SERIES DE FOURIER

Les séries de Fourier sont utilisées dans le domaine du "traitement du signal" et ont de nombreuses applications (électricité, synthèse de sons, reconnaissance vocale…)

Un signal est représenté par une fonction périodique.

Si T est sa période, alors :

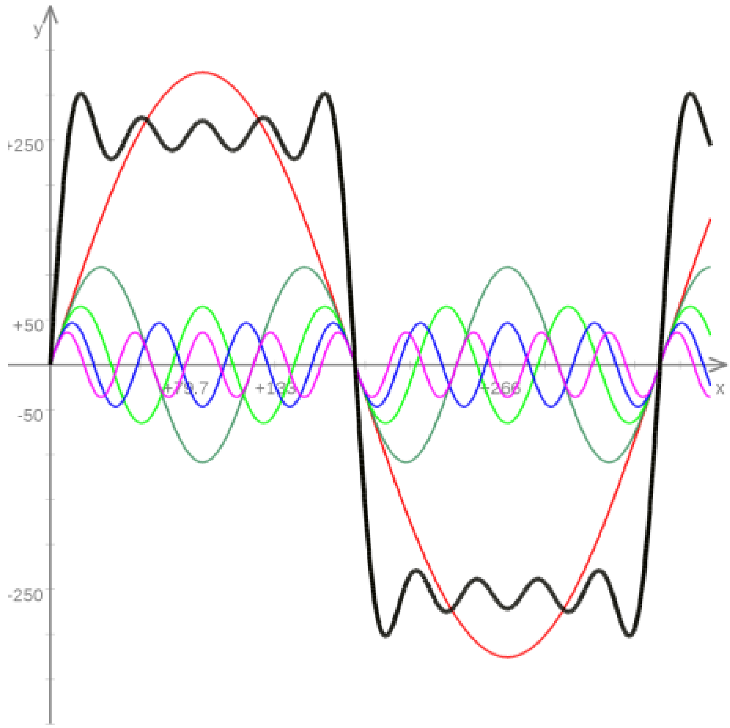
$F = \frac{1}{T}$ est sa fréquence

$\omega = 2\pi F = \frac{2\pi}{T}$ est sa pulsation.

L'analyse de cette fonction périodique sera facilitée par le fait de pouvoir la décomposer en une somme de signaux "simples", à savoir des signaux sinusoïdaux (sinus ou cosinus).

Les séries de Fourier permettent de décomposer une fonction périodique en une somme de fonctions sinusoïdales, la fréquence de chacune de ces fonctions sinusoïdales étant un multiple de la fréquence du signal étudié.
On dit que les fonctions sinusoïdales de cette décomposition sont les harmoniques du signal.

Exemple :



I. DEVELOPPEMENT EN SERIE DE FOURIER

f étant une fonction T- périodique continue "au moins par morceaux"
(f ne possède pas un nombre infini de points de discontinuité sur sa période).
Sa pulsation est $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$

On appelle série de Fourier associée à f la série :

$$\boldsymbol{S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)]}$$

où les a_i sont les **coefficients de Fourier** de la fonction f, que l'on obtient ainsi :

$$\boldsymbol{a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx}$$

$$\boldsymbol{a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos(n\omega x)\, dx} \qquad \forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$$

$$\boldsymbol{b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin(n\omega x)\, dx} \qquad \forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$$

Si la fonction f est paire :

Alors, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \longmapsto f(x)\sin(n\omega x)$ est impaire,

donc $\boldsymbol{b_n = 0}$ et la série de Fourier associée à f ne contient que des cosinus.

De plus, $a_0 = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^{\frac{T}{2}} f(x) dx$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\cos(n\omega x)\, dx$

car la fonction $x \longmapsto f(x)\cos(n\omega x)$ est paire.

Si la fonction f est impaire :

Alors $\boldsymbol{a_0 = 0}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \longmapsto f(x)\cos(n\omega x)$ est impaire,

donc $\boldsymbol{a_n = 0}$ et la série de Fourier associée à f ne contient que des sinus.

De plus, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\sin(n\omega x)\, dx$

car la fonction $x \longmapsto f(x)\sin(n\omega x)$ est paire

Théorème de Dirichlet :

Si f est continument dérivable par morceaux sur sa période, alors sa série de Fourier $S(x)$ converge pour tout $x \in \mathcal{D}_f$.

De plus, **si $\boldsymbol{f}$ est continue en $\boldsymbol{x}$, alors $\boldsymbol{f(x) = S(x)}$**

Et si x est un point de discontinuité de f, alors $S(x) = \dfrac{\lim\limits_{\substack{t \to x \\ t<x}} f(t) + \lim\limits_{\substack{t \to x \\ t>x}} f(t)}{2}$

II. EGALITE DE PARSEVAL

$$\boldsymbol{\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f(x)]^2 dx = a_0{}^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n{}^2 + b_n{}^2}{2}}$$

EXERCICES

EXERCICE 1

On considère la fonction f, 2π-périodique, telle que : $\forall\, x \in [-\pi, \pi[\,,\, f(x) = x$

1. Représenter graphiquement la fonction f.

2. A l'aide du développement en série de Fourier de f, montrer que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} - \{\pi + 2k\pi \;/\; k \in \mathbb{Z}\}, \quad f(x) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

3. Vérifier le théorème de Dirichlet dans le cas où $x = \pi$

4. A l'aide de l'égalité de Parseval, calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

EXERCICE 2

On considère la fonction f, 2π-périodique, telle que : $\begin{cases} \forall\, x \in [0, \pi[\,,\; f(x) = 1 \\ \forall\, x \in [\pi, 2\pi[\,,\; f(x) = 0 \end{cases}$

1. Représenter graphiquement la fonction f.

2. A l'aide du développement en série de Fourier de f, montrer que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} - \{k\pi \;/\; k \in \mathbb{Z}\}, \quad f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$$

3. Vérifier le théorème de Dirichlet dans le cas où $x = 0$

EXERCICE 3

On considère la fonction f, impaire et 2π-périodique, telle que : $\begin{cases} f(0) = 0 \\ \forall\, x \in]0, \pi]\,, f(x) = \pi - x \end{cases}$

1. Représenter graphiquement la fonction f.

2. A l'aide du développement en série de Fourier de f, montrer que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} - \{2k\pi \;/\; k \in \mathbb{Z}\}, \quad f(x) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

3. En utilisant cette relation pour $x = \dfrac{\pi}{2}$, calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

4. A l'aide de l'égalité de Parseval, calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

EXERCICE 4

On considère la fonction f, 2π-périodique, telle que : $\forall\, x \in [-\pi, \pi[\,, f(x) = x^2 - \pi^2$

1. Montrer que f est paire, puis en donner une représentation graphique.

2. Déterminer le développement en série de Fourier de f.
   (on pourra utiliser une double intégration par parties pour le calcul de a_n)

3. En déduire les sommes $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

4. A l'aide de l'égalité de Parseval, calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$

EXERCICE 5

On considère la fonction f telle que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x) = |\sin 2x|$

1. Montrer que f est paire et $\dfrac{\pi}{2}$ − périodique, puis en donner une représentation graphique.

2. A l'aide du développement en série de Fourier de f, montrer que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos 4nx}{4n^2 - 1}$$

(Pour le calcul de a_n, on pourra utiliser : $\sin a \cos b = \dfrac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$)

3. En déduire les sommes $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}$

EXERCICE 6

On considère la fonction f, 2π − périodique, telle que : $\forall\, x \in [-\pi, \pi[\,, f(x) = \cos \dfrac{1}{6} x$

1. Montrer que f est paire, puis en donner une représentation graphique.

2. A l'aide du développement en série de Fourier de f, montrer que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{3}{\pi} - \frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{36n^2 - 1}$$

(Pour le calcul de a_n, on pourra utiliser : $\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$)

3. En déduire les sommes $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{36n^2 - 1}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{36n^2 - 1}$