



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO E AUTOMAÇÃO
CURSO DE ENGENHARIA MECATRÔNICA

RELATÓRIO DA EXPERIÊNCIA 3
Controle no Espaço de Estados:
Seguidor de Referência e Estados Estimados

TURMA: 01
GRUPO 2

JOÃO MATHEUS BERNARDO RESENDE: 20210072270

LUCAS BATISTA DA FONSECA: 20210072299

STHEFANIA FERNANDES SILVA: 20210072430

Natal-RN
2022

JOÃO MATHEUS BERNARDO RESENDE: 20210072270

LUCAS BATISTA DA FONSECA: 20210072299

STHEFANIA FERNANDES SILVA: 20210072430

**Controle no Espaço de Estados:
Seguidor de Referência e Estados Estimados**

Primeiro Relatório Parcial apresentado à disciplina de Laboratório de Sistemas de Controle, correspondente à avaliação da 3ª unidade do semestre 2022.1 do 7º período do curso de Engenharia Mecatrônica na Universidade Federal do Rio Grande do Norte, sob orientação do **Prof. Fábio Meneghetti Ugulino de Araújo.**

Professor: Fábio Meneghetti Ugulino de Araújo.

Natal-RN
2022

RESUMO

Em posse de conhecimentos sobre modelagem de sistemas dinâmicos e equações de estado foram feitas três simulações utilizando a bancada de tanque acoplados Quanser e o Simulink do MATLAB. Na primeira e segunda simulação foram estimados o comportamento do tanque 2 através do observador de estados e seguidor de referência, respectivamente. Já na simulação 3, foi projetado um seguidor de referências (para entradas do tipo degrau) que utilizou as estimativas dos estados fornecidas por um observador de estado. Os resultados encontrados foram condizentes com o esperado, apresentando boas estimativas.

Palavras-chave: Modelagem de Sistemas, Sistemas de Controle, Tanque Acoplados, Seguidor de Referência, Observador de Estados, Controlabilidade, Observabilidade.

Lista de Figuras

1	Diagrama de blocos do observador de estados.	9
2	Bancada Quanser	13
3	Diagrama de blocos observador de estados	14
4	Diagrama de blocos seguidor de referência	14
5	Diagrama de blocos de um seguidor de degraus com realimentação dos estados estimados	15
6	Diagrama de blocos - laboratório A	17
7	Nível do tanque, nível estimado e erro para os polos: $p_1=-1$ e $p_2=-2$	18
8	Nível do tanque, nível estimado e erro para os polos: $p_1 = p_2=-0,5$	19
9	Nível do tanque, nível estimado e erro para os polos: $p_1=-0,3+0,3i$, $p_2=-0,3-0,3i$	20
10	Sinal de Controle $P_1 = P_2 = 0.18, P_3 = 0.72$	22
11	Saída dos tanques $P_1 = P_2 = 0.18, P_3 = 0.72$	23
12	Sinal de Controle $P_1 = 1.5 + 0.3i, P_2 = 1.5 - 0.3i, P_3 = 0.05$	23
13	Saída dos tanques $P_1 = 1.5 + 0.3i, P_2 = 1.5 - 0.3i, P_3 = 0.05$	24
14	Sinal de Controle $P_1 = 1.5 + 0.3i, P_2 = 1.5 - 0.3i, P_3 = 5$	24
15	Saída dos tanques $P_1 = 1.5 + 0.3i, P_2 = 1.5 - 0.3i, P_3 = 5$	25
16	Sinal de Controle $P_1 = 1.0, P_2 = 2.0, P_3 = 0.6$	25
17	Saída dos tanques $P_1 = 1.0, P_2 = 2.0, P_3 = 0.6$	26
18	Sinal de Controle $P_1 = 0.18, P_2 = 0.30, P_3 = 0.60$	26
19	Saída dos tanques $P_1 = 0.18, P_2 = 0.30, P_3 = 0.60$	27
20	Saída dos tanques em ambiente puramente virtual	28
21	Saída dos tanques em ambiente puramente virtual	28
22	Saída dos tanques-Polos do seguidor $P_1 = P_2 = -0.18, P_3 = -0.72$, Polos do observador $P_{1o} = -0.3 + 0.3i, P_{1o} = -0.3 - 0.3i$	29
23	Saída do controlador-Polos do seguidor $P_1 = P_2 = -0.18, P_3 = -0.72$, Polos do observador $P_{1o} = -0.3 + 0.3i, P_{1o} = -0.3 - 0.3i$	29
24	Saída dos tanques-Polos do seguidor $P_1 = -1.5 + 0.3i, P_2 = -1.5 - 0.3i, P_3 = -0.05$, Polos do observador $P_{1o} = -0.3 + 0.3i, P_{1o} = -0.3 - 0.3i$	30
25	Saída do controlador-Polos do seguidor $P_1 = -1.5 + 0.3i, P_2 = -1.5 - 0.3i, P_3 = -0.05$, Polos do observador $P_{1o} = -0.3 + 0.3i, P_{1o} = -0.3 - 0.3i$	30
26	Saída dos tanques-Polos do seguidor $P_1 = -3 + 0.3i, P_2 = -3 - 0.3i, P_3 = -0.05$, Polos do observador $P_{1o} = -0.3 + 0.3i, P_{1o} = -0.3 - 0.3i$	31
27	Saída do controlador-Polos do seguidor $P_1 = -3 + 0.3i, P_2 = -3 - 0.3i, P_3 = -0.05$, Polos do observador $P_{1o} = -0.3 + 0.3i, P_{1o} = -0.3 - 0.3i$	31
28	Saída dos tanques-Polos do seguidor $P_1 = P_2 = -0.18, P_3 = 0.72$, Polos do observador $P_{1o} = -1, P_{1o} = -2$	32
29	Saída do controlador-Polos do seguidor $P_1 = P_2 = -0.18, P_3 = -0.72$, Polos do observador $P_{1o} = -1, P_{1o} = -2$	32

Sumário

1	INTRODUÇÃO	6
2	REFERENCIAL TEÓRICO	7
2.1	Modelagem de Sistemas	7
2.2	Observabilidade e Controlabilidade	7
2.2.1	Controlabilidade	7
2.2.2	Observabilidade	8
2.3	Observadores de Estado	8
2.4	Seguidor de Referência	9
2.5	Função de Ackermann	10
2.6	Intertravamentos	11
3	METODOLOGIA	12
3.1	Ferramentas de Simulação	12
3.1.1	MATLAB/Simulink	12
3.1.2	Tanques Quanser	12
3.2	Leitura e Coleta de Dados	13
3.2.1	Análise do problema	13
3.2.2	Laboratório A	13
3.2.3	Laboratório B	14
3.2.4	Laboratório C	15
4	RESULTADOS	16
4.1	Primeira Simulação: Observador de Estados	16
4.1.1	Simulação e Aplicação da Fórmula de Ackermann	17
4.2	Segunda Simulação: Seguidor de Referência	20
4.2.1	Aplicação da Fórmula de Ackermann	21
4.2.2	Simulação	22
4.3	Terceira Simulação: Seguidores de Referência com Estados Estimados	28
5	CONCLUSÃO	33

1 INTRODUÇÃO

O objetivo de um projeto de engenharia de controle é encontrar as configurações, especificações e identificar os parâmetros chave do sistema proposto para atender uma necessidade pontual. Um importante aliado do engenheiro projetista são os modelos computacionais que permitem visualizar o comportamento do sistema, sem necessariamente construí-lo (DORF; BISHOP, 2001).

Assim, a simulação computacional fará o uso de um modelo com as condições e as entradas reais em que o sistema será submetido. Com um modelo e simulação fundamentalmente exatos pode-se observar o desempenho do sistema sob todas as condições possíveis, extrapolar resultados para prever algum comportamento, dentre outras vantagens (DORF; BISHOP, 2001).

Nesse contexto, através de um modelo computacional do sistema de tanques acoplados Quanser, será feito: no experimento A o controle de um sistema de primeira ordem (tanque 1) com o controladores PID; no experimento B o controle de um sistema de segunda ordem (tanque 2 através do tanque 1) com o controladores PID e no experimento C, o controle de um sistema em cascata do tanque 2 através do tanque 1.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Nesse tópico apresentamos o embasamento teórico no qual este trabalho se fundamenta.

2.1 Modelagem de Sistemas

Um modelo pode ser compreendido, de modo geral, como sendo qualquer representação ou aproximação simplificada da realidade. Dessa forma, o modelo possibilita a previsão de comportamentos e a reconstrução matemática da realidade.

"O modelo é uma estrutura simplificada da realidade que supostamente apresenta, de tal forma generalizada, características ou relações importantes. Por não incluírem todas as observações ou medidas associadas, mas são valiosos por obscurecem detalhes acidentais e por permitirem o aparecimento dos aspectos fundamentais" (CHORLEY RICHARD; HAGGETT, 2013).

Os modelos experimentais fundamentam-se em experimentos que visam simular, ou seja, se aproximar o máximo possível das características e da composição do sistema, tendo como objetivo ter o controle sobre as grandezas que o compõe e compreender a dinâmica dos processos (CHRISTOFOLLETTI, 1999).

2.2 Observabilidade e Controlabilidade

Em um sistema na forma do espaço de estados podem existir dinâmicas que não são vistas pelas saídas do sistema ou não são influenciadas pelas entradas do sistema. Se pensarmos em termos de função transferência fica fácil entender que um cancelamento de um pólo com um zero implica que alguma dinâmica no sistema deixa de ser vista pela saída e nem pode ser alterada pela entrada. Dinâmicas "escondidas" são causadas por cancelamento de pólos e zeros, essas dinâmicas geram perda de controlabilidade e/ou observabilidade (CABRAL, 2015).

Para podermos controlar um sistema ele deve ser controlável e observável e existem testes que verificam isso.

2.2.1 Controlabilidade

Um sistema linear invariante no tempo (LIT) é controlável se existir um vetor de entrada $u(t)$ para $0 \leq t \leq T$ com $T > 0$ e finito, tal que o sistema vai da condição inicial $x(0) = 0$ para qualquer estado x no intervalo de tempo T , ou seja, um sistema pode ser dito controlável em um instante t_0 se for possível, por meio de um vetor de controle, transferir o sistema de qualquer outro estado em um intervalo de tempo finito.

Para fazer o teste de controlabilidade temos um sistema de ordem n , dados por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), \quad (1)$$

onde $\mathbf{x}(t) \in R^n$ e $u(t) \in R^m$. Para um sistema ser controlável basta analisar a equação dos estados, ou seja, o par de matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} .

Definindo a matriz de controlabilidade U :

$$U = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (2)$$

O sistema definido pelas matrizes (\mathbf{A}, \mathbf{B}) é controlável se o posto (U) é igual a n . Posto de uma matriz representa o número de colunas ou linhas linearmente independentes da matriz

A controlabilidade está associada à capacidade de influenciar todos os estados através das entradas do sistema (CABRAL, 2015).

2.2.2 Observabilidade

Um sistema LIT é observável se qualquer condição inicial $\mathbf{x}(0)$ pode ser obtida conhecendo-se as entradas $u(t)$ e as saídas $y(t)$ do sistema para todo instante de tempo t entre 0 e $T > 0$ (CABRAL, 2015).

Para fazer o teste de observabilidade temos um sistema de ordem n , com um vetor de entradas $u(t) = 0$, então tem-se:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (3)$$

onde $\mathbf{x}(t) \in R^n$ e $y(t) \in R^p$. Para um sistema ser observável basta analisar o par de matrizes \mathbf{A} e \mathbf{C} .

Definindo a matriz de observabilidade V :

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (4)$$

O sistema definido pelas matrizes (\mathbf{A}, \mathbf{C}) é observável se o posto (V) é igual a n .

A observabilidade está associada à capacidade acompanhar todos os estados por meio das saídas do sistema (CABRAL, 2015).

2.3 Observadores de Estado

O observador de estados consiste em um algoritmo para estimação dos estados da planta. É uma solução útil quando os estados reais da planta não estão acessíveis, cenário muito comum no dia-a-dia (ARAÚJO, 2007). Assim, seja:

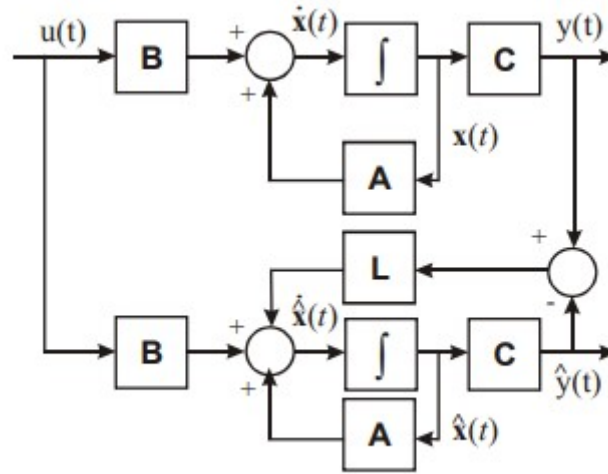
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (5)$$

Conhecendo as matrizes **A**, **B** e **C**, como também a medição de $y(t)$ e $u(t)$, constrói-se o estimador:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{L}(y(t) - \hat{y}(t)) + \mathbf{B}u(t), \\ \hat{y}(t) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t) \end{cases} \quad (6)$$

O esquemático do observador de estados pode ser observado na Figura 1.

Figura 1: Diagrama de blocos do observador de estados.



Fonte:(ARAÚJO, 2007)

O erro entre x e $\hat{x}(t)$, chamado de erro de estimação (ou erro de observação), é dado por:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = (A - LC)\tilde{x}(t) \quad (7)$$

É importante enfatizar que para que $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}(t) = 0$ é necessário que os autovalores de $(A - LC)$ sejam estáveis, ou seja, tenham parte real negativa (ARAÚJO, 2007).

2.4 Seguidor de Referência

Os controladores reguladores são capazes de rejeitar distúrbio, mas em geral, são ruins para seguir trajetórias ou sinais de referência na entrada. Para adicionar esta característica ao controlador é preciso modificar a lei de controle. Para que um sistema descrito por variáveis de estado possa, além de possuir a dinâmica desejada, seguir uma determinada entrada, com erro zero, usamos o princípio do modelo interno (ARAÚJO, 2003).

Definindo o erro de rastreamento como a equação 8, em seguida para obter as características do sinal de referência é feita a derivada do erro como é mostrado da Equação 9. Dessa forma, são obtidas novas variáveis de estados, na forma matricial temos a matriz de estados expandida escrita na Equação 11.

$$e(t) = y(t) - r(t) \quad (8)$$

$$\dot{e}(t) = \dot{y}(t) - \dot{r}(t)\dot{y}(t) = \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) \quad (9)$$

$$\begin{cases} \mathbf{z} = \dot{\mathbf{x}}, \\ w = \dot{u} \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} w \quad (11)$$

onde:

$$\begin{aligned} A_a &= \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Matriz aumentada de A} \\ B_a &= \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Matriz aumentada de B} \end{aligned} \quad (12)$$

Para que o rastreamento assintótico com erro em regime nulo seja alcançado é necessário que os polos do sistema aumentado sejam alocados na região de estabilidade. Ou seja, seguindo nessa condição, a resposta do sistema assintoticamente estável é definido de acordo com a Equação 13 (ARAÚJO, 2003).

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{x}_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{k}_2 & \mathbf{B}k_1 \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_{n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -1 \end{bmatrix} r \quad (13)$$

2.5 Função de Ackermann

Um dos principais problemas no projeto de sistemas de controle é conseguir criar controladores que possam alterar a dinâmica de um sistema em malha fechada, através da mudança dos autovalores da matriz que o representa. Isso equivale a mudar os polos da função de transferência associada ao sistema, caso de não ocorra o cancelamento de polos e zeros (SHINNERS, 1998).

Calcular o polinômio característico e a matriz de realimentação que deve ser usada, pode ser uma tarefa desafiadora (SHINNERS, 1998). Para facilitar tais cálculos há a fórmula de Ackermann, que é útil para determinar a matriz de retroação de estados, dada por:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{bmatrix} \quad (14)$$

Essa matriz K multiplica o sinal de entrada x:

$$\begin{aligned} u(t) &= -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (15)$$

Assim, considerando a equação característica:

$$q(s) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_n \quad (16)$$

A matriz de ganhos K é calculada de forma que:

$$K = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} U^{-1} q_c(A) \quad (17)$$

Em que U (matriz de controlabilidade) e q_c são dados por:

$$\begin{cases} U = [B \ AB \ BA^2 \ BA^{n-1}] \\ q_c(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + a_1 \mathbf{A}^{n-1} + \dots + a_n \mathbf{I} \end{cases} \quad (18)$$

Já para determinar a matriz de ganhos do observador L , é feito:

$$L = q_L(A) V^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}^T \quad (19)$$

Em que V (matriz de observabilidade) e q_L são dados por:

$$\begin{cases} V = [C \ CA \ CA^2 \ CA^{n-1}]^T \\ q_L(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + a_1 \mathbf{A}^{n-1} + \dots + a_n \mathbf{I} \end{cases} \quad (20)$$

Lembrando que I é a matriz identidade. Também é importante frisar que: A , B e C são matrizes.

2.6 Intertravamentos

O intertravamento tem o objetivo de impedir o funcionamento da máquina, sob condições específicas. Por exemplo, uma chave instalada em um circuito elétrico com a finalidade de cortar a alimentação e impedir que a ação de uma pessoa seja praticada (ADNORMAS, 2021).

3 METODOLOGIA

Neste capítulo serão explicados os materiais e métodos utilizados na elaboração do relatório, desde as ferramentas de simulação à coleta dos dados.

3.1 Ferramentas de Simulação

3.1.1 MATLAB/Simulink

O MATLAB, do inglês *MATrix LABoratory*, é um ambiente de programação de alto nível interativo voltado para o cálculo numérico e elaboração de gráficos. Diferente das linguagens clássicas de programação, como C, no MATLAB não é necessário declarar variáveis, alocar memória ou utilizar ponteiros. Além de contar com um acervo de funções matemáticas implementadas, disponíveis para ser utilizadas pelo usuário (PET, 2014).

No ambiente do MATLAB há o Simulink, uma ferramenta que permite simulação e a modelagem de sistemas dinâmicos e embarcados. Com uma interface amigável, o Simulink permite criar modelos através de diagramas de blocos. Nele é possível simular qualquer máquina por meio da modelagem matemática (PET, 2014).

3.1.2 Tanques Quanser

A Quanser é uma empresa especializada em fabricar equipamentos laboratoriais, para estudo e pesquisa, das áreas de controle; robótica e mecatrônica (QUANSER, 2022). Dentre os produtos fabricados pela Quanser há o sistema de dois tanques acoplados, objeto de estudo deste relatório.

A bancada Quanser é formada por dois tanques acoplados, uma bomba, tubos e conexões hidráulicas e um reservatório de água na parte inferior do sistema, que possui recirculação de água. Em ambos os tanques, o líquido é retirado pelo fundo do cilindro através de um orifício de saída na parte de baixo. Um sensor, localizado na parte inferior de cada tanque, mede o nível da água em cada um deles. Na Figura 2 podemos observar a bancada de tanques acoplados utilizada nesse estudo.

Figura 2: Bancada Quanser



Fonte: Quanser.

3.2 Leitura e Coleta de Dados

3.2.1 Análise do problema

Em posse dos roteiros, foi preciso compreender os conceitos de modelagem e controle de sistemas dinâmicos e o funcionamento de tanques acoplados para executar as simulações. Para isso, foram utilizados: o sistema de tanques acoplados da Quanser; uma placa de aquisição de dados (Q8-USB da Quanser); um módulo de potência (VoltPAQ-X1) e o Simulink do MATLAB.

O objetivo foi realizar o controle do tanque 2 utilizando: observador de estados, seguidor de referência e um sistema que reuni ambos em cadeia.

Além disso, foi utilizado um sistema de segurança para saturar o sinal de controle em ± 4 volts, isso foi feito para respeitar os limites operacionais da bomba do sistema de tanques. O sistema de intertravamentos também atua para evitar que o tanque transborde.

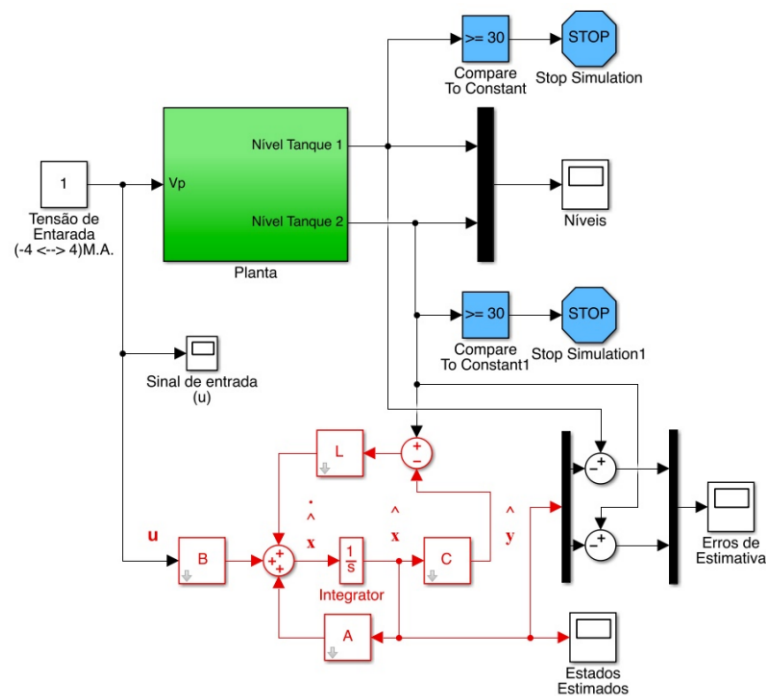
Para a interpretação dos gráficos gerados no Simulink foi preciso entender os conceitos abordados no referencial teórico.

3.2.2 Laboratório A

O primeiro experimento, modelado no Simulink, foi feito com objetivo de controlar o tanque 2 por meio do projeto de um observador de estados. Dessa forma, foi utilizado o esquema mostrado na Figura 3, onde em vermelho temos o diagrama de blocos do observador de estados.

Nesse experimento foi necessário encontrar a representação em espaço de estados, através do: cálculo da matriz L (Equação 19), escolha dos polos do observador e análise do comportamento do circuito para diferentes polos.

Figura 3: Diagrama de blocos observador de estados



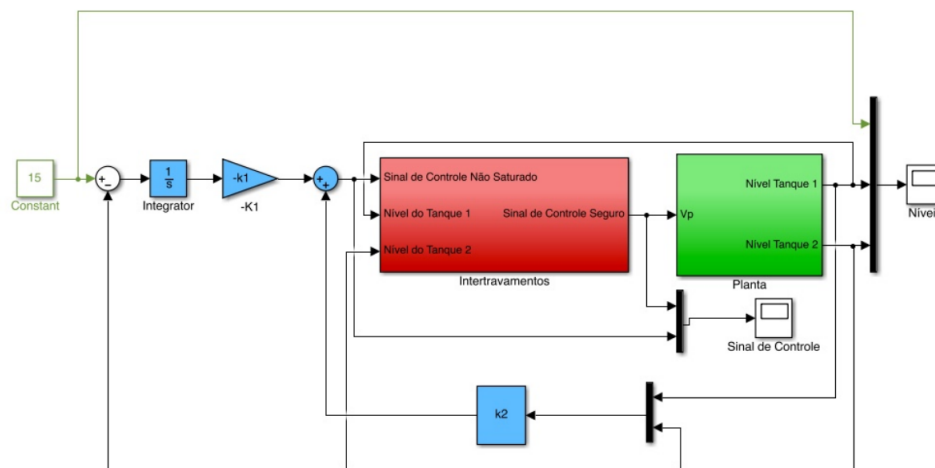
Fonte: (ARAÚJO, 2003).

3.2.3 Laboratório B

O segundo experimento, modelado no Simulink, foi feito com objetivo de controlar o tanque 2 por meio do projeto de um seguidor de referência. Dessa forma, foi utilizado o esquema mostrado na Figura 4, onde em azul temos o diagrama de blocos do seguidor de referência.

Nesse experimento foi necessário encontrar a representação em espaço de estados, através do: cálculo da matriz de ganhos K (Equação 17), escolha dos polos do seguidor e análise do comportamento do circuito para diferentes polos.

Figura 4: Diagrama de blocos seguidor de referência



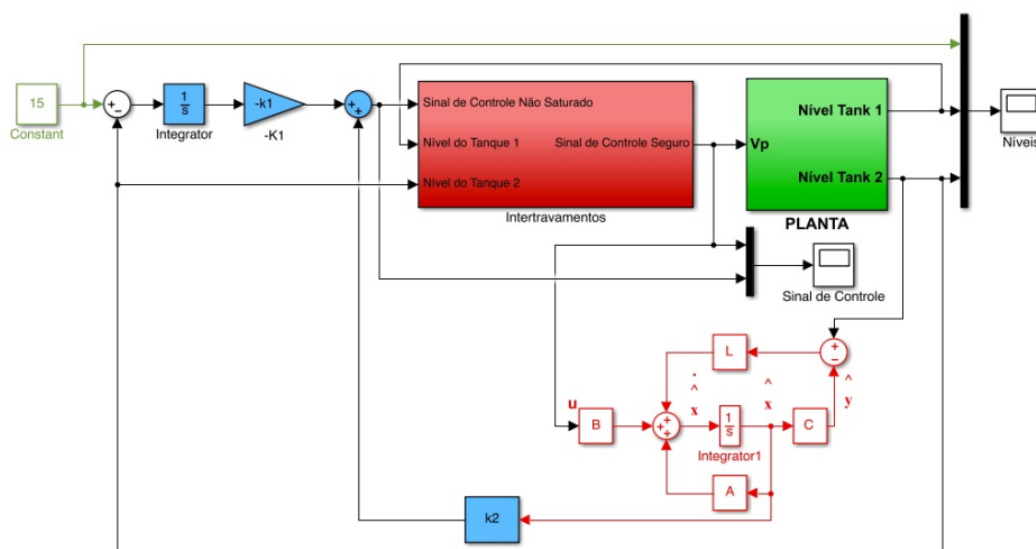
Fonte: (ARAÚJO, 2003).

3.2.4 Laboratório C

No terceiro experimento e último experimento, ainda para controlar o tanque 2, foi projetado um seguidor de referências (para entradas do tipo degrau) que utilizou as estimativas dos estados fornecidas por um observador de estados. Isso foi feito por meio de um sistema com seguidor realimentado pelos estados estimados. Dessa forma, foi utilizado o esquema mostrado na Figura 5, onde em vermelho temos o diagrama de blocos do observador de estados e em azul temos o diagrama de blocos do seguidor de referência.

