



ROTEIRO DE LABORATÓRIO

1. Código da Experiência: 03A
2. Título: Controle no Espaço de Estados: Observadores de Estado
3. Objetivos: Esta prática tem como objetivos:
 - Introdução do conceito de espaço de estados;
 - Conceituação de observadores de estado;
 - Projeto e implementação de observadores de estados.
4. Equipamento Utilizado: São necessários para realização desta experiência:
 - Um microcomputador PC com um os softwares necessários (Windows, MATLAB/SIMULINK, compilador C, QUARC);
 - Uma placa de aquisição de dados Q8-USB da Quanser;
 - Um módulo de potência VoltPAQ-X1;
 - Um sistema de tanques acoplados da Quanser;
5. Introdução:

5.1. *Descrição Por Variáveis de Estado*

É aplicável a sistemas de múltiplas entradas e múltiplas saídas, que podem ser lineares ou não-lineares, invariantes ou variantes no tempo e com condições iniciais não-nulas.

O estado de um sistema no instante t_0 é a quantidade de informação em t_0 que, junto com a entrada $u(t)$ em $t \geq t_0$, determina univocamente o comportamento do sistema para todo $t \geq t_0$.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$$

Equação de Estado (dinâmica do sistema)

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t)$$

Equação de Saída (observação do sistema)

(1)

- $\mathbf{x}(t)$ → Vetor de estado;
 $x_i(t)$ → Variável de estado;
 $u(t)$ → Vetor de entrada;
 $y(t)$ → Vetor de saída;

5.1.1. Estabilidade

- **Teorema:** Um sistema é estável se quando $u(t) = 0$, para todo $x(0)$, temos que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \mathbf{0}$
- **Corolário:** Um sistema é estável se todos os autovalores da matriz \mathbf{A} apresentam parte real negativa.

5.1.2. Controlabilidade

- **Definição:** O sistema (A,B,C,D) é controlável se, quaisquer que sejam $x(0)$ e $x(T)$, existe $u(t)$ $0 \leq t \leq T$ que transfere o estado $x(0)$ para o estado $x(T)$ em um tempo finito.

- **Teorema:** O sistema (A,B,C,D) é controlável se, e somente se, o posto da matriz de controlabilidade $U = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$ é igual a ordem do sistema ($\rho(U) = n$).

5.1.3. Observabilidade

- **Definição:** O sistema (A,B,C,D) é observável se para todo $x(0)$, o conhecimento da entrada $u(t)$ e da saída $y(t)$ em um tempo finito é suficiente para determinar $x(t)$.

- **Teorema:** O sistema (A,B,C,D) é observável se e somente se o posto da matriz de observabilidade $V = [C \ CA \ CA^2 \ \dots \ CA^{n-1}]^T$ é igual a ordem do sistema ($\rho(V) = n$).

5.2. Observadores de Estado

O observador de estados consiste em um mecanismo (algoritmo) para estimação dos estados da planta. É uma solução útil quando os estados reais da planta não estão acessíveis, situação muito comum na prática.

Seja: $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bu}(t) \\ y(t) = \mathbf{Cx}(t) \end{cases}$, conhecendo-se \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} , e a medição de $y(t)$ e $u(t)$, constrói-se o

estimador:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{L}(y(t) - \hat{y}(t)) + \mathbf{Bu}(t) \\ \hat{y}(t) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t) \end{cases}; \quad (\text{Estimador Assintótico})$$

onde: $\mathbf{L} = [l_1 \ l_2 \ \dots \ l_n]^T$

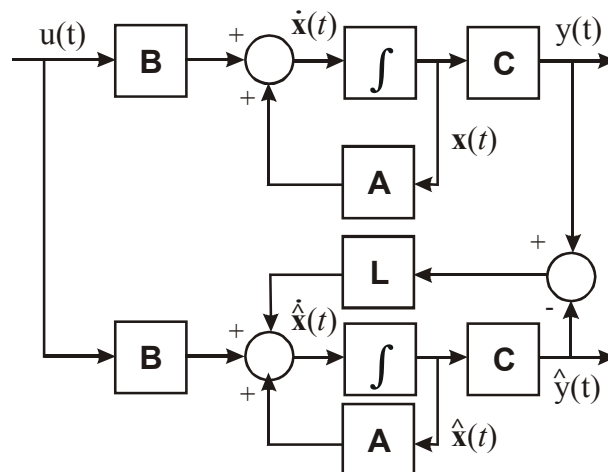


Figura 1. Diagrama esquemático de um observador de estados.

• Erro de Estimação

O erro entre \mathbf{x} e $\hat{\mathbf{x}}$, conhecido como erro de estimação (ou erro de observação), é dado por; $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$, derivando-se, temos:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) &= \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = [\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)] - [\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{L}(y(t) - \hat{y}(t)) + \mathbf{B}u(t)] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)) - \mathbf{L}\mathbf{C}(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t))\end{aligned}$$

ou, simplesmente:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}}(t)$$

Para que $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{0}$ é necessário que os autovalores de $(\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})$ sejam estáveis, ou seja, tenham parte real negativa.

Teorema: Se $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ for observável, então um estimador de estado assintótico com quaisquer autovalores pode ser construído.

- Fórmula de Ackermann para Determinação da Matriz de Ganhos do Observador \mathbf{L}

1- Formar $\Delta(s) = s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n$ com os pólos desejados para o observador.

2- Calcular \mathbf{L} da seguinte forma: $\mathbf{L} = \mathbf{q}_L(\mathbf{A})\mathbf{V}^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}^T$

onde:
$$\begin{cases} \mathbf{V} = [\mathbf{C} & \mathbf{C}\mathbf{A} & \mathbf{C}\mathbf{A}^2 & \dots & \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1}]^T \\ \mathbf{q}_L(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + a_1\mathbf{A}^{n-1} + \dots + a_n\mathbf{I} \end{cases}$$

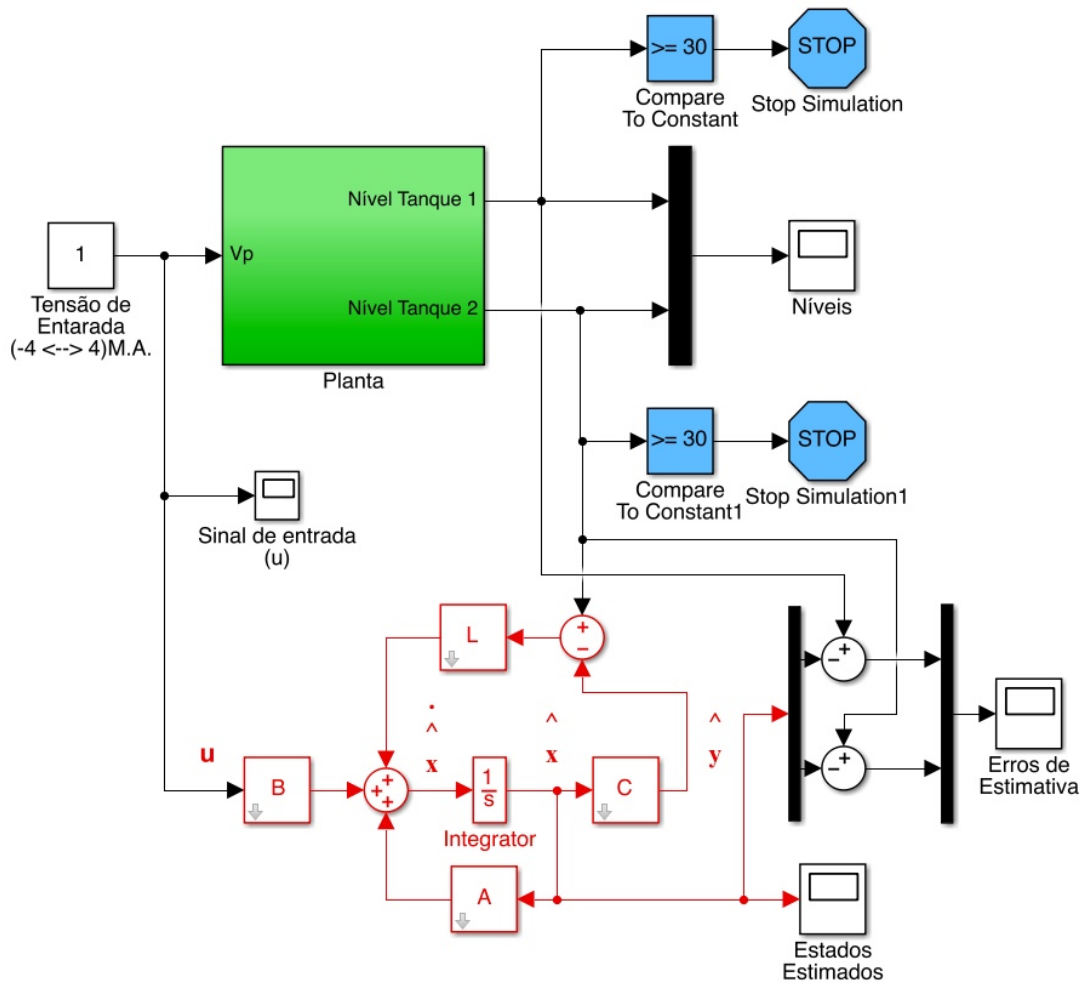


Figura 2. Observador de Estados para o Sistemas de Tanques Implementado em SIMULINK/MATLAB.

6. Desenvolvimento:

Conhecendo-se as EDOs que descrevem as dinâmicas dos tanques 1 e 2 (configuração #2):

$$\dot{L}_1 = -\frac{a_1}{A_1} \sqrt{\frac{g}{2L_{10}}} L_1 + \frac{K_m}{A_1} V_P \quad \text{e} \quad \dot{L}_2 = -\frac{a_2}{A_2} \sqrt{\frac{g}{2L_{20}}} L_2 + \frac{a_1}{A_2} \sqrt{\frac{g}{2L_{10}}} L_1,$$

onde:

- $A_1 = A_2 = 15,5179$;
- $L_{20} = 15$; $L_{10} = \frac{a_2^2}{a_1^2} L_{20}$;
- $a_1 = 0,17813919765$; $a_2 = a_1$; (Orifício médio)
- K_m = valor encontrado em experimentos anteriores ($\approx 11,00$).

Pede-se:

- 1º. Encontre uma representação em espaço de estados onde L_1 e L_2 sejam os estados do modelo;
- 2º. Projete um observador de estados com base no modelo obtido (A escolha dos polos do observador faz parte do projeto, e deve ficar clara no relatório).
- 3º. Examine e descreva em seu relatório o comportamento do observador para diferentes conjuntos de polos: