Tecnicatura Superior en Ciencia de Datos e Inteligencia Artificial

Asignatura: Análisis Matemático

Alumno: Julio Mariano Sachi

Fecha: 20/12/2020

1er Parcial - Funciones, Límites y Derivadas

***Criterios de evaluación*.**

1.- Prolijidad.

2.- Pertinencia conceptual, síntesis y precisión.

3.- Desarrollo adecuado.

4.- Exactitud en los resultados.

5.- Para aquellos que no puedan realizar en Jupyter Notebook, seleccionen el medio a disposición, y apliquen los criterios mencionados anteriormentemente.

He elegido escribirlo en formato Word

"Los incito a tratarnos, en la medida de lo posible, como lo que van a llegar a ser. Sé que pueden, y estamos para ayudarlos a lograr ese objetivo".

Keep learninig and practicing...

Funciones

1.- Dominio, rango y regla, a que hacen referencia. Exprese en una definición. Aplique la misma en simbología matemática.

2.- Evalue el dominio. Expresar en notación simbólica

a) $f(x) = \frac{1}{x-10}$

b) $f(t) = \sqrt{16 - t^2}$

c) $f(x) = \frac{x-3}{2}$ $\qquad$ $g(x) = \sqrt{x}$

Evalue $(f+g)(x)$

3.- Dado el conjunto A y B, indique cuales corresponden a una función y cuales no:

a) A : {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} – B : {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

b) A : {1, 2, 2, 4, 4, 4, 6, 6, 6, 6} – B : {1, 1, 2, 1, 2, 4, 1, 2, 4, 6}

c) A : {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} – B : {1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1}
d) A : {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} – B : {0, 1, 4, 9, 16, 25, 32, 49, 64, 81}
e) A : {1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1} – B : {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

4.- Dadas las siguientes expresiones matemáticas, indique cuales corresponden a funciones y cuales no:

a) $f(x) = 2\pi \frac{3x^3+10x}{x-2}$

b) $2x + 3y^2 - \sqrt{x+10} = 21$

c) $|\,x\,| = \begin{cases} x & \text{if } x \geq 0 \\ -x & \text{if } x < 0 \end{cases}$

d) $G(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t \leq 0 \\ t+1 & \text{if } 0 < t < 2 \\ t^2 - 1 & \text{if } t > 2 \end{cases}$

5.- Se fabrica un depósito abierto de latón con base cuadrada y capacidad para 4000 litros, ¿qué dimensiones debe tener para optimizar el área de almacenamiento lo mejor posible? No se tiene problema en altura. Escribir las expresiones matemáticas. Son funciones o ecuaciones?.

Límites

1.- Encontrar la relación $\delta(\epsilon)$ que nos permite probar que $lim_{x\to 1} \frac{2x+1}{x-3} = -\frac{3}{2}$

Dar la definición de límite.

2.- Defina continuidad de una función. Exprese en símbolos.

3.- Pruebe que el límte de $lim_{x\to 4}(3x-7)$ es 5

4.- Pruebe que el límite de $lim_{x\to -2} \frac{x^2+7x+10}{x+2}$ es 10

5.- De dos (2) ejemplos de discontinuidad.

Derivadas

1.- Indicar si c/u de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa. Justificar toda respuesta, si es V demostrarla y si es Falsa dar un contraejemplo adecuado.

a) Toda función continua en un punto es derivable en ese punto.

b) Toda función derivable en un punto es continua en ese punto.

2.- Expresar el concepto de derivada de una función. Escribir la definición simbólicamente.

3.- Un heladero ha comprobado que, a un precio de 50 pesos la unidad, vende una media de 200 helados diarios. Por cada peso que aumenta el precio, vende dos helados menos al día. Si el coste por unidad es de 40 pesos, ¿a qué precio de venta es máximo el beneficio diario que obtiene el heladero? ¿Cual será ese beneficio? Resolver y dejar las fórmulas utilizadas.

