



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE**  
**CENTRO DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO E AUTOMAÇÃO**  
**CURSO DE ENGENHARIA MECATRÔNICA**

**CONTROLADOR DO TIPO PID PARA UM SISTEMA DE TANQUES**  
**ACOPLADOS:**  
**Método LGR e Heurístico**

JOÃO MATHEUS BERNARDO RESENDE: 20210072270

LUCAS BATISTA DA FONSECA: 20210072299

STHEFANIA FERNANDES SILVA: 20210072430

Natal-RN  
2022

JOÃO MATHEUS BERNARDO RESENDE: 20210072270

LUCAS BATISTA DA FONSECA: 20210072299

STHEFANIA FERNANDES SILVA: 20210072430

**CONTROLADOR DO TIPO PID PARA UM SISTEMA DE TANQUES  
ACOPLADOS:  
Método LGR e Heurístico**

Primeiro Relatório Parcial apresentado à disciplina de Laboratório de Sistemas de Controle, correspondente à avaliação complementar da 2ª unidade do semestre 2022.1 do 7º período do curso de Engenharia Mecatrônica na Universidade Federal do Rio Grande do Norte, sob orientação do **Prof. Dr. Anderson Cavalcanti**.

Professor: Anderson Cavalcanti.

Natal-RN  
2022

## Lista de Figuras

|    |  |    |
|----|--|----|
| 1  | Resposta de segunda ordem em função do fator de amortecimento. . . . . | 6  |
| 2  | Aproximação de Tustin. . . . .   | 8  |
| 3  | Gráfico para utilizado para analisar a condição de ângulo. . . . .     | 15 |
| 4  | Gráfico para encontrar a localização de $z_1$ e $z_2$ . . . . .        | 15 |
| 5  | Lugar Geométrico das Raízes do Sistema. . . . .                        | 17 |
| 6  | Discretização pelo método Tustin utilizado no Matlab . . . . .         | 18 |
| 7  | Diagrama de blocos discretizado - simulação 1 . . . . .                | 19 |
| 8  | Gráfico da saída do controlador - simulação 1 . . . . .                | 19 |
| 9  | Gráfico da saída da planta - simulação 1 . . . . .                     | 20 |
| 10 | Método para identificação dos parâmetros . . . . .                     | 21 |
| 11 | Curva de reação para determinar parâmetros . . . . .                   | 22 |
| 12 | Diagrama de blocos padrão ISA . . . . .                                | 22 |
| 13 | Diagrama de blocos discretizado - simulação 2 . . . . .                | 23 |
| 14 | Gráfico da saída do controlador - simulação 2 . . . . .                | 24 |
| 15 | Gráfico da saída da planta - simulação 2 . . . . .                     | 24 |

# Sumário

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>INTRODUÇÃO</b>   | <b>5</b>  |
| <b>2</b> | <b>REFERENCIAL TEÓRICO</b>  | <b>6</b>  |
| 2.1      | Sistema de 2ª Ordem . . . . .   | 6         |
| 2.2      | Ações de Controle: Controlador Proporcional+ Integral + Derivativo (PID) . . . . .          | 7         |
| 2.3      | Discretização de Controladores: Método de Tustin . . . . .                                  | 7         |
| 2.4      | Método LGR . . . . .  | 8         |
| 2.4.1    | Regras de Construção do LGR . . . . .   | 8         |
| 2.5      | Método CHR . . . . .  | 9         |
| <b>3</b> | <b>METODOLOGIA</b>  | <b>10</b> |
| 3.1      | Ferramentas de Simulação . . . . .  | 10        |
| 3.1.1    | MATLAB/Simulink . . . . .   | 10        |
| 3.1.2    | Google Colab . . . . .  | 10        |
| 3.1.3    | Geogebra . . . . .  | 10        |
| 3.2      | Problema . . . . .  | 11        |
| <b>4</b> | <b>RESULTADOS</b>   | <b>11</b> |
| 4.1      | Projeto do Sistema Pelo Método LGR . . . . .  | 11        |
| 4.1.1    | Linearização e Função de Transferência . . . . .  | 11        |
| 4.1.2    | Controlador PID . . . . .   | 13        |
| 4.1.3    | Discretização pela aproximação de Tustin . . . . .  | 17        |
| 4.1.4    | Implementação do sistema no Simulink . . . . .  | 18        |
| 4.2      | Projeto do Sistema Pelo Método Heurístico . . . . .   | 21        |
| 4.2.1    | Obtendo o ganho da planta (K), tempo morto (q) e a constante de tempo (t) . . . . .         | 21        |
| 4.2.2    | Obtendo o ganho proporcional (Kp), tempo derivativo (Td) e tempo integrativo (Ti) . . . . . | 22        |
| 4.2.3    | Discretização pela aproximação de Tustin . . . . .  | 23        |
| <b>5</b> | <b>CONCLUSÃO</b>  | <b>25</b> |

# 1 INTRODUÇÃO

O objetivo de um projeto de engenharia de controle é encontrar as configurações, especificações e identificar os parâmetros chave do sistema proposto para atender uma necessidade pontual. Um importante aliado do engenheiro projetista são os modelos computacionais que permitem visualizar o comportamento do sistema, sem necessariamente construí-lo (DORF; BISHOP, 2001).

Assim, a simulação computacional fará o uso de um modelo com as condições e as entradas reais em que o sistema será submetido. Com um modelo e simulação fundamentalmente exatos pode-se observar o desempenho do sistema sob todas as condições possíveis, extrapolar resultados para prever algum comportamento, dentre outras vantagens (DORF; BISHOP, 2001).

Nesse contexto, este artigo apresenta a implementação de um controlador do tipo PID, para um sistema de tanques acoplados, no método do lugar das raízes e pelo método heurístico. Além disso, o controlador deverá ser discretizado pelo método Tustin e implementado no Simulink.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

Nesse tópico apresentamos o embasamento teórico no qual este trabalho se fundamenta.

### 2.1 Sistema de 2ª Ordem

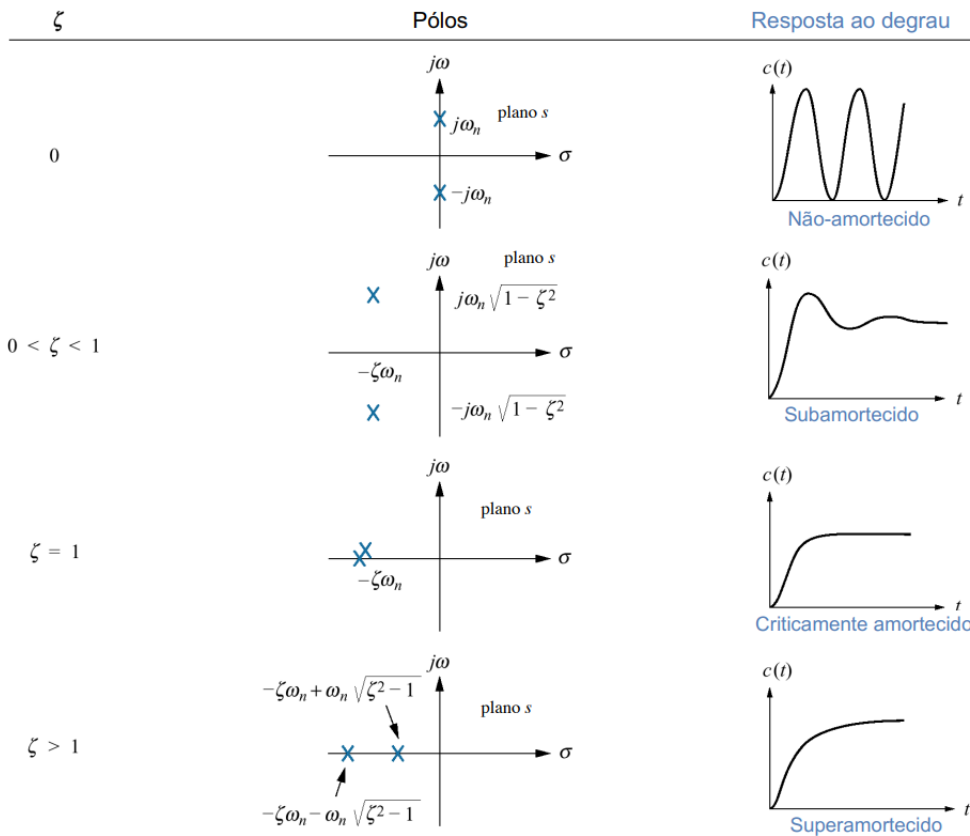
Um sistema de segunda ordem conta com uma ampla variedade de respostas que precisam ser analisadas. Isso se dá pois, as variações nos parâmetros de um sistema de segunda ordem são capazes de alterar a forma da resposta (NISE, 2012). Assim, a função transferência de um sistema de segunda ordem canônico é a mostrada abaixo.

