



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO E AUTOMAÇÃO
CURSO DE ENGENHARIA MECATRÔNICA

**CONTROLADOR DO TIPO SEGUIDOR DE REFERÊNCIA PARA UM
SISTEMA DE TANQUES ACOPLADOS**

ANA BEATRIZ MARINHO NEVES: 20200150177

JOÃO MATHEUS BERNARDO RESENDE: 20210072270

LUCAS BATISTA DA FONSECA: 20210072299

STHEFANIA FERNANDES SILVA: 20210072430

Natal-RN
2022

ANA BEATRIZ MARINHO NEVES: 20200150177

JOÃO MATHEUS BERNARDO RESENDE: 20210072270

LUCAS BATISTA DA FONSECA: 20210072299

STHEFANIA FERNANDES SILVA: 20210072430

CONTROLADOR DO TIPO SEGUIDOR DE REFERÊNCIA PARA UM SISTEMA DE TANQUES ACOPLADOS

Primeiro Relatório Parcial apresentado à disciplina de Laboratório de Sistemas de Controle, correspondente à avaliação complementar da 3ª unidade do semestre 2022.1 do 7º período do curso de Engenharia Mecatrônica na Universidade Federal do Rio Grande do Norte, sob orientação do **Prof. Dr. Anderson Cavalcanti**.

Professor: Anderson Cavalcanti.

Natal-RN
2022

Lista de Figuras

1	Diagrama de blocos no Simulink do sistema.	15
2	Comportamento dos níveis com e sem controlador.	16
3	Sinal de controle.	16

Sumário

1	INTRODUÇÃO	5
2	REFERENCIAL TEÓRICO	6
2.1	Seguidor de Referência	6
2.2	Linearização	7
2.3	Observabilidade e Controlabilidade	8
2.3.1	Controlabilidade	8
2.3.2	Observabilidade	8
2.4	Função de Ackermann	9
3	METODOLOGIA	11
3.1	Ferramentas de Simulação	11
3.1.1	MATLAB/Simulink	11
3.2	Problema	11
4	RESULTADOS	12
4.1	Linearização	12
4.2	Controlador Seguidor de Referência	13
4.2.1	Aplicação da Fórmula de Ackermann	14
4.3	Simulação	15
5	CONCLUSÃO	17

1 INTRODUÇÃO

O objetivo de um projeto de engenharia de controle é encontrar as configurações, especificações e identificar os parâmetros chave do sistema proposto para atender uma necessidade pontual. Um importante aliado do engenheiro projetista são os modelos computacionais que permitem visualizar o comportamento do sistema, sem necessariamente construí-lo (DORF; BISHOP, 2001).

Assim, a simulação computacional fará o uso de um modelo com as condições e as entradas reais em que o sistema será submetido. Com um modelo e simulação fundamentalmente exatos pode-se observar o desempenho do sistema sob todas as condições possíveis, extrapolar resultados para prever algum comportamento, dentre outras vantagens (DORF; BISHOP, 2001).

Nesse contexto, este artigo tem como objetivo projetar um sistema de controle que regula o nível de água até o valor de referência desejado, utilizando um seguidor de referências. Para entender o impacto do seguidor de referências são feitas comparações do sistema com e sem o controlador.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Nesse t3pico apresentamos o embasamento te3rico no qual este trabalho se fundamenta.

2.1 Seguidor de Refer3ncia

Os controladores reguladores s3o capazes de rejeitar dist3rbio, mas em geral, s3o ruins para seguir trajet3rias ou sinais de refer3ncia na entrada. Para adicionar esta caracter3stica ao controlador 3 preciso modificar a lei de controle. Para que um sistema descrito por vari3veis de estado possa, al3m de possuir a din3mica desejada, seguir uma determinada entrada, com erro zero, usamos o princ3pio do modelo interno (ARA3JO, 2003).

