Cálculo de Matrices & Repaso de Probabilidad

Jonnatan Arias Garcia
jonnatan.arias@utp.edu.co
jariasg@uniquindio.edu.co

Hernán Felipe Garcia - hernanf.garcia@udea.edu.co

I. Cálculo de Matrices

Fundamentales

Escalar: minúscula normal a
Vector: minúscula en negrita **a**
Matriz: mayúscula normal A
Tensor: mayúscula en negrita **A**

Escalar	*Vector*	*Matriz*	*Tensor*
3	$\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 9 & 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 7 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$

- **Producto escalar**

Sean **a** y **b**, dos vectores de n componentes. Entonces el producto escalar de **a** y **b** denotado por **a . b** está dado por:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

Este tipo de operación, a menudo también se denomina producto punto o producto interno.

Matriz y sus elementos

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{ij} & & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matriz de tamaño m x n

Fundamentales

- **Suma de matrices**

Sean **A** y **B** dos matrices de tamaño $m\, x\, n$. Entonces la suma de **A** y **B** es una matriz de $m\, x\, n$ dada por:

$$A+B=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

- **Multiplicación de una matriz por un escalar**

Si **A** es una matriz de tamaño $m\, x\, n$ y si α es un escalar, entonces el resultado de multiplicar α por **A** da como resultado una matriz de tamaño $m\, x\, n$, donde cada componente es el resultado de multiplicar cada componente de **A** por α, tal como se muestra a continuación:

$$\alpha A=\left(\alpha a_{ij}\right)=\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

Fundamentales

- **Producto de matrices**

Sea **A** una matriz de $m \times n$, y sea **B** una matriz de $n \times p$. Entonces el producto de **A** y **B** es una matriz **C** de tamaño $m \times p$ donde:

$$c_{ij} = (\text{renglón } i \text{ de } A) \cdot (\text{columna } j \text{ de } B)$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ \text{renglón } i \text{ de } A \longrightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{ml} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \text{columna } j \text{ de } B \\ \downarrow \\ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} \end{array}$$

Fundamentales

- **Transpuesta de una matriz**

Sea **A**, una matriz de $m \, x \, n$. Entonces la matriz transpuesta de **A**, denotada por A^T, es la matriz de $n \, x \, m$ la cual se obtiene las filas por las columnas de **A**.

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ entonces } A^{\top} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Broadcasting

El concepto de *broadcasting* se usa para entender como NumPy realiza las operaciones entre arreglos (vectores, matrices, tensores) de diferente tamaño. Sujeto a ciertas restricciones, el arreglo más pequeño es "*difundido*" (¡?) a través del arreglo más grande, para que de esta forma sean compatibles en tamaño.

Identidades básicas de matrices I

- Una matriz $\mathbf{A}$ tiene elementos A_{ij}, donde i indexa las filas y j indexa las columnas.
- $\mathbf{I}_N$ denota la matriz identidad de dimensión $N \times N$. Si no hay ambiguedad, se usa $\mathbf{I}$.
- La matriz traspuesta $\mathbf{A}^\top$ tiene elementos $(\mathbf{A}^\top)_{ij} = A_{ji}$.
- De lo anterior se puede demostrar que

$$(\mathbf{AB})^\top = \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top.$$

- La matrix inversa de $\mathbf{A}$, denotada como $\mathbf{A}^{-1}$, satisface $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$.
- De lo anterior se puede demostrar que

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}.$$

- También se tiene

$$(\mathbf{A}^\top)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^\top.$$

Algo importante

La forma cuadrática en matrices se expresa como:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Aquí:

- $\mathbf{x}$ es un vector columna,
- $\mathbf{A}$ es una matriz simétrica.

El uso de la transpuesta ($\mathbf{x}^\top$) garantiza que el resultado sea un escalar, esencial para la consistencia dimensional y facilita operaciones matriciales. Esto reemplaza el uso de un cuadrado ($\mathbf{x}^2$) para obtener una expresión cuadrática.

Identidades básicas de matrices II

- La siguiente es una identidad muy útil que involucra inversas de matrices

$$(\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{B}^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{P} \mathbf{B}^\top (\mathbf{B} \mathbf{P} \mathbf{B}^\top + \mathbf{R})^{-1}.$$

- Suponga que **P** es $N \times N$ y **R** es $M \times M$ (luego **B** es $M \times N$).
- Si $M \ll N$, es más barato evaluar el lado derecho que el izquierdo.
- Otra identidad importante es la *identidad de Woodbury*,

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{C})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{D} + \mathbf{C} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{C} \mathbf{A}^{-1}.$$

- La anterior identidad es útil cuando **A** es grande y diagonal, y de aquí fácil de invertir, mientras **B** tiene muchas filas, pero pocas columnas (y por consiguiente **C**), de manera que el lado derecho es más barato de evaluar que el izquierdo.

3.2.2 matrix cookbook

Trazas y determinantes

- Las trazas y los determinantes aplican a matrices cuadradas.
- La traza $\mathrm{tr}(\mathbf{A})$ de una matriz $\mathbf{A}$ se define como la suma de los elementos de la diagonal principal. $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$
- Se puede demostrar que

$$\mathrm{tr}(\mathbf{AB}) = \mathrm{tr}(\mathbf{BA}).$$

- Igualmente,

$$\mathrm{tr}(\mathbf{ABC}) = \mathrm{tr}(\mathbf{CAB}) = \mathrm{tr}(\mathbf{BCA}).$$

- El determinante del producto dos matrices está dado como

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|.$$

- El determinante de la inversa de una matriz está dado como

$$|\mathbf{A}^{-1}| = \frac{1}{|\mathbf{A}|}.$$

- Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices de tamaño $N \times M$, luego

$$|\mathbf{I}_N + \mathbf{AB}^\top| = |\mathbf{I}_M + \mathbf{A}^\top\mathbf{B}|.$$

Derivadas de matrices I

- En algunas oportunidades es necesario considerar las derivadas de vectores y matrices con respecto a escalares.
- La derivada de un vector **a** con respecto a una escalar x es un vector, con componentes

$$\left(\frac{d\mathbf{a}}{dx}\right)_i = \frac{\partial a_i}{\partial x}.$$

- La definición para la derivada de una matriz con respecto a una escalar es igual.
- También se definen las derivadas de una escalar x con respecto a un vector **a** o una matriz, por ejemplo

$$\left(\frac{dx}{d\mathbf{a}}\right)_i = \frac{\partial x}{\partial a_i}.$$

Derivadas de matrices II

- Igualmente, la derivada de una vector **a** con respecto a otro vector **b** es

$$\left(\frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{b}}\right)_{ij} = \frac{\partial a_i}{\partial b_j}.$$

- Se puede demostrar que

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^\top \mathbf{a}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{a}^\top \mathbf{x}) = \mathbf{a}.$$

- Similarmente,

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{AB}) = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\mathbf{B} + \mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x}.$$

- La derivada de la inversa de una matriz se puede obtener como

$$\frac{\partial(\mathbf{A}^{-1})}{\partial x} = -\mathbf{A}^{-1}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\mathbf{A}^{-1}.$$

Derivadas de matrices III

- Se puede demostrar que

$$\frac{\partial}{\partial x} \ln |\mathbf{A}| = \mathrm{tr}\left(\mathbf{A}^{-1} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\right).$$

- Si x es un elemento de A, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial A_{ij}} \mathrm{tr}(\mathbf{AB}) = B_{ji}.$$

- El resultado anterior se puede escribir de forma más compacta como

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} \mathrm{tr}(\mathbf{AB}) = \mathbf{B}^{\top}.$$

Derivadas de matrices IV

- Del resultado anterior se tienen las siguientes propiedades

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} \operatorname{tr}(\mathbf{A}^\top \mathbf{B}) = \mathbf{B}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} \operatorname{tr}(\mathbf{A}) = \mathbf{I}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} \operatorname{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^\top) = \mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{B}^\top).$$

- Igualmente se puede demostrar que

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} \ln |\mathbf{A}| = (\mathbf{A}^{-1})^\top.$$

Practicar

1. Demuestre lo primeros paso de la inversa de la suma

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\left(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}\right)^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}$$

Hint: $A^1 * A = I$

2. Calcula la $\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{A}}$ con $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{BCDA}$ siendo **ABCD** matrices invertibles y coincidentes adecuadamente en la expresión.

Hint: propiedad 37 y 42 de capitulo derivadas ∂(*A.T * B*)/ ∂A=*B.T*

3. Demuestre que $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{s})^T\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{2w}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{s})$

Hint: Asuma matrices simétricas

Referencias

Minka, Thomas P. (2000): **Old and New Matrix Algebra Useful for Statistics**.

Petersen, Kaare B. and Pedersen, Michael S. (2007): **The Matrix Cookbook**.

Brookes, Mike (2011): **The Matrix Reference Manual**, `http://www.ee.imperial.ac.uk/hp/staff/dmb/matrix/intro.html`.

Magnus, J. R. and Neudecker, H. (1999): **Matrix Differential Calculus with Applications to Statistics and Econometrics**. Wiley.

II. Repaso de Probabilidad

Nociones Básicas I

X: cara sello Y: dado

- Sean dos variables aleatorias $X = \{x_1, \ldots, x_M\}$ y $Y = \{y_1, \ldots, y_L\}$.

- Se tienen N realizaciones de X y Y.

S, espacio muestral de 12

- Se define la **probabilidad conjunta** como

$$p(X = x_i, Y = y_j) = \frac{n_{ij}}{N},$$

Prob. de cara y par = 3/12

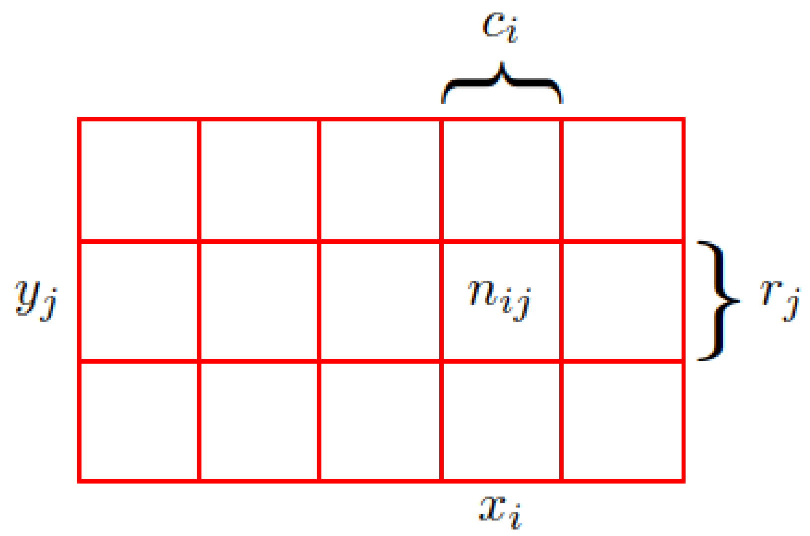
donde n_{ij} se define como el número de realizaciones en las que $X = x_i$ y $Y = y_j$.

Nociones Básicas II

- Sea c_i el número de realizaciones en las que X toma el valor x_i (ind. del valor de Y).

- Se define la **probabilidad marginal** de $X = x_i$ como

$$p(X = x_i) = \frac{c_i}{N} = \frac{1}{N}\sum_j n_{ij} = \sum_{j=1}^{L} p(X = x_i, Y = y_j).$$



Prob. de cara = 6/12

Nociones Básicas III

- Se define la **probabilidad condicional** de $Y = y_j$ dado $X = x_i$ como

$$p(Y = y_j | X = x_i) = \frac{n_{ij}}{c_i}.$$

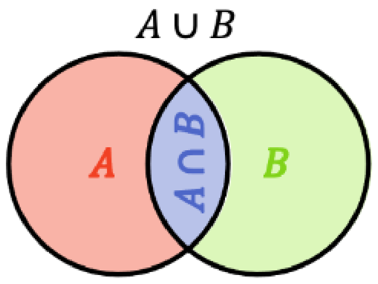
Prob. de par Dado que es cruz = 3/6

Además,

$$p(X = x_i, Y = y_j) = \frac{n_{ij}}{N} = \frac{n_{ij}}{c_i}\frac{c_i}{N}$$
$$= p(Y = y_j | X = x_i) p(X = x_i).$$

- **Regla de la suma:** $p(X) = \sum_Y p(X, Y)$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



- **Regla del producto:**

$$p(X, Y) = p(Y|X)p(X)$$
$$= p(X|Y)p(Y).$$

Nociones Básicas IV

- **Teorema de Bayes:**

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i)\cdot P(B/A_i)}{P(B)}$$

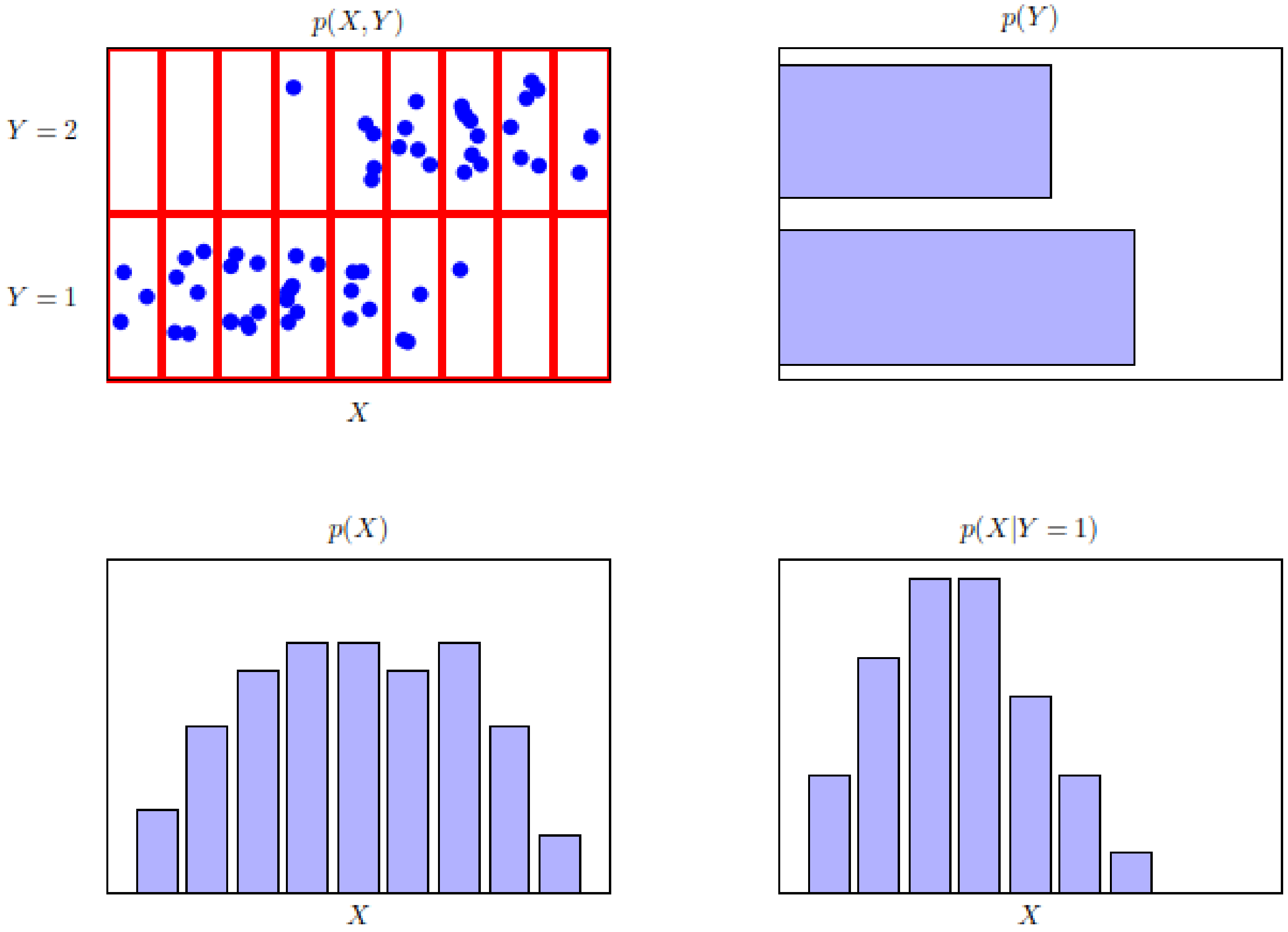
Donde:
$P(A_i)$ = Probabilidad a priori
$P(B/A_i)$ = Probabilidad condicional
$P(B)$ = Probabilidad Total
$P(A_i/B)$ = Probabilidad a posteriori

- **Independencia:**

$$p(Y|X) = p(Y), \; p(X,Y) = p(X)p(Y)$$

Ejemplo

Suponga que X toma 9 valores y Y toma dos valores. Se tienen $N = 60$ realizaciones.



Densidad de probabilidad I

- La **función de densidad de probabilidad** $p(x)$ debe cumplir que

$$p(x) \geq 0$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1.$$

- Para un intervalo

$$p(x \in (a,b)) = \int_a^b p(x)dx.$$

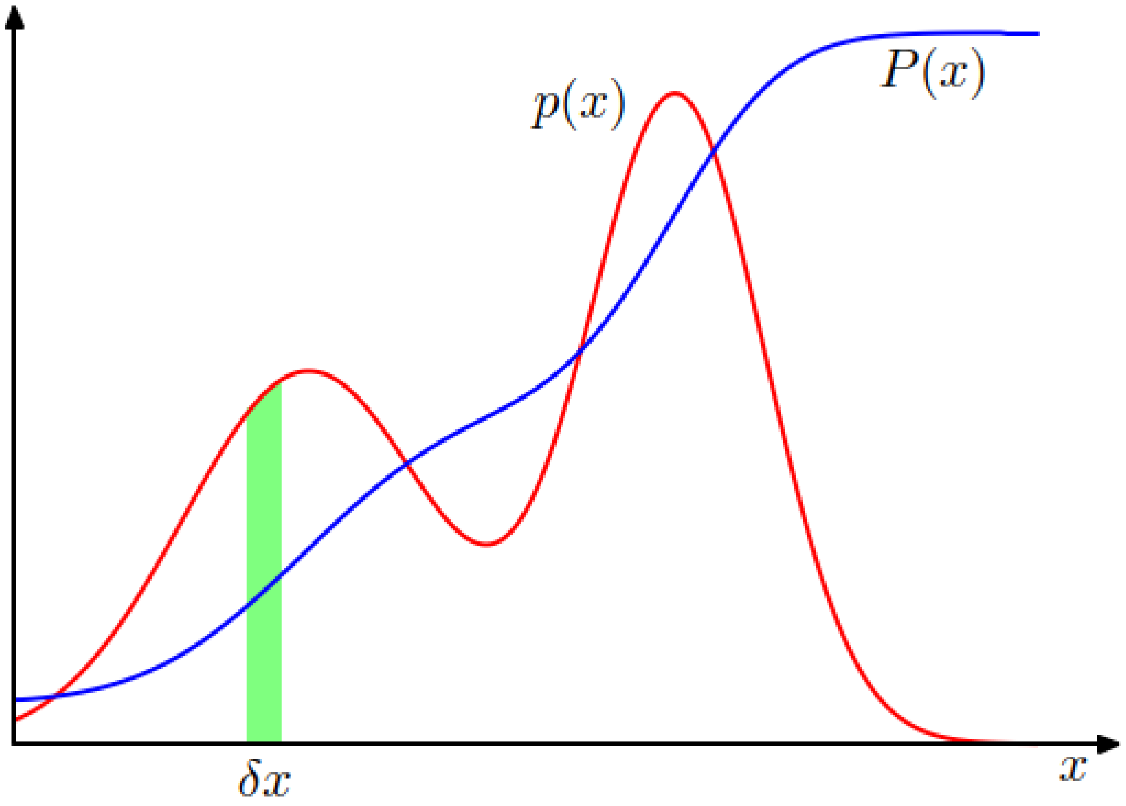
- La **función de distribución de probabilidad** (ó distribución acumulativa) se define como

$$P(x) = \int_{-\infty}^{x} p(z)dz.$$

  Igualmente,

$$p(x) = \frac{dP(x)}{dx}.$$

Densidad de probabilidad II



Vectores aleatorios

- Supóngase un conjunto de D variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_D$.
- Estas variables aleatorias pueden representarse como un vector columna de dimensiones $D \times 1$,

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_D \end{bmatrix}$$

- Un valor específico de $\mathbf{X}$ se denota como $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_D)^\top$.