4.- Hay dos (2) tangentes a la curva $y = 4x - x^2$ que pasan por el punto (2,5). Encuentre las ecuaciones de ambas. Sugerencia: Sea (x_0 , y_0) el punto de tangencia, encuentre las dos condiciones que debe satisfacer dicho punto.

5.- Resolver las derivadas:

a) $y = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$

b) $y = (x^2 + 17)(x^3 - 3x + 1)$

c) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1 & \text{if } x \leq 1 \\ x + 2 & \text{if } x > 1 \end{cases}$

d) $y = x^2 sen(x)$

Respuestas:

Funciones

1)- Una función es una regla de correspondencia que asocia a cada objeto de x de un conjunto llamado dominio un valor único f(x) de un segundo conjunto. El conjunto de valores así obtenidos se llama rango de la función. La regla de correspondencia es el corazón de una función, pero esta no queda determinada por completo sino cuando se da su dominio. Nuevamente, el dominio es el conjunto de objetos a los que la función asigna valores, mientras que el rango es el conjunto de valores obtenidos. Cuando no se especifica dominio para una función, siempre debe suponerse que es mayor conjunto de números reales para los que la regla de la función tiene sentido y que además devuelva en el rango valores de números reales. Así entonces cuando la regla dela función se da mediante una ecuación y=f(x), con frecuencia x se llama variable independiente e y se denomina variable dependiente. Cualquier elemento del dominio puede ser elegido como valor de la variable x, entonces esta elección determinará por completo el valor correspondiente de la variable dependiente. Así el valor de y depende del valor elegido para x.

Definición formal de dominio

El dominio de definición de una función *f*: *X*→*Y* se define como el conjunto *X* de todos los elementos *x* para los cuales la función *f* asocia algún *y* perteneciente al conjunto *Y* de llegada, llamado codominio.

$$D_f = \{ x \in X / \exists y \in Y: f(x) = y \}$$

Definición formal de Rango

Cuando *rango* se usa para significar *codominio*, la imagen de una función *f* ya está implícitamente definida. Es (por definición de imagen) el subconjunto (quizás trivial) del *rango de la función.*

$$R_f = \{ y / \exists x \in D_f : y = f(x) \}$$

Cuando *rango* se usa para significar *imagen*, el rango de una función *f* es por definición:

$$\{ y / \exists x \in D_f : y = f(x) \}$$

En ese caso, el codominio de *f* no se debe especificar, porque cualquier codominio que contenga esta imagen como un subconjunto (quizás trivial) satisface la condición. Así en ambos casos, la imagen de *f* ⊆ rango de *f* ⊆ codominio de *f*, con al menos una de las inclusiones siendo una equivalencia.

Definición formal de función

Dados dos conjuntos *X* e *Y*, una función, denominada también aplicación o mapeo entre ellos, es una asociación o regla *f* que a cada elemento de *X* le asigna un único elemento de *Y,* es decir *f*: *X*→*Y.*

Se dice entonces que *X* es el dominio (también conjunto de partida o conjunto inicial) de *f* y que *Y* es su codominio (también conjunto de llegada o conjunto final).

2)-

a)- El dominio de $f(x) = \frac{1}{x-10}$ es $x > 10$ o $x < 10$ es decir $(-\infty, 10) \cup (10, \infty)$

Otra notación podría ser $D_f = \{ x \in X / \exists y \in Y: y = f(x) = \frac{1}{x-10} \; donde \; x > 10 \lor x < 10 \}$

b)- El dominio de *f(t)* = $\sqrt{16-t^2}$ es -4 $\leq t \leq 4$ es decir que t está en el intervalo [-4,4]

c)- El dominio de *(f+g)(x)* = $\frac{x-3}{2}$+ $\sqrt{x}$ (donde *f(x)*= $\frac{x-3}{2}$; g(x)= $\sqrt{x}$) es $x \geq 0$ es decir $[0,\infty)$

3)- a)- Es función
b)- No es función
c)- Es función
d)- Es función
e)- No es función

4)- a)- Es función
b)- No es función
c)- Es función
d)- Es función

5)- Un depósito abierto (sin tapa) de latón con base cuadrada y capacidad para 4 000 litros, ¿qué dimensiones debe tener para que su fabricación (en latón) sea lo más económica posible?
Solución:

