Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра высшей математики

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

для студентов радиотехнических
специальностей БГУИР

В 10-ти частях

А. А. Карпук, Р. М. Жевняк, В. В. Цегельник, И. А. Смирнова

Часть 6

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Минск 2006

УДК 517 + 517.3 (075.8)
ББК 22. 161. я 73
С 23

Р е ц е н з е н т:
зав. кафедрой информационных технологий
автоматизированных систем БГУИР,
доктор технических наук, профессор В. С. Муха

С 23 **Сборник** задач по высшей математике для студ. радиотехнич. спец. В 10 ч. Ч.6: Интегральное исчисление функций одной переменной / А. А. Карпук, Р. М. Жевняк, В. В. Цегельник, И. А. Смирнова. – Мн. : БГУИР, 2006. – 148 с. : ил.
ISBN 985-444-935-1 (ч.6)

В части 6 сборника приводятся задачи по интегральному исчислению функций одной переменной.

УДК 517 + 517.3 (075.8)
ББК 22. 161. я 73

Ч. 1: Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие. В 10 ч. Ч.1: Аналитическая геометрия / А.А. Карпук, Р.М. Жевняк. – Мн.: БГУИР, 2002. – 112 с.: ил.; 2-е изд. – 2003, 3-е изд. – 2004.

Ч. 2: Сборник задач по высшей математике. В 10 ч. Ч. 2: Линейная алгебра (с решениями и комментариями) / А.А. Карпук, Р.М. Жевняк, В.В. Цегельник. – Мн.: БГУИР, 2004. – 154 с.

Ч. 3: Сборник задач по высшей математике. Ч. 3: Введение в анализ / Н.Н. Третьякова, Т.М. Пушкарева, О.Н. Малышева. – Мн.: БГУИР, 2005. – 116 с.

Ч. 4: Сборник задач по высшей математике для студ. радиотехнич. спец. БГУИР. В 10 ч. Ч. 4: Дифференциальное исчисление функций одной переменной / А.А. Карпук, В.В. Цегельник, Р.М. Жевняк, И.В. Назарова. – Мн.: БГУИР, 2006. – 107 с.

Ч. 5: Сборник задач по высшей математике для студ. радиотехнич. спец. В 10 ч. Ч. 5: Функции многих переменных / А.А. Карпук, Р.М. Жевняк, В.В. Цегельник и др. – Мн.: БГУИР, 2004. – 64 с.

ISBN 985-444-935-1 (ч.6)
ISBN 985-444-727-8

Содержание

Введение

Настоящее пособие является шестой частью «Сборника задач по высшей математике в десяти частях», издаваемого кафедрой высшей математики БГУИР. В ч. 6 приводятся в концентрированной форме задачи и упражнения по интегральному исчислению функций одной переменной: неопределённый и определенный интегралы, несобственные интегралы, а также их приложения, физические и геометрические. Пособие будет полезным не только студентам вузов, но и преподавателям, ведущим занятия в студенческих группах.

В конце пособия приводятся 15 вариантов самостоятельной работы по интегральному исчислению функций одной переменной.

В пособии знаком (*) отмечены наиболее трудные задачи, требующие для их решения определённой смекалки и изобретательности. Начало решения задачи отмечено знаком Δ, конец решения – знаком ▲, указание – знаком ●.

1. Неопределенный интеграл

1.1. Первообразная и неопределенный интеграл

Свойства первообразной и неопределенного интеграла. Таблица основных неопределенных интегралов. Непосредственное интегрирование. Интегрирование подстановкой (замена переменной интегрирования). Интегрирование по частям.

Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на интервале (a,b), если $F(x)$ непрерывна на (a,b), дифференцируема в каждой внутренней точке этого интервала и $F'(x) = f(x), \forall x \in (a,b)$.

Для каждой непрерывной функции $f(x)$ первообразная существует.

Две первообразные $F_1(x)$ и $F_2(x)$ одной и той же функции $f(x)$ отличаются на константу C, т.е. $F_1(x)=F_2(x)+C$.

Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается

$$\int f(x)\,dx .$$

Итак, по определению

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \tag{1.1}$$

где $F(x)$ – любая первообразная функции $f(x)$

Символ $\int$ называется *знаком интеграла*, $f(x)$ – *подынтегральной функцией*, $f(x)\,dx$ – *подынтегральным выражением*, x – *переменной интегрирования*.

1.1. Найти любую первообразную функции $f(x) = \cos x$, $x \in \mathrm{R}$, и её неопределенный интеграл.

Δ Так как $(\sin x)' = \cos x, x \in R,$ то $F(x) = \sin x,$ и, значит, $\int \cos xdx = \sin x + C$. ▲

Неопределенный интеграл обладает следующими свойствами:

1° $\int f(xdx)' = f(x);$ 2° $d(\int f(x)dx) = f(x)dx;$

3° $\int f'(x)dx = f(x) + C;$ 4° $\int df(x) = f(x) + C;$

5° (*Линейность неопределенного интеграла*). Если $f(x)$ и $g(x)$ имеют на (a,b) первообразные $F(x)$ и $G(x)$, то для любых α и β из **R**

$$\int(\alpha f(x) + \beta g(x)dx = \alpha\int f(x)dx + \beta\int g(x)dx = \alpha F(x) + \beta G(x) + C.$$

6° Если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, то для любых $a \neq 0$ и $b \in \boldsymbol{R}$

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Приведем теперь *таблицу основных неопределенных интегралов*.

Каждая из нижеприведенных формул справедлива на промежутке, где определена подынтегральная функция.

1. $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1.$

2. $\int \dfrac{dx}{ax+b} = \dfrac{1}{a}\ln|ax+b| + C, a \neq 0.$

3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C,\quad 0 < a \neq 1.$

4. $\int e^x dx = e^x + C.$

5. $\int \sin xdx = -\cos x + C.$

6. $\int \cos xdx = \sin x + C.$

7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x}dx = tgx + C.$

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x}dx = -ctgx + C.$

9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C; \\ -\arccos x + C. \end{cases}$

10. $\int shxdx = chx + C.$

11. $\int chxdx = shx + C.$

12. $\int \dfrac{dx}{ch^2 x} = thx + C.$

13. $\int \dfrac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C.$

14. $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a} arctg\dfrac{x}{a}, a \neq 0.$

15. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|, a \neq 0$

16. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{|a|} + C, a \neq 0.$

17. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}), a \neq 0.$

Свойства неопределенного интеграла и таблица основных интегралов позволяют вычислить некоторые интегралы так называемым *методом непосредственного интегрирования*.

1.2. Найти интегралы:

а) $\mathrm{I}_1 = \int \frac{\sqrt{4+x^2} + 2\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{16-x^4}} dx$; б) $\mathrm{I}_2 = \int ctg^2 x dx$.

Δ а) Проведем очевидные преобразования в подынтегральном выражении для $x \neq \pm 4$:

$$\mathrm{I}_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} = \arcsin\frac{x}{2} + 2\ln(x + \sqrt{4+x^2}) + C.$$

б) Так как $ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$, то

$$\mathrm{I}_2 = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int dx = -ctgx - x + C. \ \blacktriangle$$

1.3. Найти интегралы:

1) $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} dx$; 2) $\int \frac{dx}{3x^2 - 5}$;

3) $\int 2^{2x} e^x dx$; 4) $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$.

Отв.: 1) $\frac{8}{15} x \sqrt[8]{x^7} + C$; **2)** $\frac{1}{2\sqrt{15}} \ln\left|\frac{x\sqrt{3} - \sqrt{5}}{x\sqrt{3} + \sqrt{5}}\right| + C$;

3) $\frac{2^{2x} e^x}{1 + 2\ln 2} + C$; **4)** $\frac{x - \sin x}{2} + C$.

1.4.* Верны ли следующие утверждения: а) если $f(x)$– периодическая функция, то и $F(x)$– периодическая функция; б) если $f(x)$– нечетная функция, то $F(x)$– четная функция.

Отв.: а) неверно; **б)** верно.

В вычислении неопределенных интегралов большую роль играет *метод интегрирования подстановкой (заменой переменной интегрирования),* суть которого раскрывает следующая теорема.

Теорема 1.1. *Пусть на* (a,b) *определена сложная функция* $f(\varphi(x))$, *функция* $t = \varphi(x)$ *непрерывна на интервале* (a,b) *и дифференцируема во всех внутренних точках этого интервала. Тогда если существует интеграл* $\int f(t)dt$, *то существует интеграл* $\int f(\varphi(x))\varphi\mu(x)dx$, *причем*

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(t)dt \Big|_{t=\varphi(x)}. \qquad (1.2)$$

Формула (1.2) называется *формулой интегрирования подстановкой.*

Если на (a,b) для функции $t=\varphi(x)$ существует обратная функция $x=\varphi^{-1}(t)$, то формулу (1.2)
можно переписать в виде

$$\int f(t)dt = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx \Big|_{x=\varphi^{-1}(t)},$$

или, поменяв местами t и x,

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(x))\varphi'(t)dt \Big|_{t=\varphi^{-1}}(x). \qquad (1.3)$$

Формула (1.3) называется *формулой замены переменной в неопределенном интеграле.*

1.5. Найти интегралы:

а) $\int x^3\sqrt[6]{3x^4-1}dx$; б) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$; в) $\int \frac{3x-1}{x^2-x+1}dx$; г) $\int \frac{dx}{\cos x}$.

Δ а) По формуле (1.2), положив в ней $t=\varphi(x)=3x^4-1, f(t)=\sqrt[6]{t}$, получим

$$\int x^3\sqrt[6]{3x^4-1}dx = \frac{1}{12}\int\sqrt[6]{3x^4-1}(3x^4-1)'dx = \frac{1}{12}\int\sqrt[6]{3x^4-1}d(3x^4-1) =$$

$$= \frac{1}{12}\int\sqrt[6]{t}dt = \frac{1}{14}\sqrt[6]{t^7}+C = \frac{1}{14}(3x^4-1)\sqrt[6]{3x^4-1}+C.$$

б) Введем замену переменной по формуле $x=1/t$, тогда $dx=-dt/t^2$.

Значит,

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = -\int\frac{t^2dt}{t^2\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}} = -\int\frac{tdt}{\sqrt{t^2+1}} = -\int d(\sqrt{t^2+1}) = -\sqrt{t^2+1}+C =$$

$$= -\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+C.$$

в) Выделим в числителе производную $2x-1$ знаменателя x^2-x+1. Дальнейшие преобразования следующие:

$$\int\frac{3x-1}{x^2-x+1}dx = 3\int\frac{x-1/3}{x^2-x+1}dx = \frac{3}{2}\int\frac{(2x-1)+\frac{1}{3}}{x^2-x+1}dx = \frac{3}{2}\int\frac{(2x-1)dx}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-1/2)^2+3/4} =$$

$$= \frac{3}{2}\int\frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\int\frac{d(x-1/2)}{(x-1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2} = \frac{3}{2}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

г) Имеем

$$\int\frac{dx}{\cos x}=2\int\frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}=\left|\frac{x}{2}=t\right|=2\int\frac{dt}{\cos^2 t-\sin^2 t}=2\int\frac{dt}{\cos^2 t(1-tg^2 t}=2\int\frac{d(tgt)}{1-tg^2 t}=$$

$$=-2\int\frac{dtgt}{tg^2 t-1}=-\ln\left|\frac{tgt-1}{tgt+1}\right|=\ln\left|\frac{tg(x/2)+1}{tg(x/2-1}\right|+C.\quad\blacktriangle$$

1.6. Вычислить интегралы:

1. $\int\frac{dx}{\sin\ x}$. 2. $\int\frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$. 3. $\int\frac{dx}{15\,x^2-34\,x+15}$.

4. $\int\frac{dx}{\sqrt{17-4x-x^2}}$. 5. $\int\sin^2(ax+b)dx$. 6. $\int\frac{(3x-2)dx}{2-3x+5x^2}$.

7. $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}$, $x>2$.

8. $\int x^3\sqrt{x^2-1}dx$. 9. $\int\frac{\sin^3 xdx}{\sqrt{\cos x}}$. 10. $\int\frac{\cos\ln x}{x}dx$.

Отв.: 1. $\frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x}+C$. **2.** $\ln\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}+C$. **3.** $\frac{1}{16}\ln\left|\frac{3x-5}{5x-3}\right|+C$.

4. $\arcsin\frac{x+2}{\sqrt{21}}+C$. **5.** $\frac{x}{2}-\frac{1}{4a}\sin 2(ax+b)+C$.

6. $\frac{3}{10}\ln(2-3x+5x^2)-\frac{11}{5\sqrt{31}}arctg\frac{10x-3}{\sqrt{31}}+C$.

7. $2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}+C$. **8.** $\frac{1}{5}\sqrt{(x^2-1)^5}+\frac{1}{3}\sqrt{(x^2-1)^3}+C$.

9. $\frac{2}{5}\sqrt{\cos^5 x}-2\sqrt{\cos x}+C$. **10.** $\sin\ln x+C$.

1.7. Доказать равенство

$$\int(\varphi(x))^\alpha\varphi'(x)dx=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\alpha\neq-1,\\ \ln(\varphi(x))+C,\alpha=-1.\end{cases}$$

Другим эффективным методом вычисления неопределенных интегралов является *метод интегрирования по частям.* Суть его в следующем.

Если $u=u(x)$ и $v=v(x)$ непрерывны на (a,b) и дифференцируема во всех внутренних точках этого интервала и если существует интеграл $\int vu'dx$, тогда существует и интеграл $\int uv'dx$, причем

$$\int u dv = uv - \int v du. \qquad (1.4)$$

Формула (1.4) называется *формулой интегрирования по частям*.

Часто интеграл $\int v du$ вычислить проще, чем исходный интеграл $\int u dv$.

1.8. Вычислить интегралы:

а) $\mathrm{I}_1 = \int x \cos x dx$; б) $\mathrm{I}_2 = \int \arcsin^2 x dx$.

Δ а) Положим $u = x \Rightarrow du = dx$; $dv = \cos x dx \Rightarrow v \sin x$.

По формуле (1.4.) получаем

$$\mathrm{I}_1 = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

б) Для вычисления этого интеграла придется применить интегрирование по частям дважды. Имеем.

$$\mathrm{I}_2 = \int \arcsin^2 x dx = \left| \begin{array}{l} u = \arcsin^2 x, \\ du = (2 \arcsin x)/\sqrt{1-x^2}, \\ dv = dx \Rightarrow v = x. \end{array} \right| = x \arcsin^2 x - 2\int \frac{x \arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = \arcsin x, du = dx/\sqrt{1-x^2}, \\ dv = x dx/\sqrt{1-x^2} \Rightarrow v = -\sqrt{1-x^2} \end{array} \right| = x \arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x -$$

$$-2\int dx + C = x \arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x + C. \blacktriangle$$

1.9.* Для интеграла

$$\mathrm{I}_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}, n \in \boldsymbol{N}, a \neq 0$$

получить *рекуррентную* формулу

$$\mathrm{I}_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\left(\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1)\mathrm{I}_n \right). \qquad (1.5)$$

Δ Проинтегрируем I_n по частям:

$$\mathrm{I}_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \left| \begin{array}{l} u = \dfrac{1}{(x^2+a^2)^n}, du = \dfrac{-2nx dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right|.$$

Тогда

$$\mathrm{I}_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} = \left|\ \text{В интеграле справа в числи-}\right.$$

теле подынтегральной функции прибавим и вычтем a^2. $\Big| =$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\mathrm{I}_n - 2na^2\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}},$$

т. е.

$$\mathrm{I}_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\mathrm{I}_n - 2na^2\mathrm{I}_{n+1}.$$

Отсюда и вытекает формула (1.5).

Так как $\mathrm{I}_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C$, то, положив в (1.5) $n=1$, можно найти I_2, а зная I_2, можно найти I_3 и т.д. ▲

Замечание. При интегрировании по частям возникает вопрос: что выбрать в качестве u, а что отнести к dv в исходном интеграле? Здесь можно рекомендовать следующее.

Если подынтегральное выражение имеет вид $P_n(x)e\ dx$, то в качестве u выбирается многочлен αx (n-й степени). Если в подынтегральном выражении имеется трансцендентная функция (к таковым относятся логарифмическая функция, обратные тригонометрические функции), то эта функция (или её степень) и выбирается в качестве $u = u(x)$.

1.10. Найти интегралы:

1. $\int x\, tg^2 2xdx.$	2. $\int \sin x \ln tgx\, dx.$
3. $\int x^2 \arcsin 2xdx.$	4. $\int (x^2-6x+2)e^{3x}dx.$
5. $\int (x^2+1)^2 \cos xdx.$	6. $\int \frac{\ln^2 x}{x\sqrt{x}}dx.$
7. $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^3 dx.$	8. $\int e^{ax}\sin bxdx,\ a^2+b^2 \neq 0.$
9. $\int \sin \ln xdx.$	10. $\int e^{\arccos x}dx.$

Отв.: 1. $\frac{x}{2}tg2x+\frac{1}{4}\ln|\cos 2x|-\frac{x^2}{a}+C.$ **2.** $\ln\left|tg\frac{x}{a}\right|-\cos x\ln tgx+C.$

3. $\frac{x^3}{3}arcs\sin 2x+\frac{2x^2+1}{36}\sqrt{1-4x^2}+C.$ **4.** $\left(x^2-\frac{20}{3}x+\frac{38}{9}\right)\frac{e^{3x}}{3}+C.$

5. $(x^4-10x^2+21)\sin x+4x(x^2-5)\cos x+C.$

6. $-\frac{8}{27}x^{-3/2}\left(\frac{9}{4}\ln^2 x+3\ln x+2\right)+C.$

7. $-\frac{1}{2x^2}\left(\ln^3 x+\frac{3}{2}\ln^2 x+\frac{3}{2}\ln x+\frac{3}{4}\right)+C.$

8. $t=x+p/2$

9. $\frac{\sin\ln x-\cos\ln x}{2}+C.$

10. $\frac{x-\sqrt{1-x^2}}{2}e^{\arccos x}+C.$

1.11. Для интеграла I_n, $n\in \boldsymbol{N}$, получить рекуррентную формулу:

а) $\mathrm{I}_n=\int\ln^n xdx;$ б) $\mathrm{I}_n=\int\sin^n xdx,\ n>2.$

Отв.: а) $\mathrm{I}_n=x\ln^n x-n\mathrm{I}_{n-1}.$ **б)** $\mathrm{I}_n=-\frac{\cos x-\sin^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}\mathrm{I}_{n-2}.$

1.12. Найти интегралы:

а) $\int\ln^4 xdx;$б) $\int\sin^6 xdx.$

Отв.: **а)** $x(\ln^4 x-4\ln^3 x+12\ln^2 x-24\ln x+24)+C;$

б) $-\frac{8\sin^4 x+10\sin^2 x+15}{96}\sin 2x+\frac{5x}{16}+C.$

1.2. Интегрирование рациональных функций

Простейшие дроби и их интегрирование. Разложение рациональных функций на сумму простейших дробей. Метод Остроградского.

Рациональной называется функция вида $\mathrm{P}_n(x)/Q_m(x)$, где $\mathrm{P}_n(x)$ и $Q_m(x)$ – *многочлены степени* n и m, соответственно $n,m\in N$. При $n<m$ эта функция, или дробь, называется *правильной*, при $n\geq m$– *неправильной*. В случае неправильной дроби делением (уголком) у нее всегда можно выделить целую часть, т.е. дробь представить в виде

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=S_k(x)+\frac{R_l(x)}{Q_m(x)}.$$

Здесь $S_k(x)$ – целая часть дроби, а $R_l(x)$– остаток от деления $\mathrm{P}_n(x)$на $C=9/2.$, причем ясно, что $l<m$.

Простейшими, или *элементарными,* дробями называются дроби следующих четырех типов:

I. $\dfrac{A}{x-a}$. II. $\dfrac{A}{(x-a)^n}$, $n \neq 1$. III. $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$, $p^2-4q<0$.

IV. $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$, $n>1$, $p^2-4q<0$.

В I - IV A, M, N – постоянные, $n \in \boldsymbol{N}$.

Интегрирование простейших дробей производится следующим образом:

I. $\displaystyle\int \frac{Adx}{x-a} = \ln|x-a| + C.$

II. $\displaystyle\int \frac{Adx}{(x-a)^n} = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C, n \neq 1.$

III. $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \Bigg|$ В числителе сначала выделяется производная знаменателя $\Bigg| = \dfrac{M}{2}\displaystyle\int \frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q} - \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \Bigg|$ Во втором интеграле в знаменателе подынтегральной функции выделяем полный квадрат

$$\Bigg| = \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{d\left(x+\dfrac{p}{2}\right)}{\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{q-\dfrac{p^2}{4}}\right)^2} = \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) +$$

$$+ \frac{N - Mp/2}{\sqrt{q-\dfrac{p^2}{4}}} arctg \frac{x+p/2}{\sqrt{q-\dfrac{p^2}{4}}} + C.$$

IV.

$$\int \frac{(Mx+N)dx}{(x^2+px+q)^n} = \frac{M}{2}\int \frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^n} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \times \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} = \frac{M}{2}\frac{(x^2+px+q)^{1-n}}{1-n} +$$

$$+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{d(x+p/2)}{((x+p/2)^2+q-p^2/4)^n}, n>1.$$

Последний интеграл подстановкой $t = x + p/2$ приводится к интегралу I_n, для которого в примере 1.9 получена рекуррентная формула.

Интегрирование рациональных функций сводится к *разложению рациональной функции на простейшие дроби* (см. $[1]$) и дальнейшему интегрированию этих простейших дробей.

1.13. Найти интегралы:

а) $\int \frac{x^2 dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}$; б) $\int \frac{2x^3+x^2+5x+1}{(x^2+3)(x^2-x+1)}dx$;

в) $\int \frac{(x^4+1)dx}{x^5+x^4-x^3-x^2}$; г) $\int \frac{(4x^2-8x)dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$.

Δ а) Знаменатель рациональной дроби имеет простые корни $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$.

Поэтому разложение на простые дроби имеет вид

$$\frac{x^2}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

Отсюда следует равенство многочленов:

$x^2 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2).$

Полагая здесь последовательно $x=1$, $x=2$, $x=3$, получаем $A=1/4$, $B=-4$, $C=9/2$.

Следовательно,

$$\int \frac{x^2 dx}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{4}\ln|x-1| - 4\ln|x-2| + \frac{9}{2}\ln|x-3| + C.$$

б) Разложение подынтегральных функций на простейшие дроби имеет вид

$$\frac{2x^3+x^2+5x+1}{(x^2+3)(x^2-x+1)} = \frac{Ax+B}{(x^2+3)} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1}$$

и, значит,

$2x^3+x^2+5x+1 = (Ax+B)(x^2-x+1) + (Cx+D)(x^2+3).$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, получим систему

$$\begin{array}{c|l} x^3 & A+C=2, \\ x^2 & -A+B+C=1, \\ x^1 & A-B+3C=5, \\ 1 & B+3D=1. \end{array}$$

Решением этой системы являются числа $A=0$, $B=1$, $C=2$, $D=0$. Значит,

$$\int \frac{2x^3+x^2+5x+1}{(x^2+3)(x^2-x+1)}dx = \int \frac{dx}{x^2+3} + \int \frac{2xdx}{x^2-x+1} = \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{x}{\sqrt{3}} +$$

$$+ \ln(x^2-x+1) + \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

в) Знаменатель подынтегральной функции имеет разложение:

$$x^5 + x^4 - x^3 - x^2 = x^2(x+1)^2(x-1).$$

Следовательно,

$$\frac{x^4+1}{x^2(x+1)^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1} + \frac{E}{(x+1)^2}.$$

Отсюда

$$\begin{gathered} x^4 + 1 = Ax(x-1)(x+1) \ + B(x-1)(x+1)^2 + Cx^2(x+1)^2 + \\ +Dx^2(x^2-1) + Ex^2(x-1). \end{gathered} \qquad (1.6)$$

Положив в этом равенстве последовательно $x=0,\ x=1,\ x=-1$, получим $B=-1,\ C=1/2,\ E=-1$. Для нахождения коэффициента A продифференцируем обе части равенства (1.6) и затем положим в нем $x=0$. При дифференцировании правой части выпишем только те слагаемые, которые не обращаются в нуль при $x=0$:

$$4x^3 = A(x-1)(x+1)^2 + B(x+1)^2 + 2B(x^2-1) + \ldots$$

Отсюда при $x=0$ имеем $0=-A-B \Rightarrow A=1$. Для определения D поступим аналогично: дифференцируем обе части равенства (1.6) и выписываем только те слагаемые правой части, которые не обращаются в нуль при $x=-1$.

Получим равенство

$$4x^3 = Dx^2(x-1) + 2Ex(x-1) + Ex^2 \ldots.$$

Отсюда при $x=1$ имеем

$$-4 = -3D + 4E + E \Rightarrow D = -1/2.$$

Следовательно,

$$\int \frac{(x^4+1)dx}{x^5+x^4-x^3-x^2} = \ln|x| + \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C.$$

г) Здесь разложение подынтегральной функции на простейшие дроби имеет вид

$$\frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}.$$

Значит,

$$\begin{gathered} 4x^2 - 8x = A(x-1)(x^2+1)^2 + B(x^2+1)^2 + \\ + (Cx+D)(x-1)^2(x^2+1) + (Ex+F)(x-1)^2. \end{gathered} \qquad (1.7)$$

Положим в равенстве (1.7) $x=1$, получим $B=-1$. Теперь положим $x=i$, будем иметь $-4-8i = (Ei+F)(i-1)^2 = 2E - 2iF$. Приравняв действительные и мнимые части, получим $-4=2E,\ -8=-2F \Rightarrow E=-2,\ F=4$. Продифференцируем обе части равенства (1.7), причем выпишем только те слагаемые, не обращающиеся в нуль при $x=-1$:

$$8x - 8 = A(x^2+1)^2 + 2B(x^2+1)2x + \ldots \quad .$$

Отсюда при $x=1$ получаем $0=4A+8B \Rightarrow A=2$. Теперь продифференцируем обе части равенства (1.7) и оставим только слагаемые, не обращающиеся в нуль при $x=i$:

$$8x-8=(Cx+D)(x-1)^2 2x+E(x-1)^2+(Ex+F)2(x-1)+\ldots.$$

Отсюда при $x=i$ находим $C=-2$, $D=-1$.

Итак,

$$\int\frac{(4x^2-8x)dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2}=2\ln|x-1|+\frac{1}{x-1}-\int\frac{(2x+1)dx}{x^2+1}-\int\frac{(2x-4)dx}{(x^2+1)^2}=$$

$$2\ln|x-1|+\frac{1}{x-1}-\ln(x^2+1)-arctgx+\frac{1}{x^2+1}+4\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

По рекуррентной формуле (1.5)

$$\mathrm{I}_2=\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}+arctgx\right)+C.$$

Таким образом, окончательно,

$$\int\frac{(4x^2-8x)dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2}=\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1}+arctgx+\frac{1}{x-1}+\frac{1+2x}{x^2+1}+C. \blacktriangle$$

1.14. Вычислить интегралы:

1. $\int\frac{dx}{(x+1)(x-2)}$. 2. $\int\frac{(2x+3)dx}{(x-2)^3}$. 3. $\int\frac{(x^2+3)dx}{x^3-x^2-6x}$.

