UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEP. DE ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO E AUTOMAÇÃO
LABORATÓRIO DE SISTEMAS CONTROLE
Fábio Meneghetti Ugulino de Araújo (http://www.dca.ufrn.br/~meneghet)

# ROTEIRO DE LABORATÓRIO

1. *Código da Experiência*: 03B

2. *Título*: Controle no Espaço de Estados: Seguidor de Referência

3. *Objetivos*: Esta prática tem como objetivos:

- Aprimoramento dos conceitos envolvidos na teoria de espaço de estados;
- Introdução ao projeto de controladores no espaço de estados;
- Projeto de um seguidor de referência para o acompanhamento de degraus.

4. *Equipamento Utilizado*: São necessários para realização desta experiência:

- Um microcomputador PC com um os softwares necessários (Windows, MATLAB/SIMULINK, compilador C, QUARC);
- Uma placa de aquisição de dados Q8-USB da Quanser;
- Um módulo de potência VoltPAQ-X1;
- Um sistema de tanques acoplados da Quanser;

5. *Introdução*:

## 5.1. *Seguidores de Referência para Entradas do Tipo Degrau*

Considere o sistema: $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases}$, se definirmos o erro de rastreamento como sendo: $e(t) = y(t) - r(t)$, temos que: $\dot{e}(t) = \dot{y}(t) - \dot{r}(t) = \dot{y}(t) = \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t)$.

Então, podemos definir novas variáveis: $\begin{cases} \mathbf{z} = \dot{\mathbf{x}} \\ w = \dot{u} \end{cases}$ e novas equações de estado $\begin{matrix} \dot{e} = \mathbf{C}\mathbf{z} \\ \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}w \end{matrix}$.

Daí, Podemos juntar as duas novas equações de estado em uma única:

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} w \Leftrightarrow$$

Se o novo sistema ($\mathbf{A_a}$, $\mathbf{B_a}$), comumente chamado de sistema aumentado, for controlável, então, existe uma lei de controle por realimentação de estado, da forma; $w = \mathbf{k}_a \zeta \Rightarrow w = k_1 e + \mathbf{k_2 z}$, tal que os polos do sistema aumentado podem ser posicionados arbitrariamente.

Desde que os polos sejam alocados na região de estabilidade, o erro de rastreamento será estável. Assim, o objetivo de rastreamento assintótico, com erro em regime nulo, será alcançado.

O sinal de controle $u(t)$ é obtido da seguinte expressão:

$$u(t) = \int_0^t w(\tau)d\tau = k_1 \int_0^t e(\tau)d\tau + \mathbf{k_2}\mathbf{x}(t)$$

na qual, os valores dos ganhos $k_1$ e $\mathbf{k_2}$ podem ser obtidos através da fórmula de Ackermman.

**Teorema:** Se ($\mathbf{A_a}$, $\mathbf{B_a}$) for observável, então usando uma lei de controle $w = \mathbf{k}_a\zeta \Rightarrow w = k_1 e + \mathbf{k_2 z}$ podemos escolher arbitrariamente os autovalores de $\left(\mathbf{A_a} + \mathbf{B_a K_a}\right)$.

- *Fórmula de Ackermann para Determinação da Matriz de Ganhos da Realimentação do Sistema Aumentado* $\mathbf{K_a}$

1- Formar $\Delta(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n$ com os pólos desejados para o seguidor de referências.

2- Calcular $\mathbf{K_a}$ da seguinte forma: $\mathbf{K_a} = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \mathbf{U_a^{-1}} q_c(\mathbf{A_a})$

em que: $\begin{cases} \mathbf{U_a} = \begin{bmatrix} \mathbf{B_a} & \mathbf{A_a B_a} & \mathbf{A_a^2 B_a} & \ldots \mathbf{A_a^{n-1} B_a} \end{bmatrix} \\ q_c(\mathbf{A_a}) = \mathbf{A_a^n} + a_1 \mathbf{A_a^{n-1}} + \ldots + a_n \mathbf{I} \end{cases}$

## *5.2. Implementação de Seguidores de Referência para Entradas do Tipo Degrau*

Uma vez determinado o ganho do sistema aumentado ($\mathbf{K_a}$), é preciso determinar os ganhos ($k_1$ e $\mathbf{k_2}$) necessários para o calculo da ação de controle $u(t) = k_1 \int_0^t e(\tau)d\tau + \mathbf{k_2 x}(t)$. Temos simplesmente que:

$$\mathbf{K_a} = \left[\begin{array}{c:c} \mathbf{k_1} & \mathbf{k_2} \end{array}\right]$$

A implementação do seguidor consiste em obter o sinal de controle $u(t)$ conforme figura a seguir.