Llamamos x al lado de la base e y a la altura del depósito. Así, el volumen es:

V = $x^2 . y$ = 4000 litros= 4000 dm^3

Así $y = \frac{4000}{x^2}$

La superficie total del depósito (recordemos que está abierto) será:

$A = 4xy + x^2 = 4x\frac{4000}{x^2} + x^2 = \frac{16000}{x} + x^2$ con $x^2 > 0$

Buscamos x para que A sea mínima, debemos buscar el valor mínimo deduciendo ese valor de la derivada de A igualada a cero.

$A' = \frac{-16000}{x} + 2 = \frac{-16000+2x^3}{x^2}$

$A' = 0$ $\quad -16000 + 2x^3 = 0$ despejando queda $x^3 = \frac{16000}{2} = 8000$ es decir $x = \sqrt[3]{8000}$ = 20 dm^3

Para verificar que es un mínimo se realiza la derivada segunda y si su valor es mayor que cero el valor encontrado es un mínimo.

$A'' = \frac{32000}{x^3} + 2$ luego para $A''(20) > 0$ entonces en x=20 es un mínimo

Así, el lado de la base debe medir x=20 dm y la altura y= 10 dm.

Límites

1)- Sea ε un número positivo cualquiera. Debemos producir un δ>0 tal que se cumpla esta condición

$$0<|x-c|< \delta \implies |f(x)-L|< \varepsilon$$

Para ello

Partimos de c=1 , $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ y $L = -\frac{3}{2}$, es decir

$$0<|x-1|< \delta \;\; \Rightarrow \;\; \left|\frac{2x+1}{x-3}+\frac{3}{2}\right|< \varepsilon$$

Ahora hay que encontrar numéricamente un nexo entre δ y ε. La estrategia está en la expresión |f(x)-L|< ε. Hay que ver cómo se comporta dicha expresión cuando se la reduce a |x-1| en función de encontrar una proporcionalidad con ε.

$$\left|\frac{2x+1}{x-3}+\frac{3}{2}\right|< \varepsilon$$

$$\left|\frac{2(2x+1)+3(x-3)}{2(x-3)}\right|< \varepsilon$$

$$\left|\frac{4x+2+3x-9}{2(x-3)}\right|< \varepsilon$$

$$\left|\frac{7x-7}{2(x-3)}\right|< \varepsilon$$

$$\frac{7}{2}\left|\frac{x-1}{x-3}\right|< \varepsilon$$

$$\left|\frac{x-3}{x-1}\right|> \frac{7}{2\varepsilon}$$

$$\left|1-\frac{2}{x-1}\right|> \frac{7}{2\varepsilon}$$

Se sigue operando hasta que finalmente se obtiene:

$$\boxed{|x-1|< \frac{4\varepsilon}{7-2\varepsilon}= \delta}$$

Esto indica que el límite, con x->1 para la función, probado desde δ (ε), debe funcionar para

$$\frac{4\varepsilon}{7-2\varepsilon}= \delta\ (\varepsilon)$$

2)- Defina continuidad de una función. Exprese en símbolos $\lim_x \rightarrow 4$ (3x − 7) es 5

Definición de continuidad de una función *f* en un punto: Sea *f* definida en un intervalo abierto que contiene a *C*. Decimos que *f* es continua en *C* si

$$\lim_{x\to c} f(x)= f(c)$$

Se tienen que cumplir tres condiciones:

1. Que el límite de *f(x)* para $x\text{->}c$ existe.

2. Que c pertenece al dominio de *f.*
3. Que efectivamente $lím_{x \to c}\, f(x) = f(c)$.

3)- Por otro lado para calcular el límite de *f(x)* debemos sustituir *x* por 4 según la definición.

$$lím_{x\to 4}\,(3x - 7) = 3.4 - 7 = 12 - 7 = 5$$

4)- $lím_{x\to -2} \frac{x^2+7x+10}{x+2}$ es 10

Se simplifica la ecuación y luego se sustituye *x* por -2

$$lím_{x\to -2} \frac{x^2+7x+10}{x+2} = lím_{x\to -2}\,(x+5) = ((-2)+5) = 3$$

El límite de la función no da como resultado 10 sino 3.

