Elección Discreta: Teoría, estimación y métodos númericos

Tarea 3*

Germán Augusto Campos Ortíz** Juan José Merino Zarco***

22 de marzo de 2022

1. Pregunta 1

Descripción: Calcule $\int_{-1}^{1} e^x dx$ usando la regla del punto medio con una precisión de 0.000001. Reporte el valor aproximado de la integral y el n que alcanza dicha precisión. Denote dicho n por n^{pm}.

Solución: Para un grado de precisión de 0.000001 y usando la formula del error en la regla del punto medio, llegamos a que se requiere un n de $n^{pm} = 952$ para alcanzar dicha precisión. Con este grado de precisión obtenemos que el valor aproximado de la integral es de $I \approx 2{,}350401955055503$. El código se puede apreciar en el documento de extensión *.py* anexo.

2. Pregunta 2

Descripción: Calcule $\int_{-1}^{1} e^x dx$ usando cuadratura de Gauss-Legendre con una precisión de 0.000001.

Para determinar cuando se ha alcanzado la precision deseada, se suele proceder del siguiente modo. Sea I_f^n el valor aproximado de la integral cuando se usan n nodos de integración. Entonces iterar sobre n = 1, 2, 3, 4, 5... hasta que $|I_f^n - I_f^{n+1}| < \epsilon$, donde $\epsilon <$ es el error deseado. Reporte el valor de la integral y el n que alcanza dicha precision. Denote dicho n como n^{gl}.

*El Colegio de México 2020-2022. Profesor: Edwin Muñoz Rodríguez

**El Colegio de México, gacampos@colmex.mx

***El Colegio de México, jmerino@colmex.mx

Solución: Se creó una función para obtener el valor de la integral mediante Gauss-Legendre, y posteriormente se realizó un for en el que, a partir de 1, se calculaban el valor de la integral para n nodos y el valor de la integral para n+1 nodos. En dicho for se creó un condicional que paraba cuando la resta de los dos factores anteriores fuera menor que la precisión. Siendo así, obtenemos que el valor de n es de $n^{gl} = 4$. Y a partir de este valor de n, llegamos a que el valor de la integral a través de este metodo es $I \approx 2{,}350402092156377$.

3. Pregunta 3

Descripción: Calcule $\int_{-1}^{1} e^x dx$ usando Montecarlo. Seleccione una muestra de tamaño $max\{n^{pm}, n^{gl}\}$. Simule 100 veces esta integral y tome el promedio. Compare con los resultados obtenidos usando la regla del punto medio, cuadratura de Gauss-Legendre y el valor exacto de esta integral, $e - \frac{1}{e} \approx 2{,}350402387$.

Solución: Seleccionamos una muestra de tamaño $max\{n^{pm}, n^{gl}\} = max\{952, 4\} = 952$, y aplicamos el método de Montecarlo, obteniendo así un valor de la integral de $I \approx 2{,}358739766901092$.

Cuadro 1: Valores de las integrales y diferencia respecto al verdadero valor

	Punto Medio	**Gauss-Legendre**	**Montecarlo**	**Valor Exacto**
Valor de la integral	2,350401955	2,350402092	2,358739767	2,350402387
Diferencia	-4,32232E-07	-2,95131E-07	0,00833738	0

En el cuadro 1 podemos observar que el método que más se acerca al verdadero valor es el método de Gauss-Legendre, seguido muy de cerca por el método de Punto Medio. Y finalmente, el método que más se aleja del verdadero valor es el método de Montecarlo.

4. Pregunta 4

Descripción: En esta pregunta implementaremos el método de integración basado en la cuadratura de Smolyak (1963), propuesto por Heiss and Winschel (2008).

Sea

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha_1 - 2\beta_p}}{\sum_{j=1}^{4} e^{\alpha_j - 2^j \beta_p}} e^{-\frac{\beta_p^2}{2}} e^{-\frac{\alpha_1^2}{2}} ... e^{-\frac{\alpha_4^2}{2}} d\beta_p d\alpha 1 ... d\alpha 4$$

Calcule esta integral usando n = 5 nodos de integración en cada dimensión. Las tablas con los nodos de integración y los pesos calculados se encuentran en esta página, creada por Heiss y Winschel: Quadrature on sparse grids.

Como dato curioso, uno de los Laboratorios Nacionales del Departamento de Energía de Estados Unidos (Sandia) que es pionero en temas de optimización numérica a nivel mundial, apenas empezó a considerar la implementación de las mallas de Smolyak como parte de sus librerias en 2007... ¡Ciertamente esta vez los y las economistas (algunos) no están tan lejos de la frontera del conocimiento!

Solución: Empleamos la regla de integración "GQN" en 5 dimensiones.

Tenemos que:

$$f(x_i) = \frac{e^{\alpha_1 - 2\beta_p}}{\sum_{j=4}^{4} e^{\alpha_j - 2^j \beta_p}}, \, con \; x_i = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_p$$

La integral I puede reescribirse de la siguiente manera, donde los pesos estan representados por $w_i = \frac{e^{-\frac{x'x}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$:

$$I \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

Al realizar la evaluación de la integral, el resultado es el siguiente:

$$I \approx 0{,}31025601079399057$$