

**Zur Anwendung der numerischen Feldberechnung bei der Lösung
spezieller Probleme der elektromagnetischen Energiewandlung**

der
Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik
der
Universität Dortmund
vorgelegte

H A B I L I T A T I O N S S C H R I F T
zur Erlangung der Venia Legendi

von
Dr.-Ing. MEINOLF KLOCKE

Dortmund
2006

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter und Oberingenieur am Lehrstuhl für Elektrische Antriebe und Mechatronik, ehemals Lehrstuhl für Elektrische Maschinen, Antriebe und Leistungselektronik der Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik an der Universität Dortmund.

Herr Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. S. Kulig gab die Anregung zu dieser Arbeit und begleitete sie mit großem Interesse. Für seine Unterstützung bei der thematischen Gestaltung und der inhaltlichen Ausarbeitung der vorliegenden Schrift sowie für die wertvollen Diskussionen und Dialoge möchte ich mich an dieser Stelle herzlich bedanken.

Herrn Prof. Dr.-Ing. K. Reichert und Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Hirsch danke ich herzlich für die freundliche Übernahme der Begutachtung.

Allen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern des Lehrstuhls sowie den studentischen Hilfskräften, die in vielfältiger Weise zum Gelingen des vorliegenden Werkes beigetragen haben, danke ich für die mir zuteil gewordene Unterstützung.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Übersicht über unterschiedliche Methoden und Programme	5
3	Zielsetzung und Aufstellung der Arbeit	21
4	Mathematische Grundlagen näher betrachteter Verfahren	25
4.1	Methode der Finiten Elemente	25
4.1.1	Variationsmethode nach Ritz	25
4.1.2	Methode des gewichteten Residuums	32
4.2	Methode der Finiten Differenzen	36
4.2.1	Herleitung eines Schemas über Taylor-Reihen	37
4.2.2	Anwendung des Integralbilanzansatzes auf orthogonale Gitter	38
4.2.3	Anwendung des Integralbilanzansatzes auf Dreiecksnetze	40
4.3	Anmerkungen zur Feldberechnung im dreidimensionalen Raum	45
5	Das Programmsystem FELMEC	51
5.1	Simulation rotierender elektrischer Maschinen mit FELMEC	54
5.1.1	Feldgleichungen mit Erregung über Wicklungs- und Massivleiterströme	54
5.1.2	Zweipolgleichungen von Stator- und Rotorwicklungselementen in verallgemeinerter Anwendung	56
5.2	Berechnung des transienten elektromagnetischen Feldes bei axisymmetrischen Umformprozessen mit FELMEC-2½D	60
5.2.1	Grundsätzliches	60
5.2.2	Spannungsgleichungen gleichmäßig verteilter Wicklungen	61
5.2.3	Feldgleichungen für wirbelstrombehaftete Massivleiter mit externer Speisung	62
5.2.4	Stromgleichungen der Massivleiter mit externer Speisung	63
5.2.5	Einfaches Rechenbeispiel	64
5.2.6	Interpolationsanbindung der bewegten wirbelstrombehafteten Struktur	67
5.2.7	Einbettung der bewegten wirbelstrombehafteten Struktur durch Neuvernetzung	72
5.2.8	Vergleich der Methoden für bewegte Strukturen anhand eines Testbeispiels	78
5.2.9	Berechnung der KraftdichteVerteilung in der wirbelstrombehafteten Struktur	83

6	Der Einsatz unterschiedlicher Programme zur Lösung spezieller Probleme	91
6.1	Berechnung elektromagnetischer Kräfte	91
6.1.1	Einseitiger magnetischer Zug infolge statischer Exzentrizität bei einem polumschaltbaren Aufzugmotor	91
6.1.2	Statorstabkräfte in Synchronmaschinen bei Störfällen	96
6.2	Berücksichtigung untypischer Netzwerktopologien	102
6.2.1	Windungsschlüsse in Rotoren von Synchrongeneratoren	102
6.2.2	Hochlauf eines Schleifringläuferasynchronmotors mit einphasiger Rotor- umbrechung	110
6.2.3	Windungsschlüsse in Statoren von Synchrongeneratoren	117
6.3	Wirbelstromverluste in Komponenten von Hochstromanlagen	130
6.3.1	Berücksichtigung der Eisensättigung durch externe Unterrelaxation	130
6.3.2	3D-Modellreduktion durch bisektoruelle Randbedingung	134
6.3.3	Wicklungsmodellierung durch geeignete Ausnutzung von anisotropen Materialvorgaben und Übergangsbedingungen	140
7	Begleitende analytische Berechnungen als Referenzbetrachtungen zu speziellen Fragen und Anwendungen numerischer Methoden	145
7.1	Wirbelstromverluste in einem axial unendlich ausgedehnten Stab mit rechteckigem Querschnitt bei konstanter anregender Feldamplitude	145
7.2	Exakte Berechnung des Gleichstromleitwertes eines Kreisringsegmentes mit poly- gonal berandeter Querschnittfläche	158
7.3	Magnetfeld in einer Testanordnung mit konischer, durch Kegelmantelflächen begrenzter Nut	162
8	Zusammenfassung und Ausblick	173
	Formelzeichen, Indizes und Schreibweisen	175
	Quellen- und Literaturverzeichnis	181
	Lebenslauf	191

1 Einleitung

Die Berechnung elektromagnetischer Felder im Rahmen der Behandlung von Problemen elektromechanischer Energiewandler und elektrischer Anlagen war über eine lange Zeit eine Domäne analytischer Methoden oder Analogieverfahren. Die praktische Anwendbarkeit der erstgenannten war jedoch in mancherlei Hinsicht eingeschränkt:

Genaue Nachbildungen komplizierter Geometrien sind bei analytischen Verfahren nicht ohne weiteres möglich. Es kann z. B. bei der konformen Abbildung für polygonal berandete Gebiete zwar mit Hilfe der Schwarz-Christoffelschen Formel eine komplexe Funktion als Integral angegeben werden; dessen Auswertung und insbesondere die Umkehrung dieser Funktion gestalten sich aber für Fälle der Praxis derart anspruchsvoll, dass aus heutiger Sicht die Vorteile fraglich erscheinen.

Bei dem ebenfalls weit verbreiteten Separationsansatz zur Lösung der partiellen Differentialgleichungen ergeben sich Funktionen in Form unendlicher Reihen, deren effiziente Auswertung letztlich auch nur rechnergestützt möglich ist. Bei der Behandlung komplexer Geometrien ist zudem eine Zerlegung in elementare Grundgeometrien, z. B. Rechtecke, erforderlich, für die jeweils die Lösungen in Reihenform mit zunächst unbekannten Konstanten angegeben werden. Aus der physikalischen Notwendigkeit eines stetigen Übergangs der gesuchten Potentialfunktionen und ggf. der Ableitungen auf den gemeinsamen Rändern der Grundgeometrien resultiert letztlich ein Gleichungssystem für die freien Konstanten. Dies kann für eine entsprechend hohe Genauigkeit mit einer großen Zahl von Unbekannten effizient nur durch den Einsatz eines Rechners gelöst werden.

Durch die letztendliche numerische Behandlung der analytisch hergeleiteten Ansätze gehen wesentliche Vorteile, die in der exakten, formelmäßigen Darstellung der Lösung bei einem analytischen Ansatz gegeben sein sollten, verloren. Eine geschlossene analytische Lösung hätte nämlich den Vorteil höherer Allgemeingültigkeit. Der Einfluss einzelner Parameter sollte hieraus ersichtlich sein, so dass Optimierungen besser ausführbar sind. Ein Beispiel dafür, dass schon in einem einfachen Fall einer Erhöhung der Dimensionalität von eins auf zwei und die daraus folgende Darstellung der Lösung als unendliche Reihe eine Diskutierbarkeit des Ergebnisses wesentlich erschwert, wird in Kap. 7.1 aufgeführt.

Nichtlineare Phänomene, wie im Elektromaschinenbau insbesondere durch die magnetische Sättigung der ferromagnetischen Werkstoffe gegeben, können in analytischen Ansätzen nur sehr begrenzt, z. B. durch Beschränkung auf Eindimensionalität, berücksichtigt werden. Die analytische Bestimmung von Wirbelstromverteilungen in ferromagnetischen Körpern

unter dem Einfluss der Sättigung ist auch dann nur näherungsweise unter der Annahme spezifischer Feldverhältnisse möglich. Pionierarbeiten hierzu wurden z. B. von Agarval [Agar59], Rosenberg [Ros23] und Oberretl [Ob59a] geleistet. Eine vergleichende Übersicht dieser unterschiedlichen Ansätze mit Rechenbeispielen und Diskussion findet sich bei Bolte, Lütke-Dahldrup und Stöber [BLS81]. Ein Analogieverfahren zur experimentellen Bestimmung der Wirbelstromverluste unter Berücksichtigung der Eisensättigung, bei dem das Feldproblem durch örtliche Diskretisierung in ein äquivalentes Netzwerkproblem überführt wird und die Nichtlinearität durch Halbleiterbauelemente abgebildet wird, ist in [Ob69] beschrieben.

Auch die Erfassung jenes zeitvarianten Verhaltens, das durch die Bewegung von Systemkomponenten eingebracht wird, stellt vom Standpunkt eines feldtheoretischen, analytischen Lösungsansatzes ein beachtliches Problem dar.

Die genannten Probleme können bedingt umgangen werden, wenn statt eines umfassenden feldtheoretischen Ansatzes ein System von mathematischen Beziehungen zwischen integralen, die Maschine beschreibenden Größen, d. h. Strömen, Spannungen und Flussverkettenungen, formuliert wird. Diese lassen sich wie in der Elektrotechnik bewährt als Netzwerkmodelle darstellen und durch Ersatzschaltbilder veranschaulichen. Hierbei müssen hinsichtlich der auftretenden Felder gewisse Einschränkungen und Vereinfachungen gemacht werden. In der Vergangenheit entstanden so weitreichende Beschreibungsmöglichkeiten des Grundwellenverhaltens elektrischer Drehfeldmaschinen, die – insbesondere für die Synchronmaschine – im Wesentlichen auf der Zwei-Achsen-Theorie von Park [Park29] beruhen. Bei dieser Theorie wird die implizite Zeitabhängigkeit der magnetischen Kopplung von Ständer- und Rotorwicklung durch Anwendung einer vom Rotorpositionswinkel abhängigen Orthogonaltransformation der Ständergrößen eliminiert. Die Originalgrößen werden dabei auf transformierte Größen abgebildet, die mit der Polachse des Rotors, der direkten Achse oder d-Achse, und der Achse durch die Pollücke, der Querachse oder q-Achse, assoziiert sind. Die zu den transformierten Gleichungen aufstellbaren Ersatzschaltbilder sind auch heute noch Grundlage der Simulation des dynamischen Zeit- und Stabilitätsverhaltens elektrischer Energieversorgungsnetze, wie sie z. B. in Netzwerkberechnungsprogrammen wie das von Kulicke entwickelte NETOMAC [Klck81] oder das auf Dommel zurückgehende EMTP [Dom69] zum Einsatz kommen. Ersatzschemata, die über die aus der d,q-Transformation resultierenden Ersatzschaltbilder hinausgehen, werden u. a. von Bissig, Reichert und Kulig in [BRK93] vorgeschlagen. Diese beinhalten Kettenleiterstrukturen zur Nachbildung insbe-

sondere von Strömen, die bei Störfällen im massiven Eisen des Rotorballens fließen. Eine speziell auf die Schalenkonstruktion eines Generators mit supraleitender Erregerwicklung angepasste Ersatzschaltbildmodellierung wird von Liese, Kulig und Lambrecht in [LKL84] beschrieben. Es ergeben sich durch eine Zerlegung der Konstruktion in diskrete konzentrisch-zylinderschalenartige Abschnitte unterschiedliche T-Netzwerke, die aus feldtheoretischen Überlegungen hergeleitet werden können und deren sukzessive Verkettung das Ersatzschaltbild liefert.

Zahlreiche Parameter unterliegen im Elektromaschinenbau noch immer der empirischen Bestimmung. So werden u. a. subtransiente und transiente Reaktanzen und Zeitkonstanten eines Synchrongenerators durch den Stoßkurzschlussversuch und dessen Auswertung nach VDE 0530 Teil 4 [VDE] bestimmt. Eine tiefergehende Identifikation von Netzwerkmodellen für Synchronmaschinen wird in [BRK93] auf der Basis von Stillstandsfrequenzgangsmessungen betrieben, wobei die zuvor erwähnten, um Kettenleiterstrukturen erweiterten Ersatzschaltbilder zugrunde gelegt werden.

Für die Berechnung der Stirnstreuinduktivität existieren ebenfalls auf Empirie basierte Gleichungen, die sich durch den weitgehend von der Wickelkopfgeometrie unabhängigen Streuleitwert $\lambda_s \approx 0,3$ auszeichnen. Bei Dornau [Do90] sind Näherungen für λ_s beim Asynchronkäfigläufermotor angegeben, die weitere Wicklungsdetails berücksichtigen, z. B. die Polpaarzahl, sowie den Abstand $s_{1,2}$ zwischen den Schwerpunkten von Ringquerschnittsfläche und Ständerwickelkopfquerschnittsfläche.

Im Gegensatz zu den vorgenannten konventionellen Betrachtungsweisen der elektromagnetischen Energiewandler, die sich im Verlauf des vergangenen Jahrhunderts entwickelt haben, ist der gezielte und umfassende Einsatz der numerischen Feldberechnung insbesondere zur vollständigen transienten und dynamischen Simulation, d. h. unter Einbeziehung von Spannungs- und Bewegungsgleichungen, erst eine Entwicklung der vergangenen zwei Jahrzehnte. Obwohl die mathematischen Grundlagen numerischer Verfahren schon seit längerem bekannt sind, konnte erst die rasante Entwicklung von Computerhardware mit immer leistungsfähigeren Prozessoren und höheren Taktfrequenzen einerseits und der Verfügbarkeit von immer mehr Arbeitsspeicher andererseits den effizienten Einsatz numerischer Verfahren auch bei komplizierteren Fragestellungen der Feldberechnung ermöglichen. Die Steigerung der verfügbaren Rechenleistung wurde von der Entwicklung zahlreicher akademischer wie kommerzieller Programme zur numerischen Feldberechnung begleitet.

Für die praktische Umsetzung ist letztlich die Relation zwischen Aufwand und Nutzen entscheidend. Eine elektrodynamisch-strukturmechanische 3D-Simulation der Wicklungs-endzone eines großen Turbogenerators gestaltet sich hinsichtlich der Modellgenerierung und der Computerressourcen sehr aufwändig. Sie erscheint jedoch gerechtfertigt angesichts dessen, dass ein solcher Generator mit einer Bemessungsscheinleistung von mehreren Hundert MVA eine Investition in Millionenhöhe darstellt und eine Prototyperstellung letztlich ausgeschlossen ist. Demgegenüber ist bei der Entwicklung kleiner Maschinen von wenigen Watt Bemessungsleistung der Bau von Prototypen bei weitem einfacher und gegebenenfalls einer aufwändigen 3D-Berechnung vorzuziehen. Die aus Messungen an Prototypen erhaltenen Daten beinhalten zudem alle physikalischen und werkstofftechnischen, nutzbringenden wie auch parasitären Effekte und bieten so den Vorteil einer entsprechend hohen Authentizität. Die Genauigkeit einer Feldberechnung hängt dagegen hier u. a. von der Zuverlässigkeit der verwendeten Materialmodelle ab, z. B. der Berücksichtigung von Permeabilitätsenkungen im Bereich der Stanzkanten. Dieser Effekt ist schon in [Ob59b] dokumentiert und ist insbesondere bei Kleinmaschinen aufgrund der geringen Abmessungen der Blechschnitte nicht ohne weiteres vernachlässigbar.

Als Fazit der vorangegangenen Ausführungen lässt sich festhalten, dass die im Verlauf eines Jahrhunderts gewachsenen traditionellen Verfahren durch den Einsatz der numerischen Feldberechnung nicht verdrängt oder ersetzt werden können, sondern weiterhin die Basis für die Maschinenauslegung bleiben werden. Die numerischen Verfahren bilden hierzu jedoch eine sinnvolle und zuverlässige Ergänzung, wenn insbesondere die Optimierung von Details im Vordergrund steht oder die Berechnung messtechnisch nicht oder nur schwer zugänglicher Größen gefragt ist. Des Weiteren ermöglichen numerische Simulationsrechnungen die detailgetreue Analyse von Störfällen, die, in der Praxis als Experiment ausgeführt, mit der Zerstörung des Versuchsgegenstandes einhergehen würden. Im Gegensatz zum Experiment kann durch die simulatorische Behandlung ein weites Spektrum von Parametern und strukturellen Variationen abgedeckt werden. In solchen Fällen lassen sich zudem klassische Theorien, die von einer sinusförmigen Feldverteilung und einem symmetrischen Aufbau der Maschine ausgehen, nicht anwenden [Kul90].

2 Übersicht über unterschiedliche Methoden und Programme

Die Zunahme verfügbarer Rechnerleistung in den vergangenen Jahrzehnten wurde von einer Entwicklung zahlreicher numerischer Methoden und Implementierung dieser Methoden in unterschiedlichsten Programmen begleitet. Aufgrund der Vielzahl von Verfahren und Programmen können die nachfolgenden Darstellungen nur einen groben Überblick ohne Anspruch auf Vollständigkeit und Ausführlichkeit geben.

Hinsichtlich der Methoden können generell die Gebietsmethoden wie die Finite-Elemente-Methode (FEM) und die Finite-Differenzen-Methode (FDM) oder auch die Finite Integration Theory (FIT) von den Randmethoden, wie z. B. die Boundary-Element-Methode, (BEM) unterschieden werden. Eine weitere Unterscheidung ist durch die Frage gegeben, ob die zu diskretisierenden Feldgleichungen als Differential- oder Integralgleichungen formuliert werden. Auf Integralgleichungsformulierungen wie der „Electric Field Integral Equation“ (EFIE) oder der „Magnetic Field Integral Equation“ (MFIE) beruht z. B. die Momentenmethode (MoM) nach Harrington [Har68]). Sie wird zur Analyse von Antennen- und Streuungsproblemen in der Hochfrequenztechnik angewandt und kann insofern für Untersuchungen zur elektromagnetischen Verträglichkeit eingesetzt werden [Hub91].

Integralgleichungsformulierungen unterscheiden sich von Differentialgleichungsformulierungen auch dadurch, dass nicht der gesamte feldbehaftete Raum diskretisiert wird, sondern nur die relevanten Teilbereiche. Bei Wirbelstromproblemen sind dies, wie in [Kst94] an einem Beispiel gezeigt, die leitfähigen, stromführenden Volumina. Bei Problemen der Wellenausbreitung und Streuung können diese leitfähigen Gebiete zudem aufgrund der niedrigen Eindringtiefe der Stromfelder auf Linien und Flächen reduziert werden. Diesem Vorteil gegenüber den Gebietsmethoden bei der Diskretisierung steht jedoch der Nachteil der Vollbesetztheit der entstehenden Matrizen bei der Auflösung gegenüber. Daher beschäftigt sich die aktuelle Forschung speziell mit geeignet modifizierten Formulierungen, z. B. [Kw01], und angepassten Lösungsverfahren, siehe u. a. [Wei02, Vip05].

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit den genannten Gebietsmethoden, die bei der Berechnung und Simulation von Anlagen der elektromagnetischen Energiewandlung vorwiegend zum Einsatz kommen. Die Finite-Elemente-Methode wird aufgrund ihrer höheren Flexibilität bei der Gittergenerierung und hinsichtlich der Einbettung adaptiver Netzverfeinerungsalgorithmen häufig als überlegen gegenüber der Finite-Differenzen-Methode betrachtet. Dennoch können auch mit der letztgenannten praktisch brauchbare Resultate erzielt werden, wie z. B. in [Gh92] und [Kl99] gezeigt. Adaptive Verfahren sind aufgrund der Strukturierung

der Gitter bei der FDM nur schwer implementierbar. Wird jedoch wie in [Dot99] auf eine durchgängige Strukturierung verzichtet und mit im Rechengebiet endenden Linien gearbeitet, ermöglicht dies durchaus eine lokale und somit auch steuerbare Netzverfeinerung. Eine weitere Modifikation der FDM, bei der die diskreten Gleichungen über Integralbilanzen hergeleitet werden, ermöglicht auch die Behandlung nichtstrukturierter Gitter oder die Kopplung unabhängiger strukturierter Gitter durch lokale Dreiecksnetze, worauf im Rahmen der vorliegenden Arbeit in Kap. 4 und 5 eingegangen wird.

Hinsichtlich der Zeitabhängigkeit gibt es verschiedene Stufen ihrer Berücksichtigung. Während die Berechnung statischer Felder keinerlei Zeitabhängigkeit beinhaltet, aber auch nur die einmalige Lösung eines Gleichungssystems erfordert, entsprechen Berechnungen transienter Vorgänge einer vollständigen Simulation der entsprechenden elektromagnetischen Phänomene bei beliebiger Zeitabhängigkeit, verbunden mit einem hohen Rechenzeitbedarf. Dieser resultiert aus der sukzessiven Lösung eines großen Gleichungssystems für jeden Zeitschritt. Zwischen diesen Extremen liegt die zeitharmonische Berechnung, die sinusförmige Erregungen voraussetzt und mittels eines komplexen Ansatzes für die diskreten Feldgrößen den eingeschwungenen Zustand eines elektrotechnischen Systems durch einmalige Lösung eines komplexen Gleichungssystems liefert.

Die Berücksichtigung kinematischer Einflüsse von vorgegebenen Bewegungsabläufen, z. B. als gleichmäßige Drehbewegung einer Käfigläufersynchronmaschine, ist bei zeitharmonischem Ansatz nur bedingt möglich, wie z. B. in [DeW97] über eine Modifikation der Leitfähigkeit des Käfigmaterials. Hierbei kann ausschließlich das Grundwellenverhalten berechnet werden. Oberfeldeffekte, die unmittelbar aus der Drehbewegung hervorgehen, werden vernachlässigt. Nichtlinear magnetisches Verhalten, d. h. Eisensättigung, kann bei komplexer Rechnung über Grundwellencharakteristiken erfasst werden, wie z. B. bei [Pw88] oder [Ru95].

Die vollständige Erfassung dynamischer Vorgänge einschließlich der Behandlung von Bewegungsgleichungen erfordert dagegen prinzipiell die Anwendung von Zeitschrittverfahren mit gleichzeitiger Anpassung einer veränderten Geometrie in jedem Zeitschritt. Die Kopplung zur Simulation mechanischer Prozesse erfolgt dabei über die Berechnung der wirkenden elektromagnetischen Kräfte. Die Variation der Geometrie ergibt sich rückwirkend aus der Lösung mechanischer Bewegungsgleichungen. In speziellen Anwendungen kann jedoch auch eine gestaffelte Abfolge zeitharmonischer Rechnungen und rein mechanischer Simulationen

zu realistischen Ergebnissen führen. Dies wird in [Bee03] z. B. für einen elektromagnetischen Umformvorgang gezeigt.

Die simultan zu berücksichtigenden mechanischen Prozesse sind hinsichtlich der Anzahl und Art ihrer Freiheitsgrade sowie im Hinblick auf Nichtlinearität und Zeitvarianz klassifizierbar. Ein wesentliches praktisches Kriterium für die Verwendbarkeit gegebener Programmen für eine elektromagnetisch – mechanische gekoppelte Rechnung ist insbesondere durch die Fragestellung gegeben, ob eine Starrkörperbewegung oder ein Vorgang mit nur geringfügigen Formvariationen berechnet werden soll, oder ob starke Formveränderungen berücksichtigt werden müssen. Während es im ersten Fall gerade für den Bereich elektrischer Maschinen eine Vielzahl von kommerziellen Programmen gibt, sind im letztgenannten Fall häufig Eigenentwicklungen oder zumindest die Schaffung geeigneter Schnittstellen zwischen unterschiedlichen Programmen unabdingbar, wie für [Bee03] geschehen. Dies hängt damit zusammen, dass im ersten Fall nur ein überschaubarer, wohldefinierter Bereich, üblicherweise der Luftspalt der Maschine, von der Variation betroffen ist, während bei starker Formänderung die Neuvermaschung eines Großteils des ursprünglichen Rechengebietes notwendig wird.

Ein wesentliches Kriterium ist des Weiteren durch die Dimensionalität der jeweiligen Anordnung gegeben. Die zweidimensionale Berechnung elektrischer Maschinen gehört mittlerweile selbst für transiente oder dynamische Vorgänge zu jenen Standardaufgaben, die durch zahlreiche akademische Entwicklungen wie z. B. FELMEC oder PROFI sowie durch kommerzielle Programme wie z. B. Flux2D, Maxwell 2D oder OPERA-2D abgedeckt werden. Vergleichbare Berechnungen in drei Dimensionen stoßen dagegen sehr schnell an die Grenzen der verfügbaren Ressourcen. Anzumerken ist hierbei, dass die Problematik sich weniger aus der mathematischen Formulierung ergibt, die inzwischen auch für den dreidimensionalen Fall mit zahlreichen unterschiedlichen Potentialansätzen erarbeitet wurde [SiFe83, Hol05, Wei04], sondern die effiziente Verwaltung von Modellen mit einer großen Anzahl von Freiheitsgraden und die schnelle Auflösung der resultierenden Gleichungssysteme betrifft.

Nachfolgend werden einige Programme erwähnt und kurz beschrieben sowie vereinzelt einfache und ausschließlich elektromagnetische Beispielrechnungen ohne Kopplung zu anderen physikalischen Problemstellungen angegeben. Hierbei erfolgt eine grobe Einteilung der Programme nach freier Verfügbarkeit oder kommerzielle Lizenzierung sowie Flexibilität und Möglichkeit einer multiphysikalischen Modellbildung, d. h. der Kopplung unterschiedlicher Phänomene.