5)- Un ejemplo de función discontinua es $f(x) = \frac{1}{x-10}$ y el otro podría ser $f(x) = \mathrm{tg}\,(x)$. Existen funciones que son continuas en todas sus partes (puntos) pero derivables en ninguna de ellas: la función de Weierstrass y todas las funciones cuyas curvas tengan la propiedad de ser fractales como por ejemplo ciertas versiones de la curva de Koch.

Derivadas

1- a)-Toda función continua en un punto es derivable en ese punto es una afirmación verdadera. De hecho hay un teorema muy importante en el cálculo que demuestra exactamente eso.
*Teorema:

$$\boxed{\text{Si existe } f'(c)\text{, entonces } f \text{ es continua en } c.}$$

Demostración: Se necesita demostrar que el límite de $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$. Para ello se parte de la siguiente fórmula

$$f(x) = f(c) + \frac{f(x)-f(c)}{x-c}\,(x-c) \quad \text{donde } x \neq c$$

$$lím_{x\to c}\, f(x) = \underset{c\to x}{lím} \left[f(c) + \frac{f(x)-f(c)}{x-c}\,(x-c)\right]$$

$$lím_{x\to c}\, f(x) = \underset{x\to c}{lím}\; f(c) + \underset{x\to c}{lím} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}\; \underset{x\to c}{lím}(x-c)$$

$$= f(c) + f'(c).0$$

$$= f(c)$$

Es decir $lím_{x\to c}\, f(x) = f(c)$ con lo cual queda demostrado el teorema

b)- El reciproco del anterior teorema no es verdadero. Toda función derivable en un punto es continua en ese punto es una afirmación falsa. Existen innumerables ejemplos de ello. De todos modos el matemático Weierstrass construyo con la ayuda de la lógica y su imaginación un fascinante contraejemplo conocido como la función de Weierstrass que despejo cualquier duda de la existencia de funciones derivables pero discontinuas en cualquier punto.

2)- La definición de derivada de una función es la siguiente:

Definición:

La derivada de una función f es otra función f´ (efe prima) cuyo valor para un número cualquiera c es

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

Una vez que dicho límite exista. Si el límite existe, decimos que f es diferenciable. Encontrar la derivada se llama derivación; así la parte del cálculo asociada con la derivada se llama cálculo diferencial.

3)- Se denominará x al número de pesos de aumento de precio. Así, cada helado costará

50 + x pesos vendiendo 200 - 2x helados/día.

Se obtendrá unos ingresos I (x) por la venta de los helados:

$$I(x) = (50 + x)(200 - 2x)$$

Mientras que el gasto es:

$$G(x) = (200 - 2x) \cdot 40$$

Ahora se puede calcular el beneficio $B(x)$:

$$B(x) = I(x) - G(x) = (50 + x)(200 - 2x) - (200 - 2x) \cdot 40 = (200 - 2x)(50 + x - 40) =$$

$$= (200 - 2x)(x + 10) = -2x^2 + 180x + 2000$$

Y así se halla x, mediante la derivada primera igualada a cero, para el máximo beneficio:

$$B'(x) = -4x + 180$$

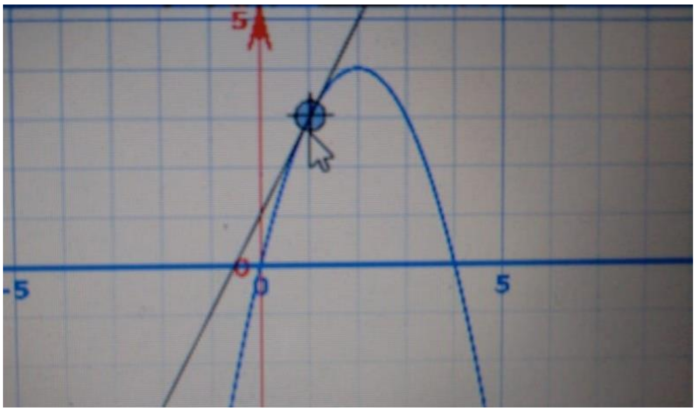
$$B'(x) = 0 \text{ es decir } -4x + 180 = 0 \text{ obteniendo } x = 45$$

