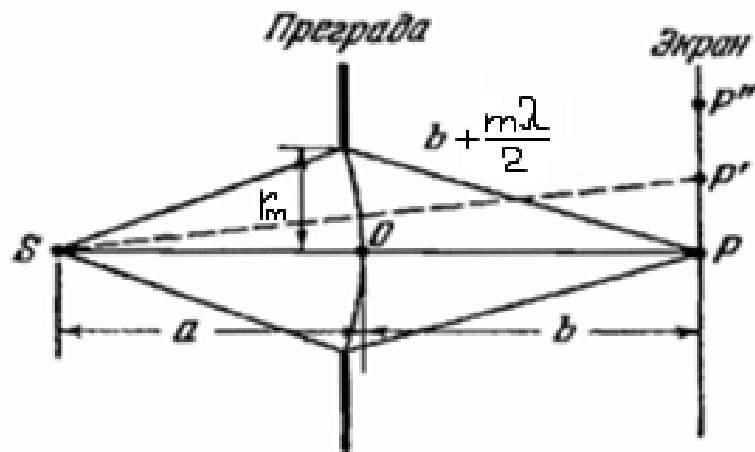
21.3

Найти радиус девятой зоны Френеля для плоского волнового фронта, если радиус четвертой зоны Френеля $r_4 = 3$ мм.

ОБЯЗАТЕЛЬНО ПРОЧИТАТЬ ТЕОРИЮ!

Дано:
 $r_4 = 3$ мм
 $r_9 = ?$

Решение:



$$r_m^2 + b^2 = \left(b + m\frac{\lambda}{2}\right)^2 = b^2 + bm\lambda + \frac{m^2\lambda^2}{4}$$

Используя малость λ относительно b пренебрегаем

$$\lambda^2: \lambda \ll b \rightarrow \lambda^2 \approx 0$$

$$r_m^2 + b^2 = b^2 + bm\lambda$$

$$r_m^2 = bm\lambda \rightarrow$$

$$r_4 = \sqrt{4b\lambda} = 2\sqrt{b\lambda} \rightarrow \sqrt{b\lambda} = \frac{r_4}{2}$$

$$r_9 = \sqrt{9b\lambda} = 3\sqrt{b\lambda}$$

$$r_9 = \frac{3}{2}r_4$$

Ответ: $r_9 = \frac{3}{2}r_4$.

21.5

На диафрагму с отверстием радиусом $r = 1,5$ мм нормально падает монохроматическая плоская световая волна. Когда расстояние от диафрагмы до установленного за ней экрана $b = 0,58$ м, в центре дифракционной картины наблюдается максимум интерференции. При увеличении расстояния на $\Delta b = 0,11$ м максимум интенсивности сменяется минимумом. Определить длину волны λ света.

ОБЯЗАТЕЛЬНО ПРОЧИТАТЬ ТЕОРИЮ!

Дано:	Решение:
$r = 1,5$ мм	
$b = 0,58$ м	
$\Delta b = 0,11$ м	
$\lambda = ?$	
Примечания:	
1.	
С точки зрения хода рассуждений и формул всё верно, но если подставить значения, то m окажется чётной, чего не должно было произойти → скорее всего проблема в заданных числах	$r_n^2 + b^2 = \left(b + n \frac{\lambda}{2}\right)^2 = b^2 + bn\lambda + \frac{n^2 \lambda^2}{4}$ <p>Используя малость λ относительно b пренебрегаем λ^2: $\lambda \ll b \rightarrow \lambda^2 \approx 0$</p> $r_n^2 + b^2 = b^2 + bn\lambda$ $r_n^2 = bn\lambda \rightarrow \lambda = \frac{r_n^2}{bn}$ <p>Рассмотрим начальное состояние оптической системы (достижение <u>максимума</u> в центре дифракционной картины):</p> $\lambda = \frac{r^2}{bm}, m - \text{номер последней зоны (край отверстия как ограничение; номер должен быть нечётным)}$ <p>Рассмотрим конечное состояние оптической системы (достижение <u>минимума</u> в центре дифракционной картины):</p> $\lambda = \frac{r^2}{b'n} = \frac{r^2}{(b+\Delta b)n}, n - \text{номер последней зоны (край отверстия как ограничение; номер должен быть чётным)}$
2.	
Альтернатива: выразить через	

m , подставить и
найти n :

$$n = \frac{b}{\Delta b} \rightarrow$$

$$\lambda = \frac{r^2}{b'n} =$$

$$= \frac{r^2 \Delta b}{b(b + \Delta b)}$$

Мораль: все
дороги ведут в
Рим.

Ответ: $\lambda = \frac{r^2 \Delta b}{b(b + \Delta b)}$.

Из равенств очевидно, что:

$$mb = (b + \Delta b)n = nb + n\Delta b$$

Т.к. мы перешли из состояния максимума в состояние минимума, то предположим: $n = m - 1$, тогда:

$$\cancel{mb} = \cancel{mb} - b + m - \Delta b$$

$$m = \frac{b + \Delta b}{\Delta b} \text{ [1][2]}$$

Откуда:

$$\lambda = \frac{r^2}{bm} = \frac{r^2 \Delta b}{b(b + \Delta b)}$$

Дополнительная теория:

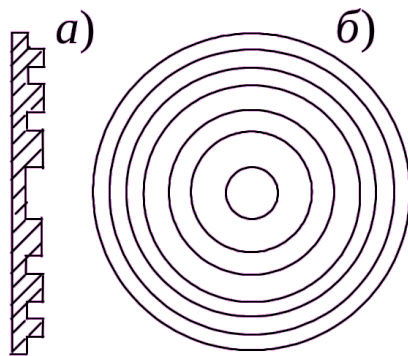


Рис. 5.2. Фазовая зонная пластинка: вид сбоку (а); вид прямо (б)

Зонная пластинка — плоскопараллельная стеклянная пластинка с выгравированными концентрическими окружностями, радиус которых совпадает с радиусами зон Френеля. **Зонная пластинка** «выключает» чётные либо нечётные зоны [Френеля](#), чем исключает взаимную интерференцию (погашение) от соседних зон, что приводит к увеличению освещённости точки наблюдения. Таким образом, зонная пластинка действует как *собирающая линза*. Также зонная пластинка представляет

собой простейшую [голограмму](#) — голограмму точки.

По Савельеву:

Колебания от четных и нечетных зон Френеля находятся в противофазе и, следовательно, взаимно ослабляют друг друга. Если поставить на пути [световой волны](#) пластинку, которая перекрывала бы все четные или нечетные зоны, то интенсивность света в точке Р резко возрастает. Такая пластинка, называемая зонной, действует подобно собирающей линзе. На рис. 127.6 изображена пластинка, перекрывающая четные зоны. Еще большего эффекта можно достичь, не перекрывая четные (или нечетные) зоны, а изменяя фазу их колебаний на π .

Это можно осуществить с помощью прозрачной пластинки, толщина которой в местах, соответствующих четным или нечетным зонам, отличается на надлежащим образом подобранную величину. Такая пластинка называется фазовой зонной пластинкой.

