Дополнительные главы математического анализа

Конспект лекций первого семестра (2 курс)

Лектор: Вознакова А.В.
Стенографист: Артём П.

При поддержке сайта ПСЖ.ОНЛАЙН.
Санкт-Петербург, ИТМО, 2025

МАТАНЧИК

Лекция 04.сен

Функции нескольких переменных

$f(x,y) : E \to R$

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(P)$

Норма

<u>def</u> (X - вект. простр.)

Неотрицательная ф-я

$\|\cdot\| : X \to [0; +\infty)$

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$; $\boxed{\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})}$
3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Примеры:

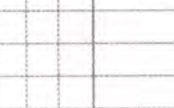
1. $\|x\|_{C_0} = |x|$
2. $\|x\|_\infty = \max\limits_{\forall i \leq n} |x_i|$
3. $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$

Метрика

<u>def</u>

$\rho(x,y) : X^2 \to [0; +\infty)$

1. $\rho(x,y) \geq 0, \rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\rho(x,y) = \rho(y,x)$
3. $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$



Область

<u>def</u> Открытый шар с центром в точке x_0

$B_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < \delta\}$

Закрытий шар

$\boxed{\text{Закрытия}}$

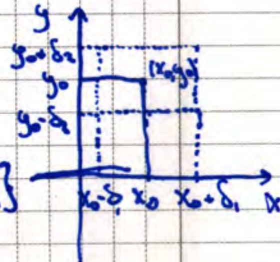
$$B_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq \delta\}$$

def Открытый (Закрытый) параллелепипед (брус)

$$\overline{\Pi}(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x^1 - x_0^1| \leq \delta_1,\ |x^2 - x_0^2| \leq \delta_2,\ \vdots\ |x^n - x_0^n| \leq \delta_n\}$$

$$\| \quad (x_0^1, x_0^2, \dots x_0^n)$$

x_0 - точка, коорд. т.



Если $\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_n$, то это куб

Дз: прочитать про разные нормы, повторить пределы

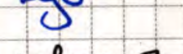
Практика 4 сем

Расстояние.

Замкнутая ограниченная область D.

точки $P, Q \in D$. $d(P,Q) = \max\limits_D \|P - Q\| = d(D)$

макс. расстояние между 2 точками



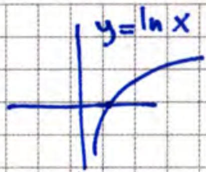
две точки, и покоординатно вычитаем

Это метрика!

Задача: найти D.

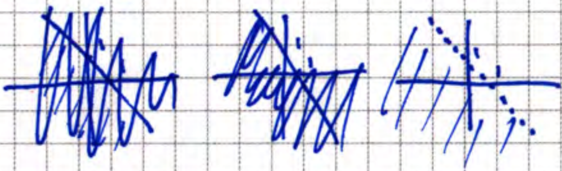
$z = f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ $\quad 4 - x^2 - y^2 \geq 0$

$$z = \ln(1-x-y)$$



$$1-x-y>0$$

$$E = \{(x,y): y+x<1\}$$



$$z = \sin\frac{x+y}{x-y}$$

$$z = \frac{x+y}{x-y}$$

$$z = x\sin\frac{1}{y}$$

Предел

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists\, \delta(\varepsilon): \forall x \in E \cap B_\delta(x_0)$$

$$|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$$

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = A\ (f(P_0))$$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists\, \delta(\varepsilon): \forall x \in E \cap B_\delta(x_0),$$

$$\|P-P_0\|<\delta \Rightarrow \|f(P)-A\|<\varepsilon$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x+y}{x-y} = \begin{bmatrix} x=\frac{2}{n} \\ y=-\frac{1}{n}\end{bmatrix} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{3}{n}} = \frac{1}{3} \neq$$

$$\begin{bmatrix} x=\frac{2}{n} \\ y=\frac{1}{n}\end{bmatrix} \dots = 3$$

Если совпада- не точно $\exists$, если не совпали $\Rightarrow \nexists$

обобщение

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x+y}{x-y} = [y=kx] = \lim_{x\to 0} \frac{x+kx}{x-kx} = \lim_{x\to 0} \frac{x(1+k)}{x(1-k)} =$$

$$= \frac{1+k}{1-k}$$ – зависит от $k \Rightarrow \nexists \lim$

иначе $\lim \exists$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x-y}{x^2+y^2} = \begin{bmatrix} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \end{bmatrix} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho\cos\varphi-\rho\sin\varphi}{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi} =$$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2} \to 0 \qquad = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho(\cos\varphi-\sin\varphi)}{\rho^2} = \infty$$

переменная   константа

Лекция 6 сен

Предел и непрерывность ф-ии многих переменных.

$$\lim_{\substack{y\to y_0\\ x\to x_0}} f(x,y) = \lim_{P\to P_0} f(P) = A = const$$

Коши.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0 : \forall P \in E \cap B_\delta(P_0) \Rightarrow |f(P)-A| < \varepsilon$

$\Updownarrow$

$f(P) \in B_\varepsilon(A)$

$0 < |x-x_0| < \delta$

$0 < |y-y_0| < \delta$

$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)\right)$; $\lim\limits_{y\to y_0}\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)\right)$ - повторные пределы

первым считается внутренний функ.

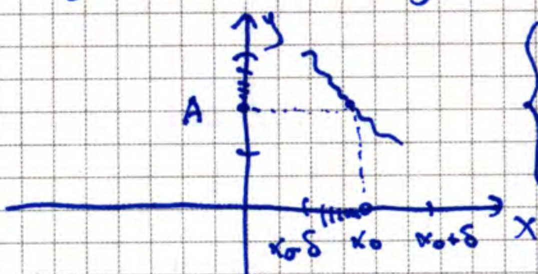
x, считается отд. от y. Если при всех x $\lim\limits_{y\to y_0}$ равен одному значению, то о $\exists$.

Примеры:

1). $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$,

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right) = -\lim_{y\to 0} 1 = -1$$



$$\begin{cases} \forall\ x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0,\ x_n \neq x_0 \\ \forall\ y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y_0,\ y_n \neq y_0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$f(x_n, y_n) \to A$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\frac{x-y}{x+y} = \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_n = \frac{2}{n} \\ y_n = \frac{1}{n} \end{cases} \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{2}{n}-1/n}{2/n+\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1/n}{3/n} = \dfrac{1}{3} \\ \begin{cases} x_n = \frac{1}{n} \\ y_n = 2/n \end{cases} \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1/n - 2/n}{2/n + 1/n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-1/n}{3/n} = -\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} = [y=kx] = \lim_{x\to 0} \frac{x-kx}{x+kx} = \lim_{x\to 0} \frac{x(1-k)}{x(1+k)} = \frac{1-k}{1+k}$$

предели разние

2). $f(x,y) = x\sin\frac{1}{y}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} x\sin\frac{1}{y}\right) = \lim_{x\to 0} x\left(\lim_{y\to 0}\sin\frac{1}{y}\right) \nexists$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{y}\right) = \lim_{y\to 0}\sin\frac{1}{y}\lim_{x\to 0} x = 0$$

константи

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x\cdot\sin\frac{1}{y} = 0$$

3). $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0$ Доказать.

по опр.: $0<|x|<\delta,\ 0<|y|<\delta$

$$\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{x^3}{x^2+y^2} + \frac{y^3}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| + \left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right| \leq$$

$$\leq \left|\frac{x^3}{x^2}\right| + \left|\frac{y^3}{y^2}\right| = |x|+|y| < 2\delta = \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists\ \delta = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$0<|x|<\delta,\ 0<|y|<\delta \Rightarrow \left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| < \varepsilon$$

Теорема:

$$f(x,y): \underset{E}{X \times Y} \to R$$

(x_0, y_0) – предельная точка E

$$\exists \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = A, \ \exists \lim_{x\to x_0} f(x,y) = \varphi(y)$$

(существуют повторный и внутренний lim)

Тогда $\exists \lim\limits_{y\to y_0} \varphi(y) = A$

Доказательство:

$$\exists \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0:$$

$$\left.\begin{cases} 0 < |x - x_0| < \delta \\ 0 < |y - y_0| < \delta \end{cases}\right| \Rightarrow |f(x,y) - A| < \varepsilon$$

Фиксируем y: $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x,y) - A| = |\varphi(y) - A| <$

$< \varepsilon^*$, т.к. $\exists \lim f(x,y) = \varphi(y)$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) \ \forall y \in Y: 0 < |y - y_0| < \delta \Rightarrow |\varphi(y) - A| < \varepsilon$

оп. знач.

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0, y_0)$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x_0, y) = f(x_0, y)$ $\quad$ ф-я непрер. по 2 пер.

$\Downarrow$

$\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) = f(x, y_0)$ $\quad$ непрер. по 1 пер.

Лекция 11 сен.

Непрерывность функции нескольких переменных.

$f(x_1, \dots, x_n): E \subset R^n \to R$

P_0 – предельная точка множества E

<u>def</u> Функция $f(x_1 \dots x_n)$ непрерывна в точке P_0, если $\exists \lim\limits_{p \to P_0} f(p) = f(P_0) = const$

фикс. все кроме первой $\to$ $|x_1 - x_1^0| < \delta$ $\Rightarrow |f(x_1 \dots x_n) - f(x_1^0, x_2 \dots x_n)| < \varepsilon$

$|x_2 - x_2^0| < \delta$

$\forall p \in B_\delta(P_0)$ $\vdots$

$|x_n - x_n^0| < \delta$

$\overline{R} \not\ni$ „const" $\in R$

<u>Пример:</u>

1: $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ $P_0 = (0,0)$

$f(0,y) = 0$ $\lim\limits_{y \to 0} f(0,y) = 0$

$f(x,0) = 0$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x,0) = 0$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2} \not\exists$ *

(см. [$y = kx$])

* $\Rightarrow$ функция в т. $P_0(0,0)$ разрывна

2 $f(x;y) = x^y = e^{\ln x^y} = e^{y \ln x}$

$x_n \to x_0, x_n \neq x_0$

$y_n \to y_0, y_n \neq y_0$

$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} x^y = x_0^{y_0}$

тут обознач. опред.

3. $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x^2 \pm y^2}$ $y = \pm x$

Теорема о непрерывности суперпозиции.

$f(x_1 \dots x_n)$ непрерывна в т. $P_0(x_1^0, x_2^0 \dots x_n^0)$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(t_1 \dots t_m) \\ &\vdots \\ x_n &= \varphi_n(t_1 \dots t_m) \end{aligned}\right\} \text{непрерывны в т. } T_0(t_1^0 \dots t_m^0)$$

переменные ф. f могут зависит нескольких других переменных

Тогда $f(x_1 \dots x_n) = f(x_1(t_1 \dots t_m), x_2(t_1 \dots t_m), \dots, x_n(t_1 \dots t_m))$ - непрер. в $T_0(t_1^0 \dots t_m^0)$

<u>Доказательство</u>:

$f(x_1, \dots, x_n)$ непр. в т. $P_0(x_1^0, \dots x_n^0) \Leftrightarrow$

$\exists \lim\limits_{P \to P_0} f(x_1 \dots x_n) = f(x_1^0 \dots x_n^0) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$

$\exists \delta(\varepsilon)\ \forall P \in \overset{\circ}{B}_\delta(P_0)$: $\boxed{\left.\begin{aligned} &|x_1 - x_1^0| < \delta \\ &\vdots \\ &|x_n - x_n^0| < \delta \end{aligned}\right\}} \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x_1 \dots x_n) - f(x_1^0 \dots x_n^0)| < \varepsilon$ *

$$\begin{cases} \varphi_1(t_1 \ldots t_m) \text{ - непр.} \\ \vdots \\ \varphi_n(t_1 \ldots t_m) \text{ - непр.} \end{cases} \Leftrightarrow \exists \lim_{T \to T_0} \varphi_1(t_1 \ldots t_m) =$$

$$= \varphi_1(t_1^0 \ldots t_m^0) \Leftrightarrow$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1(\varepsilon) \ \forall T:$

$$\left.\begin{matrix} |t_1 - t_1^0| < \delta_1 \\ \vdots \\ |t_m - t_m^0| < \delta_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow |\varphi_1(T) - \varphi_1(T_0)| < \varepsilon$$

$\Updownarrow$

аналогично, но

$\cancel{\varphi_1} \to \varphi_n$

$\cancel{\delta_1} \to \delta_n$

Если взять $\delta_0 = \min(\delta_i)$, то можно все δ_i заменить на δ_0:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_0(\varepsilon) \ \forall T: \left.\begin{matrix} |t_1 - t_1^0| < \delta_0 \\ \vdots \\ |t_m - t_m^0| < \delta_0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} |\overbrace{\varphi_1(t_1 \ldots t_m)}^{x_1} - \overbrace{\varphi_1(t_1^0 \ldots t_m^0)}^{x_1^0}| < \varepsilon \\ \vdots \\ |\overbrace{\varphi_n(t_1 \ldots t_m)}^{x_n} - \overbrace{\varphi_n(t_1^0 \ldots t_m^0)}^{x_n^0}| < \varepsilon \end{matrix}\right\} **$$

<u>Пример</u>: $f(x,y)$. $\begin{matrix} \rho_0 = 1 \\ \varphi_0 = 0 \end{matrix} \to P_0(1,0)$

$x = \rho\cos\varphi$

$y = \rho\sin\varphi$ непрерывность сохраняется

$$\left.\begin{matrix} * \\ ** \end{matrix}\right\} \Rightarrow |f(t_1^0, \ldots t_m^0) - f(t_1, \ldots t_m)| < \varepsilon$$

$$|f(\overbrace{\varphi_1(t_1 \ldots t_m)}^{x_1}, \ldots, \overbrace{\varphi_n(t_1 \ldots t_m)}^{x_n}) -$$

$$- f(\overbrace{\varphi_1(t_1^0 \ldots t_m^0)}^{x_1^0} \ldots \overbrace{\varphi_n(t_1^0 \ldots t_m^0)}^{x_n^0})| < \varepsilon$$

в итоге нашли конкретное δ

Опр. Связного множества:

Множество E связно, если $\forall P_1, P_2 \in E$ $\exists$ ломаная с началом в P_1 и с концом в P_2, содержащаяся в E.

1. прямая подходит
2. прямая не подходит
3. а ломаная подходит.

Лекция 13 сен.

def Множество G называется **областью**, если оно открытое и связное.

Теорема: Больцано-Коши

G – область, $P_1, P_2 \in G$

$f(P_1) > 0$, $f(P_2) < 0$. $(f: G \subset R^n \to R)$

Тогда $\exists P \in G : f(P) = 0$

Доказательство:

т.к. G – область, то $\exists$ ломаная L, с началом в P_1, и концом в P_2.

1). P – вершина ломаной (очев)

2). $P \in$ звену L, т.е. $P \in \overline{P_k P_{k+1}}$

Прямая $P_k P_{k+1}$ $\quad P_k(p_1^k, p_2^k \dots p_n^k)$, $P_{k+1}(p_1^{k+1} \dots p_n^{k+1})$

$$l = \begin{cases} x_1 = p_1^k + t(p_1^{k+1} - p_1^k) \\ x_2 = p_2^k + t(p_2^{k+1} - p_2^k) \\ \vdots \\ x_n = p_n^k + t(p_n^{k+1} - p_n^k) \end{cases} \quad t \in [0,1]$$

$t \in [0,1]$

$(x_0, y_0), (x_1, y_1)$

$x = x_0 + t(x_1 - x_0)$

$y = y_0 + t(y_1 - y_0)$

$\boxed{\begin{matrix} y = y(t) \\ x = x(t) \end{matrix}}$ $t \in R$

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) = f(p_1^k + t(p_1^{k+1} - p_1^k), \dots, p_n^k + t(p_n^{k+1} - p_n^k)) =$$

$t = 0: \ f(P_k) > 0$

$t = 1: \ f(P_{k+1}) < 0$

$$= f(t), \ f(P_k) > 0, f(P_{k+1}) < 0 \Rightarrow \exists t_0 \in [0,1]:$$
$$f(t_0) = 0 \Rightarrow \exists \ p(p_1^k + t_0(p_1^{k+1} - p_1^k), \dots, p_n^k + t_0(p_n^{k+1} - p_n^k))$$

<u>Теорема</u>: Больцано Вейерштрасса

Последовательность $\{P_k\}$ - ограничена точки $P_k \in R^n$ (т.е. $\exists$ парал. П, в кот. $\{P_k\} \in П$)

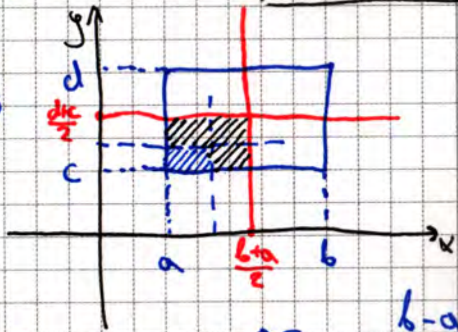
Тогда $\exists$ подпоследовательность P_{n_k}, которая сходится к предельной точке.

<u>Доказательство</u>:

$\mathbb{R}^2$ для удобства рисования

$\boxed{P_{k_n} \text{ — подпосл. послед } P_k}$

$\Pi = \{(x,y): a \le x \le b, \; c \le y \le d\}$



Хотя бы в одном Π будет ∞ много точек

После k делений, длины Π будут $\frac{b-a}{2^k}, \frac{d-c}{2^k}$

$\Pi_k: (x_k, y_k) \quad a_k \le x_k \le b_k, \; c_k \le y_k \le d_k$

$[a_{k+1}, b_{k+1}] \subset [a_k, b_k] \subset \ldots \subset [a; b] \qquad b_k - a_k \to 0$

$[c_{k+1}, d_{k+1}] \subset [c_k, d_k] \subset \ldots \subset [c, d] \quad d_k - c_k \to 0.$

По лемме о вложенных сегментах

$\exists!$ т.

Таким образом $\exists \; P_0(x_0, y_0)$ - пред. т.

В каждом Π берём одну т. из P_n и

обозначим P_{k_n}

$a_k \le x_{k_n} \le b_k \qquad c_k \le y_{k_n} \le d_k$

если $|x_{k_n} - x_0| \to 0$, то x_0 - предел

т.к. $|x_{k_n} - x_0| \le |b_k - a_k| \to 0 \Rightarrow x_{k_n} \to x_0$

$y_{k_n} \to y_0$

Лекция 18 сен. №4

Равномерная непрерывность:

def: $f(x,y): E \subset R^2 \to R$ $\quad \rho(P_1,P_2)$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) \ \forall P_1, P_2 \in E : \|P_1 - P_2\| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(P_1) - f(P_2)| < \varepsilon$

Теорема Кантора

$f(x,y)$ – непрерывна на компакте $K \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x,y)$ равн. непрер. на K

Дифференцирование ф-ий нескольких переменных.

def $f(x,y,z)$ – наз. дифф. в т. $P_0(x_0,y_0,z_0)$, если она опред. в т. P_0 и её приращение выраж. как *.

$\Delta f(x,y,z) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) - f(x_0,y_0,z_0) =$

$A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + \bar{o}(\Delta x) + \bar{o}(\Delta y) + \bar{o}(\Delta z) \ominus$

A, B, C – числа

$\ominus \ A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + (\alpha\Delta x + \beta\Delta y + \gamma\Delta z)$ *

$\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y, \Delta z), \ \beta = \beta(\Delta x, \Delta y, \Delta z), \ \gamma = \gamma(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$

$\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0 \Rightarrow \alpha, \beta, \gamma \to 0$

Нигде не сказано, что A, B, C – производные.

Непрерывность

$f(x,y,z)$ - дифф. в т. P_0 => $f(x,y,z)$ - непр. в т. P_0

Доказательство:

$f(x,y,z)$ - дифф. в т. P_0 <=> $\Delta f(P_0) =$

$$= \underbrace{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)}_{P_\Delta} - f(x_0,y_0,z_0) =$$

$$= A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + \alpha \Delta x + \beta \Delta y + \gamma \Delta z$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0\\ \Delta z\to 0}} \Delta f(P_0) = 0 \qquad \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0\\ \Delta z\to 0}} [f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) - f(x_0,y_0,z_0)] = 0$$

$$\lim_{P\to P_0} f(x,y,z) = f(x_0,y_0,z_0) \Leftrightarrow f \text{ - непр. в т. } P_0$$

def

$$f'_x(x_0,y_0,z_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y, z) - f(x_0,y_0,z_0)}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$f'_y(x_0,y_0,z_0)$ - аналогично $= \frac{\partial f}{\partial y}$

Утверждение:

$f(x,y,z)$ - дифф. в т. P_0 = $\frac{\partial f}{\partial x}(P_0), \frac{\partial f}{\partial y}(P_0), \frac{\partial f}{\partial z}(P_0)$

Доказательство:

$f(x,y,z)$ дифф в т. P_0 <=> $\exists\, \Delta f(P_0) =$

$= f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) - f(x_0, y_0, z_0) =$

$= A\cdot\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + \alpha\,\Delta x + \beta\Delta y + \gamma\Delta z$

$\Delta y = \Delta z = 0 \quad \Delta x = \Delta x$

$f(x_0+\Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0) = A\cdot\Delta x + \alpha\Delta x \quad \Big| : \Delta x$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x} = A + \lim_{x\to 0}\alpha$$

$\overset{def}{\|}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = A$ аналогично $\frac{\partial f}{\partial y} = B$, $\frac{\partial f}{\partial z} = C$

Пример:

① $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$

$f(0,0) = 0 \quad P_0(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = y\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2}\right) = y\left(\frac{1(x^2+y^2) - 2x\cdot x}{(x^2+y^2)^2}\right) =$$

$$= y\left(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right)\Big|_{(0,0)} = 0$$

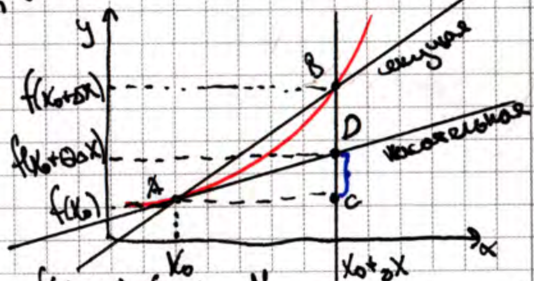
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = x\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{x^2+y^2}\right) = 0$$

② $f(x,y) = \sqrt{|x\cdot y|}$

$\Delta f = DC + \bar{o} = BD$

$\downarrow$

0



$$\frac{BC}{AC} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{df}{dx} = \frac{DC}{AC}$$

Лекция 20 сен.

Продолжение примера ②:

$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ – непр. (необходимое усл. дифф. вып.)