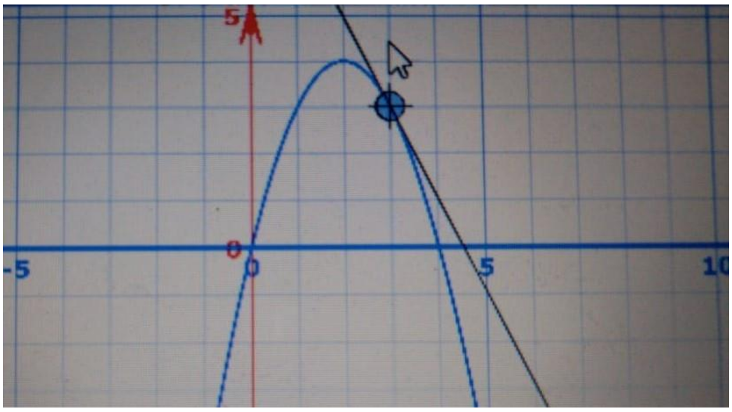
Para verificar que es un máximo se realiza la derivada segunda y si su valor es menor que cero el valor encontrado es un máximo.

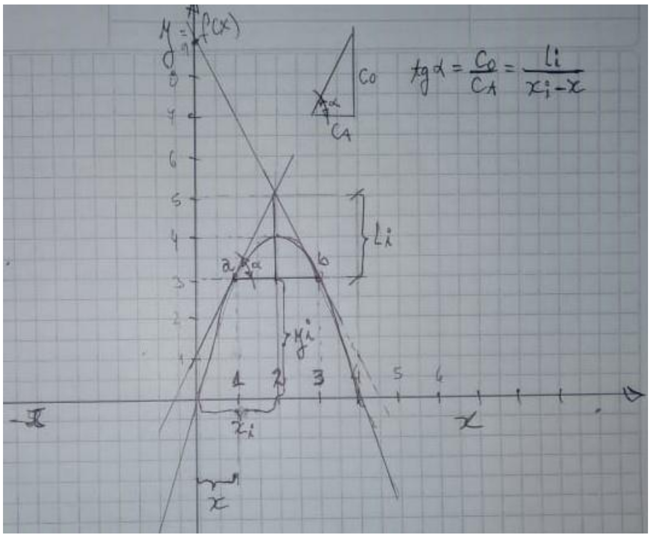
$B''(x) = -4$; $B''(45) < 0$ lo que implica que en x = 45 hay un máximo

Finalmente se obtendrá un beneficio máximo vendiendo cada helado a 50 + 45 pesos. En este caso, el beneficio sería de B (45) = 6050 pesos.

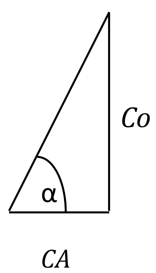
4- Hay dos (2) tangentes a la curva que pasan por el punto (2,5).Hay que encontrar las ecuaciones de ambas. Sugerencia: Sea el punto de tangencia, encuentre las dos condiciones que debe satisfacer dicho punto.