Definindo o erro de rastreamento como a equa33o 1, em seguida para obter as caracter3sticas do sinal de referencia 3 feita a derivada do erro como 3 mostrado da Equa33o 2. Dessa forma, s3o obtidas novas vari3veis de estados, na forma matricial temos a matriz de estados expandida escrita na Equa33o 4.

$$e(t) = y(t) - r(t) \quad (1)$$

$$\dot{e}(t) = \dot{y}(t) - \dot{r}(t) \dot{y}(t) = \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) \quad (2)$$

$$\begin{cases} \mathbf{z} = \dot{\mathbf{x}}, \\ w = \dot{u} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} w \quad (4)$$

onde:

$$\begin{aligned} A_a &= \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Matriz aumentada de A} \\ B_a &= \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Matriz aumentada de B} \end{aligned} \quad (5)$$

Para que o rastreamento assint3tico com erro em regime nulo seja alcan3ado 3 necess3rio que os polos do sistema aumentado sejam alocados na regi3o de estabilidade. Ou seja, seguindo nessa condi33o, a resposta do sistema assintoticamente est3vel 3 definido de acordo com a Equa33o 6 (ARA3JO, 2003).

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{x}_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{k}_2 & \mathbf{B}\mathbf{k}_1 \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_{n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -1 \end{bmatrix} r \quad (6)$$

2.2 Linearização

Lidar com sistemas lineares é muito mais simples e fácil do que sistemas não-lineares devido a uma principal razão: sistemas lineares são aplicáveis o Princípio da Superposição. Isso implica que, em qualquer sistema multivariável linear, pode-se analisar individualmente efeito de cada variável de entrada na saída e depois sobrepor esses efeitos (TOGNETTI E.S; FIORILLO, 2015).

Existem muitas ferramentas aplicáveis na análise e projeto de sistemas lineares, tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência como: o critério de Routh (empregado na análise de estabilidade de sistemas em tempo contínuo discreto); o critério de Jury (aplicado na análise de estabilidade de sistemas e tempo discreto); o Lugar Geométrico das Raízes (LGR) (aplicado na análise de estabilidade e no projeto de controladores, tanto no domínio do tempo contínuo quanto no discreto) e os diagramas de Bode e Nyquist (usados na análise de estabilidade e projeto de controladores no domínio da frequência) (TOGNETTI E.S; FIORILLO, 2015).

Grande parte das teorias de projetos de sistemas de controle foram desenvolvidas para sistemas lineares, porém praticamente todos os sistemas reais são não-lineares. Os projetos de controladores para sistemas não-lineares são complexos e só garantem estabilidade mas não desempenho, todavia, o controle linear funciona bem para sistemas não-lineares e quando não apresentam bons resultados tem-se a alternativa de usar programação de ganhos ou controle adaptativo.

Por conta disso, a linearização das equações é importante pois ao serem linearizadas em torno de uma condição estacionária as equações são capazes de descrever adequadamente a resposta dinâmica do sistema na região entorno da condição estacionária.

Em uma linearização de sistema multivariáveis, onde o sistema não linear é:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), y(t)) \quad (7)$$

Deseja-se linearizar (7) em torno do ponto de operação em regime permanente $s = (x(0), y(0)) = (\bar{x}, \bar{y})$. Em estado estacionário.

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \quad (8)$$

Linearizando em torno de s , ou seja, expandindo (7) em série de Taylor e desprezando os termos de ordem maior ou igual a dois, tem-se:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), y(t)) \approx f(\bar{x}, \bar{y}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_s * (x(t) - \bar{x}) + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_s * (y(t) - \bar{y}) \quad (9)$$

Definindo as variáveis de desvio:

$$\tilde{x}(t) = x(t) - \bar{x}, \quad \tilde{y}(t) = y(t) - \bar{y} \quad (10)$$

e subtraindo (8) por (9), obtém-se:

$$\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = c_x \tilde{x}(t) + c_y \tilde{y}(t) \quad (11)$$

Em que:

$$c_x = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_s, \quad c_y = \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_s \quad \text{e} \quad \frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = \frac{d(x) - \bar{x}}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}$$

2.3 Observabilidade e Controlabilidade

Em um sistema na forma do espaço de estados podem existir dinâmicas que não são vistas pelas saídas do sistema ou não são influenciadas pelas entradas do sistema. Se pensarmos em termos de função transferência fica fácil entender que um cancelamento de um pólo com um zero implica que alguma dinâmica no sistema deixa de ser vista pela saída e nem pode ser alterada pela entrada. Dinâmicas "escondidas" são causadas por cancelamento de pólos e zeros, essas dinâmicas geram perda de controlabilidade e/ou observabilidade (CABRAL, 2015).

Para podermos controlar um sistema ele deve ser controlável e observável e existem testes que verificam isso.

2.3.1 Controlabilidade

Um sistema linear invariante no tempo (LIT) é controlável se existir um vetor de entrada $u(t)$ para $0 \leq t \leq T$ com $T > 0$ e finito, tal que o sistema vai da condição inicial $x(0) = 0$ para qualquer estado x no intervalo de tempo T , ou seja, um sistema pode ser dito controlável em um instante t_0 se for possível, por meio de um vetor de controle, transferir o sistema de qualquer outro estado em um intervalo de tempo finito.

Para fazer o teste de controlabilidade temos um sistema de ordem n , dados por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), \quad (12)$$

onde $\mathbf{x}(t) \in R^n$ e $u(t) \in R^m$. Para um sistema ser controlável basta analisar a equação dos estados, ou seja, o par de matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} .

Definindo a matriz de controlabilidade U :

$$U = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (13)$$

O sistema definido pelas matrizes (\mathbf{A}, \mathbf{B}) é controlável se o posto (U) é igual a n . Posto de uma matriz representa o número de colunas ou linhas linearmente independentes da matriz

A controlabilidade está associada à capacidade de influenciar todos os estados através das entradas do sistema (CABRAL, 2015).

2.3.2 Observabilidade

Um sistema LIT é observável se qualquer condição inicial $x(0)$ pode ser obtida conhecendo-se as entradas $u(t)$ e as saídas $y(t)$ do sistema para todo instante de tempo t entre 0 e $T > 0$ (CABRAL, 2015).

Para fazer o teste de observabilidade temos um sistema de ordem n , com um vetor de entradas $u(t) = 0$, então tem-se:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (14)$$

onde $\mathbf{x}(t) \in R^n$ e $y(t) \in R^p$. Para um sistema ser observável basta analisar o par de matrizes \mathbf{A} e \mathbf{C} .

Definindo a matriz de observabilidade V :

$$V = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \dots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (15)$$

O sistema definido pelas matrizes (\mathbf{A}, \mathbf{C}) é observável se o posto (V) é igual a n .

A observabilidade está associada à capacidade acompanhar todos os estados por meio das saídas do sistema (CABRAL, 2015).

2.4 Função de Ackermann

Um dos principais problemas no projeto de sistemas de controle é conseguir criar controladores que possam alterar a dinâmica de um sistema em malha fechada, através da mudança dos autovalores da matriz que o representa. Isso equivale a mudar os polos da função de transferência associada ao sistema, caso de não ocorra o cancelamento de polos e zeros (SHINNERS, 1998).

Calcular o polinômio característico e a matriz de realimentação que deve ser usada, pode ser uma tarefa desafiadora (SHINNERS, 1998). Para facilitar tais cálculos há a fórmula de Ackermann, que é útil para determinar a matriz de retroação de estados, dada por:

$$\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_n] \quad (16)$$

Essa matriz \mathbf{K} multiplica o sinal de entrada x :

$$\begin{aligned} u(t) &= -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (17)$$

Assim, considerando a equação característica:

$$\Delta(s) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_n \quad (18)$$

A matriz de ganhos \mathbf{K} é calculada de forma que:

$$K = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} U^{-1} q_c(A) \quad (19)$$

Em que U (matriz de controlabilidade) e q_c são dados por:

$$\begin{cases} U = [B \ AB \ BA^2 \ BA^{n-1}] \\ q_c(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + a_1 \mathbf{A}^{n-1} + \dots + a_n \mathbf{I} \end{cases} \quad (20)$$

Lembrando que I é a matriz identidade. Também é importante frisar que: A e B são matrizes.

3 METODOLOGIA

Neste capítulo serão explicados os materiais e métodos utilizados na elaboração do relatório, desde as ferramentas de simulação à coleta dos dados.

3.1 Ferramentas de Simulação

3.1.1 MATLAB/Simulink

O MATLAB, do inglês *MATrix LABoratory*, é um ambiente de programação de alto nível interativo voltado para o cálculo numérico e elaboração de gráficos. Diferente das linguagens clássicas de programação, como C, no MATLAB não é necessário declarar variáveis, alocar memória ou utilizar ponteiros. Além de contar com um acervo de funções matemáticas implementadas, disponíveis para ser utilizadas pelo usuário (PET, 2014).

No ambiente do MATLAB há o Simulink, uma ferramenta que permite simulação e a modelagem de sistemas dinâmicos e embarcados. Com uma interface amigável, o Simulink permite criar modelos através de diagramas de blocos. Nele é possível simular qualquer máquina por meio da modelagem matemática (PET, 2014).

3.2 Problema

O sistema simulado consiste em uma única bomba, um reservatório com água, dois tanques cilíndricos de 30 centímetros de altura e seções transversais uniformes e de tubos flexíveis para conexão, formando um sistema autônomo fechado e re-circulante.

O objetivo do experimento é projetar um sistema de controle que regula o nível de água até o valor de referência desejado, utilizando um seguidor de referências. O controle de nível do líquido é comum em muitas indústrias, como, por exemplo, nas fábricas de papel e celulose, petroquímicas e instalações de tratamento de água.

A bomba proporciona uma vazão de entrada no tanque 1. A vazão de saída do tanque 1 serve como vazão de entrada no tanque 2. O objetivo do sistema é controlar o nível do tanque 2 (variável controlada) a partir da manipulação da tensão da bomba (variável manipulada). O modelo do sistema é não-linear e é descrito pelas seguintes equações de estado:

$$\dot{L}_1 = -\frac{a_1\sqrt{2gL_1}}{A_1} + \frac{k_m}{A_1}V_p \quad (21)$$

$$\dot{L}_2 = \frac{a_1\sqrt{2gL_1}}{A_2} - \frac{a_2\sqrt{2gL_2}}{A_2} \quad (22)$$

Em que, \dot{L}_1 e \dot{L}_2 são as taxas de variação dos níveis de água dos tanques superior e inferior, respectivamente e L_1 e L_2 são os níveis de água dos tanques superior e inferior, respectivamente. Os tanques possuem altura máxima de 30 cm. Os demais parâmetros e valores estão listados na Tabela 1.

Tabela 1: Tempo médio e vazão da simulação 2.

Símbolo	Parâmetro	Valor
V_p	Tensão aplicada à bomba	$-22V$ a $22V$
K_m	Constante da bomba	$4,6 \text{ cm}^3/\text{sV}$
$A_1 = A_2$	Área da seção transversal dos tanques	$15,518 \text{ cm}^2$
$a_1 = a_2$	Área dos orifícios de saída	$0,178 \text{ cm}^2$
g	Aceleração da gravidade	981 cm/s^2

Fonte: Autores.

4 RESULTADOS

4.1 Linearização

Para descrever a dinâmica do nível do tanque 1 ($L_1(t)$) em função da tensão na bomba $V_p(t)$, consideramos a Equação 23.

$$\dot{L}_1(L_1, V_p) = f(L_1, V_p) \quad (23)$$

Para linearizar a EDO \dot{L}_1 , foi utilizado o teorema da expansão por série de Taylor. Como a EDO possui duas variáveis, altura e tensão da bomba, e grau 1, a aproximação será uma reta. Dessa forma, a série de Taylor deverá ter no máximo grau 1, como mostrado na Equação 24.

$$f(L_1, V_p) = f(L_{1,p0}, V_{p0}) + \frac{\partial f(L_1, V_p)}{\partial L_1}(L_1 - L_{1,p0}) + \frac{\partial f(L_1, V_p)}{\partial V_p}(V_p - V_{p0}) \quad (24)$$

Em posse da série de Taylor, é necessário identificar o ponto onde será calculada a linearização, $(L_{1,p0}, V_{p0})$. Como o tanque 1 possui a altura máxima de 30 cm, utilizamos o ponto médio da altura do tanque 1, logo foi utilizado $L_{1,0} = 15$ cm. A partir desse ponto, utilizamos a Equação 25 para calcular o valor da tensão da bomba quando a altura do tanque 1, em regime estacionário $\frac{dL_1}{dt} = 0$, for igual a 15 cm.