Densidad de probabilidad conjunta

- La densidad de probabilidad conjunta para $\mathbf{X}$, $p(\mathbf{x}) = p(x_1, \ldots, x_D)$, debe satisfacer

$$p(\mathbf{x}) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1.$$

- **Regla de la suma:**

$$p(\mathbf{x}) = \int p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

- **Regla del producto:**

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) p(\mathbf{y}).$$

- **Teorema de Bayes:**

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) p(\mathbf{y})}{p(\mathbf{x})}.$$

Valor esperado y Covarianza I

- El **valor esperado** o la **esperanza** de una función $f(x)$ está definida como

$$\mathbb{E}[f] = \sum_x p(x)f(x), \quad \mathbb{E}[f] = \int p(x)f(x)dx.$$

- La **esperanza muestral** de una función $f(x)$ se define como

$$\mathbb{E}[f] \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i).$$

- La **esperanza condicional** de una función $f(x)$ dado $Y = y$ se define como

$$\mathbb{E}_x[f|y] = \sum_x p(x|y)f(x).$$

- La **varianza** de una función $f(x)$ está definida como

$$\mathrm{var}[f] = \mathbb{E}[f(x) - \mathbb{E}[f(x)]]^2 = \mathbb{E}[f(x)^2] - \mathbb{E}[f(x)]^2.$$

1. **Definición de la Variable Aleatoria:**
   - Sea X la variable aleatoria que representa el resultado del lanzamiento del dado.
2. **Espacio Muestral y Probabilidades:**
   - El espacio muestral S es $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, los posibles resultados del dado.
   - La probabilidad de cada resultado individual es $P(X = x_i) = \frac{1}{6}$ ya que el dado es justo.
3. **Cálculo del Valor Esperado:**
   - El valor esperado $E(X)$ se calcula como el promedio ponderado de los resultados posibles: $E(X) = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = \frac{7}{2}$
4. **Cálculo de la Varianza:**
   - La varianza $\mathrm{Var}(X)$ se calcula como la suma de los cuadrados de las diferencias entre cada resultado y el valor esperado, ponderado por sus probabilidades: $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{6} \cdot (1 - \frac{7}{2})^2 + \frac{1}{6} \cdot (2 - \frac{7}{2})^2 + \ldots + \frac{1}{6} \cdot (6 - \frac{7}{2})^2$
   - Calculando esta expresión, obtendríamos la varianza específica para este caso.

Valor esperado y Covarianza II

- La **covarianza** de dos variables aleatorias X y Y se define como

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}[x, y] &= \mathbb{E}_{x,y}[\{x - \mathbb{E}[x]\}\{y - \mathbb{E}[y]\}] \\ &= \mathbb{E}_{x,y}[xy] - \mathbb{E}[x]\mathbb{E}[y].\end{aligned}$$

- La esperanza de un vector de variables aleatorias **X**, se define como

$$\mathbb{E}[\mathbf{x}] \;=\; \begin{bmatrix} \mathbb{E}[x_1] \\ \mathbb{E}[x_2] \\ \vdots \\ \mathbb{E}[x_D] \end{bmatrix}$$

- La covarianza para el caso de vectores de variables aleatorias **X** y **Y**, se define como

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] &= \mathbb{E}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}[\{\mathbf{x} - \mathbb{E}[\mathbf{x}]\}\{\mathbf{y}^\top - (\mathbb{E}[\mathbf{y}])^\top\}] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}[\mathbf{x}\mathbf{y}^\top] - \mathbb{E}[\mathbf{x}](\mathbb{E}[\mathbf{y}])^\top.\end{aligned}$$

Valor esperado y Covarianza III

- Si sólo se considera un vector de variables aleatorias **X**

$$\mathrm{cov}[\mathbf{x}] \equiv \mathrm{cov}[\mathbf{x}, \mathbf{x}].$$

- La anterior cantidad es una matriz, la *matriz de covarianza*,

$$\mathrm{cov}[\mathbf{x}] = \begin{bmatrix} \mathrm{cov}[x_1, x_1] & \mathrm{cov}[x_1, x_2] & \cdots & \mathrm{cov}[x_1, x_D] \\ \mathrm{cov}[x_2, x_1] & \mathrm{cov}[x_2, x_2] & \cdots & \mathrm{cov}[x_2, x_D] \\ \vdots & \ldots & \ldots & \vdots \\ \mathrm{cov}[x_D, x_1] & \mathrm{cov}[x_D, x_2] & \cdots & \mathrm{cov}[x_D, x_D] \end{bmatrix}$$