Para calcular las ecuaciones de las rectas tangentes a la función que pasan por (2,5) se debe partir del ángulo de la rectángulo de la figura cuyo cateto opuesto $C_o=l_i$ y el cateto adyacente $C_A=x_i-x$ y la tangente de su ángulo es el cociente de los dos anteriores, es decir



$$tg(\alpha)=\frac{CO}{CA}=\frac{li}{xi-x} \quad \textit{mientras que } hi=li+yi$$

Si la función de la curva es $4x+x^2$, entonces la tangente de cada punto de la misma es

$$tg(\alpha)=f'(x) = 4\text{-}2x \qquad \textit{donde } 4\text{-}2x \textit{ es su derivada}$$

Como $CA=xi\text{-}x$ y $xi=2$, luego $CA= 2 - x$. Ahora pasamos a la siguiente igualdad

$$4\text{-}2x = \frac{li}{2-x} \quad \rightarrow \quad (4\text{-}2x)(2\text{-}x)=li$$

Pero como *li= hi-yi donde hi=5 e yi=y= 4x-*x^2*, luego li= 5 - y = 5 – (4x-*x^2*) = 5 – 4x -* x^2*.* Reemplazando en la anterior expresión y operando

$$(4-2x)(2-x)= 5 - 4x - x^2$$

Operando algebraicamente se obtiene la siguiente ecuación y de su resolución se obtienen sus respectivas raíces

$$x^2 - 4x+3= 0 \quad \text{donde } x_1= 1 \text{ y } x_2=3$$

Luego para obtener las ecuaciones de las rectas de la tangentes de $x_1= 1$ y $x_2=3$

$$tg(\alpha \text{ en } x_1)= 4-2(1)= 2$$

$$tg(\alpha \text{ en } x_2)= 4-2(3)= -2$$

La fórmula general para obtener las ecuaciones de las rectas es *y= tg(α). x+bi*, donde b es la intersección de la tangente y el eje de las y

$$b_1 = y - tg(\alpha \text{ en } x_1).(x)= 5 - tg(\alpha \text{ en } x_1).(2)= 5-2(2)=1$$

$$\Rightarrow \boxed{y= 2(x)+ 1}$$

$$b_2 = y - tg(\alpha \text{ en } x_2).(x)= 5 - tg(\alpha \text{ en } x_2).(-2)= 5-2(-2)=9$$

$$\Rightarrow \boxed{y= -2(x)+ 9}$$

5)- Calcular las derivadas de las siguientes funciones

a)- $y = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$ → $y' = -\frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} = -\frac{2x-2}{x^3}$

b)- $y = (x^2 + 17)(x^3-3x+1)$ → $y' = 2(x^3-3x+1)+(x^2 + 17)(3x^2 - 3)= (5x^4-42x^2+2x-51)$

c)-

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1 & \text{if } x \leq 1 \\ x + 2 & \text{if } x > 1 \end{cases}$$

Como es función por trozos, para calcular su derivada debemos deducir si la función es derivable en x=1. Para ello se debe deducir si dicha función es continua o discontinua y para ello se deben calcular los límites por izquierda y por derecha en ese punto.

Límite por izquierda:

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = x + 2 = (1) + 2 = 3$$

Mientras que el límite por derecha es

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = 2x^2 + 1 = 2(1)^2 + 1 = 3$$

Por lo tanto el límite de f(x) existe y es 3 tanto por izquierda como por derecha, por lo cual la función es continua. Sin embargo, el hecho de ser continua no significa que la función sea derivable. Entonces se debe calcular la derivada en 1 por izquierda y por derecha

$\lim_{x\to 1-} f'(x) = 1 = 1$ por izquierda

$\lim_{x\to 1+} f'(x) = 4\,x = 4.1 = 4$ por derecha → se sigue que $\lim_{x\to 1-} f'(x) \neq \lim_{x\to 1+} f'(x)$

Entonces existiría un salto en la función y por lo tanto la misma no es derivable en 1. Se concluye que la derivada es

$$f'(x) = \begin{cases} f'(x) = 4\,x & para \quad x < 1 \\ f'(x) = 1 & para \quad x > 1 \end{cases}$$

d)- y= $x^2\ sen(x)$ → y´= $2x\ sen(x) + x^2\ cos(x)$

Bibliografía:

-PURCELL, E. (1993). Cálculo con Geometría Analítica. (6a ed.). Prentice Hall Hispanoamericana, S.A. México-Englewood Cliffs.

- KASNER, E. y NEWMAN, J.: Matemáticas e imaginación, Ed. Salvat, 1994