$P_0(0,0)$ $\boxed{\Delta x=\Delta y}$ * вместо x_0 подст. 0, пол. Δx а не $\Delta x+x_0$

$$f'_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to\infty}\frac{\sqrt{|\Delta x\cdot y_0|}-\sqrt{|x_0y_0|}}{\Delta x}=0$$

$$f'_y=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to\infty}\frac{\sqrt{|\Delta y\cdot x_0|}-\sqrt{|x_0y_0|}}{\Delta y}=0$$

$$\Delta f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=$$

$$\sqrt{|\Delta x\cdot\Delta y|}-0 \ominus \;=A\Delta x+B\Delta y+\underbrace{\alpha\Delta x+\beta\Delta y}_{=\bar{o}(\rho)=\bar{o}\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)}$$

$$\ominus\; 0\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y+\bar{o}\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)=$$

Т.к. *, то $=\sqrt{|\Delta x^4|}=\bar{o}\left(\sqrt{2\Delta x^2}\right)$

$$|\Delta x|=\bar{o}\left(\sqrt{2(\Delta x)^2}\right)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}1=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\bar{o}\left(\sqrt{2(\Delta x)^2}\right)}{\Delta x}\to 0$$

функция не явл. дифф. $1\neq 0$!!

Теорема: (Достаточное усл. дифф-ти)

$\exists\, f'_x, f'_y$ – определены и непр. в т. P_0,

тогда $f(x,y)$ – дифф. в точке P_0.

Доказательство:

$$\Delta f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\overset{?}{=}$$

$$= f'_x\cdot\Delta x+f'_y\cdot\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y$$

$\alpha,\beta\to 0$ при $\Delta x,\Delta y\to 0$

$= f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - \underbrace{f(x_0, y_0+\Delta y) + f(x_0, y_0+\Delta y)} - f(x_0,y_0)$

Видим т. Лагранжа для x_0 при фикс. y. Запишем:

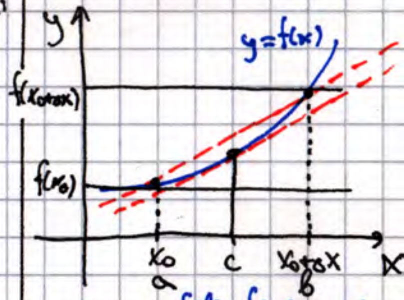
$\cancel{f'_x(x_0+\theta_1\Delta x)\cdot\Delta x + f(x_0,}$

$$f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)\cdot\Delta x + f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) =$$

$$= f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)\cdot\Delta x + f'_y(x_0, y_0+\theta_2\Delta y)\cdot\Delta y + f'_x(x_0,y_0)\Delta x - f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y - f'_y(x_0,y_0)\Delta y = \quad (\theta_1,\theta_2\in[0,1])$$

$$= \underbrace{f'_x(x_0,y_0)\Delta x}_{A} + \underbrace{f'_y(x_0,y_0)\Delta y}_{B} + \underbrace{\left(f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y) - f'_x(x_0,y_0)\right)\Delta x}_{\alpha(\Delta x,\Delta y)} + \underbrace{\left(f'_y(x_0, y_0+\theta_2\Delta y) - f'_y(x_0,y_0)\right)\Delta y}_{\beta(\Delta x,\Delta y)}$$

Вспомним т. Лагранжа:



$\exists\, c: \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

$\exists\, \theta\in[0,1]$

$\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0+\theta\Delta x)$

$f(x_0+\Delta x)-f(x_0) = f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x$

Пример:

$y = x\sin\frac{1}{x}$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\sin\frac{1}{\Delta x}$$

$\nexists$, $\frac{1}{\Delta x}\to\infty$

$z = \sqrt{x^2+y^2}\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Но если доопределить ф-ю в т.0 нулём, то $\lim\limits_{x\to\pm 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$. Разрыв устранимый

$f(x)\in C$

$f(x)\in C^1$

лекция №5 1:34 пример

Теорема. (Дост. усл. дифф.-и)   Пр.: $y=|x|$ не вып.

$\exists f'_x, f'_y, f'_z$ - непр. в т. $P_0 \Rightarrow f(x,y,z)$ - диф. в P_0.

Лекция 25 сен. №6

Теорема: о производной сложной ф-ции

На примере двух переменных

$f(x,y)$ - дифф. в т. (x_0, y_0)

$x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ - непрер. дифф. в точке t_0

Тогда $F(t)=f(\varphi(t), \psi(t))$ - дифф. в т. t_0

$F'(t_0)=f'_x \cdot \varphi'_t(t_0)+f'_y \cdot \psi'_t(t_0)$

Это пр. в т., => подставлен значение (x_0,y_0)

Пример: $f(x,y)=x+y^2$

$x=3t \quad y=2t^2$

$F(t)=3t+(2t^2)^2$

В примере производная $\frac{dF}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot 3+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot 4t=$

Подставим при $t_0=1$. $(x_0,y_0)=(3,2)$

$1\cdot 3+2y\cdot 4t=$

$=3+2\cdot 2\cdot 4\cdot 1=19$

Доказательство:

$f(x,y)$ - дифф. в т. $(x_0,y_0) \Leftrightarrow \Delta f(x_0,y_0)=$ *

$=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)\Delta x+$

$+f'_y(x_0,y_0)\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y$, $\alpha,\beta\to 0$ при $\Delta x\to 0$

$\exists\ \varphi_t'(t_0)$ - непр. $\Rightarrow \varphi(t_0+\Delta t)-\varphi(t_0)\to 0$

$\exists\ \psi_t'(t_0)$ - непр. $\Rightarrow \psi(t_0+\Delta t)-\psi(t_0)\to 0$ $\quad \Delta t\to 0$

Обозначим: $\Delta x=\varphi(t_0+\Delta t)-\varphi(t_0)$ $\quad$ По усл.: $x_0=\varphi(t_0)$

$\Delta y=\psi(t_0+\Delta t)-\psi(t_0)$ $\quad y_0=\psi(t_0)$

Тогда: $x_0+\Delta x=\varphi(t_0)+\varphi(t_0+\Delta t)-\varphi(t_0)=\varphi(t_0+\Delta t)$

$y_0+\Delta y=\psi(t_0)+\underline{\psi(t_0+\Delta t)}-\psi(t_0)=\psi(t_0+\Delta t)$

$\Rightarrow \Delta x=\varphi(t_0+\Delta t)-\varphi(t_0)$
$\Delta y=\psi(t_0+\Delta t)-\psi(t_0)$

Подставим в $*$:

$$\Delta f(\underset{\varphi(t_0)}{x_0},\underset{\psi(t_0)}{y_0})=f_x'(\varphi(t_0),\psi(t_0))[\varphi(t_0+\Delta t)-\varphi(t_0)]+$$

$$+f_y'(\varphi(t_0),\psi(t_0))[\psi(t_0+\Delta t)-\psi(t_0)]+$$

$$+\alpha[\varphi(t_0+\Delta t)-\varphi(t_0)]+\beta[\psi(t_0+\Delta t)-\psi(t_0)]$$

Поделим:

$$\frac{\Delta f}{\Delta t}=\underbrace{f_x'(x_0,y_0)\frac{\varphi(t_0+\Delta t)-\varphi(t_0)}{\Delta t}}_{\lim\limits_{\Delta t\to 0}\to\varphi_t'(t_0)}+\underbrace{f_y'(x_0,y_0)\frac{\psi(t_0+\Delta t)-\psi(t_0)}{\Delta t}}_{\lim\limits_{\Delta t\to 0}\to\psi_t'(t_0)}+$$

$$+\overset{\nearrow 0}{\alpha}\frac{\varphi(t_0+\Delta t)-\varphi(t_0)}{\Delta t}+\overset{\nearrow 0}{\beta}\frac{\psi(t_0+\Delta t)-\psi(t_0)}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta t}=f_x'(x_0,y_0)\cdot\varphi_t'(t_0)+f_y'(x_0,y_0)\cdot\psi_t'(t_0)\quad\blacktriangle$$

Пример: $f(x,y)=f(x(u,v),y(u,v))$

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$$

$f(x,y)$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{*}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}^{**}$$

лучше писать $*$ а потом $**$, чтобы был очевиден порядок.

Пример: $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(2x)(x^2-y^2) - 2x(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)}$$

Так и так норм писать

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x(x^2-y^2-x^2-y^2)}{(x^2-y^2)^2}\right) = \left(\frac{2x(x^2-y^2-x^2-y^2)}{(x^2-y^2)^2}\right)'_y$$

Теорема: о равенстве смешанных произв.

$f(x,y)$ определена в т. (x_0,y_0) и имеет в этой точке непрер. смеш. произв. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Спойлер: для $f(x,y,z)$ – частн. пр. будут 6.

Тогда $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ (в т. (x_0,y_0))

Доказательство: * Зададим ф-ю w:

$$w = \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)}{kh} \ominus$$

Введём ф-ии: * разобьём на слагаемые

$$\varphi = \frac{f(x_0+h, y) - f(x_0, y)}{k} = \varphi(y)$$

$$\psi = \frac{f(x, y_0+k) - f(x, y_0)}{h} = \psi(x)$$

По сути вместо y подставили опред. знач.

$$\ominus \frac{1}{h}\left[\underbrace{\frac{f(x_0+h, \overset{\text{"}y\text{"}}{y_0+k}) - f(x_0, \overset{\text{"}y\text{"}}{y_0+k})}{k}}_{\varphi(y_0+k)} - \underbrace{\frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{k}}_{\varphi(y_0)}\right] =$$

$$= \frac{1}{h}\left[\varphi(y_0+k) - \varphi(y_0)\right] = \frac{1}{h} \underbrace{\frac{\varphi(y_0+k) - \varphi(y_0)}{k}}_{\varphi'(y_0)} \cdot k =$$

$$= \frac{1}{h}\varphi'(y_0+\theta_1 k)\cdot k =$$

φ' – дифф. по y. $\theta_1 \in [0,1]$ ← По т. Лагранжа доказ

$$= \frac{k}{h}\,\frac{\overbrace{f'_y(x_0+h_0, y_0+\theta_1 k)}^{\substack{g(x_0+h)\\ \text{ф-ция по 1 арг}}} - \overbrace{f'_y(x_0, y_0+\theta_1 k)}^{\substack{g(x_0)\\ \text{число}}}}{k} =$$

$$= f''_{yx}(x_0+\theta_2 h, y_0+\theta_1 k)$$
$$(\theta_1, \theta_2 \in [0,1])$$

Вынесем $\frac{1}{k}$ из ф-ции w:

$$w = \frac{1}{k}\varphi'_x(x_0+\theta_3 h) = \ldots = f''_{xy}(x_0+\theta_3 h, y_0+\theta_4 k)$$
$$(\theta_3, \theta_4 \in [0,1])$$

$k \to 0$, $h \to 0$: $x_0+\theta_2 h \to x_0$
$x_0+\theta_3 h \to x_0$
$y_0+\theta_1 k \to y_0$
$y_0+\theta_4 k \to y_0$

$$\left\{ f''_{xy}(x_0,y_0) = f''_{yx}(x_0,y_0) \right\}$$

КЛАС

Получаем, что следующие пределы равны:

$$\lim_{\substack{k\to 0\\ h\to 0}} f''_{yx}(x_0+\theta_2 h, y_0+\theta_1 k) = \lim_{\substack{k\to 0\\ h\to 0}} f''_{xy}(x_0+\theta_3 h, y_0+\theta_4 k)$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\lim_{k\to 0}\frac{\varphi'_y(y_0+\theta_1 k)}{h}\right)$$

Получаем, что смешанные производные равны, когда ф-я имеет пр. в точке и смешанные производные непрерывны. ▲

Лекция 27 сен 1/2

Дифференциация.

$f(x): D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ частные дифф-лы

$df(x_0) = f'_x(x_0)dx$ $\quad \Delta f(x_0) = f'_x(x_0)\Delta x + \bar{o}(\Delta x)$

$f(x,y,z): D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$: $f'_x dx$; $f'_y dy$; $f'_z dz$ в точке x_0.

полный дифференциал

$$df(x_0,y_0,z_0) = f'_x(x_0,y_0,z_0)dx + f'_y(x_0,y_0,z_0)dy + f'_z(x_0,y_0,z_0)dz$$

$$\Delta f(x_0,y_0,z_0) = f'_x(x_0,y_0,z_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0,z_0)\Delta y + f'_z(x_0,y_0,z_0)\Delta z + \bar{o}(\rho)$$

$$\frac{\rho}{\rho}(\alpha\cdot\Delta x + \beta\Delta y + \gamma\cdot\Delta z) = \rho\left(\frac{\alpha\Delta x}{\rho} + \frac{\beta\Delta y}{\rho} + \frac{\gamma\Delta z}{\rho}\right)$$

$$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

<u>Пример:</u>

$$f(x,y) = \sqrt{(3,02)^2 + (3,97)^2} \approx 4,988$$

$$f(x_0,y_0) = f(3,4) = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\Delta x = 0,02 \quad \Delta y = -0,03$$

$$d(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right)\Big|_{(x_0,y_0)} =$$

$$= 3/5 \cdot 0,02 - 4/5 \cdot 0,03 = (0,06 - 0,12)/5 = -0,06/5 = -0,012$$

Инвариантность формы первого дифференциала.

$f(x,y,z)$: $D: R^3 \to R$ – непрерывная в D,

f'_x, f'_y, f'_z – непр. в D.

$$\left\{\begin{array}{l} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \\ z = \chi(u,v) \end{array}\right. \Bigg| \text{ – непрерывны в } D^*, \ \begin{array}{l} \varphi'_u, \varphi'_v \\ \psi'_u, \psi'_v \\ \chi'_u, \chi'_v \end{array} \Bigg| \text{ – непрерывны в } D$$

$F(u,v) = f(\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v))$ – непрерывна

$\exists\ F'_u = f'_x \cdot \varphi'_u + f'_y \cdot \psi'_u + f'_z \cdot \chi'_u$ (по т. о дифф-сти сложн. ф-ции)

$F'_v = f'_x \cdot \varphi'_v + f'_y \cdot \psi'_v + f'_z \cdot \chi'_v$

$dF(u,v) = F'_u du + F'_v dv = [f'_x \cdot \varphi'_u + f'_y \cdot \psi'_u + f'_z \cdot \chi'_u] du$

$+ [f'_x \cdot \varphi'_v + f'_y \cdot \psi'_v + f'_z \cdot \chi'_v] dv =$

$= f'_x(\varphi'_u du + \varphi'_v dv) + f'_y(\psi'_u du + \psi'_v dv) + f'_z(\chi'_u du + \chi'_v dv)$

$= \begin{bmatrix} d\varphi(u,v) = \\ \varphi'_u du + \varphi'_v dv \end{bmatrix} = f'_x \cdot d\varphi + f'_y \cdot d\psi + f'_z \cdot d\chi$

$= \begin{bmatrix} x = \varphi & & dx = d\varphi \\ y = \psi & \Rightarrow & dy = d\psi \\ z = \chi & & dz = d\chi \end{bmatrix} = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz$

При параметризации ничего не сломается.

Лекция 27 сен 2/2

$df(x,y,z) = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz$

$d(df) \overset{?}{=}$

$\frac{\partial}{\partial x}(df) = \frac{\partial}{\partial x}(f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz) = f''_{xx} dx + f''_{yx} dy + f''_{zx} dz$

$\frac{\partial}{\partial y}(df) = \frac{\partial}{\partial y}(\ldots) = f''_{xy} dx + f''_{yy} dy + f''_{zy} dz$ непрерывны

$\frac{\partial}{\partial z}(df) = \frac{\partial}{\partial z}(\ldots) = f''_{xz} dx + f''_{yz} dy + f''_{zz} dz$

$\underbrace{f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{yy}, f''_{yz}, f''_{zy}, f''_{zz}, f''_{zx}, f''_{xz}}$

$\Rightarrow \overbrace{f''_{zx} = f''_{xz},\ f''_{yx} = f''_{xy},\ f''_{yz} = f''_{zy}}$

$$d^2f = d(df) = \frac{\partial}{\partial x}(df)dx + \frac{\partial}{\partial y}(df)dy + \frac{\partial}{\partial z}(df)dz =$$

$$= [f''_{xx}dx + f''_{yx}dy + f''_{zx}dz]dx + [f''_{xy}dx +$$

$$+ f''_{yy}dy + f''_{zy}dz]dy + [f''_{xz}dx + f''_{yz}dy + f''_{zz}dz]dz =$$

$$= f''_{xx}d^2x + f''_{yx}dydx + f''_{zx}dzdx + f''_{xy}dxdy + f''_{yy}d^2y +$$

$$+ f''_{zy}dzdy + f''_{xz}dxdz + f''_{yz}dydz + f''_{zz}d^2z =$$

$$= f''_{xx}d^2x + f''_{yy}d^2y + f''_{zz}d^2z +$$

$$+ 2f''_{zy}dzdy + 2f''_{yx}dxdy + 2f''_{zx}dxdz =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 \cdot f \quad *$$

$$d^nf = d(d^{n-1}f) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right)^n \cdot f$$

$$d(f'_x dx) = d(f'_x)dx + f'_x dx^2$$

$$d(f'_y dy) = d(f'_y)dy + f'_y dy^2$$

$$d(f'_z dz) = d(f'_z)dz + f'_z dz^2$$

$$d^2f = d(df) = d(f'_x)dx + f'_x dx^2 +$$

$x = \varphi(u,v)$

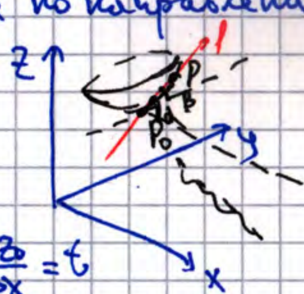
$$+ d(f'_y)dy + f'_y dy^2 + d(f'_z)dz + f'_z dz^2 =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f + \underset{\neq 0}{f'_x dx^2} + \underset{\neq 0}{f'_y dy^2} + \underset{\neq 0}{f'_z dz^2} \neq *$$

Следовательно, инвариантности нет.
В первом дифф. при параметризации форма (вид) не меняются. Во втором дифф. не так!

Производная по направлению.

$$\lim_{P\to P_0}\frac{f(P)-f(P_0)}{|PP_0|} =$$



$\bar{l}$ $\quad \frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\cos\beta}=\frac{z-z_0}{\cos\gamma}=t$

Направляющий вектор прямой l.

$P(x,y,z)$

$P_0(x_0,y_0,z_0)$

$$\begin{cases} x-x_0=t\cos\alpha \\ y-y_0=t\cos\beta \\ z-z_0=t\cos\gamma \end{cases}$$

$$\bar{l}=(\overset{=l_1}{\cos\alpha},\overset{=l_2}{\cos\beta},\overset{=l_3}{\cos\gamma}),\quad |\bar{l}|=1$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

$$\frac{x-x_0}{l_1}=\frac{y-y_0}{l_2}=\frac{z-z_0}{l_3} \qquad \vec{l}(l_1,l_2,l_3)$$

$$= \lim_{P\to P_0}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,\,y_0+t\cos\beta,\,z_0+t\cos\gamma)-f(x_0,y_0,z_0)}{|PP_0|}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{F(t)-F(0)}{|t|}=F'(0) =$$

$$|PP_0|=\sqrt{t^2\cos^2\alpha+t^2\cos^2\beta+t^2\cos^2\gamma}=|t|$$

$$= \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}\cdot\cos\alpha+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}\cdot\cos\beta+\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}\cdot\cos\gamma$$

$$\| $$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}$$

Поиск направления с наиб. ростом у функ-ции

$\frac{\partial f}{\partial x}=a,\ \frac{\partial f}{\partial y}=b,\ \frac{\partial f}{\partial z}=c$

$\frac{\partial f}{\partial l}$ ← обозначение производной по направлению

$$\frac{\partial f}{\partial l} = a\cdot\cos\alpha + b\cdot\cos\beta + c\cdot\cos\gamma =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2+c^2}\underbrace{\left(\frac{a\cos\alpha}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} + \frac{b\cos\alpha}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} + \frac{c\cos\gamma}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)}_{\text{некое направление } \vec{s}\text{, причём } |\vec{s}|=1} =$$

$$= \underbrace{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}_{\|\ \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}\underbrace{(\vec{s},\vec{l})}_{\text{скалярн. произв}}$$

Вектор градиента $\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$

Лекция 4 окт.

Неявно заданные функции.

$z = f(x,y)$, $f: E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

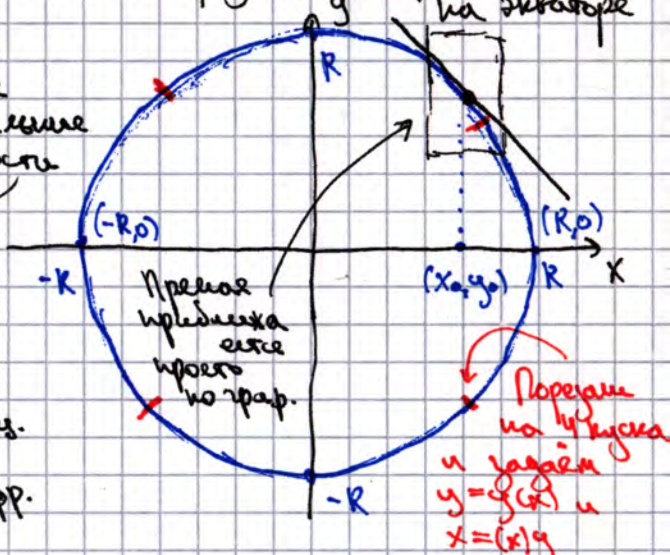
$x^2+y^2+z^2 = R^2$ ← Не функции, проблемы на экваторе

$x^2-y^2 = R^2$

↓ некоторые функциональные зависимости

$F(x,y,z) = 0$

$F(x,y) = 0$



Пример:

$$\begin{cases} y = \sqrt{1-x^2},\ x\text{-раз.} \\ y = -\sqrt{1-x^2},\ x\text{-upp.} \end{cases}$$

$$F'_x\big|_{(x_0,y_0)}(x-x_0) + F'_y\big|_{(x_0,y_0)}(y-y_0)$$

$$F(x,y) = F'(x_0,y_0) + F'_x(x-x_0) + F'_y(y-y_0) + \bar{o}(\rho)$$

$\parallel$ (разложение в ряд Тейлора)

0, т.к. $F(x,y) = x^2+y^2-R^2=0$

<u>Определение</u>: Регулярная поверхность

Множество точек $S \subset \mathbb{R}^3$ называется Р.П., если в окрестности каждой своей точки его можно представить в виде функц. зависимости ($z=f(x,y)$) в соответствующих декартовых коорд.

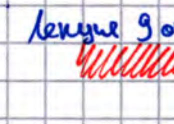
Способы задания поверхности.

1. $F(x,y,z) = z - f(x,y) = 0$ как нули ф. $F(x,y,z)$

$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ в окр. т. (x_0,y_0), т.е. $z-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$

2. $\varphi \begin{cases} x=(u,v) \\ y=(u,v) \\ z=(u,v) \end{cases}$ $(u,v) \to (x,y,z)$

параметрическое задание



Теорема о неявно заданной функции. лекция 9 окт.