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (1)$$

As duas grandezas da fórmula são denominadas frequência natural  $\omega_n$  e fator de amortecimento  $\xi$ . O  $\omega_n$  é a frequência de oscilação do sistema sem amortecimento, já o  $\xi$  é a razão entre a frequência de decaimento exponencial da envoltória e a frequência natural (NISE, 2012).

É possível calcular o tipo de resposta do sistema com base no valor do  $\xi$ , para cada faixa de valores tem-se uma resposta diferente. Na Figura 1, temos uma representação da resposta dos sistemas para diferentes intervalos de  $\xi$ . Neste relatório iremos trabalhar com um sistema subamortecido.

Figura 1: Resposta de segunda ordem em função do fator de amortecimento.



Fonte: (NISE, 2012).

## 2.2 Ações de Controle: Controlador Proporcional+ Integral + Derivativo (PID)

Um controlador automático realiza a comparação entre o valor real da saída do processo com o valor desejado, define o desvio e gera um sinal de controle para reduzir o desvio encontrado a um valor próximo de zero. A forma em que esse controlador define o sinal de controle é chamado de ação de controle (OGATA, 2010).

A combinação das ações proporcional, integral e derivativa em um só controlador podem ser utilizadas tanto no regime transitório quanto no regime permanente. Tal controlador é utilizado quando temos resposta transitória e em regime insatisfatórias. O controlador PID é definido pela Equação de transferência 2.

$$C(s) = k_p(1 + \frac{k_i}{s} + k_d s)E(s) \Rightarrow C(s) = (K_p K_d s^2 + K_p s + K_p K_i)E(s) \quad (2)$$

Para implementar o controlador PID é preciso determinar os ganhos proporcional; integral e derivativo do sistema estudado (DORF; BISHOP, 2001). Assim, considera-se o controlador PID, como:

$$G_c(s) = \frac{k_c(s + z_1)(s + z_2)}{s} \quad (3)$$

Ou seja, o controlador adiciona um polo em  $s = 0$  e dois zeros, que dependem das especificações do controlador para serem definidos. Os dois zeros, geralmente, são reais e iguais.

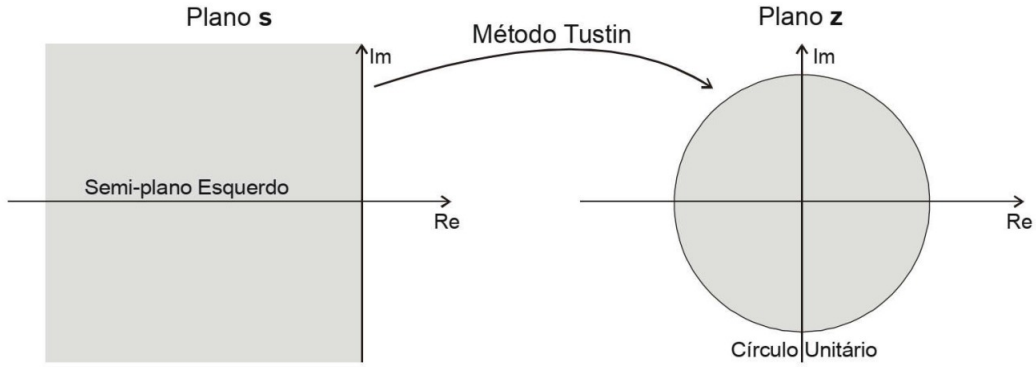
## 2.3 Discretização de Controladores: Método de Tustin

Antes de implementar um controlador digital, é necessário realizar a discretização do controlador. No processo de discretização, o problema fundamental é como descrever o sistema de tempo contínuo somente por meio da relação entre as sequências de amostras  $u(k)$  e  $y(k)$ , desprezando o comportamento entre amostras (KEIEL, 2017).

O método de Tustin é uma técnica amplamente usada na discretização de sistemas Lineares Invariantes no Tempo (LIT), a qual apresenta como vantagem o mapeamento dos polos do semiplano esquerdo do plano  $s$  no interior do círculo de raio unitário, como mostra a Figura 2 (ATKINSON, 1989). Isso é feito através da expressão 4. Isso garante que sistemas contínuos estáveis são transformados em sistemas discretos estáveis e sistemas contínuos instáveis são transformados em sistemas discretos instáveis.

$$s = \frac{z + 1}{z - 1} \cdot \frac{2}{T_s} \quad (4)$$

Figura 2: Aproximação de Tustin.



## 2.4 Método LGR

Em 1950, Walter R. Evans, apresentou o método do Lugar Geométrico das Raízes (LGR), que permite determinar os pólos da função de transferência em malha fechada, a partir dos pólos e zeros da função de transferência de malha aberta, em função do ganho do sistema (EVANS, 1950). O LGR tornou-se uma ferramenta auxiliar ao desenvolvimento de projeto de sistemas de controle.

Com o método do lugar das raízes, é possível saber como os pólos e zeros em malha aberta devem ser modificados, para que a resposta atenda a certas especificações de desempenho de um sistema. Contudo esse método oferece diversos outros recursos.

### 2.4.1 Regras de Construção do LGR

De acordo com (NISE, 2012), as principais regras obtidas a partir das condições de módulo e fase, são:

1. O número de ramos do LGR é igual ao número de pólos de malha aberta (MA).
2. O LGR é simétrico em relação ao eixo real.
3. No eixo real, para  $K > 0$ , o LGR existe à esquerda de um número ímpar de pólos e/ou zeros de malha aberta sobre o eixo real.
4. LGR se inicia com  $K = 0$  nos pólos de malha aberta e termina com  $K \rightarrow \infty$  nos zeros de malha aberta. Quando  $G(s) \cdot H(s)$  tem número  $m$  de zeros menor que o número  $n$  de pólos, então  $m-n$  ramos do LGR vão para o infinito quando  $K \rightarrow \infty$ .
5. Os ramos do LGR que vão para o infinito, o fazem segundo assíntotas que são semi-retas de origem sobre o eixo real na posição

$$\sigma_a = \frac{\sum(\text{polosMA}) - \sum(\text{zerosMA})}{n - m} \quad (5)$$

e com um ângulo

$$\theta_a(K) = \frac{(2K + 1)180}{n - m}, K = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 4, \dots \quad (6)$$



6. Os pontos de saída e de chegada ao eixo real do LGR ocorrem quando o ganho é, respectivamente, máximo local e mínimo local.
7. O ângulo de partida de pólos e de chegada em zeros é determinado pela condição de fase em um ponto do LGR próximo desse pólo ou zero.
8. Os ramos do LGR que vão para o infinito, o fazem segundo assíntotas que são semi-retas de origem sobre o eixo real na posição

## 2.5 Método CHR

O método CHR é baseado no trabalho de CHIEN; HRONES; RESWICK (1952) e é baseado em dois critérios: a resposta mais rápida sem sobressinal e a resposta mais rápida com 20% de sobressinal. Além disso, o método considera tanto a sintonia para o problema regulador como para o problema servo (IMD, 2022).

Em todos os casos, é considerado que o sistema se comporta como um sistema de primeira ordem com atraso, com ganho estático  $K$ , constante de tempo  $t$  tempo morto  $q$ . Os parâmetros são determinados analisando a resposta do processo através de um experimento em malha aberta com uma entrada em degrau.

Para o critério de desempenho “resposta sem sobressinal”, as Tabelas 1 e 2 mostram a sintonia para o problema servo e para o problema regulatório, respectivamente (IMD, 2022).

Tabela 1: Parâmetros para o problema servo, sem sobressinal

| Controlador | $K_p$                     | $T_i$    | $T_d$         |
|-------------|---------------------------|----------|---------------|
| P           | $\frac{0,3t}{K \cdot q}$  | $\infty$ | 0             |
| PI          | $\frac{0,35t}{K \cdot q}$ | $1,16t$  | 0             |
| PID         | $\frac{0,6t}{K \cdot q}$  | $t$      | $\frac{q}{2}$ |

Fonte: (IMD, 2022).

Tabela 2: Parâmetros para o problema regulador, sem sobressinal

| Controlador | $K_p$                     | $T_i$    | $T_d$    |
|-------------|---------------------------|----------|----------|
| P           | $\frac{0,7t}{K \cdot q}$  | $\infty$ | 0        |
| PI          | $\frac{0,6t}{K \cdot q}$  | $t$      | 0        |
| PID         | $\frac{0,95t}{K \cdot q}$ | $1,357t$ | $0,473q$ |

Fonte: (IMD, 2022).

