Análisis Matemático

Julio Mariano Sachi

(3/3/2021)

2do Parcial (24/02/2021)

Derivadas, máximos, mínimos, derivadas parciales

Criterios de evaluación.

1.- Prolijidad.

2.- Pertinencia conceptual, síntesis y precisión.

3.- Desarrollo adecuado.

4.- Exactitud en los resultado.

5.- Para aquellos que no puedan realizar en Jupyter Notebook, seleccionen el medio a disposición, y apliquen los criterios mencionados antecedentemente.

"Los incito a tratarnos, en la medida de lo posible, como lo que van a llegar a ser. Se que pueden, y estamos para ayudarlos a lograr ese objetivo".

Keep learninig and practicing...

Link de notación matemática para Markdown

https://www.overleaf.com/learn/latex/Integrals,_sums_and_limits

Learn How to Write Markdown & LaTeX in The Jupyter Notebook

https://towardsdatascience.com/write-markdown-latex-in-the-jupyter-notebook-10985edb91fd

Markdown es el formato que nos permite escribir en el documento, en éste caso Jupyter Notebook.
Utiliza un leguaje de texto llamado LaTeX.
El enlace conduce a un tutorial básico.
Verán que es muy útil dado que nos permite escribir fórmulas y símbolos matemáticos.

In [ ]:

Teorema de Bolzano

https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_del_valor_intermedio

Ejercicio 1

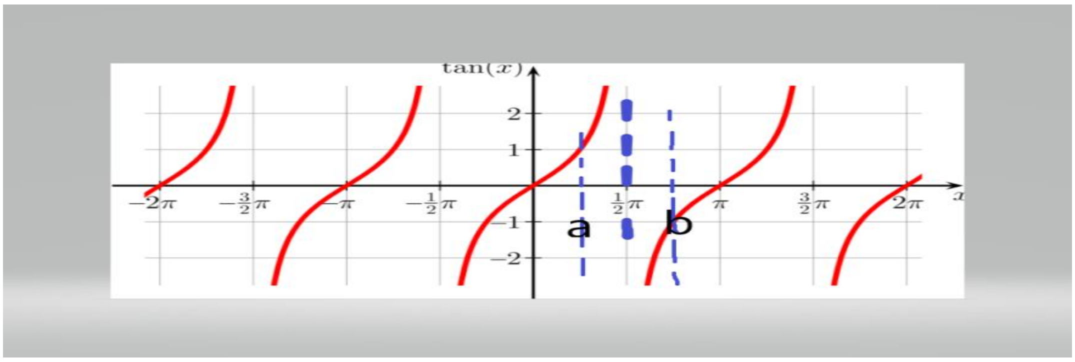
Dada la función y=tan(x) y sabiendo que f(π/4)=1 y f(3π/4)=−1 ,¿se puede asegurar por el teorema de Bolzano que existe x=c perteneciente al intérvalo [π4,34π] tal que f(c)=0 ?

Respuesta E1:

El teorema se enuncia:”Sea *f* una función real continua en un intervalo cer rado [*a*,*b*] con *f*(*a*) y *f*(*b*) de signos contrarios. Entonces existe al menos un punto *c* del intervalo abierto (*a*, *b*) con *f*(*c*) = 0.”

Esto quiere decir que se deben cumplir dos condiciones para que en una función haya un valor c tal que f(c) = 0: 1)-Que la función sea continua en el intervalo cerrado [a,b] y 2)- Que los valores *f*(*a*) y *f*(*b*) sean de signo contrario.

En el caso de f(x)= tan(x) solo se cumple que los valores f(π/4)=1 y f(3π/4)=−1 son de signo contrario, pero no cumple la condición de que la función sea continua, pues como se ve en la gráfica en f(π/2) de [*a*,*b*] la función al acercarse por derecha tiende a -∞ y por izquierda a ∞ lo que hace que no esté definida para π/2. Si definimos los extremos a= π/4 y b= 3π/4 en [a,b], en el grafico se puede ver que la curva nunca toca el eje de las x , es decir f(c)≠0



Derivadas

Ejercicio 2

5.- Resolver las derivadas:

Soluciones

a) y= $1/(3x^4+x-8)^9=9(1/(3x^4+x-8)^8)d(-(12x^3+1/(3x^4+x-8)^2)=-9(12x^3+1)/(3x^4+x-8)^{10}$

b) y= $(3x^4+x-8)^{-3} = 3(1/(3x^4+x-8)^2)d(-(12x^3+1/(3x^4+x-8)^2) = -3(12x^3+1)/(3x^4+x-8)^4$

c) f(x)= $2x-3/(x^2+4)^2 = 2(-3x^2+6x+4)/(x^2+4)^3$

d) y= sen $(3x^2+11x)$ = cos $(3x^2+11x)(6x+11)$

Ejercicio 3

La función de ingresos de una empresa es:

$$I(q) = \frac{-6}{10^6}q^3 + \frac{18}{10^3}q^2 - 2q + 100$$

y la función de coste total es:

$$C(q) = \frac{2}{10^2}q^2 - 24q + 11000$$

Siendo q el número de unidades vendidas. Hallar el ingreso marginal y el coste marginal.

La derivada de la función de costo total nos da la función de costo marginal

C´(q)= Costo marginal =q/100-24

La derivada de la función de Ingreso total nos da la función de Ingreso marginal, es decir

I´(q)= Ingreso marginal =- $\frac{18}{10^6}q^2 + \frac{36}{10^3}$ q - 2

Ejercicio 4

Aplicar la regla de L'Hôpital para resolver la indeterminación de:

a)

$$\lim_{x\to 1} \frac{ln(x)}{x-1}$$

b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{sen(x)}$$

c)

$$lim_{x\to -2} \frac{x^2+7x+10}{x+2}$$

Soluciones:

a) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1}$ aplicando la regla de L´Hopital $\lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1}$ donde se reemplaza por x=1 obtiendo:

$\lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{1}}{1}$ = 1

b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{sen\ (x)}$ aplicando la regla de L´Hopital $\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{cos\ (x)}$ donde se reemplaza por x=0 obtiendo:

$\lim_{x\to 0} \frac{e^0+e^0}{cos\ (0)}$ = $\frac{1+1}{1}$ = 2

c) $\lim_{x\to -2} \frac{x^2+7x+10}{x+2}$ aplicando la regla de L´Hopital, primero se simplifica $\lim_{x\to -2} \frac{x^2+7x+10}{x+2}$ = $\lim_{x\to -2} x - 5$ y donde se reemplaza por x= -2 obtiendo:

$\lim_{x\to -2} x - 5$ = 3

Puntos de inflexión, máximos y mínimos

Ejercicio 5

Se va a cortar una viga rectangular de un tronco de sección transversal circular. Si la resistencia de una viga es proporcional a su anchura y al cuadrado de su altura, encuentre las dimensiones de la sección transversal que da a la viga la mayor resistencia.

Solución:

El tronco posee un diámetro a, la viga tiene un ancho x y una altura y. Se busca el máximo para S, donde la resistencia de la viga está dada por $S=Kxy^2$ donde K es una constante de proporcionalidad. La resistencia depende de las dos variables X y Y en donde $a^2=x^2+y^2$, osea, $y^2= a^2-x^2$ así queda $S=K\,x\,(a^2-x^2)$. De este modo los valores para x serían:

$$0<x<a \Rightarrow S'= Ka^2-3Kx^2=0 \Rightarrow K(a^2-3x^2)=0 \quad y\ x^2= a^2/3 \Rightarrow x=a/\sqrt{3}$$

Al ser $x=a/\sqrt{3}$ el único punto crítico de (0, a) es el máximo de S, al sustituir a $x= a/\sqrt{3}$ en $y^2+x^2=a^2 \Rightarrow$ se obtiene finalmente $y= \sqrt{2}\,.(a/\sqrt{3}\,)$