Distribución Gaussiana I

- La distribución Gaussiana en el caso univariado se define como

$$\mathcal{N}(x|\mu,\sigma^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\}.$$

- Esperanza

$$\mathbb{E}[x] = \int x\mathcal{N}(x|\mu,\sigma^2)dx = \mu.$$

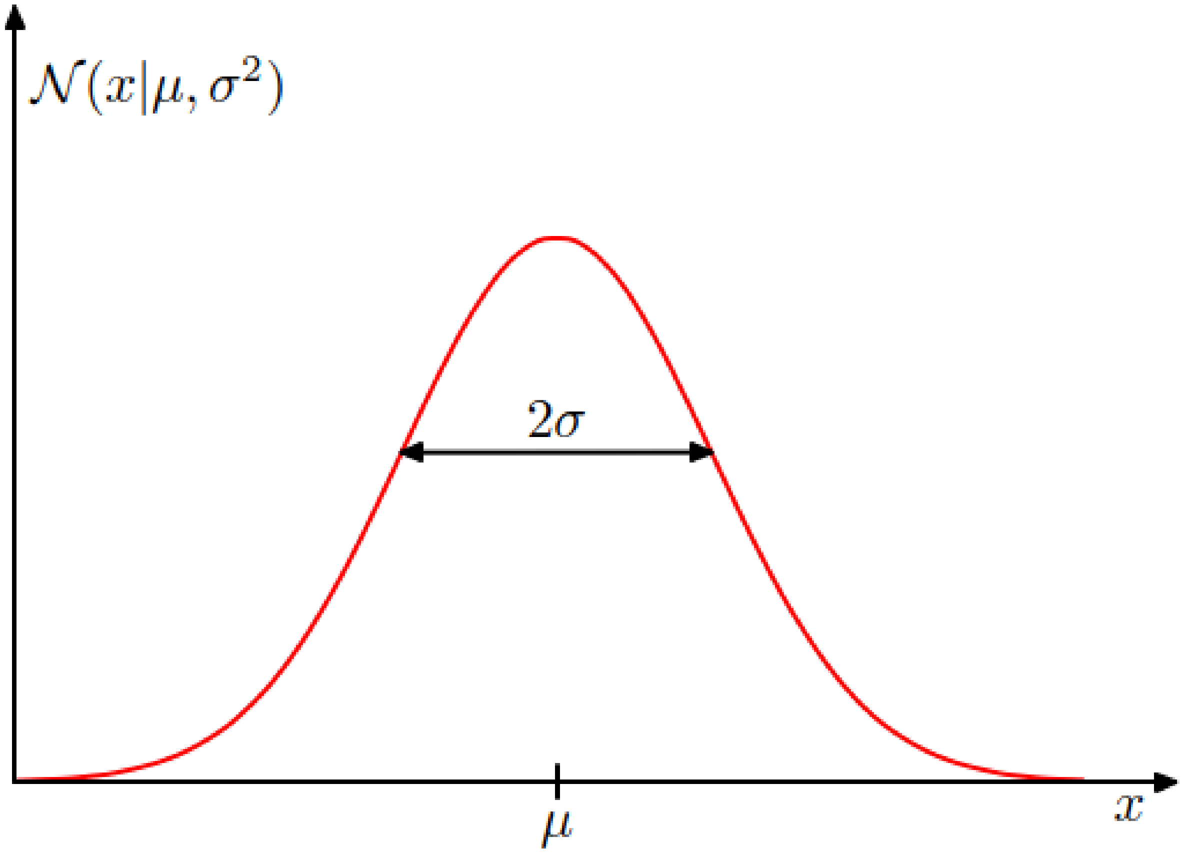
- Varianza

$$\mathrm{var}[x] = \mathbb{E}[x^2] - \mathbb{E}[x]^2 = \sigma^2$$

- Para el caso multivariado,

$$\mathcal{N}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{(2\pi)^{D/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right\}.$$

Distribución Gaussiana II



Referencias

Meyer, Paul (1986): **Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas**.
Addison-Wesley Iberoamericana. 1986.