Применение SDF и Ray Marching в 3D графике

Введение

В традиционной компьютерной графике трёхмерные объекты обычно описываются с помощью дискретных сеток из треугольников. Однако существует альтернативный подход, основанный на непрерывных математических моделях. В его основе лежат функции, определённые в трёхмерном пространстве, и методы численного анализа. К таким подходам относятся Signed Distance Functions (SDF) и алгоритм Ray Marching. Эти методы активно используются в шейдерах, WebGL и, в частности, в симуляциях на базе THREE.js.

Signed Distance Function

Signed Distance Function — это способ задать геометрический объект как функцию от трёх переменных. Каждой точке пространства сопоставляется расстояние до поверхности объекта, причём знак этого расстояния указывает, находится ли точка внутри или вне фигуры.

Пусть в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ задано тело Ω с границей $\partial\Omega$. Тогда Signed Distance Function определяется следующим образом:

$$f(\mathbf{p}) = \begin{cases} -\operatorname{dist}(\mathbf{p}, \partial\Omega), & \mathbf{p} \in \Omega, \\ 0, & \mathbf{p} \in \partial\Omega, \\ +\operatorname{dist}(\mathbf{p}, \partial\Omega), & \mathbf{p} \notin \Omega. \end{cases}$$

Здесь расстояние вычисляется в стандартной евклидовой метрике:

$$\operatorname{dist}(\mathbf{p}, A) = \inf_{\mathbf{q} \in A} \|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|, \quad \|\mathbf{x}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Таким образом, SDF является функцией вида

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},$$

что напрямую связывает её с разделами математического анализа, посвящёнными функциям нескольких переменных, метрикам и нормам.

Простейший пример SDF — сфера радиуса R с центром в точке $\mathbf{c}$:

$$f(\mathbf{p}) = \|\mathbf{p} - \mathbf{c}\| - R$$

Значение функции равно нулю на поверхности сферы, отрицательно внутри и положительно снаружи. Аналогичным образом можно задать плоскости, параллелепипеды и более сложные фигуры.

Важным свойством Signed Distance Function является её непрерывность, а в окрестности поверхности — дифференцируемость. Это позволяет использовать аппарат дифференциального исчисления. В частности, градиент функции

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

на поверхности объекта направлен по нормали к ней. Это свойство активно используется в компьютерной графике для расчёта освещения и отражений. Таким образом, градиент, изучаемый в математическом анализе, получает наглядное геометрическое и практическое применение.

Ray marching

Ray Marching — это численный метод визуализации поверхностей, заданных неявно с помощью Signed Distance Function. В отличие от классической трассировки лучей, где требуется аналитически находить точки пересечения луча с геометрическими примитивами, Ray Marching строится как итеративный процесс приближения к поверхности.

Луч, исходящий из камеры, задаётся параметрически:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{o} + t\mathbf{d}, \quad t \geq 0,$$

где $\mathbf{o}$ — положение камеры, а $\mathbf{d}$ — нормализованное направление луча. В каждой точке луча вычисляется значение Signed Distance Function. Поскольку SDF возвращает минимальное расстояние до поверхности, это значение можно использовать как длину безопасного шага вдоль луча. Итерационный процесс имеет вид:

$$t_{n+1} = t_n + f(\mathbf{r}(t_n))$$

Смысл этой формулы заключается в том, что луч не может пересечь поверхность раньше, чем будет пройдено расстояние, равное значению функции в текущей точке. Таким образом, пересечение ищется не напрямую, а путём последовательных приближений.

С математической точки зрения Ray Marching можно интерпретировать как численный метод поиска корня уравнения

$$f(\mathbf{r}(t)) = 0,$$

где корень соответствует точке попадания луча на поверхность объекта. Алгоритм останавливается, когда значение функции становится достаточно малым:

$$|f(\mathbf{r}(t_n))| < \varepsilon,$$

то есть когда точка находится в малой окрестности поверхности. Здесь используется классическое для математического анализа понятие предела: последовательность значений $f(\mathbf{r}(t_n))$ стремится к нулю.

