



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO E AUTOMAÇÃO
CURSO DE ENGENHARIA MECATRÔNICA

CONTROLADOR DO TIPO PID:
simulação e implementação

JOÃO MATHEUS BERNARDO RESENDE: 20210072270

LUCAS BATISTA DA FONSECA: 20210072299

STHEFANIA FERNANDES SILVA: 20210072430

Natal-RN
2022

JOÃO MATHEUS BERNARDO RESENDE: 20210072270

LUCAS BATISTA DA FONSECA: 20210072299

STHEFANIA FERNANDES SILVA: 20210072430

**CONTROLADOR DO TIPO PID:
simulação e implementação**

Primeiro Relatório Parcial apresentado à disciplina de Laboratório de Sistemas de Controle, correspondente à avaliação complementar da 2ª unidade do semestre 2022.1 do 7º período do curso de Engenharia Mecatrônica na Universidade Federal do Rio Grande do Norte, sob orientação do **Prof. Dr. Anderson Cavalcanti**.

Professor: Anderson Cavalcanti.

Natal-RN
2022

Lista de Figuras

1	Resposta de segunda ordem em função do fator de amortecimento.	6
2	Aproximação de Tustin.	8
3	Gráfico para verificar a condição de ângulo.	11
4	Gráfico considerando o ângulo de z_2	12
5	Lugar Geométrico das Raízes do Sistema.	13
6	Discretização pelo método Tustin utilizado no Matlab	15
7	Diagrama de blocos do Simulink	15
8	Gráfico da saída da planta	16

Sumário

1	INTRODUÇÃO	5
2	REFERENCIAL TEÓRICO	6
2.1	Sistema de 2ª Ordem Canônico	6
2.2	Ações de Controle: Controlador Proporcional + Integral + Derivativo (PID)	7
2.3	Discretização de Controladores: Método de Tustin	7
3	METODOLOGIA	8
3.1	Ferramentas de Simulação	8
3.1.1	MATLAB/Simulink	8
3.1.2	Google Colab	8
3.1.3	Geogebra	8
4	RESULTADOS	10
4.1	Função de transferência e ganhos do controlador PID	10
4.2	Discretização pela aproximação de Tustin	13
4.3	Implementação do sistema no Simulink	14
5	CONCLUSÃO	16

1 INTRODUÇÃO

O objetivo de um projeto de engenharia de controle é encontrar as configurações, especificações e identificar os parâmetros chave do sistema proposto para atender uma necessidade pontual. Um importante aliado do engenheiro projetista são os modelos computacionais que permitem visualizar o comportamento do sistema, sem necessariamente construí-lo (DORF; BISHOP, 2001).

Assim, a simulação computacional fará o uso de um modelo com as condições e as entradas reais em que o sistema será submetido. Com um modelo e simulação fundamentalmente exatos pode-se observar o desempenho do sistema sob todas as condições possíveis, extrapolar resultados para prever algum comportamento, dentre outras vantagens (DORF; BISHOP, 2001).

Nesse contexto, este artigo apresenta a implementação de um controlador do tipo PID em um sistema com especificações de *overshoot* e tempo de estabilização bem definidos. Além disso, o controlador deverá ser discretizado e implementado no Simulink.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Nesse tópicos apresentamos o embasamento teórico no qual este trabalho se fundamenta.

2.1 Sistema de 2ª Ordem Canônico

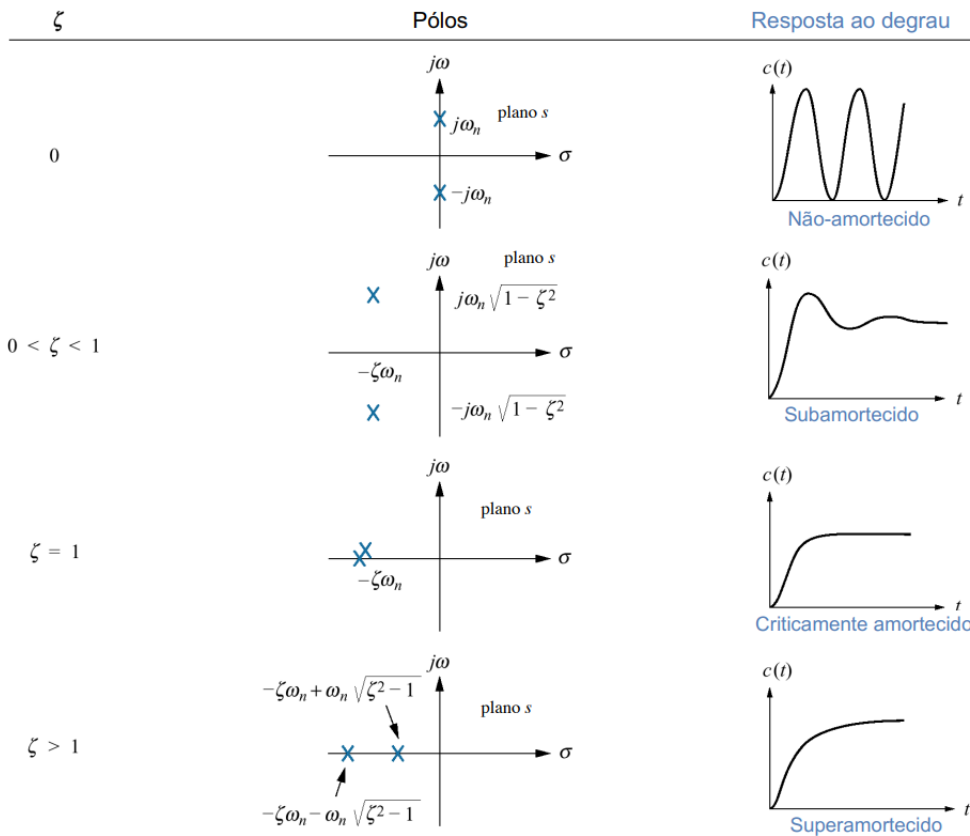
Um sistema de segunda ordem conta com uma ampla variedade de respostas que precisam ser analisadas. Isso se dá pois, as variações nos parâmetros de um sistema de segunda ordem são capazes de alterar a forma da resposta (NISE, 2012). Assim, a função transferência de um sistema de segunda ordem canônico é a mostrada abaixo.

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (1)$$

As duas grandezas da fórmula são denominadas frequência natural ω_n e fator de amortecimento ξ . O ω_n é a frequência de oscilação do sistema sem amortecimento, já o ξ é a razão entre a frequência de decaimento exponencial da envoltória e a frequência natural (NISE, 2012).

É possível calcular o tipo de resposta do sistema com base no valor do ξ , para cada faixa de valores tem-se uma resposta diferente. Na Figura 1, temos uma representação da resposta dos sistemas para diferentes intervalos de ξ . Neste relatório iremos trabalhar com um sistema subamortecido.

Figura 1: Resposta de segunda ordem em função do fator de amortecimento.



Fonte: (NISE, 2012).

2.2 Ações de Controle: Controlador Proporcional + Integral + Derivativo (PID)

Um controlador automático realiza a comparação entre o valor real da saída do processo com o valor desejado, define o desvio e gera um sinal de controle para reduzir o desvio encontrado a um valor próximo de zero. A forma em que esse controlador define o sinal de controle é chamado de ação de controle (OGATA, 2010).

A combinação das ações proporcional, integral e derivativa em um só controlador podem ser utilizadas tanto no regime transitório quanto no regime permanente. Tal controlador é utilizado quando temos resposta transitória e em regime insatisfatórias. O controlador PID é definido pela Equação de transferência 2.

$$U(s) = (k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)E(s) \implies \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{k_d s^2 + k_p s + k_i}{s} \quad (2)$$

Para implementar o controlador PID é preciso determinar os ganhos proporcional; integral e derivativo do sistema estudado (DORF; BISHOP, 2001). Assim, considera-se o controlador PID, como:

$$G_c(s) = \frac{k_c(s + z_1)(s + z_2)}{s} \quad (3)$$

Ou seja, o controlador adiciona um polo em $s = 0$ e dois zeros, que dependem das especificações do controlador para serem definidos. Os dois zeros, geralmente, são reais e iguais.

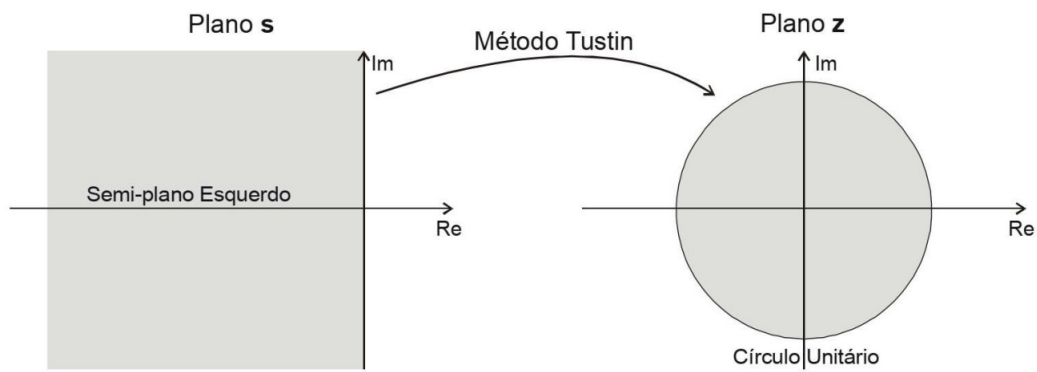
2.3 Discretização de Controladores: Método de Tustin