Für zweidimensionale, zeitharmonische Feldberechnungen mit Wirbelstromberücksichtigung kann das bis Version 3.4 frei verfügbare Programm FEMM verwendet werden, zu dem auch ein ausführliches Handbuch [Mee04] einschließlich der Beschreibung der zugehörigen Theorie erhältlich ist. Es können ebene Anordnungen in kartesischen Koordinaten (2D) wie auch rotationssymmetrische Problemstellungen in Zylinderkoordinaten („ $2\frac{1}{2}$ D“) behandelt werden. Das Programm weist keine programminterne Begrenzung der Knotenzahl auf. Aufgrund der graphischen Benutzeroberfläche ist eine zügige Einarbeitung möglich.

Nachfolgend sind in den Bildern 2.1a, b und c die Ergebnisse eines Beispiels mit zwei parallelen Sammelschienen der Höhe $h = 100$ mm und Breite $b = 20$ mm in einem Oberflächenabstand zueinander von $d = 10$ mm aufgeführt. Die Leitfähigkeit beträgt $\gamma = 56 \cdot 10^6$ S/m, und es wird ein Strom mit Amplitudenwert $I = 1$ kA bei einer Frequenz $f = 50$ Hz vorgegeben. Die möglichen Symmetrien wurden zwecks vollständiger Darstellung des sich ergebenden Feldbildes hier nicht ausgenutzt. Eine Besonderheit bei diesem Beispiel besteht darin, dass der umgebende unendliche Raum mit Hilfe der Kelvintransformation innerhalb eines zweiten, angekoppelten Rechengebietes behandelt wird. Hierdurch ergibt sich für die Feldlinien des Fernfeldes die einem Liniendipol entsprechende Kreisgestalt, wie in Bild 2.1a links zu erkennen ist. In dem transformierten, unendlichen Rechengebiet erscheinen diese als nahezu geradlinig, Bild 2.1b rechts.

Die Ergebnisse spiegeln im Wesentlichen die analytisch begründeten Erwartungen wider. Wie aus den Bildern 2.1b und c erkennbar ist, konzentriert sich die Stromdichte aufgrund einseitiger Stromverdrängung auf die einander zugewandten Oberflächen, zwischen denen ein nahezu homogenes, starkes Feld auftritt. An den Innenecken der Querschnitte treten dabei die Maxima des Stromdichtebetrages auf. Eine qualitativ vergleichbare Verteilung wird in [Wol03] für die axiale Oberflächenfeldstärke E_z durch Anwendung einer modifizierten PEEC-Methode berechnet, allerdings für andere Abmessungen und Frequenzen.

Der Verlauf des Stromdichtebetrages in der Symmetrieebene quer zur Leiteroberfläche in Bild 2.1c entspricht im Bereich der Innenoberflächen in etwa dem Eindringen einer ebenen elektromagnetischen Welle in einen unendlichen Halbraum. Die Abnahme von ca. $1,07 \text{ A/mm}^2$ auf $0,405 \text{ A/mm}^2$ innerhalb von 10 mm korrespondiert hierbei mit dem Eindringverhalten in Kupfer bei 50 Hz.

Das Programm FEMM wird unter anderem auch für die zuvor erwähnte gestaffelte Berechnung von Umformvorgängen mit zeitharmonischer Behandlung des elektromagnetischen Teilproblems [Bee03] angewendet.

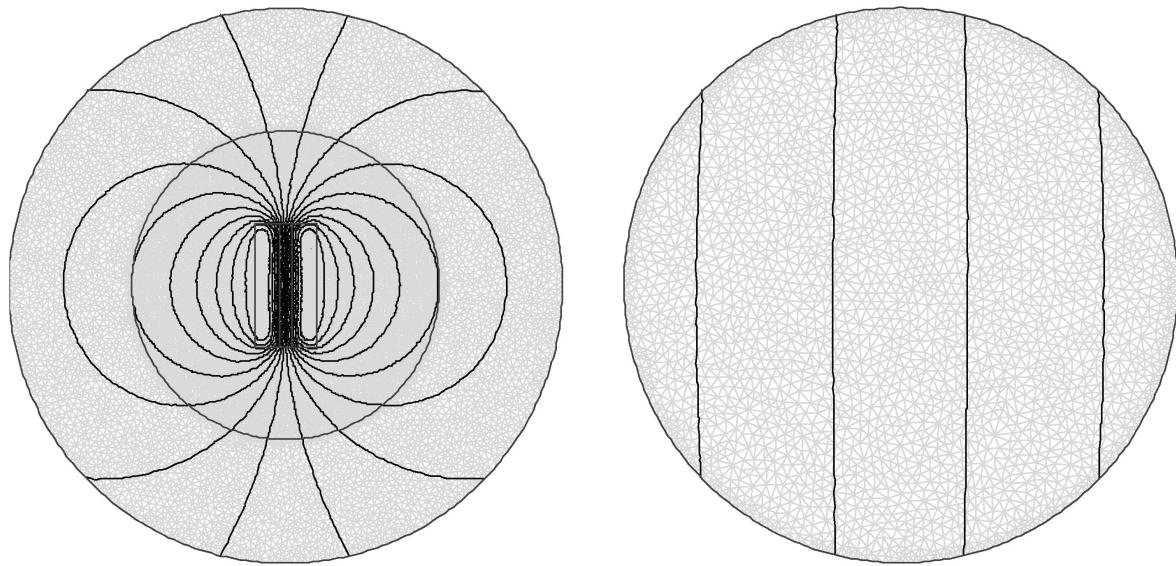


Bild 2.1a: Magnetisches Feld zweier paralleler Sammelschienen, Realteil. Links: modellrelevanter Innenbereich. Rechts: Transformierter unendlicher Raum jenseits des Modellrandes. Modellaußenradius $r_a = 225$ mm.

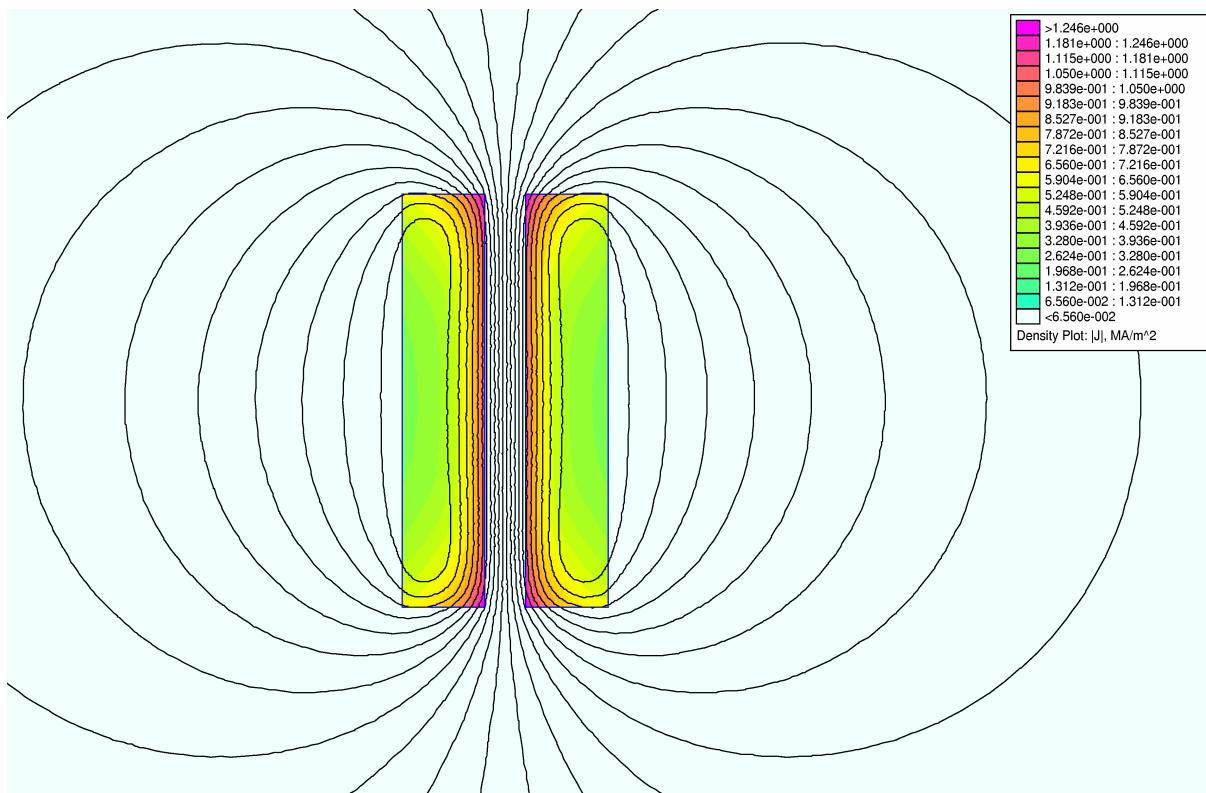


Bild 2.1b: Magnetisches Feld, Realteil, in unmittelbarer Umgebung zweier paralleler Sammelschienen und Verteilung des Stromdichtebeitrages auf ihrem Querschnitt.

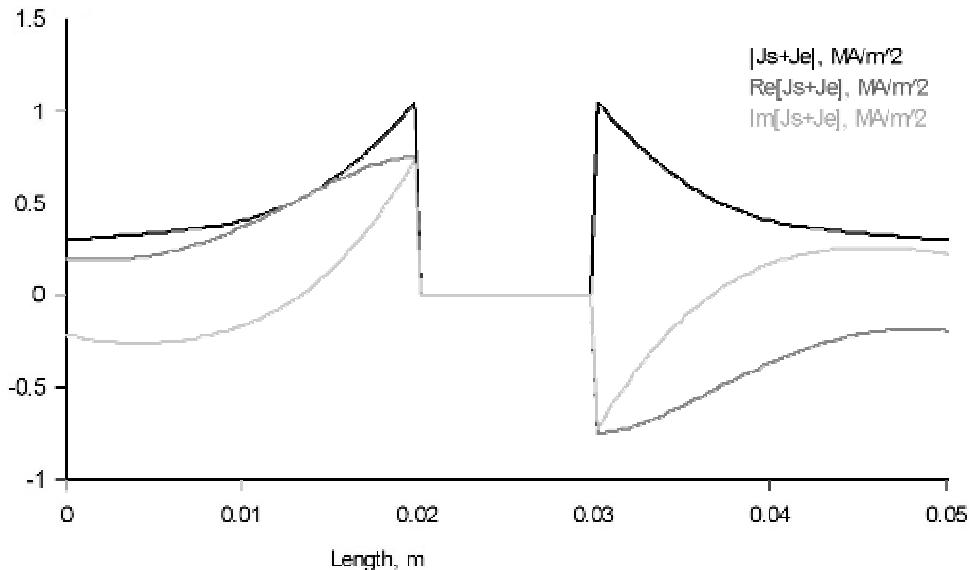


Bild 2.1c: Verteilung von Betrag, Realteil und Imaginärteil der Gesamtstromdichte, d. h. Quellstromdichte J_S plus Wirbelstromdichte J_E auf der Symmetrielinie quer durch beide Leiterquerschnitte.

Das 2D-FEM Programm Maxwell2D-SV von Ansoft Inc. deckt als studentische Version seiner kommerziellen Vollversion ein ähnliches Anwendungsspektrum ab wie FEMM. Auffallend sind hier die selbständige adaptive Netzgenerierung und die weitreichenden Auswertungsmöglichkeiten, die anwenderspezifisch programmierbar sind. Die Darstellungsoptionen für Ergebnisse beinhalten u. a. die automatische Erstellung von Animationen.

QuickField von Tera Analysis Ltd. ist als Demoversion auf 255 Knoten begrenzt und daher für die zuverlässige Berechnung stark ungleichmäßiger Feld- und Stromdichteverteilungen eher ungeeignet. Hierzu bedürfte es der uneingeschränkten, lizenzpflchtigen Vollversion. Ein ernsthaftes Anwendungsbeispiel dafür ist mit [Sko01] gegeben, wo eine schwach gekoppelte elektromagnetische, thermische und thermoelastische Problemstellung mittels QuickField, OPERA-2D und einigen benutzerdefinierten Programmen behandelt wird. Frühere Demoversionen, die allerdings nur statische Probleme behandeln konnten und keinen zeitharmonischen Ansatz, d. h. keine Wirbelstromberücksichtigung, beinhalteten, ließen 500 Knoten zu. Hiervon wurde u. a. in [Kl01a] zur Berechnung stationärer Magnetfelder von Rundleitern in paralleleflankigen Nuten Gebrauch gemacht.

Dass nicht nur im Bereich der zweidimensionalen, sondern auch der dreidimensionalen Feldberechnung brauchbare, freiverfügbare Programmsysteme existieren, zeigt u. a. das Beispiel GetDP [Dul98, Dul99]. Zusammen mit dem Netzgenerator gmsh stellt dieses eine Entwicklungsumgebung für die numerische Berechnung von skalaren und vektoriellen

Feldern von hoher Flexibilität dar. Ein großes Potential auch für multiphysikalische Problemstellungen mit Kopplungen zwischen unterschiedlichen Feldern und verschiedenen Erfassungsstufen der Zeitabhängigkeit scheint hier gegeben. Die Flexibilität resultiert daraus, dass die Programmierung der Feldprobleme in ihren Formulierungen vom Anwender selbst vorzunehmen ist. Dies setzt im Gegensatz zu anderen Programmen ein vergleichsweise tiefes Verständnis der zugehörigen Mathematik und Physik voraus. Standardformulierungen z. B. für elektrostatische Felder oder stationäre Magnetfelder o.ä. werden aber in dem zugehörigen Manual aufgeführt.

Das nachfolgende Beispiel zeigt, dass mit dem Netzgenerator gmsh durchaus komplexe Geometrien behandelt werden können und für die Feldberechnung mit GetDP aufbereitet werden können. Für eine Toroidspule mit 12 Windungen eines Massivleiters mit quadratischem Querschnitt wurde das stationäre Strömungsfeld bei Vorgabe eines speisenden Gleichstromes sowie das durch die Stromdichteverteilung erzeugte stationäre Magnetfeld berechnet. Bild 2.2 zeigt die Geometrie der betrachteten Leiterstruktur. Die Kantenlänge des dort entlang einer toroidal gekrümmten Wendellinie extrudierten quadratischen Leiterquerschnittes beträgt $a = 0,08$ m. Der Radius des Kreisquerschnittes der Torusfläche, auf der die helixartige Leitermittellinie gelegen ist, liegt bei $R_T = 0,15$ m, wobei der Radius jenes Kreises, um den die Torusfläche aufgespannt wird, $R_m = 0,4$ m ist. Für die Leitfähigkeit wird mit $\gamma = 56 \cdot 10^6$ S/m diejenige von Kupfer bei 20°C angenommen. Es wird ein erregender Gesamtstrom von $I_{\text{Exc}} = 10^6$ A vorgegeben.

Das gesamte Rechengebiet hat die Gestalt einer Kugel mit einem Radius von 1,25 m, die äußere Sphäre von 0,8 m bis 1,25 m stellt dabei ein Transformationsvolumen dar, das auf den unendlichen Raum abgebildet wird. Diese Abbildung geht in die Berechnung der Integrale zur Bestimmung der Koeffizienten des FE-Gleichungssystems durch das Programm mit ihrer Jacobideterminante ein. Der detaillierte mathematische Hintergrund zu dieser und anderen Transformationen findet sich in [Hen99].

Das gesamte Modell hat ca. 172000 Knoten und 1,09 Millionen Elemente. Wegen der im ganzen Rechengebiet konstanten Permeabilität, hier μ_0 , kann das magnetische Vektorpotential ohne Schwierigkeiten aus drei skalaren, knotenbasierten Funktionen $A_{x,y,z}$ zusammengesetzt werden, die jeweils der Poissongleichung genügen. Die Stromdichtekomponenten $J_{x,y,z}$ gehen aus der Lösung der Laplacegleichung für das leitfähige Gebiet hervor. Poisson- und Laplacegleichungen werden dabei in ihrer schwachen Form vorgegeben.

In Bild 2.3a und 2.3b sind Pfeildarstellungen von Strom- und Flussdichte als Ergebnisse der Berechnungen mit GetDP angegeben.

Als einfache exemplarische Auswertungen lassen sich der Widerstand R und die Selbstinduktivität L der Anordnung bestimmen. R geht dabei aus dem unter Zugrundelegung der Stromvorgabe simultan berechneten Einspeisepotential V_1 zu $31,46 \mu\Omega$ hervor. Die Induktivität L ergibt sich aus der magnetischen Energie W_m , die im Rahmen einer numerischen Auswertung von

$$W_m = \frac{1}{2} \iiint_{V_{\text{Leiter}}} \vec{J} \cdot \vec{A} dV = \frac{1}{2} L I_{\text{Exc}}^2 \quad (2.1)$$

zu $2,539 \text{ MJ}$ bestimmt wird, zu $5,078 \mu\text{H}$.

Vergleichsschätzwerte für R und L können unter Zugrundelegung von mittleren Längen für den Stromweg $l_{J,m}$ und den Flusspfad $l_{\Phi,m}$ sowie mittleren durchsetzten Querschnitten $A_{J,m}$ und $A_{\Phi,m}$ unter Berücksichtigung der Windungszahl n_{Wdg} berechnet werden.

$$R = \frac{l_{J,m}}{\gamma A_{J,m}} \approx \frac{2\pi}{\gamma a^2} \cdot \sqrt{R_m^2 + n_{\text{Wdg}}^2 R_T^2} \quad (2.2)$$

$$L = n_{\text{Wdg}}^2 \mu_0 \frac{A_{\Phi,m}}{l_{\Phi,m}} \approx n_{\text{Wdg}}^2 \mu_0 \frac{\pi R_T^2}{2\pi R_m} \quad (2.3)$$

Die Ergebnisse aus (2.2) von $R = 32,33 \mu\Omega$ und (2.3), $L = 5,089 \mu\text{H}$, befinden sich mit ca. 2,8 % und 0,2 % Abweichnung in erstaunlich guter Übereinstimmung mit den Ergebnissen der FEM-Berechnung.

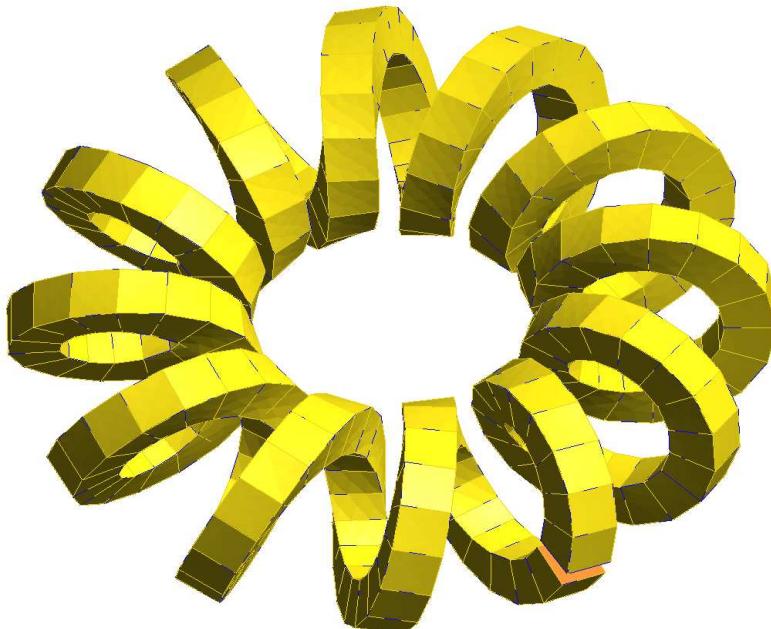


Bild 2.2:

Oberfläche des diskretisierten Massivleiters der betrachteten Toroidspule.

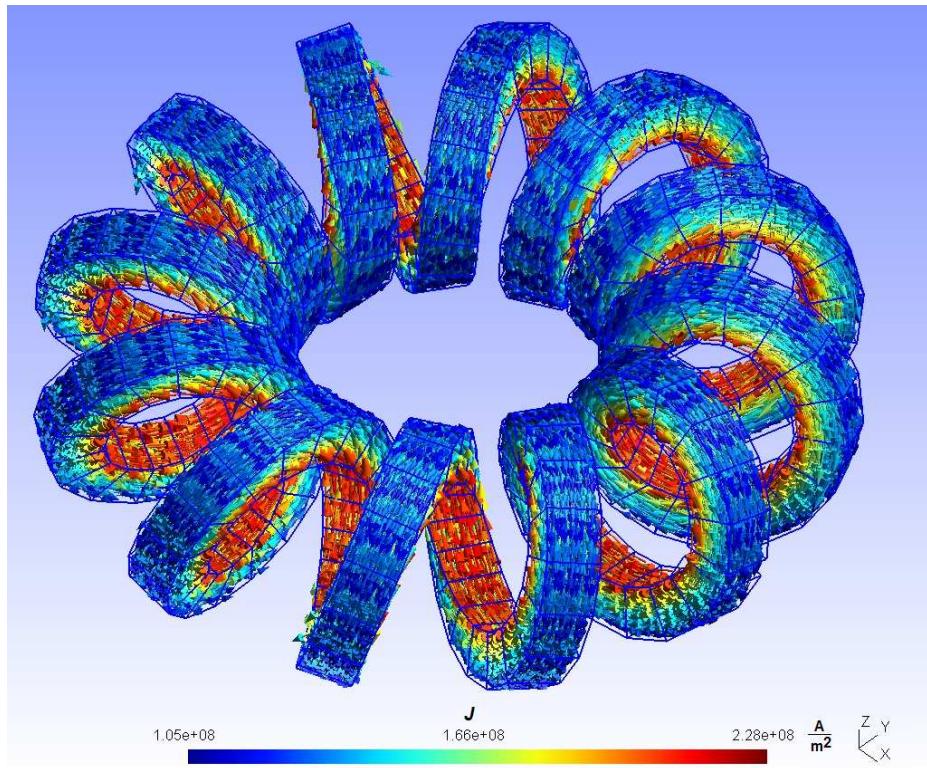


Bild 2.3a: Pfeildarstellung der Stromdichte J im Massivleiter. Betragsskala von 0,105 kA/mm² bis 0,226 kA/mm².

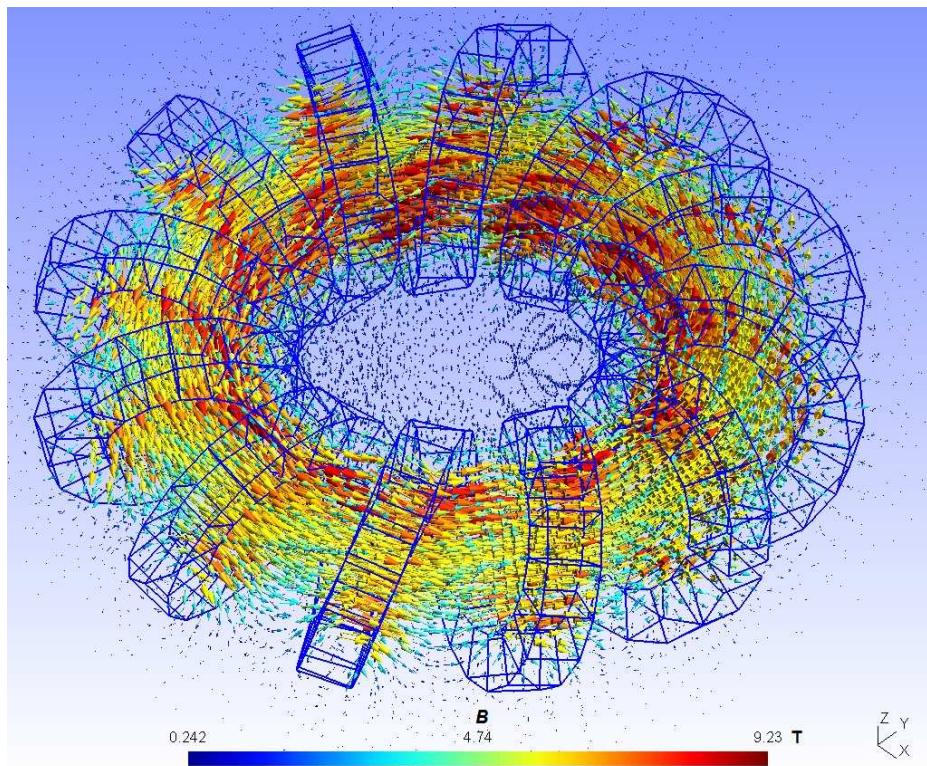


Bild 2.3b: Pfeildarstellung der Flussdichte B im Innern des Torus und der unmittelbaren Umgebung. Betragsskala von 0,242 T bis 9,23 T.

Abschließend seien an dieser Stelle ohne Anspruch auf Vollständigkeit als frei verfügbare Programmsysteme das Projekt iMOOSE der RWTH Aachen [IMS#1, IMS#2, vRs04], für das z. B. in [Kae02, Kae04] Anwendungsbeispiele gegeben werden, und FreeFEM [FFM#1, FFM#2], eine Entwicklung an der Université Pierre et Marie Curie, Laboratoire Jacques-Louis Lions, Paris erwähnt, sowie die EMAP-Programme der University of Missouri at Rolla, EMC Laboratory. Mit letzteren kann die Wellengleichung für die elektrische Feldstärke im dreidimensionalen Raum mittels eines zeitharmonischen Ansatzes und der für tangentialstetige Vektorfelder vorteilhaften Formulierung über Kantenelemente behandelt werden [EMP#1, EMP#2, Hub93a, Hub93b, Ji00].

Bei den kommerziell vertriebenen, universellen Berechnungs- und Simulationswerkzeugen kann ANSYS als besonders verbreitet angesehen werden. Eingeschränkte Lizenzen hinsichtlich der Knotenzahlen und Anzahl gleichzeitiger Benutzer sind auch an den meisten Hochschulen vorhanden. Das Programm Paket ist für multiphysikalische Phänomene von den „Computational Fluid Dynamics“ (CFD) über Strukturmechanik bis zur Elektrodynamik verwendbar, abhängig davon, welche Module jeweils verfügbar, bzw. lizenziert sind. Während die multiphysikalische Vollversion auch Hochfrequenzphänomene, d. h. Wellenausbreitung und -streuung berücksichtigen kann, ist die Elektromagnetismus-Version ANSYS EMAG auf langsam veränderliche Vorgänge, d. h. Wirbelstromprobleme beschränkt. Eine Produktübersicht bezüglich der Funktionalität gibt die Broschüre [ANS#1]. Ein Beispiel für die Anwendung von ANSYS EMAG ist in [Ster05] gegeben, wo ein durch Permanentmagneten erregter Motor zweidimensional und dreidimensional unter Berücksichtigung der Rotor-drehung hinsichtlich seiner Rastmomente in unterschiedlichen Varianten untersucht wird. Eine volle 3D-transiente Analyse findet im Gegensatz zu einer derartigen, dort präsentierten 2D-Rechnung nicht statt. Bei einem anderen Anwendungsbeispiel [Ger05] steht neben der Temperaturberechnung in einer permanentmagneterregten Maschine unter Last die Berechnung der sättigungsabhängigen Induktivitäten L_d und L_q im Vordergrund, wofür als Verfahren die „Fixed Permeability Method“ vorgestellt wird. Bei dieser wird zunächst der Sättigungszustand des Eisens unter Berücksichtigung der Bestromung und der Permanentmagneten bestimmt. Anschließend wird die resultierende Permeabilitätsverteilung festgeschrieben und die Induktivitätsberechnung findet ohne Permanentmagneten nur unter Vorgabe des Statorstroms und der sich ergebenden Flussverkettung statt. Da so der Sättigungszustand der Maschine besser erfasst wird, ist die Berechnung der Induktivitäten genauer, als bei konventioneller Berechnung durch einfache Subtraktion des Permanentmagnetflusses von der

Gesamtflussverkettung bei einmaliger Feldberechnung mit kompletter Erregung und Bestromung [Ger05].

Das an der ETH Zürich entwickelte 2D-FEM-Programm FEMAG [Rei03] existiert in einer DC und einer AC Version. Mit ihm können sowohl kartesische wie rotations-symmetrische Probleme behandelt werden. Die Eisensättigung kann berücksichtigt werden. Eine eingeprägte gleichmäßige Bewegung eines Teilgebietes kann vorgegeben werden. Wegen seiner vielfältigen Auswertungsfunktionen, die speziell der Auslegung und Dimensionierung elektrischer Maschinen zu Gute kommen, und der zahlreichen anwendungsspezifischen und maschinenorientierten Funktionen zur modifizierten Mehrfachberechnung eines Problems ist das Programm bei den Herstellern elektrischer Maschinen sehr verbreitet.

Dass das Programm nicht ausschließlich für konventionelle rotierende Maschinen geeignet, sondern darüber hinaus auch für spezielle Anordnungen anwendbar ist, zeigt das nachfolgende Beispiel aus der elektromagnetischen Rohrkompression mit Feldformer. Für einen vorgegebenen, sinusförmigen Strom, der eine Zylinderspule aus mehreren massiven Windungen in Serienschaltung speist, wird hier das magnetische Feld berechnet. Als Besonderheit tritt zwischen Spule und Rohr der Feldformer auf. Dieser ist ein leitfähiger Ring mit stufigem Querschnitt und innen geringerer, rohrzugewandter Höhe als die außen auf der rohrabgewandten Seite von der Spule bedeckte Höhe. Dieser Ring bildet jedoch keinen Kurzschluss, sondern ist in Umfangsrichtung durch zwei schmale Trennspalte unterbrochen. Aufgrund der vergleichsweise schmalen Trennspalte bleibt die Feldverteilung jedoch ange-nähert zweidimensional. Der Feldformer wird in dem FE-Modell als Massivleiterwindung mit einem vorgegebenen Gesamtstrom von Null dargestellt. Das in Bild 2.4 dargestellte Feldbild entspricht qualitativ den in [Bee01] präsentierten Ergebnissen, die mit dem Programm EMAS anhand eines dreidimensionalen Modells und zeitharmonischer Anregung sowie zweidimen-sional transient mit Vorgabe eines gemessenen Anlagenstromes berechnet wurden.

Ein weiteres kommerzielles Programm zur Berechnung elektromagnetischer Felder ist mit der Vollversion von Maxwell 2D gegeben, die im Gegensatz zur studentischen Version transiente Feldprobleme lösen kann. Dabei kann auch die Starrkörperbewegung eines beweglichen Maschinenteils z. B. die Rotationsbewegung eines Maschinenläufers oder die translatorische Bewegung bei einem Linearmotor berücksichtigt werden. Kopplungen zu externen Netzwerken oder zur mechanischen Bewegungsgleichung sowie zum thermischen Feldproblem sind möglich. Eine Broschüre mit der vollständigen Produktbeschreibung ist unter [MXW#1] erhältlich.

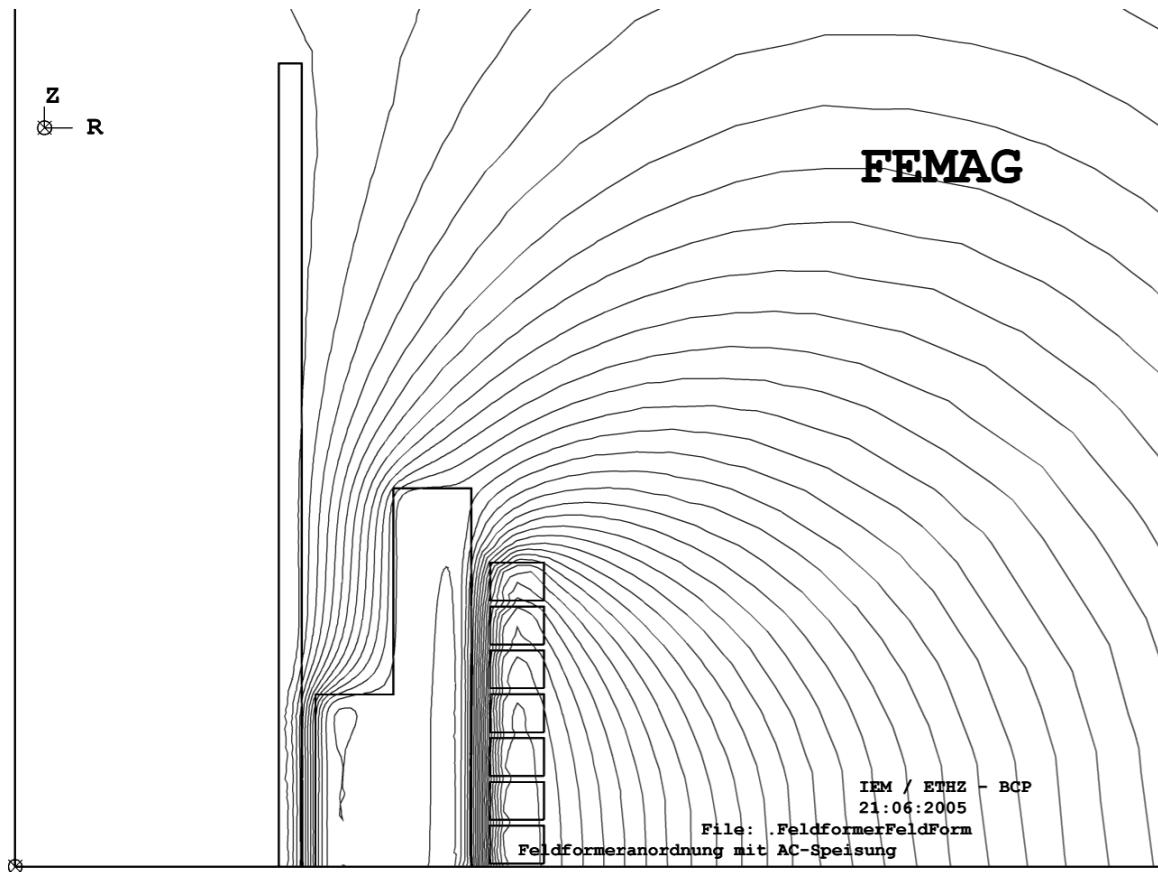


Bild 2.4: Ausschnitt aus Feldbild, Realteil, aus FEMAG-Rechnung eines rotations-symmetrischen Problems der elektromagnetischen Rohrkompression mit Massivleiter-spule und unterbrochenem, d. h. summenstromfreiem Massivleiter als Feldformer, Erregerstrom $I = 10$ kA, Frequenz $f = 10$ kHz.

Darüber hinaus bietet Ansoft mit Maxwell 3D eine 3D-Simulationslösung an, die u. a. transient mit Berücksichtigung großer Bewegungen („large motion solver“) rechnen kann, so dass auch hier Rotationen und Verschiebungen von Maschinenteilen erfasst werden [MXW#2]. Über ein zusätzliches ePhysics-Modul kann die Berechnung multiphysikalischer Phänomene bis hin zu linearen strukturmechanischen Problemen mit Berechnungen von Spannungen und Dehnungen ermöglicht werden [MXW#3].

Die Programme Maxwell 2D und Maxwell 3D werden von Ansoft als Nachfolgeprodukte von EMAS vertrieben, ein Finite-Elemente-Programm für 2D- und 3D-Problemstellungen der Elektrodynamik, das zunächst von Mac Neal Schwendler entwickelt wurde und dessen Rechte später an Ansoft verkauft wurden. Eine Weiterentwicklung und Unterstützung findet heute nicht mehr statt. In der Programmbeschreibung [Brau97] fällt die Auflistung von Analogien zur Strukturdynamik auf. Das Programm bietet u. a. die Möglichkeit, über Multi Point Constraints, MPCs, sehr flexible Kopplungen von Freiheitsgraden zu definieren, was z. B. bei

der Berücksichtigung der Serienschaltung von Einzelwindungen in Form mehrerer diskreter Massivleiter [Bee01] oder verteilt auf einem Wicklungsquerschnitt [Kl02] vorteilhaft eingesetzt werden kann. In [Schm96] wird hinsichtlich der Wicklungsberücksichtigung bei einem Leistungstransformator eine Modellierungstechnik präsentiert, die auf einem anisotropen Leitfähigkeitstensor für die zylindrischen Wicklungskörper in Verbindung mit MPCs beruht.

Bei der Berücksichtigung bewegter Strukturen können Verschiebungen, durch welche die Topologie des FE-Netzes nicht beeinträchtigt wird, einbezogen werden. Die Erfassung großer Bewegungen mit oder ohne Formänderungen ist nur durch Inanspruchnahme eines externen Netzgenerators sowie zusätzlicher Initialisierungsprogramme möglich. Diese stellen im Rahmen einer gestaffelten Lösung des transienten Feldproblems zu jedem Zeitschritt ein neues Gitter und die Übertragung der Ergebnisse des vorangegangenen als Anfangswerte des neuen Zeitschrittes zur Verfügung. Von einem solchen Schema mit Verwendung von EMAS wird u. a. in [Bee03] bei Berechnungen zur elektromagnetischen Blechumformung Gebrauch gemacht.

Ebenfalls für 2D und 3D-Probleme im Bereich der langsam zeitlich veränderlichen magnetischen Felder und damit der elektrischen Maschinen geeignet erscheinen die Programme FLUX2D und FLUX3D [FLX#1], [FLX#2] von Cedrat, Grenoble, die hinsichtlich ihres Funktionsumfangs vergleichbar mit den Maxwell-Programmen sind.

Das Programmsystem FlexPDE von PDE Solutions Inc. [PDE#1] verfolgt in grober Linie eine ähnliche Strategie wie GetDP. Eine flexible Programmierung nahezu beliebiger partieller Differentialgleichungen in einer Skriptdatei, die als weitere Modellbeschreibungen die Geometrie-, Vernetzungs- und Auswertungsdaten enthält, ermöglicht Berechnungen statischer und stationärer elektrischer und magnetischer Felder einschließlich der Simulation von Wellenphänomenen. Die Vielseitigkeit des Systems lässt eine Anwendung in weiten Teilgebieten der Physik mit Berücksichtigung wechselseitiger Kopplungen zu. Die Evaluierungsversion des Programms erlaubt keine eigenständigen Problemdefinitionen durch den Benutzer, es wird jedoch eine umfangreiche Bibliothek von Dateien mit Anwendungsbeispielen aus unterschiedlichen Disziplinen bereitgestellt, die in gewissen Grenzen, d. h. hinsichtlich der Parametrierungen und anderer numerischer Daten durch den Anwender modifiziert werden können. Bild 2.5 zeigt ein Beispiel aus der Bibliothek, bei dem für die Azimutalkomponente des elektrischen Feldes die Wellengleichung im Komplexen aufgestellt und gelöst wird. Die Anregung ist durch einen kreisringförmigen HF-Wechselstrom gegeben.

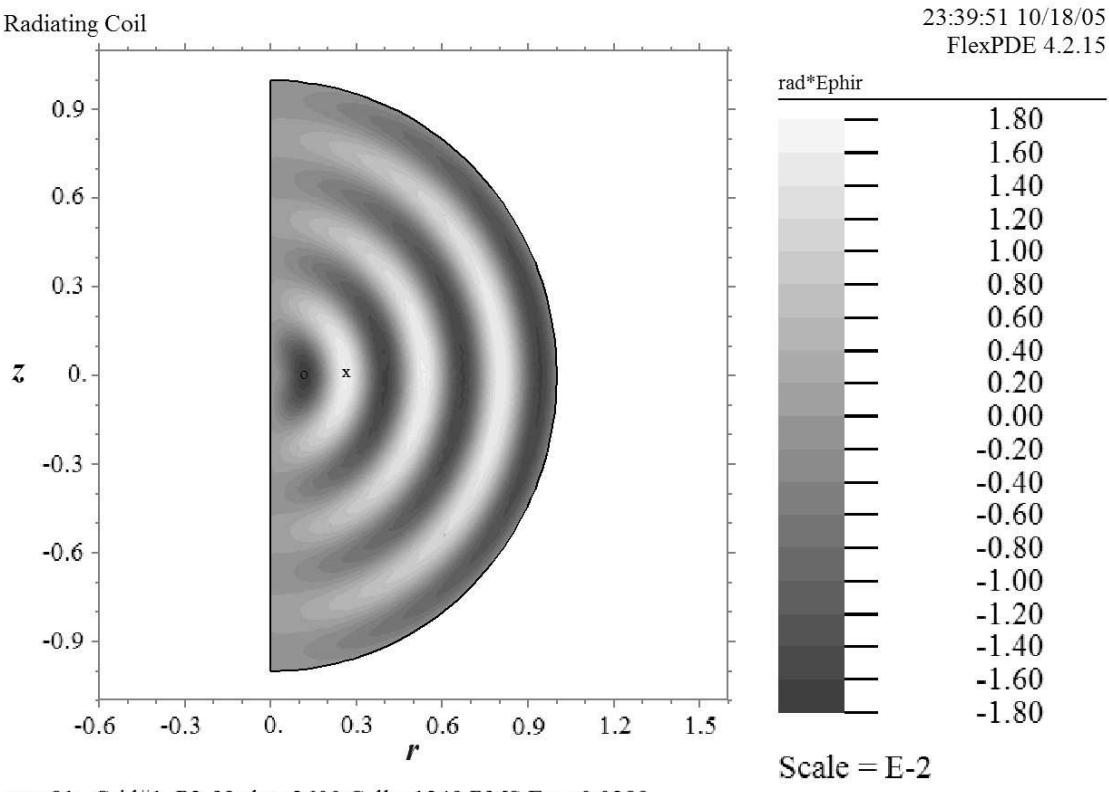


Bild 2.5: Verteilung der mit der Radialkoordinate multiplizierten Azimutalkomponente der elektrischen Feldstärke, $r \cdot E_\phi$, Realteil, bei Ausstrahlung einer elektromagnetischen Welle durch einen magnetischen Dipol in Form einer Kreisleiterschleife.

Ähnlich universell einsetzbar ist FEMLAB von COMSOL, das ursprünglich als graphische Oberfläche und Preprocessingtool für Finite Elemente Rechnungen unter MatLab konzipiert wurde, mittlerweile aber über eigenständige, von MatLab unabhängige Löser verfügt. Neben Modulen für unterschiedliche Teilgebiete der Physik existiert auch hier die Möglichkeit, die beschreibenden partiellen Differentialgleichungen direkt einzugeben. Dabei kann in der neusten Version auch die jeweilige schwache Form dieser Gleichungen verwendet werden [Lan05], ähnlich wie dies in GetDP geschieht. Die neueste Version dieses Programmsystem wird unter dem Namen COMSOL Multiphysics™ vertrieben.

Ein weiteres Programm zur Berechnung zweidimensionaler Felder, das in seiner Funktionalität mit Maxwell 2D vergleichbar ist und in einigen Punkten, z. B. mechanische Spannungsanalyse und thermische Analyse hierüber hinaus geht, wird von Vector Fields Inc. unter dem Namen OPERA-2D angeboten [OPR#1]. Das dreidimensionale Pendant, OPERA-3D, teilt sich in zahlreiche, unterschiedliche Module auf, von denen z. B. hinsichtlich rotierender

elektrischer Maschinen das Paket CARMEN zu nennen ist [OPR#2]. Die Funktionalität erscheint vergleichbar mit derjenigen von Maxwell 3D.

Das Programmpaket MAFIA™ der Computer Simulation Technology GmbH, Darmstadt, beruht auf der Finite-Integrations-Theorie (FIT) [FIT#1]. Diese stellt ein formalisiertes Differenzenverfahren dar, bei dem die Differentialoperatoren Gradient, Divergenz und Rotation auf diskrete, in einem orthogonalen Gitter und dem dazugehörigen dualen Gitter definierte Matrizenmultiplikationen abgebildet werden. Dabei bleiben die wesentlichen vektoranalytischen Identitäten $\operatorname{div} \operatorname{rot} v = 0$ und $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$ bei den diskreten Operatoren erhalten [Cle99, Cle00]. Aufgrund der Gitterstruktur sind hinsichtlich der Geometrieanpassung an beliebige Geometrien ähnliche Schwierigkeiten gegeben, wie bei den Finite-Differenzen-Methoden im Allgemeinen [Kst94]. Auf die Vorteile, die mit der Nutzung strukturierter Gitter verbunden sein können, wird aber in [Cle02] und [DeG03] hingewiesen. Mittlerweile wurden auch erfolgreich verschiedene Modifikationen untersucht, die Anpassung der Methode an komplexe, krummlinig begrenzte Geometrien zu ermöglichen [Cle02]. Das Programm MAFIA™ ist modular aufgebaut [FIT#1] in ähnlicher Weise wie z. B. OPERA-3D oder ANSYS. Es stehen z. B. Programmmodulare für statische Feldprobleme oder auch 3D-Zeitbereichslöser für Wellenausbreitung und -leitung oder auch niederfrequente Probleme zur Verfügung.

Ein anderes Programm zur transienten 3D-Analyse von Wirbelströmen ist durch MEGA gegeben, das an der University of Bath entwickelt wurde und von dort lizenziert wird. Ein Anwendungsbeispiel für MEGA ist in [Can02] gegeben, wo u. a. eine Axialfluss-Induktionsmaschine bei vorgegebener Geschwindigkeit unter Einbeziehung bewegungsinduzierter Wirbelströme durch eine Zeitschrittechnung analysiert wird.

Die vorangegangene Zusammenstellung von Programmen und Methoden zeigt, dass es mittlerweile eine kaum mehr zu überblickende Vielfalt von Programmsystemen zur numerischen Feldberechnung gibt. Hierbei ist die dreidimensionale Berechnung der Felder im Zeitbereich mit und ohne Berücksichtigung von Rotordrehungen oder anderer mechanischer Bewegungen durchaus eingeschlossen. Den meisten genannten und insbesondere den kommerziellen Programmen sind graphische Benutzeroberflächen zu Eigen, mit deren Hilfe die Modellerstellung erfolgt oder diese zumindest unterstützt wird. Gelegentlich finden sich auch direkte Verbindungen zu entsprechender CAD-Software in Form von Importmodulen oder -funktionen. Des Weiteren erfolgt die Präsentation und Visualisierung der Ergebnisse durch vielseitig einsetzbare Nachverarbeitungs- und Auswertungsroutinen.

Es liegt auf der Hand, dass derart umfangreiche Programmsysteme nur durch Entwicklungsteams mit einer ausreichend starken Personaldecke aufgebaut werden können und dass die Entwicklung solcher Programme aus diesem Grunde zunehmend kommerzialisiert wird. Waren anfänglich noch kleine Institute und Lehrstühle maßgeblich an der Mitentwicklung der Methoden und Programme beteiligt, so sind es nun die Produkte der entsprechenden Softwarehäuser, die das Bild der numerischen elektromagnetischen Feldberechnung prägen.

Andererseits sind es häufig diese spezialisierten Firmen, die unmittelbar mit universitären Instituten zusammenarbeiten, oder personell aus Ihnen hervorgegangen sind. Gelegentlich bieten auch die Institute selbst lizenzpflchtige Programme am Markt an, so dass letztlich auch vielen heute kommerziell verfügbaren Programmen ein akademischer Hintergrund zu Eigen ist.

Eine weitreichende Übersicht über die unterschiedlichsten Programme ist auf den Webseiten des Jet Propulsion Laboratory, California, [JPL#1] sowie der University of Missouri-Rolla, EMC-Laboratory, [UMR#1] gegeben. In [Mor97] werden die verschiedenen Kriterien für die Auswahl einer geeigneten und problemangepassten EM-Software diskutiert.

3 Zielsetzung und Aufstellung der Arbeit

Am Lehrstuhl Elektrische Antriebe und Mechatronik finden seit Jahren Eigenentwicklungen zur numerischen Feldberechnung und Simulation elektrischer Maschinen sowie damit zusammenhängender multiphysikalischer Problemstellungen statt. Viele Dissertationen [Lüt83, Pw88, Ru95, Gh92, Kl99] und Veröffentlichungen [Ob63a, Ob63b, Ob69, BLS81, Ob94a, Ob94b, Ru96], die dort entstanden sind, beschäftigen sich mit der grundlegenden örtlichen Diskretisierungsmethodik oder beruhen auf der Anwendung von Finite-Elemente und Finite-Differenzen-Verfahren auf verschiedenste Problemstellungen im Zusammenhang mit elektrischen Maschinen.

In [Kl99] werden Ergebnisse eines am Lehrstuhl entwickelten und ausgebauten numerischen 2D-Feld- und Netzwerkberechnungsprogramms nach der Methode der Finiten Differenzen in Verbindung mit einem Zeitschrittverfahren präsentiert. Mit Hilfe dieses Programms mit heutigem Namen FELMEC können komplett Antriebssätze mit einer Drehfeldmaschine beliebigen Rotoraufbaus unter Einbeziehung sowohl des mechanischen Torsionsverhaltens eines Mehrmassenschwingers als auch eines elektrischen Vorschaltnetzwerkes, wie es ein Anlaufgerät darstellt, berechnet werden. Es werden u. a. Berechnungen elektronischer Sanftanläufe eines Asynchronmotors mittels Drehstromsteller gezeigt. Besonderes Augenmerk wird aber auch auf elektromechanische Wechselwirkungen gelegt.

Elektrodynamisch-thermische Wechselwirkungen werden in [Ru95] und [Dru01] behandelt. Für die Untersuchung der Temperaturverteilung in den Kurzschlussringen und Stäben eines explosionsgeschützten Asynchronmotors wird im Rahmen von [Ru95] ein FE-Programm zur 3D-Berechnung der Temperaturverteilung entwickelt. Bei der Berechnung werden die Verlustleistungsdichten aus elektrodynamischen 2D-Berechnungen über den Stabquerschnitt und den Ringquerschnitt mit komplexem Ansatz des Vektorpotentials gewonnen. Innerhalb der elektrodynamischen 2D-FE-Berechnungen wird die Stromverdrängung ebenso wie die Eisensättigung erfasst. Rückwirkend wird der Einfluss der Temperaturverteilung auf die Leitfähigkeitsverteilung berücksichtigt.

In [Dru01] wird eine Erweiterung des im Rahmen von [Gh92] zur Berechnung von Asynchronmotoren mit Massivläufern erstellten und in [Kl99] modifizierten 2D-Finite-Differenzen Zeitschrittprogramm um eine integrierte 2D-Temperaturberechnung beschrieben. Diese wird auf Turbogeneratoren im Störfall angewendet.

In [Kul97] wird das Schwingungsverhalten der Wickelköpfe großer Turbogeneratoren für verschiedene Fehlerfälle untersucht. Hierfür sind eine gekoppelte Berechnung des

magnetischen Feldes im Wickelkopfbereich und eine strukturdynamische Berechnung des Wickelkopfes erforderlich. Ähnliche Berechnungen werden bei der Entwicklung des supraleitenden Generators für das Vibrationsverhalten des Dämpferzylinders im Rotor durchgeführt, wobei die Wechselwirkung zwischen Verformung des Zylinders, Magnetfeld in der Maschine und den resultierenden Netzströmen auf Zeitschrittebene durch Kopplung von Ein- und Ausgaben unterschiedlicher Programmsysteme erfasst wird [Kul95].

Die Hauptaufgaben bei der Simulation elektromechanischer Energiewandler können mit den vorhandenen Programmen abgedeckt werden. Die symmetrische Asynchronmaschine und Synchronmaschine sind mit den vorliegenden Methoden transient berechenbar. Dabei werden wesentliche Effekte, d. h. die Eisensättigung in Ständer und Rotor sowie die Stromverdrängung in den leitfähigen Gebieten des Rotors, berücksichtigt. Stoßkurzschlüsse von Synchrongeneratoren können damit berechnet werden. Die rotatorische Starrkörperbewegung des Maschinenläufers geht ein und bildet eine Schnittstelle zur mechanischen Simulation, so dass auch dynamische Hochläufe von Asynchronmaschinenantrieben oder der asynchrone Lauf von Synchronmaschinen im Störfall berechnet werden können.

Es verbleibt jedoch eine Vielzahl von speziellen Problemen, die mit den vorhandenen kommerziellen Programmen und Eigenentwicklungen nicht ohne weiteres gelöst werden können. Auf solche Probleme wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit besonders eingegangen, wobei auch einige Anwendungen aufgezeigt werden. Die Besonderheit dabei ist, dass zu den notwendigen Eigenimplementierungen grundlegende theoretische Untersuchungen hinsichtlich der zu programmierenden Berechnungen als auch der Verifikation durch Vergleich mit alternativ beschreibbaren Testbeispielen erfolgt. Gebiete, die dabei berührt werden, sind u. a. die Berechnung wirksamer elektromagnetischer Kräfte, die Untersuchung von Windungsschlüssen im Rotor eines Synchrongenerators sowie die Berechnung von Wirbelstromfeldern und -verlusten unter Berücksichtigung der Grundwelleneisensättigung bei zeitharmonischer Anregung einer 3D-Geometrie. Hierbei ist anzumerken, dass entsprechende Programmerweiterungen nur deshalb möglich sind, weil durch eine eigenständige Programmierung eine hinreichende Transparenz und nahezu beliebige Eingriffsmöglichkeiten gegeben sind.

Die vorliegende Arbeit lässt sich wie folgt skizzieren:

Nachdem einleitend zunächst die Motivation für die Fortentwicklung der numerischen Feldberechnung erläutert wurde und ein grober Überblick über verschiedene Methoden und vorhandene Implementationen erfolgte, werden im folgenden, vierten Kapitel mathematische

Grundlagen der hier weiter verfolgten Gebietsmethoden skizziert, wobei auch ein Vergleich zwischen den unterschiedlichen Zugängen zur Finite-Elemente-Methode sowie zwischen Finite-Elemente-Methode und Finite-Differenzen-Methode durchgeführt wird.

Das fünfte Kapitel widmet sich dem lehrstuhleigenen Programmsystem FELMEC, wobei zunächst auf die Version für rotierende Maschinen eingegangen wird. Die Programmversion für axialsymmetrische Anordnungen wird anschließend gesondert vorgestellt, da in ihr das Problem formveränderlich stark bewegter, wirbelstrombehafteter Strukturen behandelt wird. Dieses Problem tritt u. a. bei der elektromagnetischen Umformung auf und stellt eine Nischenanwendung dar, die auch mit kommerziellen Programmsystemen nur in Ausnahmefällen und unter beträchtlichem Aufwand bewältigt werden kann.

Im sechsten Kapitel werden schließlich einige andere Anwendungen der numerischen Feldberechnung aus der Praxis des Verfassers vorgestellt. Bei diesen wird zum Einen das kommerzielle Programm EMAS benutzt. Hinsichtlich beschränkter Grundgegebenheiten wird es durch äußere, eigens entwickelte Zusatzprogramme ergänzt, z. B. zur iterativen Berücksichtigung der Permeabilitätsverteilung bei zeitharmonischer Anregung oder zur Modellreduktion durch Ausnutzung komplexer Periodizitäten unter Vorgabe reelwertiger Koeffizienten.

Zum Anderen werden aber auch Anwendungen des Programmsystems FELMEC präsentiert, wobei auf die jeweiligen Erweiterungen eingegangen wird, die z. B. zur Behandlung von Windungsschlüssen oder zur Berechnung von einseitigem magnetischen Zug und zur Berechnung von Stabkräften notwendig sind.

Vergleichende analytische Berechnungen werden im siebten Kapitel aufgeführt, wobei in den einzelnen Unterkapiteln unterschiedliche Schwerpunkte gesetzt werden. So wird im ersten Unterkapitel anhand einer Wirbelstromverlustberechnung in einem Stab mit rechteckiger Querschnittfläche der schon bei einer einfachen Grundgeometrie recht hohe Aufwand und die ohne Rechnerunterstützung effizient nicht mehr zu bewältigende Auswertung und Diskussion der Ergebnisse demonstriert. Das zweite Unterkapitel ist durch eine Abschätzung des Diskretisierungsfehlers bei der Aufstellung der Konduktanzmatrix im Rahmen von Wirbelstromberechnungen axialsymmetrischer Anordnungen motiviert. Es stellt die exakte Berechnung des Leitwertes von Kreisringsegmenten mit beliebigem polygonalem Querschnitt dar und vergleicht sie mit einer naheliegenden Näherung. Die Berechnungen sind zudem ein gutes Beispiel für die vorteilhafte formale Anwendung mathematischer Integralsätze zur Vereinfachung auftretender Flächenintegrale. Das dritte Unterkapitel befasst sich mit der analytischen Berechnung des Nutenquerfeldes einer konischen Nut mit massiver Erreger-

windung und Kurzschlussring in Kugelkoordinaten. Hierbei tritt aufgrund der speziellen Konstruktion des Beispiels nur eine r -Abhängigkeit auf. Diese geht jedoch beim Übergang auf Zylinderkoordinaten verloren, so dass bei einer Verwendung als Testbeispiel für numerische Berechnungen in der r, z -Langsschnittebene faktisch eine Zweidimensionalität auftritt. Des Weiteren wird unter Zugrundelegung einer Teilleiterdiskretisierung in Schichtform ein galvanisch gekoppeltes Ersatzschaltbild hergeleitet. Dies geschieht auf netzwerktheoretischem Weg unter Verwendung der analytisch bestimmten Feldverteilung. Dieses Ersatzschema bildet die Grundlage der im fünften Kapitel für den transientes Fall herangezogenen Vergleichsberechnungen auftretender integraler Größen.

Die Arbeit schließt mit dem achten Kapitel, wo eine Zusammenfassung und ein Ausblick auf zukünftige Entwicklungen gegeben werden.

4 Mathematische Grundlagen näher betrachteter Verfahren

4.1 Methode der Finiten Elemente

Die Methode der Finiten Elemente zeichnet sich durch eine hohe Flexibilität hinsichtlich der Anpassung der örtlichen Diskretisierung an gegebene Geometriedetails aus, da sie im Gegensatz zu anderen Methoden, wie z. B. der Finite-Integration-Theorie [Weil77] oder der Methode der Finiten Differenzen in deren jeweils ursprünglichen Formen, nicht auf strukturierte Gitter angewiesen ist. Diese hohe Flexibilität erweist sich insbesondere auch als vorteilhaft, wenn die Implementation adaptiver Netzverfeinerungsstrategien angestrebt wird.

Nachfolgend soll für die Berechnung zweidimensionaler magnetischer Felder über das magnetische Vektorpotential bei vorgegebener StromdichteVerteilung diese Methode bis hin zur Herleitung der diskreten Gleichungen und ihrer Koeffizienten erläutert werden. Dabei beschränkt sich hier die Abhandlung auf eine Diskretisierung basierend auf Dreiecksgittern mit linearen Ansatzfunktionen, bei denen die auftretenden Integrale noch sehr gut analytisch berechenbar sind. Die Darstellung der Methode nach Ritz ist an [Phil86] und die des gewichteten Residuums an [Kst94] angelehnt. Sie wird hier aber für das magnetische Vektorpotential adaptiert und sind im Hinblick auf die Aufstellung des Gleichungssystems weiter formalisiert.

4.1.1 Variationsmethode nach Ritz

Bei der Variationsmethode werden die diskreten Gleichungen nicht unmittelbar anhand der feldbeschreibenden Differentialgleichung

$$\Delta A_z = -\mu J_z \quad (4.1)$$

hergeleitet, sondern es wird das äquivalente Variationsproblem betrachtet:

$$I = \iint_G \left[\frac{1}{2\mu} \left(\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} \right)^2 \right) - J_z A_z \right] dx dy \quad \rightarrow \text{ Minimum!} \quad (4.2)$$

In den stromfreien Teilgebieten des Rechengebietes G entspricht der Ausdruck in (4.2) unmittelbar der magnetischen Feldenergie je Längeneinheit der Anordnung in z -Richtung. Allgemein lässt sich der Integrand in (4.2) als Lagrange-Funktion oder Lagrange-Energie interpretieren.

Im Sinne der örtlichen Diskretisierung wird das Gesamtgebiet unterteilt und mit einem Dreiecksnetz überzogen. Innerhalb der einzelnen Dreieckszellen werden einfache polynomiale Ansatzfunktionen für das magnetische Vektorpotential gewählt, die z. B. im hier betrachteten einfachsten Fall rein linear sind.

$$\hat{A}_{z,i}(x, y) = \begin{cases} c_{0,i} + c_{x,i}x + c_{y,i}y & \forall (x, y) \in G_i \\ 0 & \forall (x, y) \notin G_i \end{cases} \quad (4.3)$$

Die konstanten Koeffizienten $c_{x,i}$ und $c_{y,i}$ entsprechen hierbei über $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$ den Flussdichte-komponenten B_y und B_x ,

$$B_{x,i} = c_{y,i} \quad \text{und} \quad B_{y,i} = -c_{x,i} , \quad (4.4)$$

so dass ein homogener Feldansatz für die einzelnen Teilgebiete G_i vorliegt.

Die Potentialfunktion $A_z(x, y)$, die näherungsweise bestimmt werden soll, wird als Summe aller Ansatzfunktionen approximiert:

$$A_z(x, y) = \sum_i \hat{A}_{z,i}(x, y) \quad (4.5)$$

Mit diesem Ansatz ergibt sich für das Variationsintegral (4.1):

$$\begin{aligned} I &= \iint_G \left[\frac{1}{2\mu} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} \sum_i \hat{A}_{z,i}(x, y) \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \sum_i \hat{A}_{z,i}(x, y) \right)^2 \right) - J_z \sum_i \hat{A}_{z,i}(x, y) \right] dx dy = \\ &= \sum_i \iint_{G_i} \left[\frac{1}{2\mu_i} \left(c_{x,i}^2 + c_{y,i}^2 \right) - J_{z,i} \left(c_{0,i} + c_{x,i}x + c_{y,i}y \right) \right] dx dy \end{aligned} \quad (4.6)$$

Das Integral kann als Summe einzelner Integrale über die Teilgebiete aufgestellt werden, wobei aufgrund der Definition der Ansatzfunktionen in den Teilintegralen nur die Koeffizienten der jeweiligen dort von Null verschiedenen Ansatzfunktion erscheinen.

Da die gesuchte Näherung für die Potentialfunktion (4.4) an den Kanten stetig von Teilgebiet zu Teilgebiet übergehen muss, ist es zweckmäßig, nicht die Konstanten $c_{0,i}$, $c_{x,i}$ und $c_{y,i}$ als Freiheitsgrade der Lösung zu suchen, sondern die Formulierung direkt auf die Potentialwerte in den Ecken umzustellen. Anders argumentiert: Die Konstanten $c_{0,i}$, $c_{x,i}$ und $c_{y,i}$ können aufgrund der Stetigkeitsforderung für $A_z(x, y)$ für ein Teilgebiet i nicht unabhängig von den Koeffizienten der benachbarten Teilgebiete variiert werden. Dagegen erzwingt die Vorgabe von Knotenpotentialwerten für alle beteiligten, an die Knoten angrenzenden Teilgebiete einen stetigen Verlauf auf den Kanten.

Für ein zu betrachtendes, dreieckiges Teilgebiet i mit den Eckpunkten (x_I, y_I) , (x_{II}, y_{II}) und (x_{III}, y_{III}) , stehen die drei Potentialwerte in den Ecken über ein Gleichungssystem mit den Koeffizienten $c_{0,i}$, $c_{x,i}$ und $c_{y,i}$, das aus (4.3) hervorgeht, in linearem Zusammenhang:

$$\begin{pmatrix} \hat{A}_{I,i} \\ \hat{A}_{II,i} \\ \hat{A}_{III,i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_I & y_I \\ 1 & x_{II} & y_{II} \\ 1 & x_{III} & y_{III} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{0,i} \\ c_{x,i} \\ c_{y,i} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Dieses Gleichungssystem kann, sofern die Determinante nicht verschwindet, nach den Konstanten wie folgt aufgelöst werden:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c_{0,i} \\ c_{x,i} \\ c_{y,i} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & x_I & y_I \\ 1 & x_{II} & y_{II} \\ 1 & x_{III} & y_{III} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \hat{A}_{I,i} \\ \hat{A}_{II,i} \\ \hat{A}_{III,i} \end{pmatrix} = \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_I & y_I \\ 1 & x_{II} & y_{II} \\ 1 & x_{III} & y_{III} \end{pmatrix}}_{D_i}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_{II}y_{III} - y_{II}x_{III} & y_{II} - y_{III} & x_{III} - x_{II} \\ x_{III}y_I - y_{III}x_I & y_{III} - y_I & x_I - x_{III} \\ x_Iy_{II} - y_Ix_{II} & y_I - y_{II} & x_{II} - x_I \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \hat{A}_{I,i} \\ \hat{A}_{II,i} \\ \hat{A}_{III,i} \end{pmatrix} \quad (4.8) \end{aligned}$$

Die Determinante $D_i = (x_{II}y_{III} - y_{II}x_{III}) + (x_{III}y_I - y_{III}x_I) + (x_Iy_{II} - y_Ix_{II}) = (x_{II} - x_I)(y_{III} - y_I) + (x_{III} - x_I)(y_{II} - y_I)$ kann als Kreuzprodukt zweier Kantenvektoren des Dreiecks aufgefasst werden und entspricht der doppelten Dreiecksfläche, so dass sie für nicht zu Linien entartete Dreiecke nicht verschwindet.

Die Ansatzfunktion (4.3) lässt sich mit diesem Ergebnis direkt in Abhängigkeit der Knotenpotentiale als Parameter angeben:

$$\begin{aligned} \hat{A}_{z,i}(x, y) &= \begin{cases} (1-x-y) \cdot (c_{0,i} \ c_{x,i} \ c_{y,i})^T & \forall (x, y) \in G_i \\ 0 & \forall (x, y) \notin G_i \end{cases} \\ &= \underbrace{\frac{1}{D_i} \cdot (1-x-y) \cdot \begin{pmatrix} x_{II}y_{III} - y_{II}x_{III} & x_{III}y_I - y_{III}x_I & x_Iy_{II} - y_Ix_{II} \\ y_{II} - y_{III} & y_{III} - y_I & y_I - y_{II} \\ x_{III} - x_{II} & x_I - x_{III} & x_{II} - x_I \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} N_{I,i}(x, y) & N_{II,i}(x, y) & N_{III,i}(x, y) \\ 0 & \forall (x, y) \notin G_i \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} \hat{A}_{I,i} \\ \hat{A}_{II,i} \\ \hat{A}_{III,i} \end{pmatrix} \quad \forall (x, y) \in G_i \quad (4.9) \end{aligned}$$

Bei den zusammengefassten Ausdrücken ($N_{I,i}$, $N_{II,i}$, $N_{III,i}$) vor den Knotenpotentialen in (4.9) handelt es sich um lineare Funktionen von (x, y) mit der Eigenschaft, in dem jeweiligen zugehörigen Eckpunkt I, II oder III den Wert 1 anzunehmen, in den beiden anderen Punkten jedoch zu verschwinden. Diese Funktionen werden nachfolgend als Elementformfunktionen bezeichnet.

Der Beitrag I_i des Teilgebietes i zum Variationsintegral ergibt sich in Abhängigkeit der Knotenpotentiale des betrachteten Elements zu:

$$I_i = \iint_{G_i} \frac{1}{2\mu_i} \left[\left(\frac{1}{D_i} ((y_{II} - y_{III})\hat{A}_{I,i} + (y_{III} - y_I)\hat{A}_{II,i} + (y_I - y_{II})\hat{A}_{III,i}) \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{D_i} ((x_{III} - x_{II})\hat{A}_{I,i} + (x_I - x_{III})\hat{A}_{II,i} + (x_{II} - x_I)\hat{A}_{III,i}) \right)^2 \right] dx dy + \\ + \iint_{G_i} -J_{z,i} (N_{I,i}\hat{A}_{I,i} + N_{II,i}\hat{A}_{II,i} + N_{III,i}\hat{A}_{III,i}) dx dy \quad (4.10)$$

Die Integrationen lassen sich aufgrund der Konstanz bzw. linearen Abhängigkeit der Integranden in Bezug auf x und y sehr einfach analytisch ausführen, wobei sich die Integrale des konstanten Anteils durch Multiplikation des Integranden mit der Dreiecksfläche $D_i/2$ ergeben. Die Integrale der Formfunktionen liefern den Faktor $D_i/6$ und lassen sich als Pyramidenvolumina deuten.

$$I_i = \frac{1}{4\mu_i D_i} \left[\left((y_{II} - y_{III})\hat{A}_{I,i} + (y_{III} - y_I)\hat{A}_{II,i} + (y_I - y_{II})\hat{A}_{III,i} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left((x_{III} - x_{II})\hat{A}_{I,i} + (x_I - x_{III})\hat{A}_{II,i} + (x_{II} - x_I)\hat{A}_{III,i} \right)^2 \right] + \\ + \left[-J_{z,i} \cdot \frac{D_i}{6} (\hat{A}_{I,i} + \hat{A}_{II,i} + \hat{A}_{III,i}) \right] \quad (4.11)$$

Für das weitere Vorgehen sind die Ableitungen dieses Beitrags nach den drei Knotenpotentialen von Interesse, da die Forderung nach einer Minimierung des Variationsintegrals I notwendigerweise in die Nullsetzung aller Ableitungen von I nach den Freiheitsgraden, d. h. nach den Knotenpotentialen mündet. Es ergeben sich hierfür:

$$\frac{\partial I_i}{\partial \hat{A}_{I,i}} = \frac{1}{2\mu_i D_i} \left(((y_{II} - y_{III})\hat{A}_{I,i} + (y_{III} - y_I)\hat{A}_{II,i} + (y_I - y_{II})\hat{A}_{III,i}) \cdot (y_{II} - y_{III}) + \right. \\ \left. + ((x_{III} - x_{II})\hat{A}_{I,i} + (x_I - x_{III})\hat{A}_{II,i} + (x_{II} - x_I)\hat{A}_{III,i}) \cdot (x_{III} - x_{II}) \right) - J_{z,i} \cdot \frac{D_i}{6}$$

$$\frac{\partial I_i}{\partial \hat{A}_{II,i}} = \frac{1}{2\mu_i D_i} \left(((y_{II} - y_{III})\hat{A}_{I,i} + (y_{III} - y_I)\hat{A}_{II,i} + (y_I - y_{II})\hat{A}_{III,i}) \cdot (y_{III} - y_I) + \right. \\ \left. + ((x_{III} - x_{II})\hat{A}_{I,i} + (x_I - x_{III})\hat{A}_{II,i} + (x_{II} - x_I)\hat{A}_{III,i}) \cdot (x_I - x_{III}) \right) - J_{z,i} \cdot \frac{D_i}{6}$$

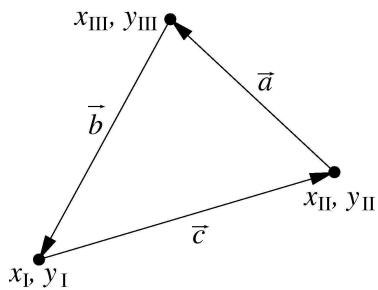
$$\frac{\partial I_i}{\partial \hat{A}_{III,i}} = \frac{1}{2\mu_i D_i} \left(((y_{II} - y_{III})\hat{A}_{I,i} + (y_{III} - y_I)\hat{A}_{II,i} + (y_I - y_{II})\hat{A}_{III,i}) \cdot (y_I - y_{II}) + \right. \\ \left. + ((x_{III} - x_{II})\hat{A}_{I,i} + (x_I - x_{III})\hat{A}_{II,i} + (x_{II} - x_I)\hat{A}_{III,i}) \cdot (x_{II} - x_I) \right) - J_{z,i} \cdot \frac{D_i}{6} \quad (4.12a)$$

Die Koeffizienten, mit denen die Knotenpotentiale in die partiellen Ableitungen eingehen, können matriziell geordnet werden. In dieser Darstellung ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial I_i}{\partial \bar{A}_{I,i}} \\ \frac{\partial I_i}{\partial \bar{A}_{II,i}} \\ \frac{\partial I_i}{\partial \bar{A}_{III,i}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\mu_i D_i} \underbrace{\begin{pmatrix} (y_{III}-y_{II})^2 + (x_{III}-x_{II})^2 & (y_{III}-y_I)(y_{II}-y_{III})_+ & (y_{II}-y_I)(y_{III}-y_{II})_+ \\ (y_{III}-y_{II})(y_I-y_{III})_+ & (y_I-y_{III})^2 + (x_I-x_{III})^2 & (y_I-y_{II})(y_{III}-y_I)_+ \\ (y_{II}-y_{III})(y_I-y_{II})_+ & (y_I-y_{III})(y_{II}-y_I)_+ & (y_{II}-y_I)^2 + (x_{II}-x_I)^2 \end{pmatrix}}_{(C_i)} \cdot \begin{pmatrix} \bar{A}_{I,i} \\ \bar{A}_{II,i} \\ \bar{A}_{III,i} \end{pmatrix} - J_{z,i} \frac{D_i}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.12b)$$

Die Koeffizienten der Matrix (C_i) haben die Dimension eines magnetischen Widerstandes multipliziert mit Länge. Diese kann daher als Reluktanzmatrix des betrachteten Teilgebietes aufgefasst werden. Gelegentlich findet man auch in Anlehnung an die strukturmechanische Herkunft der Methode die Bezeichnung Elementsteifigkeitsmatrix.

Eine einfache geometrische Illustration der Koeffizienten in (C_i) ist über die Kantenvektoren des betrachteten Dreieckselementes i in Bild 4.1 möglich, deren Skalarprodukte maßgeblich in die Berechnung eingehen:



$$(C_i) = \frac{1}{2\mu_i D_i} \begin{pmatrix} a^2 & \bar{a} \cdot \bar{b} & \bar{a} \cdot \bar{c} \\ \bar{b} \cdot \bar{a} & b^2 & \bar{b} \cdot \bar{c} \\ \bar{c} \cdot \bar{a} & \bar{c} \cdot \bar{b} & c^2 \end{pmatrix} \quad (4.12c)$$

Bild 4.1: Dreieckselement mit Eckpunkten und Kantenvektoren

Zur Aufstellung des Gleichungssystems müssen die Ableitungen des gesamten Variationsintegrals nach den unbekannten Knotenpotentialen gebildet und zu Null gesetzt werden. Hat das Feldproblem nach der Diskretisierung insgesamt m Knotenpotentiale, von denen die letzten l jedoch durch Dirichlet'sche Randbedingungen festgelegt sein sollen, so sind die Ableitungen nach den $m-l$ unbekannten Potentialwerten zu bestimmen. Die geschieht durch Summation der einzelnen Elementbeiträge. Formal mathematisch kann dieser Vorgang in Anlehnung an bekannte Begriffe der Netzwerktheorie durch Multiplikation mit einer Knoten-Elementknoten-Inzidenzmatrix (K) mit folgendem Aufbau beschrieben werden: Ist z die Anzahl der Teilgebiete, d. h. Elemente, so besitzt die Matrix pro Element i drei Spalten I, II und III, insgesamt also $3z$ Spalten. Die Matrix hat je variierbarem Knotenpotential k eine Zeile, deren Koeffizienten einen Wert 1 in denjenigen Spaltentriplets i annehmen, die ein Element bezeichnen, das mit dem besagten Knoten zusammenfällt. Der Wert 1 wird innerhalb des Spaltentriplets genau für den Subindex I,II oder III gesetzt, der der elementinternen

Nummerierung entspricht. Ansonsten sind alle Koeffizienten Null. Jedes Spaltentriplett hat damit genau drei Einträge, wenn kein Knoten des zugehörigen Elements ein Knoten mit vorgegebenem Potentialwert ist. Damit können die Ableitungen des Variationsintegrals nach den Knotenpotentialen durch eine Matrixmultiplikation ausgedrückt werden, wenn die Beiträge der Knotenableitungen aller Elemente zu einem Spaltenvektor mit $3z$ Zeilen zusammengefügt werden.

$$\left(\begin{array}{c} \frac{\partial I}{\partial \hat{A}_1} \\ \frac{\partial I}{\partial \hat{A}_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial I}{\partial \hat{A}_k} \\ \vdots \\ \frac{\partial I}{\partial \hat{A}_{m-l}} \end{array} \right) = \underbrace{\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & \cdots & i & \cdots & z \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & \begin{matrix} \text{I} & \text{II} & \text{III} & \cdots & \text{I} & \text{II} & \text{III} & \cdots & \text{III} \end{matrix} \\ 2 & \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 \end{matrix} \\ \vdots & \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{matrix} \\ k & \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \end{matrix} \\ \vdots & \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{matrix} \\ m-l & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \end{matrix} \end{matrix}}_{(K)} \cdot \left(\begin{array}{c} \frac{\partial I_i}{\partial \hat{A}_{\text{I},1}} \\ \frac{\partial I_i}{\partial \hat{A}_{\text{II},1}} \\ \frac{\partial I_i}{\partial \hat{A}_{\text{III},1}} \\ \vdots \\ \frac{\partial I_i}{\partial \hat{A}_{\text{I},i}} \\ \frac{\partial I_i}{\partial \hat{A}_{\text{II},i}} \\ \frac{\partial I_i}{\partial \hat{A}_{\text{III},i}} \\ \vdots \\ \frac{\partial I_i}{\partial \hat{A}_{\text{I},z}} \end{array} \right) \quad (4.13)$$

Mit (4.12b) und dem Vektor aller Elementknotenpotentiale ist dies:

$$\left(\begin{array}{c} \frac{\partial I_i}{\partial \hat{A}_{\text{I},1}} \\ \frac{\partial I_i}{\partial \hat{A}_{\text{II},1}} \\ \frac{\partial I_i}{\partial \hat{A}_{\text{III},1}} \\ \vdots \\ \frac{\partial I_i}{\partial \hat{A}_{\text{I},i}} \\ \frac{\partial I_i}{\partial \hat{A}_{\text{II},i}} \\ \frac{\partial I_i}{\partial \hat{A}_{\text{III},i}} \\ \vdots \\ \frac{\partial I_i}{\partial \hat{A}_{\text{I},z}} \end{array} \right) = \underbrace{\begin{matrix} (C_1) & (0) & \cdots & (0) \\ (0) & \ddots & & \\ \vdots & & (C_i) & \vdots \\ (0) & \cdots & (0) & (C_z) \end{matrix}}_{(C_{\text{tot}})} \cdot \begin{pmatrix} \hat{A}_{\text{I},1} \\ \hat{A}_{\text{II},1} \\ \hat{A}_{\text{III},1} \\ \vdots \\ \hat{A}_{\text{I},i} \\ \hat{A}_{\text{II},i} \\ \hat{A}_{\text{III},i} \\ \vdots \\ \hat{A}_{\text{I},z} \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & & & \\ \vdots & 1 & & \vdots \\ 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} J_{z,1} D_1 \\ \vdots \\ J_{z,i} D_i \\ \vdots \\ J_{z,z} D_z \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Als (C_{tot}) wird hier eine totale Elementreluktanzmatrix bezeichnet, welche die einzelnen (3×3) -Elementreluktanzmatrizen als Blöcke in der Hauptdiagonale enthält.

In (4.14) kann der $3z$ -dimensionale Vektor aller Elementknotenpotentiale durch die transponierte Knoten-Elementknoten-Inzidenzmatrix als $(m-l)$ -dimensionaler Vektor der variierbaren Knotenpotentiale dargestellt werden. Zusätzlich müssen jedoch hier auch die Festwerte der Dirichlet-Ränder $\hat{A}_{m-l+1}, \dots, \hat{A}_m$ berücksichtigt werden, die gemäß ihrer Inzidenzen als Elementknotenwerte erscheinen.

$$\begin{pmatrix} \hat{A}_{I,1} \\ \hat{A}_{II,1} \\ \hat{A}_{III,1} \\ \vdots \\ \hat{A}_{I,i} \\ \hat{A}_{II,i} \\ \hat{A}_{III,i} \\ \vdots \\ \hat{A}_{III,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (K)^T & (K_D)^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{A}_1 \\ \hat{A}_2 \\ \vdots \\ \hat{A}_k \\ \vdots \\ \hat{A}_{m-l} \\ \hat{A}_{m-l+1} \\ \vdots \\ \hat{A}_m \end{pmatrix} = (K)^T \cdot \begin{pmatrix} \hat{A}_1 \\ \hat{A}_2 \\ \vdots \\ \hat{A}_k \\ \vdots \\ \hat{A}_{m-l} \end{pmatrix} + (K_D)^T \cdot \begin{pmatrix} \hat{A}_{m-l+1} \\ \vdots \\ \hat{A}_m \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

Setzt man dieses in (4.14) ein und das Ergebnis hiervon in (4.13), so erhält man schließlich das gesuchte Gleichungssystem für die unbekannten Vektorpotentiale:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial I}{\partial \hat{A}_1} \\ \frac{\partial I}{\partial \hat{A}_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial I}{\partial \hat{A}_k} \\ \vdots \\ \frac{\partial I}{\partial \hat{A}_{m-l}} \end{pmatrix} = (K)(C_{\text{tot}})(K)^T \cdot \begin{pmatrix} \hat{A}_1 \\ \hat{A}_2 \\ \vdots \\ \hat{A}_k \\ \vdots \\ \hat{A}_{m-l} \end{pmatrix} + (K)(C_{\text{tot}})(K_D)^T \cdot \begin{pmatrix} \hat{A}_{m-l+1} \\ \vdots \\ \hat{A}_m \end{pmatrix} - \frac{1}{6}(K) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{(K_\Theta)} \cdot \begin{pmatrix} J_{z,1}D_1 \\ \vdots \\ J_{z,i}D_i \\ \vdots \\ J_{z,1}D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

Die aus den diagonal angeordneten Spaltenvektoren $(1, 1, 1)^T$ aufgebaute $(3z \times z)$ -Matrix, welche die konstanten Vorgabewerte der Elementstromdichten $J_{z,i}$ den einzelnen Elementknoten zuweist, kann als Elementknoten-Element-Inzidenzmatrix aufgefasst werden und wird nachfolgend als (K_Θ) abgekürzt. Mit der Zusammenfassung der variierbaren Knotenpotentiale

im Lösungsvektor (\hat{A}) und der vorgegebenen Randwerte (\hat{A}_D) sowie der Einführung der resultierenden Reluktanzmatrix (C_{res}) erhält man in kompakter Schreibweise:

$$(C_{\text{res}}) \cdot (\hat{A}) = -(K)(C_{\text{tot}})(K_D)^T \cdot (\hat{A}_D) + \frac{1}{6}(K)(K_\Theta) \cdot (J_z D) \quad (4.17)$$

Die symmetrische Matrix (C_{res}) ist schwach besetzt, da in sie nur zwischen unmittelbar in einem Element benachbarten Knoten von Null verschiedene Beiträge eingehen. Durch geeignete Nummerierungsstrategien kann des Weiteren die Bandbreite von (C_{res}) minimiert werden, was im Falle einer direkten Lösung das Auffüllen der Matrix mit Nichtnulleinträgen reduziert und die Rechenzeit herabsetzt.

4.1.2 Methode des gewichteten Residuums

Auch bei Anwendung der Methode des gewichteten Residuums wird nicht die ursprüngliche Differentialgleichung (4.1) diskretisiert. Stattdessen wird eine Näherungslösung auf dem Rechengebiet so bestimmt, dass die Fehlerfunktion r , das Residuum, minimal wird.

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{\mu} \operatorname{grad} \hat{A}_z\right) + J_z = r \quad (4.18)$$

Die Fehlerfunktion r könnte durch geeignete Bestimmung der freien Parameter der Näherungslösung nun z. B. in ausgewählten Punkten zu Null erzwungen werden, wie dies bei den Kollokationsmethoden der Fall ist. Höhere Genauigkeiten werden jedoch erzielt, wenn man zur Bewertung möglicher Näherungslösungen die Gleichung (4.18) mit einer Gewichtungsfunktion w multipliziert und diese über das Rechengebiet integriert.

$$R = \iint_G r \cdot w \, dx \, dy = \iint_G \left(\operatorname{div}\left(\frac{1}{\mu} \operatorname{grad} \hat{A}_z\right) + J_z \right) \cdot w \, dx \, dy \quad (4.19)$$

Das Ziel ist nun, das gewichtete Residuum R zu minimieren. Die Auswertung der rechten Seite von (4.19) würde voraussetzen, dass die Näherungslösung für A_z zweimal differenzierbar ist, was u. a. für stückweise lineare Ansätze nicht gegeben ist. Daher wird der Integrand der rechten Seite von (4.19) zunächst unter Anwendung der Vektoranalysis umgeformt:

$$w \cdot \operatorname{div}\left(\frac{1}{\mu} \operatorname{grad} \hat{A}_z\right) = \operatorname{div}\left(w \cdot \frac{1}{\mu} \operatorname{grad} \hat{A}_z\right) - \operatorname{grad} w \cdot \frac{1}{\mu} \operatorname{grad} \hat{A}_z \quad (4.20)$$

Unter Anwendung des Gauß'schen Satzes geht (4.19) damit über in:

$$R = \oint_{\partial G} \left(w \cdot \frac{1}{\mu} \operatorname{grad} \hat{A}_z \right) \cdot \vec{n} \, dl + \iint_G \left(-\operatorname{grad} w \cdot \frac{1}{\mu} \operatorname{grad} \hat{A}_z + w \cdot J_z \right) dx dy \quad (4.21)$$

Mit den zuvor eingeführten Inzidenzmatrizen und Formfunktionen kann die Näherungslösung für die Vektorpotentialverteilung für das gesamte Rechengebiet – mit Ausnahme der Knoten selbst, wo die Näherungslösung aber durch den Wert des Knotenpotentials gegeben ist, und der Kanten, in denen sie sich jedoch aus dem stetigen Übergang der Elementformfunktionen ergibt, – wie folgt angegeben werden:

$$\begin{aligned} \hat{A}_z(x, y) &= (N_{I,1} \ \dots \ N_{I,i} \ \ N_{II,i} \ \ N_{III,i} \ \ \dots \ \ N_{III,z}) \cdot (\hat{A}_{I,1} \ \ \dots \ \ \hat{A}_{I,i} \ \ \hat{A}_{II,i} \ \ \hat{A}_{III,i} \ \ \dots \ \ \hat{A}_{III,z})^T \\ &= (N_{I,1} \ \ \dots \ \ N_{I,i} \ \ N_{II,i} \ \ N_{III,i} \ \ \dots \ \ N_{III,z}) \cdot ((K)^T \ \ (K_D)^T) \cdot \begin{pmatrix} (\hat{A}) \\ (\hat{A}_D) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Entwickelt man die Gewichtungsfunktion ebenfalls in das Funktionensystem, in dem auch die Näherungslösung angeben wird, wie dies beim Bubnov-Galerkin-Verfahren der Fall ist [Bir89], so erhält man hierfür zunächst

$$w(x, y) = (N_{I,1} \ \ \dots \ \ N_{I,i} \ \ N_{II,i} \ \ N_{III,i} \ \ \dots \ \ N_{III,z}) \cdot ((K)^T \ \ (K_D)^T) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}, \quad (4.23)$$

oder in transponierter Form

$$w(x, y) = (v_1 \ \ \dots \ \ v_m) \cdot \begin{pmatrix} (K) \\ (K_D) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} N_{I,1} \\ \vdots \\ N_{III,z} \end{pmatrix}, \quad (4.23a)$$

mit den Koeffizienten der Gewichtungsfunktion v_1, \dots, v_m .

Für die Gradienten ergibt sich:

$$\operatorname{grad} \hat{A}_z(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} N_{I,1} & \dots & \frac{\partial}{\partial x} N_{I,i} & \frac{\partial}{\partial x} N_{II,i} & \frac{\partial}{\partial x} N_{III,i} & \dots & \frac{\partial}{\partial x} N_{III,z} \\ \frac{\partial}{\partial y} N_{I,1} & \dots & \frac{\partial}{\partial y} N_{I,i} & \frac{\partial}{\partial y} N_{II,i} & \frac{\partial}{\partial y} N_{III,i} & \dots & \frac{\partial}{\partial y} N_{III,z} \end{pmatrix} \cdot ((K)^T \ \ (K_D)^T) \cdot \begin{pmatrix} (\hat{A}) \\ (\hat{A}_D) \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

$$\operatorname{grad} w(x, y) = (v_1 \ \ \dots \ \ v_m) \cdot \begin{pmatrix} (K) \\ (K_D) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} N_{I,1} & \frac{\partial}{\partial y} N_{I,1} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x} N_{III,z} & \frac{\partial}{\partial y} N_{III,z} \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

Die transponierte Form erscheint wegen der möglichen Interpretation des Skalarproduktes der beiden Gradienten im Integranden des Flächenintegrals in (4.21) als Produkt aus Zeilen- und

Spaltenvektor für das weitere Vorgehen geeignet. Der Flächenintegralanteil im gewichteten Residuum R beinhaltet im Integranden das Produkt aus (4.24) und (4.25). Erkennbar kann aufgrund der Assoziativität der Matrizenmultiplikation das Produkt der beiden Gradientenmatrizen unabhängig von der übrigen Gleichung ausgeführt werden, was auf eine $(3z \times 3z)$ -Matrix führt. Definitionsgemäß können nur Produkte der Elementformfunktionen innerhalb desselben Elementes Beiträge ungleich Null liefern, so dass sich eine Blockstruktur ergibt, wobei in Abhängigkeit von x und y während der Integration jeweils nur ein Block Beiträge ungleich Null liefert. Die elementweise konstant vorgegebene Stromdichte kann mit dem Zeilenvektor der Elementformfunktionen und der Elementknoten-Element-Inzidenzmatrix (K_Θ) erweitert werden, um sie im System der Elementformfunktionen auszudrücken. Auch hier kann zunächst eine $(3z \times 3z)$ -Matrix mit Blockstruktur erzeugt werden, was bei Vorgabe der Elementstromdichten zwar nicht zwingend notwendig ist, sich aber dann als vorteilhaft erweist, wenn man in den einzelnen Elementen unterschiedliche Elementknotenstromdichten zulässt. Dies erscheint u. a. bei Wirbelstromproblemen sinnvoll, wo die jeweilige Stromdichte in einer Elementecke durch die zeitliche Ableitung des Knotenvektorpotentials und die Elementleitfähigkeit, die von Element zu Element variieren kann, gegeben ist.

$$\begin{aligned}
R_G &= \iint_G \left(-\operatorname{grad} w \cdot \frac{1}{\mu} \operatorname{grad} \hat{A}_z + w \cdot J_z \right) dx dy = \sum_i \iint_{G_i} \left(-\operatorname{grad} w \cdot \frac{1}{\mu} \operatorname{grad} \hat{A}_z + w \cdot J_z \right) dx dy = \\
&= \sum_i \iint_{G_i} -\frac{1}{\mu} (v)^T \cdot \begin{pmatrix} (K) \\ (K_D) \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} N_{I,i} & \frac{\partial}{\partial y} N_{I,i} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x} N_{III,z} & \frac{\partial}{\partial y} N_{III,z} \end{pmatrix}}_{(M_{\partial N})} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} N_{I,i} & \dots & \frac{\partial}{\partial x} N_{III,z} \\ \frac{\partial}{\partial y} N_{I,i} & \dots & \frac{\partial}{\partial y} N_{III,z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (K)^T & (K_D)^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (\hat{A}) \\ (\hat{A}_D) \end{pmatrix} dx dy + \\
&\quad + \sum_i \iint_{G_i} (v)^T \cdot \begin{pmatrix} (K) \\ (K_D) \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} N_{I,i} \\ \vdots \\ N_{III,z} \end{pmatrix}}_{(M_N)} \cdot (N_{I,i} \ \dots \ N_{III,z}) \cdot (K_\theta) \cdot (J_z) dx dy
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Die Strukturen der Matrizen $(M_{\partial N})$ und (M_N) seien nachfolgend noch einmal verdeutlicht:

$$(M_{\partial N}) = \begin{pmatrix} (\operatorname{grad} N_{I,i})^2 & \dots & & & & & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & (\operatorname{grad} N_{I,i})^2 & \operatorname{grad} N_{I,i} \cdot \operatorname{grad} N_{II,i} & \operatorname{grad} N_{I,i} \cdot \operatorname{grad} N_{III,i} & 0 & & \\ 0 & \operatorname{grad} N_{II,i} \cdot \operatorname{grad} N_{I,i} & (\operatorname{grad} N_{II,i})^2 & \operatorname{grad} N_{II,i} \cdot \operatorname{grad} N_{III,i} & 0 & & \\ \vdots & 0 & \operatorname{grad} N_{III,i} \cdot \operatorname{grad} N_{I,i} & \operatorname{grad} N_{III,i} \cdot \operatorname{grad} N_{II,i} & (\operatorname{grad} N_{III,i})^2 & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \ddots & \operatorname{grad} N_{III,z} \cdot \operatorname{grad} N_{II,z} \\ & & & & & & (\operatorname{grad} N_{III,z})^2 \end{pmatrix} \tag{4.27}$$

$$(M_N) = \begin{pmatrix} N_{1,i}^2 & \dots & & & & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & N_{1,i}^2 & N_{1,i} N_{1,i} & N_{1,i} N_{1,i} & 0 & \\ 0 & N_{1,i} N_{1,i} & N_{1,i}^2 & N_{1,i} N_{1,i} & 0 & \\ 0 & N_{1,i} N_{1,i} & N_{1,i} N_{1,i} & N_{1,i}^2 & 0 & \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & \ddots & N_{1,z} N_{1,z} \\ 0 & \dots & \dots & N_{1,z} N_{1,z} & N_{1,z}^2 & \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

Durch Integration über die einzelnen Teilgebiete und Summierung der Beiträge ergibt sich schließlich (4.29) aus (4.26), wenn man die konstanten Permeabilitätsvorgaben und die Determinanten, d. h. doppelten Dreiecksflächen der einzelnen Elemente berücksichtigt. Der Vergleich von (4.27) mit (4.12b) und (4.9) zeigt, dass sich nach der Integration wiederum die in (4.14) eingeführte totale Elementreluktanzmatrix (C_{tot}) ergibt.

$$R_G = -(v)^T \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} (K) \\ (K_D) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (C_1) & (0) & \dots & (0) \\ (0) & \ddots & & \\ \vdots & & (C_i) & \vdots \\ (0) & \ddots & (0) & (0) \\ (0) & \dots & (0) & (C_z) \end{pmatrix}}_{(C_{\text{tot}}) = \iint_G \frac{1}{\mu} (M_{\partial N}) dx dy} \cdot \begin{pmatrix} (K)^T & (K_D)^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (\bar{A}) \\ (\bar{A}_D) \end{pmatrix} +$$

$$-\underbrace{\begin{pmatrix} (K) \\ (K_D) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_1 & \dots & & & \dots & 0 \\ \frac{12}{12} & \ddots & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & D_i & D_i & D_i & 0 & \\ 0 & \frac{12}{24} & \frac{24}{24} & \frac{24}{24} & 0 & \\ 0 & \frac{D_i}{24} & \frac{D_i}{24} & \frac{D_i}{24} & 0 & \\ 0 & \frac{24}{24} & \frac{12}{24} & \frac{24}{24} & 0 & \\ 0 & \frac{D_i}{24} & \frac{D_i}{24} & \frac{D_i}{24} & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & \ddots & \frac{D_z}{24} \\ 0 & \dots & \dots & \frac{D_z}{24} & \frac{D_z}{24} & \end{pmatrix} \cdot (K_\Theta) \cdot (J_z)}_{(K_N) = \iint_G (M_N) dx dy} \quad (4.29)$$

Mit den in (4.29) angegebenen Abkürzungen ergibt sich durch Ausmultiplikation folgende Darstellung:

$$R_G = -(v_1, \dots, v_{m-l}, v_{m-l+1}, \dots, v_{m-l}) \cdot \left[\begin{pmatrix} (K)(C_{\text{tot}})(K)^T & (K)(C_{\text{tot}})(K_D)^T \\ (K_D)(C_{\text{tot}})(K)^T & (K_D)(C_{\text{tot}})(K_D)^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (\bar{A}) \\ (\bar{A}_D) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (K)(K_N) \\ (K_D)(K_N) \end{pmatrix} \cdot (K_\Theta) \cdot (J_z) \right] \quad (4.30)$$

Die ersten $m-l$ Beiträge zu R_G können offensichtlich unabhängig von der Wahl der zugehörigen Koeffizienten v_1, \dots, v_{m-l} der Gewichtungsfunktion zum Verschwinden gebracht

werden, wenn die unbekannten Potentialwerte (\hat{A}) das Gleichungssystem erfüllen, das durch die obere Zeile des eingeklammerten Ausdrucks in (4.30) gegeben ist:

$$\underbrace{(K)(C_{\text{tot}})(K)^T \cdot (\hat{A})}_{(C_{\text{res}})} = -(K)(C_{\text{tot}})(K_D)^T \cdot (\hat{A}_D) + \underbrace{(K)(K_N)(K_\Theta) \cdot (J_z)}_{\frac{1}{6}(K)(K_\Theta) \cdot (J_z D)} \quad (4.31)$$

Dies entspricht wiederum dem Gleichungssystem in (4.16) und (4.17), wobei die Gleichheit der Anregungsterme aus den speziellen Strukturen der Matrizen (K_N) und (K_Θ) folgt.

Beschränkt man sich willkürlich auf Gewichtungsfunktionen, die auf den Rändern des Rechengebietes verschwinden, so ist hiermit zum einen der Einfluss der zweiten Zeile des Klammerausdrucks in (4.30) eliminiert, $v_{m-l+1} = \dots = v_m = 0$. Dieser Ausdruck wird mit der Lösung (\hat{A}) aus (4.31) und den Vorgaben auf dem Dirichlet-Rand (\hat{A}_D) i.a. nicht gleich Null sein. Sein Ergebnis kann vielmehr als Reaktionsdurchflutungsverteilung auf dem Dirichlet-Rand interpretiert werden, deren Vorgabe in Form von Knotenströmen oder Randstrombelägen bei variierbaren Randpotentialen gerade die durch (\hat{A}_D) gegebene Potentialverteilung bewirken würde. Dies ist ein unmittelbares Analogon zur Strukturmechanik, bei der die Vorgabe unverschiebbarer Randknoten Reaktionskräfte in diesen Randknoten zur Folge hat [Brau97].

Zum anderen wird durch die Beschränkung der Gewichtungsfunktionen auf solche mit Randwert Null aber auch das Linienintegral über ∂G in (4.21) zum Verschwinden gebracht, so dass unter diesen Voraussetzungen das gewichtete Residuum den Wert Null annimmt.

4.2 Methode der Finiten Differenzen

Die Methode der Finiten Differenzen war eine der ersten Methoden, die zur numerischen Berechnung elektromagnetischer Felder eingesetzt wurde. Ursprünglich für regelmäßige, orthogonale Diskretisierungsgitter und unter direkter Diskretisierung der Differentialoperatoren hergeleitet, konnte sie durch Formulierung als Integralbilanzmethode [Gro92] auch auf weniger regelmäßige Gitter übertragen werden. Derartige Schemata werden u. a. auch als Finite Box Schemata bezeichnet [Gro92]. Im Folgenden sollen die entsprechenden Schemata für 2D-Anordnungen in kartesischen Koordinaten hergeleitet werden. Für die Orthogonalgitter entspricht dies in verkürzter Form den Ausführungen in [Eck78]. Im letzten Unterkapitel werden jedoch vergleichende Verbindungen zu der Methode der Finiten Elemente hergestellt.

4.2.1 Herleitung eines Schemas über Taylor-Reihen

Unmittelbar ausgehend von der Poisson'schen Differentialgleichung (4.1),

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} A_z + \frac{\partial^2}{\partial y^2} A_z = -\mu J_z \quad (4.32)$$

werden die Differentiationen in x - und y - Richtung durch Differenzenquotienten direkt benachbarter Knotenpotentiale ersetzt, woraus sich letztlich Linearkombinationen dieser Knotenpotentiale ergeben. Die approximierenden Differenzenquotienten werden dabei aus Taylorentwicklungen der Vektorpotentialverteilung A_z gewonnen. Bild 4.2 zeigt anhand eines Ausschnitts aus einem Finite-Differenzen-Gitter die Lage der beteiligten Knoten.

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_0 + h_{x,1} \frac{\partial A_z}{\partial x} \Big|_{x=x_0} + \frac{h_{x,1}^2}{2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} \Big|_{x=x_0} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{h_{x,1}^n}{n!} \frac{\partial^n A_z}{\partial x^n} \Big|_{x=x_0} \quad (4.33a)$$

$$\hat{A}_3 = \hat{A}_0 - h_{x,3} \frac{\partial A_z}{\partial x} \Big|_{x=x_0} + \frac{h_{x,3}^2}{2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} \Big|_{x=x_0} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-h_{x,3})^n}{n!} \frac{\partial^n A_z}{\partial x^n} \Big|_{x=x_0} \quad (4.33b)$$

Bild 4.2: Ausschnitt aus Finite-Differenzen-Gitter mit Knotenpotentialen und Gitterweiten.

Hieraus kann eine Näherung für die zweite Ableitung von A in x -Richtung gewonnen werden, wenn man die erste Ableitung durch Addition der mit $h_{x,3}$ multiplizierten Gleichung (4.33a) und der mit $h_{x,1}$ multiplizierten Gleichung (4.33b) eliminiert:

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} \Big|_{x=x_0} = \left(\frac{2}{(h_{x,1} + h_{x,3})h_{x,3}} \hat{A}_3 + \frac{2}{(h_{x,1} + h_{x,3})h_{x,1}} \hat{A}_1 - \frac{2}{h_{x,1}h_{x,3}} \hat{A}_0 \right) + \underbrace{\frac{2}{h_{x,1} + h_{x,3}} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n A_z}{\partial x^n} \Big|_{x=x_0} \cdot (h_{x,1}^{n-1} + (-1)^n h_{x,3}^{n-1})}_{f_x(h_{x,1}, h_{x,3})} \quad (4.34)$$

Aus dem Fehlerterm ist erkennbar, dass für gleiche Gitterweiten $h_{x,1} = h_{x,3}$ alle ungeradzahligsten Glieder und damit auch der Fehler mit der höchsten Potenz, nämlich drei, verschwinden.

Analog lässt sich eine Näherung für die zweite Ableitung des Vektorpotentials nach y konstruieren, so dass sich durch Einsetzen der erhaltenen Ausdrücke in (4.32) unter Vernachlässigung der Fehlerterme die nachfolgende Differenzengleichung ergibt:

$$\frac{2}{(h_{x,1} + h_{x,3})h_{x,1}} \hat{A}_1 + \frac{2}{(h_{y,2} + h_{y,4})h_{y,2}} \hat{A}_2 + \frac{2}{(h_{x,1} + h_{x,3})h_{x,3}} \hat{A}_3 + \frac{2}{(h_{y,4} + h_{y,4})h_{y,4}} \hat{A}_4 - \left(\frac{2}{h_{x,1}h_{x,3}} + \frac{2}{h_{y,2}h_{y,4}} \right) \hat{A}_0 = -\mu J_0 \quad (4.35)$$

Das Gleichungssystem ergibt sich durch Anwendung von (4.35) auf jeden Knoten des Gitters mit unbekanntem Knotenpotential. Bekannte Potentiale von Dirichlet-Rändern werden auf der rechten Seite eingesetzt. Als problematisch gestalten sich Materialübergänge und Ränder sowie insbesondere Außenecken von Rändern mit senkrechtem Feldeintritt. Für derartige Sonderfälle müssen unter Einarbeitung der jeweiligen Rand- und Übergangsbedingungen spezielle Differenzengleichungen hergeleitet werden, wozu u. a. auch Spiegelungsverfahren eingesetzt werden. Die Gewinnung von Knotenwerten für die Stromdichte aus einer im Allgemeinen flächenhaften Verteilung des Stromes ist in den Randlagen der durchfluteten Gebiete nicht eindeutig bestimmt. Es empfiehlt sich hier, wie es sich auch aus dem nachfolgenden Integralbilanzansatz ergibt, eine Flächengewichtung durchzuführen.

4.2.2 Anwendung des Integralbilanzansatzes auf orthogonale Gitter

Die genannten Schwierigkeiten an Materialübergängen und Rändern können vermieden werden, wenn nicht unmittelbar die Differentialgleichung zweiter Ordnung behandelt wird, sondern zunächst eine Integration erfolgt. Statt

$$\operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} A_z \vec{e}_z = J_z \vec{e}_z , \quad (4.36)$$

was durch vektoranalytische Umrechnung letztlich auf die Poisson'sche Gleichung (4.32) für die Komponente A_z in Teilgebieten mit konstanter Permeabilität oder auf (4.1) hinausläuft, wird durch Flächenintegration und Anwendung des Stokes'schen Satzes die Gleichung

$$\oint_{\partial G_{i,k}} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} A_z \vec{e}_z d\vec{l} = \iint_{G_{i,k}} J_z dx dy , \quad (4.37)$$

gewonnen. Diese stellt mit der Definition des Vektorpotentials und der Materialgleichung für die magnetische Feldstärke und Flussdichte lediglich das Durchflutungsgesetz in integraler Form dar. Aufgrund der Verwendung des Vektorpotentials, durch die die Quellenfreiheit der Flussdichte impliziert ist, genügt das Durchflutungsgesetz in der Form (4.37) zur Beschreibung des magnetischen Feldes.

Bild 4.3 zeigt einen Ausschnitt aus einem Finite-Differenzen-Gitter mit Gebietsvorgaben, Gitterzellen und Indizierungen. Durch numerische Auswertung von (4.37) für jeden Knoten

(i, k) mit unbekanntem Vektorpotential entlang des dort eingezeichneten Integrationsweges $\partial\tilde{G}_{i,k}$ entsteht ein Gleichungssystem für diese Knotenpotentiale. Die Teilgebiete $\tilde{G}_{i,k}$ sind hier in Anlehnung an das duale Gitter der Finite-Integration-Theorie (FIT) und zur Unterscheidung von den Gitterzellen der Diskretisierung sowie den Finiten Elementen mit einer Tilde gekennzeichnet. Sie sind wie beim dualen Gitter der FIT durch die Seitenhalbierenden der an einen Knoten angrenzenden Gitterzellen begrenzt, wie in Bild 4.3 eingezeichnet.

Bei der numerischen Auswertung von (4.37) werden die Differentialquotienten im Rotationsoperator durch Differenzenquotienten mit Potentialwerten benachbarter Knoten und Gitterweiten ersetzt. Dies bedingt Verknüpfungen des jeweiligen zentralen Knotens (i, k) mit den zugehörigen unmittelbaren Nachbarknoten $(i-1, k)$, $(i+1, k)$, $(i, k-1)$ und $(i, k+1)$. Der Integrand von (4.37) geht dabei unter Berücksichtigung der auftretenden Integrationsrichtungen über in:

$$\text{rot } A_z \vec{e}_z d\vec{l} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} \vec{e}_x - \frac{\partial A_z}{\partial x} \vec{e}_y \right) d\vec{l} \approx \begin{cases} \frac{\hat{A}(x_0, y_0 + h_y) - \hat{A}(x_0, y_0)}{h_y} dl & \text{für } d\vec{l} = \vec{e}_x dl \\ -\frac{\hat{A}(x_0 + h_x, y_0) - \hat{A}(x_0, y_0)}{h_x} dl & \text{für } d\vec{l} = \vec{e}_y dl \end{cases}, \quad (4.38)$$

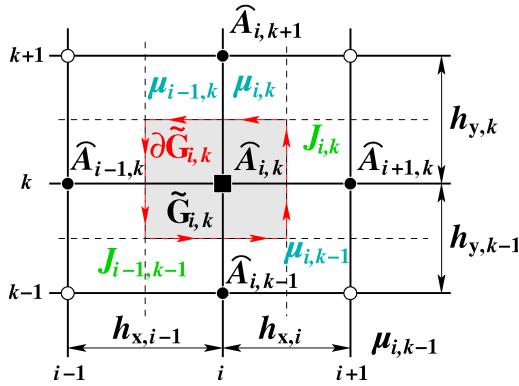


Bild 4.3:

Ausschnitt aus Finite-Differenzen-Gitter mit Gebietsvorgaben, Gitterzellen und Indizierungen.

Wertet man gemäß Bild 4.3 Gleichung (4.37) unter Verwendung der Approximation (4.38) über den Rand $\partial\tilde{G}_{i,k}$ des Teilgebietes $\tilde{G}_{i,k}$, das den Knoten (i, k) umgibt, aus, so ergeben die acht Teilintegrale des Weges $\partial\tilde{G}_{i,k}$ eine Gleichung folgender Struktur für die fünf Vektorpotentiale der unmittelbar benachbarten Knoten:

$$-c_{i-1,k}\hat{A}_{i-1,k} - c_{i+1,k}\hat{A}_{i+1,k} - c_{i,k-1}\hat{A}_{i,k-1} - c_{i,k+1}\hat{A}_{i,k+1} + c_{i,k}\hat{A}_{i,k} = \theta_{i,k} \quad (4.39)$$

Die Koeffizienten und die rechte Seite in dieser Gleichung bestimmen sich dabei wie folgt:

$$\begin{aligned}
c_{i-1,k} &= \frac{1}{2h_{x,i-1}} \left(\frac{h_{y,k}}{\mu_{i-1,k}} + \frac{h_{y,k-1}}{\mu_{i-1,k-1}} \right), \quad c_{i+1,k} = \frac{1}{2h_{x,i}} \left(\frac{h_{y,k}}{\mu_{i,k}} + \frac{h_{y,k-1}}{\mu_{i,k-1}} \right), \\
c_{i,k-1} &= \frac{1}{2h_{y,k-1}} \left(\frac{h_{x,i-1}}{\mu_{i-1,k-1}} + \frac{h_{x,i}}{\mu_{i-1,k}} \right), \quad c_{i,k+1} = \frac{1}{2h_{y,k}} \left(\frac{h_{x,i}}{\mu_{i,k}} + \frac{h_{x,i-1}}{\mu_{i-1,k}} \right), \\
c_{i,k} &= c_{i+1,k} + c_{i,k+1} + c_{i-1,k} + c_{i,k-1}, \quad \theta_{i,k} = \frac{1}{4} \sum_{\Delta i=0}^1 \sum_{\Delta k=0}^1 h_{x,i-1+\Delta i} h_{y,k-1+\Delta k} \cdot J_{i-1+\Delta i, k-1+\Delta k}
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Im Gegensatz zur Herleitung über Taylor-Reihen ist erkennbar, in welcher Weise unterschiedliche Permeabilitäten in die Koeffizienten eingehen. Die Berechnung der Knotendurchflutung $\theta_{i,k}$ in Abhängigkeit der Stromdichten ist eindeutig. Die homogene Neumann'sche Randbedingung, d. h. der senkrechte Feldeintritt auf den Rändern zu hochpermeablen Gebieten kann durch eine Grenzwertbildung $\mu \rightarrow \infty$ in denjenigen Koeffizientenanteilen approximiert werden, die zu Knoten in dem entsprechenden Gebiet verknüpfen. Für Knoten innerhalb eines solchen Gebietes werden keine Gleichungen aufgestellt, ihre Koeffizienten verschwinden gänzlich. Außenränder mit senkrechttem Feldeintritt können in ähnlicher Weise behandelt werden. Der Integrationsweg in (4.37) schließt sich für die entsprechenden Randknoten ohne Beitrag zum magnetischen Spannungsabfall außerhalb des Rechengebietes.

4.2.3 Anwendung des Integralbilanzansatzes auf Dreiecksnetze

Der anhand von orthogonalen Gittern erprobte Ansatz zur Herleitung der diskreten Knotenpotentialgleichungen lässt sich auf nicht strukturierte Dreiecksgitter übertragen, wie z. B. bei Kratki in [Krt84] geschehen, der diesen Ansatz allerdings den Finiten Elementen zuschreibt. Hierbei wird wiederum von homogenen Feldverteilungen innerhalb der einzelnen Gitterzellen ausgegangen. Das Durchflutungsgesetz wird für jeden Knoten mit unbekanntem Potential auf einem Integrationsweg durch die an den Knoten grenzenden Dreieckszellen über die jeweiligen Kantenhalbierungspunkte ausgeführt, siehe Bild 4.4. Hinsichtlich der magnetischen Umlaufspannung ist der genaue Integrationsweg innerhalb der Zellen wegen der vorausgesetzten Feldhomogenität unerheblich, jedoch ist bei bestromten Gebieten die Verteilung der Knotendurchflutungen vom Integrationsweg abhängig. Im Sinne einer gleichmäßigen Aufteilung der Dreieckszellen durch die in ihnen verlaufenden Integrationswege werden diese daher im Inneren über die Dreiecksschwerpunkte geführt.

In Bild 4.4 ist ein Ausschnitt aus einem Dreiecksnetz mit einem zentralen Knoten 0 und n angrenzenden Dreiecken und somit n unmittelbar benachbarten Knoten dargestellt. Des Weiteren sind dort auch die Permeabilitätsvorgaben $\mu_1 \dots n$ und Stromdichten $J_1 \dots n$ in den

Dreieckszellen bezeichnet sowie das zum zentralen Knoten 0 adjazente Gebiet \tilde{G}_0 und der zugehörige Integrationsweg $\partial\tilde{G}_0$ um den zentralen Knoten. Bei der Auswertung des Durchflutungsgesetzes liefert jedes der Dreiecke einen Beitrag zur magnetischen Umlaufspannung, der sich als Linearkombination der für dieses Dreieck gültigen Knotenpotentiale darstellen lässt.

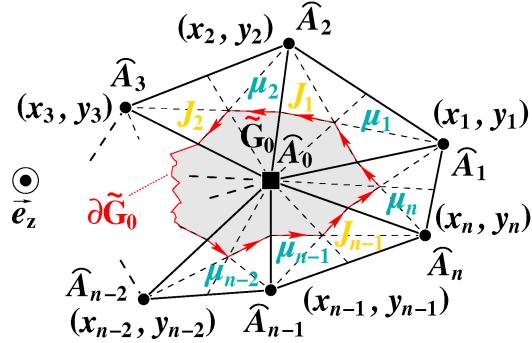


Bild 4.4:

Ausschnitt aus Dreiecksnetz mit betrachtetem zentralen Knoten 0 und angrenzenden Knoten 1 ... n.

Für das i -te Dreieck mit der Permeabilität μ_i und den Eckknoten (x_i, y_i) , (x_{i+1}, y_{i+1}) und (x_0, y_0) liefert das Linienintegral zwischen den Kantenhalbierungspunkten zunächst:

$$\int_{\left(\frac{x_i+x_0}{2}, \frac{y_i+y_0}{2}\right)}^{\left(\frac{x_{i+1}+x_0}{2}, \frac{y_{i+1}+y_0}{2}\right)} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} A_z \vec{e}_z d\vec{l} = \frac{1}{\mu_i} \int_{\left(\frac{x_i+x_0}{2}, \frac{y_i+y_0}{2}\right)}^{\left(\frac{x_{i+1}+x_0}{2}, \frac{y_{i+1}+y_0}{2}\right)} (B_{x,i} \vec{e}_x + B_{y,i} \vec{e}_y) d\vec{l} = \frac{1}{\mu_i} \left(B_{x,i} \frac{x_{i+1}-x_i}{2} + B_{y,i} \frac{y_{i+1}-y_i}{2} \right) \quad (4.41)$$

Dies geht mit dem linearen Ansatz nach (4.9) für das Vektorpotential in der Dreieckszelle,

$$\begin{aligned} \hat{A}_{z,i}(x, y) &= (1 \ x \ y) \cdot (c_{0,i} \ c_{x,i} \ c_{y,i})^T = (1 \ x \ y) \cdot (c_{0,i} \ -B_{y,i} \ B_{x,i})^T \\ &= \frac{1}{D_i} \cdot (1 \ x \ y) \cdot \begin{pmatrix} x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1} & x_{i+1} y_0 - y_{i+1} x_0 & x_0 y_i - y_0 x_i \\ y_i - y_{i+1} & y_{i+1} - y_0 & y_0 - y_i \\ x_{i+1} - x_i & x_0 - x_{i+1} & x_i - x_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{A}_0 \\ \hat{A}_i \\ \hat{A}_{i+1} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.42)$$

in Abhängigkeit der Knotenpotentiale über in:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\mu_i} \left(B_{x,i} \frac{x_{i+1}-x_i}{2} + B_{y,i} \frac{y_{i+1}-y_i}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{2\mu_i D_i} \left[\begin{pmatrix} x_{i+1} - x_i & x_0 - x_{i+1} & x_i - x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A}_0 \\ \hat{A}_i \\ \hat{A}_{i+1} \end{pmatrix} \cdot (x_{i+1} - x_i) - (y_i - y_{i+1} \ y_{i+1} - y_0 \ y_0 - y_i) \begin{pmatrix} \hat{A}_0 \\ \hat{A}_i \\ \hat{A}_{i+1} \end{pmatrix} \cdot (y_{i+1} - y_i) \right] \\ &= \frac{1}{2\mu_i D_i} \left[((x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2) \hat{A}_0 + \right. \\ &\quad \left. + ((x_0 - x_{i+1})(x_{i+1} - x_i) + (y_0 - y_{i+1})(y_{i+1} - y_i)) \hat{A}_i + ((x_i - x_0)(x_{i+1} - x_i) + (y_i - y_0)(y_{i+1} - y_i)) \hat{A}_{i+1} \right] \end{aligned} \quad (4.43)$$

Offensichtlich werden die Koeffizientenbeiträge wiederum maßgeblich durch die Skalarprodukte der Kantenvektoren gebildet, wie schon bei der FEM für lineare Formfunktionen. Bild 4.1 und Gleichung (4.12c) gelten dementsprechend sinngemäß auch hier.

Für die rechte Seite der Gleichung zum Knoten 0 liefert das betrachtete i -te Dreieck den Durchflutungsbeitrag $D_i J_i / 6$. Die vollständige Gleichung für den Knoten 0 ergibt sich durch Summierung über alle Dreiecke zu:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\mu_i D_i} \left[((x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2) \hat{A}_0 + \right. \\ & \quad \left. + ((x_0 - x_{i+1})(x_{i+1} - x_i) + (y_0 - y_{i+1})(y_{i+1} - y_i)) \hat{A}_i + ((x_i - x_0)(x_{i+1} - x_i) + (y_i - y_0)(y_{i+1} - y_i)) \hat{A}_{i+1} \right] = \\ & = \sum_{i=1}^n \frac{D_i}{6} J_i , \quad \text{mit } x_{n+1} = x_1, y_{n+1} = y_1 \text{ und } \hat{A}_{n+1} = \hat{A}_1. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Wird diese Gleichung nach den auftretenden Knotenpotentialen sortiert, ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=2}^{n+1} \hat{A}_i \cdot \left[\frac{1}{2\mu_i D_i} ((x_0 - x_{i+1})(x_{i+1} - x_i) + (y_0 - y_{i+1})(y_{i+1} - y_i)) + \frac{1}{2\mu_{i-1} D_{i-1}} ((x_{i-1} - x_0)(x_i - x_{i-1}) + (y_{i-1} - y_0)(y_i - y_{i-1})) \right] \\ & + \hat{A}_0 \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\mu_i D_i} ((x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2) = \sum_{i=1}^n \frac{D_i}{6} J_i , \quad \text{mit } x_{n+k} = x_k, y_{n+k} = y_k \text{ und } \hat{A}_{n+k} = \hat{A}_k, k = 1 \text{ oder } 2. \end{aligned} \quad (4.44a)$$

Diese Gleichungen stimmen exakt mit denjenigen überein, aus denen die Systeme (4.16) und (4.17), sowie (4.31) aufgebaut sind, die sich bei der Finite-Elementen-Methode ergeben.

In derselben Weise, wie der Differenzen- oder Integralbilanzansatz für Dreiecksnetze das gleiche liefert wie die FEM mit linearen Formfunktionen, kann auch die auf orthogonale Gitter angewandte Finite-Differenzen-Methode in den nicht bestromten Gebieten als hinsichtlich der Netzgenerierung restringierter Spezialfall der FEM interpretiert werden. Um die Gleichwertigkeit der linken Seiten der Gleichungen aufzuzeigen, kann das orthogonale FD-Netz um Diagonalstrecken erweitert werden, so dass ein Dreiecksnetz entsteht, wie in Bild 4.5 durch die strich-punktierten Linien aufgeführt.

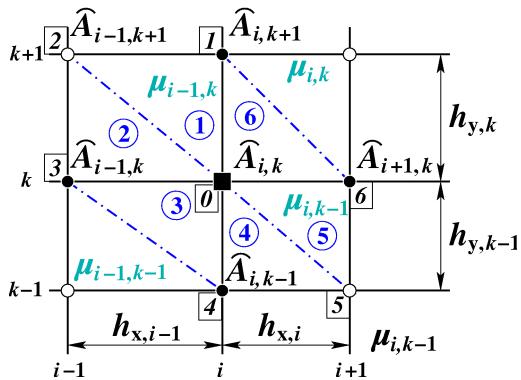


Bild 4.5:

Ausschnitt aus FD-Gitter mit diagonalen Teilungen zur Überführung in Dreiecksnetz sowie Nummerierung von angrenzenden Dreiecken (rund gerahmt) und beteiligten Knoten (eckig gerahmt).

Bestimmt man bei der Anordnung in Bild 4.5 die Koeffizientenbeiträge für die sechs am zentralen Knoten (i, k) anliegenden Dreiecke, so ergibt die Auswertung der auftretenden Skalarprodukte der jeweiligen Kantenvektoren folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2\mu_{i-1,k} h_{x,i-1} h_{y,k}} \left[\begin{pmatrix} (x_0 - x_{i+1})(x_{i+1} - x_i) + (y_0 - y_{i+1})(y_{i+1} - y_i) \\ + h_{x,i-1} - h_{x,i-1} \\ -h_{y,k} \\ 0 \end{pmatrix} \hat{A}_{i,k+1} + \begin{pmatrix} (x_i - x_0)(x_{i+1} - x_i) + (y_i - y_0)(y_{i+1} - y_i) \\ 0 \\ -h_{x,i-1} \\ + h_{y,k} \\ 0 \end{pmatrix} \hat{A}_{i-1,k+1} \right] + \\
 & + \frac{1}{2\mu_{i-1,k} h_{x,i-1} h_{y,k}} \left[\begin{pmatrix} (x_0 - x_{i+1})(x_{i+1} - x_i) + (y_0 - y_{i+1})(y_{i+1} - y_i) \\ + h_{x,i-1} \\ 0 \\ 0 \\ -h_{y,k} \end{pmatrix} \hat{A}_{i-1,k+1} + \begin{pmatrix} (x_i - x_0)(x_{i+1} - x_i) + (y_i - y_0)(y_{i+1} - y_i) \\ -h_{x,i-1} \\ 0 \\ + h_{y,k} \\ -h_{y,k} \end{pmatrix} \hat{A}_{i-1,k} \right] + \\
 & + \frac{1}{2\mu_{i-1,k-1} h_{x,i-1} h_{y,k-1}} \left[\begin{pmatrix} (x_0 - x_{i+1})(x_{i+1} - x_i) + (y_0 - y_{i+1})(y_{i+1} - y_i) \\ 0 \\ + h_{x,i-1} \\ + h_{y,k-1} \\ -h_{y,k-1} \end{pmatrix} \hat{A}_{i-1,k} + \begin{pmatrix} (x_i - x_0)(x_{i+1} - x_i) + (y_i - y_0)(y_{i+1} - y_i) \\ -h_{x,i-1} \\ + h_{x,i-1} \\ 0 \\ -h_{y,k-1} \end{pmatrix} \hat{A}_{i,k-1} \right] + \\
 & + \frac{1}{2\mu_{i,k-1} h_{x,i} h_{y,k-1}} \left[\begin{pmatrix} (x_0 - x_{i+1})(x_{i+1} - x_i) + (y_0 - y_{i+1})(y_{i+1} - y_i) \\ -h_{x,i} \\ + h_{x,i} \\ + h_{y,k-1} \\ 0 \end{pmatrix} \hat{A}_{i,k-1} + \begin{pmatrix} (x_i - x_0)(x_{i+1} - x_i) + (y_i - y_0)(y_{i+1} - y_i) \\ 0 \\ + h_{x,i} \\ -h_{y,k-1} \\ 0 \end{pmatrix} \hat{A}_{i+1,k-1} \right] + \\
 & + \frac{1}{2\mu_{i,k-1} h_{x,i} h_{y,k-1}} \left[\begin{pmatrix} (x_0 - x_{i+1})(x_{i+1} - x_i) + (y_0 - y_{i+1})(y_{i+1} - y_i) \\ -h_{x,i} \\ 0 \\ 0 \\ + h_{y,k-1} \end{pmatrix} \hat{A}_{i+1,k-1} + \begin{pmatrix} (x_i - x_0)(x_{i+1} - x_i) + (y_i - y_0)(y_{i+1} - y_i) \\ + h_{x,i} \\ 0 \\ -h_{y,k-1} \\ + h_{y,k-1} \end{pmatrix} \hat{A}_{i+1,k} \right] + \\
 & + \frac{1}{2\mu_{i,k} h_{x,i} h_{y,k}} \left[\begin{pmatrix} (x_0 - x_{i+1})(x_{i+1} - x_i) + (y_0 - y_{i+1})(y_{i+1} - y_i) \\ 0 \\ -h_{x,i} \\ -h_{y,k} \\ + h_{y,k} \end{pmatrix} \hat{A}_{i+1,k} + \begin{pmatrix} (x_i - x_0)(x_{i+1} - x_i) + (y_i - y_0)(y_{i+1} - y_i) \\ + h_{x,i} \\ -h_{x,i} \\ 0 \\ + h_{y,k} \end{pmatrix} \hat{A}_{i,k+1} \right] + \\
 & + \left(\frac{h_{x,i-1}^2}{2\mu_{i-1,k} h_{x,i-1} h_{y,k}} + \frac{h_{y,k}^2}{2\mu_{i-1,k} h_{x,i-1} h_{y,k}} + \frac{h_{x,i-1}^2 + h_{y,k-1}^2}{2\mu_{i-1,k-1} h_{x,i-1} h_{y,k-1}} + \frac{h_{x,i}^2}{2\mu_{i,k-1} h_{x,i} h_{y,k-1}} + \frac{h_{y,k-1}^2}{2\mu_{i,k-1} h_{x,i} h_{y,k-1}} + \frac{h_{x,i}^2 + h_{y,k}^2}{2\mu_{i,k} h_{x,i} h_{y,k}} \right) \hat{A}_0 = 0
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

Nach Vereinfachung und Zusammenfassung ist zu erkennen, dass dies genau der Fünfpunkte-Formel nach (4.39) und (4.40) für stromfreie Gebiete entspricht:

$$\begin{aligned}
 & - \frac{h_{x,i-1}}{2\mu_{i-1,k} h_{y,k}} \hat{A}_{i,k+1} - \frac{h_{y,k}}{2\mu_{i-1,k} h_{x,i-1}} \hat{A}_{i-1,k} - \frac{h_{y,k-1}}{2\mu_{i-1,k-1} h_{x,i-1}} \hat{A}_{i-1,k} - \frac{h_{x,i-1}}{2\mu_{i-1,k-1} h_{y,k-1}} \hat{A}_{i,k-1} + \\
 & - \frac{h_{x,i}}{2\mu_{i,k-1} h_{y,k-1}} \hat{A}_{i,k-1} - \frac{h_{y,k-1}}{2\mu_{i,k-1} h_{x,i}} \hat{A}_{i+1,k} - \frac{h_{y,k}}{2\mu_{i,k} h_{x,i}} \hat{A}_{i+1,k} - \frac{h_{x,i}}{2\mu_{i,k} h_{y,k}} \hat{A}_{i,k+1} + \\
 & + \left(\frac{h_{x,i-1}}{2\mu_{i-1,k} h_{y,k}} + \frac{h_{y,k}}{2\mu_{i-1,k} h_{x,i-1}} + \frac{h_{x,i-1}}{2\mu_{i-1,k-1} h_{y,k-1}} + \frac{h_{y,k-1}}{2\mu_{i-1,k-1} h_{x,i-1}} + \frac{h_{x,i}}{2\mu_{i,k-1} h_{y,k-1}} + \frac{h_{y,k-1}}{2\mu_{i,k-1} h_{x,i}} + \frac{h_{x,i}}{2\mu_{i,k} h_{y,k}} + \frac{h_{y,k}}{2\mu_{i,k} h_{x,i}} \right) \hat{A}_0 = 0
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

Dabei ist es für das Verschwinden der Diagonalkoeffizienten offensichtlich unerheblich, wie die Teilung einer Rechteckzelle in zwei Dreiecke erfolgt. Ist der Diagonalknoten nicht mit dem Zentralknoten verbunden, gibt es von Vornherein kein gemeinsames Element zwischen

Zentral- und Diagonalknoten und damit keinen Beitrag zum Gleichungssystem. Ist aber der Diagonalknoten über die eingefügte Diagonalstrecke mit dem Zentralknoten verbunden, so ergeben sich für beide daraus hervorgehende Dreieckszellen Koeffizientenbeiträge von Null, da die jeweiligen Kantenvektoren, die vom Zentralknoten auf den Diagonalknoten führen und deren Skalarprodukte in die Koeffizientenbeiträge eingehen, wegen der Orthogonalität des ursprünglichen FD-Netzes senkrecht aufeinander stehen.

Für die betrachtete Berechnung der Magnetfelder stationärer Ströme entspricht in den stromfreien Gebieten die Finite-Differenzen-Methode damit der auf einem einbeschriebenen Dreiecksnetz angewandten Finite-Elemente-Methode mit linearen Formfunktionen, so dass insofern an dieser Stelle zunächst kein Genauigkeitsunterschied zu erwarten ist. Lediglich in der Überführung einer gegebenen StromdichteVerteilung auf die Knotendurchflutungen sind Unterschiede begründet, deren Auswirkungen jedoch nicht unmittelbar ersichtlich sind. Hier erscheint aber gegebenenfalls die Brechung ursprünglich symmetrischer Strukturen durch die Diagonalvernetzung nachteilig gegenüber einer symmetrischen Orthogonalvernetzung.

Der Vorteil der FEM kommt dann zum Tragen, wenn relativ unregelmäßige Strukturen zu vernetzen sind und die Platzierung der Knoten nach einer adaptiven Strategie erfolgt. In einem solchen Fall kann eine lokale Netzverfeinerung dazu führen, dass mit gleichem numerischen Aufwand bei der FEM genauere Resultate erzielt werden als mittels der Finiten Differenzen. Umgekehrt führt die reguläre Struktur der FD-Gitter bei Verfeinerung eines interessierenden Bereiches zwangsläufig zu einer Zunahme der Knotenzahl in uninteressanten Bereichen. Dies bewirkt, dass für die gleiche Genauigkeit wie bei einer entsprechenden FEM-Rechnung ein höherer numerischer Aufwand in Kauf zu nehmen ist.

Ein weiterer Gesichtspunkt ist bei Wirbelstromproblemen durch den Ansatz für die StromdichteVerteilung gegeben. Bei FD-Rechnungen geht in die Knotendurchflutung zu einer Gleichung üblicherweise nur die zeitliche Ableitung des zentralen Vektorpotentials ein, als konstant angenommen über die angrenzenden Viertelgitterzellen im Gebiet \tilde{G}_0 in Bild 4.3. Dagegen gelten für die StromdichteVerteilung innerhalb eines Elementes bei der FEM auch die linearen Elementformfunktionen, siehe (4.26) – (4.29), so dass in die Gleichung für einen Knoten auch die Zeitableitungen der anderen Knoten des Elementes eingehen. Prinzipiell sollte damit die inhomogene WirbelstromdichteVerteilung besser approximierbar sein als bei der Finite-Differenzen Methode.

4.3 Anmerkungen zur Feldberechnung im dreidimensionalen Raum

Obschon sich die vorliegende Arbeit vorwiegend mit zweidimensionalen Problemstellungen der elektromagnetischen Feldberechnung ebener und axialsymmetrischer Felder beschäftigt, soll an dieser Stelle ein kurzer Einblick in Fragestellungen der dreidimensionalen Feldberechnung erfolgen. Während bei zweidimensionalen Anordnungen mit Wirbelstromproblematik eine Formulierung über das magnetische Vektorpotential und ein elektrisches Skalarpotential als De-facto-Standard [GVM99] angesehen werden kann, gibt es im Bereich der dreidimensionalen Feldberechnung Potentialansätze mit weitreichenden Unterschieden. Einige hiervon sollen an späterer Stelle kurz skizziert werden.

Des Weiteren kommt den geometrischen Objekten in den dreidimensionalen Netzen als Trägern der diskreten Feldgrößen eine weit bedeutsamere Rolle zu, als dies bei den vorangegangenen und auch nachfolgend behandelten 2D-Problematiken ersichtlich ist. Bei diesen erscheinen nur die Knoten als Träger diskreter, letztlich skalarer Potentialwerte. Was 3D-Probleme angeht, werden jedoch für die diskrete Darstellung tangentialstetiger Vektorfelder in vielen Publikationen die auf Nédélec [Ned80] zurückgehenden Kantenelemente propagiert, bei denen die zu berechnenden Freiheitsgrade als Linienintegrale des zu approximierenden Vektorfeldes entlang der jeweils betrachteten Kante definiert sind. Stellvertretend seien hier nur einige Arbeiten von Bossavit [Bos88, Bos01], Dular et al. [Dul98, Dul99], Demenko [Dem00] sowie Kaehler und Henneberger [Kae02, Kae04] erwähnt.

Kantenelemente zur Darstellung von Vektorfeldern erweisen sich dann als vorteilhaft anwendbar, wenn die Tangentialkomponente des Feldes an Materialgrenzen stetig verläuft, wie dies für die magnetische Feldstärke \vec{H} oder auch das magnetische Vektorpotential \vec{A} gilt. Bei einer komponentenweisen Verwendung knotenbasierter Elemente zur Berechnung des magnetischen Vektorpotentials können an Grenzen zwischen Gebieten unterschiedlicher Permeabilität große Fehler entstehen, wenn keine Gegenmaßnahmen getroffen werden. Die Stetigkeit von \vec{A} an Materialgrenzen, also auch der Normalkomponente, $A_{n,1} = A_{n,2}$, die durch Kantenelemente erzwungen wird, behindert bei ungleichen Permeabilitäten in hohem Maße eine angemessene numerische Repräsentation der an solchen Materialgrenzen physikalisch erforderlichen Übergangsbedingung $H_{t,1} = H_{t,2}$.

Eine geeignete Gegenmaßnahme besteht z. B. in der Verwendung doppelter Knoten auf den Materialgrenzen, wobei nur die Tangentialkomponenten der Vektorpotentiale der beiden geometrisch identischen aber den unterschiedlichen Materialgebieten zuzurechnenden

Knotenschichten gleichgesetzt werden, die Normalkomponenten aber unabhängig voneinander bleiben.

Es soll nicht unerwähnt bleiben, dass Programme wie EMAS oder frühere Versionen von ANSYS mit Knotenelementen erfolgreich für die Berechnung des magnetischen Vektorpotentials verwendet wurden.

Eine weitere Auffälligkeit bei der Feldberechnung in drei Dimensionen besteht darin, dass ihre Beschreibung vielfach und in weit stärkerem Maße als im Zweidimensionalen auf Analogien und Begriffen der Netzwerktheorie oder der ihr zugrunde liegenden Graphentheorie beruht, wie z. B. aus [Bos01], [Dem00] und [DeS02] deutlich hervorgeht. Letztlich sind es jedoch Konzepte aus der Differentialgeometrie, bei deren Anwendung die Feldgrößen in den Maxwell'schen Gleichungen als Differentialformen interpretiert werden [Bos99], [Geu01], [Cle00]. Bei dieser Darstellung sind die diskreten Differentialoperatoren Gradient, Divergenz und Rotation, die in der differentialgeometrischen Darstellung mit dem Operator d der äußeren Ableitung korrespondieren, metrikunabhängig und können daher als Inzidenzmatrizen ausgedrückt werden [Bos99], ähnlich wie dies in den Maxwell Grid Equations der Finite Integration Theory (FIT) geschieht [Cle00]. Der metrikabhängige Teil der Herleitung kann in der differentialgeometrischen Darstellung als Konstruktion eines diskreten Hodge-Operators angesehen werden, der die Differentialformen unterschiedlicher Ordnung p und $(n-p)$ im n -dimensionalen Raum miteinander verknüpft, z. B. die 1-Form h der magnetischen Feldstärke mit der 2-Form b der magnetischen Flussdichte im $(n=3)$ -dimensionalen Raum. Dieser diskrete Operator beinhaltet dann die Metrik des Netzes und die Verteilung der Materialeigenschaften.

Die Inzidenzmatrizen und ihre Korrespondenz zu den ursprünglich vektoranalytischen Operationen sollen kurz mit Bezug auf [Bos99], [Bos01], [DeS02] und [Dem00] beleuchtet werden.

Das 3D-Netz der Diskretisierung bestehe aus K Knoten, Z Kanten, F Facetten und V Volumina. Werden hierbei die Kanten als Zweige eines Netzes oder gerichteten Graphen – in [DeS02] als Kantennetzwerk bezeichnet – interpretiert, so kann die Transponierte der vollständigen $(K \times Z)$ -Knoten-Zweig-Inzidenzmatrix (A) als diskretes Analogon der Gradientenoperation aufgefasst werden, $(G) = (A)^T$. Eine diskrete skalare elektrische Potentialverteilung kann als K -dimensionaler Spaltenvektor (ϕ) durch Multiplikation mit (G) auf den Z -dimensionalen Spaltenvektor der Potentialdifferenzen (u) abgebildet werden. In differentialgeometrischer Interpretation sind dies die diskreten Werte der 1-Form, bzw. der entlang der

Kante integrierten elektrischen Feldstärke, hervorgegangen durch äußere Ableitung der 0-Form der Potentialverteilung.

Eine vollständige Maschen-Zweig-Inzidenzmatrix (B) in dem Kantennetzwerk kann durch die geschlossenen Kantenumläufe, die die Facetten der Elementarvolumen in dem Netz begrenzen, definiert werden. Die so festgelegten Maschen sind elementar, d. h. sie können nicht durch Anhängen einer oder mehrerer weiterer Kanten in zwei an diesen Kanten zusammenhängende Maschen zerlegt werden. Diese vollständige Maschen-Zweig-Inzidenzmatrix (B) ist eine diskrete Darstellung des Rotationsoperators: $(B) = (R)$. Für eine auf den Kanten diskret gegebene 1-Form, z. B. die kantenintegrierte elektrische oder magnetische Feldstärke, liefert die Multiplikation mit (R) den F -dimensionalen Spaltenvektor der Facettenzirkulationen dieser 1-Form, der selbst die diskreten Werte einer 2-Form für die zugehörigen Facetten darstellt. Diese ist in vektorieller Betrachtung je nach Eingangsgröße ein Fluss oder Strom elektrischer oder magnetischer Natur durch die betrachtete Facette, wobei sich solche Größen durch die Stetigkeit der Normalkomponente des zugehörigen Vektorfeldes auszeichnen. Aus dem oben angeführten Potentialbeispiel ist die graphentheoretisch beweisbare Beziehung $(R)(G) = (0)$ als diskrete Entsprechung zu $\text{rot grad } \phi = 0$ sofort ersichtlich.

Die dritte wesentliche Inzidenzmatrix des 3D-Netzes, nämlich die Volumen-Facetten-Inzidenzmatrix (D) ist anhand des Kantennetzwerks nicht direkt interpretierbar. Multipliziert man aber die diskreten Facettenwerte einer 2-Form als F -dimensionalen Spaltenvektor mit (D), so ergeben sich hieraus die austretenden Strom- oder Flusswerte aller Elementarvolumina und bilden einen Spaltenvektor der Dimension V . (D) ist somit das diskrete Analogon der Divergenzoperation. Die Ergiebigkeit eines Volumens ergibt sich in differentialgeometrischer Interpretation aus voluminärer Integration einer 3-Form, die selbst als äußere Ableitung einer 2-Form aufgefasst werden kann. Die Beziehung $(D)(R) = (0)$ entspricht hierbei der vektoranalytischen Gleichung $\text{div rot } \vec{v} = 0$. Eine graphentheoretische Interpretation ist möglich, wenn man zu dem gegebenen 3D-Netz ein duales Netz, in [DeS02] als Facetten-Netzwerk bezeichnet, konstruiert. Bei diesem wird jedem Volumen ein innerer Knoten und jeder Facette ein die inneren Knoten der beiden angrenzenden Volumina verbindender Zweig zugewiesen. Bei Randfacetten enden diese Zweige ggf. auf einem externen Knoten Null oder brauchen je nach Randbedingungen nicht definiert zu werden. Die Facetten des dualen Netzwerkes ergeben sich durch elementare Ketten von Kanten, die sich um die Kanten des originalen oder primalen Netzes [Bos99] schließen. In diesem dualen Netz stellt (D) die Knoten-Zweig-Inzidenzmatrix (\tilde{A}) dar und entspricht damit der transponierten Gradientenmatrix in diesem Netz, $(D) = (\tilde{G})^T$.

Die vollständige Maschen-Zweig-Inzidenzmatrix (\tilde{B}) des dualen Netzes entspricht der Kanten-Facetten-Inzidenzmatrix des originalen Netzes, d. h. $(\tilde{R}) = (R)^T$. Die Volumen-Facetten-Inzidenzmatrix im dualen Netz entspricht schließlich der Knoten-Zweig-Inzidenzmatrix im originalen Netz, also $(\tilde{D}) = (G)^T$.

Hinsichtlich der Potentialansätze bei der Berechnung von Wirbelstromproblemen spielt das magnetische Vektorpotential A eine nach wie vor wesentliche Rolle. Nach Einführung des skalaren elektrischen Potentials V kann mit seiner Hilfe die Feld- und Wirbelstromverteilung in einem Rechengebiet, das neben felderregenden Quellen auch leitfähige, wirbelstrombehaftete Strukturen enthält, berechnet werden. Die zugehörige Formulierung wird von Biró als A, V - A Formulierung bezeichnet [Bir89], bei Nowak und Demenko als A - V Formulierung [NoD00] und von Henneron, Clénet und Piriou in [HCP03] als \mathbf{A} - φ Formulierung. Die beschreibenden partiellen Differentialgleichungen ergeben sich aus der Definition des magnetischen Vektorpotentials sowie dem Ampere'schen und dem Faraday'schen Gesetz und den Materialgleichungen zu:

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot} \vec{A} \right) = \vec{J}_e \quad (4.47a)$$

für das nicht leitende Teilgebiet, das durch eine gegebene StromdichteVerteilung \vec{J}_e magnetisch erregt wird, sowie

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot} \vec{A} \right) + \gamma \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \text{grad} V \right) = 0 \quad (4.47b)$$

für die leitfähigen Gebiete. Ergänzend kann aus der Quellenfreiheit des Wirbelstroms eine zusätzliche Gleichung für das skalare Potential V angegeben werden, die aber keine neue Information beinhaltet, da sie sich auch aus direkter Anwendung der div-Operation auf (4.47b) ergibt:

$$\text{div} \left[\gamma \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \text{grad} V \right) \right] = 0 \quad (4.47c)$$

Eine Eindeutigkeit der Lösung für \vec{A} und V , deren Abwesenheit nach [Bir89] numerische Probleme verursacht, kann nur durch gleichzeitige Einarbeitung einer Eichbedingung für die Quellen des Vektorpotentials erzwungen werden, worauf dort u. a. eingegangen wird.

Der Mangel an Eindeutigkeit wird auch in [NoD00] als wesentlicher Nachteil all jener Potentialansätze angesehen, die auf einem Vektorpotential und einem Skalarpotential basiert sind, d. h. auch der $T\text{-}\Omega$ -Methode.

Bei dieser wird die Stromdichte als Rotation eines Vektorpotentials \vec{T} angesetzt. Die magnetische Feldstärke ergibt sich als Differenz von \vec{T} und dem Gradienten eines skalaren magnetischen Potentials Ω . In Kap. 7.1 findet sich ein hinsichtlich der Dimensionalität, die dort lediglich zwei beträgt, und im Hinblick auf die dort vorliegende homogene Materialverteilung verkürztes Beispiel zu diesem Ansatz, bei dem in einfacher Weise die Quellenfreiheit des elektrischen Vektorpotentials \vec{T} eingesetzt wird. Die $T\text{-}\Omega$ -Methode ähnelt der von Dular, Geuzaine und Legros vorgestellten $\mathbf{h}\text{-}\phi$ Formulierung [DGL99]. Bei dieser stellt ϕ ein totales skalares magnetisches Potential im nicht leitenden Teilgebiet gemäß $\vec{H} = -\operatorname{grad} \phi$ dar.

Zur unmittelbaren Berücksichtigung speisender Gesamtströme I ist in [HCP03] eine erweiterte Form dieser Methode, dort als **T-KI- Ω** Formulierung bezeichnet, angegeben. Bei dieser wird zusätzlich im gesamten Rechengebiet ein Vektorfeld \vec{K} derart eingeführt, dass seine Rotation auf ein divergenzfreies Vektorfeld \vec{N} führt, das außerhalb des betrachteten stromführenden Massivleiters Null wird und dessen Fluss durch die Kontaktflächen des Leiters den Betrag 1 annimmt. Für einen Einheitsstrom I von 1 A erfüllt dann dieses Vektorfeld \vec{K} das Durchflutungsgesetz, wobei die Quellenfreiheit der magnetischen Flussdichte für dieses Hilfsfeld nicht berücksichtigt werden muss. Hierdurch wird die Konstruktion des Hilfsfeldes vereinfacht. Die resultierenden Gleichungen lauten:

$$\underbrace{\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\gamma} \operatorname{rot}(\vec{T} + \vec{K} I)\right)}_{\vec{E}} + \mu \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{(\vec{T} + \vec{K} I - \operatorname{grad} \Omega)}_{\vec{H}} = 0 \quad (4.48a)$$

im Leitergebiet und

$$\operatorname{div}(\mu(\vec{T} + \vec{K} I - \operatorname{grad} \Omega)) = \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (4.48b)$$

für das gesamte Rechengebiet.

In [HCP03] wird ausgeführt, dass der Rechenaufwand für die **T-KI- Ω** Formulierung niedriger ist als für die **A- ϕ** Formulierung, insbesondere dann, wenn die Vorgabe eines Gesamtstromes erfolgt.

Um die zuvor erwähnten Nachteile, die aus der mangelnden Eindeutigkeit der Vektorpotential-Skalarpotentialformulierungen resultieren, zu umgehen, wird in [NoD00] eine $A-T$ Formulierung verwendet. Bei dieser wird das magnetische Feld im gesamten Rechengebiet durch das magnetische Vektorpotential \vec{A} beschrieben, wohingegen das elektrische Vektorpotential \vec{T} zur Beschreibung der Stromdichteverteilung nur in den leitfähigen Gebieten definiert ist. Gebiete mit einer vorgegebenen Stromdichte dicht gewickelter Spulen zählen dabei zu den nicht leitenden Teilgebieten und werden durch (4.47a) beschrieben. Für die anderen Gebiete gelten die Gleichungen:

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot} \vec{A} \right) = \text{rot} \vec{T} \quad (4.49a)$$

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\gamma} \text{rot} \vec{T} \right) = - \frac{d}{dt} \text{rot} \vec{A} \quad (4.49b)$$

In [NoD00] wird mit dieser Methode ein asynchroner Linearmotor behandelt. Während die Lösung hier auf Knotenelementen basiert ist, wird die Methode in [Alb98] und [Alb00], wo sie als $\vec{A}-\vec{A},\vec{T}$ Formulierung bezeichnet wird, auf der Basis von Kantenelementen angewendet. Der Vergleich in [Alb98] mit einer auf Knotenelementen basierten $\vec{A}-\vec{A},V$ Formulierung – ausgeführt anhand eines Beispiels mit einem Eisenjoch und vorgegebenem Wechselstrom sowie einer kurzgeschlossenen, einer offenen und einer stromgespeisten Massivleiterwindung – zeigt eine höhere Genauigkeit der $\vec{A}-\vec{A},\vec{T}$ Formulierung. Dies wird auf den Fehler zurückgeführt, der bei der auf Knotenelementen basierten Approximation des magnetischen Vektorpotentials an den Permeabilitätsgrenzen entsteht. In [Alb98] wird des Weiteren eine Verlustleistungsberechnung für einen Induktionsofen durchgeführt. [Alb00] bringt zudem eine Erweiterung auf bewegte Strukturen. Auch in [Kae02] und [Kae04] findet die Methode Verwendung, wo sie zur Berechnung der Wirbelstromverluste im Rotor eines Klauenpolgenerators dient.

Abschließend kann gesagt werden, dass in den vergangenen zwei Jahrzehnten in einer Vielzahl von Arbeiten die Problematik der dreidimensionalen Berechnung von Wirbelstromfeldern behandelt worden ist. Obwohl hierbei oft unterschiedliche Ansätze verfolgt werden, kann dennoch eine konvergente Entwicklung, z. B. im Hinblick auf eine allgemeine Akzeptanz der Überlegenheit von Kantenelementen, beobachtet werden. Des Weiteren ist zu erkennen, dass viele der mit unterschiedlichen Bezeichnungen vorgestellten Potentialformulierungen entweder sehr ähnlich sind oder in einem dualen Verhältnis zueinander stehen.

5 Das Programmsystem FELMEC

Das Programmsystem FELMEC geht auf das im Rahmen von [Gh92] entwickelte Finite-Differenzen-Zeitschrittprogramm ASMZS zurück, mit dem transiente und dynamische Vorgänge in Käfigläuferasynchronmaschinen mit massiveisernem Rotor bei fehlerfreier Wicklung und intaktem Käfig sowie symmetrischer, sinusförmiger Speisung berechnet werden können.

Im Verlauf der vergangenen Jahre konnte dieses Programm um wesentliche Berechnungsmöglichkeiten ergänzt werden. Hierzu zählt u. a. die Berücksichtigung externer Vorschaltnetzwerke zwischen den Maschinenklemmen und dem Netz, wie dies in [Kl99] für die Berechnung von Sanftanläufen über Drehstromsteller angewandt wurde. Auf der mechanischen Seite wurde im Rahmen von [Kl99] die Erfassung eines Mehrmassenmodells des Maschinenwellenstranges vorgesehen, so dass außer der gewöhnlichen Berechnung dynamischer Hochlaufvorgänge mit konzentrierter Gesamtmasse und konstantem Gegenmoment nun auch die gleichzeitige Simulation des Torsionsverhaltens bei mechanischen Ausgleichsvorgängen im Wellenstrang möglich ist. Hierbei können im begrenzten Rahmen auch nicht-lineare Elemente eingesetzt werden, z. B. degressiv- oder progressiv-elastische Drehfedern oder quadratisch von der Drehzahl abhängige Gegenmomente sowie stationäre Drehmomentkennlinien zusätzlicher Asynchron- und Synchronmaschinen im Wellenstrang.

Bei dem ursprünglichen Programm basieren die Übergangsgleichungen zwischen dem beweglichen Rotor und dem ortsfesten Stator im Luftspalt auf Taylor-Entwicklungen des Vektorpotentials, woraus sich spezielle Differenzengleichungen für Sechs-Punkte-Sterne ergeben. Alternativ dazu wurde für diesen Übergang die Möglichkeit geschaffen, die Kopplung von Rotor- und Statorgitter als Dreiecksvernetzung in der Übergangsschicht zu betrachten und Koeffizientenbeiträge für die Gleichungen wie bei den Finiten Elementen in kartesischen Koordinaten zu verwenden. Diese Neuvermaschung gilt als einfachste Kopplungsmethode in der FEM [BSL98]. Sie ist auch als „Moving Band Method“ (MBM) bekannt [Dem96]. Je nach geometrischer Notwendigkeit lässt dies für einen Übergangsknoten Gleichungssterne mit fünf, sechs oder mehr Punkten zu. Dadurch können die Forderungen an die Äquidistanz der azimutalen Diskretisierung von Rotor und Stator gelockert werden. Innerhalb der Breite der Übergangsschicht lässt diese Betrachtungsweise eine gewisse radiale Verschiebung der Rotorachse zu, wodurch in [Fm98] der aus einer vorgegebenen statischen Exzentrizität des Rotors resultierende einseitige magnetische Zug berechnet wurde.

Einen weiteren Entwicklungsschwerpunkt stellte die Ausdehnung des Programms auf Synchronmaschinen mit Schenkelpol- und Vollpolläufer dar, wobei zunächst eine Speisung mit konstantem Erregerstrom vorgesehen wurde [Um97]. Durch Einbettung der Spannungsgleichungen des Erregerstromkreises in das Gleichungssystem wurden kurz darauf auch Berechnungen unter Vorgabe konstanter Erregerspannungen ermöglicht [Um98]. Die Simulationsrechnung von Windungsschlüssen im Rotor [Dan01, Kl01b] konnte durch eine verallgemeinerte Betrachtung der Erregerwicklung implementiert werden. Dabei werden die Erregerwicklung oder auch Wicklungsbestandteile, d. h. z. B. einzelne Windungen oder Wicklungsgruppen, als Zweipolelemente des externen Vorschaltnetzwerkes interpretiert. Diese Elemente werden damit in die Topologie dieses Netzes eingebettet bei gleichzeitiger Behandlung ihrer Spannungsgleichungen im Rahmen der transientes Feldberechnung. Auf diese Weise konnte auch der Hochlauf eines Schleifringläufersynchronmotors mit fehlerfreier und einphasig unterbrochener Rotorwicklung unter Einbeziehung der zeitveränderlich vorgegebenen Anlasswiderstände simuliert werden, worauf in Kap. 6 noch näher eingegangen wird. Dieselbe Betrachtungsweise, angewandt auf die Ständerwicklung, ermöglicht auch hier die Simulation beliebiger Verschaltungen einschließlich verschiedener Wicklungsfehler.

Es ist jedoch nicht nur möglich, Wicklungsgebiete als Netzwerkelemente anzusehen und zu verschalten, sondern dieses auch für Massivleiter vorzusehen. Das ursprüngliche Programm ASMZS kann die Spannungs-, Knoten- und Maschengleichungen des symmetrischen Käfigläufers behandeln. Durch die flexiblere Definition einzelner Stäbe als Elemente des Vorschaltnetzwerkes in FELMEC ist es aber auch möglich, Käfigläufer mit Stabbrüchen oder offenen Ringen zu simulieren. Eine solche Modellierung ist stets notwendig, um die gegebenenfalls von einem idealen Kurzschluss oder symmetrischen Ringschluss abweichenden Bedingungen der Stromrückführung im Stirnraum angenähert richtig über konzentrierte Elemente zu erfassen, ohne eine aufwändige, dreidimensionale Feldberechnung des Stirnraumes vornehmen zu müssen. Auch kommerzielle Programmsysteme, wie FLUX oder ANSYS können Massivleiterelemente in einem externen Netzwerk berücksichtigen.