Nesse experimento foi necessário analisar o comportamento do sistema para diferentes conjuntos de polos, tanto do seguidor quanto do observador. Também foi preciso descrever as diferenças entre utilizar um seguidor de referências com realimentação de medidas reais dos estados e com medidas estimadas por um observador

Figura 5: Diagrama de blocos de um seguidor de degraus com realimentação dos estados estimados



Fonte: (ARAÚJO, 2003).

4 RESULTADOS

Em todas as simulações foram consideradas as seguintes EDOs que descrevem as dinâmicas dos tanques 1 e 2:

$$\begin{cases} \dot{L}_1 = -\frac{a_1}{A_1} \sqrt{\frac{g}{2L_{10}}} L_1 + \frac{K_m}{A_1} V_p \\ \dot{L}_2 = -\frac{a_2}{A_2} \sqrt{\frac{g}{2L_{20}}} L_2 + \frac{a_1}{A_2} \sqrt{\frac{g}{2L_{10}}} L_1 \end{cases} \quad (21)$$

Os parâmetros utilizados nas EDOs são descritos pela Tabela 1.

Tabela 1: Parâmetros considerados

Símbolo	Parâmetro	Valor
V_p	Tensão aplicada à bomba	$-4V$ a $4V$
K_m	Constante da bomba	$11,00 \text{ cm}^3/\text{sV}$
$A_1 = A_2$	Área da seção transversal dos tanques	$15,5179 \text{ cm}^2$
$a_1 = a_2$	Área dos orifícios de saída	$0,17813919765 \text{ cm}^2$
g	Aceleração da gravidade	981 cm/s^2
L_{20}	-	15
L_{10}	-	$\frac{a_1^2}{a_2^2} L_{20} = 15$

Fonte: Autores.

4.1 Primeira Simulação: Observador de Estados

A primeira simulação contou com uma entrada de 2 V, que foi utilizada para gerar todos os gráficos deste tópico.

Para analisar o comportamento do observador, considerando a equação base 5 e a equação do sistema 21, as matrizes A, B e C serão:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{a_1}{A_1} \sqrt{\frac{g}{2L_{10}}} & 0 \\ \frac{a_1}{A_2} \sqrt{\frac{g}{2L_{10}}} & -\frac{a_2}{A_2} \sqrt{\frac{g}{2L_{20}}} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -\frac{K_m}{A_1} \\ 0 \end{bmatrix} e C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Para determinar a matriz L foram utilizados 3 conjuntos de polos diferentes: dois polos reais e diferentes, dois polos reais e iguais e dois polos conjugados. Os valores utilizados podem ser vistos abaixo.

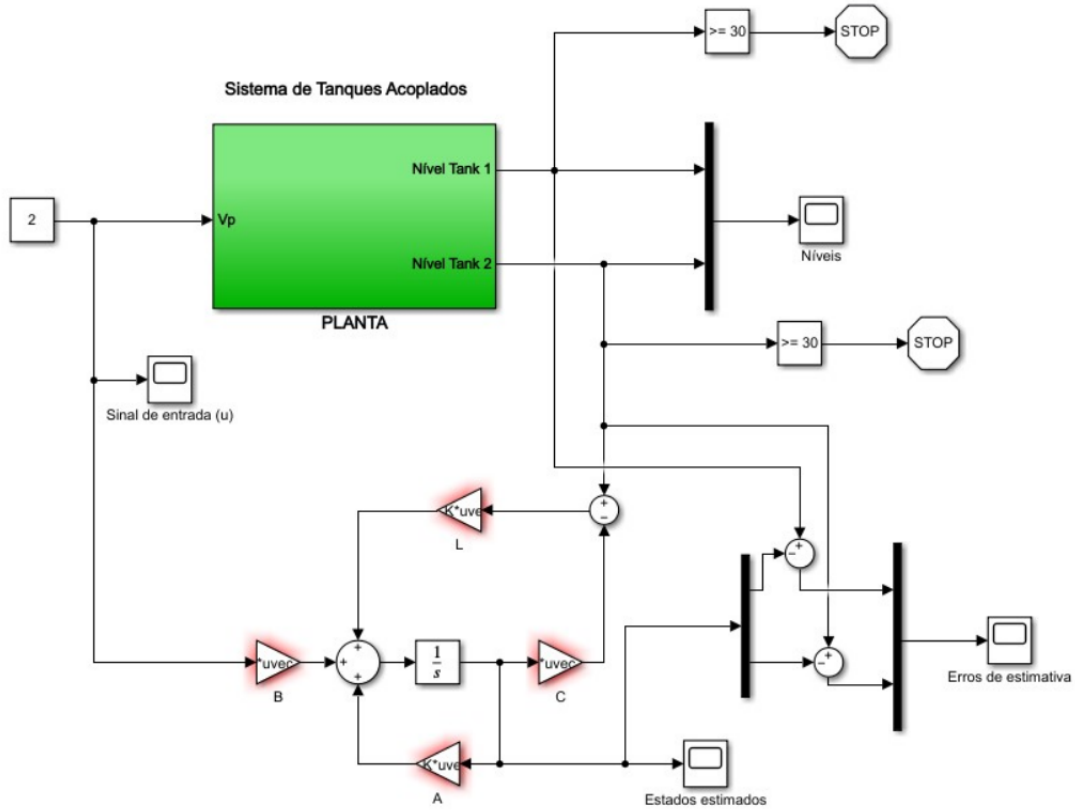
$$\text{Dois polos reais e diferentes} \begin{cases} P_1 = -1 \\ P_2 = -2 \end{cases} \quad (23)$$

$$\text{Dois polos reais e iguais} \begin{cases} P_1 = -0.5 \\ P_2 = -0.5 \end{cases} \quad (24)$$

$$\text{Dois polos conjugados} \begin{cases} P_1 = -0.3 + 0.3i \\ P_2 = -0.3 - 0.3i \end{cases} \quad (25)$$

Por último a planta utilizada foi a mostrada na Figura 6.

Figura 6: Diagrama de blocos - laboratório A



Fonte: autores.

4.1.1 Simulação e Aplicação da Fórmula de Ackermann

Na simulação com o observador de estados foram observados três tipos de gráficos: níveis (mostra o nível real dos tanques), estados estimados (mostra o nível estimado pelo observador) e o erro entre o nível real e o estimado.

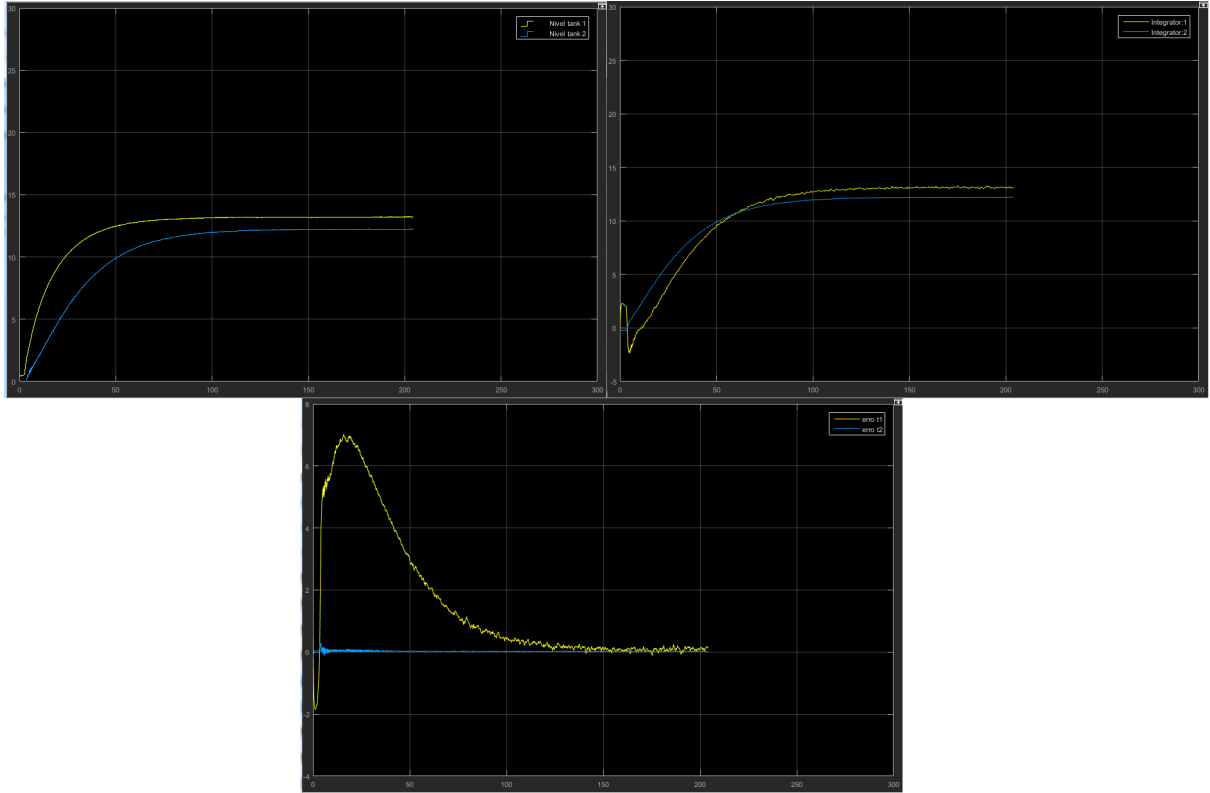
Aplicando a fórmula da Ackermann para os dois polos reais e diferentes, encontramos a equação característica e L, respectivamente, abaixo.

$$\Delta_1(s) = (s+1)(s+2) = s^2 + 3s + 2 \quad (26)$$

$$L_{\text{polos reais}} = - \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} U^{-1} \cdot q_c(A_a) = \begin{bmatrix} -27,532 & -3 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Essa configuração deu os resultados mostrados nos 3 gráficos da Figura 7.

Figura 7: Nível do tanque, nível estimado e erro para os polos: $p_1=-1$ e $p_2=-2$



Fonte: Autores.

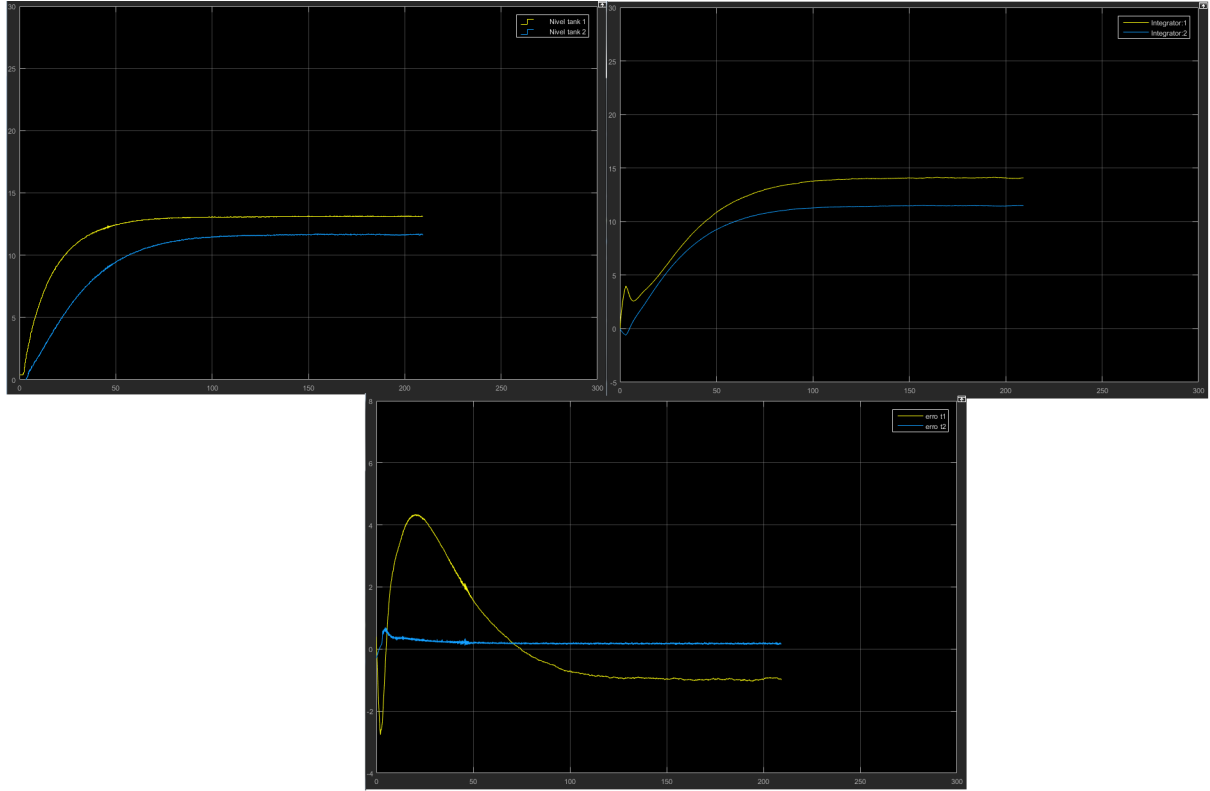
Já ao aplicar a fórmula da Ackermann para os dois polos reais e iguais, encontramos a equação característica e L, respectivamente, abaixo.

$$\Delta_2(s) = (s + 0.5)(s + 0.5) = s^2 + s + 0.25 \quad (28)$$

$$L_{polosiguais} = - \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} U^{-1} \cdot q_c(A_a) = \begin{bmatrix} -2,2077 & -0,6 \end{bmatrix} \quad (29)$$

Essa configuração deu os resultados mostrados nos 3 gráficos da Figura 8. Nesse experimento observou-se que o erro do nível do tanque 2 ficou um pouco maior que 0, diferente do que ocorreu na Figura 7.