По сравнению с перекрывающей зоны амплитудной зонной пластинкой фазовая дает дополнительное увеличение амплитуды в два раза, а интенсивности света — в четыре раза.

21.7

Расстояние от источника до зонной пластинки $a = 10$ м, расстояние от пластины до места наблюдения $b = 10$ м. Длина волны $\lambda = 450$ нм. Найти радиус четвертой зоны Френеля r_4 .

ОБЯЗАТЕЛЬНО ПРОЧИТАТЬ ТЕОРИЮ! И доп теорию!

Дано:

$$a = 10 \text{ м}$$

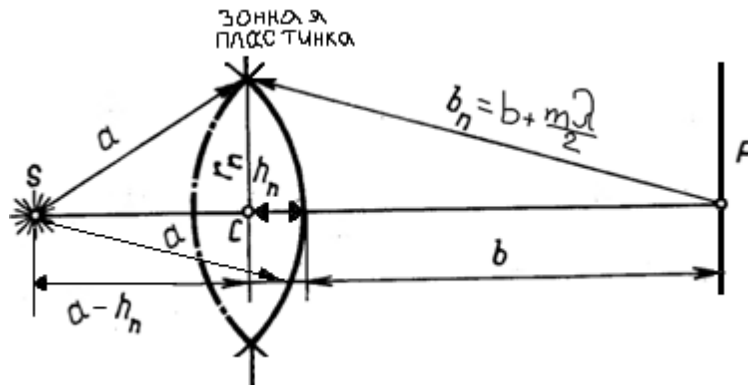
$$b = 10 \text{ м}$$

$$\lambda = 450 \text{ нм}$$

$$n = 4$$

$$r_4 = ?$$

Решение:



$$r_n^2 + (b + h_n)^2 = \left(b + n \frac{\lambda}{2}\right)^2 = b^2 + bn\lambda + \frac{n^2 \lambda^2}{4}$$

$$r_n^2 + b^2 + h_n^2 + 2bh_n = b^2 + bn\lambda + \frac{n^2 \lambda^2}{4}$$

Используя малость λ и h_n относительно b пренебрегаем λ^2 и h_n^2 :

$$\lambda \ll b \rightarrow \lambda^2 \approx 0; h_n \ll b \rightarrow h_n^2 \approx 0$$

$$r_n^2 + b^2 + 2bh_n = b^2 + bn\lambda$$

Из другого треугольника:

$$a^2 = (a - h_n)^2 + r_n^2 = a^2 + h_n^2 - 2ah_n + r_n^2$$

Используя малость h_n относительно a пренебрегаем h_n^2 :

$$h_n \ll a \rightarrow h_n^2 \approx 0$$

$$r_n^2 = 2ah_n \rightarrow h_n = \frac{r_n^2}{2a}$$

$$r_n^2 + 2b \frac{r_n^2}{2a} = bn\lambda \rightarrow r_n^2 = \frac{bn\lambda}{1 + b/a} = \frac{abn\lambda}{a + b}$$

$$r_n = \sqrt{\frac{abn\lambda}{a + b}}; r_4 = \sqrt{\frac{4ab\lambda}{a + b}} = 2 \sqrt{\frac{ab\lambda}{a + b}}$$

Ответ: $r_4 = 2 \sqrt{\frac{ab\lambda}{a + b}}$.

Дополнительная теория:

Площадь зоны Френеля:

$$\Delta S_m = S_m - S_{m-1} = \frac{\pi ab \lambda}{a+b}.$$

Площади зон Френеля примерно одинаковы (особенно при малом m). Расстояние b_m от зоны до точки Р медленно растет с номером зоны m . Угол φ между нормалью к элементам зоны и направлением на точку Р также растет с m . Все это приводит к тому, что амплитуда A_m колебания, возбуждаемого m -й зоной в точке Р, монотонно убывает с ростом m . Даже при очень больших m , когда площадь зоны начинает заметно расти с m (см. (127.3)), убывание множителя $K(\varphi)$ перевешивает рост ΔS так что A_m продолжает убывать. Таким образом, амплитуды колебаний, возбуждаемых в точке Р зонами Френеля, образуют монотонно убывающую последовательность:

$$A_1 > A_2 > A_3 > \dots > A_{m-1} > A_m > A_{m+1} > \dots$$

Фазы колебаний, возбуждаемых соседними зонами, отличаются на π . Поэтому амплитуда A результирующего колебания в точке Р может быть представлена в виде

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots \quad (127.6)$$

В это выражение все амплитуды от нечетных зон входят с одним знаком, а от четных зон — с другим.

Запишем выражение (127.6) в виде

$$A = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \left(\frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2} \right) + \dots$$

Вследствие монотонного убывания A_m можно приближенно считать, что

$$A_m = \frac{A_{m-1} + A_{m+1}}{2}.$$

Тогда выражения в скобках будут равны нулю, и формула (127.7) упрощается следующим образом:

$$A = A_1/2. \quad (127.8)$$

Согласно формуле (127.8) амплитуда, создаваемая в некоторой точке Р всей сферической волновой поверхностью, равна половине амплитуды, создаваемой одной лишь центральной зоной. Если на пути волны

поставить непрозрачный экран с отверстием, оставляющим открытой только центральную зону Френеля, амплитуда в точке Р будет равна A_1 т. е. в два раза превзойдет амплитуду (127.8). Соответственно интенсивность света в точке Р будет в этом случае в четыре раза больше, чем в отсутствие преград между точками S и Р.

Теперь решим задачу о распространении света от источника S к точке Р методом графического сложения амплитуд. Разобьем волновую поверхность на кольцевые зоны, аналогичные зонам Френеля, но гораздо меньшие по ширине (разность хода от краев зоны до точки Р составляет одинаковую для всех зон малую долю λ). Колебание, создаваемое в точке Р каждой из зон, изобразим в виде вектора, длина которого равна амплитуде колебания, а угол, образуемый вектором с направлением, принятым за начало отсчета, дает начальную фазу колебания (см. § 55 1-го тома). Амплитуда колебаний, создаваемых такими зонами в точке Р, медленно убывает при переходе от зоны к зоне. Каждое следующее колебание отстает от предыдущего по фазе на одну и ту же величину. Следовательно, векторная диаграмма, получающаяся при сложении колебаний, возбуждаемых отдельными зонами, имеет вид, показанный на рис. 127.3.

Если бы амплитуды, создаваемые отдельными зонами, были одинаковыми, конец последнего из изображенных на рис. 127.3 векторов совпал бы с началом первого вектора. В действительности значение амплитуды, хотя и очень слабо, но убывает, вследствие чего векторы образуют не замкнутую фигуру, а [ломаную](#) спиралевидную линию.

В пределе при стремлении ширины кольцевых зон к нулю (количество их будет при этом неограниченно возрастать) векторная диаграмма примет вид спирали, закручивающейся к точке С (рис. 127.4).

Фазы колебаний в точках 0 и 1 отличаются на π (бесконечно малые векторы, образующие спираль, направлены в этих точках в противоположные стороны). Следовательно, участок спирали 0 — 1 соответствует первой зоне Френеля. [Вектор](#), проведенный из точки О в точку 1 (рис. 127.5, а), изображает колебание, возбуждаемое в точке Р этой зоны. Аналогично, вектор, проведенный из точки 1 в точку 2 (рис. 127.5, б), изображает колебание, возбуждаемое второй зоной Френеля. Колебания от первой и второй зон находятся в противофазе; в соответствии с этим векторы 01 и 12 направлены в противоположные стороны.

Колебание, возбуждаемое в точке Р всей волновой поверхностью, изображается вектором ОС (рис. 127.5, в). Из рисунка видно, что амплитуда в этом случае равна половине амплитуды, создаваемой первой зоной. Этот результат мы получили ранее алгебраически (см. формулу (127.8)). Заметим, что колебание, возбуждаемое внутренней половиной первой зоны Френеля, изображается вектором ОВ (рис. 127.5, г). Таким образом, действие внутренней половины первой зоны Френеля не эквивалентно половине действия первой зоны. [Вектор](#) ОВ в $\sqrt{2}$ раз больше вектора ОС. Следовательно, интенсивность света, создаваемая внутренней половиной первой зоны Френеля, в два раза превышает интенсивность, создаваемую всей волновой поверхностью.

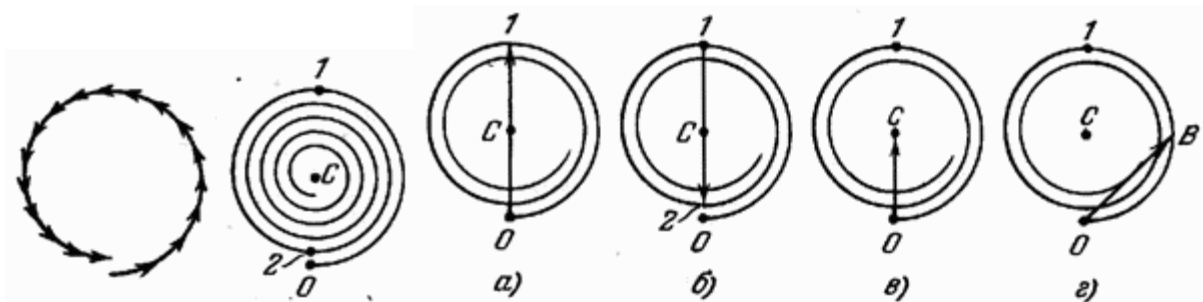


Рис. 127.3. Рис. 127.4.

Рис. 127.5.

Колебания от четных и нечетных зон Френеля находятся в противофазе и, следовательно, взаимно ослабляют друг друга. Если поставить на пути [световой волны](#) пластинку, которая перекрывала бы все четные или нечетные зоны, то интенсивность света в точке Р резко возрастает. Такая пластинка, называемая зонной, действует подобно собирающей линзе. На рис. 127.6 изображена пластинка, перекрывающая четные зоны. Еще большего эффекта можно достичь, не перекрывая четные (или нечетные) зоны, а изменяя фазу их колебаний на π .

Это можно осуществить с помощью прозрачной пластинки, толщина которой в местах, соответствующих четным или нечетным зонам, отличается на надлежащим образом подобранную величину. Такая пластинка называется фазовой зонной пластинкой.

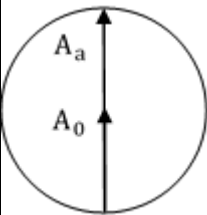
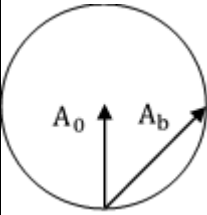
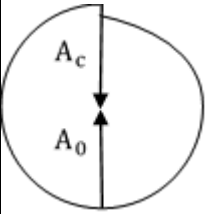
По сравнению с перекрывающей зоны амплитудной зонной пластинкой фазовая дает дополнительное увеличение амплитуды в два раза, а интенсивности света — в четыре раза.

21.8 (a, b, c)

На пути плоской монохроматической волны интенсивностью I_0 поставлен экран, а перед экраном – диафрагма с круглым отверстием. Найти интенсивность света I в центре экрана напротив отверстия, если:

- отверстие сделать равным первой зоне;
- ... половине первой зоны;
- диафрагму заменить круглым диском, который закроет только 1 зону Френеля.

ОБЯЗАТЕЛЬНО ПРОЧИТАТЬ ТЕОРИЮ! И *доп. Теорию!*

Дано:		Решение:
I_0		
$I_a, I_b, I_c - ?$		<p>Для одной зоны исходя из рисунка:</p> $A_a = 2A_0$ $A_a^2 = 4A_0^2$ <p>Т.к. $(A^2 \sim I)$, то</p> $I_a = 4I_0$
		<p>Для половины 1 зоны исходя из рисунка:</p> $A_b = \sqrt{2}A_0$ $A_b^2 = 2A_0^2$ <p>Т.к. $(A^2 \sim I)$, то</p> $I_b = 2I_0$
		<p>При закрытии 1 зоны все остальные зоны останутся на месте, спиралька Френеля крутанется на 180, но ее свойства почти сохраняются.</p> $A_c = A_0; ; A_c^2 = A_0^2; I_c = I_0$

Ответ: $I_a = 4I_0, I_b = 2I_0, I_c = I_0$.

21.31

Построить примерный график зависимости интенсивности I от $\sin \varphi$ для дифракционной решётки с числом штрихов $N = 5$ и отношением периода решётки к ширине щели $d/a = 2$.

Теория (переписать на экзамене частично):

Дифракционной решёткой называется совокупность большого числа одинаковых, отстоящих друг от друга на одно и то же расстояние щелей. Расстояние d между серединами соседних щелей называется периодом решетки.

Картины от всех щелей придутся на одно и то же место экрана (независимо от положения щели, центральный максимум лежит против центра линзы). Если бы колебания, приходящие в точку Р от различных щелей, были некогерентными, результирующая картина от N щелей отличалась бы от картины, создаваемой одной щелью, лишь тем, что все интенсивности возросли бы в N раз. Однако колебания от различных щелей являются в большей или меньшей степени когерентными; поэтому результирующая интенсивность будет отлична от $N I_\varphi$ (I_φ — интенсивность, создаваемая одной щелью; см. (129.6)).

В дальнейшем мы будем предполагать, что радиус когерентности падающей волны намного превышает длину решетки, так что колебания от всех щелей можно считать когерентными друг относительно друга. В этом случае результирующее колебание в точке Р, положение которой определяется углом φ , представляет собой сумму N колебаний с одинаковой амплитудой A_φ сдвинутых друг относительно друга по фазе на одну и ту же величину δ . Согласно формуле (124.5) интенсивность при этих условиях равна

$$I_{\text{реш}} = I_\varphi \frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)} \quad (130.1)$$

(в данном случае роль I_0 играет I_φ).

Из рис. 130.1 видно, что разность хода от соседних щелей равна

$$\Delta = d \sin \varphi$$

Следовательно, разность фаз

$$\delta = 2\pi \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \varphi, \quad (130.2)$$

где λ — длина волны в данной среде.