$$0 = \frac{k_m V_p - a_1 \sqrt{2gL_{1,0}}}{A_1} \Rightarrow V_{p0} = \frac{a_1 \sqrt{2gL_{1,0}}}{k_m} = 6,6383 \text{ V} \quad (25)$$

Dessa forma, obtemos o ponto de operação que será calculada a série de Taylor, $(L_{1,p0}, V_{p0}) = (15; 6,6383)$, bastando apenas resolvê-la para linearizar a EDO.

$$\left. \frac{\partial f(L_1, V_p)}{\partial L_1} \right|_{p0} = \frac{-a_1 \sqrt{g}}{\sqrt{2L_{1,0}} A_1} = -0,0656 \quad (26)$$

$$\left. \frac{\partial f(L_1, V_p)}{\partial V_p} \right|_{p0} = \frac{K_m}{A_1} = 0,2964 \quad (27)$$

Logo, temos que:

$$f(L_1, V_p) = f(L_{1,p0}, V_{p0}) - 0,0656\Delta L + 0,2964\Delta V_p \Rightarrow \dot{L}_1 = \dot{L}_{1,0} - 0,0656\Delta L_1 + 0,2964\Delta V_p \quad (28)$$

$$\Delta \dot{L}_1 = -0,0656\Delta L_1 + 0,2964\Delta V_p \quad (29)$$

De maneira análoga é feita na linearização do tanque 2. Utilizando o mesmo ponto de operação, o ponto médio da altura do tanque 1 e 2, $(L_{1,p0}, L_{2,p0}) = (15; 15)$. E obtemos:

$$\left. \frac{\partial f(L_1, L_2)}{\partial L_1} \right|_{p0} = \frac{a_1 \sqrt{g}}{\sqrt{2L_1} A_2} = 0,0656 \quad (30)$$

$$\left. \frac{\partial f(L_1, L_2)}{\partial L_2} \right|_{p0} = \frac{-a_2 \sqrt{g}}{\sqrt{2L_2} A_2} = -0,0656 \quad (31)$$

Em posse desses valores, encontramos:

$$\Delta \dot{L}_2 = 0,0656\Delta L_1 - 0,0656\Delta L_2 \quad (32)$$

Assim, temos que o modelo do sistema linearizado é dado pela Equação 33.

$$\begin{cases} \Delta \dot{L}_1 = -0,0656\Delta L_1 + 0,2964\Delta V_p \\ \Delta \dot{L}_2 = 0,0656\Delta L_1 - 0,0656\Delta L_2 \end{cases} \quad (33)$$

Em posse das linearizações, o sistema pode ser reescrito na forma matricial. Logo:

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{L}_1 \\ \Delta \dot{L}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0656 & 0 \\ -0,0656 & -0,0656 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta L_1 \\ \Delta L_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,2964 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t) \quad (34)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta L_1 \\ \Delta L_2 \end{bmatrix} \quad (35)$$

4.2 Controlador Seguidor de Referência

Para a obtenção da Equação de estados 4, se faz necessário seguir algumas etapas, as quais vão ser abordados nas seções a seguir.

Na obtenção dos polos desejados, é utilizada a matriz A do sistema linearizado (34). Para determinar os polos foi necessário calcular os autovalores da matriz A . Realizando o cálculo dos autovalores, obtém-se o valor de: -0,065593.

A partir desse valor inicial, são arbitrados valores envolta desse ponto. Então foram utilizados os polos em:

$$\begin{cases} p_1 = -0,065593 \cdot 4 = 0,26236 \\ p_2 = -0,065593 \cdot 4 = 0,26236 \\ p_3 = -0,065593 \cdot 12 = 0,78708 \end{cases} \quad (36)$$

O sistema foi projetado de forma que o sistema com o controlador em malha fechada tenha erro de regime nulo para entradas do tipo degrau e seja mais rápido do que o sistema sem controle em malha aberta.

4.2.1 Aplicação da Fórmula de Ackermann

Para determinar os ganhos do controlador será preciso definir as matrizes aumentadas de A e B, o polinômio q_c e a inversa da matriz de controlabilidade.

Dessa forma, com os polos desejados definidos, o polinômio característico pode ser escrito como:

$$\Delta(s) = (s + 0,78708)(s + 0,26236)^2 = s^3 + 1,3119s^2 + 0,4819s + 0,05418 \quad (37)$$

Após isso podemos determinar que a matriz aumentada de A (A_a) e a matriz aumentada de B (B_a) serão, respectivamente:

$$A_a = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0,065593 & 0 \\ 0 & 0,065593 & -0,065593 \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$B_a = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,2964 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (39)$$

Em posse de A_a podemos definir que $q_c(A_a)$ é dado por:

$$q_c(A_a) = A_a^3 + \alpha_1 A_a^2 + \alpha_2 A_a + \alpha_3 I = A_a^3 + 1,3119A_a^2 + 0,4819A_a + 0,05418I \quad (40)$$

Já a matriz de controlabilidade é dada por:

$$U = \begin{bmatrix} B_a & A_a \cdot B_a & A_a^2 \cdot B_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,01944 \\ 0,2964 & -0,01944 & 0,001275 \\ 0 & 0,01944 & -0,002551 \end{bmatrix} \quad (41)$$

Então, a matriz inversa de U é:

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} 0,2213 & 3,3738 & 3,3738 \\ 6,7476 & 0 & 51,4356 \\ 51,4356 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (42)$$

Assim, a matriz de ganhos K pode ser calculada e seu valor é dado pela Equação 43.

$$K = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} U^{-1} \cdot q_c(A_a) = \begin{bmatrix} -2,7870 & -3,98339 & -20,5808 \end{bmatrix} \quad (43)$$

Onde, o primeiro elemento da matriz K será o ganho K_1 e os dois elementos restantes serão a

matriz K_2 . Um detalhe importante é que para os cálculos dos ganhos convencionou-se que $e(t) = y(t) - r(t)$. No entanto, em um sistema convencional de controle por realimentação, o cálculo é feito com $e(t) = r(t) - y(t)$. Logo, foi necessário a inverter de sinal de K_1 .

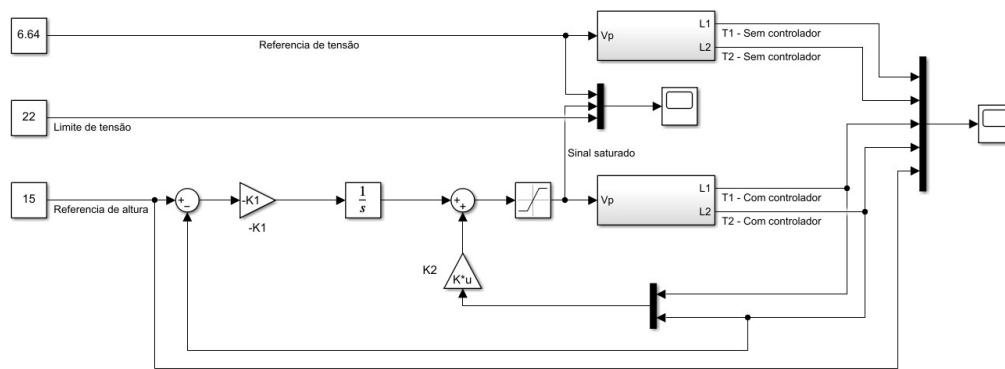
Por fim, temos que os ganhos K_1 e K_2 serão:

$$\begin{aligned} K_1 &= [2,7870] \\ K_2 &= [-3,98339 \quad -20,5808] \end{aligned} \quad (44)$$

4.3 Simulação

O diagrama de blocos da Figura 1 demonstra como foi construído a simulação no Simulink, os dados usados para construí-la foram obtidos a partir da aplicação da formula de Ackermann, já mostrada anteriormente.

Figura 1: Diagrama de blocos no Simulink do sistema.



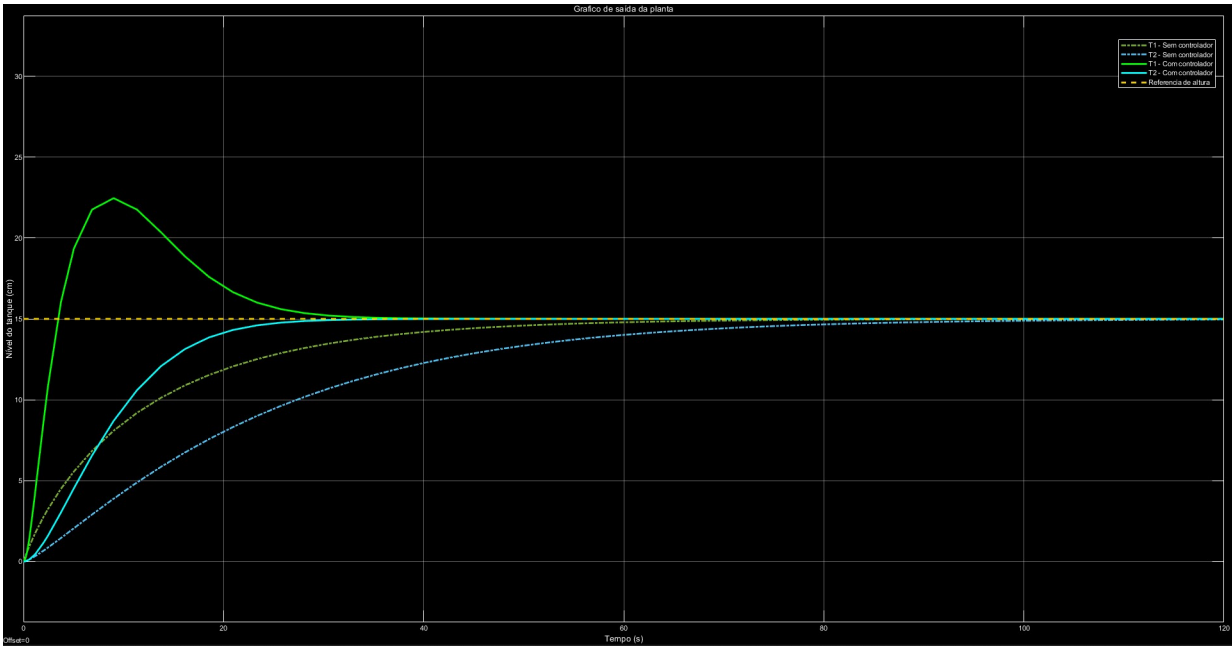
Fonte: Autores.

A Figura 2 mostra o nível dos tanques antes e depois da aplicação do controlador na planta. Nela pode-se observar que com a implementação do controlador o sistema tornou-se mais rápido. A respeito do tanque 1, observou-se que ele apresentou um *Overshoot*, que é de extrema importância para tornar o sistema mais rápido, após isso ele passa a seguir a referência de altura (15 cm).

Já no tanque 2, podemos observar que a sua subida é mais lenta, mas que ainda assim segue a referência de altura. Antes de atingir 40 segundos o sistema com controlador passa a apresentar estabilidade, enquanto que o sistema sem o controlador só passa a estabilizar após 80 segundos. Então obtém-se um ganho de, aproximadamente, o dobro de desempenho para atingir a estabilização.

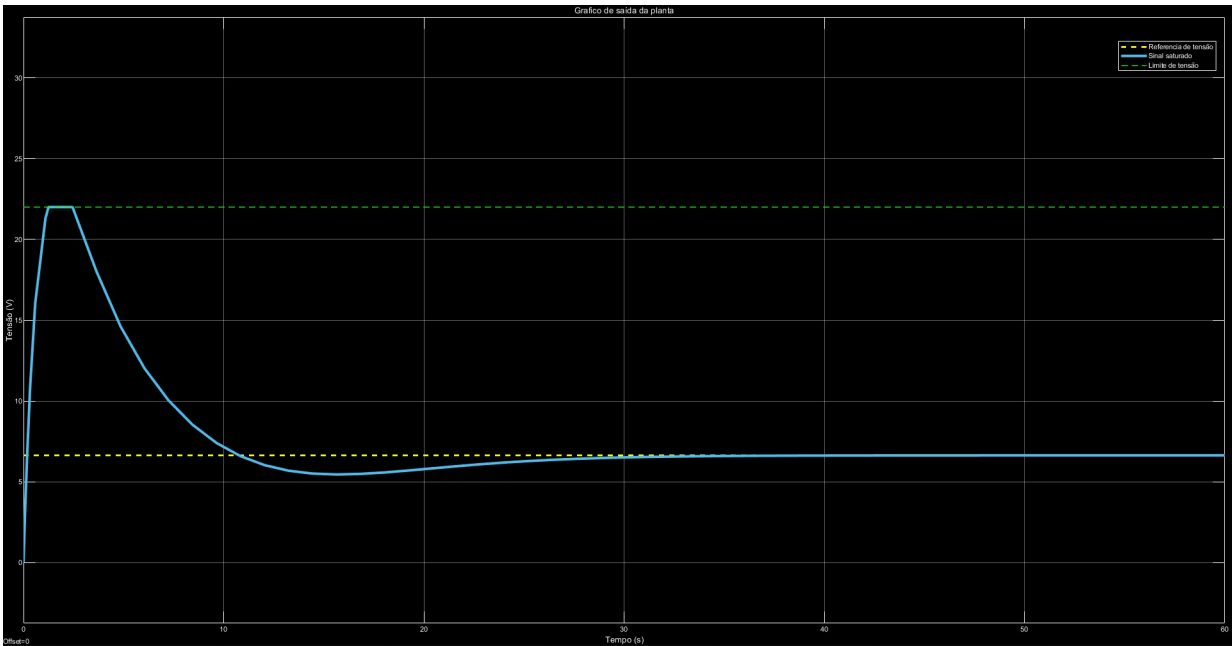
O sinal de controle mostrado na Figura 3 demonstra que os valores de tensão aplicados na planta, estão dentro do intervalo de valores aceitáveis pela bomba (-22V até 22V). É importante observar que o *overshoot* apresentado chega a atingir o valor máximo admissível pela bomba, o que demonstra a importância da utilização de saturadores no sistema, uma vez que sem ele não seria possível a implementação desse experimento em um ambiente real.

Figura 2: Comportamento dos níveis com e sem controlador.



Fonte: Autores.

Figura 3: Sinal de controle.



Fonte: Autores.

5 CONCLUSÃO

Através dos estudos de sistemas de controle do tipo seguidor de referência, foi feita a implementação do controlador utilizando um sistema de malha fechada e malha aberta para fazer comparações do impacto do seguidor de referência no sistema.

O sistema deveria seguir alguns parâmetros como: tempo de estabilização de malha fechada maior do que o de malha aberta e estabilizar no valor solicitado com erro nulo.

Os comportamentos referentes aos tanques foram atendidos como pode-se observar na Figura 2, as constantes K_1 e K_2 , são de suma importância para o experimento atender as especificações solicitadas. Foi analisado, também, o sinal de saída (Figura 3) para a questão de uma implementação em um ambiente real, o sinal apresenta um limiar de -22V a 22V (devido as especificações da bomba), é importante notar que o sinal de controle não apresentou ruído, assim não prejudicou a bomba.

Referências

ARAÚJO, F. M. U. de. **SISTEMAS DE CONTROLE I**. [S.l.: s.n.], 2003.

CABRAL, E. L. **Controlabilidade e Observabilidade**. [S.l.]: Universidade de São Paulo, 2015.

DORF, R. C.; BISHOP, R. H. **Sistemas de Controle Modernos**. [S.l.]: LTC, 2001.

PET. **Apostila de Matlab**. [S.l.]: Programa de Educação Tutorial, 2014.

SHINNERS, S. M. **Modern Control System Theory and Design**. [S.l.]: Wiley-Interscience, 1998. v. 2.

TOGNETTI E.S; FIORILLO, D. **Controle de Processos: Representação de modelos**. [S.l.]: Universidade de Brasília, 2015.