$F: U \to \mathbb{R}^n$ - гладкое отображение | Если

$U \subset \mathbb{R}^{n+k}$, $x \in U: (x^1, \dots x^{n+k})$

$F(F_1, \dots, F_n)$, $F_i: U \to \mathbb{R}$ – непр. функция

$F(x_0) = 0$ $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x^{k+j}}\right)_{1 \le i,j \le n}$ – матрица обратима

это индексы?

$(x_0^1, \dots, x_0^{n+k}) = x_0$

$x_0 \in U$

Было пространство $\mathbb{R}^n$, расширили до $\mathbb{R}^{n+k}$, k шт. коорд.

Тогда существует область

V – окрестность точки $x_0 \in \mathbb{R}^{n+k}$ и область

W – окрестность точки $(x_0^1, \dots, x_0^k) \in \mathbb{R}^k$ такие, что:

1). В области W существуют гладкие [непрерывные] ф-ии $f_i: W \to \mathbb{R}$ (функций n штук)

2). $\forall$ точки $x = (x^1, \dots, x^{n+k}) \in V$ $\exists$ точка

3). $F(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^{k+1} = f_1(x^1, \dots x^k) \\ x^{k+2} = f_2(x^1, \dots x^k) \\ \vdots \\ x^{k+n} = f_n(x^1, \dots x^k) \end{cases}$ $(x^1, \dots, x^k) \in W$

Суть: мы рассматриваем отображения $\mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^n$, и рассматриваем проекцию точки x_0 из $\mathbb{R}^{n+k}$ на $\mathbb{R}^k$ (первые k координат).

Двумерный случай: $(F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$

$F: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^2$, $n = 1$, $k = 1$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

1). $F \in C^p(u)$ $p \geq 1$ 3). $F'_y(x_0,y_0) \neq 0$

2). $F(x_0,y_0) = 0$ Декартово произведение

Тогда $\exists\ J = J_x \times J_y$, $J_x = \{x : |x - x_0| < a\}$

$J_y = \{y : |y - y_0| < b\}$

$\exists\ f : J_x \to R$

$F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$ $\forall (x,y) \in J$

Можно представить зависимость одной координаты мн. J с помощью ф. завис.

Теорема о дифференцируемости неявно заданной функции. Лекция Понт.

$z = f(x,y)$

$dz = f'_x dx + f'_y dy$ Производная выходит

$F(x,y,z) = 0$ также: $dz = f'_x(dx) + f'_y dy$

$z'_x,\ z'_y \leftarrow$ Это именно производные ф-ции z

$F(x,y) = 0$ производная функции одна - y'_x

частные произв. ур-я поверхн. - $F'_x ; F'_y$

<u>Теорема:</u> $\exists\ F(x,y) = 0$

$\exists\ F'_y$ и она непрерывна в т. (x_0,y_0) и $F'_y(x_0,y_0) \neq 0$

и $\exists\ F'_x(x_0, y_0)^*$, также $F(x,y)$ - непрерыв.

Тогда $\exists\ y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}$ $^*\exists$ в окрестности (x_0,y_0)

Доказательство:

$$y'_x \stackrel{def}{=} \frac{dy}{dx} \stackrel{def}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = ?$$

Теорема Лагранжа

$f(x)$ - непр. на $[a;b]$ дифф-ма

$$\Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

$$\Delta F(x_0,y_0) = \underbrace{F(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)}_{=0} - \underbrace{F(x_0,y_0)}_{=0} =$$

$$= F(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - F(x_0, y_0+\Delta y) +$$

$$+ F(x_0, y_0+\Delta y) - F(x_0,y_0) =$$

$$= F'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)\Delta x + F'_y(x_0, y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y = 0$$

$\theta_1 \in [0,1]$ $\theta_2 \in [0,1]$

$$\left\{\begin{array}{l}(x_0,y_0)\in F\\ (x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\in F\end{array}\right. \Bigg| \Rightarrow F=0 \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)}{F'_y(x_0, y_0+\theta_2\Delta y)}$$

$$\frac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}$$

$\blacktriangle$

Лемма 1.

Множество $S \subset R^3$ образует регулярную поверхность $\Leftrightarrow$ если в каждой своей окрестности $U \in S$ оно задаётся нулями,

т.е. $F(x,y,z)=0$

Тогда на поверхности называется **не особой**, если градиент от ф-ции, задающей поверхность, не обращ. в 0.

Доказательство:

$\Rightarrow S \subset R^3 \overset{def}{\Rightarrow} \exists U \in S \quad z=f(x,y) \Rightarrow$

$z-f(x,y)=0 \Leftarrow f(x,y,z)=0$, пусть все точки $U \in S$ – неособые.

пусть $\frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial z} \neq 0$

Тогда по Т. о неявно заданной ф-ции

$\exists U^* \in U \in S \quad \exists f(x,y): U^* \to R: \ z=f(x,y)$ в U^*

Пример: нарушается в $(0,0)$ у конуса $z^2=x^2+y^2$.

Лемма 2.

Множество $S \subset R^3$ образует регулярную поверхность $\Leftrightarrow$ если в каждой своей окрестности $U \in S$ оно задаётся гладким отображением r.

$r: (u,v) \to (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ и $\frac{d\vec{r}}{du}, \frac{d\vec{r}}{dv}$ – линейно независимы.

Доказательство:

$\Rightarrow$ рег. поверхность $\Rightarrow$ она задаётся парам.

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = z(x,y) \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$$ по т. об обр. ф. $\exists$ обр. ф.

$\Leftarrow$ $r(u,v)$ и $\frac{dr}{du}, \frac{dr}{dv}$ ЛНЗ

$r: V \to U \subset R^3$

$\exists\ (x,y) \to (u(x,y), v(x,y)$

$z(u,v) = z^*(u(x,y), v(x,y) = z^*(x,y)$

Поверхность регулярная $\Leftrightarrow$ $\exists$ 2 способа задания

Лекция 16 окт.

Касательное пространство.

Локальные координаты.

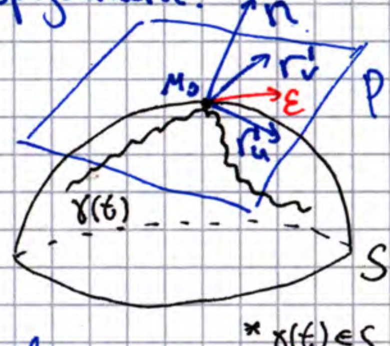
① $F(x,y,z) = 0$

② $r(u,v)$: $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$

Гладкая кривая на S

$\hookrightarrow \gamma(t): t \to (u(t), v(t)) \to$

$\to \underbrace{x(u(t),v(t)),\ y(u(t),v(t)),\ z(u(t),v(t))}_{r(u(t),v(t))}$



$^*\gamma(t) \in S$

(взяли M_0 на $\gamma(t)$)

ε – вектор скорости $\gamma(t)$ в M_0.

Как взять эту производную?

$$\frac{d(r(u(t),v(t)))}{dt} = \frac{\partial r}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt} + \frac{\partial r}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt} = u'_t\cdot \underset{\sim}{r'_u} + v'_t\cdot \underset{\sim}{r'_v}$$

Остаются пост. при параметризации и обр. базис

r'_u, r'_v — образуют базис в т. M_0

Любой $\vec{\xi} = a\cdot r'_u + b\cdot r'_v$ — вектор скорости вдоль кривой на поверхности S.

Ремарочка:

$z = f(x,y) \Leftrightarrow$

$$r: \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x,y) \end{cases}$$

$$r'_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f'_x \end{pmatrix} \quad r'_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f'_y \end{pmatrix}$$

Т.е. r — это отобр. из $R^2 \to R^3$, а $f: S \to R$ — гладкое

Касательное пространство — это все плоскости P, порождённые для каждой M_0 на $\sigma(t)$, причём пространство двумерное и одинаково для любой $\sigma(t)$.

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f'_x \\ 0 & 1 & f'_y \end{vmatrix} = \vec{i}(-f'_x) - \vec{j}(f'_y) + \vec{k}\cdot 1 \Rightarrow (A,B,C) = $$
$$= \vec{n}(\mp f'_x, \mp f'_y, \pm 1)$$

Плоскость P: $A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$

$-f'_x(x-x_0) - f'_y(y-y_0) + z - z_0 = 0$

$f'_x(x-x_0) + f'_y(y-y_0) = z - z_0 \leftarrow$ у-е кас. плоск. 1

$$\left.\begin{aligned} x(u(t), v(t)) &= x(t) \\ y(u(t), v(t)) &= y(t) \\ z(u(t), v(t)) &= z(t) \end{aligned}\right| \longrightarrow F(x,y,z) = 0 \Rightarrow$$

$F(x(t), y(t), z(t)) = 0$ $\qquad \dfrac{dF}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial x}\cdot\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial F}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{\partial F}{\partial z}\cdot\dfrac{dz}{dt}$

$\overrightarrow{\operatorname{grad} F} = \left(\dfrac{\partial F}{\partial x}, \dfrac{\partial F}{\partial y}, \dfrac{\partial F}{\partial z}\right)$ Градиент

$\varepsilon = x'_t, y'_t, z'_t$ - вектор скорости

$(\overrightarrow{\operatorname{grad} F}, \vec{\varepsilon})$

Оно равно 0, значит → скалярное произведение

градиента и вект. скор. ортогональны

$\boxed{\vec{n} = \overrightarrow{\operatorname{grad} F}}$

$F'_x(x-x_0) + F'_y(y-y_0) + F'_z(z-z_0) = 0$ ур-е кас. плоск. (2)

Волшебные формулы:

гауссова кривизна $K = f''_{xx}\cdot f''_{yy} - f''_{xy}\cdot f''_{yx} =$

средняя кривизна $H = \frac{1}{2}(f''_{xx} + f''_{yy})$ $\qquad = (f''_{xy})^2$

(в случае гладк.)

Если $K > 0$, то ф-я $f(x,y)$

имеет в точке минимум если $H < 0$ и

максимум, если $H > 0$, и в окрестности

точки ~~плоско~~ поверхность лежит по одну

сторону от касательной плоскости.

А если $K < 0$, то поверхность лежит по

обе стороны от касательной плоскости.

Длина дуги на поверхности.

Локальные координаты.

$\gamma(t) \in S$ [рисунок из прошлой лекции]

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad \left.\begin{aligned} \dot{x} &\overset{def}{=} x'_t \\ \dot{y} &= y'_t \\ \dot{z} &= z'_t \end{aligned}\right| \text{ обозначение произв (полной)}$$

r'_u, r'_v - линейно независимы

$\vec{\varepsilon} = a \cdot r'_u + b \cdot r'_v$ - вектор такого вида - это вектор скорости

$r(u,v)$, где $u = u(t)$, $v = v(t)$

причём $(u,v) \to (x,y,z)$, каждой паре ≤ 1 точки

$$\frac{dr(u,v)}{dt} = \dot{r} = r'_u \cdot \frac{du}{dt} + r'_v \cdot \frac{dv}{dt} \; ; \; r'_u = \begin{pmatrix} x'_u \\ y'_u \\ z'_u \end{pmatrix} ; \; r'_v = \begin{pmatrix} x'_v \\ y'_v \\ z'_v \end{pmatrix}$$

$$r: \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$$ - поверхность задаётся явно

Хочется посчитать длину кр.

$$\begin{cases} x = x(u(t), v(t)) \\ y = y(u(t), v(t)) \\ z = z(u(t), v(t)) \end{cases}$$

$$x'_t = \dot{x} = x'_u \cdot \frac{du}{dt} + x'_v \cdot \frac{dv}{dt}$$

$$y'_t = \dot{y} = y'_u \cdot \frac{du}{dt} + y'_v \cdot \frac{dv}{dt}$$

$$z'_t = \dot{z} = z'_u \cdot \frac{du}{dt} + z'_v \cdot \frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = (x'_u \dot{u} + x'_v \dot{v})^2 + (y'_u \dot{u} + y'_v \cdot \dot{v})^2 + (z'_u \cdot \dot{u} + z'_v \cdot \dot{v})^2 =$$

$$= (x'_u \cdot \dot{u})^2 + 2x'_u \cdot \dot{u} \cdot x'_v \cdot \dot{v} + (x'_v \cdot \dot{v})^2 + (y'_u \cdot \dot{u})^2 + 2y'_u \cdot \dot{u} \cdot y'_v \cdot \dot{v} + (y'_v \cdot \dot{v})^2 +$$

$$+ (z'_u \cdot \dot{u})^2 + 2z'_u \cdot \dot{u} \cdot z'_v \cdot \dot{v} + (z'_v \cdot \dot{v})^2 =$$

$$= \dot{u}^2((x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2) + 2\dot{u} \cdot \dot{v}(x'_u \cdot x'_v + y'_u \cdot y'_v + z'_u \cdot z'_v) + \dot{v}^2((x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2) =$$

$$= \dot{u}^2 \underbrace{(r'_u, r'_u)}_{E} + 2\dot{u}\dot{v} \underbrace{(r'_u, r'_v)}_{F} + \dot{v}^2 \underbrace{(r'_v, r'_v)}_{G} =$$

$E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2$ * - квадратичная форма (1-я) или риманова метрика

$L = \int dl = \int \sqrt{\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2}\,dt = \int \sqrt{g_{ij}}\,dt$

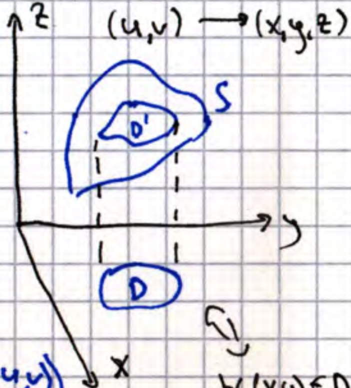
$* = g_{ij} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$

$g_{ij} = g_{11}du^2 + 2g_{12}du\,dv + g_{22}dv^2$ $(i,j \in \{0,1\}$

для всех точек из D'

$u,v \to$ единств. т. в R^3.

$r(u,v): \underset{U\times V}{D'_\alpha} \to S \in R^3$ − рег. пов.



D'

$S = \bigcup_\alpha D'_\alpha$

$\mathcal{D}: \left(x,y: \begin{matrix} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{matrix}\right)$

$\forall (x,y) \in D$
$\exists!\, f(x,y) = z$

$\forall z \in D': z = f(x,y), \forall x,y \in D$ $\begin{cases} x = x = u \\ y = y = v \\ z = f(x,y) \end{cases}$

Локальные координаты − пара коорд. из $U\times V$

Карта − область D' на поверхности, для которой можно задать локальные коорд.

Атлас − объединение не более чем счёт. кол. карт.

$\mathcal{D}'_\alpha \cap \mathcal{D}'_\beta = \varnothing$

$\begin{cases} x_1 = x_1(x_2, y_2) \\ y_1 = y_1(x_2, y_2) \end{cases}$ $J \neq 0$

Лекция 23 окт.

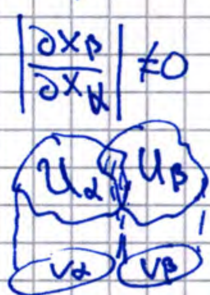
Множество точек $S \subset R$ называется **многообразием**, если: (рассматриваем двумерное многообразие, $S \subset R^3$)

1). $\exists\ U_\alpha : S = \bigcup_\alpha U_\alpha$ ($\exists$ атлас) и $\exists$ локальные координаты (x_α^1, x_α^2) в каждом U_α.

2). Локальные координаты принимают значения в $V_\alpha \subset R^2$ и каждой точке из V_α соответствует одно значения

3). если U_α и U_β пересекаются, то локальные координаты связаны гладким взаимнооднозначным отображением

$$\begin{cases} x_\alpha^1 = x_\alpha^1(x_\beta^1, x_\beta^2) \\ x_\alpha^2 = x_\alpha^2(x_\beta^1, x_\beta^2) \end{cases} \quad \left|\frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\beta}\right| \neq 0 \quad \left|\frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha}\right| \neq 0$$



4). $\forall\ x, y \in S$ найдутся окрестности U_x, U_y, такие что $U_x \cap U_y = \varnothing$ (сколь угодно малые)

Рассмотрим оба случая:

$x^1_\alpha = \underbrace{x^1_\alpha(t)}$, $x^2_\alpha = x^2_\alpha(t)$ / $x^1_\alpha = x^1_\alpha(x^1_\beta(t), x^2_\beta(t))$

Это некая траектория от t. $x^2_\alpha = x^2_\alpha(x^1_\beta(t), x^2_\beta(t))$

$\vec{\varepsilon} = \frac{dr}{dt} = a r'_{x^1_\alpha} + b r'_{x^2_\alpha}$ – касательный вектор, множество векторов $\vec{\varepsilon}$ образует касательное пространство

$$\begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases} \quad \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \quad u(t), v(t)$$

$T_x S$ $\quad$ $T_x M$

Лекция 25 окт.

Экстремум ф-ции нескольких переменных

$f : E \in R^n \to R$

<u>Теорема</u>: (Необходимое условие экстр.)

$\exists f \in C^1(E)$ $\left(\exists f'_{x_1}, f'_{x_2}, \ldots f'_{x_n} \in C(E)\right)$, и

M_0 – <u>точка экстремума</u> $\Rightarrow$

def: $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0)$ – точка экстр. (max/min), если

$\exists \overset{\circ}{U}_M \subset U_{M_0} : \forall M \in U_{M_0} : f(x_1^0 \ldots x_n^0) > f(x_1 \ldots x_n) \,/\, f(x_1^0 \ldots x_n^0) < f(x_1 \ldots x_n)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(M_0) = 0 \end{cases} \quad \left(\Leftrightarrow df(M_0) = 0 \Leftrightarrow \overline{\text{grad} f(M_0)} = 0\right)$$

<u>Доказательство:</u> (для опред-сти M – точка max)

$\triangle$ ф-ю $\varphi_1 = f(x_1, x_2^0 \ldots x_n^0)$, т.к. M_0 - точка экстремума ф-ции f, то

$$\varphi_1(x_1^0, x_2^0 \ldots x_n^0) \geq \varphi_1(x_1, \underbrace{x_2^0, \ldots x_n^0}) \quad \forall x_1 \in U_{x_1^0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0) = 0 \\ \ldots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(M_0) = 0 \end{cases} \quad \blacktriangle$$

Пример:

$z = xy$

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = y = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = x = 0 \end{cases} \quad M_0(0,0) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \end{cases} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$$

Гауссова кривизна: $K = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$, $K < 0 \Rightarrow$ экстр. нет.

$$K = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix} = f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2 > 0$$

Лекция 30 окт.

Достаточное условие экстремума.

$F(t) = F(1) - F(0)$

$\theta \in [0, 1]$

$$F(t) = F(t_0) + F'(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2!}F''(t_0)(t-t_0)^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{n!}F^{(n)}(t-t_0)^n + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(t_0+\theta\Delta t)(t-t_0)^{n+1}}_{\text{остаток в ф. Лагранжа } R_n(t_0)}$$

$$\text{Ⅎ} \begin{cases} F(t) - F(t_0) = \Delta F(t_0) \\ t - t_0 = \Delta t \end{cases}$$

$$\Delta F(t_0) = dF(t_0) + \frac{1}{2!}d^2F(t_0) + \ldots + \frac{1}{(n+1)!}d^{(n+1)}F(t_0+\theta\Delta t)$$

Рассмотрим доказательство для случ. 2х пер.

$z = f(x,y)$, (x_0, y_0)

$$\Delta f = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) =$$
$$= \underset{\overset{\parallel}{0}}{df(x_0,y_0)} + \frac{1}{2!}d^2f(x_0,y_0) + \ldots$$

т.к. (x_0,y_0) стационарная точка.

$\Delta f(x_0,y_0) = \frac{1}{2!}d^2f(x_0,y_0) =$ достаточно взять 2й дифф.

$= \frac{1}{2!}(f''_{xx}\Delta x^2 + 2f''_{xy}\Delta x\Delta y + f''_{yy}\Delta y^2)^* \ominus \theta_1, \theta_2 \in [0,1]$

все производные берём в т. $(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\theta_2\Delta y)$

$$* \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2$$

$$f''_{xx}(x_0+\theta_1\Delta x,\ y_0+\theta_2\Delta y) = f''_{xx}(x_0,y_0) + \alpha_1 = a_{11}+\alpha_1$$

$$f''_{xy}(\ldots\ ) = f''_{xy}(x_0,y_0)+\alpha_2 = a_{12}+\alpha_2$$

$$f''_{yy}(\ldots\ ) = f''_{yy}(x_0,y_0)+\alpha_3 = a_{22}+\alpha_3$$

$\Delta x, \Delta y \to 0 \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \to 0$ из непрерывности вторых производных.

$$\ominus\ \frac{1}{2!}\left(a_{11}\Delta x^2 + 2a_{12}\Delta x\Delta y + a_{22}\Delta y^2\right)\ \ominus$$

Вводим полярные коорд. → **

$\rho = \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2} \to 0$ x

$$\ominus\ \rho^2/2!\left(a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi\right) =$$

$$= \frac{\rho^2}{2!}\left(\frac{1}{a_{11}}\left(a_{11}^2\cos^2\varphi + 2a_{11}a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{12}^2\sin^2\varphi\right) - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}\sin^2\varphi + a_{22}\sin^2\varphi\right) =$$

$$= (a_{11}\cos\varphi + a_{12}\sin\varphi)^2 = a_{11}^2\cos^2\varphi + 2a_{11}a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{12}^2\sin^2\varphi = \frac{\rho^2}{2!}\left(\frac{1}{a_{11}}(a_{11}\cos\varphi + a_{12}\sin\varphi)^2 - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}\sin^2\varphi + a_{22}\sin^2\varphi\right) = \frac{\rho^2}{2!}\left(\frac{1}{a_{11}}(a_{11}\cos\varphi + a_{12}\sin\varphi)^2 + \frac{1}{a_{11}}\underbrace{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}_{K\ (\text{смеш.пр.})}\sin^2\varphi\right) =$$

Мотивировка: квадраты — это хорошо, т.к. они точно ≥ 0.

$$= \frac{\rho^2}{\underbrace{a_{11}2!}_{\text{Знак зависит от этого!}}}\left(\underbrace{(a_{11}\cos\varphi + a_{12}\sin\varphi)^2}_{>0} + \underbrace{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}_{K}\sin^2\varphi\right)\ \ominus$$

лекция | нач

$\ominus$ $\Delta f = f(x,y) - f(x_0,y_0) = \frac{\rho^2}{2!\,a_{11}}[\ldots]^{*}$

$f(x,y) - f(x_0,y_0) \geq 0 \ (\leq 0) \quad \forall (x,y) \in \mathcal{U}_\delta(x_0,y_0)$ max и min

Знак зависит от комбинации K и a_{11}.

1. $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$

$a_{11}a_{22} > a_{12}^2 \Rightarrow a_{11}a_{22} > 0 \Rightarrow a_{11} \neq 0$

$[\ldots] > 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} \Delta f > 0 \text{ при } a_{11} > 0 \Rightarrow (x_0,y_0) - \min \\ \Delta f < 0 \text{ при } a_{11} < 0 \Rightarrow (x_0,y_0) - \max \end{array}}$$

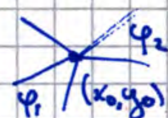
2. $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$ $\quad \underbrace{(a_{11}\cos\varphi + a_{12}\sin\varphi)^2}_{} + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\sin^2\varphi$

Пусть $a_{11} \neq 0$ $\quad$ Выберем $\varphi = \varphi_1 : (\ldots)^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}_{<0}\underbrace{\sin^2\varphi}_{>0} < 0$

Выберем $\varphi = \varphi_2 = 0$

(при $\varphi = 0$ $\sin = 0$ $\Rightarrow$ остаётся только) $\quad$ Тогда $a_{11}^2\cos^2\varphi_2 > 0$



Значит, $\exists$ 2 направления, по которым в $\mathcal{U}_\delta(x_0,y_0)$ Δf принимает разные по знаку знач $\Rightarrow$ $\boxed{\text{ext } \nexists}$.

3. Пусть $a_{11} = 0$ $\quad$ Подставим в $*$:

$\Delta f = \frac{\rho^2}{2!}(2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}^2\sin^2\varphi) =$

$= \frac{\rho^2}{2!}\sin\varphi(2a_{12}\cos\varphi + a_{22}^2\sin\varphi)^{*}$ (Подставим именно в ур-е до группировки, (**) на прошлой стр.)

Пусть $a_{12} \neq 0$, $\exists\, \varphi = \varphi_1 \neq 0$ $(\varphi_1 \neq \pi/2 k)$

$2a_{12}\cos\varphi_1 + a_{22}^2 \sin\varphi_1 < 0$ $\qquad \varphi_1 = -\varphi_2$

$2|a_{12}||\cos\varphi_1| + a_{22}^2|\sin\varphi_1| > 0$

В * $\sin\varphi_2 = -\sin\varphi_1 \Rightarrow$ будут разные знаки Δf при разных $\varphi \Rightarrow$ $\boxed{ext\ \nexists}$.

1 и 2 Теорема Вейерштрасса.

$\exists f: K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ - непрерывна

компакт K - огр. и замкнутое множ. в $\mathbb{R}^n$.

1я теорема:

$f(x_1 \dots x_n)$ - ограничена на K $(\exists M : \forall P \in K\ |f(P)| \leq M)$

Доказательство: Предположим противное:

$f(x_1 \dots x_n)$ - неограничена на K, т.е.

$\forall M\ \exists P: f(P) > M$ (Берем отрезок, находим т. ф-ии вне отрезка, увеличим отрезок, опять находим т. и т.д.)

$\left.\begin{array}{l} P_1: f(P_1) > 1 \\ P_2: f(P_2) > 2 \\ \dots \\ P_n: f(P_n) > n \end{array}\right|$ $\begin{array}{l} \forall M \\ \exists P_n \\ f(P_n) > n \end{array}$ $\Rightarrow$ бесконечно большая

$\exists P_K$ - огр. послед. на K $\qquad$ *

по теореме Больцано-Коши $\exists$

P_{K_n} - подпоследовательность, которая сх-ся к P_0

f - непр. ф-я на K $\quad \lim f(P_{K_n}) = f(P_0)$

$P_0 \in K$ (по определению K)

2я теорема:

$f(x_1, \dots x_n)$ достигает наименьшего и наибольшего значения на K.

Доказательство:

для определенности выберем $\sup\limits_{\forall x \in K} f = M$:

$$\sup_{\forall x \in K} f = M \Leftrightarrow \begin{cases} 1.\ f(P) \le M \ \forall P \in K \\ 2.\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists P: f(P) > M - \varepsilon \end{cases}$$

Выберем $\varepsilon = 1/n \Rightarrow M - 1/n < f(P) \le M$

(Исп. * из док. п. 1) $M = f(P_0) \in K$

Лекция 6 ноября

Знак 2 дифф. как знак кв. формы.

$$\Delta f(P_0) = \underbrace{f(x_1, \dots, x_n)}_{f(P)} - \underbrace{f(x_1^0, \dots x_n^0)}_{f(P_0)} \simeq$$

$$\simeq df(P_0) + \tfrac{1}{2} d^2(P_0) + \dots \simeq \tfrac{1}{2} d^2(P_0) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(f''_{x_1x_1} \Delta x_1^2 + \dots + f''_{x_nx_n} \Delta x_n^2 + 2 f''_{x_1x_2} \Delta x_1 \Delta x_2 + \right.$$

$$\left. + \dots + 2 f''_{x_{n-1}x_n} \Delta x_{n-1} \Delta x_n\right) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} \Delta x_n\right)^2 f = \text{Все произв. в т. } (x_1^0 + \theta \Delta x_1, \dots, x_n^0 + \theta \Delta x_n) = P_0 + \Delta x$$

$$= \tfrac{1}{2} d^2(P_0 + \Delta x) + \tfrac{1}{2} d^2 f(P_0) - \tfrac{1}{2} d^2 f(P_0) =$$

$$= \tfrac{1}{2} d^2 f(P_0) + \underbrace{\tfrac{1}{2} d^2(P_0 + \Delta x) - \tfrac{1}{2} d^2 f(P_0)} =$$

$$= \tfrac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P_0) \Delta x_i \Delta x_j + \tfrac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P_0 + \Delta x) - \right.$$

$$- \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P_0)\Big)^{*} \Delta x_i \Delta x_j \;(=)$$

$$\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \ldots + \Delta x_n^2} \longrightarrow 0, \quad \Delta x_i \to 0$$

$*$ в скобках – $\alpha_{ij} \to 0$, т.к. произв. непр. ф-ии.

$$\tfrac12 \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} \Delta x_i \Delta x_j = \tfrac12 \rho^2 \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} \underbrace{\frac{\Delta x_i}{\rho}}_{\leq 1} \underbrace{\frac{\Delta x_j}{\rho}}_{\leq 1}$$

$$\left| \frac12 \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} \frac{\Delta x_i}{\rho} \frac{\Delta x_j}{\rho} \right| \leq \frac12 |\alpha_{ij}| \longrightarrow 0$$

$$(=)\; \underbrace{\frac12 \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P_0) \Delta x_i \Delta x_j}_{\text{квадратичная форма}} + \frac{\rho^2}{2} \cdot \varepsilon =$$

$$= \frac{\rho^2}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P_0) \underbrace{\frac{\Delta x_i}{\rho}}_{\xi_i} \underbrace{\frac{\Delta x_j}{\rho}}_{\xi_j} + \frac{\rho^2}{2} \cdot \varepsilon \;(>)$$

$A(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ – непрерывная ф-я

$$\left(\frac{\Delta x_1}{\rho}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\Delta x_n}{\rho}\right)^2 = \frac{1}{\rho^2} \sum \Delta x_n^2 = 1$$

По Т. Вейерштрасса 2: $\exists\, a_1 \ldots a_n$:

$$A(a_1 \ldots a_n) = \inf_{P \in U_\delta(P_0)} A(x_1, \ldots, x_n) = \mu$$

$\exists\, A(a_1 \ldots a_n) > 0 \Rightarrow A(x_1, \ldots, x_n) > \mu > 0$

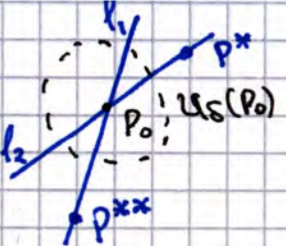
$$(>)\; \frac{\rho^2}{2}\left(\mu - |\varepsilon(\rho)|\right) > 0 \Rightarrow f(P) - f(P_0) > 0$$

$$f(P) > f(P_0)$$

$$\Rightarrow P_0 \text{ – т. мин.}$$

Рассмотрим случай, когда Гаусс. кривизна < 0 (меняется знак)

$$l_1 \begin{cases} x_1 = h_1 t + x_1^0 \\ \ldots \\ x_n = h_n t + x_n^0 \end{cases} \qquad l_2 \begin{cases} x_1 = h_1 t + x_1^0 \\ \ldots \\ x_n = h_1 t + x_n^0 \end{cases}$$



Параметр-я прямой, прох. через P_0 и x_0

$$l_1 \left| \begin{aligned} &\rho^* = \sqrt{h_1^2+\ldots+h_n^2} < \delta_1 \\ &\Delta x_1 = h_1 t \\ &\ldots \\ &\Delta x_n = h_n t \end{aligned} \right. \qquad \rho = t\rho^*$$

аналогично для l_2: $\rho^{**} < \delta_2$

p^* и p^{**} недалеко от P_0

$\rho^*(x_1^0 + h_1 t \ldots)$

$\rho^{**}(x_1^0 + h_1 t \ldots)$

$$\frac{\Delta x_i}{\rho} = \frac{h_i t}{t\rho^*} = \frac{h_i}{\rho^*}$$

Для ρ^*: $A(x_1, \ldots, x_n) > 0$

ρ^{**}: $A(x_1, \ldots, x_n) < 0$

Переход из окр. т. P_0 в окр т. ρ^* и p^{**}.

Лекция 8 ная

Вспомним ур-е касательной плоскости:

$$z - z_0 = f'_x(x-x_0) + f'_y(y-y_0)$$ ф-я задано явно

$$\begin{cases} z = z_0 + f'_x(x-x_0) + f'_y(y-y_0) + \bar{o}(\rho^2) \\ \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} \end{cases}$$

Это поправка расхожд. плоскости вблизи точки.

$A = f'_x$, $B = f'_y$, $C = 1$, $z = f(x,y)$

$$\underbrace{F'_x}_{=A}(x-x_0) + \underbrace{F'_y}_{=B}(y-y_0) + \underbrace{F'_z}_{=C}(z-z_0) = 0$$

Криволинейный поверхностный интеграл I рода.

$$\vec{\xi} = r'_u \cdot \dot{u} + r'_v \cdot \dot{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

$$dl = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \cdot dt$$

r'_u, r'_v - ЛНЗ, $r'_u, r'_v \in P$

$$L = \int_L dl = \int_L \sqrt{\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2}\,dt = \int_L \sqrt{g_{ij}dx^i dx^j}\,dt$$

$$g_{ij}dx^i dx^j = \underbrace{g_{11}}_{E} dx^{1\,2} + 2\underbrace{g_{12}}_{F} dx^1 dx^2 + \underbrace{g_{22}}_{G} dx^{2\,2}$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} E &= (r'_u, r'_u) \\ F &= (r'_u, r'_v) \\ G &= (r'_v, r'_v) \end{aligned}$$

$$m = \int_L f(x,y)\,dl = \int_L f(x,y)\sqrt{g_{ij}dx^i dx^j}\,dt$$

Это масса отрезка, с ф. линейной пл. $f(x,y)$

Пример для $y=x$:

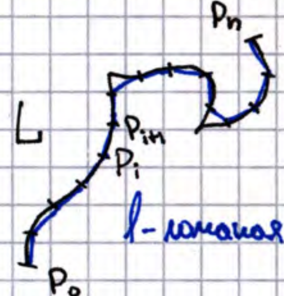
$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x,y) \end{cases} \qquad r'_u = r'_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f'_x \end{pmatrix} \qquad r'_v = r'_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f'_y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} E = (r'_x, r'_x) = 1 + (f'_x)^2 \\ F = (r'_x, r'_y) = f'_x \cdot f'_y \\ G = (r'_y, r'_y) = 1 + (f'_y)^2 \end{cases}$$

$$g_{ij}\underbrace{dx^i}_{dx}\underbrace{dx^j}_{dy} = (1 + (f'_x)^2)dx^2 + 2f'_x \cdot f'_y\,dx\,dy + (1 + (f'_y)^2)dy^2$$

Определение

Кривая L - называется спрямляемой, если у неё есть длина? и она принимает конечные значения.



Строим все возможные разбиения L.

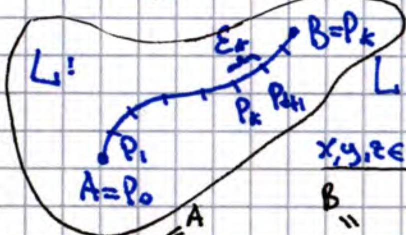
Длина кривой $L = \sup\limits_{l \subset L} |l|$.

Лекция 13 ая

Криволинейные интегралы.

Интеграл I рода: Вспомним:

$$L = \int_a^b \sqrt{(\xi,\xi)}\,dt = \int_a^b \sqrt{g_{ij}dx^i dx^j}\,dt = \int_a^b \underbrace{\sqrt{\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2}\,dt}_{dL}$$



$$L: r(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad \xi = (\dot x, \dot y, \dot z) \neq 0$$

$x, y, z \in C'$ на L

$=A$ $\qquad$ $\beta \shortparallel$

$$\sigma_r = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta S_k$$

$r = \{P_0 < P_1 < \ldots < P_n\}$

$f(x,y,z)$ - непр. на L

$\Delta S_k = \overset{\frown}{P_{k+1}P_k}$ - длина дуги между P_k и P_{k+1}

$$\lim_{d(r)\to 0}\sigma_r = \lim_{d(r)\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta S_k \overset{\text{if } \exists \text{ и } <\infty}{=} \int_L \underbrace{f(x,y,z)}_{\text{плотность}}\underbrace{dl}_{\text{дифф. дуги}} = m(L)$$

Естественная параметризация: (s - длина дуги)

$$r(t): \begin{cases} x = \overset{*}{x}(s) & 0 \le s \le l \\ y = \overset{*}{y}(s) \\ z = \overset{*}{z}(s) \end{cases}$$, где l - длина дуги $L = \overset{\frown}{AB}$

(x^*, y^*, z^* - другие ф-ции)

$$\int_L f(x,y,z)\,dl = \int_L f(x^*(s), y^*(s), z^*(s))\,dl =$$

$$= \begin{bmatrix} s = s(t) \\ dl = \sqrt{(\dot x^*)^2 + (\dot y^*)^2 + (\dot z^*)^2} \end{bmatrix} = \int_\alpha^\beta f(t)\sqrt{(\dot x^*)^2 + (\dot y^*)^2 + (\dot z^*)^2}\,dt$$

при $t = \alpha$: $x_A = x^*(s(\alpha))$
$y_A = y^*(s(\alpha))$
$z_A = z^*(s(\alpha))$

Расс. пример: $L: \begin{cases} y = f(x) \\ x = x \end{cases}$

$$\int\limits_L g(x,y)\,dl = \int\limits_L g(x,y)\sqrt{(x'_x)^2+(y'_x)^2}\,dx = \int\limits_{x_1}^{x_2} g(x,y(x))\sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx$$

Другой пример: $L:\begin{cases} x=\rho(\varphi)\cos\varphi \\ y=\rho(\varphi)\sin\varphi \end{cases}$

$$\int\limits_L g(x,y)\sqrt{(x'_\varphi)^2+(y'_\varphi)^2}\,d\varphi = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} g(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\cdot \sqrt{(\rho'_\varphi)^2+\rho^2}\,d\varphi$$

$$(x'_\varphi)^2+(y'_\varphi)^2 = (\rho'_\varphi\cos\varphi+\rho(\varphi)(-\sin\varphi))^2+(\rho'_\varphi\sin\varphi+\rho(\varphi)\cos\varphi)^2 =$$
$$=(\rho'_\varphi)^2\cos^2\varphi - 2\rho'_\varphi\rho\cos\varphi\sin\varphi+\rho^2\sin^2\varphi +$$
$$+\rho'_\varphi{}^2\sin^2\varphi+2\rho'_\varphi\rho\cos\varphi\sin\varphi+\rho^2\cos^2\varphi =$$
$$=(\rho'_\varphi)^2+\rho^2$$

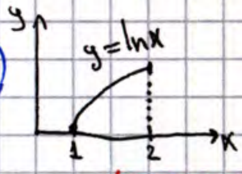
Третий пример:

$$\int\limits_L x^2\,dl = \int\limits_L x^2\cdot\sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx = \int\limits_1^2 x^2\cdot\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\,dx =$$

$L: y=\ln x,\ 1\le x\le 2$

$\begin{cases} x=x \\ y=\ln x \end{cases}$ $$= \int\limits_1^2 x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^2 (1+x^2)^{\frac{1}{2}}\,d(x^2+1) =$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot(1+x^2)^{3/2}\Big|_1^2 = \frac{1}{3}\left(5^{3/2}-2^{3/2}\right)$$



Лекция 15 ноя.

Криволинейные интегралы.

$\int\limits_L f(x,y,z)\,dl$ – кр. инт. I-го рода

Интеграл Стильтьеса. $f(x), g(x)$ – огр. на $[a,b]$

Суть: даётся весовой коэф. каждому отрезку интегрирования

$r = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$

$\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$

$$\sigma_r = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(g(x_{i+1}) - g(x_i))$$

$$\lim_{d(r)\to 0} \sigma_r = \lim_{d(r)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(g(x_{i+1}) - g(x_i)) = \int_{[a,b]} f(x)\,dg(x)$$

$g(x) = x \Rightarrow$ интеграл Римана

Свойства интеграла Римана-Стилтьеса:

(Сокращённо R-S)

1. Линейность:

а). $\int_{[a,b]} f(x)\,d(g_1(x) + g_2(x)) = \int_{[a,b]} f(x)\,dg_1(x) + \int_{[a,b]} f(x)\,dg_2(x)$

Если $\exists$

б). $\int_{[a,b]} (f_1(x) + f_2(x))\,dg(x) = \int_{[a,b]} f_1(x)\,dg(x) + \int_{[a,b]} f_2(x)\,dg(x)$

в). $\int_{[a,b]} \alpha f(x)\,dg(x) = \alpha \int_{[a,b]} f(x)\,dg(x)$

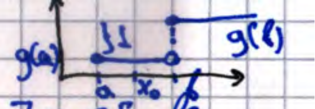
2. Аддитивность

$c \in [a,b]: \int_{[a,b]} f(x)\,dg(x) = \int_{[a,c]} f(x)\,dg(x) + \int_{[a,b]} f(x)\,df(x)$

3. Интегрирование по частям.

$$\int_{[a,b]} f(x)\,dg(x) = f(x)\,g(x)\Big|_a^b - \int_{[a,b]} g(x)\,df(x)$$

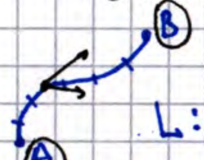
4. $\int\limits_{[a,b]} f(x)\,dg(x) = f(x_0)(g(b)-g(a))$



$f(x)$ – непр. на $[a,b]$ $\quad \exists x_0 \in [a,b]$

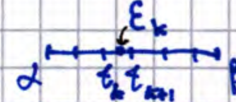
Криволинейный инт. II рода.

$(x(\beta), y(\beta), z(\beta))$



$(x(\alpha), y(\alpha), z(\beta))$

$t:$



$L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]$

$\xi_k \in [t_k, t_{k+1}]$

$\sigma_r = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1}(t) - x_k(t))$

$\Delta \vec{S}_i(\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i)$

$\lim\limits_{d(r)\to 0} \sigma_r = \lim\limits_{d(r)\to 0} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) = \int\limits_L f(x,y,z)\,dx$ –

– Интеграл II рода по координате x.

$\int\limits_L f(x,y,z)\,dx, \quad \int\limits_L g(x,y,z)\,dy, \quad \int\limits_L h(x,y,z)\,dz$

$\int\limits_L f(x,y,z)\,dx + g(x,y,z)\,dy + h(x,y,z)\,dz = A$

$\vec{E}(f(x,y,z), g(x,y,z), h(x,y,z)) \qquad \vec{ds}(dx, dy, dz)$

некоторое векторное поле

Пример:

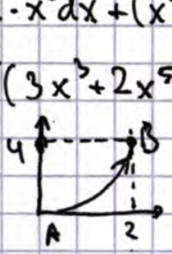
$\int xy\,dx + (x^2+y^2)\,dy = \begin{bmatrix} y = x^2 \\ dy = 2x\,dx \end{bmatrix} = \int\limits_0^2$

$L: y = x^2$ от $A(0,0)$ до $B(2,4)$

$= \int\limits_0^2 x\cdot x^2\,dx + (x^2+x^4)\cdot 2x\,dx = \int\limits_0^2 (x^3 + 2x^3 + 2x^5)\,dx =$

$= \int\limits_0^2 (3x^3 + 2x^5)\,dx = 3\cdot \frac{x^4}{4}\Big|_0^2 + 2\,\frac{x^6}{6}\Big|_0^2 = 3\cdot\frac{2^4}{4} + \frac{1}{3}\cdot 2^6 =$

$= 2^2\left(3 + \frac{1}{3}\cdot 2^4\right)$



$$\int_L f(x,y,z)\,dx + g(x,y,z)\,dy + h(x,y,z)\,dz =$$

$$dl = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt$$

$$= \int_L \left(\frac{f(x,y,z)\,dx}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}} + \frac{g(x,y,z)\,dy}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}} + \frac{h(x,y,z)\,dz}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}} \right) \cdot \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2} =$$

$$= \begin{bmatrix} dx = \dot{x}\,dt \\ dy = \dot{y}\,dt \\ dz = \dot{z}\,dt \end{bmatrix} = \int_L \left(f(x,y,z)\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}} + g(x,y,z)\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}} + h(x,y,z)\frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}} \right) \cdot \underbrace{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt}_{dl} =$$

$$= \int \overbrace{(\vec{E}, \vec{\varepsilon})}^{F(x,y,z)}\,dl$$

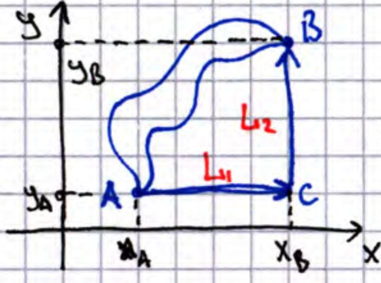
скорость

$\vec{E}$ - потенциально

A - не зависит от пути L

$$\int_{L(A,B)} f\,dx + g\,dy = U(B) - U(A) = \underbrace{\int_L \frac{\partial u}{\partial x}dx - \frac{\partial u}{\partial y}dy}_{\text{с точки зрения потенциала}}$$

Нужно, чтобы $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$. Т.е. $\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}}_{\text{условие потенциальности}}$



Можно идти по любой кривой, но проще по A-C-B.

$dx = dx \quad x = x$

$y = y_A \quad dy = 0$

L_1: $y = y_A$, $dy = 0$; $x = x$, $dx = dx$ $\qquad$ L_2: $x = x_B$, $dx = 0$; $y = y$, $dy = dy$

$$\int_{L(A,B)} f\,dx + g\,dy = \int_{L_1(A,C)} + \int_{L_2(C,B)} = \int_{L_1} f\,dx + \int_{L_2} g\,dy$$