Antes de implementar um controlador digital, é necessário realizar a discretização do controlador. No processo de discretização, o problema fundamental é como descrever o sistema de tempo contínuo somente por meio da relação entre as sequências de amostras $u(k)$ e $y(k)$, desprezando o comportamento entre amostras (KEIEL, 2017).

O método de Tustin é uma técnica amplamente usada na discretização de sistemas Lineares Invariantes no Tempo (LIT), a qual apresenta como vantagem o mapeamento dos polos do semiplano esquerdo do plano s no interior do círculo de raio unitário, como mostra a Figura 2 (ATKINSON, 1989). Isso é feito através da expressão 4. Isso garante que sistemas contínuos estáveis são transformados em sistemas discretos estáveis e sistemas contínuos instáveis são transformados em sistemas discretos instáveis.

$$s = \frac{z + 1}{z - 1} \cdot \frac{2}{T_s} \quad (4)$$

Figura 2: Aproximação de Tustin.



3 METODOLOGIA

Neste capítulo serão explicados os materiais e métodos utilizados na elaboração do relatório, desde as ferramentas de simulação à coleta dos dados.

3.1 Ferramentas de Simulação

3.1.1 MATLAB/Simulink

O MATLAB, do inglês *MATrix LABoratory*, é um ambiente de programação de alto nível interativo voltado para o cálculo numérico e elaboração de gráficos. Diferente das linguagens clássicas de programação, como C, no MATLAB não é necessário declarar variáveis, alocar memória ou utilizar ponteiros. Além de contar com um acervo de funções matemáticas implementadas, disponíveis para ser utilizadas pelo usuário (PET, 2014).

No ambiente do MATLAB há o Simulink, uma ferramenta que permite simulação e a modelagem de sistemas dinâmicos e embarcados. Com uma interface amigável, o Simulink permite criar modelos através de diagramas de blocos. Nele é possível simular qualquer máquina por meio da modelagem matemática (PET, 2014).

3.1.2 Google Colab

O Colab é um ambiente construído para engenharia, mas que é flexível o suficiente para atender as necessidades de qualquer equipe, sem contar que o Colab por ser um programa *web* em que podemos compartilhar o mesmo código, tendo também uma ferramenta de controle de versão.

Utilizamos a linguagem de programação *Python* e uma biblioteca chamada *Control* que implementa operações básicas para análise e projeto de sistemas de controle, e fornece um *feedback*.

3.1.3 Geogebra

GeoGebra é um aplicativo de matemática dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra em uma única GUI. Sua distribuição é livre, nos termos da GNU (*General Public License*). O aplicativo é escrito em linguagem Java, o que permite a disponibilidade em várias plataformas.

Utilizamos o Geogebra para visualizar a condição de ângulo do sistema e para comparar as respostas obtidas por ele iam de encontro com os valores obtidos no *software*.

4 RESULTADOS

Neste capítulo, são apresentados e descritos os resultados obtidos dos experimentos.

4.1 Função de transferência e ganhos do controlador PID

Neste relatório foi considerada uma planta descrita pela função de transferência 5.

$$G(s) = \frac{3}{s^2 + 3s + 2} = \frac{3}{(s+1)(s+2)} \quad (5)$$

Para a planta $G(s)$ foi projetado um controlador do tipo PID que atenda as seguintes especificações:

- i) Um dos zeros do PID cancele matematicamente o polo dominado da planta;
- ii) O sistema em malha fechada deve ter *overshoot* de 4.6% e tempo de estabilização no critério de 2% de 2.8571 segundos.