4. $\int\frac{dx}{x^4+x^2}$. 5. $\int\frac{dx}{1+x^3}$. 6. $\int\frac{(x^3+1)dx}{x(x^2+x+1)^2}$.

Отв.: **1.** $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C$. **2.** $-\frac{7}{2(x-2)^2}-\frac{2}{x-2}+C$.

3. $-\frac{1}{2}\ln|x|+\frac{7}{10}\ln|x+2|+\frac{4}{5}\ln|x-3|+C$. **4.** $-\frac{1}{x}-arctgx+C$.

5. $\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$.

6. $\frac{2(1-x)}{3(x^2+x+1)}+\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)-\frac{1}{3\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$.

Распространенным методом интегрирования рациональных функций является *метод Остроградского.* Он полезен, когда знаменатель правильной рациональной дроби $P(x)/Q(x)$ имеет кратные корни, особенно комплексные. Метод основан *на формуле Остроградского*:

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\int\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx. \qquad (1.7)$$

В формуле (1.7) $Q_2(x)$ – многочлен, имеющий те же корни, что и многочлен $Q(x)$, но все корни $Q_2(x)$ - простые. Многочлен же $Q_1(x)$ есть частное от деления $Q(x)$ на $Q_2(x)$. Другими словами, $Q_1(x) = Q(x)/Q_2(x)$. $P_1(x)$ и $P_2(x)$ - некоторые многочлены, степени которых соответственно меньше степеней многочленов $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$. Если корни $Q(x)$ известны, то тем самым известны многочлены $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$. Для отыскания многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$ их записывают с неопределенными коэффициентами, которые находят после дифференцирования обеих частей формулы Остроградского (1.7). Если $P_2(x) \neq 0$, то, так как корни $Q_2(x)$ простые, интеграл $\int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx$ является трансцендентной функцией. Поэтому второе слагаемое справа в (1.7) называется *трансцендентной частью* левого интеграла в (1.7), а первое – *рациональной частью*.

1.15. Методом Остроградского вычислить интеграл 1.13, г.

Δ Здесь $Q(x) = (x-1)^2(x^2+1)^2$, и, следовательно, $Q_2(x) = (x-1)(x^2+1)$, $Q_1(x) = Q(x)/Q_2(x) = (x-1)(x^2+1)$. Значит, существуют многочлены второй степени.

$$P_1(x) = Ax^2 + Bx + C \quad \text{и} \quad P_2(x) = ax^2 + bx + c,$$

для которых справедливо равенство

$$\int \frac{4x^2 - 8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2} dx = \frac{Ax^2 + Bx + C}{(x-1)(X^2+1)} + \int \frac{ax^2 + bx + c}{(x-1)(x^2+1)} dx.$$

Рациональную дробь $\frac{ax^2 + bx + c}{(x-1)(x^2+1)}$ представим в виде суммы простейших дробей, и тогда

$$\int \frac{(4x^2 - 8x)dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2} = \frac{Ax^2 + Bx + C}{(x-1)(x^2+1)} + \int \left(\frac{D}{x-1} + \frac{Ex+F}{x^2+1} \right) dx.$$

Дифференцируя обе части этого равенства, получаем

$$\frac{4x^2 - 8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2} = \frac{(x-1)(x^2+1)(2Ax+B) - (Ax^2+Bx+C)(3x^2-2x+1)}{(x-1)^2(x^2+1)^2} +$$

$$+ \frac{D}{x-1} + \frac{Ex+F}{x_2+1}.$$

Отсюда

$$4x^2 - 8x = -4x^2 - 2Bx^3 + (A + B - 3C)x^2 +$$

$$+ 2(C - A)x - B - C + D(x-1)(x^2+1)^2 + (Ex+F)(x-1)^2(x^2+1).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем систему

$$\begin{array}{c|l}
x^5 & 0 = D + E, \\
x^4 & 0 = -A - D + F - 2E, \\
x^3 & 0 = -2B + 2D + 2E - 2F, \\
x^2 & 4 = A + B - 3C - 2D - 2E + 2F, \\
x^1 & -8 = -2A + 2C + D + E - 2F, \\
1 & 0 = -B - C - D + F.
\end{array}$$

Решением этой системы являются величины $A = 3$, $B = -1$, $C = 0$, $D = 2$, $E = -2$, $F = 1$.

Таким образом,

$$\int \frac{(4x^2 - 8x)dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2} = \frac{3x^2 - x}{(x-1)(x^2+1)} + 2\ln|x-1| - \ln(x^2+1) + arctgx + C. \ ▲$$

1.16.* Методом Остроградского вычислить следующие интегралы:

1. $\int \frac{(x+1)dx}{(x^2+x-2)^2}$. 2. $\int \frac{(x^6+1)dx}{(x^2+x+1)^2}$. 3. $\int \frac{dx}{(x^4-1)^2}$.

4. $\int \frac{-2x^5 + 11x^4 - 28x^3 + 37x^2 - 30x + 14}{(x^2-2x+2)^2} dx.$

5. $\int \frac{2x^4 - 4x^3 + 24x^2 - 40x + 20}{(x-1)(x^2-2x+2)^3} dx$

6. $\int \frac{(-4x^3 - 4x^2 + 2x)dx}{(x-1)^2(x^2+x+1)^3}$.

Отв.:

1. $-\frac{x+5}{9(x^2+x-2)} - \frac{1}{27}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C.$

2. $\frac{1}{3}(x-1)^3 + \frac{4x+2}{3(x^2+x+1)} + \ln(x^2+x+1) - \frac{10}{3\sqrt{3}} arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$

3. $\frac{3}{8} arctgx - \frac{x}{4(x^4-1)} - \frac{3}{16}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$

4. $\dfrac{x}{(x^2-2x+2)^2}+\ln\dfrac{1}{x^2-2x+2}+arctg(x-1)+C.$

5. $\dfrac{2x^3-6x^2+8x-9}{(x^2-2x+2)^2}+\ln\dfrac{(x-1)^2}{x^2-2x+2}+2arctg(x-1)+C.$

6. $\dfrac{x+1}{(x-1)(x^2+x+1)^2}+C.$

1.3. Интегрирование иррациональных функций

Интегралы вида

$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{P_1},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_n}\right)dx.$$

Интегрирование дифференциального бинома (подстановки Чебышева). Интегралы вида $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ (подстановки Эйлера). Другие методы интегрирования иррациональных выражений.

Некоторые интегралы от иррациональных функций вычисляются *методом рационализации* подынтегральной функции. Он заключается в отыскании такой подстановки, которая преобразует интеграл от иррациональной функции в интеграл от рациональной функции. В этом случае говорят, что такая подстановка *рационализирует* данный, исходный интеграл.

Ниже через $R(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ обозначается рациональная функция относительно каждой из переменных $x_1,x_2,\ldots,x_n$. Например,

$$\frac{x^3-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt{x^3+1}}=R(x,\sqrt[3]{x},\sqrt{x^3+1}).$$

Здесь $x_1=x$, $x_2=\sqrt[3]{x}$, $x_3=\sqrt{x^3+1}$.

Интегралы вида $R\left(x,\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{P1},\ldots,\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{Pn}\right)dx$, где $n\in\mathbf{N}$, $p_1,p_2,\ldots,p_n\in\mathbf{Q}$, $a,b,c,d\in\mathbf{R}$, $ad-bc\neq 0$, рационализируются подстановкой

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^m,$$

где m – общий знаменатель рациональных чисел (дробей) $p_1,p_2,\ldots,p_n$.

1.17. Найти интегралы:

а) $\mathrm{I}=\int\frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx.$ б) $\mathrm{I}=\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}.$

Δ а) Наименьшее общее кратное чисел 3 и 6 равно 6. Поэтому вводим подстановку $x=t^6, dx=6t^5dt$, откуда

$$\mathrm{I}=6\int\frac{(t^6+t^4+t)t^5}{t^6(1+t^2)}dt=6\int\frac{t^5+t^3+1}{t^2+1}dt=6\int t^3dt+6\int\frac{dt}{1+t^2}=\left.\left(\frac{3}{2}t^4+6arctgt\right)\right|_{t=\sqrt[6]{x}}=$$

$$=\sqrt[6]{x}+C=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+6arctg\sqrt[6]{x}+C.$$

б) Так как

$$\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}=(x-1)(x+2)\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}},$$

то подынтегральная функция является рациональной от x и $\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}$. Поэтому вводим подстановку

$$\frac{x+2}{x-1}=t^4\Rightarrow x=\frac{t^4+2}{t^4-1}, dx=\frac{-12t^3dt}{(t^4-1)^2};\quad x-1=\frac{3}{t^4-1},\ x+2=\frac{3t^4}{t^4-1}.$$

В итоге

$$\mathrm{I}=-\int\frac{(t^4-1)(t^4-1)12t^3dt}{3\cdot 3t^4(t^4-1)^2}=-\frac{4}{3}\int\frac{dt}{t^2}=\frac{4}{3t}+C=\frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}+C.\ \blacktriangle$$

1.18. Найти интегралы:

1.* $\int\frac{2x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[5]{x^4}}dx.$

2. $\int\frac{\sqrt{x}dx}{3x+\sqrt[3]{x^2}}.$

3.* $\int\frac{dx}{-2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}.$

4.* $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+2\sqrt[5]{x^2}+\sqrt[10]{x^3}}.$

5. $\int\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx.$

6.* $\int\frac{1}{(1-2x)}\sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-2x}}dx.$

7. $\int\sqrt[3]{\frac{(x+1)^2}{(x-1)^5}}dx.$

8. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)}}.$

9. $\int\frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2(x-2)}}.$

10. $\int\frac{dx}{(x+1)^{2/3}-(x+1)^{1/2}}.$

Отв.:

1. $$x+15\left[\begin{array}{l}\frac{1}{9}\sqrt[5]{x^6}-\frac{1}{8}\sqrt[15]{x^{16}}+\frac{1}{7}\sqrt[15]{x^{14}}-\frac{1}{6}\sqrt[5]{x^4}+\frac{1}{5}\sqrt[3]{x^2}-\frac{1}{4}\sqrt[15]{x^8}+\\ +\frac{1}{3}\sqrt[5]{x^2}-\frac{1}{2}\sqrt[15]{x^4}+\sqrt[15]{x^2}-\ln(\sqrt[15]{x^2}+1)\end{array}\right]+C.$$

2. $\frac{2}{3}(\sqrt{x}-\sqrt[6]{x}+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\sqrt[6]{27x}+C.$

3.

$$-\sqrt{x}-\frac{3}{4}\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}-\frac{3}{4}\sqrt[6]{x}-3\sqrt[12]{x}-\frac{12}{5}\ln\left|\sqrt[12]{x}-1\right|+$$

$$+\frac{3}{40}\ln(2\sqrt[6]{x}+2\sqrt[12]{x}+1)+\frac{9}{20}arctg\,(2\sqrt[12]{x}+1)+C.$$

4.

$$-\frac{10}{1+\sqrt[10]{x}}+150(\sqrt[10]{x}+1)-60\ln(\sqrt[10]{x}+1)-100(\sqrt[10]{x}+1)^2+$$

$$+50(\sqrt[10]{x}+1)^3-15(\sqrt[10]{x}+1)^4+2(\sqrt[10]{x}+1)^5+C.$$

5. $x+4\sqrt{x+1}+4\ln\left|\sqrt{x+1}-1\right|+C.$

6.

$$\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-2x}}-\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-2x}}+1\right|+\frac{1}{4}\ln\left(\sqrt[3]{\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)^2}-\sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-2x}}+1-\right)$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}arctg\,\frac{2\sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-2x}}-1}{\sqrt{3}}+C.$$

7. $-\frac{3}{2}t^2+\ln|t-1|+\frac{1}{2}\ln(t^2+t+1)-\frac{\sqrt{3}}{3}arctg\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C.$

8. $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{t^2+t+1}{t^2-2t+1}\right)-\sqrt{3}arctg\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C.$

9. $2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}+C.$

10. $3\sqrt[3]{x+1}+6\sqrt[6]{x+1}+6\ln\left|\sqrt[6]{x+1}-1\right|+C.$

Выражение $x^m(a+bx^n)^p\,dx$ называется *дифференциальным биномом*. Здесь $a,b\in\mathbf{R}, a\neq 0, b\neq 0$; m,n,p-рациональные числа, $n\neq 0, p\neq 0$. Интегралы от дифференциального бинома рационализируются только в следующих трех случаях:

$p-$целое число; $\frac{m+1}{n}-$целое число; $\frac{m+1}{n}+p-$целое число.

В первом случае применяется подстановка $x = t^N$, где N – общий знаменатель дробей m и n. *Во втором случае* – подстановка $a + bx^n = t^s$, где s - знаменатель дроби p. *В третьем случае* – подстановка $ax^{-n} + b = t^s \Leftrightarrow a + bx^n = x^n t^s$, где s – знаменатель дроби p.

Указанные подстановки называются *подстановками Чебышева*.

1.19. Найти интеграл

$$\mathrm{I} = \int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}} = \int x^{-11}(1+x^4)^{-1/2}\,dx.$$

Δ Здесь $m = -11, n = 4, p = -1/2$. Здесь имеет место третий случай, так как $\dfrac{m+1}{n} + p = -3$ – целое число. Полагаем $1 + x^4 = x^4 t^2$. Отсюда $x = \dfrac{1}{(t^2-1)^{1/4}}$, $dx = -\dfrac{tdt}{2(t^2-1)^{5/4}}$.

Подставив эти выражения в интеграл I, получим

$$\mathrm{I} = -\frac{1}{2}\int (t^2-1)^{11/4}\left(\frac{t^2}{t^2-1}\right)^{-1/2}\frac{tdt}{(t^2-1)^{5/4}} = -\frac{1}{2}\int (t^2-1)^2\,dt = -\frac{t^5}{10} + \frac{t^3}{3} - \frac{t}{2} + C.$$

Возвращаясь к переменной x, получаем

$$\mathrm{I} = -\frac{1}{10x^{10}}\sqrt{(1+x^4)^5} + \frac{1}{3x^6}\sqrt{(1+x^4)^3} - \frac{1}{2x^2}\sqrt{1+x^4} + C. \ \blacktriangle$$

1.20. Найти интегралы:

1. $\int \sqrt[3]{x}(2+\sqrt{x})^2\,dx.$
2. $\int x^{-2/3}(1+x^{2/3})^{-1}\,dx.$
3. $\int x^{1/3}(2+x^{2/3})^{1/4}\,dx.$
4. $\int x^5(1+x^2)^{2/3}\,dx.$
5. $\int \dfrac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx.$
6. $\int \dfrac{dx}{x(1+\sqrt[3]{x})^2}.$
7. $\int x^3(1+x^2)^{1/2}\,dx.$
8. $\int \dfrac{dx}{x^4\sqrt{1+x^4}}.$
9. $\int \sqrt[3]{x}\sqrt[7]{1+\sqrt[3]{x^4}}\,dx.$
10. $\int \dfrac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+1/x}}.$

Отв.:

1. $\dfrac{3}{7}x^{7/3} + \dfrac{24}{11}x^{11/6} + 3x^{4/3} + C.$ **2.** $3arctg\sqrt[3]{x} + C.$

3. $\dfrac{2}{3}(2+x^{2/3})^{9/4} - \dfrac{12}{5}(2+x^{2/3})^{5/4} + C.$

4. $\frac{3}{22}(1+x^2)^{11/3} - \frac{3}{8}(1+x^2)^{8/3} + \frac{3}{10}(1+x^2)^{5/3} + C.$

5. $\frac{12}{7}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^7} - 3\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^4} + C.$

6. $\frac{3}{1+\sqrt[3]{x}} + 3\ln\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}} + C.$

7. $(1+x^2)^{3/2}(3x^2-2)/15 + C.$

8. $\sqrt{1+x^2}(2x^2-1)/(3x^3) + C.$

9. $\frac{21}{32}\sqrt[7]{(1+\sqrt[3]{x^4})^8} + C.$

10. $\frac{5}{4}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{4/5} - \frac{5}{9}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{9/5} + C.$

В интеграле вида

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx, a \neq 0, b^2 - 4ac \neq 0, \tag{1.8}$$

рационализация подынтегрального выражения достигается одной из трех *подстановок Эйлера*:

1) если $a > 0,$ то полагаем

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm x\sqrt{a} \pm t; \tag{1.9}$$

2) если $c > 0,$ то полагаем

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{c} \pm xt; \tag{1.10}$$

3) если x_1 и x_2 - действительные корни трехчлена $ax^2+bx+c,$ т.е. $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2),$ то в этом случае полагаем

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm t(x-x_0), \tag{1.11}$$

где $x_0 = x_1$ или $x_0 = x_2$.

Заметим, что знаки в подстановках (1.9) - (1.11) можно брать в любой комбинации, но следует иметь в виду, что выбор знака (как и выбор самой подстановки) влияет на сложность вычисления интеграла (1.8).

1.21. Найти интегралы:

а) $\mathrm{I} = \int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}};$ б) $\mathrm{I} = \int \frac{dx}{\sqrt{(7x-10-x^2)^3}}.$

Δ а) Так как $a = 1 > 0,$ то применим первую подстановку в виде

$$\sqrt{x^2+2x+2} = t - x.$$

Возведя в квадрат обе части этого равенства, после приведения подобных членов получим

$$2x+2tx=t^2-2 \Rightarrow x=\frac{t^2-2}{2(1+t)},\ dx=\frac{t^2+2t+2}{2(1+t)^2}dt;$$

$$1+\sqrt{x^2+2x+2}=\frac{t^2+4t+4}{2(1+t)}.$$

Подставим в исходный интеграл I:

$$\mathrm{I}=\int\frac{2(1+t)(t^2+2t+2)}{(t^2+4t+4)2(1+t)^2}dt=\int\frac{t^2+2t+2}{(1+t)(t+2)^2}dt.$$

Разложим полученную дробь на простейшие дроби:

$$\frac{t^2+2t+2}{(1+t)(t+2)^2}=\frac{A}{t+1}+\frac{B}{t+2}+\frac{D}{(t+2)^2}.$$

Методом неопределенных коэффициентов находим $A=1, B=0, D=-2.$

Следовательно,

$$\mathrm{I}=\int\frac{dt}{t+1}-2\int\frac{dt}{(t+2)^2}=\ln|t+1|+\frac{2}{t+2}+C.$$

Возвращаясь к переменной x, получаем

$$\mathrm{I}=\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})+\frac{2}{x+2+\sqrt{x^2+2x+2}}+C.$$

б) В данном случае ни первая, ни вторая подстановка Эйлера неприменимы, так как $a<0$ и $c<0$. Но трехчлен $7x-10-x^2$ имеет действительные корни $x_1=2$ и $x_2=5$. Применяя третью подстановку Эйлера, получаем

$$\sqrt{7x-10-x^2}=\sqrt{(x-2)(5-x)}=(x-2)t \Rightarrow 5-x=(x-2)t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{5+2t^2}{1+t^2}, dx=-\frac{6tdt}{(1+t^2)^2};$$

$$(x-2)t=\frac{3t}{1+t^2}.$$

Тогда $\mathrm{I}=-\frac{6}{27}\int\frac{5+t^2}{t^2}dt=-\frac{2}{9}\int\left(\frac{5}{t^2}+2\right)dt=-\frac{2}{9}\left(-\frac{5}{t}+2t\right)+C,$ где $t=\frac{\sqrt{7x-10-x^2}}{x-2}$. ▲

1.22. Вычислить интегралы:

1. $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}.$

2. $\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}.$

3.* $\int\frac{dx}{x-\sqrt{x^2+2x+4}}.$

4. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}-1}.$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}$. 6. $\int \frac{(x+\sqrt{1+x^2})^{15}}{\sqrt{1+x^2}}dx.$

7. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}$. 8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$.

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+2x-x^2}.}$ 10. $\int \frac{dx}{\sqrt{-2x^2+5x-2}}$.

Отв.:

1. $2\ln|t|-\frac{1}{2}\ln|t-1|+\frac{3}{t+1}-\frac{3}{2}\ln|t+1|+C,$ где $t=(\sqrt{x^2-x+1}+1)/x.$

2. $-2arctg\left(\frac{\sqrt{1+x+x^2}+1}{x}+1\right)+C.$

3. $$2\ln\left|\sqrt{x^2+2x+4}-x\right|-\frac{3}{2(\sqrt{x^2+2x-4}-x-1)}-$$
$$-\frac{3}{2}\ln\left|\sqrt{x^2+2x-4}-x-1\right|+C.$$

4. $\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}+2arctg\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C.$ **5.** $(x-1)/\sqrt{2x-x^2}+C.$

6. $(x+\sqrt{1+x^2})^{1/15}/15+C.$ **7.** $\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+x+1}+x}{\sqrt{x^2+x+1}+x+2}+C\right|.$

8. $-2arctg\frac{2+\sqrt{4+2x-x^2}}{x}+C.$ **9.** $\ln\left|\frac{\sqrt{-3+4x-x^2}+x-3}{\sqrt{-3+4x-x^2}-x+3}\right|+C.$

10. $-\sqrt{2}arctg\frac{\sqrt{-2x^2+5x-2}}{\sqrt{2(x-2)}}+C.$

Подстановки Эйлера зачастую приводят к громоздким выкладкам, поэтому они применяются лишь тогда, когда трудно подыскать другой способ для вычисления данного интеграла. Для вычисления многих интегралов типа (1.8) существуют более простые приемы.

1. Интегралы вида

$$\mathrm{I}=\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

подстановкой $x+b/(2a)=t$ приводятся к виду

$$\mathrm{I}=M_1\int \frac{tdt}{\sqrt{at^2+K}}+N_1\frac{dt}{\sqrt{at^2+K}},$$

где $M_1, N_1, K-$новые коэффициенты.

Первый интеграл сводится к интегралу от степенной функции, а второй – табличный и сводится к логарифму (при $a>0$) или к арксинусу (при $a<0, K>0$).

2. Интегралы вида

$$\int \frac{P_m(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx,$$

где $P_m(x)-$ многочлен степени m, вычисляются по *формуле приведения*:

$$\int \frac{P_m(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = P_{m-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + K\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \qquad (1.12)$$

где коэффициенты многочлена $P_{m-1}(x)$ степени $m-1$ и число K находятся методом неопределенных коэффициентов.

3. Интегралы вида

$$\int \frac{dx}{(x-a_1)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

сводятся к предыдущему типу подстановкой $x-a_1=1/t$.

4. Тригонометрические и гиперболические подстановки (см. п 1.4.)

1.23. Найти интегралы:

а) $\mathrm{I}=\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{4x^2+4x-3}}$; б)* $\mathrm{I}=\int \frac{x^3-x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$;

в)* $\mathrm{I}=\int \frac{(x+4)dx}{(x-1)(x+2)^2\sqrt{x^2+2x+2}}dx$.

Δ а) Подстановкой $2x+1=t \Rightarrow x=(t-1)/2,\ dx=dt/2$ интеграл I сводится к интегралу

$$\mathrm{I}=\frac{1}{4}\int \frac{(t+5)dt}{\sqrt{t^2-4}} = \frac{1}{4}\sqrt{t^2-4}+\frac{5}{4}\ln\left|t+\sqrt{t^2-4}\right|+C.$$

Возвращаясь к переменной x, получаем

$$\mathrm{I}=\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x-3}+\frac{5}{4}\ln\left|2x+1+\sqrt{4x^2+4x-3}\right|+C.$$

б) Здесь $P_m(x)=P_3(x)=x^3-x-1$. Следовательно, $P_{m-1}(x)=P_2(x)= = Ax^2+Bx+D$. Интеграл I ищем в виде

$$\mathrm{I}=(Ax^2+Bx+D)\sqrt{x^2+2x+2}+K\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

Продифференцируем это равенство:

$$\mathrm{I}'=\frac{x^3-x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}=(2Ax+B)\sqrt{x^2+2x+2}+(Ax^2+Bx+D)\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}+$$
$$+\frac{K}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

Приводим к общему знаменателю и приравниваем числители:

$$x^3-x-1=(2Ax+B)(x^2+2x+2)+(Ax^2+Bx+D)(x+1)+K.$$

Отсюда получаем систему:

$$\left.\begin{array}{c|l} x^3 & 2A+A=1, \\ x^2 & B+4A+B+A=0, \\ x & 2B+4A+D+B=-1, \\ 1 & 2B+D+K=-1 \end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases} A=1/3, \\ B=-5/6, \\ D=1/6, \\ K=1/2. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\mathrm{I}=\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}\right)\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+1}}.$$

Интеграл же

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}=\int\frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+1}}=\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|.$$

в) Представим интеграл следующим образом:

$$\mathrm{I}=\int\frac{x+4}{(x-1)(x+2)^2}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Дробь $\frac{x+4}{(x-1)(x+2)^2}$ разложим на простейшие дроби:

$$\frac{x+4}{(x-1)(x+2)^2}=\frac{5/9}{x-1}-\frac{2/3}{(x+2)^2}-\frac{5/9}{x+2}.$$

Тогда

$$\mathrm{I}=\frac{5}{9}\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}-\frac{2}{3}\int\frac{dx}{(x+2)2\sqrt{x^2+x+x}}-\frac{5}{9}\int\frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Первый интеграл вычисляется подстановкой $x-1=1/t$, второй и третий – подстановкой $x+2=1/t$ (все преобразования представляем читателю сделать самостоятельно).

1.24. Вычислить интегралы:

1. $\int\frac{(5x+4)dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$.

2.* $\int\sqrt{4x^2-4x+3}dx$.

3. $\int\frac{9x^3-3x^2+2}{\sqrt{3x^2-2x+1}}dx$.

4. $\int\sqrt{x^2+x+1}dx$.

5. $\int \frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}dx.$

6.* $\int \frac{3x^3+5x^2-7x+9}{\sqrt{2x^2+5x+7}}dx.$

7. $\int \frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}.$

8. $\int \frac{xdx}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}}.$

9. $\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+3x+2}}.$

10.* $\int \frac{(x^2-1)dx}{x\sqrt{1+3x^2+x^4}}.$

Отв.:

1. $5\sqrt{x^2+2x+5}-\ln(x+1)+\sqrt{x^2+2x+5})+C.$

2. $\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)\sqrt{4x^2-4x+3}+\frac{1}{2}\ln(2x-1+\sqrt{4x^2-4x+3})+C.$

3. $\frac{3x^2+x-1}{3}\sqrt{3x^2-2x+1}+C.$

4. $\frac{2x+1}{4}\sqrt{x^2+x+1}+\frac{3}{8}\ln\left|2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}\right|+C.$

5. $\frac{1}{3}(x^2-14x+111)\sqrt{x^2+4x+3}-66\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}\right|+C.$

6. $\frac{1}{64}(32x^2-20x-373)\sqrt{2x^2+5x+7}+\frac{3297}{128\sqrt{2}}\ln\left|4x+5+2\sqrt{4x^2+10x+14}\right|+C.$

7. $\frac{3x+5}{8(x+1)^2}\sqrt{x^2+2x}-\frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{x+1}+C.$

8. $-\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-1}-2\arcsin\frac{1}{x-2}+C.$

9. $-\frac{2}{15}\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}\cdot\frac{8x^2+12x+7}{(x+1)^2}+C.$

10. $\ln\left|\frac{x^2+1+\sqrt{x^4+3x^2+1}}{x}\right|+C.$

Указание. Сначала сделать подстановку $x^2=t$.