Figura 8: Nível do tanque, nível estimado e erro para os polos: $p_1 = p_2 = -0,5$



Fonte: Autores.

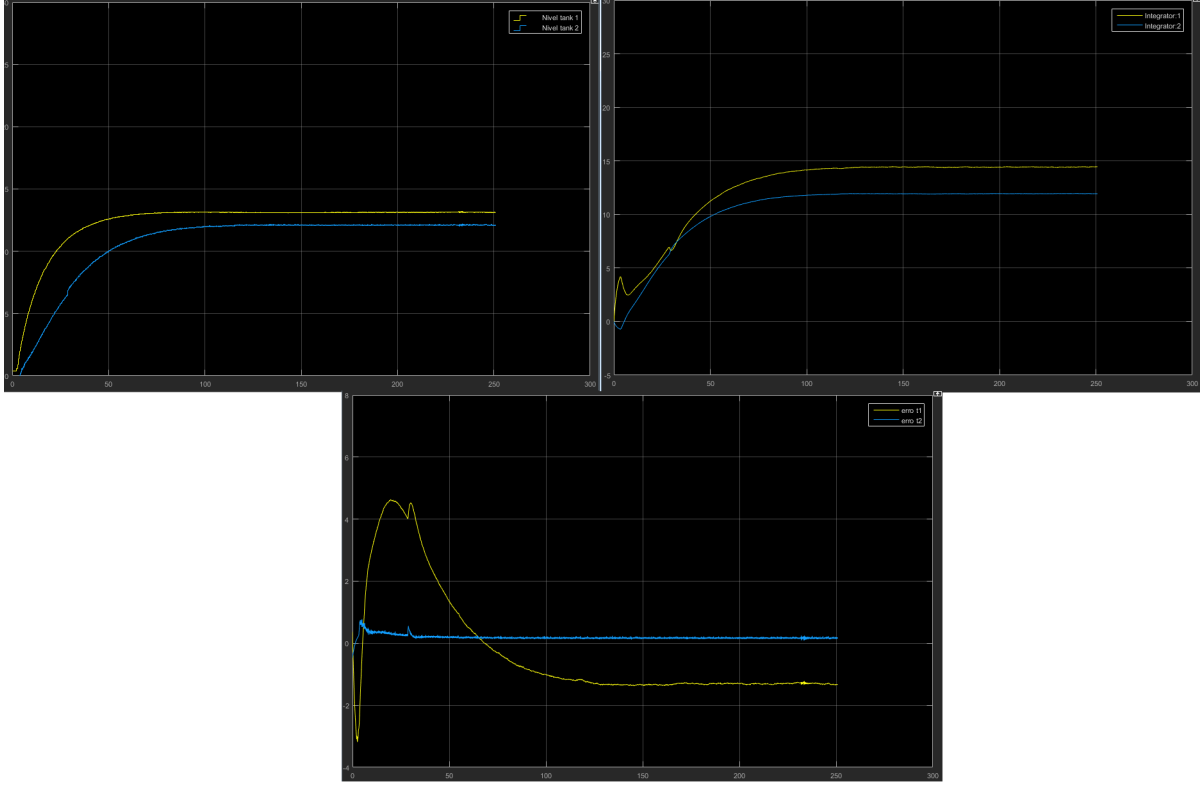
Por fim, ao aplicar a fórmula da Ackermann para os dois polos conjugados, encontramos a equação característica e L , respectivamente, abaixo.

$$\Delta_3(s) = (s + 0.3 - 0.3i)(s + 0.3 + 0.3i) = s^2 + 0.6s + 0.18 \quad (30)$$

$$L = - \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} U^{-1} \cdot q_c(A_a) = \begin{bmatrix} -2,8740 & -1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

Essa configuração deu os resultados mostrados nos 3 gráficos da Figura 9. Nesse experimento observou-se que o erro do nível do tanque 2 também ficou um pouco maior que 0, mostrando que a melhor combinação de polos foi com $p_1 = -1$ e $p_2 = -2$.

Figura 9: Nível do tanque, nível estimado e erro para os polos: $p_1=-0,3+0,3i$, $p_2=-0,3-0,3i$



Fonte: Autores.

4.2 Segunda Simulação: Seguidor de Referência

Para a obtenção da Equação de estados 11, se faz necessário seguir algumas etapas, as quais vão ser abordados nas seções a seguir. Foram utilizados diferentes polos, escolhidos de forma arbitrária, para que fosse feita uma análise gráfica de qual polo funcionaria melhor e qual o impacto no sistema.

A simulação foi feita com vários polos diferentes: polos complexos conjugados, reais diferentes e reais iguais. Os polos usados são os listados abaixo:

$$\text{Teste 1} \begin{cases} P_1 = P_2 = 0.18 \\ P_3 = 0.72 \end{cases} \quad (32)$$

$$\text{Teste 2} \begin{cases} P_1 = 1.5 + 0.3i \\ P_2 = 1.5 - 0.3i \\ P_3 = 0.05 \end{cases} \quad (33)$$

$$\text{Teste 3} \begin{cases} P_1 = 1.5 + 0.3i \\ P_2 = 1.5 - 0.3i \\ P_3 = 5 \end{cases} \quad (34)$$

$$\text{Teste 4} \begin{cases} P_1 = 1.0 \\ P_2 = 2.0 \\ P_3 = 0.6 \end{cases} \quad (35)$$

$$\text{Teste 5} \begin{cases} P_1 = 0.18 \\ P_2 = 0.30 \\ P_3 = 0.60 \end{cases} \quad (36)$$

4.2.1 Aplicação da Fórmula de Ackermann

Para determinar os ganhos do controlador será preciso definir as matrizes aumentadas de A e B, o polinômio q_c e a inversa da matriz de controlabilidade.

Dessa forma, com os polos desejados definidos, o polinômio característico pode ser escrito como (para o primeiro caso):

$$\Delta(s) = (s + 0.18)^2(s + 0.72) = s^3 + 1.08s^2 + 0.291s + 0.023 \quad (37)$$

Após isso podemos determinar que a matriz aumentada de A (A_a) e a matriz aumentada de B (B_a) serão, respectivamente:

$$A_a = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0,065593 & 0 \\ 0 & 0,065593 & -0,065593 \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$B_a = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,708 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (39)$$

Em posse de A_a podemos definir que $q_c(A_a)$ é dado por:

$$q_l(A_a) = a^2 + \alpha_1 A_a + \alpha_3 I \quad (40)$$

Já a matriz de controlabilidade é dada por:

$$U = \begin{bmatrix} B_a & A_a \cdot B_a & A_a^2 \cdot B_a \end{bmatrix} \quad (41)$$

Assim, a matriz de ganhos K pode ser calculada, seu é calculado e demonstrado a seguir, para cada um dos polos utilizados (para o primeiro caso).

$$K = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} U^{-1} \cdot q_c(A_a) = \begin{bmatrix} -2,7870 & -3,98339 & -20,5808 \end{bmatrix} \quad (42)$$

Onde, o primeiro elemento da matriz K será o ganho K_1 e os dois elementos restantes serão a matriz K_2 . Um detalhe importante é que para os cálculos dos ganhos convencionou-se que $e(t) = y(t)$

- $r(t)$. No entanto, em um sistema convencional de controle por realimentação, o cálculo é feito com $e(t) = r(t) - y(t)$. Logo, foi necessário a inverter de sinal de K_1 .

Por fim, temos que os ganhos K_1 e K_2 serão:

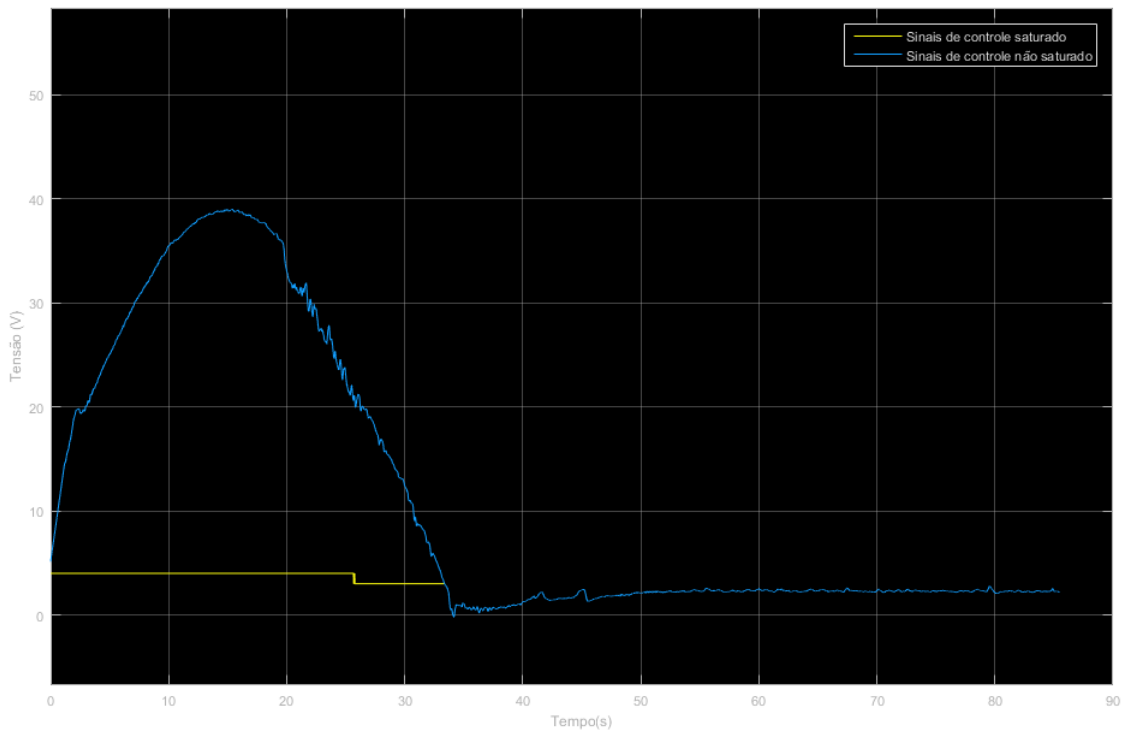
$$\begin{aligned} K_1 &= [2,7870] \\ K_2 &= [-3,98339 \quad -20,5808] \end{aligned} \quad (43)$$

4.2.2 Simulação

Com a aplicação dos polos para o controlador obtivemos os seguintes gráficos para cada polo.

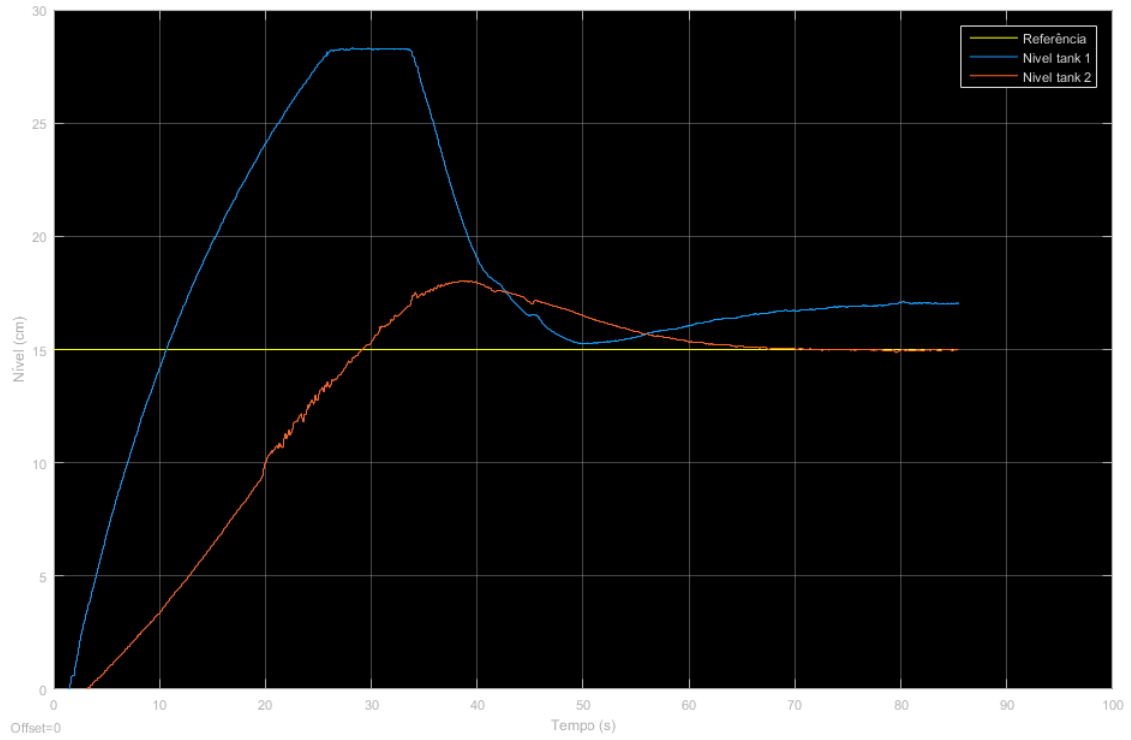
Para o controlador com polos em $P_1 = P_2 = 0.18, P_3 = 0.72$ obtivemos os seguintes resultados para a saída do controlador e o nível das plantas.

Figura 10: Sinal de Controle $P_1 = P_2 = 0.18, P_3 = 0.72$



Fonte: Autores.

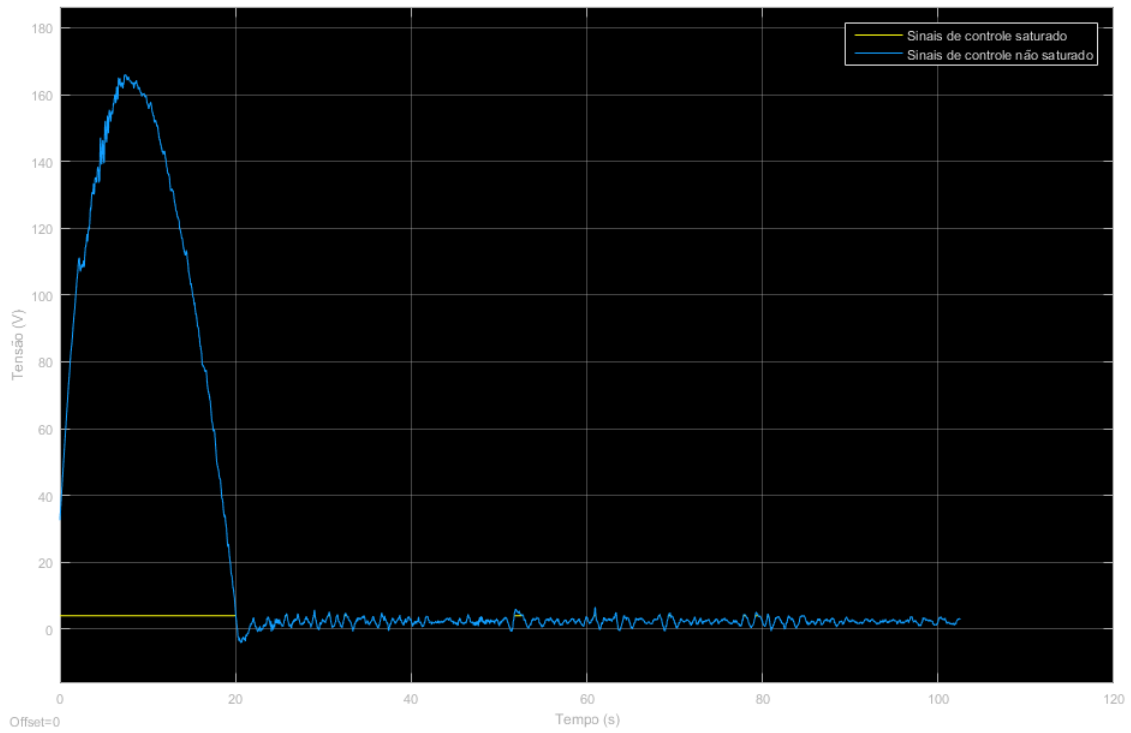
Figura 11: Saída dos tanques $P_1 = P_2 = 0.18, P_3 = 0.72$



Fonte: Autores.

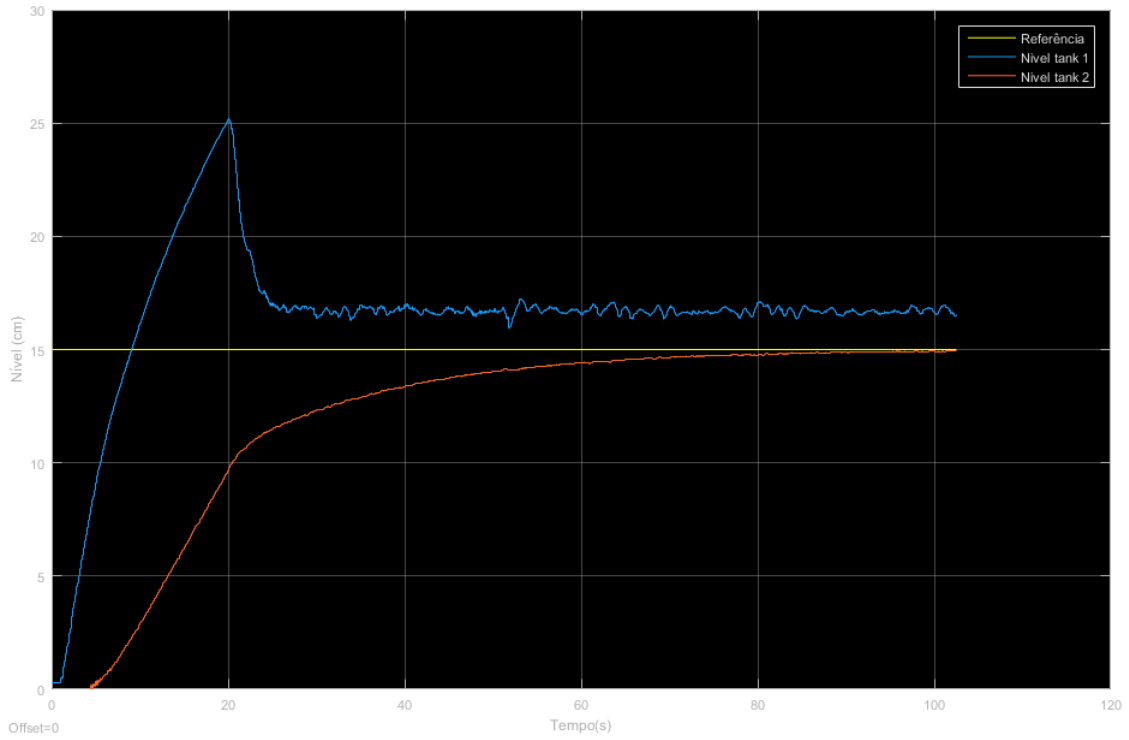
Para o controlador com polos em $P_1 = 1.5 + 0.3i, P_2 = 1.5 - 0.3i, P_3 = 0.05$ obtivemos os seguintes resultados para a saída do controlador e o nível das plantas.

Figura 12: Sinal de Controle $P_1 = 1.5 + 0.3i, P_2 = 1.5 - 0.3i, P_3 = 0.05$



Fonte: Autores.

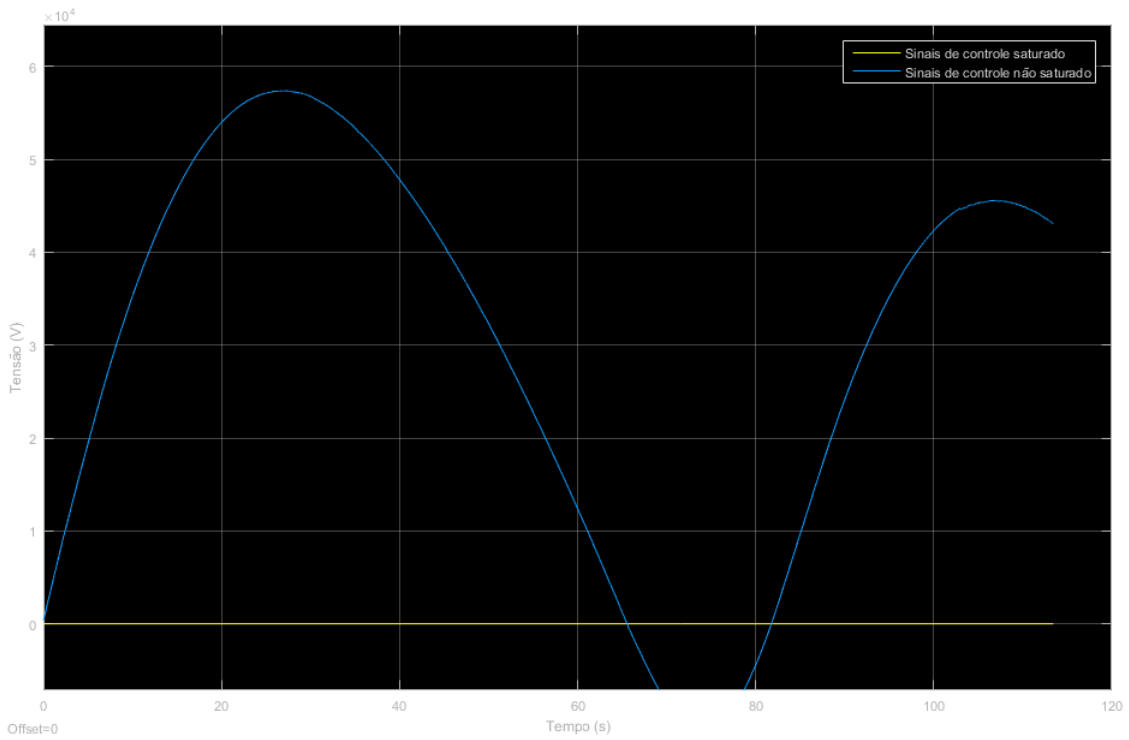
Figura 13: Saída dos tanques $P_1 = 1.5 + 0.3i, P_2 = 1.5 - 0.3i, P_3 = 0.05$



Fonte: Autores.

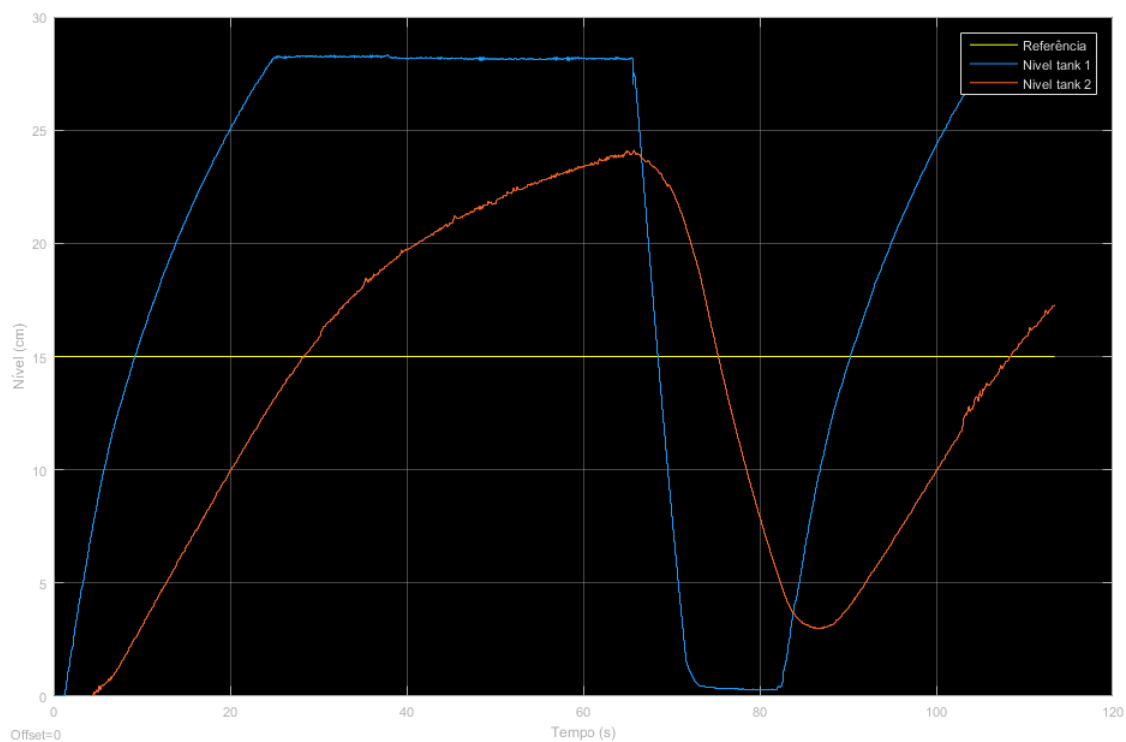
Para o controlador com polos em $P_1 = 1.5 + 0.3i, P_2 = 1.5 - 0.3i, P_3 = 5$ obtivemos os seguintes resultados para a saída do controlador e o nível das plantas.

Figura 14: Sinal de Controle $P_1 = 1.5 + 0.3i, P_2 = 1.5 - 0.3i, P_3 = 5$



Fonte: Autores.

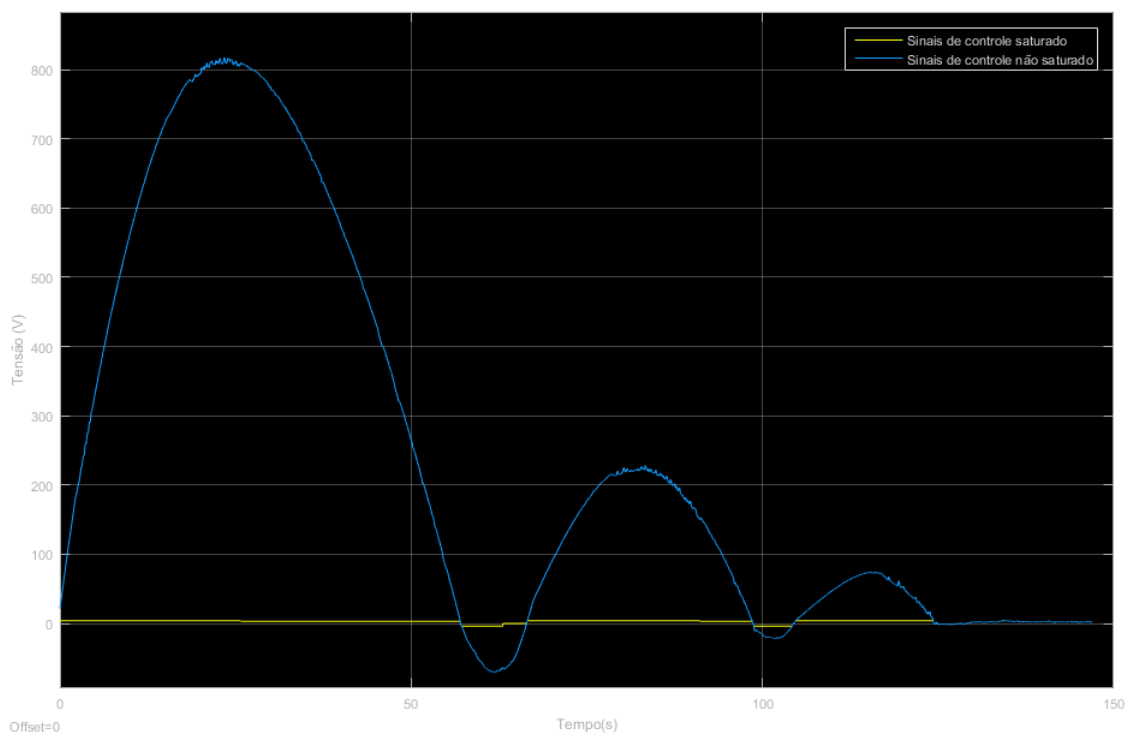
Figura 15: Saída dos tanques $P_1 = 1.5 + 0.3i, P_2 = 1.5 - 0.3i, P_3 = 5$



Fonte: Autores.

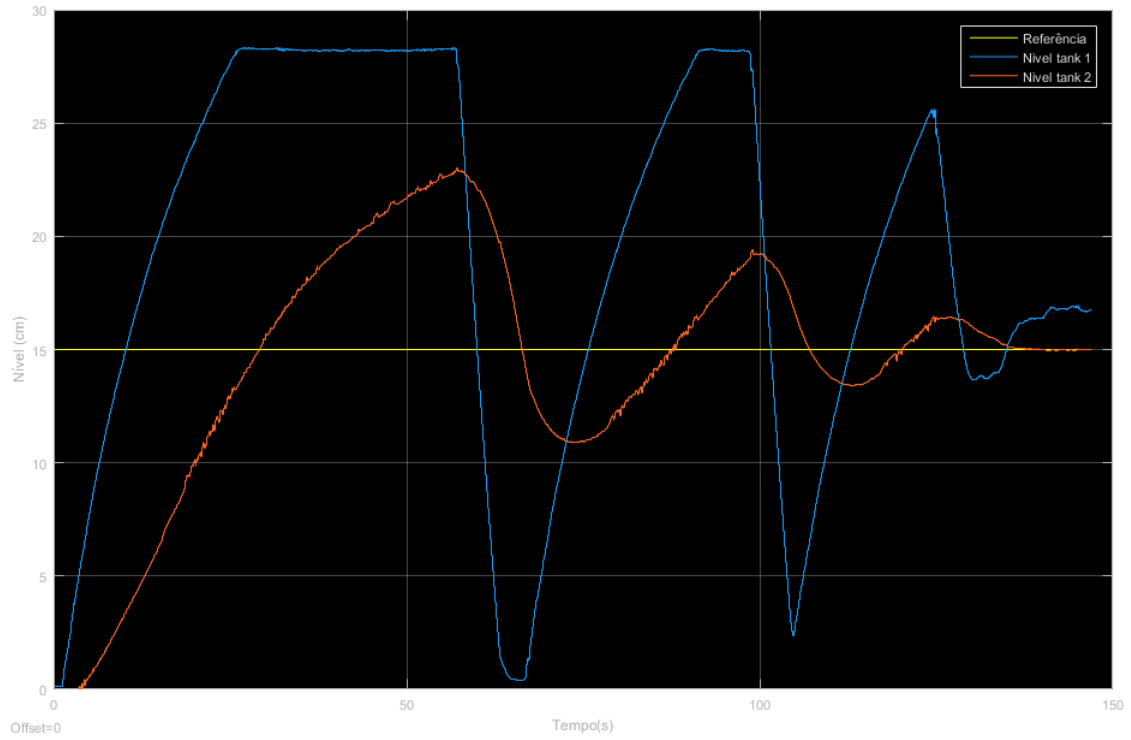
Para o controlador com polos em $P_1 = 1.0, P_2 = 2.0, P_3 = 0.6$ obtivemos os seguintes resultados para a saída do controlador e o nível das plantas.

Figura 16: Sinal de Controle $P_1 = 1.0, P_2 = 2.0, P_3 = 0.6$



Fonte: Autores.

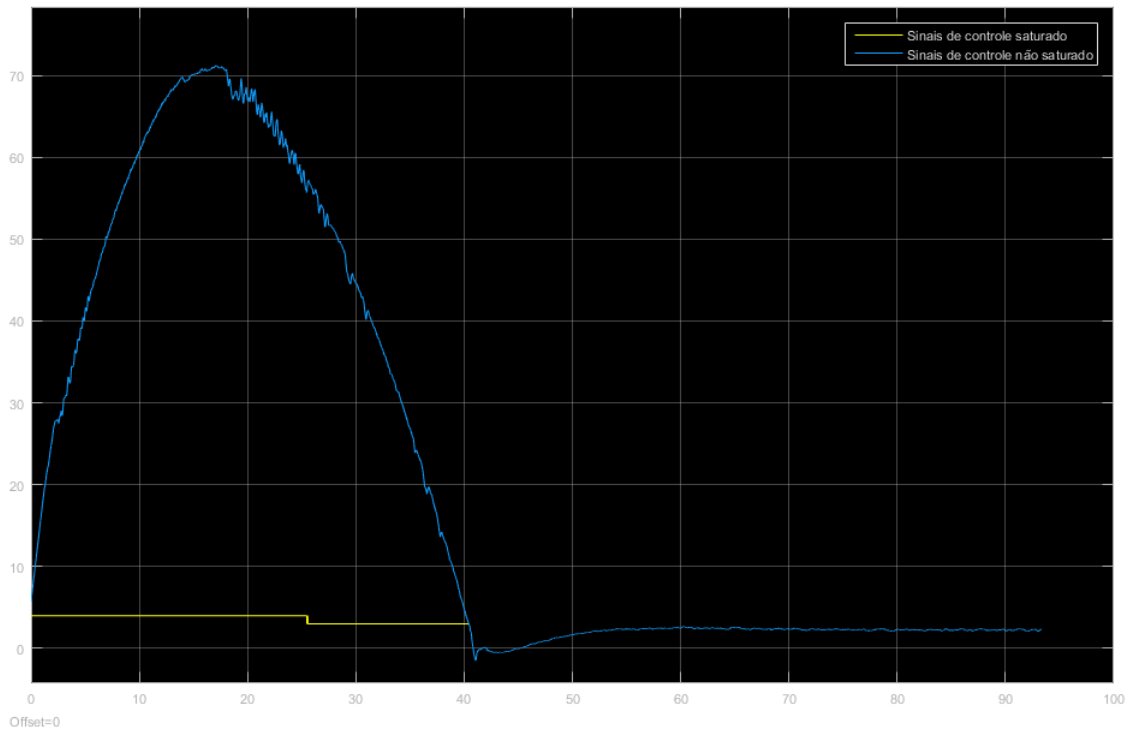
Figura 17: Saída dos tanques $P_1 = 1.0, P_2 = 2.0, P_3 = 0.6$



Fonte: Autores.

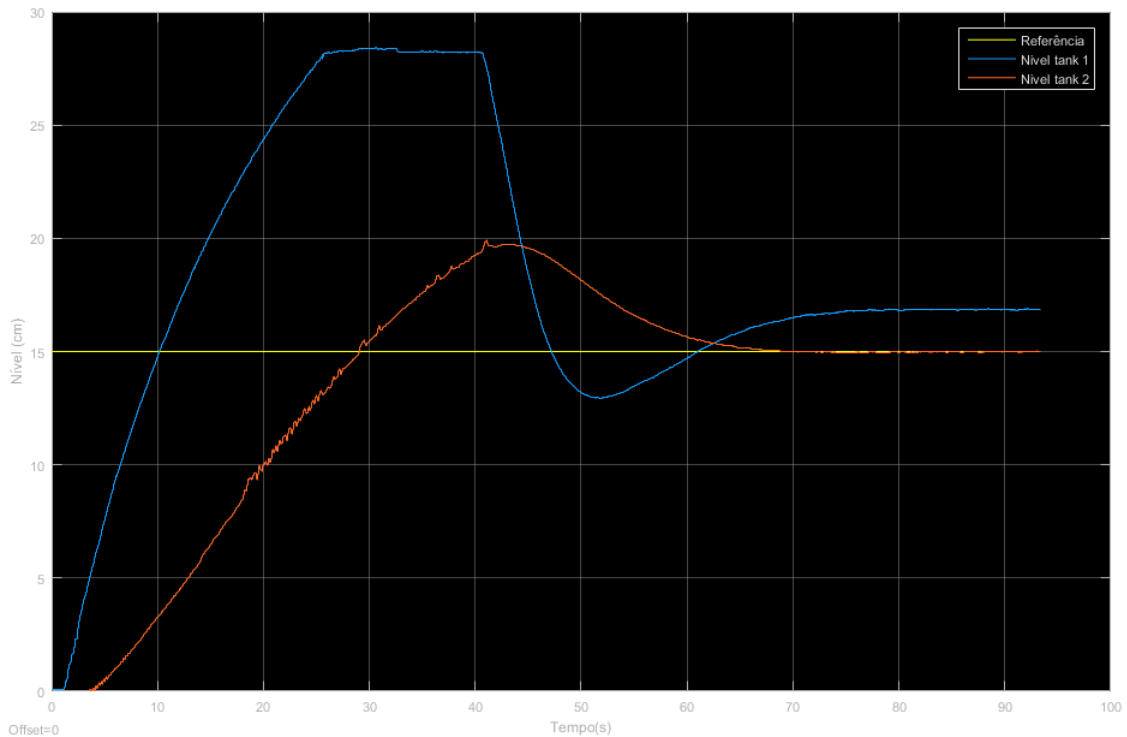
Para o controlador com polos em $P_1 = 0.18, P_2 = 0.30, P_3 = 0.60$ obtivemos os seguintes resultados para a saída do controlador e o nível das plantas.

Figura 18: Sinal de Controle $P_1 = 0.18, P_2 = 0.30, P_3 = 0.60$



Fonte: Autores.

Figura 19: Saída dos tanques $P_1 = 0.18, P_2 = 0.30, P_3 = 0.60$



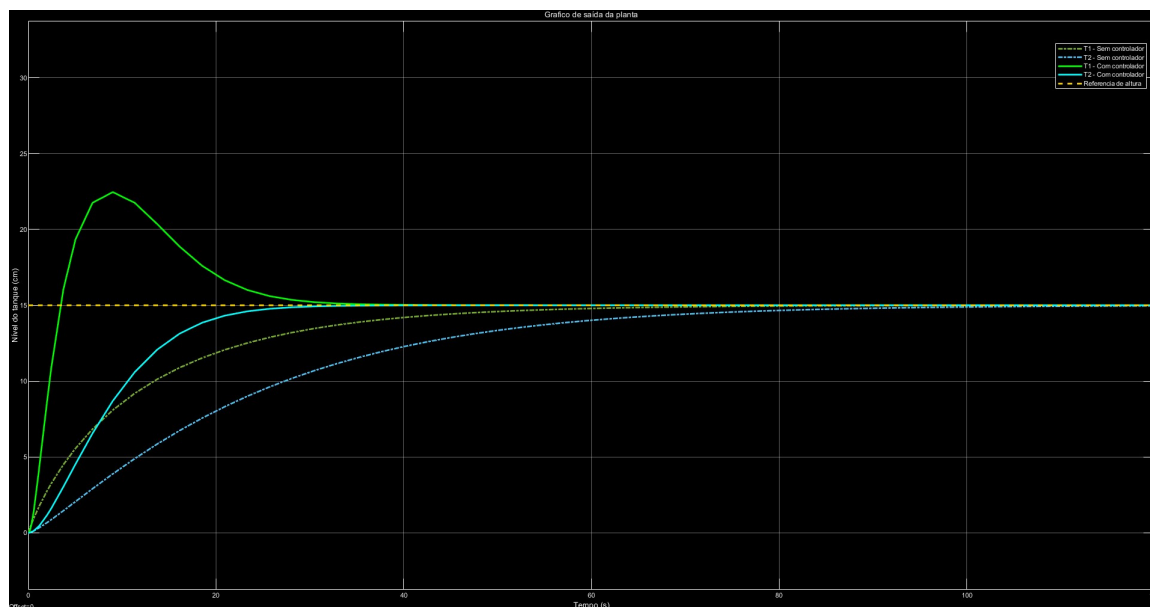
Fonte: Autores.

A respeito do tanque 1, observou-se que ele apresentou um *Overshoot* em todos os casos, o *Overshoot* é de extrema importância para tornar o sistema mais rápido, após isso em alguns casos ele segue a referência de altura (15 cm) e em outros casos ele demora mais para conseguir atingir a mesma referência.

É notório também que ao afastar o terceiro polo dos demais deixamos o sistema mais rápido, porém isso não quer dizer que o sistema se torna melhor, como podemos ver na comparação entre as Figuras 13 e 15, onde o controlador da Figura 13 obteve um melhor desempenho.