Подставив в формулу (130.1) выражение (129.6) для I_φ и (130.2) для δ , получим

$$I_{\text{реш}} = I_0 \frac{\sin^2(\pi b \sin\varphi/\lambda)}{(\pi b \sin\varphi/\lambda)^2} \frac{\sin^2(N\pi d \sin\varphi/\lambda)}{\sin^2(\pi d \sin\varphi/\lambda)} \quad (130.3)$$

(I_0 — интенсивность, создаваемая одной щелью против центра линзы).

Первый множитель в (130.3) обращается в нуль в точках, для которых

$$b \sin\varphi = \pm k\lambda \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (130.4)$$

В этих точках интенсивность, создаваемая каждой из щелей в отдельности, равна нулю.

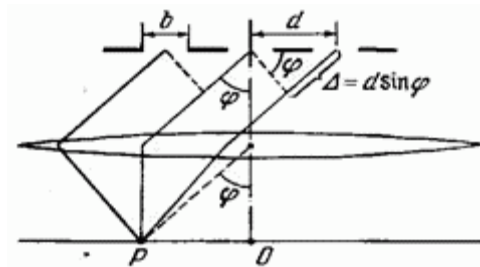


Рис. 130.1.

Второй множитель в (130.3) принимает значение N^2 в точках, удовлетворяющих условию

$$d \sin\varphi = \pm m\lambda \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (130.5)$$

Для направлений, определяемых этим условием, колебания от отдельных щелей взаимно усиливают друг друга, вследствие чего амплитуда колебаний в соответствующей точке экрана равна

$$A_{\text{max}} = NA_\varphi \quad (130.6)$$

A_φ — амплитуда колебания, посылаемого одной щелью под углом φ .

Условие (130.5) определяет положения максимумов интенсивности, называемых главными. Число m дает порядок главного максимума. Максимум нулевого порядка только один, максимумов 1-го, 2-го и т. д. порядков имеется по два: слева и справа.

Возведя равенство (130.6) в квадрат, получим, что интенсивность главных максимумов I_{max} в N^2 раз больше интенсивности I_φ создаваемой в направлении φ одной щелью:

$$I_{\max} = N^2 I_{\Phi}. \quad (130.7)$$

Кроме минимумов, определяемых условием (130.4), в промежутках между соседними главными максимумами имеется $N - 1$ добавочных минимумов. Эти минимумы возникают в тех направлениях, для которых колебания от отдельных щелей взаимно погашают друг друга. В соответствии с формулой (124.8) направления добавочных минимумов определяются условием

$$d \sin \varphi = \pm \frac{k'}{N} \lambda$$

$$(k' = 1, 2, \dots, N-1, N+1, \dots, 2N-1, 2N+1, \dots). \quad (130.8)$$

В формуле (130.8) k' принимает все целочисленные значения, кроме $N, 2N, \dots$, т. е. кроме тех, при которых условие (130.8) переходит в (130.5).

Условие (130.8) легко получить методом графического сложения колебаний. Колебания от отдельных щелей изображаются векторами одинаковой длины. Согласно (130.8) каждый из последующих векторов повернут относительно предыдущего на один и тот же угол

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \varphi = \frac{2\pi}{N} k'. \quad (130.9)$$

Поэтому в тех случаях, когда k' не является целым кратным N , мы, пристраивая начало следующего вектора к концу предыдущего, получим замкнутую [ломаную](#) линию, которая делает k' (при $k' < N/2$) или $N - k'$ оборотов (при $k' > N/2$), прежде чем конец N -го вектора упрется в начало 1-го. Соответственно результирующая амплитуда оказывается равной нулю.

Сказанное пояснено на рис. 130.2, на котором показана [сумма векторов](#) для случая $N = 9$ и значений $k' < N/2$, равных 1, 2 и $N - 1 = 8$.

Между дополнительными минимумами располагаются слабые вторичные максимумы. Число таких максимумов, приходящееся на промежуток между соседними главными максимумами, равно $N - 2$. В § 124 было показано, что интенсивность вторичных максимумов не превышает $1/22$ интенсивности ближайшего главного максимума.

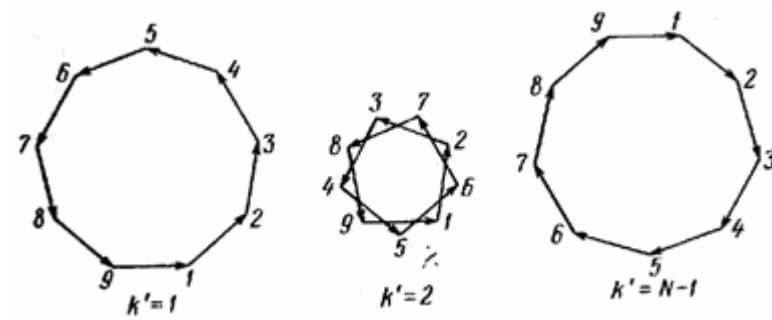


Рис. 130.2.

На рис. 130.3 приведен график функции (130.3) для $N = 4$ и $d/b = 3$. Пунктирная кривая, проходящая через вершины главных максимумов, изображает интенсивность от одной щели, умноженную на N (см. (130.7)). При взятом на рисунке отношении периода решетки к ширине щели ($d/b = 3$) главные максимумы 3-го, 6-го и т. д. порядков приходятся на минимумы интенсивности от одной щели, вследствие чего эти максимумы пропадают.

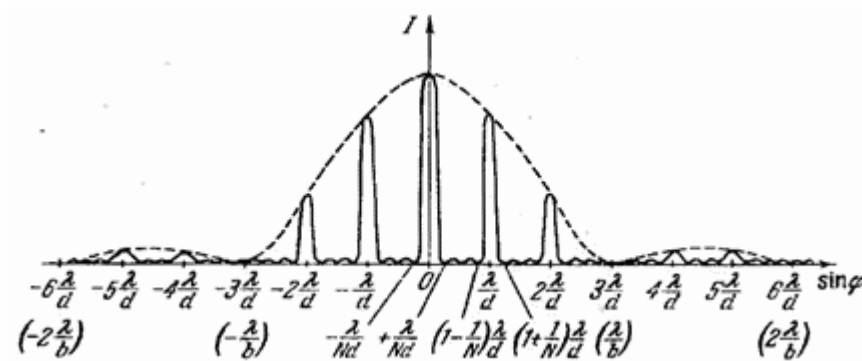


Рис. 130.3.

Решение:

Условие главных максимумов ($I \neq 0$):

$$d \sin \varphi = m\lambda; m \in Z \quad (1)$$

Условие минимумов ($I = 0$)::

$$b \sin \varphi = p\lambda, p \in Z, (p \neq 0) \quad (2)$$

Условие дополнительных минимумов:

$$d \sin \varphi = \frac{q}{N} \lambda; q \in Z, (q \neq mN, m \in Z) \quad (3)$$

Если совпадают условия (1) и (2), то максимума не будет, будет минимум.

Это зависит от N и соотношения $\frac{d}{b}$.

Между главными максимумами: $N - 1$ дополнительный минимум и $N - 2$ дополнительных максимумов.