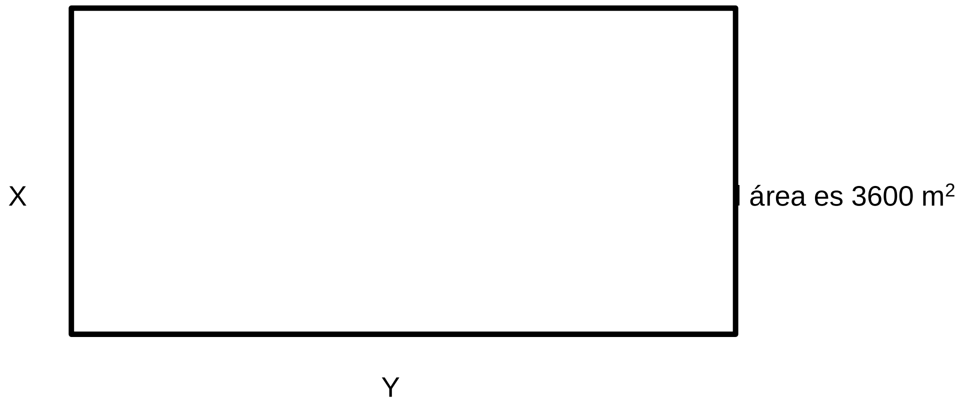
Ejercicio 6

Descomponer el número 25 en dos sumandos tales que el doble del cuadrado del primero más el triple del cuadrado del segundo sea mínimo.

Sumando x e y, $x + y = 25$ y la función $S =2x^2 +3(25 - x)$ es a la que tenemos que hallar el mínimo. Luego se deriva $S'=4x -6\,(25 -x) =10x -150 =0$, en donde $x = 15$, que es un mínimo ya que $S''(15) = 10 > 0$. Luego los números son 15 y 10.

Ejercicio 7

Un agricultor quiere alambrar una porción de campo de forma rectangular y que tenga 3600m2 de superficie. ¿Cómo le indicaríamos las dimensiones para que el coste sea mínimo?



El área del rectángulo es xy=3600 y la superficie a vallar es 2x+2y. Hay que calcular el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left|\begin{array}{l} x.y=3600 \\ 2x+2y \text{ mínima} \end{array}\right.$$

Combinando ambas fórmulas y sustituyendo, se obtiene

$f(x)=2x+2\frac{3600}{x}=\frac{2x^2}{x}$

Ahora se debe calcular el valor mínimo de f

$f´(x)=\frac{4x^2+2x^2-7200}{x^2}=\frac{2x^2-7200}{x^2}$

$f´(x)=0$ es decir $2x^2-7200=0 \Leftrightarrow x=\pm 60$

para saber cuál es valor mínimo ahora se calcula la derivada segunda

$f´´(x)=\frac{14400}{x^3}$

$f´´(x)=(-60)<0 \Rightarrow x=-60$ al ser un máximo se descarta

$f´´(x)=(60)>0 \Rightarrow x=60$ es el mínimo buscado

Reemplazando entonces se obtienen las siguientes dimensiones:

$X=60$ m, $y=\frac{3600}{60}=60$ m

Osea que es un cuadrado.

Derivadas parciales

Funciones de dos o más Variables

Existen magnitudes que dependen de dos o más variables independientes, por ejemplo,

el área del rectángulo depende de la longitud de cada uno de sus lados,

el costo de producción de una artículo depende del costo de los materiales y de la mano de obra,

la temperatura que tiene un gas depende del volumen que ocupa y de su presión,

la concentración de una sustancia en cualquier punto de la vena luego de haber suministrado una inyección depende del tiempo, la velocidad de la sangre y la distancia en que se encuentra el punto de la inyección,

Las funciones de dos variables se simbolizan $f: R^2 \to R$ y se representan generalmente $z=f(x;y)$

Definición.

-Sea D un conjunto de pares ordenados, (x,y), de números reales, $D \subset R^2$. Una función real de dos variables reales es una regla que asigna a cada par ordenado (x, y) en D un único número real, denotado por $f(x,y)$.

La derivada de una función de una variable mide la rapidez de cambio de la variable dependiente respecto a la variable independiente.

Para funciones de dos variables x e y podemos medir dos razones de cambio: una según cambia y, dejando a x fija y otra según cambia x, dejando a y fija.

Ejercicio 8

Evaluar las siguientes derivadas parciales de primer orden.