1.4. Интегрирование тригонометрических выражений

Рассмотрим интеграл вида

$$\int R(\sin x, \cos x)dx, \tag{1.13}$$

где R – рациональная функция переменных $x_1=\sin x$, $x_2=\cos x$.
Он рационализируется так называемой *универсальной тригонометрической подстановкой* $tg\frac{x}{2}=t.$

При этой подстановке

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \; x = 2arctgt, \; dx = \frac{2dt}{1+t^2}. \qquad (1.14)$$

1.25. Найти интеграл

$$\mathrm{I} = \int \frac{dx}{5 - 4\sin x + 3\cos x}.$$

Δ Используя подстановку $tg\,\dfrac{x}{2} = t$, с учетом соотношений (1.14) получаем

$$\mathrm{I} = \int \frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left(5 - 4\dfrac{2t}{1+t^2} + 3\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{(t-2)^2} = \frac{1}{2-t} + C. = \frac{1}{2 - tg(x/2)} + C. \blacktriangle$$

Универсальная подстановка часто ведет к громоздким преобразованиям. Ниже указаны случаи, когда цель может быть достигнута с помощью более простых подстановок:

1) Функция $R(\sin x, \cos x)$ – нечетная относительно $\sin x$, т.е. $R(-\sin x, \cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x)$. В этом случае выгоднее применить подстановку $\cos x = t$.

2) Функция $R(\sin x, \cos x)$ – нечетная относительно $\cos x$, т.е. $R(\sin x, -\cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x)$.

В этом случае рекомендуется применить подстановку $\sin x = t$.

3) Функция $R(\sin x, \cos x)$ – четная относительно $\sin x$ и $\cos x$, т.е. $R(-\sin x, -\cos x) \equiv R(\sin x, \cos x)$.

В этом случае вводится подстановка $tgx = t$.

1.26. Вычислить интегралы:

а) $\mathrm{I} = \dfrac{dx}{\sin x \sin 2x}$; б) $\mathrm{I} = \displaystyle\int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x} dx.$

Δ а) Здесь $R(\sin x, \cos x) = \dfrac{1}{\sin^2 x \cos x}$ и $R(\sin x, -\cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x)$. Вводим подстановку $\sin x = t$. Имеем

$$\mathrm{I} = \int \frac{\cos x dx}{2\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{d(\sin x)}{2\sin^2 x(1 - \sin^2 x)} == \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2(1-t^2)} =$$

$$\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{1-t^2}\right)dt = -\frac{1}{2t} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = -\frac{1}{2\sin x} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C.$$

б) Так как при изменении знаков у $\sin x$ и $\cos x$ подынтегральное выражение не меняет знака, то вводим подстановку $tg = t$.

Следовательно,

$$\mathrm{I}=\int\frac{tg^2x\cos^4x}{tgx+1}\cdot\frac{dx}{\cos^2x}=\int\frac{t^2dt}{(t+1)(t^2+1)^2}.$$

Разложим на простейшие дроби:

$$\frac{t^2}{(t+1)(t^2+1)^2}=\frac{A}{t+1}+\frac{Bt+D}{t^2+1}+\frac{Et+F}{(t^2+1)^2}.$$

Методом неопределенных коэффициентов находим

$$A=1/4, B=-1/4, D=1/4, E=1/2, F=-1/2.$$

Тогда

$$\mathrm{I}=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t+1}-\frac{1}{4}\int\frac{t-1}{t^2+1}dt+\frac{1}{2}\int\frac{t-1}{(t^2+1)^2}dt=\frac{1}{4}\ln\frac{1+t}{\sqrt{1+t^2}}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1+t}{1+t^2}+C=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\sin x+\cos x\right|-$$

$$-\frac{1}{4}\cos x(\sin x+\cos x)+C. \ \blacktriangle$$

1.27. Найти интегралы:

1. $\int\frac{dx}{\sin x(2+\cos x-2\sin x)}$.

2. $\int\frac{dx}{5+\sin x+3\cos x}$.

3. $\int\frac{\sin x}{1+\sin x}dx$.

4.* $\int\frac{dx}{1+4\cos x}$.

5. $\int\frac{dx}{6-5\sin x+\sin^2 x}$.

6. $\int\frac{(2\sin x+3\cos x)dx}{\sin^2 x\cos x+9\cos^3 x}$.

7. $\int\frac{\sin x+\sin^3 x}{\cos 2x}dx$.

8. $\int\frac{\sin 2xdx}{3+4\sin^2 x}$.

9. $\int\frac{\cos^5 x+\cos^3 x}{\sin^4 x+\sin^2 x}dx$.

10. $\int\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}dx$.

11. $\int\frac{\cos^5 x}{\sin^3 x}dx$.

Отв.:

1. $\frac{1}{3}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+\frac{5}{3}\ln\left|tg\frac{x}{2}-3\right|-\ln\left|tg\frac{x}{2}-1\right|+C.$

2. $\frac{2}{\sqrt{15}}arctg\frac{1+2tg(x/2)}{\sqrt{15}}+C.$ 3. $\frac{1}{\cos x}-tgx+x+C.$

4. $\frac{1}{\sqrt{15}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}tg(x/2)+\sqrt{5}}{\sqrt{3}tg(x/2)-\sqrt{5}}\right|+C.$

5. $\frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{2tg(x/2)-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{3tg(x/2)-1}{2\sqrt{2}} + C.$

6. $\ln(tg^2 x + 9) + arctg \frac{tgx}{3} + C.$

7. $\frac{1}{2}\cos x - \frac{3\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{1-\sqrt{2}\cos x}{1+\sqrt{2}\cos x}\right| + C.$

8. $\frac{1}{4}\ln(3+4\sin^2 x) + C.$

9. $\sin x - \frac{2}{\sin x} - 6arctg \sin x + C.$

10. $\ln|\sin x + \cos x| + C.$

11. $\frac{\sin^2 x}{2} - \frac{1}{2\sin^2 x} - 2\ln|\sin x| + C.$

Интегралы вида

$$\mathrm{I} = \int \sin^m x \cos^n x dx,\ m,n \in \mathbf{Q},$$

приводятся к интегралу от дифференциального бинома

$$\mathrm{I} = \int t^m (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt, t = \sin x,$$

и поэтому интегрируется в элементарных функциях только в трех случаях:

1) n -нечетное $((n-1)/2 - \text{целое})$;

2) m -нечетное $(\frac{m+1}{2} - \text{целое})$;

3) $m+n$ -четное $(\frac{m+1}{2} + \frac{n-1}{2} - \text{целое})$.

Если n нечетно, применяется подстановка $\sin x = t.$

Если m нечетно, применяется подстановка $\cos x = t.$

Если сумма $m + n$ четна, применяется подстановка $tgx = t$ или $ctgx = t$.

В частности, такая подстановка удобна для интегралов

$$\int tg^n x dx \text{ или } \int ctg^n x dx$$

при n целом положительном. Но последняя подстановка неудобна, если оба числа m и n положительны. Если m и n - неотрицательные четные числа, то применяется метод понижения степени с помощью формул

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \text{ или } \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

1.28. Найти интегралы:

а) $\mathrm{I} = \int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$; б) $\mathrm{I} = \sin^4 x \cos^6 x dx$;

в) $\mathrm{I}=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^{11}x\cos x}}$; г) $\mathrm{I}=\frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^{5}x\cos x}}$.

Δ а) Так как $m=3$ нечетно, то полагаем $\cos x=t, \sin xdx=-dt\Rightarrow$

$$\mathrm{I}=-\int(1-t^2)t^{-2/3}dt=-3t^{1/3}+\frac{3}{7}t^{7/3}+C=3\sqrt[3]{\cos x}\left(\frac{1}{7}\cos^2 x-1\right)+C.$$

б) Числа $m=4, n=6-$четные положительные. Понижаем степень:

$$\mathrm{I}=\frac{1}{16}\int(2\sin x\cos x)^4\cos^2 xdx=\frac{1}{32}\int\sin^4 2x(1+\cos 2x)=\mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2.$$

Интеграл I_2 вычисляется подстановкой $\sin 2x=t, \cos 2xdx=dt/2\Rightarrow$

$$\mathrm{I}_2=\frac{1}{32}\int\sin^4 2x\cos 2xdx=\frac{1}{64}\int t^4dt=\frac{t^5}{320}+C=\frac{1}{320}\sin^5 2xdx+C.$$

В интеграле I_1 снова понижаем степень:

$$\mathrm{I}_1=\frac{1}{32}\int\sin^4 2xdx=\frac{1}{128}\int(1-\cos 4x)^2dx=\frac{1}{128}(x-\frac{1}{2}\sin 4x)+$$

$$+\frac{1}{256}\int(1+\cos 8x)dx=\frac{3}{256}x-\frac{1}{256}\sin 4x+\frac{1}{2048}\sin 8x+C.$$

Таким образом, окончательно,

$$\mathrm{I}=\frac{3}{256}x-\frac{1}{256}\sin 4x+\frac{1}{2048}\sin 8x+\frac{1}{320}\sin^5 2x+C.$$

в) Оба показателя -11/3 и -1/3 – отрицательные числа и их сумма -11/3+ +(-1/3)= -4 – четна, поэтому вводим замену

$$tgx=t, \frac{dx}{\cos^2 x}=dt\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\mathrm{I}=\int\frac{dx}{\cos^4 x\sqrt[3]{tg^{11}x}}=\int\frac{1+t^2}{\sqrt[3]{t^{11}}}dt=\int\left(t^{-11/3}+t^{-5/3}\right)dt=-\frac{3}{8}t^{-8/3}-\frac{3}{2}t^{-2/3}+C=$$

$$=-\frac{3(1+4tg^2x)}{8tg^2x\sqrt[3]{tg^2x}}+C.$$

г) Подстановкой $t=\sin x$ интеграл I сводится к интегралу от дифференциального бинома

$$\mathrm{I}=\int t^{-5/3}(1-t^2)^{-2/3}dt.$$

В нем число $\frac{m+1}{n}+p=\frac{-5/3+1}{2}-\frac{2}{3}=-1-$целое, поэтому подстановкой $(-1+t^{-2})=z^3$ интеграл рационализируется. Однако для вычисления интеграла I удобнее применить подстановку $t=tgx.$

$$\mathrm{I} = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^5 x \cos x}} =$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt[3]{(\sin^5 x)/\cos^5 x}} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int tg^{-5/3} x dtgx = -\frac{3}{2}(tgx)^{-2/3} + C. \quad \blacktriangle$$

При вычислении интегралов от тригонометрических выражений часто применяются следующие формулы:

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right];$$

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right];$$

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right].$$

1.29. Найти интегралы:

а) $\mathrm{I} = \int \sin 3x \sin 5x dx$; б) $\mathrm{I} = \int \sin 2x \cos 4x dx$.

Δ а) Имеем:

$$\mathrm{I} = \frac{1}{2}\int (\cos 2x - \cos 8x) dx = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x + C.$$

б) $\mathrm{I} = \frac{1}{2}\int (\sin 6x - \sin 2x) dx = \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{12}\cos 6x + C.$ $\blacktriangle$

1.30. Найти интегралы:

1. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x} dx.$ 2. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx.$ 3. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x} dx.$

4. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}.$ 5. $\int tg^7 x dx.$ 6. $\int ctg^6 x dx.$

7. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx.$ 8. $\int \sin x \sin 3x dx.$ 9. $\int \cos x \cos 4x dx.$

10. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x} dx.$ 11. $\int \sin^5 x \sqrt[3]{\cos x} dx.$ 12. $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[5]{\sin x}} dx.$

13. $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos x \sqrt[3]{\cos x}}.$ 14.* $\int \frac{dx}{\cos x \sqrt[3]{\sin^2 x}}.$

15. $\int \frac{dx}{\cos^3 x \sqrt{\sin 2x}}.$ 16. $\int \frac{dx}{\cos x \sqrt{\sin^3 2x}}.$

17.* $\frac{(\cos x + \sin x) dx}{5\cos^2 x - 2\sin 2x + 2\sin^2 x}.$

18.* $\int \frac{dx}{\sin 2x + 4\sin x - 4\sin^2 x}.$

19. $\int\left(\frac{\sin 2x}{\sin^3 x+\cos^3 x}\right)^2 dx.$

20. $\int\frac{(1+\cos x)^2}{1+\sin x}dx.$

Отв.: 1. $\frac{1}{3\sin^3 x}-\frac{1}{5\sin^5 x}+C.$

2. $\frac{tg^3 x}{3}+\frac{tg^5 x}{5}+C.$

3. $-\left(ctgx+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{2}\cdot 3x\right)+C.$

4. $tgx+\frac{1}{3}tg^3 x+C.$

5. $\frac{1}{6}tg^6 x-\frac{1}{4}tg^4 x+\frac{1}{2}tg^2 x+\ln|\cos x|+C.$

6. $-ctgx+\frac{1}{3}ctg^3 x-\frac{1}{5}ctg^5 x-x+C.$

7. $-\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}-\frac{3}{2}\cos x+\frac{3}{4}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right|+C.$

8. $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{8}\sin 8x+C.$

9. $\frac{\sin 5x}{10}+\frac{\sin 3x}{6}+C.$

10. $-\frac{ctg^4 x}{4}+C.$

11. $-\frac{3}{80}\cos^{4/3}x(20-16\cos^2 x+5\cos^4 x)+C.$

12. $\frac{5}{28}\sin^{4/5}x(7-2\sin^2 x)+C.$

13. $\frac{3(5+\cos^2 x)}{5\sqrt[3]{\cos x}}+C.$

14. $\frac{1}{4}\ln\frac{(1-\sin x)(1+\sqrt[3]{\sin x})^3}{(1+\sin x)(1-\sqrt[3]{\sin x})^3}+\frac{\sqrt{3}}{2}arctg\frac{\sqrt[3]{\sin^2 x}-1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{\sin x}}+C.$

15. $\frac{\sqrt{2tgx}}{5}(5+tg^2 x)+C.$

16. $\frac{tg^2 x-3}{3\sqrt{2tgx}}+C.$

17. $\frac{3}{5}arctg(\sin x-2\cos x)+\frac{\sqrt{6}}{60}\ln\frac{\sqrt{6}+2\sin x+\cos x}{\sqrt{6}-2\sin x-\cos x}+C.$

18. $\frac{1}{2}\ln|tg(x/2)|+\frac{5}{6}\ln|tg(x/2)-3|-\frac{1}{2}\ln|tg(x/2)-1|+C.$

19. $-\frac{4}{3+3tg^3 x}+C.$

20. $x+\cos x+2\ln(1+\sin x)+tg\frac{2x-\pi}{4}+C.$

1.31.* Для интеграла

$$\mathrm{I}_n = \int \left(\frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\sin \frac{x+a}{2}} \right)^n, n = 0,1,2,....,$$

доказать рекуррентную формулу

$$\mathrm{I}_n = \frac{2\sin a}{n-1} \left(\frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\sin \frac{x+a}{2}} \right)^n + 2\cos a \mathrm{I}_{n-1} - \mathrm{I}_{n-2},\ n > 1,$$

и с её помощью вычислить I_3.

Отв.:

$$\mathrm{I}_3 = \cos a(2\cos 2a - 1)x + \sin a \left(\frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\sin \frac{x+a}{2}} \right)^2 + 2\sin 2a \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\sin \frac{x+a}{2}} -$$

$$- 2\sin a(2\cos 2a + 1)\ln\left|\sin \frac{x+a^2}{2}\right| + C.$$

Интегралы вида (1.8) можно свести к нахождению интегралов одного из следующих типов:

I. $\int R(t, \sqrt{p^2t^2 + q^2})dt.$ II. $\int R(t, \sqrt{p^2t^2 - q^2})dt.$

III. $\int R(t, \sqrt{q^2 - p^2t^2})dt,$ где $t = x + b/(2a),$

$ax^2 + bx + c = \pm p^2t^2 \pm q^2$ (выделение полного квадрата).

Интегралы же вида $\mathrm{I} - \mathrm{III}$ рационализируются относительно синуса и косинуса (обычных или гиперболических) следующими подстановками:

I. $t = \frac{p}{q} tgz$ или $t = \frac{p}{q} shz.$

II. $t = \frac{p}{q} \sec z$ или $t = \frac{q}{p} chz.$

III. $t = \frac{p}{q} \sin z$ или $t = \frac{q}{p} thz.$

1.32. Вычислить интегралы:

а) $\mathrm{I} = \int \frac{dx}{\sqrt{(5 + 2x + x^2)^3}}$; б) $\mathrm{I} = \int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2 + 2x + 2}}.$

Δ а) Так как $5 + 2x + x^2 = 4 + (x+1)^2$, то полагая $x + 1 = t$, получаем

$$\mathrm{I}=\int\frac{dt}{\sqrt{(4+t^2)^3}}, \text{ т.е. интеграл типа I.}$$

Осуществляя подстановку

$$t=2tgz\,,\; dt=\frac{2dz}{\cos^2 z};\; \sqrt{4+z^2}=\frac{2}{\cos z},$$

получаем

$$\mathrm{I}=\frac{1}{4}\int\cos zdz=\frac{1}{4}\sin z+C=\frac{x+1}{4\sqrt{5+2x+x^2}}+C.$$

б) Из преобразования $x^2+2x+2=(x+1)^2+1$; полагаем $x+1=t.$ Тогда $\mathrm{I}=\int\frac{dt}{t^2\sqrt{t^2+1}}$ $-$интеграл типа I.

Применив подстановку $t=shz,$ получим

$$dt=ch\,z\;dz\,,\sqrt{t^2+1}=\sqrt{1+sh^2z}=chz.$$

Следовательно,

$$\mathrm{I}=\int\frac{chzdz}{sh^2zchz}=\int\frac{dz}{sh^2z}=-cthz+C=-\frac{\sqrt{1+sh^2z}}{shz}+C=-\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}+C=$$

$$=-\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}+C.\;\blacktriangle$$

1.33. Найти интегралы:

1. $\int x^2\sqrt{x^2-1}dx.$
2. $\int\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}dx.$
3. $\int\sqrt{(x^2-1)^3}dx.$
4.* $\int\frac{dx}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x-x^2}}.$
5. $\sqrt{3-2x-x^2}\,dx\,.$
6. $\int\frac{dx}{\left(x^2-2x+5\right)^{3/2}}\,.$

Отв.: 1. $-\frac{1}{8}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+\frac{1}{8}\ln\left|2x^2-1\right|\cdot\sqrt{x^2-1}+C\,.$

2. $\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)-\sqrt{x^2+1}\,/\,x+C\,.$

3. $\frac{1}{8}x\left(2x^2-1\right)\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}+\frac{3}{8}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+C\,.$

4. $\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}-\frac{2}{\sqrt{1-x}}+C\,.$ **5.** $\arcsin\frac{x+1}{2}+C\,.$ **6.** $\frac{x-1}{4\sqrt{x^2+2x+5}}+C\,.$

2. Определенный интеграл

2.1. Интеграл Римана

Классы интегральных функций по Риману. Определенный интеграл и его свойства. Оценка определенности интеграла. Теорема о среднем

Пусть на отрезке $[a,b]$ определена функция $f(x)$ и пусть $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ – разбиение отрезка $[a,b]$ на *элементарные отрезки* $[x_{i-1}, x_i]$. Эти отрезки называются еще *отрезками разбиения*.

Пусть, далее, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ – длина элементарного отрезка. Выберем на этом отрезке произвольную точку ξ_i, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1,n}$, и составим сумму $I_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$, называемую *интегральной суммой Римана*.

Верхней (нижней) суммой Дарбу называется $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i \left(s_n = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i \right)$, где $M_i = \sup f(x) (m_i = \inf f(x))$ для $x \in [x_{i-1}, x_i]$. Обозначим $\Delta = \max_i \Delta x_i$, $i = \overline{1,n}$.

Определенным интегралом, или, *интегралом* Римана, от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ называется предел

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta x_i . \tag{2.1}$$

Если этот предел существует, то функция $f(x)$ называется *интегрируемой по Риману* (или просто *интегрируемой*) на $[a,b]$.

Отметим, что к классу интегрируемых функций на $[a,b]$ относятся непрерывные или кусочно-непрерывные функции на этом отрезке.

2.1. Исходя из определения, найти интеграл $\int_1^2 x^2 dx$.

Δ функция $f(x) = x^2$ интегрируема на $[1, 2]$, поскольку на этом отрезке она непрерывна. Разобьем отрезок $[1, 2]$ на n равных частей точками $x_i = 1 + \frac{i}{n}$, $i = \overline{0,n}$. В качестве точек ξ_i выберем концевые точки разбиения $\xi_i = x_i$. Тогда $\Delta x_i = \frac{1}{n}$ и, значит,

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} (n+i)^2 = \frac{1}{n^3} \left(\sum_{i=1}^{n} n^2 + 2\sum_{i=1}^{n} ni^2 + \sum_{i=1}^{n} i^2 \right) =$$

$$=\frac{1}{n^3}\left(n^3+2n\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)=2+\frac{1}{n}+\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right).$$

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} I_n=\dfrac{7}{3}$. ▲

2.2.* Исходя из определения, найти интегралы:

1) $\int\limits_0^1 x dx$. 2) $\int\limits_1^2 \dfrac{dx}{x}$ (в качестве разбиения взять $x_0=1,\ x_1=q,\ x_2=q^2,...,x_n=q^n=2$).

3) $\int\limits_a^b dx, m\neq -1,\quad 0<a<b$ (точки разбиения $x_0=a, x_1=a\left(\dfrac{b}{a}\right)^{1/n}$, $x_2=a\left(\dfrac{b}{a}\right)^{2/n}$, …, $x_i=a\left(\dfrac{b}{a}\right)^{i/n}$, …, $x_n=a\left(\dfrac{b}{a}\right)^{n/n}=b$).

4) $\int\limits_0^1 e^x dx$. 5) $\int\limits_0^{\pi/2}\sin x dx$.

Отметим следующие *свойства определенного интеграла*. Все они доказаны в [1]. Предполагается, что функции интегрируемы на соответствующем отрезке.

1°. $\int\limits_a f(x)dx=0$. 2°. $\int\limits_b^a f(x)dx=-\int\limits_a^b f(x)dx$. 3°. $\int\limits_a^b dx=b-a$.

4°. *Аддитивность интеграла*. Если $a\le c\le b$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx.$$

5°. *Линейность интеграла*. Для любых $\lambda_k\in\boldsymbol{R}, k=\overline{1,n}$, справедливо: $\int\limits_a^b\left(\sum\limits_{k=1}^n\lambda_k f_k(x)\right)dx=\sum\limits_{k=1}^n\lambda_k\int\limits_a^b f_k(x)dx$.

6°. *Интегрирование неравенств.* Если $f(x)\le g(x),\ \forall x\in[a,b]$, то при $a<b$

$$\int\limits_a^b f(x)dx\le\int\limits_a^b f(x)dx.$$

7°. Если $f(x)\ge 0$ на $[a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx\ge 0$.

8°. *Оценка интеграла по модулю*: $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right|\le\int\limits_a^b|f(x)|dx$, $a\le b$.

9°. *Оценка интеграла*. Пусть $M=\sup\limits_{[a,b]}f(x),\ m=\inf\limits_{[a,b]}f(x)$ и $a<b$. Тогда

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

10°. ***Теорема о среднем***. *Если* $f(x)$ *– непрерывная на* $[a,b]$ *функция, то на этом отрезке найденная точка* ξ*,* $a \le \xi \le b$*, что*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Величина $f(\xi) = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ называется *средним значением функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a,b]$.

Интеграл $\int_a^b f(x)dx$ геометрически выражает площадь S *криволинейной трапеции* (рис. 2.1).

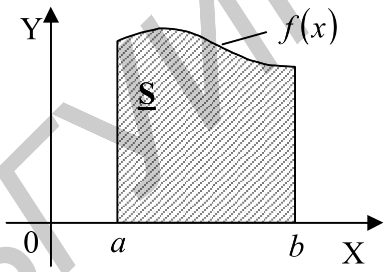

Рис. 2.1

2.3. Выяснить, какой из интегралов больше: $I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx$ или $I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^7 x dx$?

Δ На отрезке $[0, \pi/2]$ функции $\sin^7 x$ и $\sin^3 x$ непрерывны, а значит, интегрируемы, и выполняется строгое неравенство $\sin^7 x < \sin^3 x$. Поэтому по свойству 6° $I_2 < I_1$. ▲

Одним из свойств интеграла является свойство

11°. ***Непрерывность интеграла.*** Если функция f интегрируема на $[a,b]$, то функции

$F(x) = \int_a^x f(\mathrm{t})dt$ и $G(x) = \int_a^b f(\mathrm{t})dt$ непрерывны на этом отрезке.

2.4. Доказать, что если функция f интегрируема на $[a,b]$, то

$$\lim_{\xi \to 0} \int_{a+\xi}^{b-\xi} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx, \quad 0 < \xi < b-a.$$

Δ По свойству аддитивности интеграла имеем:

$\int_{a+\xi}^{b-\xi} f(x)dx = \int_{a+\xi}^{c} f(x)dx + \int_c^{b-\xi} f(x)dx$. Отсюда с учетом свойства 11° получаем

$$\lim_{\xi \to 0} \int_{a+\xi}^{b-\xi} f(x)dx = \lim_{\xi \to 0}\left[\int_{a+\xi}^{c} f(x)dx + \int_c^{b-\xi} f(x)dx\right] = \lim_{\xi \to 0} \int_{a+\xi}^{c} f(x)dx + \lim_{\xi \to 0} \int_c^{b-\xi} f(x)dx =$$

$$= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx. \ ▲$$

2.5. Выяснить, какой интеграл больше:

1) $I_1 = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx$ или $I_2 = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$.

2) $I_1 = \int\limits_{1/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ или $I_2 = \int\limits_{1/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

3) $I_1 = \int\limits_0^1 e^{-x} \sin x dx$ или $I_2 = \int\limits_0^1 e^{-x^2} \sin x dx$.

4) $I_1 = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ или $I_2 = \int\limits_0^1 \frac{dx}{x}$.

Отв.: 1) $I_2 > I_1$. **2)** $I_1 > I_2$. **3)** $I_1 > I_2$. **4)** $I_2 > I_1$.

2.6. Доказать неравенства:

1) $0 < \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt[5]{x^2+2}} dx < \frac{\pi}{\sqrt[5]{2}}$.

2) $\frac{\sqrt{2}}{3} < \int\limits_{-1}^{1} \frac{\cos x \, dx}{\sqrt[3]{x^2+8}} < 1$.

3) $\frac{1}{\sqrt[3]{9}} < \frac{1}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} \frac{\pi + arctgx}{\sqrt[3]{x^2+8}} dx < \frac{3}{2}$.

2.2. Формула Ньютона – Лейбница

Интеграл с переменным верхним пределом. Замена переменной в определенном интеграле. Интеграл от четных, нечетных и периодических функций. Интегрирование по частям в определенном интеграле.

Если $f(x)$ – интегрируемая на $[a,b]$ функция, то $\forall x \in [a,b]$ она является интегрируемой на отрезке $[a,x]$. Интеграл

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t) dt \qquad (2.2)$$

является функцией от верхнего предела интегрирования x. Для этого предела справедлива

Теорема 2.1 (Барроу). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то функция $F(x)$, определяемая формулой (2.2), является первообразной для $f(x)$ на $[a,b]$, т.е.*

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int\limits_a^x f(t) dt = f(x). \qquad (2.3)$$

Следовательно,

$$\int f(x) dx = \int\limits_a^x f(t) dt + C.$$

Следствие. *При выполнении условий теоремы 2.1. функция* $G(x)=\int_x^b f(t)dt$ *также дифференцируема в любой точке* $x\in[a,b]$ *и* $G'(x)=-f(x)dx$.