Т.к. по условию $N = 5$ и $d/a = 2$:

$$\text{Т.к. } d = a + b \rightarrow a = d - b$$

$$\frac{d}{a} = \frac{d}{d-b} = 2 \rightarrow 2d - 2b = d \rightarrow \frac{d}{b} = 2$$

Что означает, что главные максимумы 2-го, 4-го и т.д. порядков приходятся на минимумы интенсивности от одной щели, в результате чего эти максимумы пропадают. К тому же отсюда мы получаем $b = d/2$.

Выразим $\sin \varphi$ из условий (1-3):

Условие главных максимумов ($I \neq 0$):

$$\sin \varphi = \frac{m\lambda}{d}; m \in Z \quad (1)$$

Этому условию будут удовлетворять:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$\sin \varphi$	0	$\frac{\lambda}{d}$	$2\frac{\lambda}{d}$	$3\frac{\lambda}{d}$	$4\frac{\lambda}{d}$	$5\frac{\lambda}{d}$	$6\frac{\lambda}{d}$	$7\frac{\lambda}{d}$	$8\frac{\lambda}{d}$	$9\frac{\lambda}{d}$...

Условие минимумов ($I = 0$):

$$\sin \varphi = \frac{p\lambda}{b} = \frac{2p\lambda}{d}, p \in Z, (p \neq 0) \quad (2)$$

Этому условию будут удовлетворять:

n	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	...
$\sin \varphi$	$2\frac{\lambda}{d}$	$4\frac{\lambda}{d}$	$6\frac{\lambda}{d}$	$8\frac{\lambda}{d}$	$10\frac{\lambda}{d}$	$12\frac{\lambda}{d}$	$14\frac{\lambda}{d}$	$16\frac{\lambda}{d}$	$18\frac{\lambda}{d}$	$20\frac{\lambda}{d}$...

Условие дополнительных минимумов:

$$\sin \varphi = \frac{q\lambda}{Nd} = \frac{1}{5}\frac{q\lambda}{d}; q \in Z, (q \neq mN, m \in Z) \quad (3)$$

Этому условию будут удовлетворять:

n	1/5	2/5	3/5	4/5	6/5	7/5	8/5	9/5	11/5	12/5	...
$\sin \varphi$	$\frac{1}{5}\frac{\lambda}{d}$	$\frac{2}{5}\frac{\lambda}{d}$	$\frac{3}{5}\frac{\lambda}{d}$	$\frac{4}{5}\frac{\lambda}{d}$	$1\frac{1}{5}\frac{\lambda}{d}$	$1\frac{2}{5}\frac{\lambda}{d}$	$1\frac{3}{5}\frac{\lambda}{d}$	$1\frac{4}{5}\frac{\lambda}{d}$	$2\frac{1}{5}\frac{\lambda}{d}$	$2\frac{2}{5}\frac{\lambda}{d}$...

Резюмируем:

Максимумы будут достигаться при:

$$\sin \varphi = 0, \frac{\lambda}{d}, 3\frac{\lambda}{d}, 5\frac{\lambda}{d}, 7\frac{\lambda}{d} \dots$$

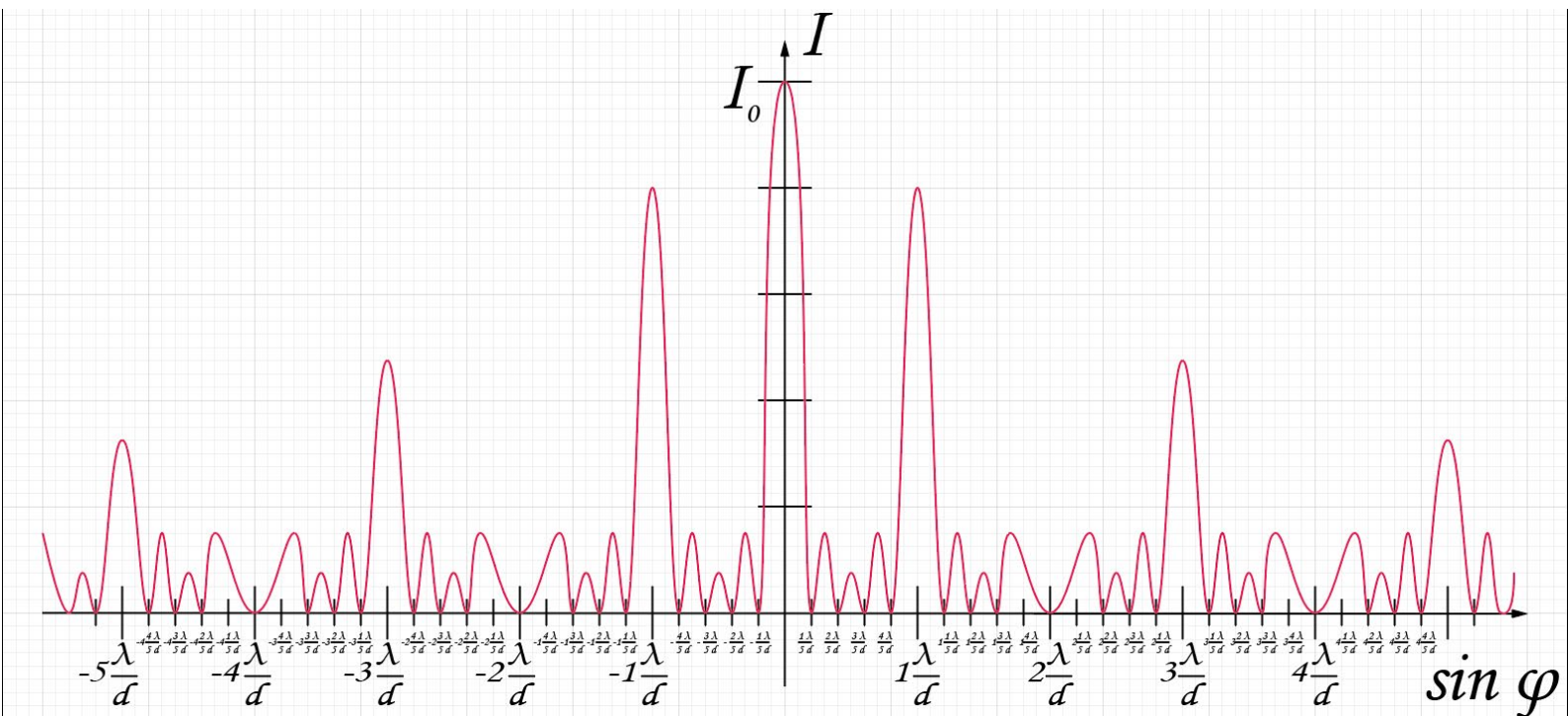
Минимумы будут достигаться при:

$$\sin \varphi = 2\frac{\lambda}{d}, 4\frac{\lambda}{d}, 6\frac{\lambda}{d}, 8\frac{\lambda}{d} \dots$$

Дополнительные минимумы будут достигаться при:

$$\sin \varphi = \frac{1}{5}\frac{\lambda}{d}, \frac{2}{5}\frac{\lambda}{d}, \frac{3}{5}\frac{\lambda}{d}, \frac{4}{5}\frac{\lambda}{d}, 1\frac{1}{5}\frac{\lambda}{d}, \dots, 1\frac{4}{5}\frac{\lambda}{d}, 2\frac{1}{5}\frac{\lambda}{d} \dots$$

По известным значениям можно построить график (приблизительно):



Мелким шрифтом (может не видно) – это пятые части $\frac{\lambda}{d}$.