No geral faz-se necessário entender que a aplicação de polos para essa planta é vasta, tanto como polos reais como imaginários. Porém a melhor resposta obtida para essa planta foi a da Figura 11, pois apresentou melhor desempenho e estabilizou corretamente. Nessa mesma Figura o tanque 1 apresenta um valor acima do nível solicitado, mas isso se dá devido à alteração de leitura do sensor, que possivelmente não estava muito bem calibrado. Fizemos essa mesma simulação em um ambiente puramente virtual e obtivemos a resposta da Figura 20.

Figura 20: Saída dos tanques em ambiente puramente virtual

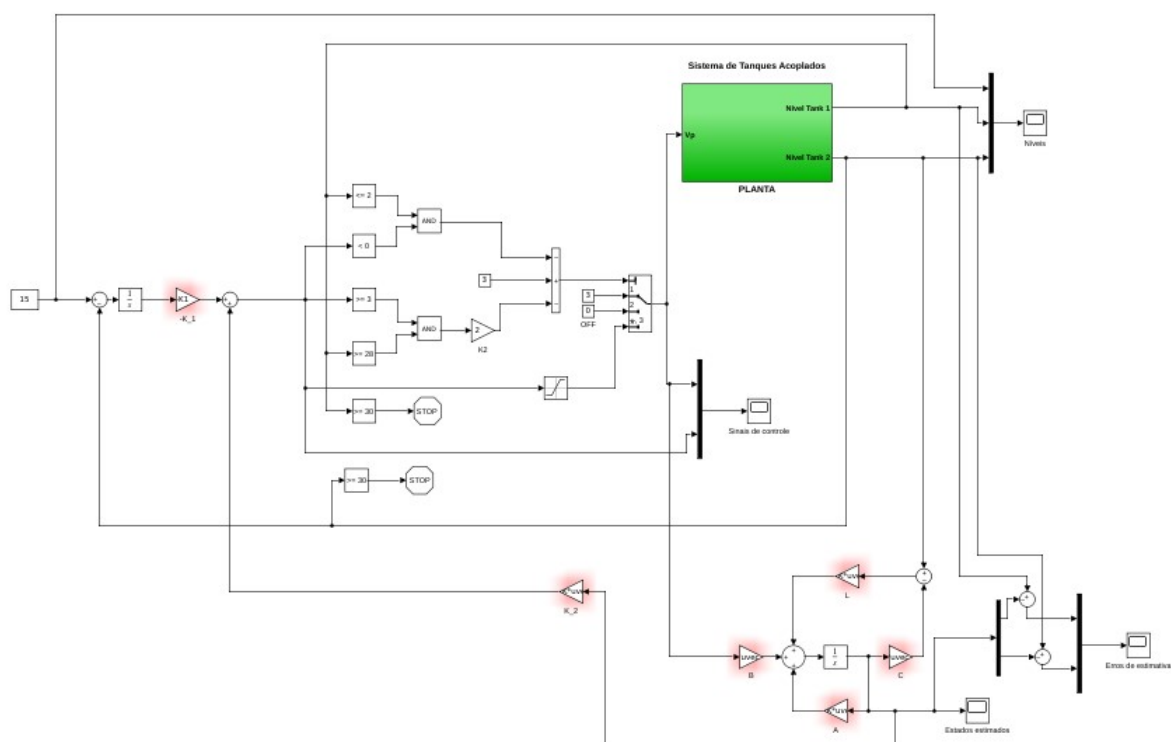


Fonte: Autores.

4.3 Terceira Simulação: Seguidores de Referência com Estados Estimados

A implementação do seguidor de referencia com estados estimados, foi feita utilizando a implementação do observador de estados junto com o seguidor de referencia. A Figura 21 mostra o diagrama de blocos no simulink.

Figura 21: Saída dos tanques em ambiente puramente virtual

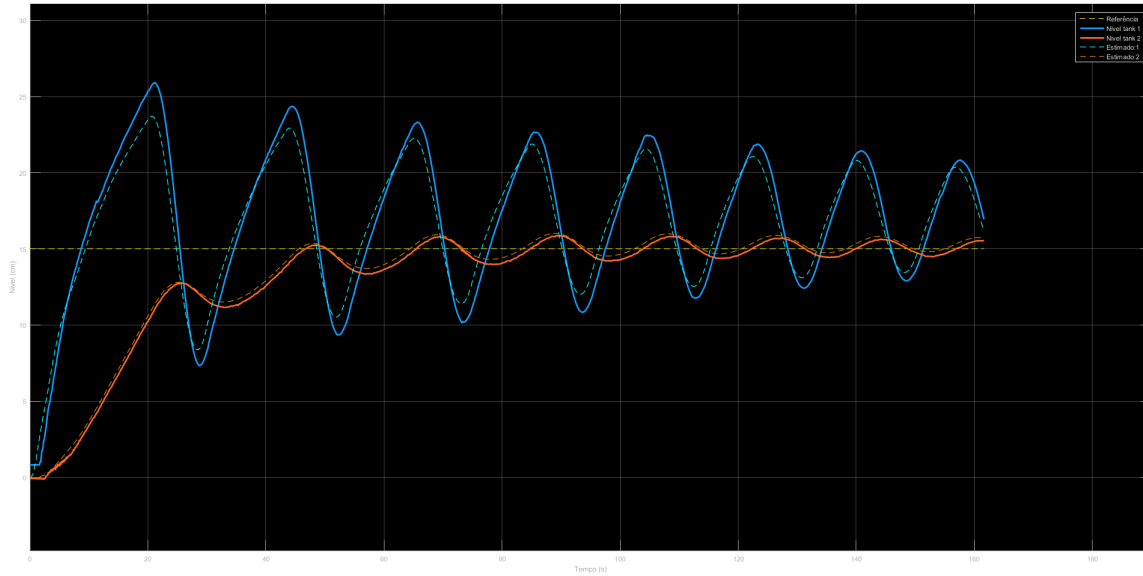


Fonte: Autores.

As respostas dos níveis dos tanques 1 e 2 estão representados em figuras a seguir. Cada figura possui valores de polos diferentes, tanto dos polos da parte do observador, quanto os polos do seguidor de referência.

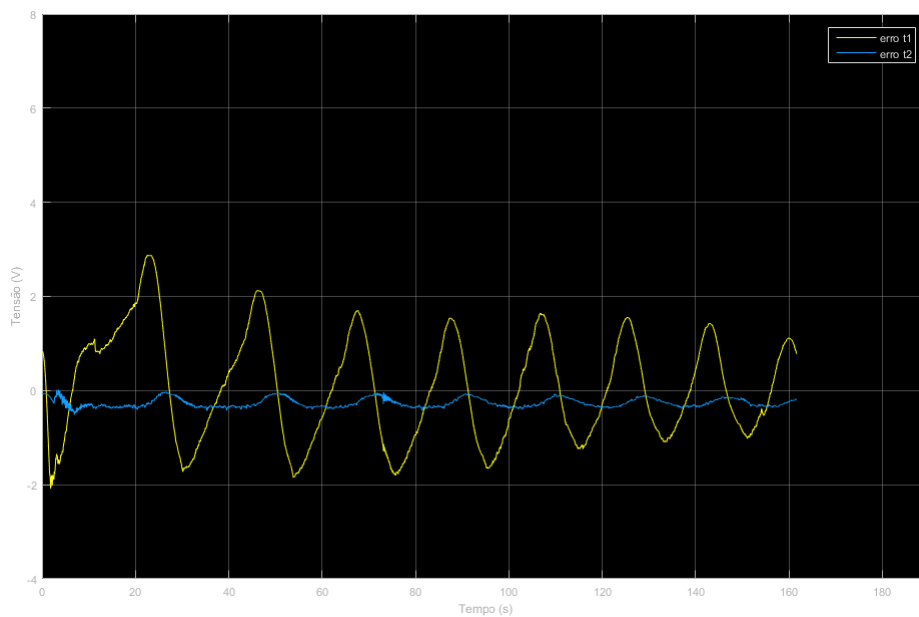
Começando com os polos do seguidor com três reais, sendo dois deles iguais ($P_1 = P_2 = -0.18, P_3 = -0.72$). E no observador foram utilizado polos complexos conjugados ($P_{1o} = -0.3 + 0.3i, P_{1o} = -0.3 - 0.3i$). O resultado é ilustrado nas Figuras 22 e 23.

Figura 22: Saída dos tanques-Polos do seguidor $P_1 = P_2 = -0.18, P_3 = -0.72$, Polos do observador $P_{1o} = -0.3 + 0.3i, P_{1o} = -0.3 - 0.3i$



Fonte: Autores.

Figura 23: Saída do controlador-Polos do seguidor $P_1 = P_2 = -0.18, P_3 = -0.72$, Polos do observador $P_{1o} = -0.3 + 0.3i, P_{1o} = -0.3 - 0.3i$

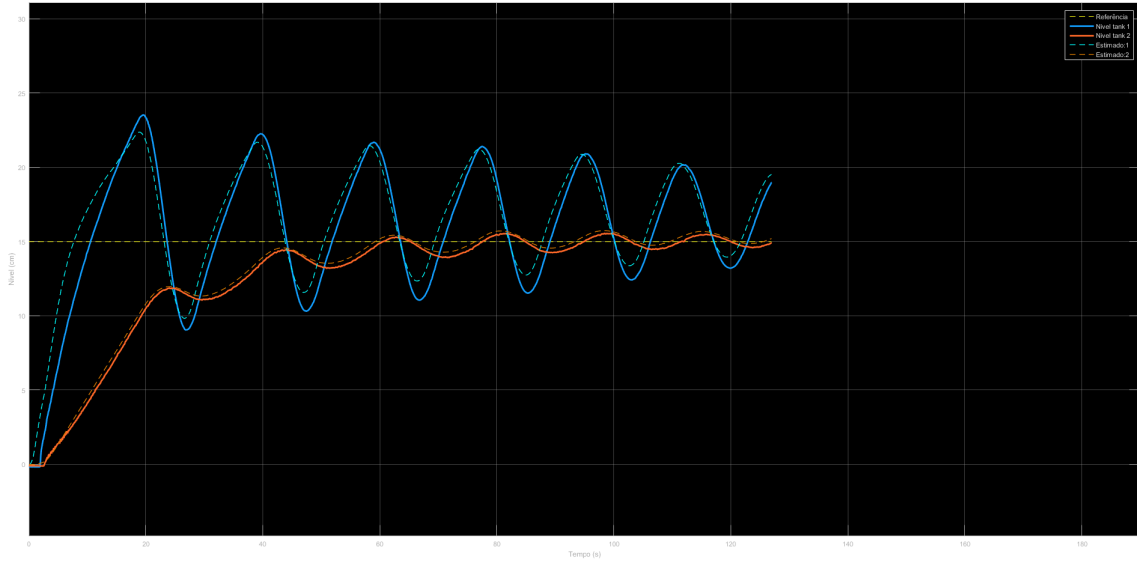


Fonte: Autores.

Também foram analisados os polos do seguidor com complexos conjugados e um polo real

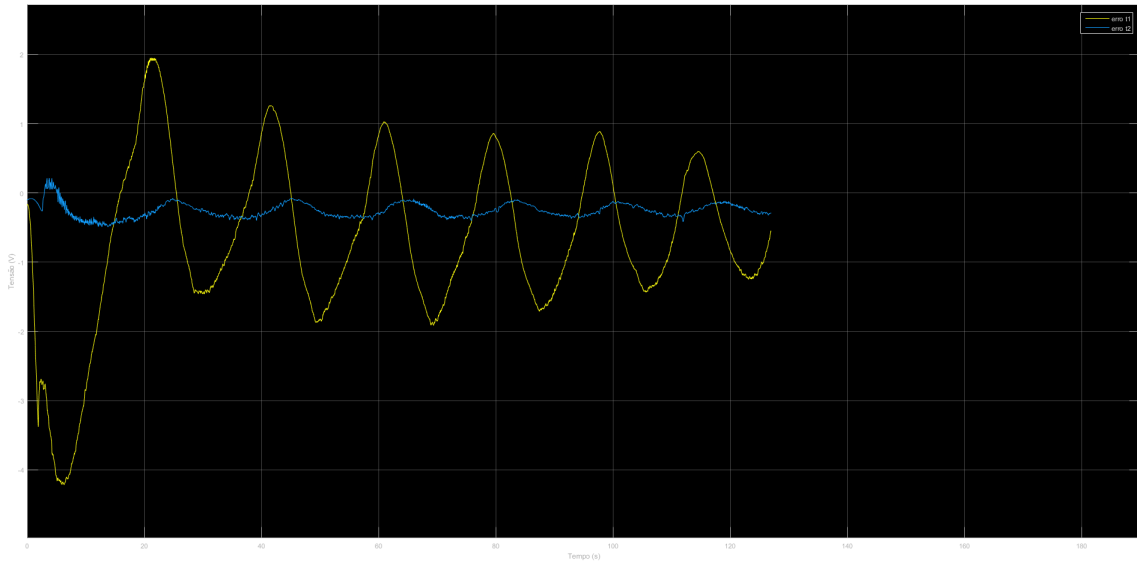
($P_1 = -1.5 + 0.3i, P_2 = -1.5 - 0.3i, P_3 = -0.05$). E no observador, polos complexos conjugados ($P_{1o} = -0.3 + 0.3i, P_{1o} = -0.3 - 0.3i$). Resultando nas Figuras 24 e 25.