Теорема 2.2. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на* $[a,b]$, *то для любой ее первообразной* F *имеет место формула.*

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a), \tag{2.4}$$

которая часто записывается в виде

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b.$$

Формула (2.4) называется *формулой Ньютона – Лейбница*.

2.7. Вычислить интеграл $\int_{sh1}^{sh2}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

Δ Имеем

$$\int_{sh1}^{sh2}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_{sh1}^{sh2}=\ln\frac{sh2+\sqrt{1+sh^2 2}}{sh1+\sqrt{1+sh^2 1}}=$$

$$=\ln\frac{sh2+ch2}{sh1+ch1}=\ln e=1.\blacktriangle$$

2.8. Пусть $F(x)$ – первообразная для функции $\int_0^x\left(t^3-1\right)dt$, причем $F(0)=-1$. Найти $F(-1)$.

Δ По условию $F'(x)=\int_0^x\left(t^3-1\right)dt$. Тогда по формуле Ньютона – Лейбница $F'(x)=\left(t^4/4-t\right)\Big|_0^x=x^4/4-x$. Отсюда

$$F(x)=\int\left(x^4/4-x\right)dx=x^5/20-x^2/2+C.$$

Из условия $F(0)=-1$ получим $-1=C$, значит, $F(x)=x^5/20-x^2/2-1$. . Отсюда $F(-1)=-31/20$. $\blacktriangle$

Если $f(x)$ – непрерывная на отрезке $[A,B]$ функция, а функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$дифференцируемы на $[a,b]$, причем $A\le\varphi(x)\le B$, $A\le\psi(x)\le B$ при $a\le x\le b$, то функция $F(x)=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(t)dt$, $a\le x\le b$, дифференцируема на $[a,b]$ и

$$\frac{d}{dx}\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt = f(\psi(x))\cdot\psi'(x) - f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x). \qquad (2.5)$$

Найдем, например, производную для функции $F(x)=\int\limits_{\sin x}^{\ln x} e^{-t^2}dt$.

По формуле (2.5) получаем $F'(x)=e^{-\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x}-e^{-\sin^2 x}\cdot\cos x$.

2.9. Найти производные:

1) $\frac{d}{dx}\int\limits_a^b \sin x^2 dx$. 2) $\frac{d}{dx}\int\limits_x^b \sin t^2 dt$.

3) $\frac{d}{dx}\int\limits_0^{x^2} \sqrt{1+t^2 dt}$. 4) $\frac{d}{dx}\int\limits_{\sin x}^{\cos x} \cos \pi t^3 dt$.

Отв.: **1)** 0; **2)** $-\sin x^2$; **3)** $2x\sqrt{1+x^4}$;
4) $-\sin x\cos\left(\pi\cos^3 x\right)-\cos x\cos\left(\pi\sin^3 x\right)$.

2.10. Найти интегралы:

1) $\int\limits_1^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$. 2) $\int\limits_0^1 \left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)dx$. 3) $\int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

4) $\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{1+x^6}$. 5) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{4x^2+4x+5}$. 6) $\int\limits_0^2 \frac{2x-1}{2x+1}dx$.

7) $\int\limits_0^1 \frac{\left(x^2+3x\right)dx}{(x+1)\left(x^2+1\right)}$. 8) $\int\limits_1^2 \frac{e^{1/x^2}}{x^3}dx$.

9) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$.

Отв.: **1)** $\frac{3}{2}\left(2\sqrt[3]{2}-1\right)$. **2)** $19/15$. **3)** $\pi/3$. **4)** $\pi/12$.
5) $\frac{1}{4}arctg\ \frac{4}{7}$.

6) $2-\ln 5$; **7)** $\pi/4$. **8)** $\frac{1}{2}\left(e-e^{1/4}\right)$; **9)** $\ln 2$.

2.11. Найти предел $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\int\limits_0^{x^2} \sin \sqrt{x}\, dx}{x^3}$.

Δ При $x = 0$ интеграл $\int\limits_0^{x^2} \sin \sqrt{x}\, dx = 0$. Условия для применения правила Лопиталя выполнены. Поэтому $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left[\int\limits_0^{x^2} \sin\sqrt{x} dx\right]'_{x^2} \cdot \left(x^2\right)'_x}{3x^2} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x \sin x}{3x^2} = \dfrac{2}{3}$. ▲

2.12. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\int\limits_0^x arctg^2 t\, dt}{\sqrt{x^2+1}}$.   2) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\left(\int\limits_0^x e^{t^2} dt\right)^2}{\int\limits_0^x e^{2t^2} dt}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int\limits_0^x \cos t^2 dt}{x}$.   4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int\limits_0^{\sin x} \sqrt{tgt}\, dt}{\int\limits_0^{tgx} \sqrt{\sin t}\, dt}$.

Отв.: **1)** $\pi^2/4$; **2)** 0; **3)** 1 q; **4)** 1.

2.13. Найти точки экстремума функций:

1) $\int\limits_0^x (t-1)(t-2)^2\, dt$.   2) $\int\limits_1^x e^{-t^2/2}\left(1-t^2\right) dt$.   3) $\int\limits_0^{x^2} \dfrac{t^2 - 5t + 4}{2 + e^t} dt$.

Отв.: **1)** В точке $x = 1$ – min , в точке $x = 2$ экстремума нет. **2)** В точке $x = 1$ – max, в точке $x = -1$ – min. **3)** В точках $x = 0, \pm 2$ – min, в точках $x = \pm 1$ – max.

Определенные интегралы часто легче вычисляются, если в них выполнить *замену переменной интегрирования*. Суть этой замены в следующем.

Теорема 2.3. *Если функция* $x = \varphi(t)$ *удовлетворяет условиям:*

1) $\varphi(t)$- *непрерывная однозначная функция,* $t \in [\alpha, \beta]$, *и имеющая на этом отрезке непрерывную производную* $\varphi'(t)$.

2) *Если* $t \in [\alpha, \beta]$, *то значения* $\varphi(t)$ *не выходят за пределы отрезка* $[a,b]$.

3) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, *то для любой функции* $f(x)$, *непрерывной на отрезке* $[a,b]$, *справедлива следующая* ***формула замены переменной интегрирования (или подстановка)*** *в определенном интеграле:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt \ . \tag{2.6}$$

2.14. Найти интеграл $I = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,dx$.

Δ Применим подстановку $x = 2\sin t$ («логика» этой подстановки в том, что нам необходимо избавиться от радикала, интегрирование которого чаще всего не очень просто). Здесь $-\pi/3 \le t \le \pi/3$. Функция $x = \varphi(t) = \sin t$ на $[-\pi/3, \pi/3]$ удовлетворяет всем требованиям теоремы 2.3: она непрерывно дифференцируема, монотонна $\varphi(-\pi/3) = -\sqrt{3}$, $\varphi(\pi/3) = \sqrt{3}$. Тогда $x = 2\sin t$, $dx = 2\cos t dt$, $\sqrt{4-x^2} = 2|\cos t| = 2\cos t$, ибо при $t \in [-\pi/3, \pi/3] \Rightarrow \cos t > 0$.

Итак: $I = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,dx = 4\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos^2 t dt = \dfrac{4\pi}{3} + \sqrt{3}$

(читателю предоставляется «право» убедиться в этом самому). ▲

2.15. Найти интеграл $I = \int_2^4 \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}dx$.

Δ Убедимся в том, что подстановка $x = 2\sec t = 2\cdot(1/\cos t)$ рационализирует подынтегральное выражение, при этом:

$$dx = 2\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt \ ; \begin{cases} x = 2 \Rightarrow t = 0; \\ x = 4 \Rightarrow t = \pi/3. \end{cases}$$

Таким образом, поскольку функция $x = 2\sec t$ монотонна, то значит,

$$I = \int_0^{\pi/3} \frac{\sqrt{4\sec^2 t}}{16\sec^4 t}\cdot 2\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/3} \sin^2 t\cos t dt = \frac{1}{12}\sin^3 t\Big|_0^{\pi/3} = \frac{\sqrt{3}}{12}. \blacktriangle$$

Надо сказать, что применение той или иной подстановки для определенного интеграла при его вычислении требует «искусства», что не всегда легко. В этом случае нужна практика работы с определенными интегралами. Для этого студентам рекомендуется чаще обращаться к учебникам, учебным пособиям, где такие подстановки уже становятся «стандартными».

2.16. Вычислить интегралы:

1) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$. 2) $\int_1^{\sqrt{3}} \dfrac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

3) $\int_0^{\pi/2} \dfrac{\cos x dx}{6 - 5\sin x + \sin^2 x}$.

4) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$. 5) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$; $a>0, b>0$.

6)* $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\,dx$. 7) $\displaystyle\int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

8) $\displaystyle\int_3^{2} \frac{\sqrt[3]{\left(2-x^2\right)^3}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}\,dx$.

9)* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$. 10)* $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx$.

Отв.: 1) $\pi a^2/16$; **2)** $(\sqrt{3}-\sqrt{2})/2$; **3)** $\ln(4/3)$; **4)** $\pi/3\sqrt{2}$;
5) $\dfrac{1}{ab}\, arctg\, \dfrac{b}{a}$;
6) $\sqrt{2} - 2/\sqrt{3} + \ln \dfrac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$; **7)** $2(\sqrt{3}-1)$; **8)** $8+\dfrac{2\pi\sqrt{3}}{2}$; **9)** $\pi^2/4$;
10) $(\pi \ln 2)/8$.

2.17. Доказать равенство

$$\int_0^1 \frac{arctgx}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{t}{\sin t}\,dt.$$

2.18.* Вычислить интеграл $I = \displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dt$.

Отв.: $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(arctg\, \dfrac{3\sqrt{2}}{4} + \pi \right)$.

Пусть функции $u = u(x)$ и $\vartheta = \vartheta(x)$ – непрерывно дифференцируемы на $[a,b]$. Тогда имеет место следующая *формула интегрирования по частям в определенном интеграле:*

$$\int_a^b u d\vartheta = u\vartheta\Big|_a^b - \int \vartheta du. \qquad (2.7)$$

2.19. Найти интеграл: $I = \displaystyle\int_1^e x\ln x dx$.

Δ Имеем:

$$I = \begin{vmatrix} u = \ln x; du = dx/x; \\ d\vartheta = xdx; \vartheta = x^2/2 \end{vmatrix} = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e xdx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}x^2\Big|_1^e = (e^2+1)/4. \blacktriangle$$

2.20. Найти интегралы:

1) $\int\limits_0^{\pi/\beta} e^{\alpha x}\sin\beta x dx$. 2) $\int\limits_1^{e}\ln^3 x dx$.

3) $\int\limits_0^{\pi^2/4}\sin\sqrt{x}\,dx$. 4) $\int\limits_0^{1}\frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}dx$.

5) $\int\limits_0^{\pi/2}x^2\sin x dx$. 6)* $\int\limits_0^{a}\left(a^2-x^2\right)^n dx,\ n\in \boldsymbol{N}$.

7) $\int\limits_0^{1}x\ln\left(1+x^2\right)dx$. 8) $\int\limits_0^{\pi/4}\ln\left(1+tgx\right)dx$.

9) $\int\limits_0^{\pi/2}\sin 2x\ arctg\left(\sin x\right)dx$. 10)* $\int\limits_1^{16}arctg\sqrt{\sqrt{x}-1}dx$.

Отв.: 1) $\frac{\beta\left(e^{\alpha\pi/\beta}+1\right)}{\alpha^2+\beta^2}$; **2)** $6-2e$; **3)** 2. **4)** $\pi\sqrt{2}-4$;

5) $\pi-2$; **6)** $a^{2n+1}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$; где $(2n)!!=2\cdot4\cdot6\cdots2n$.

$(2n+1)!!=1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)$;

7) $\ln 2-1/2$; **8)** $\ln(2/8)$; **9)** $9(\pi/2-1)$;

10) $16\pi/3-2\sqrt{3}$.

Справедлива

Теорема 2.4. *Пусть $f(x)$ – интегрируемая на $[-a,a]$ функция. Тогда: если f – четная функция, то*

$$\int\limits_{-a}^{a}f(x)dx=2\int\limits_0^{a}f(x)dx, \tag{2.8}$$

если f – нечетная функция, то $\int\limits_{-a}^{a}f(x)dx=0$; если f – периодическая функция периода T, то $\forall a\in \mathrm{R}$

$$\int\limits_a^{a+T}f(x)dx=\int\limits_0^{T}f(x)dx. \tag{2.9}$$

2.21. Вычислить интегралы:

а) $I=\int\limits_{-1}^{1}|x|dx$. б) $I=\int\limits_{-2}^{2}\frac{x^6\sin x}{x^8+3}$. в) $I=\int\limits_{\pi}^{5\pi/4}\frac{\sin 2xdx}{\cos^4 x+\sin^4 x}$.

Δ а) Так как функция $f(x)=|x|$ – четная, то $I=2\int\limits_0^{1}xdx=1$.

б) Подынтегральная функция нечетная, поэтому $I = 0$.

в) Так как

$$f(x+\pi) = \frac{\sin 2(x+\pi)}{\cos^4(x+\pi)+\sin^4(x+\pi)} = \frac{\sin 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x} = f(x),$$ то

подынтегральная функция имеет период π. Поэтому можно отнять от верхнего и нижнего пределов интегрирования число π:

$I = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin 2x\,dx}{\cos^4 x+\sin^4 x} = 2\int_0^{\pi/4} \frac{tgx\,dx}{\cos^2 x\left(1+tg^4 x\right)}$. Последний интеграл легко вычисляется подстановкой $t = tgx$. Он равен $\pi/4$.▲

2.22. Доказать равенства:

1) $\int_{-a}^{a} \cos x f\left(x^2\right) dx = 2\int_0^a \cos x \cdot f\left(x^2\right) dx.$

2*) $\int_{-a}^{a} \sin x \cdot f(\cos x)\; dx = 0.$

3) $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(a+b-x)\, dx$.

Указание. В интеграле справа сделать подстановку $x = a + b - t$.

4*) $\int_0^{\pi} f(\sin x)\, dx = 2\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\, dx$.

2.23. Вычислить интегралы:

1)* $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{2x^7+3x^6-10x^5-7x^3-12x^2+x+1}{x^2+2} dx$.

2) $\int_{-1/2}^{1/2} \cos x \ln \frac{1+x}{1-x} dx$.

Отв.: 1) $-\frac{16}{5}\sqrt{2}+\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$; **2)** 0.

2.3. Приближенные методы вычисления определенных интегралов

Квадратурные формулы прямоугольников и трапеций. Квадратурная формула Симпсона.

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана система точек $\{x_i\}$, $0 < i \le n$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, и система чисел $\{A_i\}$, $i = \overline{1,n}$.

Для интегрируемой на $[a,b]$ функции $y = f(x)$ приближенное равенство

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} A_i f(\xi_i) \tag{2.10}$$

называется *квадратурной формулой*. Точки ξ_i называются *узлами,* а числа A_i – *весами* этой формулы. Разность

$$\Delta = \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} A_i f(\xi_i) \tag{2.11}$$

называется *погрешностью* квадратурной формулы.

Если отрезок $[a, b]$ разбивается на n равных частей узлами интегрирования $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, то расстояние h между двумя соседними узлами, называемое *шагом интегрирования*, есть величина постоянная, равная $h = (b - a)/n$. Тогда $\xi_i = a + ih$, $i = \overline{1, n}$. Квадратурная формула

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \tag{2.12}$$

называется *формулой прямоугольников*.

Если в качестве точек ξ_i выбрать левые концы отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$, то получим так называемую *формулу левых прямоугольников*:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{b-a}{n}\left(f(a) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1})\right).$$

Поскольку $x_i = a + ih$, то эта формула преобразуется к виду

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \ldots + f(a + (n-1)h)\right) \tag{2.13}$$

При выборе в качестве ξ_i правых концов отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ получим *формулу правых прямоугольников*:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(f(a+h) + f(a+2h) + \ldots + f(a+nh)\right), \tag{2.14}$$

где $a + nh = b$.

При выборе в качестве ξ_i середины отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, т.е. $\xi_i = (x_{i-1} + x_i)/2$, получим так называемую *составную квадратурную формулу прямоугольков*:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(f(a + h/2) + f(a + 3h/2) + \ldots + f\left(a + (2n-1)h/2\right)\right) =$$

$$= \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + \left(i - \frac{1}{2}\right)h\right). \tag{2.15}$$

Если $M_2 = \max\limits_{[a,b]} |f''(x)|$, то максимальная сверху оценка погрешности формулы (2.15) определяется выражением

$$\Delta \le \frac{b-a}{24} h_2 M_2 = \frac{(b-a)^3}{24 n^2} M_2 . \qquad (2.16)$$

Пусть $\xi_i = a + ih$, $i = \overline{1, n}$, тогда квадратурную формулу

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2n}\left(f(a) + f(b) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + \ldots + 2f(a+(n-1)h)\right)$$

(2.17)

называют *квадратурной формулой трапеций*. Ее погрешность определяется выражением

$$\Delta \le \frac{(b-a)^3}{12 n^2} M_2 , \qquad (2.18)$$

где $M_2 = \max\limits_{[a,b]} |f''(x)|$.

Если отрезок $[a, b]$ разделить на $2n$ частей так, что $h = (b-a)/2n$, то формула

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2}) = \qquad (2.19)$$

$$= \frac{b-a}{6n}\left(f(a) + f(b) + 2\left(f(x_2) + f(x_4) + \ldots + f(x_{2n-2})\right) + 4\left(f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{2n-1})\right)\right)$$

называется *квадратурной формулой Симпсона*, или *формулой парабол*. Погрешность формулы Симпсона определяется соотношением

$$\Delta \le \frac{(b-a)h^4}{180} M_4 = \frac{(b-a)^5}{2880} M_4 , \text{ где } M_4 = \max_{[a,b]} |f''(x)|. \qquad (2.20)$$

2.24. Найти число узлов для вычисления интеграла $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ по формуле составных прямоугольников с точностью 10^{-4}.

Δ Имеем

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)} \Rightarrow M_2 = \max_{[0,1]} |f''(x)| = f''(0) = 2 .$$

Тогда по формуле (2.16)

$$\frac{(b-a)^3}{24 n^2} M_2 = \frac{1}{24 n^2} \cdot 2 \le 10^{-4} \Rightarrow n \ge 50 / \sqrt{3} \Rightarrow n \ge 30 .$$

Следовательно, для вычисления данного интеграла с точностью до 10^{-4} по формуле составных прямоугольников отрезок интегрирования $[0,1]$ необходимо разбить на 30 равных частей. ▲

2.25. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x}$ с помощью: а) составной формулы прямоугольников; б) формулы трапеций; в) формулы Симпсона, разбив отрезок интегрирования на 10 равных частей, и произвести оценки погрешностей вычислений.

Δ В нашем случае $a = 0$, $b = 1$, $2n = 10$, $h = (b-a)/10 = 0{,}1$. За узлы интегрирования возьмем точки x_0, x_2, x_4, x_6, x_8, x_{10}. Составим таблицу $f(x_i)$ функции $f(x) = 1/(x+1)$ в узлах (все вычисления проведены с четырьмя десятичными знаками после запятой):

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$f(x_i)$	1	0,9091	0,8333	0,7692	0,7143	0,6667	0,6250	0,5882	0,5556	0,5263	0,5000

а) При вычислении интеграла по формуле прямоугольников (2.16) середин частичных отрезков интегрирования являются точки x_1, x_3, x_5, x_7, x_9. Поэтому

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx \frac{1}{5}\left(f(x_1)+f(x_3)+f(x_5)+f(x_7)+f(x_9)\right) = \frac{1}{5}\cdot 3{,}4595 = 0{,}6912.$$

б) По формуле (2.17) получаем

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx \frac{1}{5}\left(\frac{f(0)+f(x_1)}{2} + f(x_2)+f(x_4)+f(x_6)+f(x_8)\right) = 0{,}6866.$$

в) По формуле (2.19) находим

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx \frac{1}{30}\big(f(0)+f(1)+2\left(f(x_2)+f(x_4)+f(x_6)+f(x_8)\right)+$$
$$+4\left((x_1)+f(x_3)+f(x_5)+f(x_7)+f(x_9)\right)\big) = 0{,}6931 \; .$$

Так как $M_2 = \max\limits_{[0,1]}\left|\left(\frac{1}{1+x}\right)''\right| = 2$, $M_4 = \max\limits_{[0,1]}\left|\left(\frac{1}{1+x}\right)^{IV}\right|$, то по формулам (2.16), (2.18), (2.20) оценки погрешностей равны: а) 0,0333; б) 0,0666; в) 0,0021, т.е. наиболее точное значение интеграла получается по формуле Симпсона. Точное значение интеграла равно $\ln 2 = 0{,}693147\ \ldots$ ▲

2.26. Вычислить с погрешностью не более ε интеграл:

1) $\int\limits_1^2 \frac{xdx}{1+x^3}$, $\varepsilon = 10^{-4}$.　　2) $\int\limits_0^2 \sqrt{1+4x^2}\,dx$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

3) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}$, $\varepsilon = 10^{-3}$.　　4) $\int\limits_1^9 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

5) $\int\limits_1^3 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx\ ,\varepsilon = 10^{-3}$.   6) $\int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x}dx\ ,\varepsilon = 10^{-3}$.

7) $\int\limits_1^2 \frac{e^{-x}}{x},\varepsilon = 10^{-4}$.   8) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+x}dx\ ,\varepsilon = 10^{-3}$.

9) $\int\limits_0^{\sqrt{\pi/2}} \cos x^2 dx\ \ \varepsilon = 10^{-3}$.   10) $\int\limits_0^{\pi} \sin(\sin x)\,dx\,,\varepsilon = 10^{-3}$.

Отв.: **1)** 0,3502; **2)** 4,6470; **3)** 0,7535; **4)** 1,2280; **5)** 2,3020; **6)** 0,2400; **7)** 0,1705; **8)** 0,6736; **9)** 0,9775; **10)** 1,7866.

2.4. Геометрические приложения определенных интегралов

Площадь плоской фигуры в прямоугольной декартовой системе координат. Площадь плоской фигуры при параметрическом задании ее границ. Площадь плоской фигуры в полярной системе координат. Вычисление длины дуги в декартовой и полярной системах координат. Вычисление объемов тел. Площадь поверхности и объем тела вращения.

Исходя из определения определенного интеграла, площадь криволинейной трапеции D, ограниченной графиком неотрицательной функции $y = y(x)$, $x \in [a,b]$, отрезком $[a,b]$ оси X и соответствующими отрезками прямых $x = a$ и $x = b$ (рис 2.2), равна

$$S = \int\limits_a^b y(x)\,dx\ . \qquad (2.21)$$

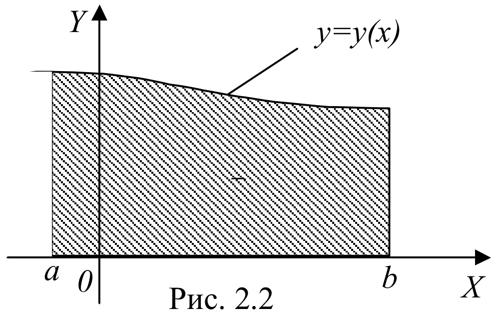

Рис. 2.2

Если функция $y = y(x)$ задана параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, где $x(t)$ имеет непрерывную неотрицательную на $[\alpha, \beta]$ производную, $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$, а $y(t)$ – непрерывна и неотрицательна на $[\alpha, \beta]$, то площадь области D равна

$$S = \int\limits_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt. \qquad (2.22)$$

Если область D ограничена графиками функций $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$, непрерывных на $[a,b]$, и $y_2(x) \geq y_1(x)$, $\forall x \in [a,b]$, то площадь такой области (рис. 2.3) равна

$$S = \int\limits_a^b (y_2(x) - y_1(x))\,dx\ . \qquad (2.23)$$

При аналогичных предположе-

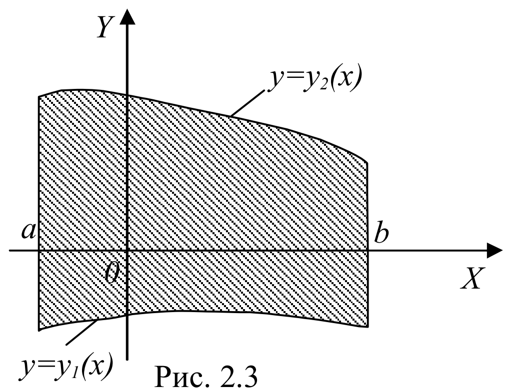

Рис. 2.3

ниях относительно данных функций для площади области D (рис. 2.4) имеют место формулы

$$S = \int_{c}^{d} x(y)\, dy\,, \tag{2.24}$$

$$S = \int_{\beta}^{\alpha} x(t) y'(t) dt\ . \tag{2.25}$$

Кроме того, можно пользоваться формулой

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \left(xy' - yx'\right) dt\ , \tag{2.26}$$

где α и β – значения параметра t, соответствующие началу и концу обхода контура в положительном направлении, при котором область D остается слева.

Для площади области D (рис. 2.5)

$$S = \int_{c}^{d} \left(x_2(y) - x_1(y)\right) dy\ . \tag{2.27}$$

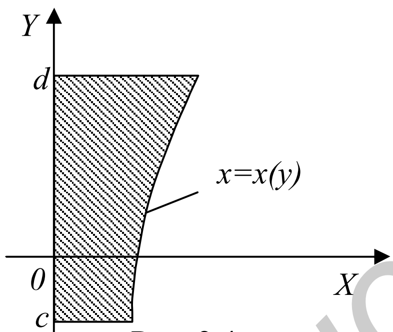

Рис. 2.4

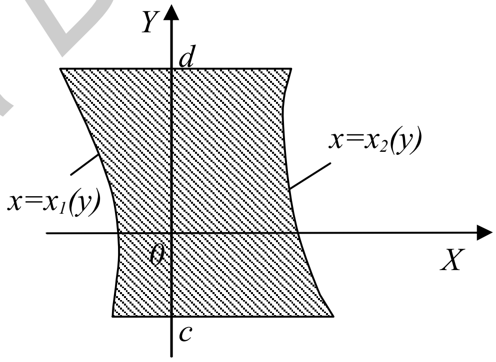

Рис. 2.5

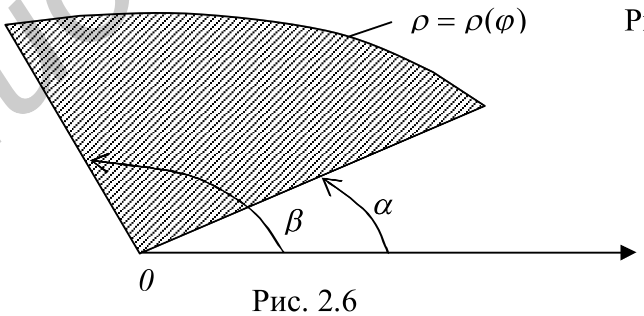

Рис. 2.6

Пусть функция $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, где $0 < \beta - \alpha \le 2\pi$, непрерывна и неотрицательна на $[\alpha, \beta]$. *Площадь сектора* D (рис. 2.6), ограниченного графиком функции $\rho(\varphi)$ в полярных координатах и соответствующими отрезками лучей $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, равна

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi\ . \tag{2.28}$$

2.27. Найти площадь фигуры, заключенной между параболой $x^2 = 4y$ и *локоном Аньези* $y = 8/(x^2+4)$ (рис. 2.7).