## 3 METODOLOGIA

Neste capítulo serão explicados os materiais e métodos utilizados na elaboração do relatório, desde as ferramentas de simulação à coleta dos dados.

### 3.1 Ferramentas de Simulação

#### 3.1.1 MATLAB/Simulink

O MATLAB, do inglês *MATrix LABoratory*, é um ambiente de programação de alto nível interativo voltado para o cálculo numérico e elaboração de gráficos. Diferente das linguagens clássicas de programação, como C, no MATLAB não é necessário declarar variáveis, alocar memória ou utilizar ponteiros. Além de contar com um acervo de funções matemáticas implementadas, disponíveis para ser utilizadas pelo usuário (PET, 2014).

No ambiente do MATLAB há o Simulink, uma ferramenta que permite simulação e a modelagem de sistemas dinâmicos e embarcados. Com uma interface amigável, o Simulink permite criar modelos através de diagramas de blocos. Nele é possível simular qualquer máquina por meio da modelagem matemática (PET, 2014).

#### 3.1.2 Google Colab

O Colab é um ambiente construído para engenharia, mas que é flexível o suficiente para atender as necessidades de qualquer equipe. O Colab é um programa *web* que possibilita compartilhar o mesmo código, tendo também uma ferramenta de controle de versão.

Utilizamos a linguagem de programação *Python* e uma biblioteca chamada *Control* que implementa operações básicas para análise e projeto de sistemas de controle.

#### 3.1.3 Geogebra

GeoGebra é um aplicativo de matemática dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra em uma única GUI. Sua distribuição é livre, nos termos da GNU (*General Public License*). O aplicativo é escrito em linguagem Java, o que permite a disponibilidade em várias plataformas.

Utilizamos o Geogebra para gerar os gráficos das análises trigonométricas, como a condição de ângulo do sistema.

### 3.2 Problema

O sistema simulado consiste em uma única bomba, um reservatório com água, dois tanques cilíndricos de 30 centímetros de altura e seções transversais uniformes e de tubos flexíveis para conexão, formando um sistema autônomo fechado e re-circulante.

O objetivo do experimento é projetar um sistema de controle que regula o nível de água até o valor de referência desejado. O controle de nível do líquido é comum em muitas indústrias, como, por exemplo, nas fábricas de papel e celulose, petroquímicas e instalações de tratamento de água.

A bomba proporciona uma vazão de entrada no tanque 1. A vazão de saída do tanque 1 serve como vazão de entrada no tanque 2. O objetivo do sistema é controlar o nível do tanque 2 (variável controlada) a partir da manipulação da tensão da bomba (variável manipulada). O modelo do sistema é não-linear e é descrito pelas seguintes equações de estado:

$$\dot{L}_1 = -\frac{a_1\sqrt{2gL_1}}{A_1} + \frac{k_m}{A_1}V_p \quad (7)$$

$$\dot{L}_2 = \frac{a_1\sqrt{2gL_1}}{A_2} - \frac{a_2\sqrt{2gL_2}}{A_2} \quad (8)$$

Em que,  $\dot{L}_1$  e  $\dot{L}_2$  são as taxas de variação dos níveis de água dos tanques superior e inferior, respectivamente e  $L_1$  e  $L_2$  são os níveis de água dos tanques superior e inferior, respectivamente. Os tanques possuem altura máxima de 30 cm. Os demais parâmetros e valores estão listados na Tabela 3.

Tabela 3: Tempo médio e vazão da simulação 2.

| Símbolo     | Parâmetro                             | Valor                        |
|-------------|---------------------------------------|------------------------------|
| $V_p$       | Tensão aplicada à bomba               | $-22V$ a $22V$               |
| $K_m$       | Constante da bomba                    | $4,6 \text{ cm}^3/\text{sV}$ |
| $A_1 = A_2$ | Área da seção transversal dos tanques | $15,518 \text{ cm}^2$        |
| $a_1 = a_2$ | Área dos orifícios de saída           | $0,178 \text{ cm}^2$         |
| $g$         | Aceleração da gravidade               | $981 \text{ cm/s}^2$         |

Fonte: Autores.

## 4 RESULTADOS

### 4.1 Projeto do Sistema Pelo Método LGR

#### 4.1.1 Linearização e Função de Transferência

Para descrever a dinâmica do nível do tanque 1 ( $L_1(t)$ ) em função da tensão na bomba  $V_p(t)$ , consideramos a Equação 9.

$$\dot{L}_1(L_1, V_p) = f(L_1, V_p) \quad (9)$$

Para linearizar a EDO  $\dot{L}_1$ , foi utilizado o teorema da expansão por série de Taylor. Como a EDO possui duas variáveis, altura e tensão da bomba, e grau 1, a aproximação será uma reta. Dessa forma, a série de Taylor deverá ter no máximo grau 1, como mostrado na Equação 10.

$$f(L_1, V_p) = f(L_{1,p0}, V_{p0}) + \frac{\partial f(L_1, V_p)}{\partial L_1}(L_1 - L_{1,p0}) + \frac{\partial f(L_1, V_p)}{\partial V_p}(V_p - V_{p0}) \quad (10)$$

Em posse da série de Taylor, é necessário identificar o ponto onde será calculada a linearização,  $(L_{1,p0}, V_{p0})$ . Como o tanque 1 possui a altura máxima de 30 cm, utilizamos o ponto médio da altura do tanque 1, logo foi utilizado  $L_{1,0} = 15$  cm. A partir desse ponto, utilizamos a Equação 11 para calcular o valor da tensão da bomba quando a altura do tanque 1, em regime estacionário  $\frac{dL_1}{dt} = 0$ , for igual a 15 cm.

$$0 = \frac{k_m V_p - a_1 \sqrt{2gL_{1,0}}}{A_1} \Rightarrow V_{p0} = \frac{a_1 \sqrt{2gL_{1,0}}}{k_m} = 6,6383 \text{ V} \quad (11)$$

Dessa forma, obtemos o ponto de operação que será calculada a série de Taylor,  $(L_{1,p0}, V_{p0}) = (15; 6,6383)$ , bastando apenas resolvê-la para linearizar a EDO.

$$\left. \frac{\partial f(L_1, V_p)}{\partial L_1} \right|_{p0} = \frac{-a_1 \sqrt{g}}{\sqrt{2L_1} A_1} = -0,0656 \quad (12)$$

$$\left. \frac{\partial f(L_1, V_p)}{\partial V_p} \right|_{p0} = \frac{K_m}{A_1} = 0,2964 \quad (13)$$

Logo, temos que:

$$f(L_1, V_p) = f(L_{1,p0}, V_{p0}) - 0,0656\Delta L + 0,2964\Delta V_p \Rightarrow \dot{L}_1 = \dot{L}_{1,0} - 0,0656\Delta L + 0,2964\Delta V_p \quad (14)$$

$$\Delta \dot{L}_1 = -0,0656\Delta L + 0,2964\Delta V_p \quad (15)$$

Assim temos a Equação 15 que representa a EDO linearizada. Para encontrar a função de transferência, foi aplicada a transformada de Laplace em ambos os lados da EDO linearizada. Em seguida, foi isolado  $L_1/V_p$ .

$$sL_1 - L_1(0) = -0,0656L_1 + 0,2964V_p \quad (16)$$

Como a condição inicial dada é igual a 0, temos:

$$L_1(s + 0,0656) = 0,2964V_p \quad (17)$$

Logo, a função de transferência é dada pela Equação 18.

$$\frac{L_1}{V_p} = \frac{0,2964}{s + 0,0656} \quad (18)$$

De maneira análoga é feita na linearização do tanque 2. Utilizando o mesmo ponto de operação, o ponto médio da altura do tanque 1 e 2,  $(L_{1,p0}, L_{2,p0}) = (15; 15)$ . E obtemos:

$$\left. \frac{\partial f(L_1, L_2)}{\partial L_1} \right|_{p0} = \frac{a_1 \sqrt{g}}{\sqrt{2L_1} A_2} = 0,0656 \quad (19)$$

$$\left. \frac{\partial f(L_1, L_2)}{\partial L_2} \right|_{p0} = \frac{-a_2 \sqrt{g}}{\sqrt{2L_2} A_2} = -0,0656 \quad (20)$$

Em posse desses valores, encontramos:

$$\Delta \dot{L}_2 = 0,0656 \Delta L_1 - 0,0656 \Delta L_2 \quad (21)$$

Para determinar a função de transferência, foi aplicada a transformada de Laplace em ambos os lados da EDO linearizada. Em seguida, foi isolado  $L_2/V_p$ .

$$sL_2 - L_2(0) = 0,0656L_1 - 0,0656L_2 \quad (22)$$

Como a condição inicial dada é igual nula e substituindo  $L_1$  pela sua função de transferência, obtemos:

$$L_2(s + 0,0656) = 0,0656 \cdot \frac{0,2964V_p}{(s + 0,0656)} \quad (23)$$

Logo, a função de transferência é dada pela Equação 24.

$$G(s) = \frac{L_2}{V_p} = \frac{0,01944}{(s + 0,0656)^2} \quad (24)$$

Neste relatório foi considerada uma planta descrita pela função de transferência 24. Para a planta  $G(s)$  foi projetado um controlador do tipo PID que atenda as seguintes especificações:

- i) O sistema em malha fechada deve ter *overshoot* máximo de 30%;
- ii) Tempo de estabilização deve ser menor que 40 segundos.

#### 4.1.2 Controlador PID

Considerando um sistema de 2ª ordem encontrado, temos que o *overshoot* ( $M_p$ ) é dado pela Equação 25.

$$M_p = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 0,3 \quad (25)$$

Com  $M_p$  é possível encontrar o valor de  $\xi$ , que é fundamental para determinar o par de polos complexos conjugados do sistema juntamente com  $w_n$ . Assim, isolando  $\xi$ , temos:

$$\xi = \sqrt{\frac{\ln^2 M_p}{\ln^2 M_p + \pi^2}} \Rightarrow \xi = \sqrt{\frac{\ln^2 0,3}{\ln^2 0,3 + \pi^2}} = 0,3579 \quad (26)$$

Para determinar  $w_n$  utilizamos a equação do tempo de estabilização ( $t_{ss}$ ) no critério de 2% (decisão de projeto), e isolamos a frequência natural não-amortecida, como pode ser visto na Equação 27.

$$t_{ss,2\%} = \frac{4}{\xi w_n} \Rightarrow w_n = \frac{4}{\xi t_{ss}} \Rightarrow w_n = \frac{4}{0,3579 \cdot 40} = 0,2794 \quad (27)$$

Logo, o par de polos complexos do sistemas é:

$$p_{1,2} = -\xi w_n \pm j w_n \sqrt{1 - \xi^2} \Rightarrow p_{1,2} = -0,1 \pm 0,2609j \quad (28)$$

Lembrando que o controlador PID é definido pela Equação 2, então é preciso encontrar os zeros  $z_1$  e  $z_2$  para determinar os ganhos  $k_p$ ,  $k_i$  e  $k_d$ . Os zeros devem ser determinados de forma que a condição de ângulo seja satisfeita. O critério de ângulo é realizado utilizando a equação da planta multiplicada pelo controlador, ou seja, a Equação 29.

$$G(s) \cdot C(s) = \frac{0,01944}{(s + 0,0656)^2} \cdot \frac{Kc(s + z_1)(s + z_2)}{s} \quad (29)$$

A referência para cálculo de cada ângulo é o polo, com a parte imaginária positiva, do sistema (Equação 28). A partir dele são calculados os ângulos dos polos ( $\theta_1$ ,  $\theta_2$  e  $\theta_3$ ) e dos zeros ( $\phi_1$  e  $\phi_2$ ), como pode ser visto na Figura 3.

Como o objetivo é definir onde  $z_1$  e  $z_2$  estão localizados, primeiramente será necessário determinar o seu ângulo em relação ao polo ( $\phi_1$  e  $\phi_2$ , respectivamente). Para facilitar os cálculos, assumiremos que  $z_1$  e  $z_2$  estão na mesma posição. Assim, serão calculados todos os ângulos usando trigonometria.

$$\theta_1 = 180^\circ - \arctan\left(\frac{0,2609}{0,1}\right) = 110,97^\circ \quad (30)$$

$$\theta_2 = \theta_3 = 180^\circ - \arctan\left(\frac{0,2609}{0,1 - 0,0656}\right) = 97,51^\circ \quad (31)$$

Como a soma deles deve ser igual a  $-180^\circ$ , será possível definir o valor de  $\phi_1 = \phi_2$ .

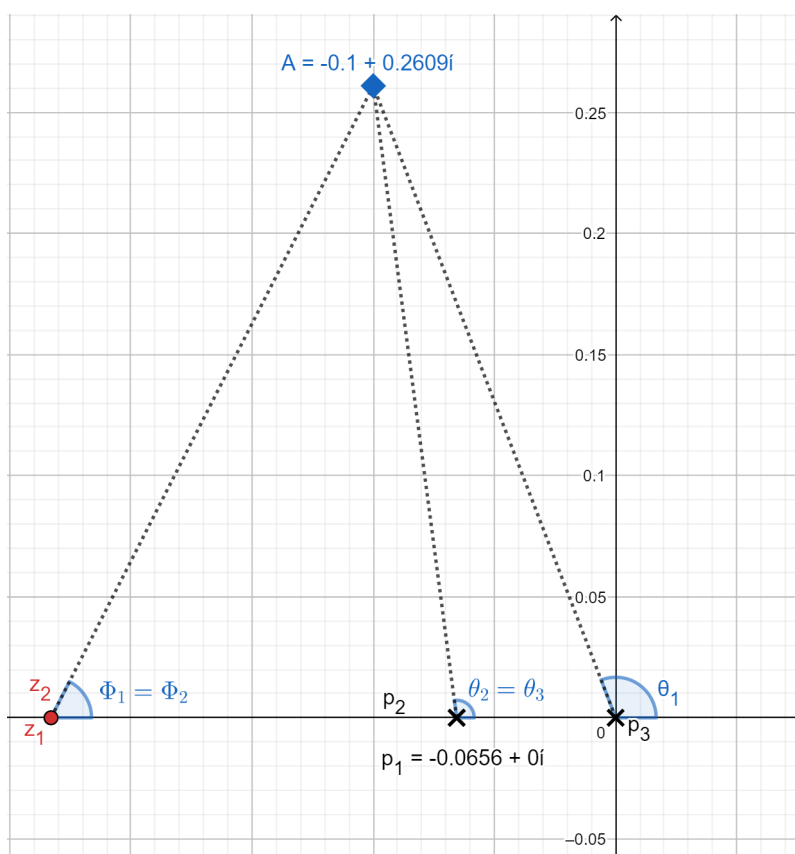
$$-(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + \phi_1 + \phi_2 = -180^\circ \Rightarrow -(\theta_1 + 2\theta_2) + 2\phi_1 = -180^\circ \Rightarrow \phi_1 = 63^\circ \quad (32)$$

Uma vez que  $\phi_1$  foi definido é possível encontrar a localização de  $z_1$ , e por consequência  $z_2$ , por meio de trigonometria.

Por sua vez o calculo de  $z_2$ , fica da seguinte forma:

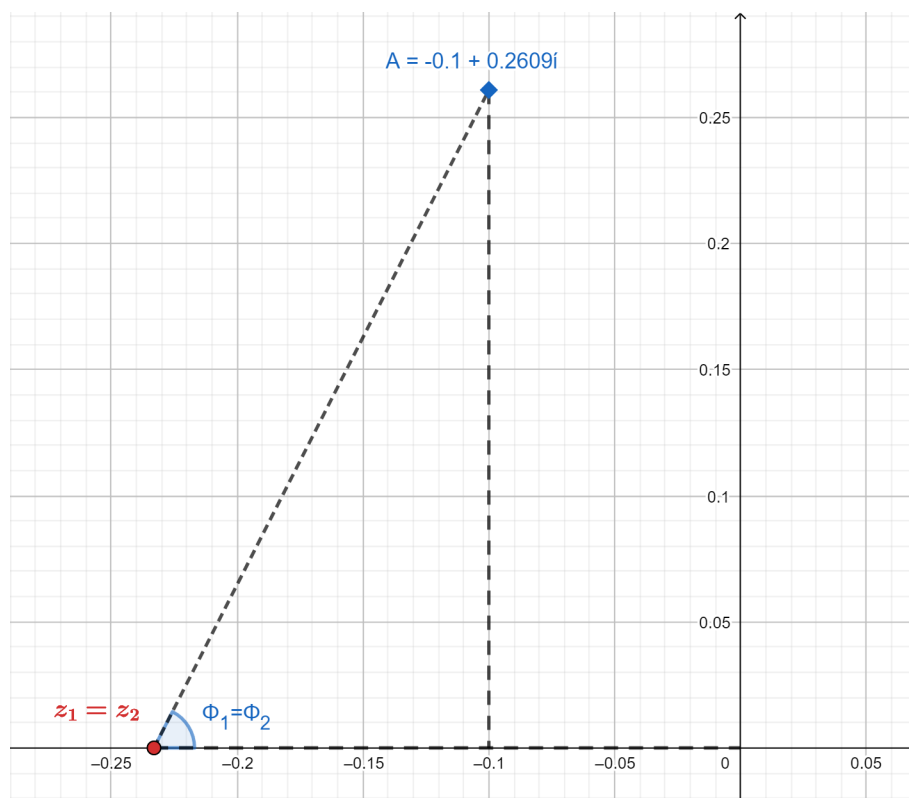
$$z_1 = z_2 = -\frac{0,2609}{\tan(180^\circ - \phi_1)} + 0,1 = -0,2330 \quad (33)$$

Figura 3: Gráfico para utilizado para analisar a condição de ângulo.



Fonte: Autores.

Figura 4: Gráfico para encontrar a localização de  $z_1$  e  $z_2$



Fonte: Autores.

Com  $z_1$  e  $z_2$  encontrados pode-se determinar os parâmetros do controlador, a começar por  $K_c$ .

$$G(s) \cdot C(s) = \frac{0,01944}{(s+0,0656)^2} \cdot \frac{K_c(s+0,2330)^2}{s} \quad (34)$$

Utilizando o critério de módulo temos que:

$$|G(s) \cdot C(s)| = \left| \frac{0,01944K_c(s+0,2330)^2}{s(s+0,0656)^2} \right|_{-0,1+0,2609j} = 1 \quad (35)$$

Resolvendo a Equação 35, temos:

$$K_c = 12,945 \quad (36)$$

Assim, a equação de controle pode ser reescrita como:

$$C(s) = \frac{12,945(s+0,2330)^2}{s} \implies C(s) = \frac{12,945s^2 + 6,031s + 0,7026}{s} \quad (37)$$

Para definir os valores de  $k_p$ ,  $k_i$  e  $k_d$  compara-se a Equação 37 com a Equação 2.

$$C(s) = K_p K_d s^2 + K_p s + K_p K_i = 12,945s^2 + 6,031s + 0,7026 \quad (38)$$

Dessa forma, temos:

$$\begin{cases} K_d = 2,146 \\ K_p = 6,031 \\ K_i = 0,116 \end{cases} \quad (39)$$

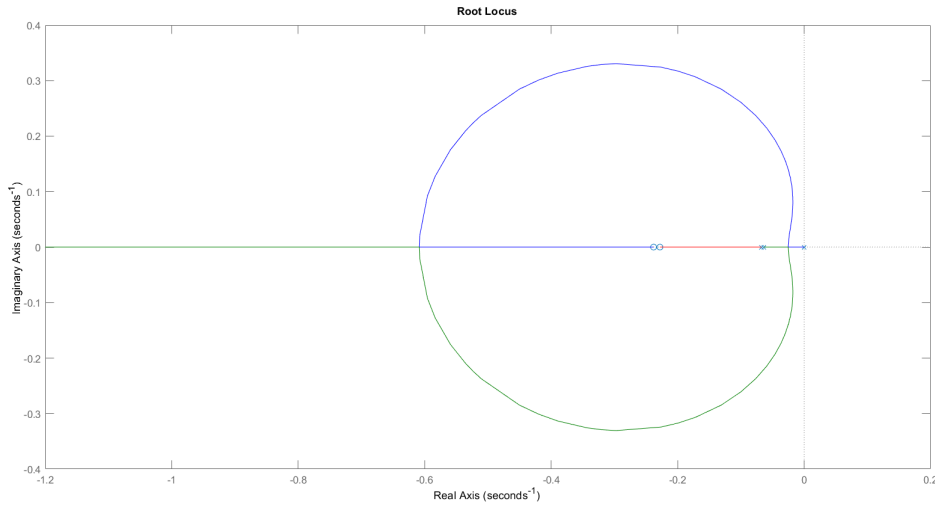
Então o sistema será descrito pela Equação 40:

$$G(s) \cdot C(s) = \frac{0,01944}{(s+0,0656)^2} \cdot \frac{12,945s^2 + 6,031s + 0,7026}{s} = \frac{0,2517s^2 + 0,1173s + 0,01366}{s^3 + 0,1312s^2 + 0,0043s} \quad (40)$$

O Lugar Geométrico das Raízes (LGR) do sistema está representado na Figura 5.



Figura 5: Lugar Geométrico das Raízes do Sistema.



Fonte: Autores.

#### 4.1.3 Discretização pela aproximação de Tustin

Para realizar a discretização do controlador PID pelo método Tustin, utiliza-se a equação 2 juntamente com a relação de transformada em  $s$  para transformada em  $z$ , observada na equação 4. Em seguida separa-se as partes proporcional, integrativa e derivativa.

$$U(s) = (k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)E(s) \Rightarrow U(z) = P(z) + I(z) + D(z) \quad (41)$$

A equação 42 mostra a operação matemática para isolar a parte proporcional, resultando assim na multiplicação do ganho  $k_p$  com o erro da entrada. O resultado é uma equação de transferência do controlador discretizado na dimensão da transformada  $z$ .

$$\frac{P(z)}{E(z)} = k_p \Rightarrow P(z) = k_p \cdot E(z) \quad (42)$$

Para o  $k_d$  e  $k_i$  é preciso substituir a equação 4 no lugar de  $s$ . Assim temos as equações 43 e 44.

$$I(s) = \frac{k_i}{s} \cdot E(s) \Rightarrow I(z) = \frac{k_i}{\frac{2 \cdot (z-1)}{T \cdot (z+1)}} \cdot E(z) \Rightarrow I(z) = \frac{T k_i \cdot (z+1)}{2 \cdot (z-1)} \cdot E(z) \quad (43)$$

$$D(s) = k_d s \cdot E(s) \Rightarrow D(z) = \frac{2 k_d \cdot (z-1)}{T \cdot (z+1)} \cdot E(z) \quad (44)$$

Posteriormente, realiza-se a transformada inversa de  $z$ . Ao realizar essa operação, são obtidos os valores de  $e(k+1)$ , ou seja, se faz necessário valores de erros futuros para gerar um sinal de controle. Para solucionar esse problema foi defasado uma unidade de tempo, resultando em:  $e(k+1) \Rightarrow e(k)$  e  $e(k) \Rightarrow e(k-1)$ .

Dessa forma, é obtida a discretização do controlador PID no domínio do tempo discreto. As seguintes equações são o resultado final da discretização.

$$P(k) = k_p \cdot e(k) \quad (45)$$

$$I(k) = I(k-1) + \frac{k_i \cdot T}{2} (e(k) + e(k-1)) \quad (46)$$

$$D(k) = -D(k-1) + \frac{2 \cdot k_d}{T} (e(k) - e(k-1)) \quad (47)$$

Pode-se observar que as equações 46 e 47, possuem valores de erro atrasado no tempo, representado por  $e(k-1)$ . Por esse motivo, é necessário fornecer o valor inicial do erro. Isto posto, foi definido o valor de erro inicial de 5cm, pois o tanque 2 inicia com o valor de 10cm e o *setpoint* desejado é de 15cm.

#### 4.1.4 Implementação do sistema no Simulink

Na plataforma Simulink no Matlab, foi utilizado um bloco chamado "*MATLAB Function*" em que é possível implementar um bloco com *scripts* desenvolvidos em Matlab. A Figura 6 mostra o *script* utilizado no bloco "*MATLAB Function*", onde o  $k_p$ ,  $k_i$  e  $k_d$  foram determinados na sessão anterior e o T foi definido empiricamente.

Figura 6: Discretização pelo método Tustin utilizado no Matlab

```
function [u,I,D] = fcn(e,eant, Iant, Dant)

T = 0.108;
Kp = 6.03129;
Kd = 12.94;
Ki = 0.7026;
|
P = Kp*e;
I = (Iant + ((Ki*T)/2)*(e + eant));
D = (-Dant + ((2*Kd)/T)*(e - eant));

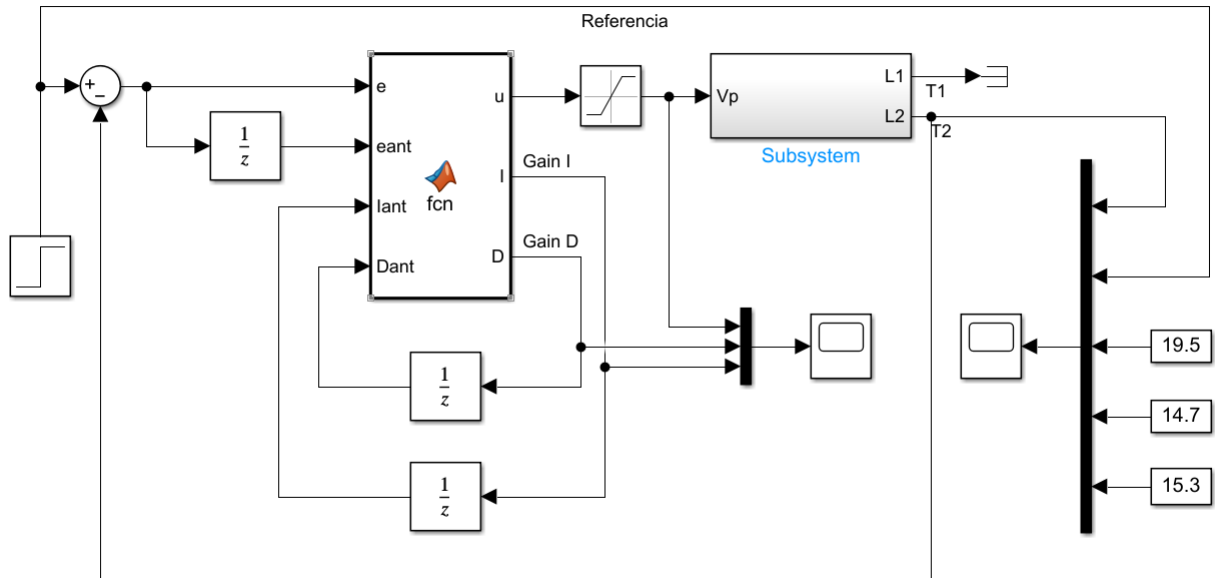
u=P+I+D;
```

Fonte: Autores.

Baseando-se nas equações 45 a 47 foi desenvolvido uma função, com quatro entradas: erro ( $e$ ), erro atrasado ( $e_{ant}$ ), parte integrativa atrasada ( $I_{ant}$ ) e parte derivativa atrasada ( $D_{ant}$ ). E três saídas: entrada da planta ( $u$ ), parte integrativa ( $I$ ) e parte derivativa ( $D$ ). Para realizar os atrasos foi utilizado o bloco integrativo ( $1/z$ ).

A Figura 7 ilustra o diagrama de blocos feito no Simulink, o sistema tem como entrada um degrau de amplitude 2.

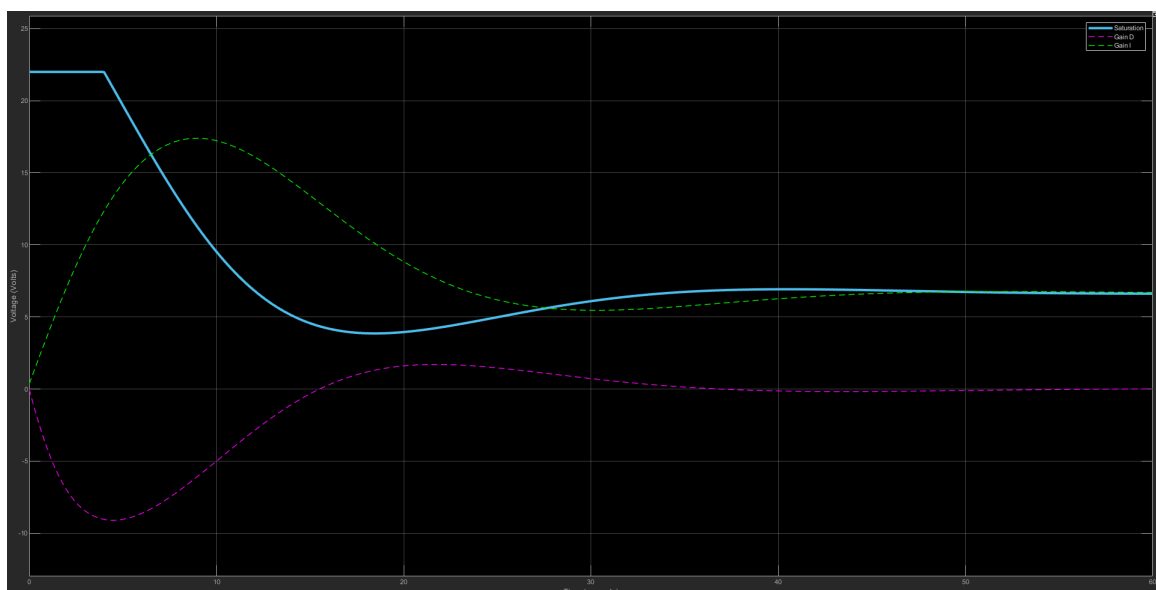
Figura 7: Diagrama de blocos discretizado - simulação 1



Fonte: Autores.

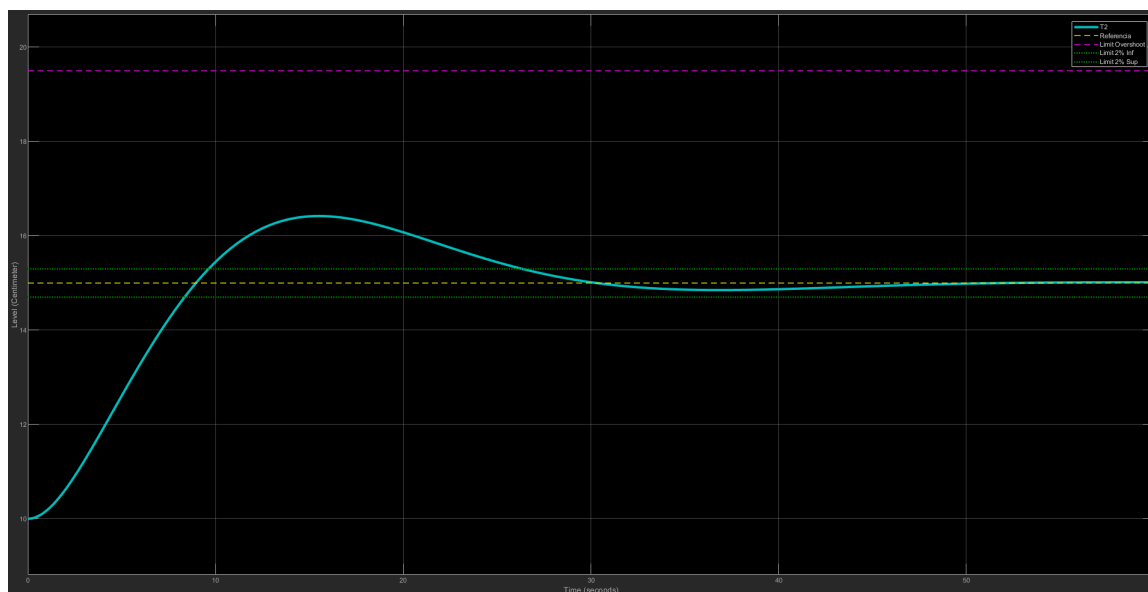
Por fim, a Figura 8 mostra as saídas do controlador: saída  $D$ ,  $I$  e a saída  $U$  saturada. Já a Figura 9 mostra o sinal de saída da planta com o sinal de referência (degrau de amplitude 2) e *overshoot* de 30% e tempo de estabilização em 2%.

Figura 8: Gráfico da saída do controlador - simulação 1



Fonte: Autores.

Figura 9: Gráfico da saída da planta - simulação 1



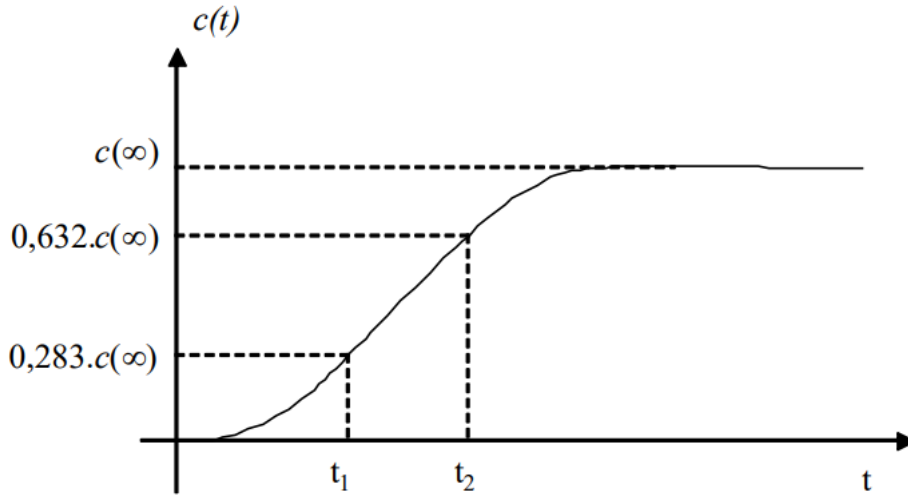
Fonte: Autores.

## 4.2 Projeto do Sistema Pelo Método Heurístico

### 4.2.1 Obtendo o ganho da planta (K), tempo morto (q) e a constante de tempo (t)

Para evitar incertezas na obtenção dos valores de K, q e t, há um método que se baseia na definição de dois tempos  $t_1$  e  $t_2$ , nos quais a curva de reação atinge  $0,283 \cdot c$  e  $0,632 \cdot c$  (onde c é o ganho K), como pode ser visto na Figura 10.

Figura 10: Método para identificação dos parâmetros



Fonte: Autores.

Com o ganho igual 8,150, encontramos que K é:

$$K = \frac{\text{ganho}}{2} = 4,075 \text{ cm} \quad (48)$$

Já  $t_1$  e  $t_2$  são encontrados por meio de  $t'_1$  e  $t'_2$ , os quais indicam a posição da curva que os tempos se encontram.

$$t'_1 = \text{ganho} \cdot 0,283 = 2.3064 \text{ cm} \rightarrow t_1 = 10,83 \text{ s} \quad (49)$$

$$t'_2 = \text{ganho} \cdot 0,632 = 5.1508 \text{ cm} \rightarrow t_2 = 13,68 \text{ s} \quad (50)$$

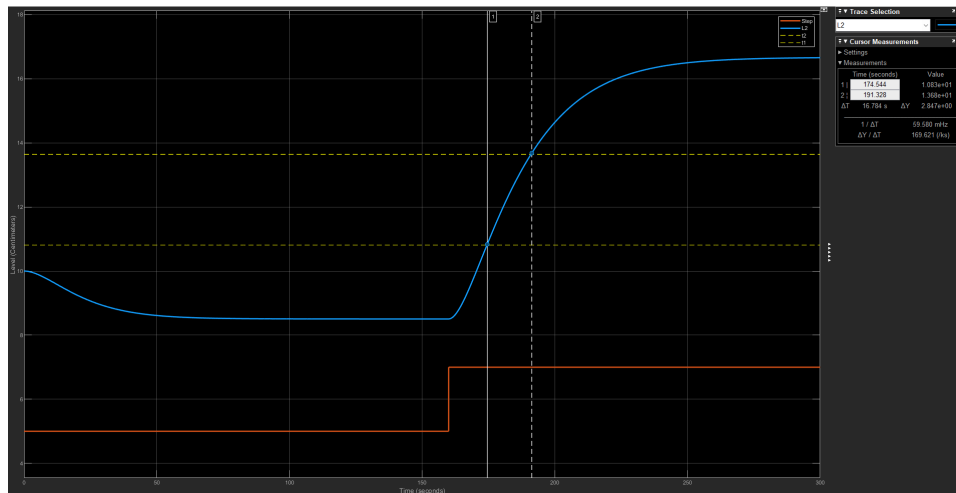
Com o uso de  $t_1$  e  $t_2$  é possível encontrar o t e o q.

$$t = \frac{3}{2}(t_2 - t_1) = 25,176 \text{ s} \quad (51)$$

$$q = t_2 - t = 6,824 \text{ s} \quad (52)$$

O gráfico utilizado para realizar a determinação dos parâmetros é o mostrado na Figura 11.

Figura 11: Curva de reação para determinar parâmetros



Fonte: Autores.

#### 4.2.2 Obtendo o ganho proporcional ( $K_p$ ), tempo derivativo ( $T_d$ ) e tempo integrativo ( $T_i$ )

Através dos valores obtidos de  $q$  e  $t$  pode-se obter os valores de sintonia para o PID utilizando o método de CHR. Foi utilizada a configuração de problema regulatório, pois seu objetivo principal é minimizar ou até mesmo, em alguns casos, rejeitar os efeitos das perturbações. Com isso, os resultados obtidos estão demonstrados na Tabela 4.

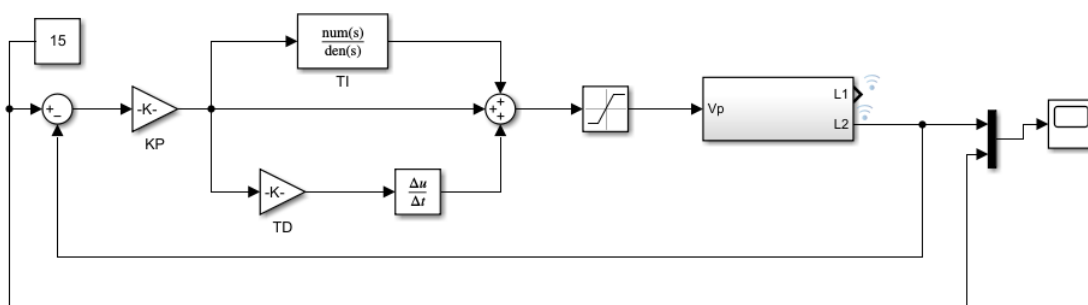
Tabela 4: Aplicando os valores obtidos no modelo regulador

| Controlador | $K_p$   | $T_i$   | $T_d$   |
|-------------|---------|---------|---------|
| PID         | 0.86008 | 0.02517 | 2.77615 |

Fonte: Autores.

De acordo com os valores obtidos na Tabela 4, faz-se possível construir um diagrama no padrão ISA. A Figura 12 demonstra a tal implementação no simulink.

Figura 12: Diagrama de blocos padrão ISA



Fonte: Autores.

### 4.2.3 Discretização pela aproximação de Tustin

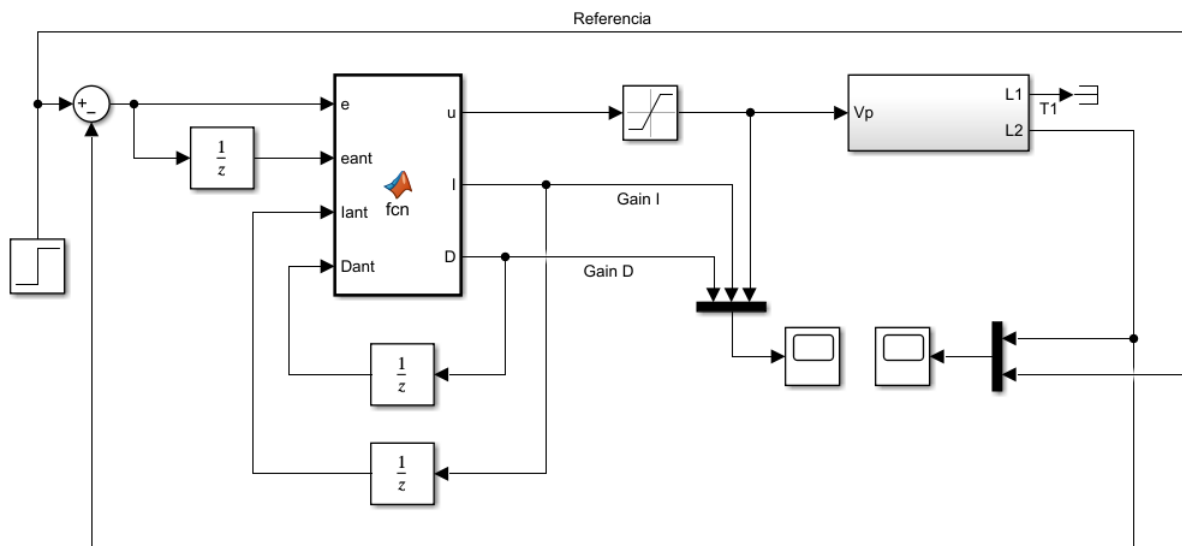
Para a discretização do tipo Tustin na simulação 2, foi utilizado o bloco *matlabfunction* com o mesmo script utilizado na simulação 1. A principal diferença entre as simulações discretizadas, são os parâmetros de estabilização, os quais não são definidos na simulação 2.

Inicialmente, é necessário ajustar alguns parâmetros de discretização. O tempo de discretização utilizado foi  $T = 0.1$ , por esse motivo em todos os blocos de *delay* é necessário definir o *Sample time* de acordo com o tempo de discretização, sendo assim, o *Sample time* = 0.1.

Outro ajuste é feito no *delay* do erro de entrada no controlador. Visto que, é necessário definir o erro da amostra  $k - 1$ , pelo motivo do tanque 2 começa em 10cm e o *set point* é definido como 15cm, o erro inicial é 5cm, ou seja, nesse *delay* a condição inicial é 5cm. Assim, as equações 46 e 47 são satisfeitas, resultando no funcionamento correto da planta discretizada.

Caso essa condição inicial não seja atendida, o controlador irá operar de forma oscilatória. Então, a resposta do sinal de saída do controlador será uma onda quadrada com amplitudes enormes.

Figura 13: Diagrama de blocos discretizado - simulação 2

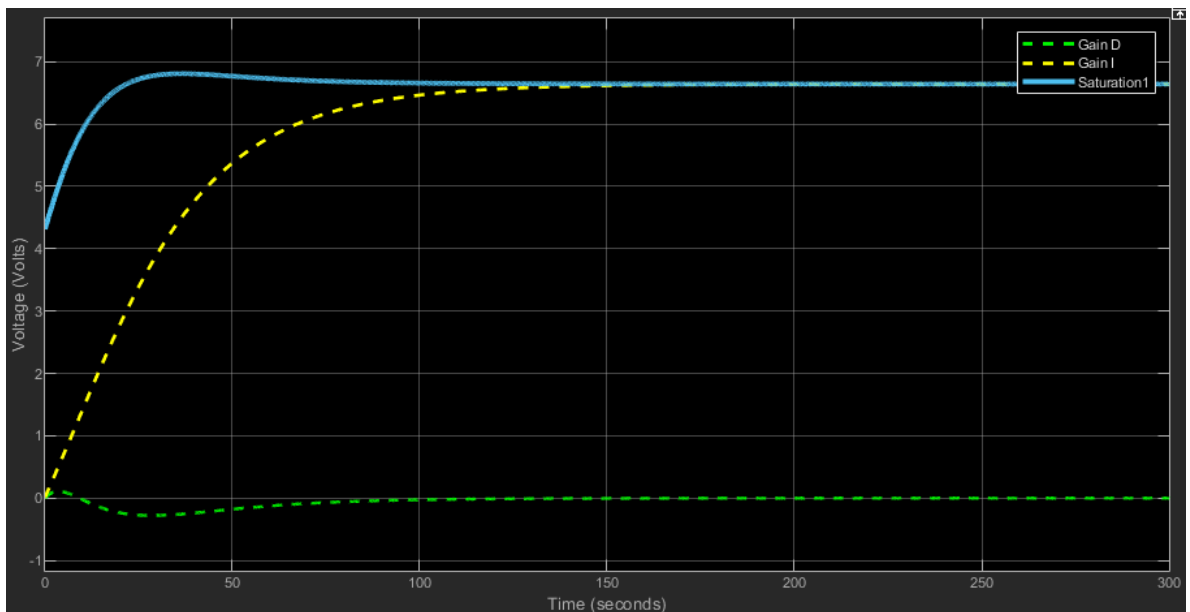


Fonte: Autores.

A Figura 14 mostra o gráfico das saídas da parte integrativa, derivativa e saturada da planta discretizada. Pode-se observar que a parte derivativa entra em regime permanente em 150 segundos com valor tendendo a 0v. Justificada pelo valor do erro tendendo a 0, a tensão inicial de saturação começa em um pouco mais de 4v e a parte integrativa se estabiliza, juntamente com a saturação, um pouco abaixo de 7v.

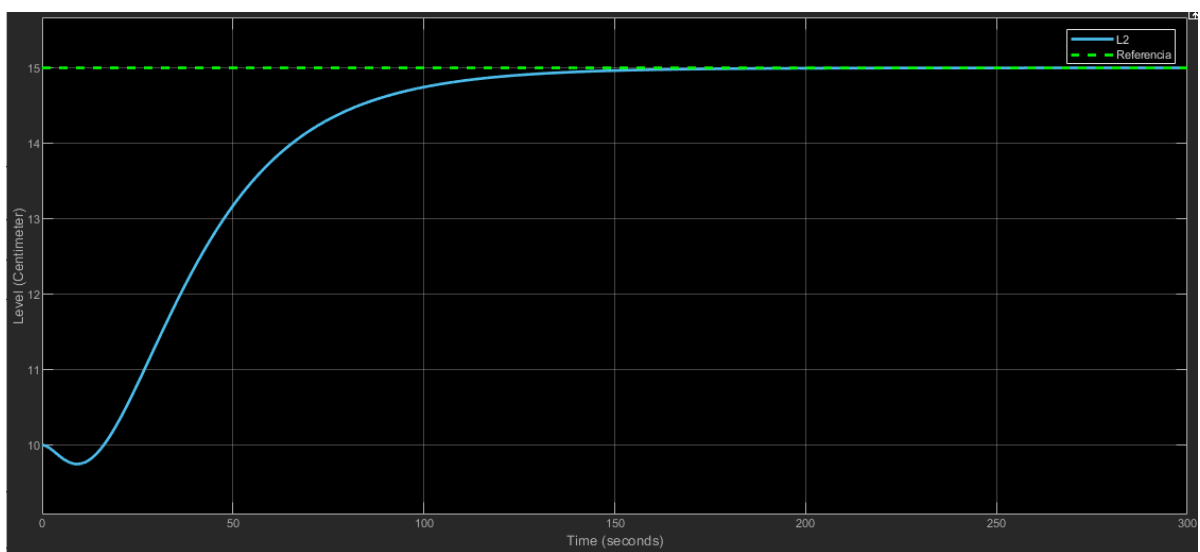
O gráfico da saída do tanque 2 da planta é ilustrado na figura 15, é possível observar que o nível inicial do tanque 2 começa e diminuir, pois a vazão de saída do tanque 2 é maior do que a vazão de entrada do mesmo, com o aumento da tensão da saída do controlador, o nível do tanque 2 volta a subir, chegando ao valor de *set point* em 150s.

Figura 14: Gráfico da saída do controlador - simulação 2



Fonte: Autores.

Figura 15: Gráfico da saída da planta - simulação 2



Fonte: Autores.



## 5 CONCLUSÃO

No presente relatório, foi feito um estudo sobre como controlar um sistema de tanques acoplados através de um controlador do tipo PID, com os métodos LGR e Heurístico.

No PID pelo método LGR foi preciso linearizar as equações que descrevem a dinâmica do nível dos tanques, para depois definir os valores de  $k_p$ ,  $k_i$  e  $k_d$  que viabilizam a construção do controlador para as especificações fornecidas.

Após isso, a discretização do sistema por meio da Aproximação Trapezoidal ou de Tustin foi feita e com ela foi realizada uma simulação do sistema com o controlador PID no Simulink do Matlab.

No método heurístico foi preciso definir os valores do ganho da planta ( $K$ ), tempo morto ( $q$ ) e da constante de tempo ( $t$ ). Isso foi feito para viabilizar a simulação, com o controlador também discretizado, no simulink.

Por fim, o estudo permitiu um maior entendimento de controladores de sistemas PID, dos métodos LGR e CHR e de métodos matemáticos de discretização.

## Referências

- ATKINSON, K. **An Inroduction to numerical analysis**. [S.l.]: New York, NJ, USA: John Wiley Sons, 1989.
- COLAB, G. **Conheça O Colab**. 2022. Acessado em: 11 jun. 2022. Disponível em: <[https://colab.research.google.com/notebooks/intro.ipynb?hl=pt\\_BR](https://colab.research.google.com/notebooks/intro.ipynb?hl=pt_BR)>.
- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. **Sistemas de Controle Modernos**. [S.l.]: LTC, 2001.
- EVANS, W. R. **Control system synthesis by root locus method**. [S.l.]: Transactions of the American Institute of Electrical Engineers, 1950.
- GEOGEBRA. **GeoGebra - Aplicativos Matemáticos**. 2022. Acessado em: 11 jun. 2022. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/?lang=pt>>.
- IMD. **Aula 04 - Sintonia de controladores PID: Métodos de Z-N e CHR**. 2022. Acessado em: 11 jul. 2022. Disponível em: <<https://materialpublic.imd.ufrn.br/curso/disciplina/1/63/4/8#:~:text=O%20m%C3%A9todo%20CHR%20%C3%A9%20baseado,como%20para%20o%20problema%20servo.>>
- KEIEL, G. **Projeto em tempo discreto de controladores ressonantes aplicados a fontes ininterruptas de energia**. 2017.
- NISE, N. S. **Engenharia de Sistemas de Controle**. [S.l.]: LTC, 2012.
- OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. [S.l.]: Pearson Universidades, 2010.
- PET. **Apostila de Matlab**. [S.l.]: Programa de Educação Tutorial, 2014.