1- $z = x^4 + 3y^3 + 2xy$

2- $z = (x^4 + 3y^3 + 2xy)^3$

3- $z = e^{2x} + yln(x)$

Soluciones:

1- z= $4x^3+2y$

2- Se aplica la regla de la cadena z= $3(x^4+3y^3+2xy)^2(4x^3+2y)$

3- z= $2.e^{2x} + \frac{y}{x}$

Ejercicio 9

Funcion de demanda:

Suponga que dos productos se venden a los precios p1 y p2, la cantidad demanda de cada uno de los productos depende de los precios de ambos productos en el mercado. Si q1 representa la demanda del primer producto entonces $q1 = f(p1, p2)$ es la función demanda de dicho producto y si q2 representa la demanda del segundo producto entonces $q2 = g(p1, p2)$, por lo tanto las derivadas parciales de q1 y q2 se conocen como **funciones de demanda marginal**

La función demanda par dos productos están dadas por:

$$q_1 = 300 - 8p_1 - 4p_2$$
$$q_2 = 400 - 5p_1 - 10p_2$$

1) Hallar la demanda para cada uno de ellos si el precio del primero es p1= 10y del segundo p2=8.

2) Encuentre la demanda marginal de q1 respecto al precio p1

3) Encuentre la demanda marginal de q2 respecto al precio p2

4) Encuentre la demanda marginal de q1 respecto al precio p2

5) Encuentre la demanda marginal de q2 respecto al precio p1

Soluciones:

1)- q1= 300 – (80+32)= 188

q2= 300 – (50+80)= 170

2)- dm(q_1) = $\frac{\partial f1}{\partial x}(300 - 8x - 4y)$ = -8 se realiza la derivada parcial sobre la función demanda que es la demanda marginal de q_1 con respecto a p_1=x

3)- dm(q_2) = $\frac{\partial f2}{\partial y}(300 - 5x - 10y)$ = -10 se realiza la derivada parcial sobre la función demanda que es la demanda marginal de q_2 con respecto a p_2=y

4)- dm(q_1) = $\frac{\partial f1}{\partial y}(300 - 8x - 4y)$ = -4 se realiza la derivada parcial sobre la función demanda que es la demanda marginal de q_1 con respecto a p_2=y

5)- dm(q_2) = $\frac{\partial f2}{\partial x}(300 - 5x - 10y)$ = -5 se realiza la derivada parcial sobre la función demanda que es la demanda marginal de q_2 con respecto a p_1=x

Ejercicio 10

Dada las siguiente expresión matemática, explique brevemente su aplicación en el contexto de los algoritmos de aprendizaje

Cost Function – "One Half Mean Squared Error":

$$J(\theta_0, \theta_1) = \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{m}(h_\theta(x^{(i)}) - y^{(i)})^2$$

Objective:

$$\min_{\theta_0, \theta_1} J(\theta_0, \theta_1)$$

Update rules:

$$\theta_0 := \theta_0 - \alpha \frac{\partial}{\partial \theta_0} J(\theta_0, \theta_1)$$

$$\theta_1 := \theta_1 - \alpha \frac{\partial}{\partial \theta_1} J(\theta_0, \theta_1)$$

Derivatives:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_0} J(\theta_0, \theta_1) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(h_\theta(x^{(i)}) - y^{(i)})$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1} J(\theta_0, \theta_1) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(h_\theta(x^{(i)}) - y^{(i)}) \cdot x^{(i)}$$

La función de costo sirve para evaluar el error existente entre el valor real y el valor predicho Permitiendo medir la incertidumbre alrededor de la predicción más probable. Es una variación del error de pronóstico, y mientras más pequeño es ese error, más cerca está de la predicción a la realidad. El objetivo siempre es obtener un error mínimo lo más aproximado a 0 posible. Cuando la entrada tiene varias dimensiones, se utilizan derivadas parciales y al tener múltiples variables independientes se obtendrá una salida también con varias dimensiones. Así, una derivada permite determinar la rapidez de cambio de la función con respecto a cada una de las variables independientes permitiendo calcular el error en cada punto.

El error medio se obtiene de la sumatoria de los errores divida entre el número total de puntos considerados. x(i) es el resultado en función del tiempo e y(i) es el valor de la predicción en el instante de tiempo i. La diferencia entre el valor actual y el valor predicho se calculará al cuadrado para que siempre de positivo. También se podría usar el valor absoluto, con lo que se tendría la dificultar de una función no-derivable, debiendo transformar en función a trozos. Al tener una función derivable permite el uso de algoritmos de optimización muy efectivos, como es el caso del gradiente descendiente.

El criterio de evaluación de calcular el error en cada iteración, que mientras más rápido es mejor, favorece que al final del proceso se calcula la raíz cuadrada, para tener una estimación en términos más intuitivos de la calidad de la predicción, utilizándose esto en el aprendizaje automático supervisado o machine learning supervisado.