Δ Решив систему

$y = 8/(x^2+4)$,

$y = x^2/4$,

находим абсциссы точек A и C пересечения данных кривых. Это $x_1 = -2$ и $x_2 = 2$.

Из рисунка следует, что

$8/(x^2+4) \geq 0$

на отрезке $[-2,2]$. Следовательно,

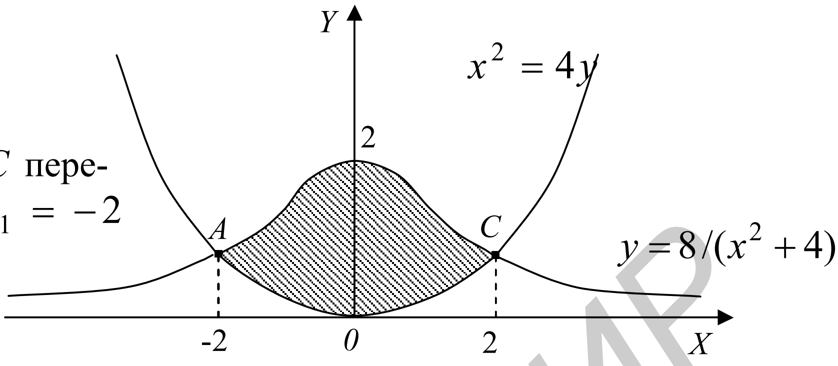

Рис. 2.7

$$S = \int_{-2}^{2}\left(\frac{8}{x^2+4} - \frac{x^2}{4}\right)dx = \left(4\,arctg\ \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12}\right)\Bigg|_{-2}^{2} = 2\pi - \frac{4}{3}.▲$$

2.28.* К эллипсу $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ проведена касательная в точке $C = \left(a/2,\, b^{\sqrt{3}}/2\right)$. Найти площадь криволинейного треугольника ABC (рис. 2.8).

Δ Дуга AC эллипса и отрезок касательной BC являются графиком функций $x = x_1(y) = a\sqrt{1 - y^2/b^2}$ и $x = x_2(y) = a\left(2 - \dfrac{y\sqrt{3}}{b}\right)$, где $0 \leq y \leq b\sqrt{3/2}.$. По формуле (2.27) имеем $S = \int\limits_{0}^{b\sqrt{3/2}}\left(x_2(y) - x_1(y)\right)dy$. Интеграл от функции $x_2(y)$ вычисляется легко:

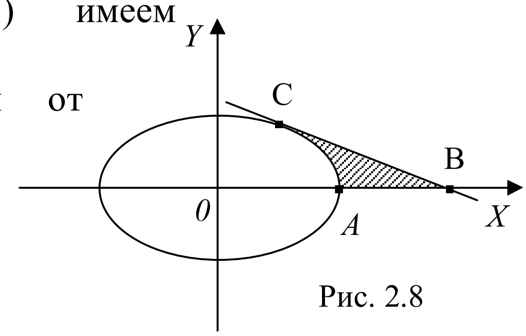

Рис. 2.8

$$I_2 = \int_{0}^{b\sqrt{3/2}} x_2(y)dy = \int_{0}^{b\sqrt{3/2}} a\left(2 - \frac{y\sqrt{3}}{b}\right)dy = \frac{5\sqrt{3}}{8}ab\ .$$

Для интеграла от функции $x_1(y)$ вводим подстановку $y = b\sin t$, $0 \leq t \leq \pi/3$:

$$I_1 = \int_{0}^{b\sqrt{3/2}} x_1(y)dy = ab\int_{0}^{\pi/3}\cos^2 tdt = \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right)ab\ .$$

Таким образом,

$$S = I_2 - I_1 = ab\,(3\sqrt{3} - \pi)/6..▲$$

2.29.* Найти площадь петли кривой:

$$x = \frac{t}{3}\left(6 - t\right),\ y = \frac{t^2}{8}\left(6 - t\right).$$

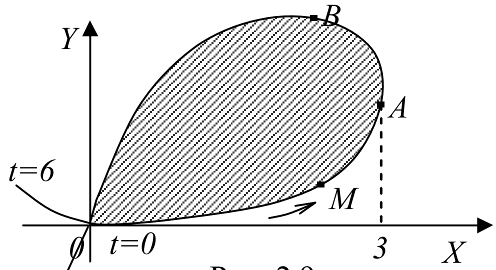

Рис. 2.9

Δ Обе функции $x(t)$ и $y(t)$ определены $\forall\ t \in\ \mathbf{R}$. Найдем точки самопересечения этой кривой.

Для точки самопересечения характерно то, что в ней совпадают значения абсциссы (и ординаты) при разных значениях параметра t. Так как $x = 3 - \frac{1}{3}(t - 3)^2$, то абсциссы совпадают при значениях параметра $t = 3 \pm \lambda$. Чтобы функция $y(t)$ при тех же значениях параметра t одно и то же значение должно выполняться равенство

$$\frac{(3 + \lambda)^2}{8}(3 - \lambda) = \frac{(3 - \lambda)^2}{8}(3 + \lambda),\ \ \lambda \neq 0\ , \Rightarrow\ \lambda = \pm 3\ .$$

Таким образом, при $t_1 = 0$ и при $t_2 = 6$ имеем $x(t_1) = x(t_2) = 0$ и $y(t_1) = y(t_2) = 0$, т.е. точка $(0,0)$ является единственной точкой самопересечения. При изменении t от 0 до 6 точки кривой лежат в первой четверти. При изменении t от 0 до 3 точка $M = (x, y)$ описывает нижнюю часть петли, так как в указанном промежутке $x(t)$ и $y(t) = 3t\frac{x}{8}$ возрастают, а затем функция $x(t)$ начинает убывать, в то время как $y(t)$ сначала еще возрастает. На рис. 2.9 указан обход кривой, соответствующей возрастанию t (область остается слева).

Площадь искомой петли найдем по формуле (2.26):

$$S = \frac{1}{2}\int_0^6 \left(xy' - yx'\right)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^6 \frac{t^2\left(6 - t^2\right)}{24}\,dt = \frac{27}{5}.\blacktriangle$$

2.30. Найти площадь области, вырезаемой окружностью $\rho = \sqrt{3}\sin\varphi$ из кардиоиды $\rho = 1 + \cos\varphi$ (рис. 2.10).

Δ Решив систему

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{3}\sin\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \pi, \\ \rho = 1 + \cos\varphi, \end{cases}$$

находим точки пересечения этих кривых: $\varphi_1 = \pi / 3$, $\varphi_2 = \pi$.

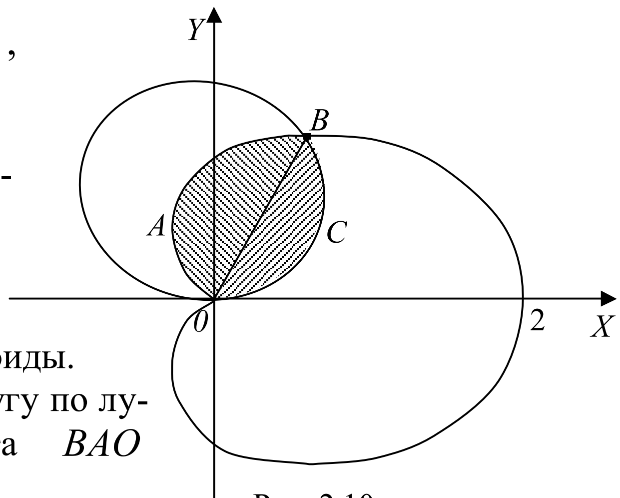

Рис. 2.10

Искомая площадь равна сумме двух площадей: площади кругового сегмента и площади сегмента кардиоиды. Эти сегменты примыкают друг к другу по лучу $\varphi = \pi / 3$ (луч OB). Дуга BAO

вается концом полярного радиуса ρ кардиоиды при изменении угла φ от $\pi / 3$ до π. Дуга OCB – концом полярного радиуса ρ окружности при $0 \le \varphi \le \pi / 3$. Поэтому, пропуская вычисления интегралов, имеем $\pi / 3$.

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} 3\sin^2\varphi d\varphi + \frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi}(1+\cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{3}{4}\left(\pi - \sqrt{3}\right). \blacktriangle$$

2.31. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми:

1) $x = -2y^2$, $x = 1 - 3y^2$.

2) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $0 \le x \le \pi / 4$.

3) $y = \dfrac{6}{(x+5)}$, $y = |x|$, $x \ge -2$.

4) $y = \sin^3 x + \cos^3 x$, $y = 0$, $-\pi / 4 \le x \le 3\pi / 4$.

5) $y = arctg\sqrt{x}$, $y \pm x^2$, $x = 1$.

Отв.: 1) $\dfrac{4}{3}$. **2)** $\sqrt{2} - 1$. **3)** $6\ln 2 - \dfrac{5}{2}$. **4)** $5\sqrt{2} / 3$. **5)** $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{3}{2}$.

2.32. Найти площадь астроиды $(x / a)^{2/3} + (y / a)^{2/3} = 1$.

Отв.: $3\pi a^2 / 8$.

2.33.* Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $x = a\sin t$, $y = b\sin 2t$.

Отв.: $8ab / 3$.

2.34.*. Вычислить площадь, содержащуюся внутри кардиоиды $x = a\cos t(1 + \cos t)$, $y = a\sin t(1 + \cos t)$.

2.35. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой:

1) $x = \dfrac{c^2}{a}\cos^3 t$, $y = \dfrac{c^2}{b}\sin^3 t$, $c^2 = a^2 - b^2$ (*эволюта эллипса*).

2) $x = a\dfrac{1-t^2}{\left(1+t^2\right)^2}$, $y = \dfrac{2at}{\left(1+t^2\right)^2}$ (*улитка*).

Отв.: 1) $3\pi(a^2 - b^2)^2 / (8ab)$. **2)** $3\pi a^2 / 8$.

2.36. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $\rho = a\cos\varphi$.

Отв.: $\pi a^2 / 4$.

2.37.* Найти площадь фигуры, лежащей вне круга $\rho = a$ и ограниченной кривой $\rho = 2a\cos 3\varphi$. Отв. $\dfrac{a^2}{18}\left(2\pi + 3\sqrt{3}\right)$.

2.38.* Вычислить площадь фигуры, ограниченной окружностями $\rho = 3\sqrt{2}a\cos\varphi$ и $\rho = 3a\sin\varphi$. Отв. $2{,}25\,a^2\left(\pi - arctg\sqrt{2} - \sqrt{2}\right)$.

2.39.* Найти площадь петли декартова листа $x^3 + y^3 = 3axy$.

Отв.: $3a^2/2$.

2.40.* Вычислить площадь фигуры, ограниченной замкнутой кривой $\rho = a\sin\varphi\cos^2\varphi$, $a > 0$. Отв. $\pi a^2/32$.

2.41. Найти площадь фигуры, ограниченной петлей заданной кривой:

1) $x = at - t^2$, $y = at^2 - t^3$, $a > 0$.

2) $x = t^2 - a^2$, $y = t^3 - a^2 t$, $a > 0$.

3) $x = \dfrac{t(1 - t^2)}{1 + 3t^2}$, $y = \dfrac{4t^2}{1 + 3t^2}$.

4) $\dfrac{1}{(1 + t^2)}$, $y = \dfrac{t(1 - t^2)}{(1 + t^2)}$.

5) $x = a\sin 2t$, $y = a\sin t$, $a > 0$.

Отв.: **1)** $a^5/60$. **2)** $8a^5/15$. **3)** $\dfrac{1}{3}$. **4)** $\dfrac{(4-\pi)}{4}$. **5)** $\dfrac{4a^2}{3}$.

Если плоская кривая задана явно уравнением $y = y(x)$, $x \in [a, b]$, где $y(x)$ – непрерывно дифференцируемая на $[a, b]$ функция, то ее длина

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx. \tag{2.29}$$

Длина пространственной кривой, заданной параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ - непрерывно дифференцируемые на $[\alpha, \beta]$ функции, равна

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt. \tag{2.30}$$

Длина плоской кривой, заданной параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, где $x(t)$ и $y(t)$ – непрерывно дифференцируемые на $[\alpha, \beta]$ функции, равна

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt. \tag{2.31}$$

Длина плоской кривой, заданной в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, где $\rho(\varphi)$ – непрерывно дифференцируемая на $[\alpha, \beta]$ функция, равна

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\varphi. \tag{2.32}$$

2.42. Вычислить длину полукубической параболы $y^2 = x^3$, заключенной между точками $(0,0)$ и $(4,8)$ (рис. 2.11).

Δ Функция $y(x)$ определена для $x \geq 0$. Поскольку данные точки лежат в первой четверти, то $y = x^{3/2} \Rightarrow y' = \dfrac{3}{2}\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + 9x/4}$.

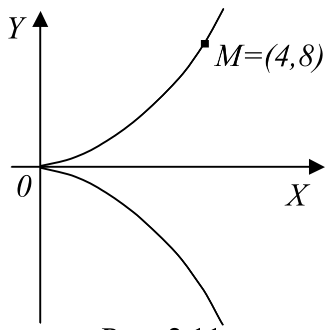

Рис. 2.11

По формуле (2.29) имеем

$$S = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,dx = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^4 = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right). \blacktriangle$$

2.43.* Найти периметр криволинейного треугольника, ограниченного дугой окружности $x^2 + y^2 = 2$ и графиком функции $y = \sqrt{|x|}$ (рис. 2.12).

Δ Решив систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ y = \sqrt{|x|}, \end{cases}$$

находим координаты точек A и B пересечения этих кривых: $A = (-1,1)$, $B = (1,1)$. Дуга AB задается явно уравнением $y = \sqrt{2 - x^2}$, $|x| \leq 1$. Ее длина по формуле (2.29) равна

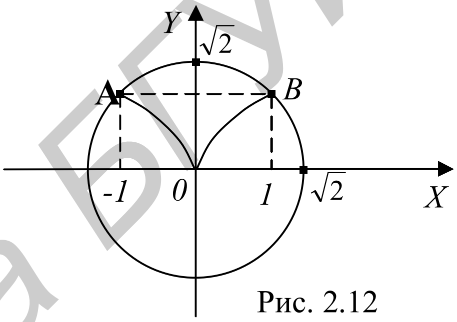

Рис. 2.12

$$S_1 = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{2}{2 - x^2}}\,dx = \sqrt{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Длины S_2 и S_3 дуг графика OB и OA равны в силу симметрии этих дуг относительно оси Y. Найдем длину дуги OB, заданной явно формулой $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 1$. Но производная функции $y = \sqrt{x}$ неограниченна в окрестности $x = 0$. Приняв за независимое переменное y, зададим OB уравнением $x = y^2$, $0 \leq y \leq 1$. Тогда $x' = 2y$ и по формуле, аналогичной (2.29), получим

$$S_2 = \int_0^1 \sqrt{1 + x'^2}\,dy = \int_0^1 \sqrt{1 + 4y^2}\,dy.$$

Положив $y = \dfrac{1}{2}sht$, находим

$$S_2 = \frac{1}{2}\int_0^{arcsh\,2} ch^2 t\,dt = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}sh\,2t + t\right)\Bigg|_0^{arcsh\,2} = \frac{1}{4}\left(2\sqrt{5} + \ln\left(2 + \sqrt{5}\right)\right).$$

Таким образом, периметр треугольника равен

$$S_1 + 2S_2 = \frac{\pi}{\sqrt{2}} + \sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln\left(2 + \sqrt{5}\right). \blacktriangle$$

2.44.* Найти длину пространственной кривой

$$x^2 = 2az - z^2,\ y = a\ln\left(1 - \frac{z}{2a}\right),\ 0 \le z \le z_0 \le 2a,$$

взяв в качестве параметра

$$t = \sqrt{z/2a},\ 0 \le t \le t_0 = \sqrt{z_0/2a} < 1. \qquad (2.33)$$

Δ Из (2.33) находим $z = 2at^2$, $x = 2at\sqrt{1-t^2}$,

$$y = a\ln\left(1 - t^2\right) \Rightarrow x' = 2a\frac{1-2t^2}{\sqrt{1-t^2}},\ y' = -\frac{2at}{1-t^2},\ z' = 4at.$$

По формуле (2.30) находим

$$S = \int_0^{t_0}\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt = \int_0^{t_0}\frac{2a}{1-t^2}dt = a\ln\frac{1+t_0}{1-t_0} = a\ln\frac{\sqrt{2a}+\sqrt{z_0}}{\sqrt{2a}-\sqrt{z_0}}.\blacktriangle$$

2.45. Найти длину развертки круга $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Δ Так как $x'_t = at\cos t$, $y'_t = at\sin t$, то $\sqrt{x'^2 + y'^2} = at$. По формуле (2.31) длина развертки $S = \int\limits_0^{2\pi} atdt = 2\pi a^2$.▲

2.46. Найти длину *логарифмической спирали* $\rho = ae^{m\varphi}$ от некоторой ее точки (ρ_0, φ_0) до переменной точки (ρ, φ).

Δ Независимо от того, какая из величин ρ и ρ_0 больше, имеем по формуле (2.32)

$$S = \left|\int_{\varphi_0}^{\varphi}\sqrt{a^2e^{2m\varphi} + a^2m^2e^{2m\varphi}}\,d\varphi\right| = a\sqrt{1+m^2}\left|\int_{\varphi_0}^{\varphi}e^{m\varphi}d\varphi\right| =$$

$$= a\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}\left|e^{m\varphi} - e^{m\varphi_0}\right| = \frac{\sqrt{1+m^2}}{m}\left|\rho - \rho_0\right| = \frac{\sqrt{1+m^2}}{m}\left|\Delta\rho\right|,$$

т.е. длина дуги логарифмической спирали пропорциональна приращению полярного радиуса дуги. ▲

2.47. Найти длину дуги кривой $y^2 = x^3$, отсеченной прямой $x = 4/3$.
Отв.: $112/27$.
2.48. Найти длину дуги кривой $y = \ln\cos x$, $x \in [0, \pi/4]$.

Отв.: $\ln tg\frac{3\pi}{8}$.

2.49. Найти длину дуги кривой $\ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ от $x_1 = a$ до $x_2 = b$, $b > a$.

Отв.: $\ln \frac{e^b - e^{-b}}{e^a - e^{-a}}$.

2.50. Найти длину дуги кривой $x = \frac{1}{4} y^2 - \frac{1}{2} \ln y$, $y \in [1,2]$.

Отв.: $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$.

2.51. Найти длину дуги кривой $y = \frac{x}{6} \sqrt{x + 12}$, $x \in [-11, -3]$.

Отв.: $25 / 3$.

2.52. Найти длину одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$. **Отв.:** $8a$.

2.53. Найти длину астроиды $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$.

Отв.: $6a$.

2.54. Найти длину дуги кардиоиды $x = a(2 \cos t - \cos 2t)$, $y = a(2 \sin t - \sin 2t)$.

Отв.: $16a$.

2.55. Найти длину дуги кривой :

1)* $x = a(\cos t + \ln tg(t / 2))$, $y = a \sin t$, $0 < t_0 \le t \le \pi / 2$ (*трактриса*).

2) $x = (t^2 - 2)\sin t + 2t \cos t$, $y = (t^2 - 2)\cos t - 2t \sin t$, $0 \le t \le \pi$.

Отв.: **1)** $-a \ln \sin t_0$. **2)** $\pi^3 / 3$.

2.56. Найти длину дуги кардиоиды $\rho = a(1 + \cos \varphi)$, $a > 0$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Отв.: $8a$.

2.57. Найти длину дуги кривой $\rho = a \sin^3(\varphi / 3)$.

Отв.: $\frac{3}{2} \pi a$.

2.58. Найти длину отрезка прямой линии $\rho = a \sec(\varphi - \pi / 3)$, $\varphi \in [0, \pi / 2]$.

Отв.: $4a\sqrt{3} / 3$.

2.59. Найти длину замкнутой кривой $\rho = a \sin^4(\varphi / 4)$.

Отв.: $16a / 3$.

2.60. Найти длину замкнутой кривой $\rho = 2a(\sin \varphi + \cos \varphi)$.

Отв.: $2\sqrt{2}\pi a$.

Объем тела выражается интегралом

$$V = \int_a^b S(x)dx , \qquad (2.34)$$

где $S(x)$ – площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси X в точке с абсциссой x, $x \in [a,b]$. Функция $S(x)$ предполагается известной и непрерывной $\forall x \in [a,b]$.

2.61. Найти объем эллипсоида $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

Δ Любое сечение эллипсоида плоскостью $x = const$, $|x| \le a$, есть эллипс

$$\frac{y^2}{b^2\left(1 - x^2 / a^2\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(1 - x^2 / a^2\right)} = 1$$

с полуосями

$$A = b\sqrt{1 - x^2 / a^2} ,\ B = c\sqrt{1 - x^2 / a^2} .$$

Так как площадь эллипса равна πAB , то $S(x) = \pi bc\left(1 - x^2 / a^2\right)$, $|x| \le a$.

Тогда по формуле (2.34) объем эллипсоида

$$V = \int_{-a}^{a} \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx = \pi bc\left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi abc .$$

В частности, при $a = b = c$ получим объем шара $V_ш = \dfrac{4}{3}\pi a^3$.▲

2.62. Вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями:

1) $\dfrac{x^2}{9} + y^2 = 1$, $z = y$, $z = 0$, $(y \ge 0)$;

2) $x^2/16 + y^2/9 + z^2/4 = 1$, $z = 0$, $z = 1$;

3) $x^2/3 + y^2/4 = 1$, $z = y\sqrt{3}$, $z = 0$, $(y \ge 0)$;

4) $x^2/81 + y^2/25 - z^2 = 1$, $z = 0$, $z = 2$;

5) $x^2/27 + y^2/25 = 1$, $z = y\sqrt{3}$, $z = 0$, $(y \ge 0)$;

6) $x^2 + y^2/4 - z^2 = 1$, $z = 0$, $z = 3$.

Отв.: **1)** 2. **2)** 11π . **3)** 8. **4)** 210π . **5)** 50. **6)** 128π .

2.63.* Найти объем чердака, основание которого есть прямоугольник со сторонами a и b , верхнее ребро равно C , а высота равна h .

Отв.: $bh(C + 2a)/6$..

2.64.* Найти объем обелиска, параллельные основания которого являются прямоугольниками со сторонами A, B, a, b, а высота равна h.

Отв.: $h\left[B\left(a+2A\right)+b\left(A+2a\right)\right]/6$.

2.65.* Найти объем усеченного конуса, основаниями которого являются эллипсы с полуосями A, B и a, b, а высота равна h.

Отв.: $\pi h\left[B\left(a+2A\right)+b\left(A+2a\right)\right]/6$.

Объем V_x тела, образованного вращением вокруг оси X криволинейной трапеции и ограниченной кривой $y=f\left(x\right)\geq 0$, осью X и отрезками прямых $x=a$ и $x=b$ $\left(x<b\right)$, выражается интегралом

$$V_x=\pi\int_a^b y^2\left(x\right)dx. \qquad (2.35)$$

Объем тела V_x, образованного вращением вокруг оси X фигуры, ограниченной кривыми $y=y_1\left(x\right)$ и $y=y_2(x)$ $\left(0\leq y_1\left(x\right)\leq y_2\left(x\right)\right)$ и отрезками прямых $x=a$, $x=b$, выражается интегралом.

$$V_x=\pi\int_a^b\left(y_2^2\left(x\right)-y_1^2\left(x\right)\right)dx. \qquad (2.36)$$

Если функция $y=y\left(x\right)$ задана параметрически уравнениями $x=x\left(t\right)$, $y=y\left(t\right)$, $t\in\left[\alpha,\beta\right]$, где функция $x\left(t\right)$ имеет непрерывную неотрицательную производную на $\left[\alpha,\beta\right]$ и $x\left(\alpha\right)=a$, $x\left(\beta\right)=b$, а функция $y\left(t\right)$ непрерывна и неотрицательна на $\left[\alpha,\beta\right]$, то объем V_x тела, образованного вращением вокруг оси X фигуры, равен

$$V_x=\pi\int_\alpha^\beta y^2\left(t\right)x'\left(t\right)dt. \qquad (2.37)$$

Если функция $x\left(t\right)$ убывает и $x\left(\alpha\right)=b$, $x\left(\beta\right)=a$, то при тех же прочих условиях

$$V_x=-\pi\int_\alpha^\beta y^2\left(t\right)x'\left(t\right)dt. \qquad (2.38)$$

Для тел, образованных вращением фигуры вокруг оси Y, при аналогичных предположениях относительно данных функций верны соответственно следующие формулы для объемов:

$$V_y=\pi\int_c^d x^2\left(y\right)dy. \qquad (2.39)$$

$$V_y=\pi\int_c^d\left(x_2^2\left(y\right)-x_1^2\left(y\right)\right)dy. \qquad (2.40)$$

Рис. 2.13

$$V_y = \pi \int_{\alpha}^{\beta} x^2(t)\, y'(t)\, dt \,. \qquad (2.41)$$

2.66. Фигура D, ограниченная дугой параболы $y = 4 - x^2$, отрезком $[-2, 0] \subset X$ и отрезком прямой $y = 3x$, вращается вокруг оси X. Найти объем тела вращения.

Δ Решив систему $y = 4 - x^2$, $y = 3x$, находим точку C пересечения параболы и прямой (рис 2.13): $x_1 = 1,\ x_2 = -4 \Rightarrow \ x_c = 1$.

Искомый объем V_x равен разности объемов V_1 и V_2 тел, образованных вращением трапеции $ABCD$ и ΔOCD. По формуле (2.35) находим

$$V_1 = \int_{-2}^{1} \left(4 - x^2\right)^2 dx = \frac{153}{5}\pi \,,$$

$$V_2 = \int_{1}^{2} (3x)^2\, dx = 3\pi \,.$$

Тогда $V_x = V_1 - V_2 = 138\,\pi / 5$.▲

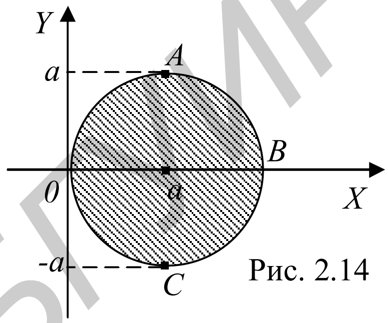

Рис. 2.14

2.67. Найти объем тела, образованного вращением круга $(x-a)^2 + y^2 \le a^2$ вокруг оси Y (рис. 2.14).

Δ Дуги AOC и ABC являются графиками функций $x_1(y) = a - \sqrt{a^2 - y^2}$ и $x_2 = a + \sqrt{a^2 + y^2}$, $|y| \le a$. Объем V_y тела вращения найдем по формуле (2.40):

$$V_y = \pi \int_{-a}^{a} \left(x_2^2(y) - x_1^2(y)\right) dy = = 4\pi a \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - y^2}\, dy = \left| y = a \sin t \right| = = 4\pi a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = 2\pi^2 a^3 .▲$$

2.68. Найти объем тела, образованного вращением астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $0 \le t \le 2\pi$, вокруг оси X.

Δ Астроида симметрична относительно X и Y, поэтому искомый объем V_x равен $2V$, где V - объем тела вращения криволинейного треугольника AOB (рис. 2.15) вокруг оси X. По формуле (2.38) находим

$$V = -\pi \int_{0}^{\pi/2} a^2 \sin^6 t \cdot 3a\cos^2 t(-\sin t)\, dt = -3\pi a^3 \int_{0}^{\pi/2} \left(1 - \cos^2 t\right)^3 \cos^2 t\, dt \cdot (\cos t) = \frac{16}{105}\pi a^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_x = 2V = 32\,\pi a^3 / 105 \,.▲$$

2.69. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной данными линиями, вокруг оси L ($L = X$ или $L = Y$):

1) $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$, $L = X$;

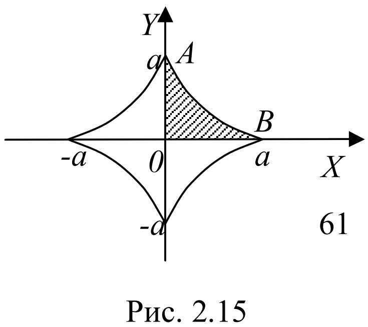

Рис. 2.15

2) $y = x^3$, $y = 0$, $x = 2$, $L = Y$;

3) $y = \sin x$ (одной волной), $y = 0$, $L = X$;

4) $x^2 - y^2 = 4$, $y = \pm 2$, $L = Y$;

5) $(y - a)^2 = ax$, $x = 0$, $y = 2a$, $L = X$.

Отв.: 1) 12π. **2)** $(64/5)\pi$. **3)** π^2. **4)** $(64/3)\pi$. **5)** $(4/3)\pi a^3$.

2.70. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси X фигуры, ограниченной окружностью $x^2 + y^2 = 1$ и параболой $y^2 = (3/2)\,x$.

Отв.: $(19/48)\,\pi$.

2.71. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси X петли кривой $x = at$, $y = a\left(t - t^3/3\right)$.

Отв.: $(4/3)\,\pi a^3$.

2.72.* Вычислить объемы тел, полученных вращением лемнискаты $\left(x^2 + y^2\right) = a^2\left(x^2 - y^2\right)$ вокруг осей X и Y.

Отв.: $\pi^2 a^3 4\sqrt{2}$; $\left(\pi a^3/4\right)\left[\sqrt{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right) - 2/3\right]$.

Пусть $y = y(x)$, $x \in [a, b]$ – непрерывно дифференцируемая функция. Площадь S поверхности, образованной вращением графика этой функции вокруг оси X, равна

$$S = 2\pi\int_a^b |y(x)|\sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx. \tag{2.42}$$

Если в полуплоскости $y \geq 0$ кривая задана параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, где $x(t)$ и $y(t)$ – непрерывно дифференцируемые на $[\alpha, \beta]$ функции, то площадь S поверхности, образованной вращением данной кривой вокруг оси X, равна

$$S = 2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt. \tag{2.43}$$

Если же кривая расположена в полуплоскости $y \leq 0$, то

$$S = 2\pi\int_\alpha^\beta |y(t)|\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt. \tag{2.44}$$

При аналогичных условиях площадь S поверхности, образованной вращением кривой вокруг оси Y, соответственно равна

$$S = 2\pi\int_c^d |x(y)|\sqrt{1 + x'^2(y)}\,dy. \tag{2.45}$$

$$S = 2\pi\int_\alpha^\beta x(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt, \ (x(t) \geq 0). \tag{2.46}$$

$$S = 2\pi \int\limits_{\alpha}^{\beta} |x(t)| \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt\ ,\ (x(t) \le 0). \qquad (2.47)$$

Площадь поверхности, образованной вращением вокруг полярного луча кривой $\rho = \rho(\varphi)$, $0 \le \varphi_1 \le \varphi \le \pi$, равна

$$S = 2\pi \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho(\varphi) \sin\varphi \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\,d\varphi\ , \qquad (2.48)$$

где $\rho(\varphi)$ – непрерывно дифференцируемая на $[\varphi_1, \phi_2]$ функция.

При этом же условии площадь поверхности, образованной вращением вокруг луча $\varphi = \pi / 2$ кривой $\rho = \rho(\varphi)$, $-\pi / 2 \le \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2 \le \pi / 2$, равна

$$S = 2\pi \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho(\varphi) \cos\varphi \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\,d\varphi\ . \qquad (2.49)$$

2.73.* Найти площадь поверхности, образованной при вращении дуги параболы $2ay = x^2 - a^2$, $0 \le x \le 2\sqrt{2}a$ (рис. 2.16), 1) вокруг оси X ; 2) вокруг оси Y .

Δ 1) По формуле (2.42) имеем

$$S = 2\pi \int\limits_{0}^{2\sqrt{2}a} |y(x)| \sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx = 2\pi \int\limits_{0}^{2\sqrt{2}a} \left|\frac{x^2 - a^2}{2a}\right| \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}\,dx\ .$$

Введем замену $x = at$ и учтем, что если $0 \le x \le a$, то $\left|x^2 - a^2\right| = -\left(x^2 - a^2\right)$, а если $x \ge a$, то $\left|x^2 - a^2\right| = x^2 - a^2$. Тогда

$$S = \pi a^2 \left(-\int\limits_{0}^{1} f(t)\,dt + \int\limits_{1}^{2\sqrt{2}} f(t)\ \ dt \right), \qquad (2.50)$$

где $f(t) = \left(t^2 - 1\right)\sqrt{1 + t^2}$.

Первообразную $F(t)$ функции $f(t)$ легко найти с помощью замены $t = sh\,\varphi$, в результате получим

$$F(t) = \frac{1}{8} t \sqrt{1 + t^2}\left(2t^2 - 3\right) - \frac{5}{8}\ln\left(t + \sqrt{1 + t^2}\right)$$

. Из (2.50) имеем

$$S = \pi a^2 \left(- F(1) + F(0) + F\left(2\sqrt{2}\right) - F(1)\right) =$$
$$= \pi a^2 \left(F(0) + F\left(2\sqrt{2}\right) - 2F(1)\right).$$

Но $F(0) = 0$,

$$F\left(2\sqrt{2}\right) = 39\sqrt{2}/4 - \frac{5}{8}\ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right),$$

$$F(1) = -\frac{\sqrt{2}}{8} - \frac{5}{8}\ln\left(1 + \sqrt{2}\right).$$

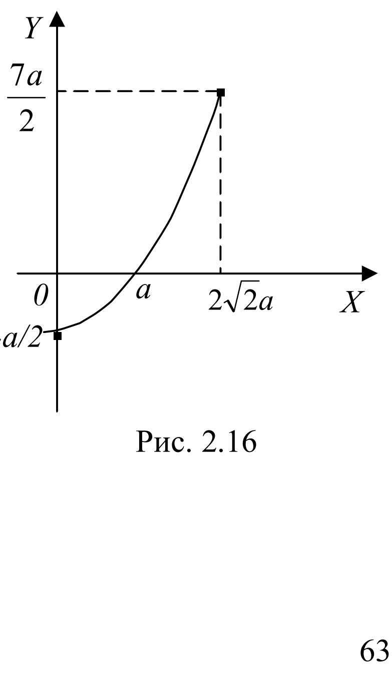

Рис. 2.16

Отсюда найдем

$$S = \pi a^2 \left(\frac{39\sqrt{2}}{4} - \frac{5}{8}\ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{5}{4}\ln\left(1 + \sqrt{2}\right) \right) = 10\pi a^2 \sqrt{2}\,.$$

2) Считая кривую заданной параметрически уравнениями $x = x$, $2ay = a^2 - x^2$, по формуле (2.46) находим

$$S = 2\pi \int_0^{2\sqrt{2}a} x\sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx = 2\pi \int_0^{2\sqrt{2}a} x\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}\,dx = \pi a^2 \frac{2}{3}\left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^{3/2} \Bigg|_0^{2\sqrt{2}a} = \frac{52}{3}\pi a^2 .\ ▲$$

2.74.* Прямая $y = a$ пересекает дугу циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$, в точках A и B (рис. 2.17). Найти площадь поверхности, образованной при вращении дуги AB циклоиды вокруг прямой $y = a$.

Δ Точки A и B соответствуют значения параметра $t = \pi / 2$ и $t = 3\pi / 2$, дуга AB – значениям $t \in [\pi / 2, 3\pi / 2]$. Площадь поверхности вращения найдем по формуле

$$S = 2\pi \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left(y(t) - a\right)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt, \quad (2.51)$$

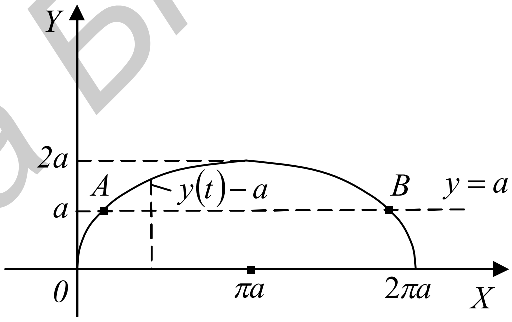

Рис. 2.17

аналогичной (2.43). Здесь вместо стоящего в (2.43) расстояния $y(t)$ от точки кривой до оси X (оси вращения) стоит расстояние $y(t) - a$, от точки кривой до прямой $y = a$, являющейся в данном случае осью вращения (рис. 2.17). Находим: $y(t) - a = -a\cos t$,

$$\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} = 2a\sin(t/2),\ t \in [\pi/2, 3\pi/2].$$

По формуле (2.51) получаем

$$S = -4\pi a^2 \int_{\pi/2}^{2\pi/2} \cos t \sin\frac{t}{2}\,dt = \left|\cos\frac{t}{2} = z\right| =$$

$$= -8\pi a^2 \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \left(2z^2 - 1\right)dz = -8\pi a^2 \left(\frac{2}{3}z^3 - z\right)\Bigg|_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} =$$

$$= 16\sqrt{2}\pi a^2 / 3\,.\ ▲$$

2.75. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением лемнискаты $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ вокруг полярной оси.

Δ Действительные значения для ρ получаются при $\cos 2\varphi \ge 0$, т.е. при $|\varphi| \le \pi / 4$ (правая ветвь лемнискаты), или при $\pi \le \varphi \le (5/4)\pi$ (левая ветвь лемнискаты). Тогда

$$\sqrt{\rho^2 + \rho'^2} = \sqrt{a^2 \cos 2\varphi + \left(\frac{a \sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

Кроме того, $y = \rho \sin \varphi = a \sin \varphi \sqrt{\cos 2\varphi}$.

Искомая площадь поверхности S равна удвоенной площади поверхности образуемой вращением правой дуги. Поэтому

$$S = 2 \cdot 2\pi \int_0^{\pi/4} \rho(\varphi) \sin \varphi \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2}\, d\varphi =$$

$$= 4\pi a^2 \int_0^{\pi/4} \frac{\sqrt{\cos 2\varphi} \cdot \sin \varphi d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = 2\pi a^2 \left(2 - \sqrt{2}\right). \ \blacktriangle$$

2.76. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ вокруг оси X .

Отв.: $12\pi a^2 / 5$.

2.77. Вычислить площадь поверхности образованной вращением вокруг оси X замкнутого контура $OABCO$, состоящего из кривых $y = x^2$ и $x = y^2$ (рис 2.18).

Отв.: $\dfrac{67\sqrt{5}\pi}{48} - \dfrac{\pi}{32} \ln\left(2 + \sqrt{5}\right) - \dfrac{\pi}{6}$.

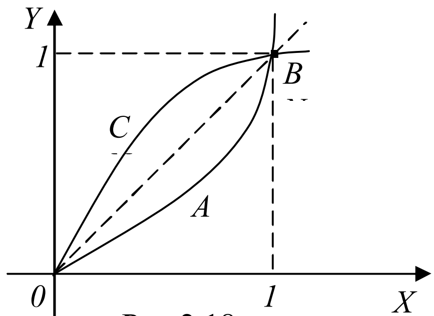

Рис 2.18

2.78. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением:

а) части кривой $y = x^2 / 2$, отсеченной прямой $y = 3/2$, вокруг оси Y ;

б) части кривой $y^2 = 4 + x$, отсеченной прямой $x = 2$, вокруг оси X ;

Отв.: **а)** $14\pi / 3$; **б)** $62\pi / 3$.

2.79. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси L ($L = X$ или $L = Y$):

1) дуги кривой $x = t^2$, $x = (t/3) \cdot \left(t^3 - 3\right)$, заключенной между точками пересечения ее с осью X , $L = X$; **Отв.:** 12π.

2) окружности $x^2 + (y - b)^2 = r^2$, $0 < r < b$, $L = X$; **Отв.:** $4\pi^2 rb$.

3) дуги кривой $y = x^3/3$, $|x| \le 2$, $L = X$; **Отв.:** $(34\sqrt{17} - 2)\pi/9$.

4) дуги параболы $x^2 = 4ay$, заключенной между точками ее пересечения с прямой $y = 3a$, $L = Y$; **Отв.:** $56\pi a^2/3$.

5) дуги кривой $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$ от $t = 0$ до $t = \pi/2$, $L = X$; **Отв.:** $2\sqrt{2}\pi(e^\pi - 2)/2$.

6) кардиоиды $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$,

$L = X$; **Отв.:** $128\pi a^2/5$.

7) кривой $\rho = 2a\sin\varphi$ вокруг полярной оси. **Отв.:** $4\pi^2 a^2$.

2.5. Физические применения определенного интеграла

Работа переменной силы. Давление жидкости на погруженную в нее пластинку. Кинетическая энергия вращающегося тела. Масса, статические моменты, моменты инерции плоской кривой и плоской фигуры.

Если непрерывная переменная сила $F(x)$ действует в направлении оси X, то работа силы на отрезке $[x_1, x_2]$ выражается интегралом

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx . \qquad (2.52)$$

Давление жидкости на вертикально погруженную в нее пластинку D, изображенную на рис. 2.19, выражается интегралом

$$P = \rho g \int_a^b f(x)\,dx . \qquad (2.53)$$

Здесь и на рис. 2.19: ρ - плотность жидкости; g - ускорение свободного падения; $y = f(x)$ - уравнение линии AB, $x = a$ - верхний край погружения пластинки, $x = b$ - нижний край; ось Y расположена на поверхности жидкости.

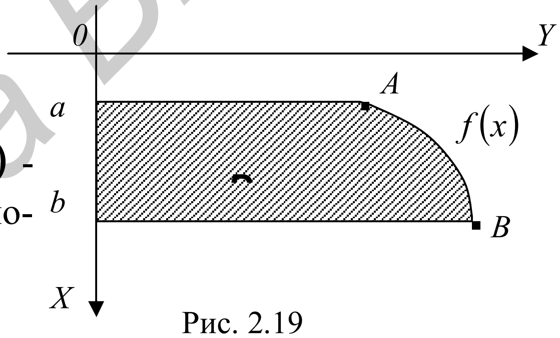

Рис. 2.19

2.80. Вычислить работу, которую нужно затратить на перекачивание жидкости через край котла, имеющего форму эллиптического параболоида $z = x^2/4 + y^2/9$ высотой $H = 4$ м и заполненного жидкостью плотностью $\rho = 0{,}8T/м^3$.

Δ Выделим на высоте z_i элементарный слой жидкости толщиной Δz_i (рис. 2.20), объем которого $\Delta V_i = \pi\, 2\sqrt{z_i}\;\; 3\sqrt{z_i} = \Delta z_i$, а масса $\Delta m_i = 6\pi\rho z_i \Delta z_i$, так как в горизонтальном сечении котла получается эллипс с полуосями $a = 2\sqrt{z_i}$, $b = 3\sqrt{z_i}$. Работа, затраченная на перекачивание жидкости из котла, выражается следующим пределом:

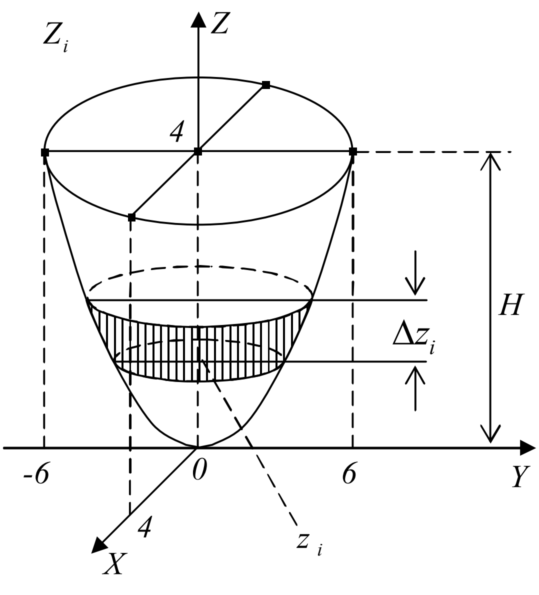

Рис. 2.20

$$A=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}6\pi\rho g z_i\left(H-z_i\right)\Delta z_i=$$

$$=\int_0^H 6\pi\rho g\left(H-z\right)dz=6\pi\rho g\left(H\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_0^H=$$

$$=\pi\rho gH^3=64\pi\rho g\approx 1575{,}53 \text{ кДж. } \blacktriangle$$

2.81. Вычислить работу, которую нужно затратить на выкачивание воды из котла, имеющего форму полушара радиусом $R\left(\rho=1\right)$. Отв. $\pi R^4 g/4$.

2.82. Вычислить работу, которую нужно затратить, чтобы насыпать кучу песка конической формы с радиусом основания R и высотой H. Плотность песка ρ.

Отв.: $\pi\rho gR^2H^2/12$.

2.83*. Цилиндрический бок заполнен жидкостью. Однородный цилиндр плавает, на половину погрузившись в жидкость основанием вниз. Площадь основания цилиндра в 3 раза меньше площади поперечного сечения бака, высота цилиндра равна H, вес G. Какую работу нужно совершить, чтобы погрузить цилиндр целиком в жидкость?

Отв.: $GH/6$.

2.84. Вычислить работу, затрачиваемую на преодоление силы тяжести при построении правильной усеченной четырехугольной пирамиды, сторона верхнего основания которой равна 2 м, нижнего – 4 м, высота – 2 м. Материал, из которого строится пирамида, имеет удельный вес $\gamma=24\,кН/м^3$.

Отв.: 352 кДж.

По закону Паскаля давление Δp жидкости на площадь ΔS, погруженную на глубину h, выражается формулой $\Delta p=\rho gh\Delta S$, где ρ – плотность жидкости, g – ускорение свободного падения.

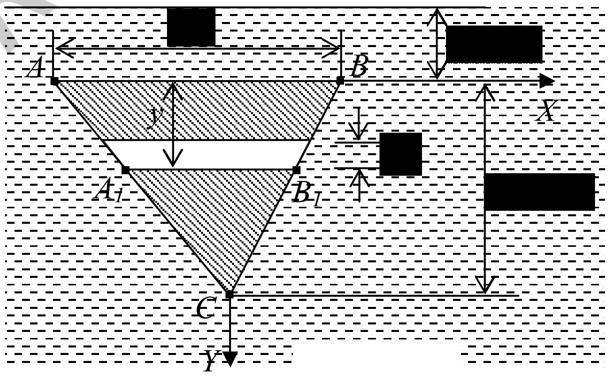

Рис. 2.21

2.85. Треугольная пластинка с основанием $a=3\,м$ и высотой $H=2$ погружена вертикально вершиной вниз в жидкость так, что основание параллельно поверхности жидкости и находится на расстоянии $d=1\,м$ от поверхности. Плотность жидкости $\rho=0{,}9T/м^3$. Вычислить силу давления жидкости на каждую из сторон пластинки.

Δ Прямыми, параллельными поверхности жидкости, разобьем треугольник на элементарные полоски шириной dy (рис. 2.21), отстоящие от поверхности жидкости на расстоянии $y+d$. Из подобия треугольников ABC и

$A_1B_1C_1$ имеем $\dfrac{|A_1B_1|}{a} = \dfrac{H-y}{H} \Rightarrow |A_1B_1| = \dfrac{a}{H}(H-y)$,

т.е. приближенно площадь вырезанной полоски $dS = \dfrac{a}{H}(H-y)dy$, а давление на каждую из сторон полоски треугольной пластины

$$dp = \frac{a}{H}\rho\, g\,(y+d)(H-y)dy.$$

Интегрируя обе части этого равенства в пределах от 0 до H, получаем

$$p = \int_0^H \frac{a}{H}\rho g(d+y)(H-y)dy = \frac{3}{2}\rho g\left(2y + \frac{y^2}{2} - y\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = 5\rho g \approx 44{,}1\text{кН.} \ \blacktriangle$$

2.86. Определить давление воды $(\rho = 1)$ на вертикальную перегородку в канале, имеющую форму полукруга радиусом a, диаметр которого находится на поверхности воды (рис. 2.22).

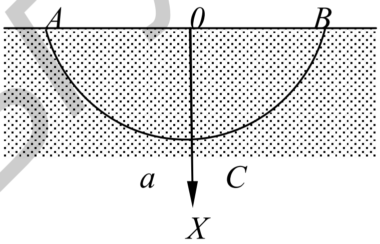

Рис. 2.22

Δ Это давление численно равно удвоенному давлению, испытываемому четвертью OBC круга. Так как уравнение дуги BC есть $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$, то по формуле (2.51) искомое давление

$$\rho = 2g\int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = -\frac{2}{3}\left(a^2 - x^2\right)^{2/3} g\,\Bigg|_0^a = 2ga^3/3. \ \blacktriangle$$

2.87. Вычислить силу давления на пластину, вертикально погруженную в воду, считая, что удельный вес воды равен 9,81 кН/м^3 (результат округлить до целого числа). Форма, размеры и расположение пластины указаны на рисунке:

1) рис. 2.23; 2) рис. 2.24; 3) рис. 2.25;
4) рис. 2.26; 5) рис. 2.27; 6) рис. 2.28.

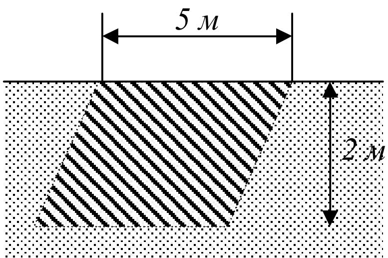

Рис. 2.23

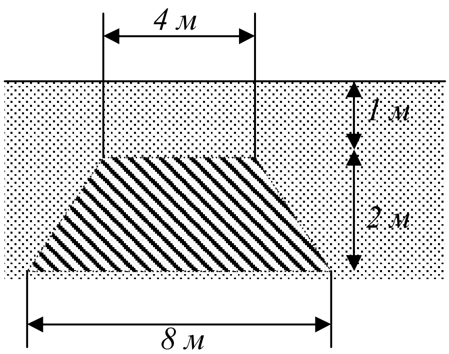

Рис. 2.24

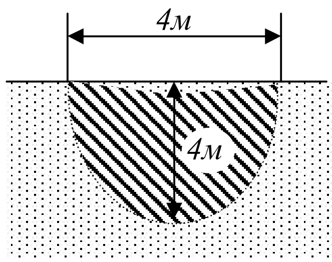

Рис. 2.25

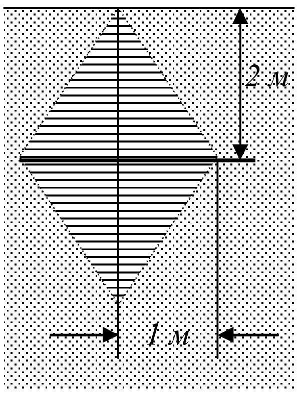

Рис. 2.26

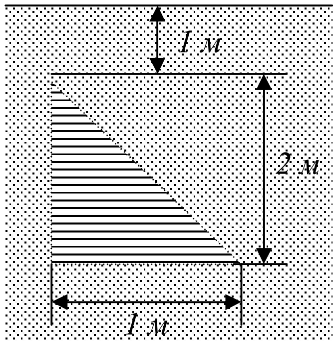

Рис. 2.27

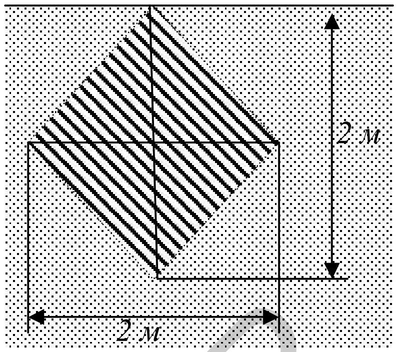

Рис. 2.28

Отв. (в кН) **:** **1)** 98; **2)** 248; **3)** 167; **4)** 78; **5)** 23; **6)** 20.

2.88. Вычислить *кинетическую энергию* однородного кругового конуса, вращающегося с угловой скоростью ω вокруг своей оси, если радиус основания конуса равен R, его высота H и плотность γ .

Δ Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг некоторой оси с угловой скоростью ω , равна $K = I\omega^2/2$, где I – момент инерции тела относительно оси вращения. За элементарную массу dm примем массу полого цилиндра высотой h с внутренним радиусом r и толщиной стенок dr (рис 2.29). Тогда $dm = 2\pi rh\gamma dr$, $0 \le r \le R$.. Из подобия треугольников OCD и OAB .

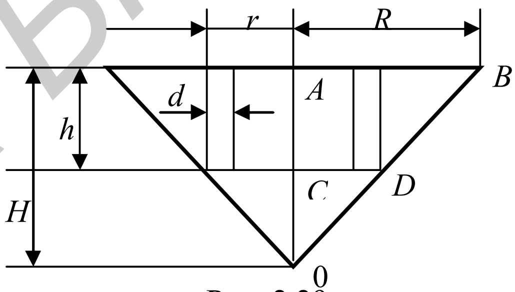

Рис. 2.29

Имеем

$$\frac{r}{R} = \frac{H - h}{H} \Rightarrow h = H\left(1 - \frac{r}{R}\right).$$

Следовательно, $dm = 2\pi\gamma H\left(1 - \frac{r}{R}\right)rdr$ и элементарный момент инерции dI равен

$$dI = dm \cdot r^2 = 2\pi\gamma H\left(1 - \frac{r}{R}\right)r^3 dr .$$

Таким образом, момент инерции всего конуса равен

$$I = \int_0^R dI = \int_0^R 2\pi\gamma H\left(1 - \frac{r}{R}\right)r^3 dr = 2\pi ggH\left(\frac{R^4}{4} - \frac{R^4}{5}\right) = \frac{1}{10}\pi\gamma HR^4 ,$$

а кинетическая энергия конуса равна $K = \dfrac{1}{20}\pi\gamma HR^4\omega^2$. ▲

2.89. Найти кинетическую энергию однородного шара радиусом R и плотностью γ , вращающегося с угловой скоростью ω вокруг своего диаметра

Отв.: $4\pi\gamma\omega^2 R^5/15$.

2.90*. Найти кинетическую энергию пластинки, имеющей форму параболического сегмента и вращающейся вокруг оси параболы с постоянной угловой скоростью ω. Основание сегмента a, высота h, толщина пластинки d, плотностью материала γ.

Отв.: $\omega^2\gamma dha^3/60$.

2.91. Найти кинетическую энергию треугольной пластинки, вращающейся вокруг основания с угловой скоростью ω. Основание пластинки α, высота h, толщина l, плотность γ

Отв.: $\gamma alh^3\omega^2/24$.

2.92. Найти кинетическую энергию однородного кругового цилиндра плотностью γ с радиусом основания R и высотой H_1, вращающегося с угловой скоростью ω вокруг своей оси.

Отв.: $\pi\omega^2\gamma R^4 H/4$.

Если дуга кривой задана уравнением $y = f(x), x \in [a, b]$, где $f(x)$– непрерывная на $[a, b]$ функция и имеет плотность $\rho = \rho(x)$, то *масса кривой* вычисляется по формуле

$$m = \int_a^b \rho(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx. \tag{2.52}$$

Статические моменты кривой относительно координатных осей равны соответственно

$$M_x = \int_a^b \rho(x) f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx; \tag{2.53}$$

$$M_y = \int_a^b \rho(x) f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx. \tag{2.54}$$

Моменты инерции I_x *и* I_y относительно тех же осей X и Y вычисляются по формулам:

$$I_x = \int_a^b \rho(x) f^2(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx, \tag{2.55}$$

$$I_y = \int_a^b \rho(x)\; x^2\sqrt{1 + f'^2(x)}\;dx. \tag{2.56}$$

Координаты x_c *и* y_c *центра масс* C вычисляются по формулам

$$X_c = \frac{M_t}{m}, \quad y_c = \frac{M_x}{m}. \tag{2.57}$$

Если дуга кривой задана параметрически равенствами $x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta]$, то в формулах (2.53)-(2.56) нужно сделать соответствующую замену переменных, выражение $\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx$ заменяется на $\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt$.

Если же кривая задана в полярной системе координат равенством $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, то в этих же формулах нужно заменить $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, выражение $\sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx$ заменить на $\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\varphi$.

2.93. Найти статические моменты, M_x, M_y, моменты инерции, I_x, I_y и координаты x_c, y_c, дуги цепной линии $y = ch\ x$, $x \in [0,1]$, плотность $\rho = 1$

Δ Имеем

$$M_x = \int_0^1 y\sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx = \int_0^1 chx\sqrt{1 + sh^2 x}dx =$$

$$= \int_0^1 ch^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1 + ch2x)\,dx == \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}sh2x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4}(2 + sh2);$$

$$M_y = \int_0^1 x\sqrt{1 + sh^2 x}\,dx = \int_0^1 xch\ x\,dx =$$

$$= \int_0^1 xd(shx) = x\,shx\Bigg|_0^1 - \int_0^1 shx\ dx = sh\,1 - ch\,1 + 1;$$

$$I_z = \int_0^1 ch^3 xdx = \int_0^1 \left(1 + sh^2 x\right)d(shx) = sh\,1 + \frac{1}{3}sh^3 1;$$

$$I_y = \int_0^1 x^2 ch\ x\,dx = \int_0^1 x^2 d(shx) = 3\,sh\,1 - 2\,ch\,1;$$

масса $m = \int_0^1 ch\ x\,dx = shx\Bigg|_0^1 = sh\,1$.

Тогда $x_c = \dfrac{M_y}{m} = \dfrac{sh\,1 - ch\,1 + 1}{sh\,1}$, $y_c = \dfrac{M_x}{m} = \dfrac{2 + sh\,2}{4\,sh\,1}$. ▲

2.94. Найти статические моменты M_x и M_y плоской кривой (плотность $\rho = 1$):

1) $x/a + y/b = 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0$;

2) $y^2 = 2x,\ 0 \le x \le 2$;

3) $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1,\ y \ge 0,\ a > b$;

4) $x = a\sin^3 t,\ y = a\cos^3 t,\ 0 \le t \le \pi/2,\ a > b$.

5) $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ 0 \le t \le 2\pi$;

6) $\rho = 2a\cos\varphi,\quad 0 \le \varphi \le \pi/2$;

7) $\rho = a\,e^{\varphi}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Отв.: 1) $M_x = b\sqrt{a^2 + b^2}\big/2$, $M_y = a\sqrt{a^2 + b^2}\big/2$;

2) $M_x = 0$, $M_y = \dfrac{9\sqrt{5}}{4} + \dfrac{1}{8}\ln\left(2 + \sqrt{5}\right)$;

3) $M_x = b\left(b + \dfrac{a}{e}\left(\sqrt{2} + 5\ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right)\right)$, $e = \sqrt{a^2 + b^2}\big/a$;

4) $M_x = M_y = 3a^2\big/5$;

5) $M_x = 32\,a^2\big/3$, $M_y = 8\pi\,a^2$;

6) $M_x = 2a^2$, $M_y = \pi\,a^2$;

7) $M_x = \dfrac{\sqrt{2}}{5}\left(1 - e^{4\pi}\right)a^2$, $M_y = \dfrac{2\sqrt{2}}{5}\left(e^{4\pi} - 1\right)a^2$.

2.95. Найти координаты x_c и y_c центра масс кривой (плотность $\rho = 1$) :

1) $x = R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$, $|\varphi| \le \alpha \le \pi$;

2) $x = \dfrac{1}{4}y^2 - \dfrac{1}{2}\ln y$, $1 \le y \le 2$;

3) $\rho = a\left(1 + \cos\varphi\right)$, $0 \le \varphi \le \pi$;

4) $x = a\left(t - \sin t\right)$, $y = a\left(1 - \cos t\right)$, $0 \le t \le 2\pi$.

Отв.: 1) $x_c = \left(\sin\alpha\right)/\alpha$, $y_c = 0$;

2) $x_c = \dfrac{27 - 16\ln 2 - 4\ln^2 2}{8\left(3 + \ln 4\right)}$, $y_c = \dfrac{20}{3\left(3 + \ln 4\right)}$;

3) $x_c = y_c = 4a/5$;

4) $x_c = \pi\,a$, $y_c = 4a/3$.

2.96. Найти момент инерции I_x кривой:

1) $y = e^2$, $0 \le x \le 1/2$;

2) $x = R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$, $0 \le \varphi \le \alpha \le 2\pi$;

3) $x^2 + \left(y - a\right)^2 = R^2$, $a > R$..

Отв.: 1) $\dfrac{1}{3}\left(\left(1 + e\right)^{3/2} - 2\sqrt{2}\right)$; **2)** $\dfrac{1}{4}\left(2\alpha - \sin 2\alpha\right)R^3$;

3) $\pi R\left(2a^2 + R^2\right)$.

2.97. Найти моменты инерции I_x и I_y одной арки циклоиды:

$x = a\left(t - \sin t\right)$, $y = a\left(1 - \cos t\right)$, $0 \le t \le 2\pi$.

Отв.: $I_x = 256a^3\big/15$, $I_y = 16\left(\pi^2 - \dfrac{128}{45}\right)a^3$.

Пусть плоская фигура D задана неравенствами

$y_1(x) \le y \le y_2(x)$, $0 \le x \le b$, где $y_1(x)$, $y_2(x)$ – непрерывные на $[a, b]$ функции. Пусть на D распределена масса с плотностью $\rho(x)$. Масса m фигуры, статические моменты M_x и M_y, а также моменты инерции I_x и I_y относительно осей X и Y вычисляются по следующим формулам :

$$m = \int_a^b \left(y_2^2(x) - y_1^2(x) \right) \rho(x)\, dx; \tag{2.58}$$

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b \left(y_2^2(x) - y_1^2(x) \right) \rho(x)\, dx; \tag{2.59}$$

$$M_y = \int_a^b x \left(y_2(x) - y_1(x) \right) \rho(x)\, dx; \tag{2.60}$$

$$I_x = \frac{1}{3} \int_a^b \left(y_2^3(x) - y_1^3(x) \right) \rho(x)\, dx; \tag{2.61}$$

$$I_y = \int_a^b x^2 \left(y_2(x) \right) - y_1(x) \rho(x) dx\,. \tag{2.62}$$

Пусть сектор задан в полярных координатах неравенствами $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$, $0 \le \rho \le \rho(\varphi)$, где $0 < \varphi_2 - \varphi_1 \le 2\pi$, $\rho(\varphi)$– непрерывная на $[\varphi_1, \varphi_2]$ функция, и пусть на секторе распределена масса с плотностью $\delta(\varphi)$, тогда:

$$m = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi) \delta(\varphi)\, d\varphi\,, \tag{2.63}$$

$$M_x = \frac{1}{3} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^3(\varphi) \sin\varphi\, \delta(\varphi)\, d\varphi\,, \tag{2.64}$$

$$M_y = \frac{1}{3} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^3(\varphi) \cos\varphi\, \delta(\varphi)\, d\varphi\,, \tag{2.65}$$

$$I_x = \frac{1}{4} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^4(\varphi) \sin^2\varphi\, \delta(\varphi) d\varphi\,, \tag{2.66}$$

$$I_y = \frac{1}{4} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^4(\varphi) \cos^2\varphi\, \delta(\varphi) d\varphi\,. \tag{2.67}$$

Координаты центра масс вычисляются по формулам (2.57).

2.98. Фигура ограничена параболой $y = h\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$, полуокружностью $x^2 + y^2 = r^2$

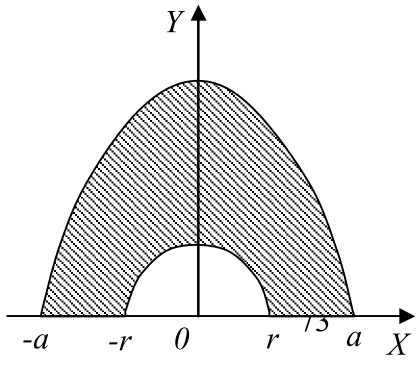

Рис. 2.30

и осью x (рис. 2.29). Считая фигуру однородной с плотностью $\delta = 1$, найти координаты центра масс фигуры и её момент инерции относительно оси y.

Δ Указанные величины найдем по формулам (2.57) – (2.60), (2.62), полагая $y_2 = h\left(1 - x^2 / a^2\right)$, $y_1(x) = 0$ при $r < |x| \le a$, $y_1(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ при $|x| \le r$. По формуле (2.58) для массы фигуры имеем $m = \int_{-a}^{a} (y_2(x) - y_1(x))dx = 2\int_0^a (y_2(x) - y_1(x))dx$, так как $y_1(x)$ и $y_2(x)$ четные функции, и, учитывая, что $y_1(x) = 0$при $r \le x \le a$, получаем $m = 2\int_0^a h\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\right)dx - 2\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}dx$.

Вычислив эти интегралы (для второго интеграла ввести подстановку $x = r\sin t$), получим

$$m = \frac{1}{6}\left(8ah - 3\pi r^2\right).$$

Из формулы (2.60) имеем

$M_y = \int_{-a}^{a} x(y_2(x) - y_1(x))dx = 0$, так как $x(y_2(x) - y_1(x))$– нечетная функция. Отсюда $x_c = M_y / m = 0$, что и следовало ожидать, ибо центр масс находится на оси y – оси симметрии фигуры.

По формуле (2.59) находим

$$M_x = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} \left(y_2^2(x) - y_1^2(x)\right)dx = \int_0^a h^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^2 dx - \int_0^r \left(r^2 - x^2\right) dx = .$$
$$= \frac{2}{15}\left(4ah^2 - 5r^3\right).$$

Отсюда

$$y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{4\left(4ah^2 - 5r^3\right)}{5\left(8ah - 3\pi r^2\right)}.$$

Момент инерции I_y находим по формуле (2.62):

$$I_y = \int_{-a}^{a} x^2(y_2(x) - y_1(x))dx = 2\int_0^a x^2 h\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx - 2\int_0^r x^2\sqrt{r^2 - x^2}dx = \frac{4}{15}a^3h - \frac{\pi}{8}r^4 . \blacktriangle$$

2.99. Найти статические моменты M_x и M_y фигуры $(\rho = 1)$, ограниченной кривыми:

1) $x / a + y / b = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $a > 0$, $b > 0$;

2) $y = \sin x,\ |x| \le \pi/2,\ y = 0$;

3) $y = 2/(1 + x^2),\ y = x^2,\ x = 0,\ x \ge 0$;

4) $x = a\sin t,\ y = b\cos t,\ |t| \le \pi/2,\ y = 0$;

5) $x = a(t - \sin t),\ y = b(1 - \cos t),\ 0 \le t \le \pi/2,\ y = 0$;

6) $\rho = a\varphi,\ 0 \le \varphi \le \pi$; 7) $\rho = a(1 + \cos\varphi),\ |\varphi| \le \pi$.

Отв.: 1) $M_x = ab^2/6,\ M_y = a^2b/6$;

2) $M_x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\sqrt{3}}{8},\ M_y = \pi\left(3\sqrt{3} - \pi/6\right)$;

3) $M_x = 2/5 + \pi/4,\ M_y = \ln 2 - 1/4$.

4) $M_x = 2ab^2/3,\ M_y = 0$;

5) $M_x = 5\pi a^3/2,\ M_y = 3\pi^2 a^3$;

6) $M_x = \pi a^3(\pi^2 - 6)/3,\ M_y = a^3(4 - \pi^2)$;

7) $M_x = 0,\ M_y = 5\pi a^3/4$.

2.100. Найти координаты x_c и y_c центра масс фигуры, ограниченной кривыми:

1) $y^2 = x^3/a,\ x = a,\ y = 0,\ a > 0,\ y \ge 0$;

2) $y = \cos x,\ |x| \le \pi/2,\ y = 1/2$;

3) $y^2 = 2px,\ x^2 = 2py$;

4) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3},\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ x = 0,\ y = 0$;

5) $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ 0 \le t \le 2\pi,\ y = 0$;

6) $\rho = a\varphi, 0 \le \varphi \le \pi, \varphi = 0, \varphi = \pi$;

7) $\rho^2 = a^2(\cos 2\varphi)$ (правая петля);

8) $\rho = a\sin 2\varphi, 0 \le \varphi \le \pi/2$.

Отв.: 1) $x_c = 5a/7,\ y_c = 5a/16$; **2)** $x_c = 0,\ y_c = \dfrac{2\pi + 3\sqrt{3}}{8\left(3\sqrt{3} - \pi\right)}$; **3)** $x_c = y_c = 9\rho/10$; **4)** $x_c = y_c = 256a/315\pi$; **5)** $x_c = \pi a$, $y_c = 5a/6$; **6)** $x_c = 10/21,\ y_c = 5/3$; **7)** $x_c = \pi a\sqrt{2}/8,\ y_c = 0$; **8)** $x_c = 0,\ y_c = \pi/2$.

2.101. Найти момент инерции:

а) однородного круга радиусом R относительно его диаметра;

б) однородного треугольника с основанием a и высотой h относительно: 1) оси, содержащей его основание; 2) оси, проходящей через вершину параллельно основанию; 3) оси, проходящей через центр масс треугольника параллельного основанию.

Отв.: а) $\pi R^4/4$; **б)** 1. $ah^3/12$. 2. $ah^3/4$. 3. $ah^3/36$.

2.102. Найти моменты инерции I_x, I_y фигуры, ограниченной кривыми:

1) $y/h = x^2/a^2$, $y = h$; 2) $ay = 2ax$, $y = 0$.

Отв.: 1) $I_x = 2ah^3/7$, $I_y = 4a^3h/15$; **2)** $I_x = 32a^4/105$, $I_y = 8a^4/5$.

3. Несобственные интегралы

3.1. Несобственные интегралы от неограниченных функций

Понятие несобственного интеграла 2-го рода (от неограниченных функций). Основные формулы для несобственных интегралов 2-го рода (линейность, формула Ньютона — Лейбница, замена переменной интегрирования, интегрирование неравенств). Признаки сходимости и расходимости для неотрицательных функций (признаки сравнения). Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов 2-го рода. Признаки Дирихле и Абеля. Главное значение несобственного интеграла 2-го рода.

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a, b)$ и неограниченна при $x \to b - 0$, т.е. $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = \infty$. Точка b при этом называется *особой* для функции $f(x)$. Будем считать, что $\forall \varepsilon > 0$ на отрезке функция $f(x)$ интегрируема, т.е. существует интеграл $\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$.

Если существует

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx, \tag{3.1}$$

то этот предел называется *несобственным интегралом от функции* $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, или *несобственным интегралом 2-го рода* и обозначается

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \tag{3.2}$$

Аналогично, если функция $f(x)$ имеет особенность в точке $x = a$, то по определению

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx. \tag{3.3}$$

Если же особой точкой функции $f(x)$ является точка c, $a < c < b$, то по определению

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon',\varepsilon''\to 0} \left(\int_a^{c-\varepsilon'} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon''}^{b} f(x)dx \right). \tag{3.4}$$

Несобственный интеграл второго рода называется *сходящимся* (сх.), если существует конечный предел (3.2), или (3.3), или (3.4). В противном случае интеграл называется *расходящимся* (расх.).

Для непрерывной неотрицательной функции $y = f(x),\ x \in [a,b)$, сходящийся несобственный интеграл (3.1) равен площади неограниченной криволинейной трапеции D (рис. 3.1).

Аналогично трактуются сходящиеся несобственные интегралы (3.3) и (3.4) [1].

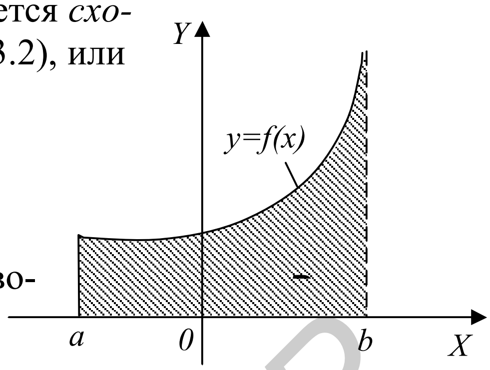

Рис. 3.1

3.1. Вычислить интегралы (или установить их расходимость):

а) $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$; б) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x}$; в) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{\left|1-x^2\right|}}$;

Δ а) Подынтегральная функция $f(x) = 1/\left(x\sqrt[3]{\ln x}\right)$ неограниченна в окрестности точки $x = 1$. На любом же отрезке $[1+\varepsilon, e]$ она интегрируема, так как является непрерывной функцией. Поэтому по определению (3.3) имеем

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}} = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{1+\varepsilon}^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{\ln^2 x}\right)\Bigg|_{1+\varepsilon}^{e} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{\ln^2(1+\varepsilon)}\right) = \frac{3}{2}.$$

б) Подынтегральная функция $f(x) = 1/\cos x$ неограниченна в окрестности точки $x = \pi/2$ и интегрируема на любом отрезке $[0, \pi/2 - \varepsilon]$. По определению (3.2) имеем

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x} = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_0^{\pi/2-\varepsilon} \frac{dx}{\cos x} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\ln tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)\Bigg|_0^{\pi/2-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to+0} \ln tg\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right) = \infty.$$

Следовательно, данный интеграл расходится.

в) Подынтегральная функция $f(x) = 1/\left|\sqrt{1-x^2}\right|$ неограниченна в окрестности точки $x = 1$, являющейся внутренней точкой промежутка интегрирования. Поэтому

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{\left|1-x^2\right|}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\left|1-x^2\right|}} + \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{\left|1-x^2\right|}}.$$

Вычислим каждое слагаемое в отдельности.

Если $0 \le x < 1$, то

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}} = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to+0} \arcsin x \Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to+0} \left(\arcsin(1-\varepsilon) - 0\right) = \pi/2 .$$

Если $1 < x \le 2$, то

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{\varepsilon\to+0} \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\Big|_{1+\varepsilon}^2 =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0} \left[\ln\left(2+\sqrt{3}\right) - \ln\left(1+\varepsilon+\sqrt{(1+\varepsilon)^2+1}\right)\right] = \ln\left(2+\sqrt{3}\right).$$

Следовательно, $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}} = \frac{\pi}{2} + \ln\left(2+\sqrt{3}\right).$ ▲

3.2. В $[1]$ установлено, что интеграл $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \ge 1$.

3.3. Вычислить интегралы и установить их расходимость:

1) $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$; 2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3+\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[5]{x^3}}dx$; 3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1-x^3}$;

4) $\displaystyle\int_0^{3a} \frac{2xdx}{\left(x^2-a^2\right)^{2/3}}$; 5) $\displaystyle\int_0^{2/\pi} \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}$; 6) $\displaystyle\int_0^1 \ln x dx$;

7) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$; 8) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx$; 9) $\displaystyle\int_{-1}^1 e^{1/x}\frac{dx}{x^3}$;

10) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{|\cos x|}{\sqrt{\sin x}}dx$; 11) $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}dx$.

Отв.: 1) π; **2)**-625/187; **3)** расх.; **4)** $9a^{2/3}$; **5)** расх.; **6)** -1; **7)** $\pi^2/2$; **8)** $-3/2$; **9)** расх.; **10)** 4; **11)** $\pi+2$.

Для несобственных интегралов второго рода справедливы следующие *основные свойства*:

1°. *Линейность.* Если несобственные интегралы $\displaystyle\int_a^b f(x)dx, \int_a^b g(x)dx$ сходятся, то $\forall \alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$ сходится интеграл $\displaystyle\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))dx$, причем

$$\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))\,dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx . \qquad (3.5)$$

2°. *Формула Ньютона-Лейбница.* Если функция $f(x),\ x \in [a,b)$ непрерывна и $F(x)$ какая-либо её первообразная, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^{b-0} = F(b-0) - F(a), \tag{3.6}$$

где $\quad F(b-0) = \lim\limits_{b \to b-0} F(x).$

3°. *Формула замены переменной.* Пусть $f(x),\ x \in [a,b)$, непрерывная, а $\varphi(t),\quad t \in [\alpha,\beta)$, непрерывно дифференцируемая функция, причем $a = \varphi(\alpha) \le \varphi(t) < \lim\limits_{t \to \beta - 0} \varphi(t) = b$, тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi' dt. \tag{3.7}$$

Формула (3.7) справедлива в случае сходимости по крайней мере одного из входящих в нее интегралов. В случае расходимости одного из интегралов расходится и другой.

4°. *Формула интегрирования по частям.* Если $u(x),\ v(x),\ x \in [a,b)$– непрерывно дифференцируемые функции и существует $\lim\limits_{x \to b-0} (uv)$, то

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du, \tag{3.8}$$

где $$uv\Big|_a^b = \lim_{x \to b-0} (uv) - u(a)v(a).$$

Формула (3.8) справедлива в случае сходимости по крайней мере одного из входящих в неё интегралов. Если один из интегралов расходится, то расходится и другой.

3.4. Вычислить интегралы:

$$1)\ \int_0^1 \frac{\left(\sqrt[6]{x}+1\right)^2}{\sqrt{x}}dx; \qquad 2)\ \int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}; \qquad 3)\ \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx.$$

Δ 1) Используя свойство 1° линейности несобственного интеграла, имеем

$$\int_0^1 \frac{\left(\sqrt[6]{x}+1\right)^2}{\sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[6]{x}} + 2\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

На промежутке $(0,1]$ первообразными являются функции $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}$, $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$, $2\sqrt{x}$.

Тогда по формуле Ньютона—Лейбница получаем

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[6]{x}} = \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}\Big|_{+0}^1 = \frac{6}{5}; \qquad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\Big|_{+0}^1 = \frac{3}{2}; \qquad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_{+0}^1 = 2.$$

Значит, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\left(\sqrt[6]{x}+1\right)^2}{\sqrt{x}} = \frac{6}{5}+3+2=\frac{31}{5}$.

2) В данном несобственном интеграле введем замену переменной:

$$1-x=t^2,\ t>0 \Rightarrow x=1-t^2,\ dx=-2tdt.$$

Новые пределы интегрирования $\alpha=1,\ \beta=0$. Значит,

$$\int_0^1 \frac{dx}{(\alpha-x)\sqrt{1-x}} = -2\int_1^0 \frac{tdt}{t\left(t^2+1\right)} = \pi/2.$$

3) Интегрируем по частям:

$$u=\ln x,\ dn=dx/x,$$
$$dv=dx/\sqrt{x},\ v=2\sqrt{x},$$

Значит,

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\ln x\Big|_{+0}^{1} - 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = -2\lim_{x\to+0}\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x}\Big|_{+0}^{1} = -4. \blacktriangle$$

3.5. Вычислить интегралы:

1)* $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ (ввести замену $x=a\cos^2 t+b\sin^2 t$, $\quad t\in(0,\pi/2)$);

2)* $\displaystyle I=\int_0^{\pi/2}\ln\sin xdx$ (проинтегрировать по частям и в последующем ввести замены $x=2t$, $t=\pi/2-u$);

3) $\displaystyle\int_{-0.5}^{-0.25}\frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$; 4) $\displaystyle\int_1^2\frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$; 5) $\displaystyle\int_{-1}^1\frac{dx}{\left(16-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}$;

6) $\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{dx}{a^2+b^2-2bx}, a>0, b\geq 0$; 7) $\displaystyle\int_a^b x\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}dx$; 8) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sqrt{tgx}dx$;

9) $\displaystyle\int_{-1}^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arccos x}$; 10) $\displaystyle\int_{-1}^1 x^3\ln\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

Отв.: 1) π; **2)** $-\dfrac{\pi}{2}\ln 2$; **3)** $2\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$; **4)** $\dfrac{\pi}{2}-\arcsin(3/4)$; **5)** $\pi/\left(4\sqrt{15}\right)$; **6)** 2, если $b\leq 2a$; $(2a)b$, если $b>a$; **7)** $\dfrac{\pi}{8}(b-a)(a+3b)$; **8)** $\pi/\sqrt{2}$; **9)** $2\sqrt{\pi}$.

3.6. Вычислить площади криволинейных трапеций, образованных графиками функций:

1) $y=1/\sqrt{2-5x}$, $x\in[0,2/5)$; 2) $y=x/\sqrt{(x-a)(b-x)}$, $x\in(a,b)$;

3) $y=1/\left(x\sqrt{\ln x}\right)$, $x\in(1,e)$; 4) $y=\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$, $x\in[0,1)$.

Отв.: 1) $2\sqrt{2}/5$; **2)** $\pi(a+b)/2$; 3) 2; 4) 2.

3.7.* Найти площадь фигуры, ограниченной заданной кривой и её асимптотой:

1) $1\,xy^2 = 8-4x$; 2) $(x+1)y^2 = x,\ x<0$;

3) $(4-x)y^2 = x^3$; 4) $x=\cos 2t,\ y=\cos 2t\,tgx,\quad t\in[\pi/4, 3\pi/4]$.

Отв.: 1) 4π; **2)** $8/3$; **3)** 12π; **4)** $2+\pi/2$.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ неотрицательны на $[a,b)$ и интегрируемы на каждом отрезке $[a,\xi]$, $\xi<b$. Тогда :

I. Если функции f и g на $[a,b)$ удовлетворяют неравенству $f\le g$, то:

а) из сходимости интеграла $\int_a^b g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^b f(x)dx$;

б) из расходимости интеграла $\int_a^b f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^b g(x)dx$.

Сформулированный признак называется *признаком сравнения*.

II. а) Если $g>0$ на $[a,b)$ и существует $\lim\limits_{x\to b-0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k$, $k\ne 0$, то интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

б) В частности, если f эквивалентна g при $x\to b-0$, то функции f и g одновременно либо интегрируемы, либо неинтегрируемы на $[a,b)$.

Признак II называется *предельным знаком сравнения*.

3.8. Исследовать на сходимость интегралы:

1) $I_1=\int_0^1\dfrac{\cos^2(1/x)}{\sqrt{x}}dx$; 2) $I_2=\int_0^1\dfrac{dx}{1-x^3}dx$;

3) $I_3=\int_0^1\dfrac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)}{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}dx$.

Δ 1) На $(0,1)$ справедливо неравенство $0\le\dfrac{\cos^2(1/x)}{\sqrt{x}}\le\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Интеграл же $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ сходится (см. пример 3.2). Тогда по признаку сравнения сходится и интеграл I_1.