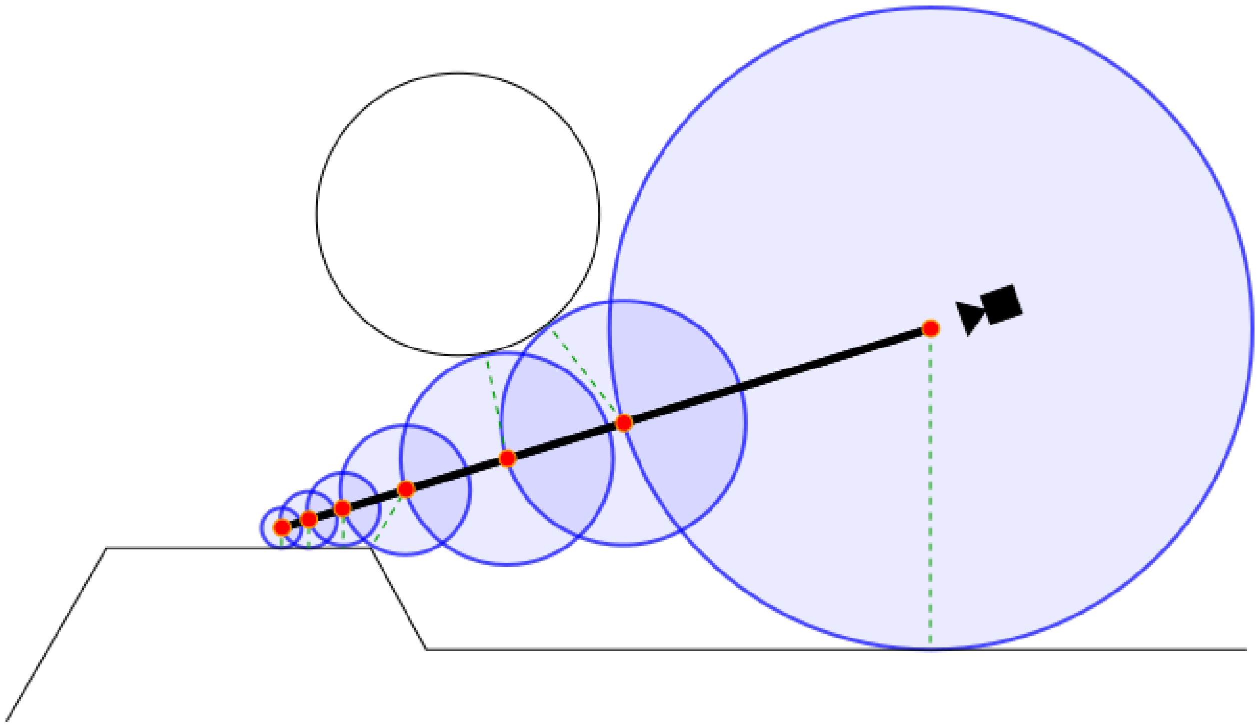


Схема действия алгоритма Ray marching

Корректность и устойчивость алгоритма Ray Marching напрямую зависят от аналитических свойств Signed Distance Function. Одним из ключевых свойств является **липшицевость**.

Функция $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ называется **липшицевой**, если существует такая константа $L > 0$, что для любых точек $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ выполняется неравенство:

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq L\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

Геометрический смысл липшицевости состоит в том, что функция не может изменяться слишком резко: скорость её изменения ограничена сверху. Для истинной Signed Distance Function липшицева константа равна единице, так как расстояние до поверхности не может изменяться быстрее, чем само расстояние в пространстве.

Именно это свойство делает Ray Marching возможным. Липшицевость гарантирует, что шаг, равный значению SDF, не приведёт к «перепрыгиванию» поверхности. Если бы функция могла убывать быстрее, чем линейно, то алгоритм мог бы пропустить точку пересечения и дать неверный результат.

Таким образом, Ray Marching является не просто эвристическим алгоритмом, а методом, опирающимся на строгие понятия математического анализа. Его работоспособность основана на непрерывности, ограниченности роста и липшицевости Signed Distance Function, что делает данный подход устойчивым и широко применимым в современной компьютерной графике.

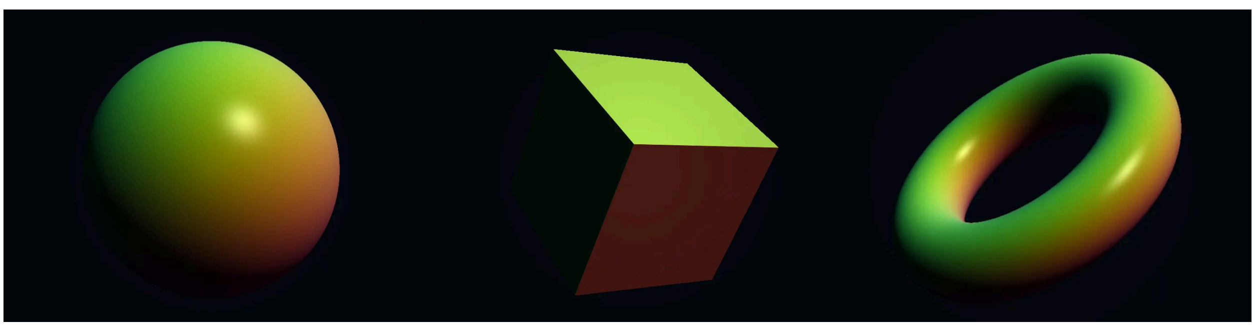
Демо

Сайт с демонстрацией - https://jmihpajiloy.github.io/raymarching-demo/

Для демонстрации 3D графики основанной на математических моделях, а не на полигонах была сделана демонстрация на основе Three.js и WebGL. API WebGL позволяет запустить графический движок практически в любом современном браузере, а Three.js предоставляет удобные абстракции для взаимодействия с ним.

Чтобы нарисовать фигуру используются WebGL шейдеры. Для изменения фигуры нужно вставить фрагмент шейдера в поле ввода.

Вот примеры некоторых фигур.



Сфера Куб Тор

Заключение

Signed Distance Functions и Ray Marching демонстрируют, как абстрактные понятия математического анализа — функции нескольких переменных, нормы, градиент, предел и непрерывность — находят прямое применение в современной 3D-графике. В симуляциях на THREE.js геометрия объектов фактически задаётся аналитическими формулами, а процесс визуализации сводится к численному анализу этих функций. Это показывает, что математический анализ является фундаментом не только теоретической математики, но и прикладных цифровых технологий.

Источники

1. Документация Three.js
2. Inigo Quilez — Distance Functions
3. Inigo Quilez — Ray Marching and Signed Distance Functions
4. Репозиторий с демонстрацией