Теория:

Основными характеристиками всякого спектрального прибора являются его дисперсия и разрешающая сила. Дисперсия определяет угловое или линейное расстояние между двумя спектральными линиями, отличающимися по длине волны на единицу. Угловой дисперсией называется величина $D = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} = \frac{m}{d \cos \varphi}$, где $\delta\varphi$ — угловое расстояние между спектральными линиями, отличающимися по длине волны на $\delta\lambda$. Угловая дисперсия обратно пропорциональна периоду решетки d . Чем выше порядок спектра m , тем больше дисперсия. Порядок спектра считается от центрального максимума, который представляет собой просто "белую" полосу. За ним идет спектр первого порядка, содержащий все цвета радуги. За спектром первого порядка следует спектр второго порядка, также содержащий все цвета радуги. Порядки отсчитываются в обе стороны от центрального максимума.

21.36

Найти угловую дисперсию D (в угл. мин/нм) дифракционной решетки для длины волны $\lambda = 550$ нм, в спектре третьего порядка ($m = 3$). Ширина решетки $l = 2$ см, общее число штрихов $N = 4000$. Свет падает на решетку нормально.

Дано:	Решение:
$\lambda = 550$ нм	$D = \frac{d\varphi}{d\lambda}$
$l = 2$ см	$d \sin \varphi = \frac{l}{N} \sin \varphi = m\lambda \rightarrow \sin \varphi = \frac{m\lambda N}{l}$
$N = 4000$	Продифференцируем (возьмем дифференциал от
$m = 3$	левой и правой частей) и получим:
$D = ?$	$\frac{l}{N} \cos \varphi d\varphi = m d\lambda \rightarrow \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{mN}{l \cos \varphi} = D$
	$\cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \frac{\sqrt{l^2 - (m\lambda N)^2}}{l}$
	$D = \frac{mN}{\sqrt{l^2 - (m\lambda N)^2}} = \frac{1}{\lambda \sqrt{\left(\frac{l}{m\lambda N}\right)^2 - 1}}$
Ответ: $D = \frac{1}{\lambda \sqrt{\left(\frac{l}{m\lambda N}\right)^2 - 1}}$	

22.11

Из кварца нужно вырезать пластину, параллельную оптической оси кристалла, толщиной $d = 0.6$ мм, так, чтобы плоскополяризованный луч желтого цвета ($\lambda = 0.589$ мкм), пройдя пластину, стал поляризованным по кругу. Рассчитать толщину d пластины, если для желтых лучей в кварце показатели преломления обыкновенного и необыкновенного лучей соответственно равны: $n_o = 1.544, n_e = 1.553$.

Дабы не запутаться, переименуем неизвестную толщину пластины в d' .

Дано:	Решение:
$d = 0.6$ мм $\lambda = 0.589$ мкм $n_o = 1.544$ $n_e = 1.553$	<p>Скорость света в кристалле зависит от угла α между вектором световых колебаний E и оптической осью кристалла. Так, в кварце при $\alpha = \pi/2$ скорость света наибольшая, следовательно, показатель преломления - наименьший; при $\alpha = 0$ скорость света наименьшая, $\alpha = 0$ показатель преломления — наибольший. Поэтому если на пластинку кварца, вырезанную параллельно оптической оси кристалла, падает плоскополяризованный луч, световые колебания которого имеют амплитуду E_0 и составляют угол α с оптической осью кристалла, то внутри пластинки будут распространяться по одному направлению, но с разной скоростью два луча — две компоненты поляризованного света. В одном луче — обыкновенном — колебания перпендикулярны оптической оси и имеют амплитуду $E_0 \sin \alpha$, а в другом — необыкновенном — колебания параллельны оптической оси и имеют амплитуду $E_0 \cos \alpha$. Заметим, что при $\alpha = 45^\circ$ амплитуды обоих лучей равны.</p> <p>Обладая разными скоростями, обыкновенный и необыкновенный лучи, пройдя пластинку, приобретут некоторую разность фаз φ, которая связана с оптической разностью хода лучей соотношением:</p> $\varphi = \frac{2\pi\Delta}{\lambda}$
$d' - ?$	
<p>Тут уже я ничего не могу пояснить: мои полномочия всё, оптика вне зоны моей юрисдикции.</p>	

где Δ - оптическая разность хода лучей, которую можно определить по формуле:

$$\Delta = d(n_e - n_o)$$

Подставив 2 выражение в 1 получим:

$$\varphi = \frac{2\pi d}{\lambda} (n_e - n_o)$$

В результате сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний одинаковых периодов, но разных фаз возникнут эллиптические колебания, при которых конец вектора E описывает эллипс. В частности, при равенстве амплитуд ($a = 45^\circ$) и разности фаз $\varphi = \pi/2$ эллипс превратится в окружность. При этом свет будет поляризован по кругу.

Очевидно, к тому же результату придем, предположив, что разность фаз равна

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Найдем толщину пластинки, необходимую для получения света с круговой поляризацией:

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi k = \frac{2\pi d}{\lambda} (n_e - n_o) \rightarrow k = \frac{d}{\lambda} (n_e - n_o) - \frac{1}{4}$$

Подставив в данное выражение числовые значения, найдем число k :

Так как k должно быть целым числом, то округлив результат до ближайшего целого числа (обозначим его k'), не превышающего полученное нецелое значение. Теперь подставив полученное k' , определим точное значение толщины пластинки, необходимое для круговой поляризации света:

$$d' = \frac{\lambda}{n_e - n_o} \left(k' + \frac{1}{4} \right)$$

Ответ: $d' = \frac{\lambda}{n_e - n_o} \left(k' + \frac{1}{4} \right).$

Теория:

Призма Николь (сокращённое разговорное — **николь**) — поляризационное оптическое устройство, в основе принципа действия которого лежат эффекты двойного лучепреломления и полного внутреннего отражения.

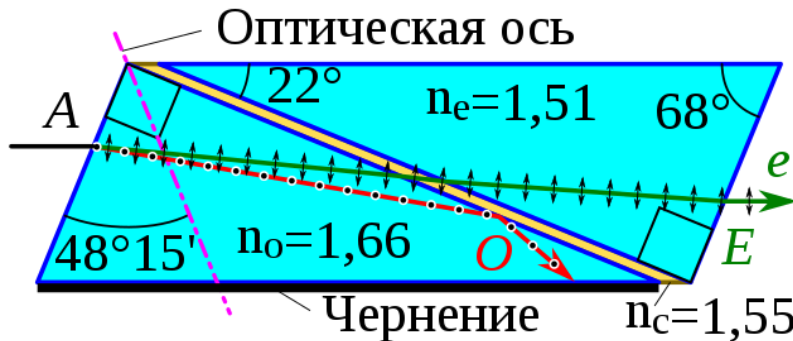
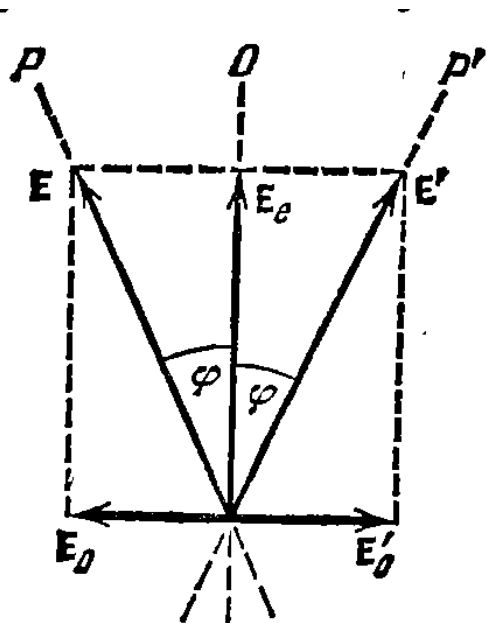


Схема устройства призмы Николь.

Красным обозначен обыкновенный (o) луч (горизонтальная поляризация, перпендикулярна плоскости рисунка), зелёным — необыкновенный (e) луч (вертикальная поляризация, параллельна плоскости рисунка). На рисунке показаны показатели преломления для обыкновенного, необыкновенного и склеивающего слоя, n_o, n_e, n_c соответственно.

Полуволновая пластинка



Обыкновенные и необыкновенные лучи с напряженностью E_o и E_e падают на кристалл полуволновой пластинки. Результирующий вектор на входе вектора E . После прохождения толщи пластинки, между векторами E_{op} и E_{ep} должна возникать разность хода $\lambda/2$ и разность фаз π . Результирующее поле будет E'_E , что соответствует повороту на угол 2φ плоскости поляризации излучения по отношению в исходному. Итог: полуволновая пластинка поворачивает плоскость поляризованного излучения на угол 2φ , где φ - угол между

плоскостью колебаний падающих лучей и осью.

22.16

Параллельный пучок монохроматического света проходит через два николя, главные плоскости которых повернуты друг относительно друга на угол $\alpha = 20^\circ$. Между николями ставится пластинка одноосного кристалла, вырезанная параллельно оптической оси и создающая разность хода $\lambda/2$ между обыкновенным и необыкновенным лучами. Какой угол β должна составлять оптическая ось пластинки с главным направлением первого николя, чтобы свет через эту систему не прошёл?

Дано:

$$\alpha = 20^\circ$$

$$\Delta = \lambda/2$$

$$\beta = ?$$

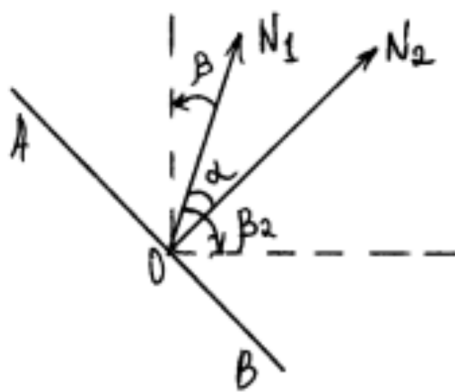
Примечание:

(Ужас ужасный,
летящий на
крыльях
ночи)^{^(дикая дичь)}.

Молитесь,
чтобы вам не
выпала эта
задача, ибо я
вообще хз как
получилось
решение.

Если же у вас
коэффициент
удачи 255+1:
единственный
чел, который
возможно
пояснит за эту
задачу – это
Олэжэ.

Решение:



Свет не пройдёт через второй николь, если электрический вектор \vec{E} будет перпендикулярен к главному сечению этого николя, т.е. лежать вдоль AB . После прохождения первого николя вектор \vec{E} световой волны будет лежать в плоскости N_1 . Пластинка в полволны (т.к. $\Delta = \lambda/2$) поворачивает плоскость колебаний вектора \vec{E} на угол 2φ , где φ - угол, который составляет ось кристалла и главное сечение николя. Таким образом, пластинка должна быть ориентированна по биссектрисе угла AON_1 или BON_2 . Это даёт два значения для угла β :

$$\beta_1 = \frac{\frac{\pi}{2} - \alpha}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$$

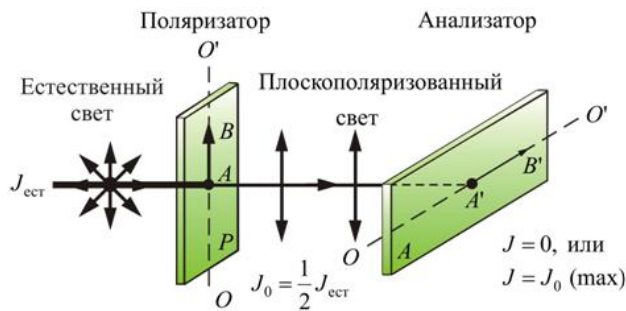
$$\beta_2 = \frac{\frac{\pi}{2} + \alpha}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{Ответ: } \beta_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}; \beta_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}.$$

ТЕОРИЯ:

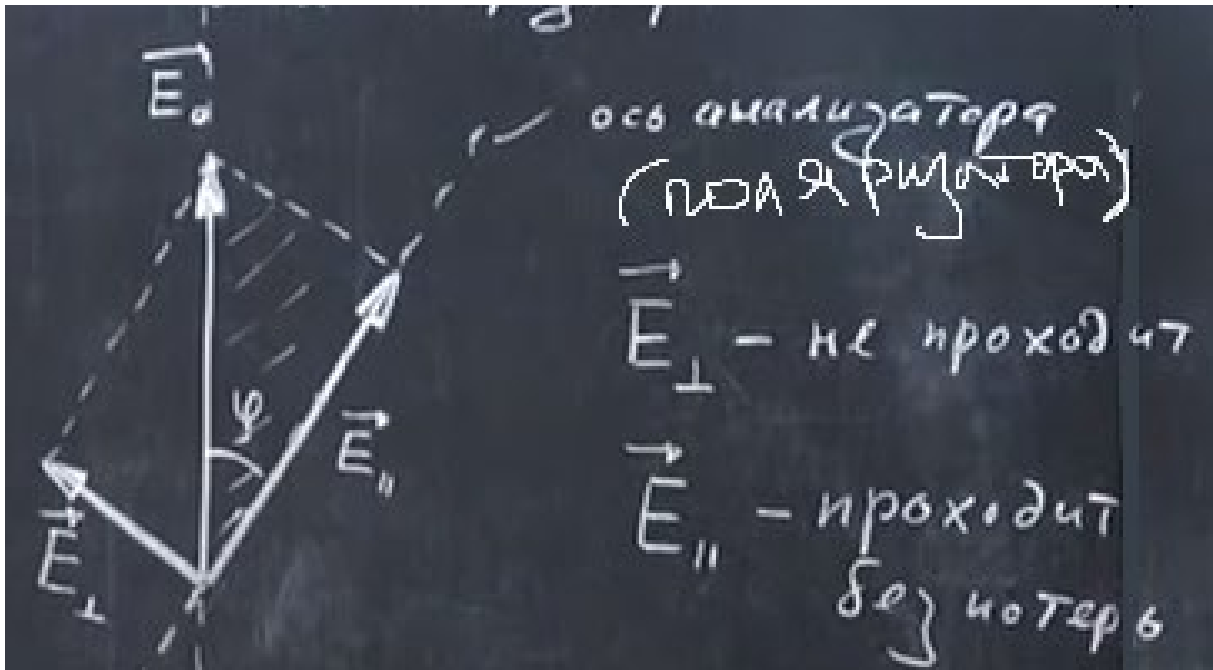
С помощью поляризатора, то есть прибора, пропускающего колебания параллельные плоскости поляризатора, получают **плоскополяризованный свет**. **Поляризатор** – оптическое устройство для получения полностью (или же частично) поляризованного света.