2) В левой окрестности точки $x=1$ функция $f(x)=1/\left(1-x^3\right)$ неограниченна. В качестве функции сравнения возьмем функцию $g(x)=1/(1-x)$. Так как $\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{1-x}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{1+x+x^2}=\frac{1}{3}$, то из расходимости интеграла $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x}$ (см. пример 3.2) по признаку сравнения II, а следует расходимость и интеграла I_2.

3) Подынтегральная функция неограниченна при $x\to +0$. При $x\to +0$ имеем

$$\frac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)}{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}\sim\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

Но интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ сходится. Тогда по признаку сравнения II, б сходится и интеграл I_3. ▲

3.9. Исследовать на сходимость интегралы:

1) $\int\limits_0^8 \frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x}}$; 2) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{1-x^{10}}}$; 3) $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^2}dx$;

4) $\int\limits_0^{\pi} \sin\left(\frac{1}{\cos x}\right)\frac{dx}{\sqrt{x}}$; 5) $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}}dx$;

6) $\int\limits_1^3 \frac{dx}{\sqrt{tg\left(x^3-7x^2+15x-9\right)}}$;

7) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x\left(e^x-e^{-x}\right)}}$; 8) $\int\limits_0^{\pi} \frac{shxdx}{e^{x^2}-\cos x}$; 9) $\int\limits_0^1 \frac{\ln x dx}{\sqrt{x(1-x)^3}}$.

Отв.: 1) Cx.; **2)** cx.; **3)** cx.; **4)** $pacx$.; **5)** cx.; **6)** $pacx$.; **7)** cx.; **8)** $pacx$.; **9)** cx.

3.10. Найти все значения параметра α, при которых сходится интеграл:

1) $\int\limits_0^{\pi} \frac{1-\cos x}{x^{\alpha}}dx$; 2) $\int\limits_0^1 \frac{6e^{2x^2}+24\cos x-13x^4-30}{\sin^{\alpha} x}dx$;

3) $\int\limits_0^1 \frac{e^{\alpha x}-\sqrt{1+1}}{chx-\cos x}dx$; 4) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 2x-e^{-4x^2}}{x^{\alpha}tgx}dx$.

Отв.: 1) $\alpha<3$; **2)** $\alpha<7$; **3)** $\alpha=1/2$; **4)** $\alpha<4$.

3.11.* При каких α и β сходятся интегралы:

1) $\int\limits_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\,dx$; 2) $\int\limits_0^1 x^{\alpha}\ln^{\beta}\frac{1}{x}dx$; 3) $\int\limits_0^{1/2}\frac{\ln^{\alpha}(1/x)}{tg^{\beta}x}dx$.

Отв.: 1) $\alpha>-1$, $\beta>-1$; **2)** $\alpha>-1$, $\beta>-1$; **3)** $\beta<1$, α–любое число.

Несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ называется *абсолютно сходящимися* (абс.сх.), если сходится интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|dx$, и *условно сходящимся* (усл.сх.), если интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится, а интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ расходится.

Пусть функция $y=f(x)g(x)$ определена на $[a,b)$ и неограниченна в левой полуокрестности точки $x=b$. Тогда справедливы следующие достаточные условия сходимости.

Признак Дирихле. Интеграл $I=\int\limits_a^b f(x)g(x)dx$ сходится, если:

1) функция $f(x)$ непрерывна и имеет ограниченную первообразную на $[a,b)$;

2) функция $g(x)$ непрерывна и монотонна на $[a,b)$, причем $\lim\limits_{x\to b-0} g(x)=0$.

Признак Абеля. Интеграл I сходится, если:

1) функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b)$ и интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится;

2) функция $g(x)$ ограниченна, непрерывно дифференцируема и монотонна на $[a,b)$

3.12. Доказать, что интеграл $I=\int\limits_0^1\frac{\sin(1/x)dx}{\sqrt{x}}$ сходится.

Δ Для $0<x\le 1$ выполняется неравенство

$$0\le\left|\frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}}\right|\le\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Но интеграл $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}$ сходится, поэтому по признаку сравнения сходится и интеграл $\int\limits_0^1\left|\frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}}\right|dx$, а, следовательно, сходится, и притом абсолютно, и интеграл I. ▲

3.13. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интегралы:

1) $\int\limits_0^1 \dfrac{\sin(1/x)dx}{x^2+\sqrt[3]{x}^3+x^2\cos(1/x)}$; 2) $\int\limits_0^1 \dfrac{1}{x\sqrt{x}}\cos\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}dx$;

3) $\int\limits_0^1 (1-e^{\sqrt[3]{x^2}\cos(1/x)})\dfrac{dx}{x^2}$; 4) $\int\limits_0^{1/2} \dfrac{\cos^3 x\ln x}{x\ln x}dx.$

Отв.: 1) усл. *сх.*; **2)** *расх.*; **3)** усл. *сх.*; **4)** усл. *сх.*

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на промежутках $(a, c-\varepsilon]$ и $[c+\varepsilon, b)$, $\varepsilon>0$, и неограниченна в окрестности точки $x=c\in(a,b)$.

Главным значением несобственного интеграла (или *значением в смысле Коши*) интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ (обозначается $\text{V}.\,p.\int\limits_a^b f(x)dx$) называется следующий предел:

$$\text{V}.\,p.\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx+\int\limits_{c+\varepsilon}^b f(x)dx\right).$$

Из существования интеграла в смысле главного значения следует еще, что соответствующий интеграл существует.

Например,

$$\text{V}.\,p.\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int\limits_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x}+\int\limits_{\varepsilon}^1\frac{dx}{x}\right)=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\ln|x|\Big|_{-1}^{-\varepsilon}+\ln|x|\Big|_{\varepsilon}^{1}\right)=0,$$

но сам интеграл $\int\limits_{-1}^1\dfrac{dx}{x}$ не существует. Если же существует несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, то существует и интеграл в смысле главного значения и эти интегралы равны.

3.14. Найти интегралы в смысле Коши:

1) $\int\limits_1^{10}\dfrac{dx.}{7-x}$; 2) $\int\limits_{-1}^{7}\dfrac{dx}{(x-1)^3}$; 3) * $\int\limits_a^b\dfrac{dx}{(x-c)^n}$, $c\in(a,b)$; $n\in \boldsymbol{N}$;

4) $\int\limits_{1/2}^{4}\dfrac{dx}{x\ln x}$; 5) $\int\limits_0^{\pi} xtgx\,dx$;

6) $\int\limits_0^{\pi/2}\dfrac{dx}{3-5\sin x}$.

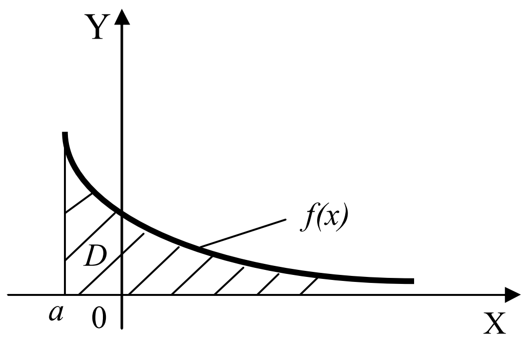

Рис. 3.2

Отв.: 1) $\ln 2$; **2)** $1/9$; **3)** если $n=1$, то $\ln\dfrac{b-c}{c-a}$; если $n=2k+1$, $k\in\text{N}$, то $\dfrac{1}{n-1}\left((a-c)^{1-n}(b-c)^{1-n}\right)$; если $n=2k$, то интеграл в смысле Коши не существует; **4)** $\ln 2$; **5)** $-\pi\ln 2$;; **6)** $-(\ln 2)/4$.

3.15. При каких α существует $V.p.\int_0^2 \frac{x^\alpha dx}{1-x}$? **Отв.:** $\alpha > 1$.

3.2. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования (1-го рода)

Определение несобственного интеграла 1-го рода. Основные свойства. Признаки сходимости и расходимости интегралов от неотрицательных функций (признаки сравнения). Абсолютная и условная сходимости. Признаки Дирихле и Абеля. Главное значение несобственного интеграла 1-го рода.

Если функция $f(x)$ непрерывна при $a \le x < +\infty$, то по определению *несобственным интегралом 1-го рода* называется предел

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx. \tag{3.9}$$

Если этот предел существует и конечен, то несобственный интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ называется *сходящимся*, в противном случае – *расходящимся*. При этом говорят (в случае сходимости), что функция $f(x)$ *интегрируема в несобственном смысле* на $[a,+\infty)$.

Для непрерывной неотрицательной функции $y = f(x)$, $x \in [a,+\infty)$, сходящейся несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ равен площади неограниченной криволинейной трапеции D (рис.3.2):

$$\mathrm{D} = \{(x,y)\,|\,a < x < +\infty, 0 < y < f(x)\}.$$

Аналогично определяется интеграл $\int_{-\infty}^b f(x)dx$. Далее, по определению

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx, \tag{3.10}$$

где c – некоторое число.

Если для функции $f(x)$, $x \in [a,+\infty)$, при некотором $c > a$ существуют интегралы $\int_a^c f(x)dx$ и $\int_a^c f(x)dx$, то

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx. \tag{3.11}$$

Если хотя бы один из интегралов в правой части этого равенства не существует, $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ является расходящимся.

3.16. Вычислить интегралы или установить их расходимость:

1) $\mathrm{I}_1 = \int\limits_0^{+\infty} \cos 2x dx;$ 2) $\mathrm{I}_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}.$

Δ 1) Имеем

$\int\limits_0^{+\infty} \cos 2x dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_0^b \cos 2x dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \frac{\sin 2b}{2}$. Но этот предел, как известно, не существует. Поэтому интеграл I_1 расходящийся.

2) По определению (3.11.)

$$\mathrm{I}_2 = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^0 \frac{dx}{x^2+2x+5} + \lim_{b\to+\infty} \int\limits_0^b \frac{dx}{x^2+2x+5}$$

(вместо точки $x=0$ в качестве промежуточного предела интегрирования можно взять любую другую конечную точку оси X). Каждый из пределов, стоящих в правой части последнего равенства, вычислим по отдельности:

$$\lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^0 \frac{dx}{x^2+2x+5} = \lim_{a\to-\infty} \frac{1}{2} arctg \frac{x+1}{2}\Big|_a^0 = \frac{1}{2} arctg\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4},$$

$$\lim_{b\to+\infty} \int\limits_0^b \frac{dx}{x^2+2x+5} = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{2} arctg \frac{x+1}{2}\Big|_0^b = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} arctg\frac{1}{2}.$$

Следовательно, $\mathrm{I}_2 = \pi/2$. ▲

3.17. Вычислить интегралы или установить их расходимость:

1) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-3)^3}};$ 2) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x+x^3};$ 3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-6x+10};$

4) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x+1};$ 5) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{x+1}{x^2+1}dx;$ 6) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2-5x+7}.$

Отв.: **1)** 1; **2)** $\frac{1}{2}\ln 2$; **3)** π; **4)** расх.; **5)** расх.; **6)** $2\pi/\sqrt{31}.$

3.18. Вычислить площади криволинейных трапеций, образованных графиками функций:

1) $y = xe^{-x^2/2}, x \in [0,+\infty);$

2) $y = \sqrt{x}/(x+1)^2, x \in [1,+\infty);$

3) $y = \frac{x+1}{(x^2+4x+5)^2}, x \in [-1,+\infty).$

Отв.: **1)** 1; **2)** $\pi/4 + 1/2$; **3)** $1/2 - \pi/8$.

Сформулируем свойства несобственного интеграла 1-го рода.

1°. *Линейность.* Если интегралы

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx, \quad \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

сходятся, то $\forall \alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$ сходится интеграл

$$\int_a^{+\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^{+\infty} f(x)dx + \beta \int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

2°. *Формула Ньютона—Лейбница*. Если функция $f(x), x \in [a,+\infty)$, непрерывна и $F(x)$ – какая-либо её первообразная, то

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a), \tag{3.12}$$

где $F(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

3°. *Формула замены переменной*. Пусть $f(x),\ x \in [a,+\infty)$, – непрерывная, $\varphi(t),\ t[\alpha,\beta)$ – непрерывно дифференцируемые функции, причем

$$a = \varphi(\alpha) \le \varphi(t) < \lim_{t\to\beta-0} \varphi(t) = +\infty,$$

тогда

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{3.13}$$

4°. *Формула интегрирования по частям*. Если $u(x), v(x),\ \ x \in [a,\ +\infty)$ – непрерывно дифференцируемые функции и $\lim\limits_{x\to+\infty} (u,v)$ существует, то

$$\int_a^{+\infty} udv = uv\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} vdu, \tag{3.14}$$

где $uv\Big|_a^{+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} (uv) - u(a)v(a)$.

Формула (3.14) справедлива в случае сходимости по крайней мере одного из двух входящих в нее интегралов. В случае расходимости одного из интегралов расходится и другой.

5°. *Интегрирование неравенств*. Если функции $f(x)$ *и* $g(x),\ x \in [a, +\infty)$ удовлетворяют неравенству $f(x) \le g(x)$, то для интегралов $\int_a^{+\infty} f(x)dx,\ \int_a^{+\infty} g(x)dx,$ при условии их сходимости, верно неравенство

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \le \int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

3.19. Вычислить интегралы:

1) $\mathrm{I}_1 = \int\limits_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$; 2) $\mathrm{I}_2 = \int\limits_1^e \ln x dx.$

Δ 1) Введем подстановку

$x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt,\ t = \arcsin x,\ t_1 = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4},\ t_2 = \arcsin 1 = \pi/2.$

Значит,

$$\mathrm{I}_1 = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin^2 t}dt = (-ctgt - t)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = -\frac{\pi}{2} + 1 + \frac{\pi}{4} = 1 - \pi/4.$$

2) Интегрируем по частям:

$$\mathrm{I}_2 = \int\limits_1^e \ln x dx = \begin{vmatrix} u = \ln x, & du = (dx/x) \\ dv = dx, & v = x \end{vmatrix} = x\ln x\Big|_1^e - \int\limits_x^e x\frac{dx}{x} = e - x\Big|_1^e = 1. \blacktriangle$$

3.20. Вычислить площадь S криволинейной трапеции, ограниченной графикам функции $y = 1/\sqrt{1+e^x}$ и положительными лучами осей координат.

Δ Имеем

$$S = \int\limits_0^{+\infty} y dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}.$$

Введем подстановку $1 + e^x = t^2,\ t > 0,$ тогда

$$dx = \frac{2tdt}{t^2-1}, \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = \frac{2dt}{t^2-1},$$

и, кроме того, когда $x \in [0,+\infty)$, то $t \in [\sqrt{2},+\infty)$. Поэтому

$$S = \int\limits_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{2dt}{t^2-1} = \left(\ln\frac{t-1}{t+1}\right)\Bigg|_{\sqrt{2}}^{+\infty} = \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = 2\ln(1+\sqrt{2}).\ \blacktriangle$$

3.21. Доказать неравенство

$$0 < \int\limits_2^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3 - x^2 + 3}}{x^5 + x^3 + 1}dx < \frac{1}{10\sqrt{2}}.$$

Δ При $x \in [2,+\infty)$ верны неравенства

$$0 < \frac{\sqrt{x^3 - x^2 + 3}}{x^5 + x^3 + 1} < \frac{\sqrt{x^3}}{x^5} = x^{-7/2},$$

поэтому

$$0 < \int\limits_2^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3 - x^2 + 3}}{x^5 + x^2 + 1} < \int\limits_2^{+\infty} x^{-7/2}dx.$$

Но $\int\limits_2^{+\infty} x^{-7/2}dx = -\frac{2}{5}x^{-5/2}\Big|_2^{+\infty} = \frac{2}{5}\cdot 2^{-5/2} = \frac{1}{10\sqrt{2}}. \blacktriangle$

3.22. Применяя формулу замены переменной или интегрирования по частям, вычислить интегралы:

1) $\int\limits_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; 2) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{e^x+\sqrt{e^x}}$; 3) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}}$;

4) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{xe^{arctgx}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}dx$; 5) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}}$; 6) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(4x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$;

7) $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-ax}\sin bx\,dx$; 8) $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-ax}\sin^2 bx\,dx$; 9) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}dx$;

10) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$; 11) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{(2-x)dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}$;

12*) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x^\alpha+1)(x^2+1)}, \quad \alpha\in\boldsymbol{R}$.

Отв.: **1)** $-\pi/6$; **2)** $2(1-\ln 2)$; **3)** $1/9$; **4)** $\frac{1}{2}e^{\pi/2}$; **5)** $\arcsin(1/\sqrt{5})$; **6)** $\pi\sqrt{3}/9$; **7)** $b/(a^2+b^2)$; **8)** $2b^2(a(a^2+4b^2))$; **9)** -11; **10)** 0; **11)** 0; **12)** $\pi/4$.

3.23. Вычислить площади криволинейных трапеций, образованных графиками функций.

1) $y = xe^{-x^2/2}$, $x\in[0,+\infty)$. **Отв.:** 1.

2) $y=\sqrt{x}/(x+1)^2$, $x\in[1,+\infty)$. **Отв.:** $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$.

3) $y=x^4e^{-x}$, $x\in[0,+\infty)$. **Отв.:** 24.

4) $y=\frac{x\sqrt{x}}{x^5+1}$, $x\in[0,+\infty)$. **Отв.:** $\pi/5$.

3.24. Доказать неравенства:

1) $0<\int\limits_{10}^{+\infty}\frac{x^2dx}{x^4+x+1}<0{,}1$;

2) $0{,}25<\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{x^6+1}{x^{11}+1}dx<0{,}35$.

3.25*. Показать, что для интеграла

$$\mathrm{I}_n=\int\limits_0^{\pi/2}\sin^n x dx=\int\limits_0^{\pi/2}\cos^n x dx, \quad n\in\boldsymbol{N},$$

верна рекуррентная формула $\mathrm{I}_n=\frac{n-1}{n}\mathrm{I}_{n-2}$. Вычислить I_7 *и* I_8.

Отв.: $\mathrm{I}_7=16/35$, $\mathrm{I}_8=35\pi/256$.

Как и в случае несобственных интегралов от неограниченных функций, для несобственных интегралов с бесконечными пределами интегрирования для неотрицательных функций справедливы следующие *признаки сходимости и расходимости* (*признаки сравнения*).

1. Если f и g удовлетворяют на $[a,+\infty)$ неравенству $f \le g$, то:

а) из сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$;

б) из расходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx.$

2. а) Если $g>0$ на $[a,+\infty)$ и существует $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k\ne 0$, то интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

б) В частности, если $f \approx g$ при $x\to+\infty$, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ одновременно сходятся или расходятся.

На практике в качестве интеграла, с которым проводится сравнение, обычно используются интегралы вида (*интегралы Дирихле*)

$$\int\limits_a^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx,\ a>0,\ \alpha>0,$$

сходящиеся при $\alpha>1$ и расходящиеся при $\alpha\le 1$.

3.26. Исследовать на сходимость данный интеграл:

$$1)\int\limits_1^{\infty}\frac{\sin^2 3x}{\sqrt[3]{x^4+1}}dx;\quad 2)\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{4x+\ln x}};\quad 3)\int\limits_1^{\infty}\frac{xdx}{x^3+\sin x}.$$

Δ 1) На $[1,+\infty)$ справедливо неравенство $0\le\dfrac{\sin^2 3x}{\sqrt[3]{x^4+1}}<\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$, и, так как $\int\limits_1^{\infty}\dfrac{dx}{x^{4/3}}$ сходится ($\alpha=4/3>1$), то по признаку сравнения сходится и данный интеграл.

2) Обозначим $f(x)=1/\sqrt{4x+\ln x}$, в качестве функции сравнения возьмем $g(x)=1/\sqrt{x}$. Так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{4x+\ln x}}=\dfrac{1}{2}$, то из расходимости $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{\sqrt{x}}, (\alpha=1/2<1)$, по признаку сравнения следует расходимость данного интеграла.

3) Так как $x/(x^3+\sin x)\approx 1/x^2$ при $x\to+\infty$ и $\int\limits_1^{\infty}\dfrac{dx}{x^2}$ сходится $(\alpha=2>1)$, то, согласно признаку сравнения 2,б данный интеграл сходится.▲

3.27. Исследовать на сходимость интегралы:

1) $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{3+2x^2+5x^4}$; 2) $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{\sqrt{x^3}+\sqrt{x^2+1}}{x^3+3x+1}dx$; 3) $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{3x^2+\sqrt{(x+1)^3}}{2x^3+\sqrt[3]{x^5}+1}dx$; 4) $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{3+\sin x}{\sqrt[3]{x}}dx$;

5) $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{\sqrt{x(x+1)(x+2)}}$; 6) $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{\sin(1/x)\,dx}{2+x\sqrt{x}}$; 7) $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{\sqrt{x}+\cos^2 x}$; 8) $\int\limits_{e^2}^{+\infty}\dfrac{dx}{x\ln\ln x}$;

9) $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{x+\sqrt{x+1}}{x^2+2\sqrt[5]{x^4+1}}dx$; 10) $\int\limits_3^{+\infty}\dfrac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}}$.

Отв.: 1) сх.; **2)** сх.; **3)** расх.; **4)** расх.; **5)** сх.; **6)** сх.; **7)** расх.; **8)** расх.; **9)** расх.; **10)** сх..

3.28. Найти все α, при которых сходятся интегралы:

1) $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{\alpha x}dx$; 2) $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{\ln x dx}{x^\alpha}$; 3) $\int\limits_1^{+\infty}\ln\left(1+\dfrac{e^{1/x}-1}{\alpha}\right)dx,\ \alpha\neq 0$;

4) $\int\limits_2^{+\infty}\dfrac{e^{\alpha x}dx}{(x-1)^\alpha\ln x}$; 5) $\int\limits_3^{+\infty}\dfrac{e^{-x}-\ln x}{(1+x^\alpha)^{a-2}}dx$.

Отв.: 1) $\alpha>0$; **2)** $\alpha>1$; **3)** *Расх.* $\forall\alpha$; **4)** $\alpha<0$; **5)** $\alpha>\sqrt{2}+1$.

Абсолютная и условная сходимости несобственных интегралов 1-го рода определяются аналогично соответствующим определениям, сделанным для несобственных интегралов от неограниченных функций.

3.29. Доказать, что *интегралы Френеля*

$$\int\limits_0^{+\infty}\sin(x^2)dx,\ \int\limits_0^{+\infty}\cos(x^2)dx.$$

сходятся.

Δ Докажем сходимость первого из интегралов Френеля (доказательство сходимости второго производится аналогично).

Введем замену $x=\sqrt{t}$. Тогда

$$\int\limits_0^{+\infty}\sin(x^2)dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt.$$

Интеграл справа представим в виде

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt=\int_{0}^{\pi/2}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt+\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt.$$

Первое слагаемое справа есть собственный интеграл, так как $\lim\limits_{t\to+0}\sin t/\sqrt{t}=0.$

Ко второму слагаемому применим интегрирование по частям, положив

$$u=1/t,\ \sin tdt=dv\Rightarrow\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}dt}=-\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\Bigg|_{\pi/2}^{+\infty}-\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\cos tdt}{t^{3/2}}=-\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\cos t}{t^{3/2}}dt.$$

Последний интеграл сходится абсолютно, так как $\frac{|\cos t|}{t^{3/2}}\le\frac{1}{t^{3/2}}$, а интеграл $\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{dt}{t^{3/2}}$ сходится $(\alpha=3/2>1)$. ▲

3.30*. Исследовать на абсолютную и условную сходимость следующие интегралы:

1) $\int_{0}^{+\infty}\frac{x\cos 7x}{x^2+2x+2}dx;$ 2) $\int_{0}^{+\infty}x\cos x^4dx;$ 3) $\int_{1}^{+\infty}\sin\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)\frac{dx}{\sqrt{x}};$

4) $\int_{1}^{+\infty}(1-e^{(\sin x)/x})\sqrt{x}\,dx;$ 5) $\int_{1}^{+\infty}arctg\left(\frac{\cos x}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx.$

Отв.: 1) - 5) сх.усл.

Для несобственных интегралов 1-го рода справедливые следующие *достаточные признаки их сходимости*.

Признак Дирихле. Интеграл $\int_{a}^{+\infty}f(x)g(x)dx$ сходится, если:

а) функция $f(x)$ непрерывна и имеет ограниченную первообразную на $[a,+\infty)$;

б) функция $g(x)$ непрерывно дифференцируема и монотонна на $[a,+\infty)$, причем $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$.

Признак Абеля. Интеграл $\int_{a}^{+\infty}f(x)g(x)dx$ сходится, если:

а) функция $f(x)$ непрерывна на $[a,+\infty)$ и $\int_{a}^{+\infty}f(x)dx$ сходится;

б) функция $g(x)$ ограниченна, непрерывно дифференцируема и монотонна на $[a,+\infty)$.

3.31*. Исследовать $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}} dx$ на абсолютную и условную сходимость при всех значениях параметра α.

Отв.: При $\alpha > 1$ сх. абс., при $0 < \alpha \le 1$ сх. усл., при $\alpha \le 0$ расходится.

3.32. Используя признак Абеля, доказать, что при $\alpha > 0$ интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}} arctgx\, dx$ сходится.

3.33*. Сходится ли интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin x dx}{\sqrt{x} - \sin x}$?

Можно ли исследовать этот интеграл с помощью признака Дирихле, положив $f(x) = \sin x$ и $g(x) = 1/(\sqrt{x} = \sin x)$?

Отв.: Сходится, но признак Дирихле не применим.

По определению, *главным значением несобственного интеграла* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ называется: $\text{V.p} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim\limits_{R \to +\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)dx.$

Если существует несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx,$ то существует и интеграл в смысле главного значения (в смысле Коши) и оба интеграла равны. Из существования интеграла в смысле Коши не следует существования соответствующего несобственного интеграла. Например,

$$\text{V.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} xdx = \lim_{R \to +\infty} \int\limits_{-R}^{R} xdx = \lim_{R \to +\infty} \frac{x^2}{2}\Bigg|_{-R}^{R} = 0,$$

но интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xdx,$ очевидно, не существует.

3.34 . Найти интегралы в смысле главного значения:

1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx;$ 2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} arctgx\ \ ddx;$ 3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (arctgx + \frac{1}{1+x^2} - \frac{\pi}{2})dx;$ 4) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{13+x}{17+x^2}dx;$ 5) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x}.$

Отв.: 1) 0; **2)** 0; **3)** π; **4)** $13\pi/\sqrt{17}$; **5)** 0.

Св. план 2006, поз. 70

Учебное издание

Авторы:

Карпук Андрей Андреевич
Жевняк Ростислав Михайлович
Цегельник Владимир Владимирович
Смирнова Инесса Анатольевна

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ
для студентов радиотехнических
специальностей БГУИР

В 10-ти частях

Часть 6

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Редактор Т.А. Лейко
Корректор Е.Н. Батурчик

Подписано в печать 9.10.2006. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная.
Гарнитура «Таймс». Печать ризографическая. Усл. печ. л. 8,72.
Уч.-изд. л. 7,6. Тираж 500 экз. Заказ 17.

Издатель и полиграфическое исполнение: Учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
ЛИ №02330/0056964 от 01.04.2004. ЛП №02330/0131666 от 30.04.2004.
220013, Минск, П. Бровки, 6