Considerando um sistema de 2ª ordem canônico e subamortecido, temos que o *overshoot* (M_p) é dado pela Equação 6.

$$M_p = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad (6)$$

Com M_p é possível encontrar o valor de ξ , que é fundamental para determinar o par de polos complexos conjugados do sistema juntamente com w_n . Assim, isolando ξ , temos:

$$\xi = \sqrt{\frac{\ln^2 M_p}{\ln^2 M_p + \pi^2}} \Rightarrow \xi = \sqrt{\frac{\ln^2 0,046}{\ln^2 0,046 + \pi^2}} = 0,699 \quad (7)$$

Para determinar w_n utilizamos a Equação do tempo de estabilização (t_{ss}) no critério de 2%, e isolamos a frequência natural não-amortecida, como pode ser visto na Equação 8.

$$t_{ss} = \frac{4}{\xi w_n} \Rightarrow w_n = \frac{4}{\xi t_{ss}} \Rightarrow w_n = \frac{4}{0,699 \cdot 2,8571} = 2,000 \quad (8)$$

Logo, o par de polos complexos do sistemas é:

$$p_{1,2} = -\xi w_n \pm j w_n \sqrt{1 - \xi^2} \Rightarrow p_{1,2} = -1,400 \pm 1,428j \quad (9)$$

Lembrando que o controlador PID é definido pela Equação 3, então é preciso encontrar os zeros z_1 e z_2 para determinar os ganhos k_p , k_i e k_d . Nas especificações do projeto constam que um dos zeros deve zerar matematicamente o polo dominado, isso implica que um dos zeros deve ter o mesmo valor do polo dominado.

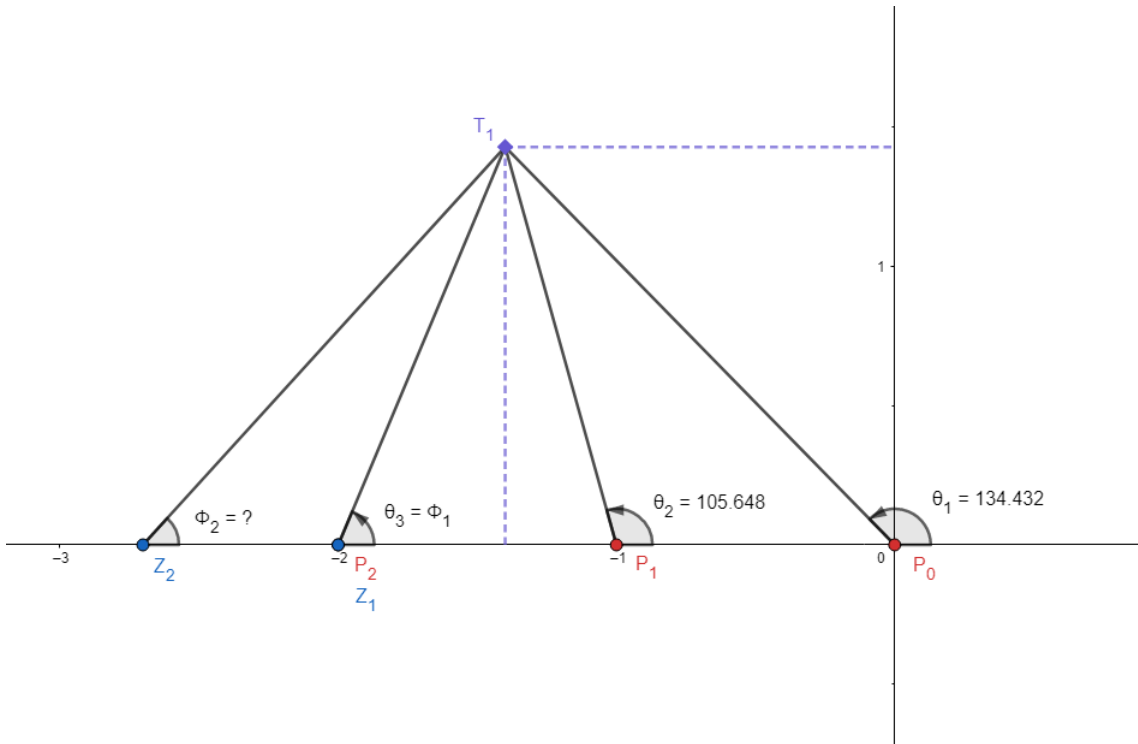
A dominância dos polos está relacionada a parte real deles, então quanto mais negativo ele for menor o seu efeito, ou seja, mais dominado ele é. Dessa forma, nessa planta o polo dominado é $s=-2$, logo, $z_1=-2$.