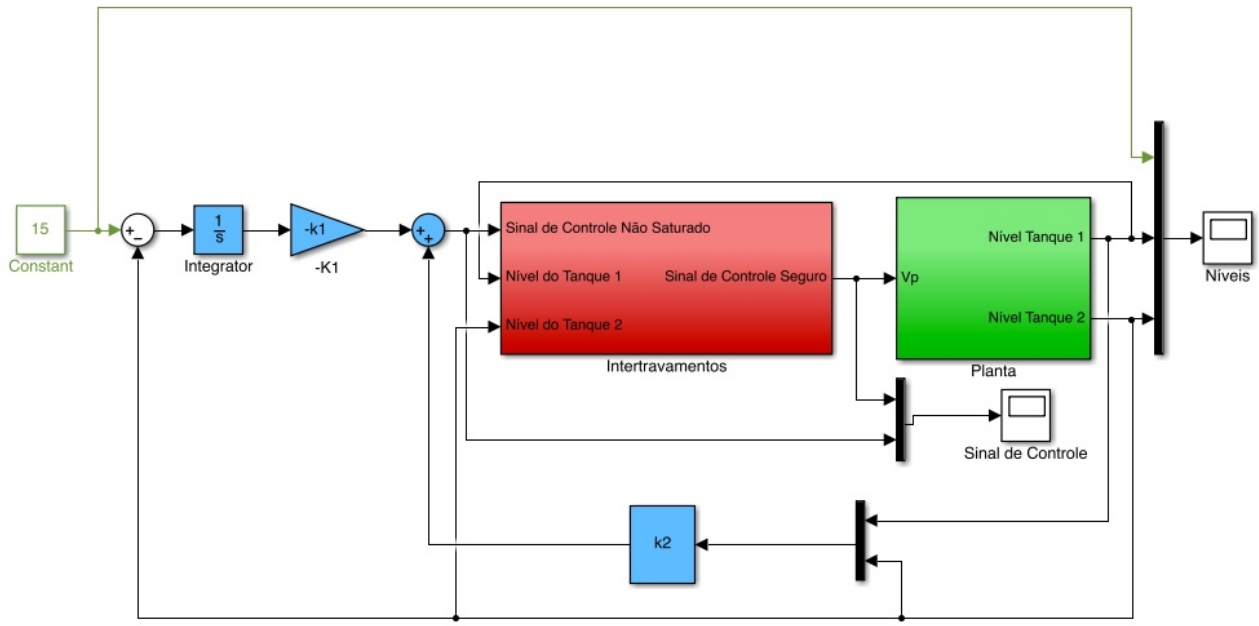


**Figura 1. Implementação, em SIMULINK/MATLAB, de um Seguidor de Degraus para o Sistemas de Tanques.**

**Obs.:** *É importante notar que no início dos cálculos, para obtenção dos ganhos, convencionou-se que:* $e(t) = y(t) - r(t)$. *Porém, em um esquema convencional de controle por realimentação, como o da Figura 1, temos:* $e(t) = r(t) - y(t)$. *Por isso, precisamos inverter o sinal de* $k_1$.

6. *Desenvolvimento*:

Conhecendo-se as EDOs que descrevem as dinâmicas dos tanques 1 e 2 (configuração #2):

$$\boxed{\dot{L}_1 = -\frac{a_1}{A_1}\sqrt{\frac{g}{2L_{10}}}L_1 + \frac{K_m}{A_1}V_P} \quad \text{e} \quad \boxed{\dot{L}_2 = -\frac{a_2}{A_2}\sqrt{\frac{g}{2L_{20}}}L_2 + \frac{a_1}{A_2}\sqrt{\frac{g}{2L_{10}}}L_1},$$

onde:

- $A_1 = A_2 = 15{,}5179$;
- $L_{20} = 15$; $L_{10} = \frac{a_2^2}{a_1^2} L_{20}$;
- $a_1 = 0{,}17813919765$; $a_2 = a_1$; (Orifício médio)
- $K_m$ = valor encontrado em experimentos anteriores ($\approx 11{,}00$).

Pede-se:

1º. Encontre uma representação em espaço de estados onde $L_1$ e $L_2$ sejam os estados do modelo;

2º. Projete um seguidor de referências, para entradas do tipo degrau, com base no modelo obtido (A escolha dos polos do seguidor faz parte do projeto, e deve ficar clara no relatório).

3º. Examine e descreva em seu relatório o comportamento do sistema para diferentes conjuntos de polos do seguidor: