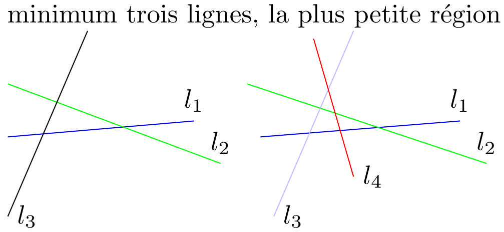
EXERCICES

Exercice 6 page 17
Le croisement de deux lignes ne suffit pas pour faire une région fermée, il faut au minimum trois lignes, la plus petite région fermée est alors un triangle



Sur le schéma de gauche on a une région fermée, un triangle, qui découle des intersections des trois lignes et sur le schéma de droite, composé des intersections de quatre lignes, la région fermée de gauche n'apparaît plus. Elle est coupée par la ligne l_4. Ceci montre que l'ajout d'une ligne impose de recalculer de zéro toutes les régions fermées.
Une région fermée c'est un triangle, toutes les régions fermées sont les couples de deux droites coupées par la droite l_n dernièrement ajoutée.

On pose l'hypothèse que le nombre maximum de régions fermées, obtenues par les insertections de n droites, est : $\binom{2}{n-1}, n \geq 3$.

L'hypothèse se vérifie pour les deux premiers cas $\binom{2}{2} = 1$ et $\binom{2}{3} = 3$ puisque $(l_1l_2l_4,\ l_1l_3l_4,\ l_2l_3l_4)$. Démontrons que l'hypothèse reste vrai au rang $n+1$

Exercice 7 page 17
Puisque $H(n) = J(n+1) - J(n)$ ça entraine que $H(n) \neq 2$ car si $n+1 = 8$ alors $H(7) = J(8) - J(7) < 2$.
On a montré avec un contre-exemple que $H(n) \neq 2$.

RECCURENT PROBLEMS (Homework exercises)

8. Solve the recurrence $Q_0 = \alpha;\ \ Q_1 = \beta;$
$Q_n = (1 + Q_{n-1})/Q_{n-2}$, for $n > 1$
Assume that $Q_n \neq 0$ for all n ≥ 0

Nous allons calculer les autres termes de la suite jusqu' à Q_7.
$Q_2 = \frac{1+\beta}{\alpha};\ \ Q_3 = \frac{\alpha+\beta+1}{\alpha\beta};\ \ Q_4 = \frac{\alpha+1}{\beta}\ ; Q_5 = Q_0;\ Q_6 = Q_1; Q_7 = Q_2$

Suite à ces calculs on pose comme hypothèse de récurrence que $Q_n = Q_{(n \bmod 5)}$ pour tout $n \geq 5$. L'hypothèse se vérifie au rang 5, nous supposons qu'elle reste vraie jusqu'au rang n. On a $Q_{n+1} = \frac{1+Q_n}{Q_{n-1}}$ et on va montrer que, en fonction de chaque valeur de $n+1 \bmod 5$ l'hypothèse se vérifie.

Si $n+1 = k.b + r$ alors $n = k.b + (r-1)$
Si $n = k.b$ alors $n - 1 = (k-1).b + b - 1$
ainsi si $n+1 \bmod 5 = 0$ alors $Q_{n+1} = \frac{\beta+\alpha+1}{\beta} \times \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta+1} = \alpha$

Si $n+1 \bmod 5 = 4$ alors $Q_{n+1} = \frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{\alpha\beta} \times \frac{\alpha}{1+\beta} = \frac{\alpha+1}{\beta}$
Si $n+1 \bmod 5 = 3$ alors $Q_{n+1} = \frac{\alpha+\beta+1}{\alpha} \times \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha+\beta+1}{\alpha\beta}$
Si $n+1 \bmod 5 = 2$ alors $Q_{n+1} = \frac{1+\beta}{\alpha}$
Si $n+1 \bmod 5 = 1$ alors $Q_{n+1} = (1+\alpha) \times \frac{\beta}{1+\alpha} = \beta$

L'hypothèse est vérifiée dans tous les cas du rang n+1.