O z_2 deve ser determinado de forma que a condição de ângulo seja satisfeita. O critério de ângulo é realizado utilizando a equação da planta multiplicada pelo controlador, ou seja, a Equação 10.

$$G(s) \cdot C(s) = \frac{3}{(s+1)(s+2)} \cdot \frac{Kc(s+2)(s+z_2)}{s} \quad (10)$$

A referência para cálculo de cada ângulo é o polo, com a parte imaginária positiva, do sistema (Equação 9). A partir dele são calculados os ângulos dos polos (θ_1 , θ_2 e θ_3) e dos zeros (ϕ_1 e ϕ_2), como pode ser visto na Figura 3.

Figura 3: Gráfico para verificar a condição de ângulo.



Fonte: Autores.

Como o objetivo é definir onde o z_2 está localizado, primeiramente será necessário determinar o seu ângulo em relação ao polo (ϕ_2). Para isso, serão calculados todos os ângulos usando trigonometria, e como a soma deles deve ser igual a 180° será possível definir o valor de ϕ_2 .

$$\theta_1 = 180^\circ - \arctan\left(\frac{1,428}{1,400}\right) = 134,43^\circ \quad (11)$$

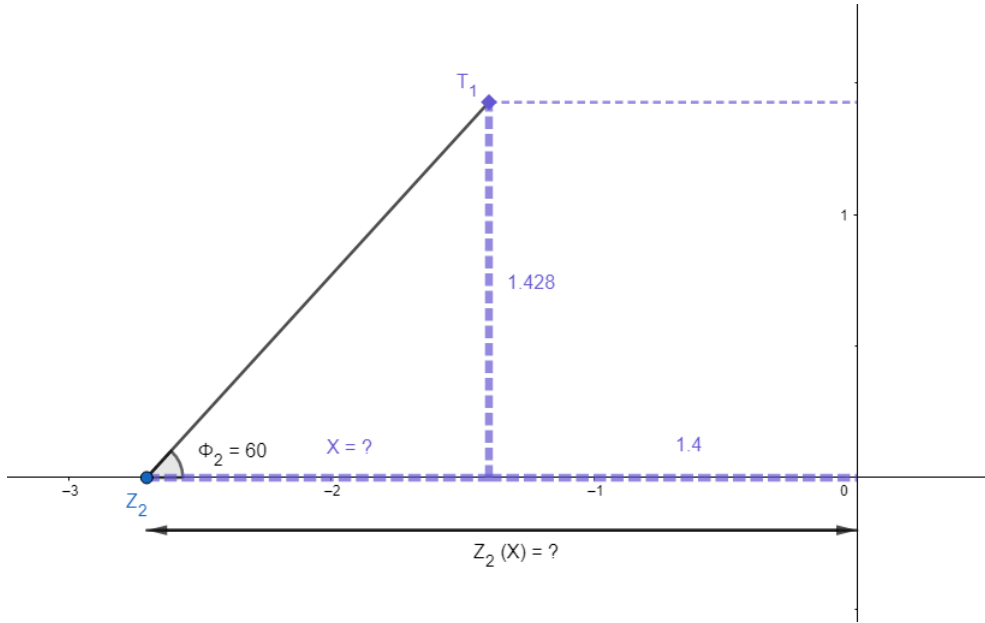
$$\theta_2 = 180^\circ - \arctan\left(\frac{1,428}{0,700}\right) = 105,65^\circ \quad (12)$$

$$\theta_3 = \phi_1 = \arctan\left(\frac{1,428}{0,600}\right) = 67,21^\circ \quad (13)$$

$$-(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + \cancel{\phi_1} + \phi_2 = 180^\circ \implies \phi_2 = 60^\circ \quad (14)$$

Uma vez que o ϕ_2 foi definido é possível encontrar a localização de z_2 , por meio de trigonometria.

Figura 4: Gráfico considerando o ângulo de z_2 .



Fonte: Autores.

Por sua vez o cálculo de z_2 , fica da seguinte forma:

$$z_2 = -\frac{1,428}{\tan(180^\circ - \phi_2)} + 1,400 = -2,222 \quad (15)$$

Com z_1 e z_2 encontrados pode-se determinar os parâmetros do controlador, a começar por K_c .

$$G(s) \cdot C(s) = \frac{3}{(s+1)} \cdot \frac{K_c(s+2,222)}{s} \quad (16)$$

Utilizando o critério de módulo temos que:

$$|G(s) \cdot C(s)| = \left| \frac{3K_c(s+2,222)}{s(s+1)} \right| = 1 \quad (17)$$

Aplicando o polo do sistema na Equação 17, temos:

$$\frac{3K_c((-1,4 + 1,428j) + 2,222)}{(-1,4 + 1,428j)((-1,4 + 1,428j) + 1)} = 1 \implies K_c = 0,5999 \approx 0,6 \quad (18)$$

