Exercice #1

Julien Muhlemann

soit $P(X=A)=\theta$ Calculer la probabilité qu'un individu possède le génotype $\{AA, Aa, aa\}$

notés $P(X=A \cap X=A) = p_1$

$P(X=A \cap X=a) = p_2$ (par symmétrie : $Aa \equiv aA$)

$P(X=a \cap X=a) = p_3$

① Calculer les probabilités avec la formule de la distribution Binomiale : $P_x = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

noté A = évènement succès donc $p_1 = \binom{2}{2} \cdot \theta^2 (1-\theta)^{2-2} = \underline{\underline{\theta^2}}$

$p_2 = \binom{2}{1} \cdot \theta^1 \cdot (1-\theta)^{2-1} = \underline{\underline{2\theta(1-\theta)}}$

$p_3 = \binom{2}{0} \cdot \theta^0 (1-\theta)^{2-0} = \underline{\underline{(1-\theta)^2}}$

② N_1 => nombre de génotype AA

N_2 => nombre de génotype Aa

N_3 => nombre de génotype aa

Estimer θ avec le méthode du MLE :
en prenant le produit des probabilités

$$L(\theta) = (\theta^2)^{N_1} \cdot (2\theta(1-\theta))^{N_2} \cdot ((1-\theta)^2)^{N_3}$$

en passant au logarithme :

$$L(\theta) = 2 \cdot N_1 \cdot \log(\theta) + N_2 \log(2) + N_2 \log(\theta) + N_2 \log(1-\theta) + 2N_3 \log(1-\theta)$$

en mettant en facteur :

$$L(\theta) = (2 \cdot N_1 + N_2) \log(\theta) + (N_2 + 2N_3) \log(1-\theta) + N_2 \log(2)$$

Julien Muhlemann

trouver le maximum en dérivant :

notons : $\frac{d\,L_1(\theta)}{d\theta} = \ell(\theta)$

$$\frac{d}{d\theta} L_1(\theta) = \frac{(2N_1+N_2)}{\theta} - \frac{(2N_3+N_2)}{(1-\theta)} = \ell(\theta)$$

résoudre $\ell(\theta)=0$

$$\frac{(2N_1+N_2)(1-\theta)}{\theta(1-\theta)} - \frac{(2N_3+N_2)\theta}{(1-\theta)\theta} = 0$$

résoudre : $(2N_1+N_2)(1-\theta) = (2N_3+N_2)\theta$

en développant : $(2N_1+N_2) = \theta(2N_1+N_2+2N_3+N_2)$

$$\underline{\underline{\hat{\theta}}} = \frac{2N_1+N_2}{2(N_1+N_2+N_3)}$$

vérifier que la dérivée seconde soit <0 au point trouvé, afin de s'assurer de la concavité de la fonction (maximum)

$$\frac{d^2\ell(\theta)}{d\theta^2} = \frac{-(2N_1+N_2)}{\theta^2} - \frac{(2N_3+N_2)\cancel{(-1)}\cancel{(-1)}}{(1-\theta)^2}$$

Si $0<\theta<1$ (une probabilité)

et et N_i, $i \in \{1,2,3\}$ alors N_i est positif

donc la somme de deux termes négatifs est bien <0

le maximum est donc bien un maximum local.

Exercice 2 Julien Muhlemann

Soit une variable aléatoire X notées:

pour les valeurs $\begin{cases} P(X=0) = 6\theta^2 - 4\theta + 1 & = f(\theta) \\ P(X=1) = \theta - 2\theta^2 & = g(\theta) \\ P(X=2) = 3\theta - 4\theta^2 & = h(\theta) \end{cases}$

$\theta \in [0; 1/2]$ calculer MLE pour une seule observation de x

calculer $\frac{df(\theta)}{d\theta} = 12\theta - 4$ $\frac{dh(\theta)}{d\theta} = -8\theta + 3$

$\frac{dg(\theta)}{d\theta} = -4\theta + 1$

résoudre: • $12\theta - 4 = 0$ pour $P(X=0)$

MLE $\underline{\underline{\hat{\theta}}} = \frac{1}{3}$

• $-4\theta + 1 = 0$

MLE $\underline{\underline{\hat{\theta}}} = \frac{1}{4}$

• $-8\theta + 3 = 0$

MLE $\underline{\underline{\hat{\theta}}} = \frac{3}{8}$

vérifier avec la dérivée seconde que la fonction soit concave c.à.d. $f(\theta), g(\theta), h(\theta)$ au points trouvés sont < 0

pour $f(\theta)$, $f''(\theta) = 12$: n'est pas un maximum > 0

$g(\theta)$, $g''(\theta) = -4$: est bien un maximum < 0

$h(\theta)$, $h''(\theta) = -8$: est bien un maximum < 0

le MLE pour $f(\theta)$ est rencontré lorsque $x \to 0$ et $x \to \infty$

Julien Muhlemann

Exercice #3

(1) Soit $X_1 \dots X_n \overset{iid}{\sim} W(\lambda, 1/2)$

$$\begin{cases} x \longrightarrow \dfrac{1}{2\lambda x^{1/2}} \left(e^{-\frac{x^{1/2}}{\lambda}}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Calculer le MLE de $\hat{\lambda}$

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2\lambda\sqrt{x_i}} e^{\left(\frac{-\sqrt{x_i}}{\lambda}\right)} = \left(\frac{1}{2\lambda\sqrt{x_i}}\right)^n e^{-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\sqrt{x_i}}{\lambda}\right)}$$

en passant en logarithme pour le calcul MLE :

$$n \log\left(\frac{1}{2\lambda\sqrt{x_i}}\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\sqrt{x_i}}{\lambda}\right)$$

$$n \log\left(\frac{1}{2\lambda\sqrt{x_i}}\right) - \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{x_i}\right)$$

$$-n \log\left(2\lambda x_i^{1/2}\right) - \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{x_i}\right)$$

$$-\frac{n}{2} \log\left(2\lambda x_i\right) - \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{x_i}\right)$$

$$-\frac{n}{2}\left(\log(2) + \log(\lambda) + \log(x_i)\right) - \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{x_i}\right)$$

$$\frac{d\,L(\lambda)}{d\lambda} = \frac{-n}{2\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{x_i}\right)$$

résoudre pour $\dfrac{d\,L(\lambda)}{d\lambda} = 0$

Julien Muhlemann

$$-\frac{n}{2\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{x_i}\right) = 0$$

$$\frac{n}{2\lambda} = \frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{x_i}\right)$$

$$\frac{n}{2} = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{x_i}\right) \quad \text{donc} \quad \frac{2\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{x_i}\right)}{n} = \hat{\lambda}$$

en vérifiant la concavité avec la dérivée seconde afin se s'assurer du maximum local

$$L_1(\lambda)' = \frac{-n}{2\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}$$

$$L_1(\lambda)'' = \frac{n}{2\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^3}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}$$

nous constatons que $\lambda = \frac{2\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}}{n}$ est >0

et que $\frac{n}{2\lambda^2} > \frac{1}{\lambda^3}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}$ pour $n > 0$

c'est donc un maximum

Exercice #3

Julien Muhlemann

② $X_1 \dots X_n \sim Unif(0,b)$

pour fonction de densité

$$x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{b} & \text{si } x \in [0;b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{avec } b > 0$$

Calculer MLE de $\hat{b}$ Sous contrainte $0 \leq x_i \leq b$

fonction MLE $\hat{b} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{b}$ donc $= \frac{1}{b^n}$

$$\log\left(\frac{1}{b^n}\right) = -n\log(b)$$ est strictement décroissante donc

donc $\hat{b} = max(X_1, X_2, \dots X_n)$ b doit être aussi grand que la valeur la plus observée.

Julien Muhlemann

Exercice #4

Soit $X_1 \dots X_n$ un échantillon tiré d'une distribution de densité

$$x \longmapsto \begin{cases} 3\theta^3 x^{-4} & \text{si } x \geq \theta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Sous contrainte $\theta > 0$

(1) Estimer le paramètre θ avec la méthode des moments

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty x \cdot f(x;\theta)\, dx$$

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty x \cdot 3\theta^3 \cdot x^{-4}\, dx = 3\theta^3 \int_0^\infty x^{-3}\, dx$$

$$\mathbb{E}[X] = 3\theta^3 \frac{x^{-2}}{-2}\Big|_\theta^\infty = \lim_{u \to \infty} \left(3\theta^3 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} \Big|_\theta^u \right) = 0 - \left(-3\theta^3 \frac{\theta^{-2}}{2} \right)$$

$$= \frac{3\theta^3 \cdot \theta^{-2}}{2} = \frac{3\theta}{2}$$ la moyenne théorique est $\frac{3\theta}{2}$

$\bar{X} = \frac{3\theta}{2}$ $\quad \hat{\theta}$ est donc $= \frac{2\bar{X}}{3}$

(2) Trouver le mle de θ

La fonction MLE est $L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(X_i;\theta) = \prod_{i=1}^n 3\theta^3 X_i^{-4} \cdot 1$

Sous contrainte $X_i \geq \theta$

$$L(\theta) = 3^n \cdot \theta^{3n} \cdot \prod_{i=1}^n X_i^{-4}$$

$$\log(L(\theta)) = n\log(3) + 3n\log(\theta) - 4\sum_{i=1}^n \log(X_i)$$

est strictement croissante on cherche la MLE $\hat{\theta}$ avec la contrainte $\theta \leq \min(X_1, \dots X_n)$ donc θ maximisé est $\hat{\theta} = \min(X_1, \dots X_n)$