Анализатор – поляризатор, с помощью которого исследуются свойства поляризованного света.



Поскольку в природе отсутствует плоскополяризованный свет, то вводится количественная мера – **степень поляризации**. $P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$

Идеальная поляризация: $I_{\min} = 0$; $P = 1$;
Естественный свет: $I_{\min} = I_{\max}$; $P = 0$.



$E_{\parallel} = E \cos \varphi$ – Поляризатор (анализатор) пропустит волны сонаправленные со своей осью, т.е. только с амплитудой

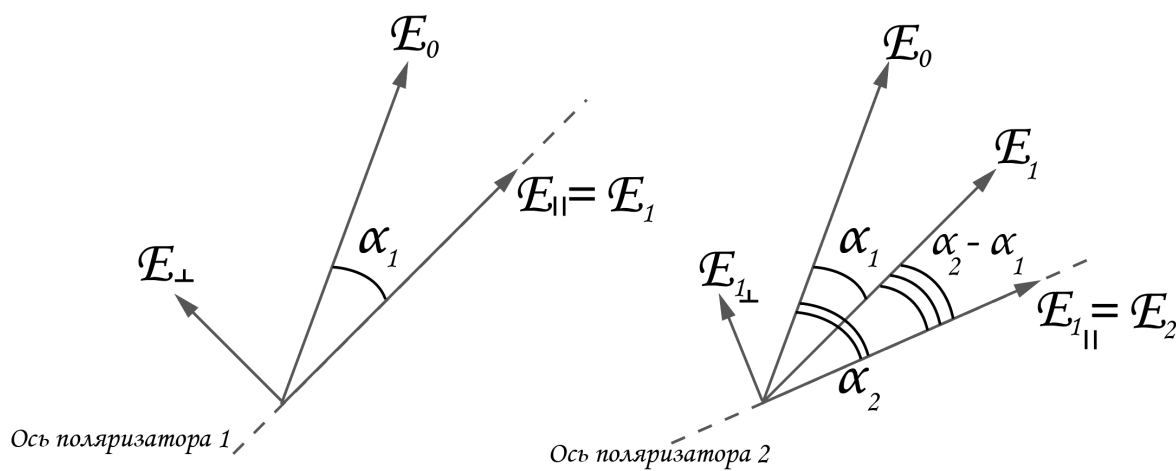
$A_{\parallel} = A \cos \varphi \rightarrow A_{\parallel}^2 = A^2 \cos^2 \varphi$, а т.к. интенсивность $I \sim A^2 \rightarrow$

$I_{\parallel} = I_0 \cos^2 \varphi$ – **закон Малиюса**.

22.17

Плоскополяризованный свет интенсивностью $I_0 = 100 \text{ Вт/м}^2$ проходит последовательно через два совершенных поляризатора, **плоскости которых образуют с плоскостью колебаний в исходном луче $\alpha_1 = 20^\circ$ и $\alpha_2 = 50^\circ$ (углы отсчитываются от плоскости колебаний по часовой стрелке, если смотреть вдоль луча)**. Определить интенсивность света I на выходе из второго поляризатора.

Обязательно прочитать теорию!



Дано:	Решение:
$I_0 = 100 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$	После прохождения через поляризатор амплитуда световой волны E становится $E_{\parallel} = E \cos \varphi$, где φ – угол между волной, вошедшей в поляризатор (её амплитудой E) и осью поляризатора.
$\alpha_1 = 20^\circ$	Амплитуда световой волны после прохождения первого поляризатора: $E_1 = E_0 \cos \alpha_1$
$\alpha_2 = 50^\circ$	Амплитуда световой волны после прохождения второго поляризатора:
$I = I_2 - ?$	$E_2 = E_1 \cos \varphi = E_1 \cos(\alpha_2 - \alpha_1) = [1] - \text{читай дано, см. рис}$
Примечания	$= E_0 \cos \alpha_1 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)$
1.	$E_2^2 = E_0^2 \cos^2 \alpha_1 \cos^2(\alpha_2 - \alpha_1)$
Угол между осью поляр.2 и вектором E : угол между осью поляр.2 и нач. лучём минус угол между волной после поляр.1 и начальным лучём	Т.к. квадрат амплитуды пропорционален интенсивности ($I \sim A^2$), то:
	$I_2 = I_0 \cos^2 \alpha_1 \cos^2(\alpha_2 - \alpha_1)$
Ответ: $I = I_0 \cos^2 \alpha_1 \cos^2(\alpha_2 - \alpha_1)$.	

22.18

Чему равен угол α между главными плоскостями поляризатора и анализатора, если интенсивность естественного света, прошедшего через поляризатор и анализатор, уменьшается в четыре раза? Поглощением света пренебречь.

Обязательно прочитать теорию!

Дано:	Решение:
$\frac{I_0}{I_2} = 4$	По закону Малюса после прохождения поляризатора:
$\alpha - ?$	$I_1 = I_0 \cos^2 \varphi$
Примечания:	Т.к. естественный свет – суть есть совокупность множества беспорядочно поляризованных световых волн (т.е. угол φ равновероятен), но интенсивность I_1 волны после поляризатора можно найти как среднее значение полученного выражения:
1.	$I_1 = I_0 \langle \cos^2 \varphi \rangle$
α – угол между главными плоскостями поляризатора и анализатора.	$\langle f(\alpha) \rangle = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(\alpha) d\alpha \rightarrow$ $\langle \cos^2(\varphi) \rangle = \frac{1}{2\pi - 0} \int_0^{2\pi} \cos^2(\varphi) d\varphi =$ $= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1 + \cos 2\varphi) \frac{1}{2} d(2\varphi) =$ $= \frac{1}{8\pi} (2\varphi + \sin 2\varphi \Big _0^{2\pi}) = \frac{4\pi}{8\pi} = \frac{1}{2} \rightarrow$ $I_1 = \frac{I_0}{2}$
	По закону Малюса после прохождения анализатора (суть есть того же самого поляризатора):
	$I_2 = I_1 \cos^2 \alpha = \frac{I_0}{2} \cos^2 \alpha$ [1]
	Откуда:
	$\alpha = \arccos \left(\sqrt{\frac{2I_2}{I_0}} \right)$
Ответ:	$\alpha = \arccos \left(\sqrt{\frac{2I_2}{I_0}} \right).$