Assim, a equação de controle pode ser reescrita como:

$$C(s) = \frac{0,6(s+2)(s+2,222)}{s} \implies C(s) = \frac{0,6s^2 + 2,533s + 2,664}{s} \quad (19)$$

Para definir os valores de k_p , k_i e k_d compara-se a Equação 19 com a equação 20.

$$C(s) = K_p\left(1 + \frac{K_i}{s} + K_d s\right) = K_p + \frac{K_p K_i}{s} + K_p K_d s \implies C(s) = K_p K_d s^2 + K_p s + K_p K_i \quad (20)$$

Dessa forma, temos:

$$0,6s^2 + 2,533s + 2,666 = K_p K_d s^2 + K_p s + K_p K_i \quad (21)$$

E a partir dessa comparação encontramos k_p , k_i e k_d

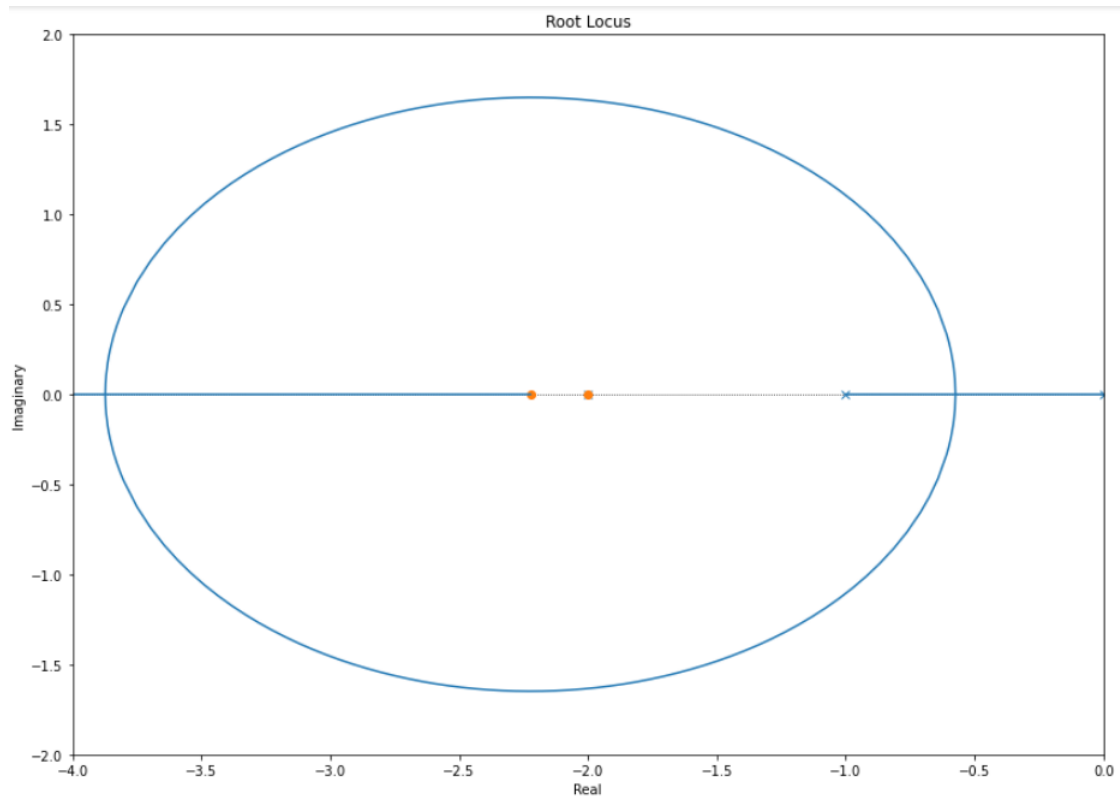
$$\begin{cases} K_p = 2,533 \\ K_p K_i = 2,666 \implies K_i = 1,053 \\ K_p K_d = 0,6 \implies K_d = 0,237 \end{cases} \quad (22)$$

Então o sistema ficara descrito pela equação 23:

$$G(s) \cdot C(s) = \frac{3}{(s+1)(s+2)} \cdot \frac{0,6s^2 + 2,533s + 2,666}{s} = \frac{1.8s^2 + 7.602s + 8.004}{s^3 + 3s^2 + 2s} \quad (23)$$

O Lugar Geométrico das Raízes (LGR) do sistema está representado na Figura 5.

Figura 5: Lugar Geométrico das Raízes do Sistema.



Fonte: Autores.