Figura 24: Saída dos tanques-Polos do seguidor $P_1 = -1.5 + 0.3i, P_2 = -1.5 - 0.3i, P_3 = -0.05$, Polos do observador $P_{1o} = -0.3 + 0.3i, P_{1o} = -0.3 - 0.3i$



Fonte: Autores.

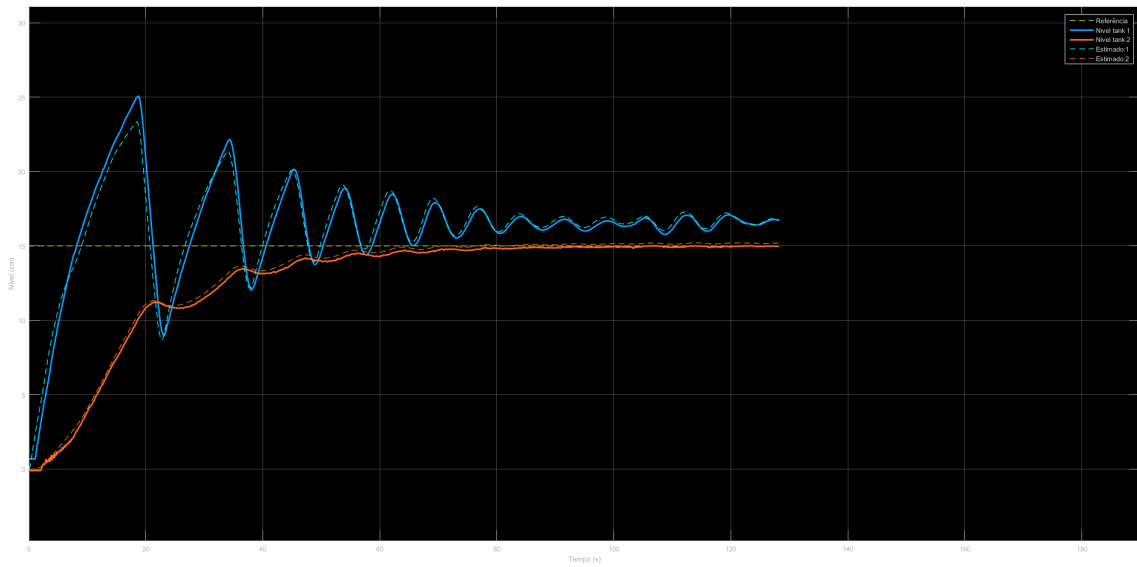
Figura 25: Saída do controlador-Polos do seguidor $P_1 = -1.5 + 0.3i, P_2 = -1.5 - 0.3i, P_3 = -0.05$, Polos do observador $P_{1o} = -0.3 + 0.3i, P_{1o} = -0.3 - 0.3i$



Fonte: Autores.

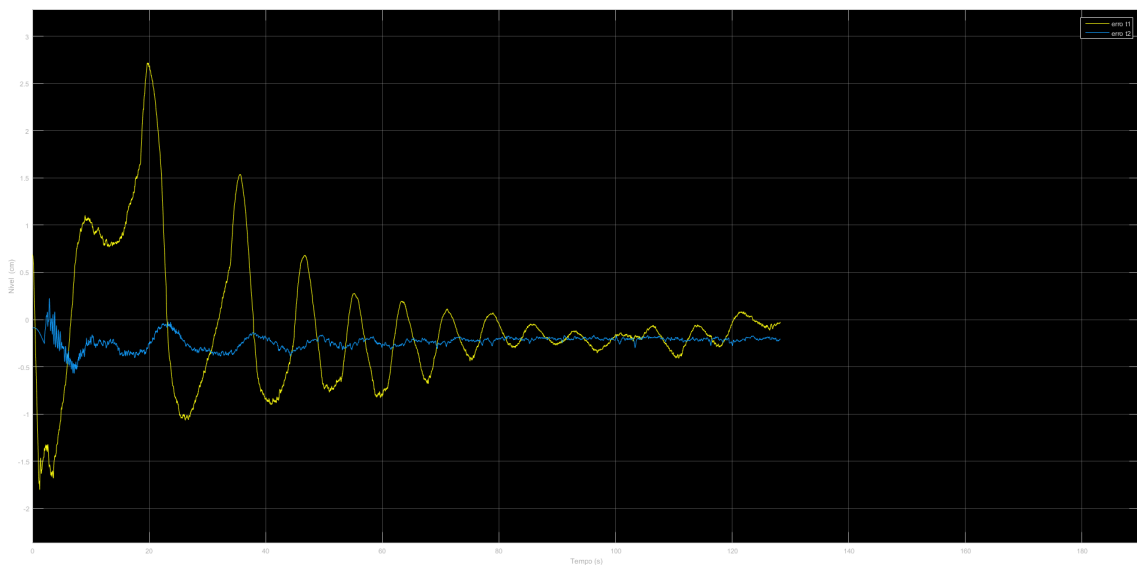
Para o polos do seguidor com complexos conjugados com ajustes e um real ($P_1 = -3 + 0.3i, P_2 = -3 - 0.3i, P_3 = -0.05$). E no observador, polos complexos conjugados ($P_{1o} = -0.3 + 0.3i, P_{1o} = -0.3 - 0.3i$). O resultado foi ilustrado nas Figuras 26 e 27.

Figura 26: Saída dos tanques-Polos do seguidor $P_1 = -3 + 0.3i, P_2 = -3 - 0.3i, P_3 = -0.05$, Polos do observador $P_{1o} = -0.3 + 0.3i, P_{1o} = -0.3 - 0.3i$



Fonte: Autores.

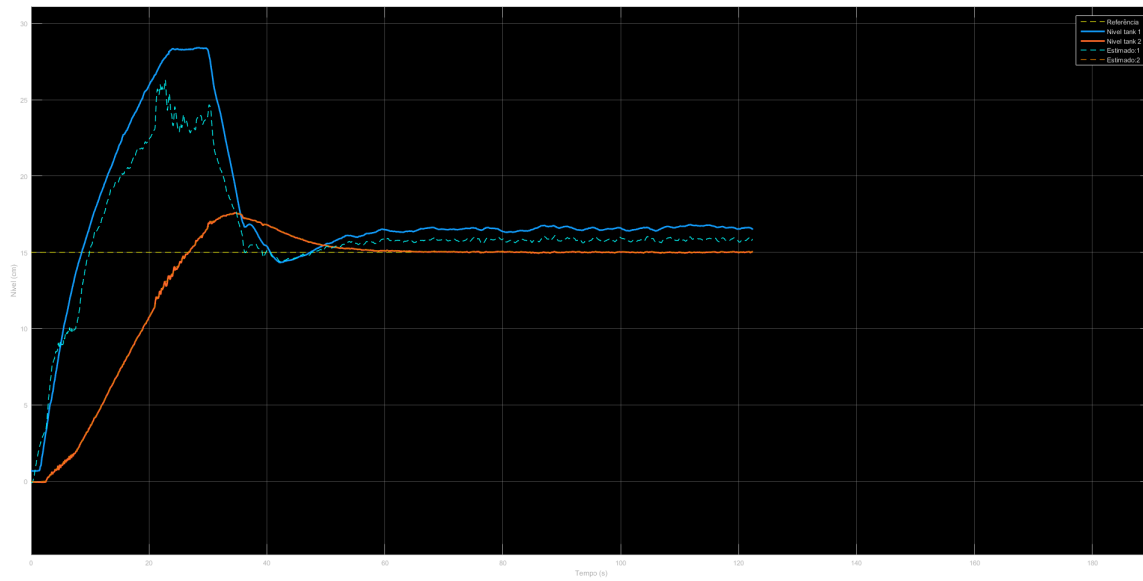
Figura 27: Saída do controlador-Polos do seguidor $P_1 = -3 + 0.3i, P_2 = -3 - 0.3i, P_3 = -0.05$, Polos do observador $P_{1o} = -0.3 + 0.3i, P_{1o} = -0.3 - 0.3i$



Fonte: Autores.

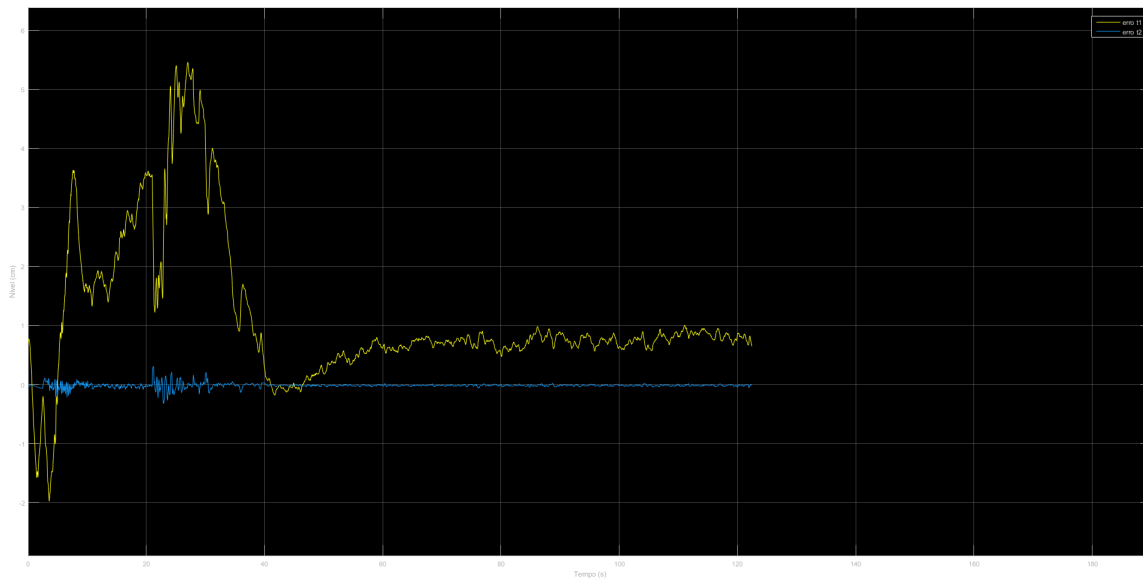
Nos polos do seguidor com três reais, sendo dois deles iguais ($P_1 = P_2 = -0.18, P_3 = 0.72$). E no observador polos reais ($P_{1o} = -1, P_{1o} = -2$). O resultado é ilustrado nas Figuras 28 e 29.

Figura 28: Saída dos tanques-Polos do seguidor $P_1 = P_2 = -0.18, P_3 = 0.72$, Polos do observador $P_{1o} = -1, P_{1o} = -2$



Fonte: Autores.

Figura 29: Saída do controlador-Polos do seguidor $P_1 = P_2 = -0.18, P_3 = -0.72$, Polos do observador $P_{1o} = -1, P_{1o} = -2$



Fonte: Autores.

É notório que o melhor resultado obtido, foi com todos os polos reais. As Figuras 28 e 29, mostram um sistema estável, sem oscilação, além disso, o nível estimado no observador do tanque 2, está exatamente igual ao valor real do nível do tanque 2.

Outro ponto importante é que os melhores resultados obtidos, nesse experimento, foram utilizando os melhores polos encontrados nas simulações do seguidor de referência e do observador de estados separados.

5 CONCLUSÃO

No presente relatório, foi feito um estudo sobre o controle de sistemas dinâmicos através da simulação e análise dos Tanques Acoplados Quanser.

O entendimento dos conceitos de equações de estados, estabilidade, controlabilidade e observabilidade, foi possível desenvolver o observador de estados. Ampliando o conceito de equação de estados com o uso do erro derivado, teve-se como resultado a matriz expandida dos estados e com essa matriz foi possível desenvolver o seguidores de referência para entradas do tipo degrau.

Os testes do observador e seguidor de referencia foram satisfatórios com os valores do regime transitório e permanente estáveis, ou seja, não oscilatório. Para obter esses resultados, foram usados todos os polos reais.

Na implementação do roteiro C, foi utilizado os melhores polos encontrados no roteiro A e B, e com esses polos obteve-se a melhor resposta do sistema seguidor de referencia com estados estimado.

Referências

- ADNORMAS. **A Qualidade dos dispositivos de intertravamento para a segurança em máquinas.** 2021. Acessado em: 26 jun. 2022. Disponível em: <<https://revistaadnormas.com.br/2021/04/13/a-qualidade-dos-dispositivos-de-intertravamento-para-a-seguranca-em-maquinas>>.
- ARAÚJO, F. M. U. de. **SISTEMAS DE CONTROLE I.** [S.l.: s.n.], 2003.
- _____. **SISTEMAS DE CONTROLE.** [S.l.]: CENTRO DE TECNOLOGIA, DEPTº. DE ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO E AUTOMAÇÃO, 2007.
- CABRAL, E. L. **Controlabilidade e Observabilidade.** [S.l.]: Universidade de São Paulo, 2015.
- CHORLEY RICHARD; HAGGETT, P. **Integrated Models in Geography (Routledge Revivals).** [S.l.]: Routledge, 2013.
- CHRISTOFOLETTI, A. **Modelagem de sistemas ambientais.** [S.l.]: Blucher, 1999.
- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. **Sistemas de Controle Modernos.** [S.l.]: LTC, 2001.
- PET. **Apostila de Matlab.** [S.l.]: Programa de Educação Tutorial, 2014.
- QUANSER. **Homepage.** 2022. Acessado em: 8 mai. 2022. Disponível em: <<https://www.embarcados.com.br/controlador-proporcional/>>.
- SHINNERS, S. M. **Modern Control System Theory and Design.** [S.l.]: Wiley-Interscience, 1998. v. 2.