4.2 Discretização pela aproximação de Tustin

Para realizar a discretização do controlador PID pelo método Tustin, utiliza-se a equação 2 juntamente com a relação de transformada em s para transformada em z , observada na equação 4. Em seguida separa-se as partes proporcional, integrativa e derivativa.

$$U(s) = (k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)E(s) \Rightarrow U(z) = P(z) + I(z) + D(z) \quad (24)$$

A equação 25 mostra a operação matemática para isolar a parte proporcional, resultando assim na multiplicação do ganho k_p com o erro da entrada. O resultado é uma equação de transferência do controlador discretizado na dimensão da transformada z .

$$\frac{P(z)}{E(z)} = k_p \Rightarrow P(z) = k_p \cdot E(z) \quad (25)$$

Para o k_d e k_i é preciso substituir a equação 4 no lugar de s . Assim temos as equações 26 e 27.

$$I(s) = \frac{k_i}{s} \cdot E(s) \Rightarrow I(z) = \frac{k_i}{\frac{2 \cdot (z-1)}{T \cdot (z+1)}} \cdot E(z) \Rightarrow I(z) = \frac{T k_i \cdot (z+1)}{2 \cdot (z-1)} \cdot E(z) \quad (26)$$

$$D(s) = k_d s \cdot E(s) \Rightarrow D(z) = \frac{2 k_d \cdot (z-1)}{T \cdot (z+1)} \cdot E(z) \quad (27)$$

Posteriormente, realiza-se a transformada inversa de z . Ao realizar essa operação, são obtidos os valores de $e(k+1)$, ou seja, se faz necessário valores de erros futuros para gerar um sinal de controle. Para solucionar esse problema foi defasado uma unidade de tempo, resultando em: $e(k+1) \Rightarrow e(k)$ e $e(k) \Rightarrow e(k-1)$.

Dessa forma, é obtido a discretização do controlador PID no domínio do tempo discreto. As seguintes equações são o resultado final da discretização.

$$P(k) = k_p \cdot e(k) \quad (28)$$

$$I(k) = I(k-1) + \frac{k_i \cdot T}{2} (e(k) + e(k-1)) \quad (29)$$

$$D(k) = -D(k-1) + \frac{2 \cdot k_d}{T} (e(k) - e(k-1)) \quad (30)$$

4.3 Implementação do sistema no Simulink

Na plataforma Simulink no Matlab, foi utilizado um bloco chamado "*MATLAB Function*" em que é possível implementar um bloco com *scripts* desenvolvidos em Matlab. A Figura 6 mostra o *script* utilizado no bloco "*MATLAB Function*", onde o k_p , k_i e k_d foram determinados na sessão anterior e o T foi definido empiricamente.

Figura 6: Discretização pelo método Tustin utilizado no Matlab

```
function [u,I,D] = fcn(e,eant, Iant, Dant)

T = 0.1;
Kp = 2.534;
Kd = 0.6/Kp;
Ki = 2.668/Kp;

P = Kp*e;
I = (Iant + ((Ki*T)/2)*(e + eant));
D = (-Dant + ((2*Kd)/T)*(e - eant));

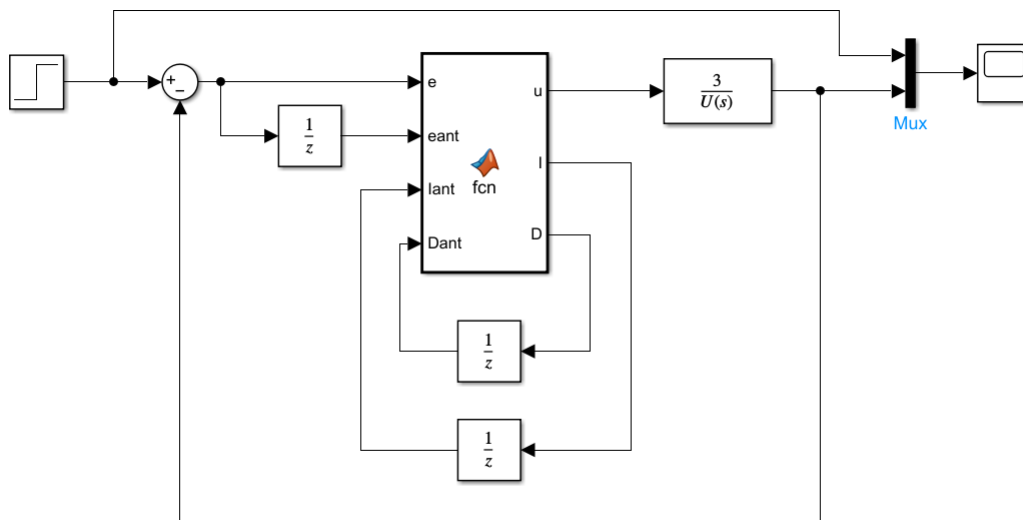
u=P+I+D;
```

Fonte: Autores.

Baseando-se nas equações 28 a 30 foi desenvolvido uma função, com quatro entradas: erro (e), erro atrasado (e_{ant}), parte integrativa atrasada (I_{ant}) e parte derivativa atrasada (D_{ant}). E três saídas: entrada da planta (u), parte integrativa (I) e parte derivativa (D). Para realizar os atrasos foi utilizado o bloco integrativo ($1/z$).

A Figura 7 ilustra o diagrama de blocos feito no Simulink.

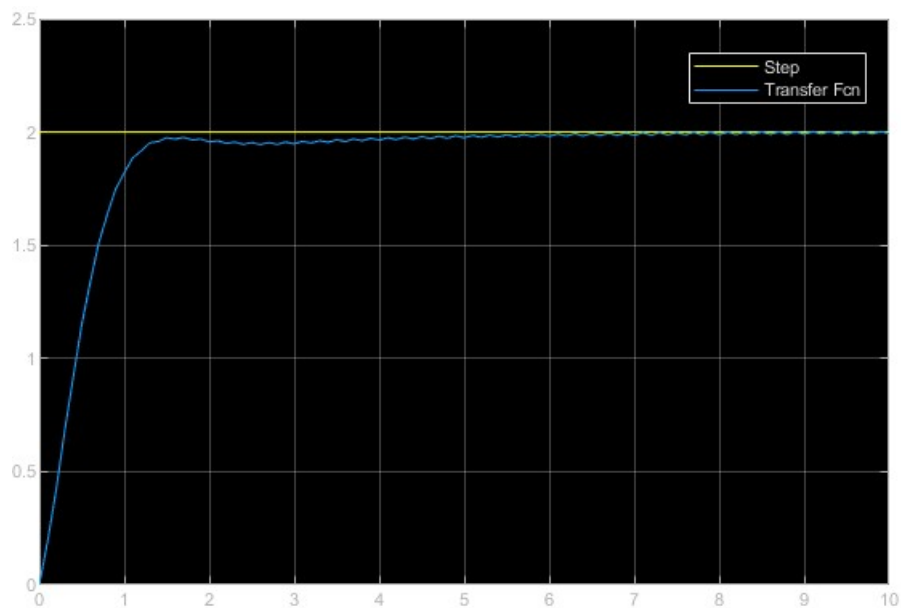
Figura 7: Diagrama de blocos do Simulink



Fonte: Autores.

Por fim, a Figura 8 mostra o sinal de saída da planta com o sinal de referência (degrau).

Figura 8: Gráfico da saída da planta



Fonte: Autores.

5 CONCLUSÃO

No presente relatório, foi feito um estudo sobre como controlar um sistema através de um controlador do tipo PID. Com o sistema dado foram definidos os valores de k_p , k_i e k_d que viabilizam a construção do controlador para as especificações fornecidas.

A discretização do sistema por meio da Aproximação Trapezoidal ou de Tustin foi feita e com ela foi realizada uma simulação do sistema com o controlador PID no Simulink-Matlab.

Por fim, o estudo permitiu um maior entendimento de controladores de sistemas PID e de métodos matemáticos de discretização.

Referências

ATKINSON, K. **An Inroduction to numerical analysis**. [S.l.]: New York, NJ, USA: John Wiley Sons, 1989.

COLAB, G. **Conheça O Colab**. 2022. Acessado em: 11 jun. 2022. Disponível em: <https://colab.research.google.com/notebooks/intro.ipynb?hl=pt_BR>.

DORF, R. C.; BISHOP, R. H. **Sistemas de Controle Modernos**. [S.l.]: LTC, 2001.

GEOGEBRA. **GeoGebra - Aplicativos Matemáticos**. 2022. Acessado em: 11 jun. 2022. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/?lang=pt>>.

KEIEL, G. **Projeto em tempo discreto de controladores ressonantes aplicados a fontes ininterruptas de energia**. 2017.

NISE, N. S. **Engenharia de Sistemas de Controle**. [S.l.]: LTC, 2012.

OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. [S.l.]: Pearson Universidades, 2010.

PET. **Apostila de Matlab**. [S.l.]: Programa de Educação Tutorial, 2014.