Eine weitere Version des Programms stellt eine indirekte Kopplung zu einer thermischen Maschinenberechnung her, indem die Stromdichteveerteilungen aus der transientes Feldberechnung in jedem Zeitschritt für eine Berechnung der Verlustleistungsdichte herangezogen werden, die dann als Eingabe für eine parallele numerische Lösung der Wärmeleitungsgleichung benutzt werden. Hiermit wurden im Rahmen von [Dru01] verschiedene Störfälle von Turbogeneratoren simuliert.

Es kann somit eine Vielzahl von Problemen im Bereich der rotierenden elektrischen Maschinen behandelt werden. Definitive Ausnahmen bilden hierbei allerdings permanent erregte Maschinen, die die Vorgabe von Magnetisierungsverteilungen erfordern würden, sowie die Kommutatormaschinen. Letztere müssten durch variable, von der Rotorposition abhängige Widerstände beschrieben werden, ähnlich wie sie als Grundlage der Oberfeldtheorien zur Gleichstrommaschine [Schd84, Hes90] und zur Wechselstromwendermaschine [Dop95] angewandt werden. In dem kommerziellen, FEM-basierten Programmsystem FLUX2D existiert hierfür speziell ein Bürstenelement.

Während sich die elektromechanische Wechselwirkung bei der Simulation rotierender elektrischer Maschinen im Allgemeinen auf eine rotatorische Starrkörperbewegung beschränkt, sind für spezielle Anwendungen – es sei hier die elektromagnetische Umformung [Wink73, BBH99] erwähnt – formveränderliche Strukturen zu berücksichtigen, wobei in einer großen Anzahl von Fällen Rotationssymmetrie vorausgesetzt werden kann. Basierend auf FELMEC für rotierende elektrische Maschinen wurden hierzu zwei unterschiedliche Programmversionen FELMEC-(2½D)-A und -B für rotationssymmetrische Anordnungen geschaffen. Diese besitzen hinsichtlich des externen Vorschaltnetzwerkes die gleichen Gestaltungsfreiheiten wie die Versionen für rotierende Maschinen. Sie können für die Simulation von formveränderlichen, wirbelstrombehafteten Gebieten in transienten magnetischen Feldern, die von stromverdrängungsbehafteten Massivleiterpulen erzeugt werden, eingesetzt werden. Dabei kann der Bewegungsablauf durch eine Folge unterschiedlicher Umformstadien vorgegeben werden [Kl03, Kl04]. Durch Bestimmung der elektromagnetischen Kräfte in jedem Zeitschritt und Kopplung zu einem externen, strukturmechanischen Simulationsprogramm auf Zeitschrittebene kann Version B auch zur Berechnung des vollständigen elektromagnetischen Umformvorgangs eingesetzt werden [Stie04, Ros04].

Bei der ersten Version A erfolgt die Anbindung der leitfähigen, bewegten Struktur durch Auflegen des Gitters dieser Struktur auf ein unveränderliches Finite-Differenzen-Grundgitter und Anbindung an die überdeckten Knoten des Grundgitters über Interpolationsgleichungen [Kl03, Kl04]. Hingegen wird bei der zweiten Version B der durch die Struktur überdeckte Anteil des Grundgitters deaktiviert. Das Gitter der leitfähigen Struktur wird mittels Dreiekszellen im Übergangsbereich mit dem verbleibenden aktiven Teil des Grundgitters vernetzt.

In den nachfolgenden Unterkapiteln werden nähere Ausführungen einschließlich einiger mathematischer Grundlagen zur FELMEC-Simulation rotierender Maschinen sowie bewegter, formveränderlicher und wirbelstrombehafteter Strukturen in rotationssymmetrischer Anordnung präsentiert.

5.1 Simulation rotierender elektrischer Maschinen mit FELMEC

Die Grundlagen der Finite-Differenzen-Zeitschrittrechnung, wie sie in FELMEC zur Anwendung kommt, werden in [Gh92] und [Kl99] sowie [Dru01] ausführlich dargestellt. Der Vollständigkeit halber erfolgt hier eine kurze Zusammenfassung, um danach auf die wesentlichen Erweiterungen und Veränderungen einzugehen, die einleitend zuvor kurz skizziert wurden.

5.1.1 Feldgleichungen mit Erregung über Wicklungs- und Massivleiterströme

Die Differenzengleichung für das Vektorpotential A_0 eines betrachteten Knotens wird in derselben Weise wie in Kap. 4 geschildert durch Auswertung des Durchflutungsgesetzes auf dem Weg über die Halbierungslinien der angrenzenden Gitterzellen hergeleitet. Bild 5.1 verdeutlicht dies anhand eines Ausschnittes aus dem polaren FD-Gitter. Die Gitterweiten in Umfangsrichtung sind dabei als Winkel p_{i-1} und p_i im Bogenmaß zugrunde zu legen. Des Weiteren treten die radialen Gitterweiten q_{k-1} und q_k auf sowie die an den zentralen Knoten 0 angrenzenden Zellen mit ihrer magnetischen Permeabilität μ und der elektrischen Leitfähigkeit γ und den Stromdichtevorgaben J . Die Knoten des „Fünf-Punkte-Sterns“ aus zentralem Knoten 0 und seinen unmittelbaren Nachbarn sind markiert. Der zugrunde gelegte Integrationsweg für die Auswertung des Durchflutungsgesetzes ist gestrichelt eingezeichnet.

Mit den in Bild 5.1 aufgeführten Bezeichnungen für Material- und Geometriegrößen ergibt sich:

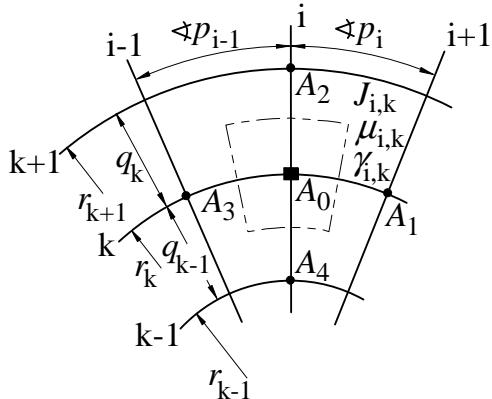
$$-\sum_{l=1}^4 \alpha_l \cdot A_l + A_0 \cdot \sum_{l=1}^4 \alpha_l - I_0 = 0 \quad (5.1)$$

Die Koeffizienten $\alpha_{1\dots 4}$ berechnen sich dabei wie folgt:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{p_i} \left(\frac{1}{\mu_{i,k-1}} \ln \frac{2r_k}{r_k + r_{k-1}} + \frac{1}{\mu_{i,k}} \ln \frac{r_k + r_{k+1}}{2r_k} \right), \quad \alpha_2 = \frac{1}{4q_k} (r_k + r_{k+1}) \left(\frac{p_i}{\mu_{i,k}} + \frac{p_{i-1}}{\mu_{i-1,k}} \right), \\ \alpha_3 &= \frac{1}{p_{i-1}} \left(\frac{1}{\mu_{i-1,k-1}} \ln \frac{2r_k}{r_k + r_{k-1}} + \frac{1}{\mu_{i-1,k}} \ln \frac{r_k + r_{k+1}}{2r_k} \right), \quad \alpha_4 = \frac{1}{4q_{k-1}} (r_k + r_{k+1}) \left(\frac{p_i}{\mu_{i,k-1}} + \frac{p_{i-1}}{\mu_{i-1,k-1}} \right) \end{aligned} \quad (5.2)$$

I_0 stellt in (5.1) die Durchflutung zum Knoten 0 dar, die sich in der durch den Integrationsweg in Bild 5.1 eingefassten Fläche ergibt. Bei innerhalb der angrenzenden Gitterzellen als örtlich unveränderlich angenommenen Zellenstromdichten ergibt sich dafür:

$$I_0 = \frac{1}{4} \sum_{\Delta k=-1}^0 \left(r_k + (-1)^{\Delta k} \frac{q_{k+\Delta k}}{4} \right) q_{k+\Delta k} \sum_{\Delta i=-1}^0 p_{i+\Delta i} \cdot J_{i+\Delta i, k+\Delta k} \quad (5.3)$$


Bild 5.1:

Ausschnitt aus polarem FD-Gitter mit wesentlichen Geometriegrößen und Materialeigenschaften nach [Kl99b].

Für Stromdichteveverteilungen, die sich in Wicklungsquerschnitten einstellen, ist der Zusammenhang mit dem speisenden Strom i_w über die Windungszahl $N_{\text{Wdg},w}$ auf dem Wicklungsquerschnitt und die Querschnittsfläche $a_{Q,w}$ gegeben. Bei als gleichmäßig vorausgesetzter Windungsverteilung erhält man die innerhalb des Wicklungsquerschnittes Nr. w gültige Stromdichte J_w zu:

$$J_w = \frac{N_{\text{Wdg},w}}{a_{Q,w}} i_w \quad (5.4)$$

Im allgemeinsten Fall können an einem Knoten in Grenzlage maximal vier unterschiedliche Wicklungsquerschnitte anliegen. Die Abhängigkeit der Knotendurchflutung I_0 von den speisenden Strömen lässt sich dann ausdrücken durch:

$$I_0 = \frac{1}{4} \sum_{\Delta k=-1}^0 \left(r_k + (-1)^{\Delta k} \frac{q_{k+\Delta k}}{4} \right) q_{k+\Delta k} \sum_{\Delta i=-1}^0 p_{i+\Delta i} \cdot \frac{N_{\text{Wdg},w(i+\Delta i, k+\Delta k)}}{a_{Q,w(i+\Delta i, k+\Delta k)}} \cdot i_{w(i+\Delta i, k+\Delta k)} \quad (5.5)$$

Die Vorfaktoren, die in (5.5) vor den einzelnen, maximal vier verschiedenen Strömen auftreten, werden als Flächenwindungszahlen F_N benannt [Gh92]. Bei Knoten auf der Grenze zwischen Unterlage und Oberlage einer Zweischichtwicklung gehen genau zwei unterschiedliche Flächenwindungszahlen und Ströme in die Knotendurchflutung ein. Für Knoten inmitten eines Wicklungsquerschnittes ist der Index $w(i+\Delta i, k+\Delta k)$ für alle angrenzenden Zellen gleich. In diesem Fall ergibt sich nur ein einziges Produkt aus einem Faktor F_N und dem Strom i_w als Eintrag in (5.3) und (5.1).

In den wirbelstrombehafteten Gebieten des Rotors von Massivläuferasynchronmaschinen oder Synchronmaschinen geht Gleichung (5.1) mit der induzierten Knotendurchflutung I_0 aus der zeitlichen Änderung des Vektorpotentials über in:

$$\begin{aligned}
& - \sum_{l=1}^4 \alpha_l A_l|_{t+h} + \left(\frac{F_{\gamma,0}}{(1-\theta)h} + \sum_{l=1}^4 \alpha_l \right) A_0|_{t+h} - \frac{F_{\gamma,0}}{l_e} u_a|_{t+h} = \\
& = \frac{\theta}{1-\theta} \sum_{l=1}^4 \alpha_l A_l|_t + \left(\frac{F_{\gamma,0}}{(1-\theta)h} - \frac{\theta}{1-\theta} \sum_{l=1}^4 \alpha_l \right) A_0|_t + \frac{\theta}{1-\theta} \frac{F_{\gamma,0}}{l_e} u_a|_t
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Die Spannungen u_a sind zusätzliche Unbekannte, die bezogen auf die axiale Länge der Anordnung l_e für die Gradientenanteile des elektrischen Feldes stehen. Diese ergeben nur in denjenigen Leitergebieten ungleich Null, die im Stirnraum nicht ideal kurzgeschlossen sind, z. B. in den Rotorstäben eines Läuferkäfigs.

Nach [Um98] ist im Rotor einer Synchronmaschine zusätzlich zu berücksichtigen, dass der Bereich des massiveisernen Rotorballens, der als ideal kurzgeschlossenes Wirbelstromgebiet betrachtet wird, unmittelbar an Bereiche der Erregerwicklung grenzen kann. Eine auf die Situation von Grenzknoten spezialisierte Formulierung von (5.6) lautet dann:

$$\begin{aligned}
& - \sum_{j=1}^4 \alpha_j A_j|_{t+h} + \left(\frac{F_{\gamma,0}}{(1-\theta)h} + \sum_{j=1}^4 \alpha_j \right) A_0|_{t+h} - F_{N,w} i_w|_{t+h} = \\
& = \frac{\theta}{(1-\theta)} \sum_{j=1}^4 \alpha_j A_j|_t + \left(\frac{F_{\gamma,0}}{(1-\theta)h} - \frac{\theta}{(1-\theta)} \sum_{j=1}^4 \alpha_j \right) A_0|_t + \frac{\theta}{(1-\theta)} F_{N,w} i_w|_t
\end{aligned} \tag{5.7}$$

5.1.2 Zweipolgleichungen von Stator- und Rotorwicklungselementen in verallgemeinerter Anwendung

a) Statorspannungsgleichungen

Die in [Um97, Um98, Kl99] genannte und letztlich schon auf [Gh92] zurückgehende Spannungsgleichung einer Ständerspulengruppe ρ lässt sich auch für Teile von Spulengruppen oder Einzelpulsen formulieren, was u. a. bei der Berechnung von Windungsschlüssen erforderlich wird. Für einen solchen Wicklungszweig Nr. w ergibt die Anwendung des Induktionsgesetzes eine Differentialgleichung von Spannung u_w , Strom i_w und Flussverkettung Ψ_w . Die zeitliche Diskretisierung nach der θ -Methode führt auf eine Differenzengleichung der zeitdiskreten Näherungswerte zu den Zeitpunkten t und $t+h$. Die Flussverkettung berechnet sich aus den Integralen des Vektorpotentials über den Wicklungsquerschnitten und der Länge in z -Richtung, d. h. der Eisenlänge der Maschine l_e . Sie ergibt sich bei ortsdiskreter Verteilung des Vektorpotentials als Linearkombination der auf den zugehörigen Wicklungsquerschnitten gegebenen Potentialwerte. Dabei treten als Gewichtungsfaktoren die zuvor eingeführten Flächenwindungszahlen auf. Das beschriebene Vorgehen liefert für das Wicklungselement Nr. w folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
 & - \left(\sum_{j(+,w)} F_{N,j} A_j - \sum_{j(-,w)} F_{N,j} A_j \right) \Big|_{t+h} + \frac{(1-\theta)h}{l_e} u_w \Big|_{t+h} - \left(\frac{L_{S,w}}{l_e} + \frac{(1-\theta)h}{l_e} R_w \right) i_w \Big|_{t+h} = \\
 & = - \left(\sum_{j(+,w)} F_{N,j} A_j - \sum_{j(-,w)} F_{N,j} A_j \right) \Big|_t - \frac{\theta h}{l_e} u_w \Big|_t - \left(\frac{L_{S,w}}{l_e} - \frac{\theta h}{l_e} R_w \right) i_w \Big|_t
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

R_w bezeichnet hierin den ohmschen Widerstand des Wicklungselementes und $L_{S,w}$ eine Streuinduktivität, vornehmlich die Stirnstreuung. Die Indizierungen $j(+,w)$ und $j(-,w)$ der Summierung über die Vektorpotentialwerte bezeichnen die Knoten der Wicklungsquerschnitte mit positiver Zählpfeilausrichtung des Stromes i_w , d. h. in axialer Richtung, und negativer Strombezugsrichtung, also entgegen der z -Achse.

Obschon über die Vektorpotentiale eine Kopplung zum Feldproblem gegeben ist, kann (5.8) zweckmäßig als Spannungs-Strom-Beziehung eines Zweipolelements aufgefasst werden und somit wie die externen Schaltungselemente in [Kl99] in die Netzwerkstruktur integriert werden. Auf die voreingestellten Schaltungsoptionen Stern- und Dreieck muss dabei verzichtet werden. Stattdessen muss ein anwenderspezifischer Belegungsplan für die Ständernuten eingegeben werden. Abweichend von der Beschreibung des Gesamtgleichungssystems nach [Kl99] und [Dru01] sind dann nicht m_{ph} , d. h. genau so viele Spannungsgleichungen wie Stränge des Drehstromsystems, aufzustellen, sondern eine andere vorgegebene Zahl. Die Gleichungen (5.8) werden im Gesamtsystem nach wie vor an die Feld- und externen Netzwerkgleichungen angehängt, wie in Bild 5.2 über die Matrizen $(F_{N,1})$, (B_A) und (M_1) dargestellt. Innerhalb der topologischen Beschreibung des Netzwerkes über die Kirchhoff'schen Gesetze erscheinen jedoch die zugehörigen Wicklungszweige als Zweige des Gesamtnetzwerkes.

Die Bedeutung der Spannungen $u_{A,1\dots m}$ ist hierbei nicht mehr diejenige einer Leiter-Erdspannung der Ausgangsklemmen eines Vorschaltnetzwerkes, sondern diejenige der tatsächlichen Wicklungszweigspannung.

b) Rotorspannungsgleichungen der Erregerwicklung eines Synchrongenerators

Gleichungen des Typs (5.8) lassen sich analog auch für die Wicklungen oder Wicklungsbestandteile des Rotors einer Synchronmaschine oder Schleifringläufersynchronmaschine aufstellen. Im Gegensatz zu der Vorgabe einer konstanten Erregerspannung, wie in [Um98] vorgestellt, wird in (5.8) die Spannung an der Wicklung zum Zeitpunkt $t+h$ als Unbekannte aufgeführt. Hinsichtlich der Flexibilität der Schaltungsgestaltung und der Einbettung derartiger Spannungsgleichungen in das Gesamtsystem gelten die Angaben unter a) mit dem

Unterschied, dass diese Gleichungen als Rotorspannungsgleichungen nach Bild 5.2 noch unterhalb der Ständerspannungsgleichungen und der Gleichungen für einen regulären, symmetrischen Käfig angeordnet werden. In Bild 5.2 sind diese Gleichungen durch die Matrizen $(F_{N,2})$, $(B_{N,2})$ und (D_3) repräsentiert.

b) Rotorstromgleichungen von Massivleitergebieten

In den Feldgleichungen (5.6) tritt als zusätzliche Unbekannte die Stabspannung u_a auf, die aus dem Gradientenanteil des elektrischen Feldes innerhalb eines massiven, leitfähigen Gebietes resultiert. Eine Beziehung zwischen dem Gesamtstrom i_a , der in einem solchen Massivleiter geführt wird, und der Spannung u_a ergibt sich aus der Integration der Stromdichte über die Querschnittfläche A_Q des Massivleiters. Nach räumlicher Diskretisierung erhält man:

$$i_a(t) = - \sum_{j(A_Q)} F_{\gamma,j} \frac{d}{dt} A_j + G_{DC,a} u_a(t) \quad (5.9)$$

Die zeitliche Diskretisierung gemäß der θ -Methode führt auf:

$$\begin{aligned} & - \sum_{j(A_Q)} F_{\gamma,j} A_j \Big|_{t+h} + (1-\theta)h G_{DC,a} u_a \Big|_{t+h} - (1-\theta)h i_a \Big|_{t+h} = \\ & = - \sum_{j(A_Q)} F_{\gamma,j} A_j \Big|_t - \theta h G_{DC,a} u_a \Big|_t + \theta h i_a \Big|_t \end{aligned} \quad (5.10)$$

Der Gleichstromleitwert $G_{DC,a}$ des Massivleitergebietes a ergibt sich dabei aus der Integration der Flächenleitwerte F_γ über die gesamte Querschnittfläche und die Division durch die Länge der Anordnung, d. h. Eisenlänge l_e .

In Leitergebieten ohne äußere Netzwerkverbindungen, z. B. Blindstäben oder gebrochenen Stäben, hat der Gesamtstrom den Wert Null. Das entsprechende Gleichgewicht der induzierten WirbelstromdichteVerteilung in dem Stab wird durch den Gradientenanteil des gesamten elektrischen Feldes innerhalb des Stabes erzwungen. Dieser entspricht der auf die Länge l_e bezogenen Spannung u_a über dem Stab, deren Wert aus der Berechnung hervorgeht. Vom Standpunkt des äußeren Netzwerkes entspricht dieser Wert u_a gerade der Leerlaufspannung des durch (5.9) beschriebenen Zweipols.

Ist dagegen die Spannung u_a einem idealen Kurzschluss des Stabes entsprechend gleich Null, stellt sich mit der negativen, über die Querschnittfläche A_Q integrierten und mit der Leitfähigkeit γ multiplizierten Zeitableitung des Vektorpotentials in (5.9) ein resultierender Gesamtstrom ein, der als Kurzschlussstrom des gegebenen Zweipols interpretiert werden kann.

Es liegt daher nahe, auch die massiven und daher wirbelstrombehafteten leitfähigen Strukturen den beliebig miteinander verschaltbaren Netzwerkzweipolen zuzurechnen und in ähnlicher Weise zu behandeln, wie die verteilten Wicklungen. Die Topologie der Rotorstäbe wird dabei im Bereich der Netzwerkgleichungen berücksichtigt, während die Zweipolgleichungen (5.10) wegen ihrer enormen Bandbreite, hervorgerufen durch die Kopplung zum Feldproblem, an das Gleichungssystem angehängt werden, wie in Bild 5.2 gezeigt. Diese Zweipolgleichungen von gleichsam frei verschalteten Rotorstäben entsprechen hier den Matrizen $(F_{\gamma,\text{frei}})$, $(C_{\gamma,\text{frei}})$ und (D_4) .

Das in Bild 5.2 skizzierte Gleichungssystem beinhaltet schematisch alle zuvor aufgeführten Gleichungen. Darüber hinaus sind auch die Netzwerkgleichungen, ausgedrückt über die Matrix (Z) und den Lösungsvektor der Zweiggrößen (X_Z) , aufgeführt. In diesen sind die Zweipolgleichungen der externen Elemente ohne Kopplung zum Feldproblem enthalten, deren Zweigspannungen und –ströme im Lösungsvektor (X_Z) zusammen mit den Spannungen der Spulengruppen und den Massivleiterströmen aufgeführt sind. Die Maschen-Zweig- und Knoten-Zweig-Inzidenzen sind dort ebenfalls enthalten, wobei die Matrix (C_A) die Knoteninzidenzen zu den Ständerspulengruppen und –teilwicklungen angibt. Die Matrix $(C_{N,2})$ beinhaltet diese Inzidenzen für die Rotorteilwicklungen und -spulengruppen. In $(B_{\gamma,\text{frei}})$ befinden sich die Maschen-Zweig-Inzidenzen der frei verschalteten Massivleiterstäbe. Mit den Matrizen $(F_{\gamma,\text{reg}}')$ und (M_2) werden schließlich die Gleichungen eines regulären, symmetrischen Käfigläufers eines intakten Asynchronmotors bezeichnet, wie sie schon in [Gh92] oder nach Umstellung auf die θ -Methode in [Kl99] beschrieben sind.

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
 (\alpha) & | & (0) & | & (F_{N,1})^T & | & (F_{\gamma,\text{reg}})^T & | & (F_{N,2})^T & | & (F_{\gamma,\text{frei}})^T \\
 \hline
 (0) & | & (Z) & | & (C_A) & | & (0) & | & (C_{N,2}) & | & (B_{\gamma,\text{frei}}) \\
 \hline
 (F_{N,1}) & | & (B_A) & | & (M_1) & | & (0) & | & (0) & | & (0) \\
 \hline
 (F_{\gamma,\text{reg}}') & | & (0) & | & (0) & | & (M_2) & | & (0) & | & (0) \\
 \hline
 (F_{N,2}) & | & (B_{N,2}) & | & (0) & | & (0) & | & (D_3) & | & (0) \\
 \hline
 (F_{\gamma,\text{frei}}) & | & (C_{\gamma,\text{frei}}) & | & (0) & | & (0) & | & (0) & | & (D_4)
 \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} (A) \\ (X_Z) \\ (i_A) \\ (X_R) \\ (i_w) \\ (u_M) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (b_\alpha) \\ (b_Z) \\ (b_{N,1}) \\ (b_R) \\ (b_w) \\ (b_M) \end{pmatrix}$$

Bild 5.2: Schematische Darstellung des gesamten Gleichungssystems mit allen wesentlichen Matrizen, der Struktur des Lösungsvektors und der rechten Seite.

5.2 Berechnung des transienten elektromagnetischen Feldes bei axisymmetrischen Umformprozessen mit FELMEC-2½D

5.2.1 Grundsätzliches

Während für die 2D-Berechnung rotierender elektrischer Maschinen eine Beschreibung in Polarkoordinaten (r, φ) zweckmäßig ist, ist für axisymmetrische Anordnungen ein zylindrisches Koordinatensystem (r, z) zu wählen, wobei die Abhängigkeit der magnetischen Feldgrößen vom Umfangswinkel φ entfällt. Statt der direkten Verwendung des magnetischen Vektorpotentials \vec{A} , das für eine korrekte Darstellung des magnetischen Feldes bei solchen Anordnungen nur eine Komponente in Umfangsrichtung aufzuweisen braucht, kann ein modifiziertes Vektorpotential $\Phi' = r \cdot A_\varphi$ angewandt werden. Dieses entspricht letztlich einer Flussfunktion, da der Wert $\Phi = 2\pi\Phi' = 2\pi r \cdot A_\varphi$ im Punkt (r, z) den magnetischen Fluss durch eine Kreislinie um die Polachse des Koordinatensystems mit dem Radius r darstellt. Linien mit konstantem Wert Φ' repräsentieren somit Feldlinien.

Die Differenzengleichungen für die modifizierten Vektorpotentiale der Knoten eines orthogonalen Gitters können in einfacher Weise über die in Kap. 4 angegebenen Integralbilanzen hergeleitet werden und ergeben sich in der gleichen Form wie (5.1) zu:

$$-\sum_{l=1}^4 \alpha_l \cdot \Phi'_l + \Phi'_0 \cdot \sum_{l=1}^4 \alpha_l - I_0 = 0 \quad , \quad (5.11)$$

Die Koeffizienten α_1 und α_2 sind mit den Bezeichnungen in Bild 5.3 z. B. wie folgt gegeben:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2q_k(r_k + q_k/2)} \cdot \left(\frac{h_i}{\mu_{i,k}} + \frac{h_{i-1}}{\mu_{i-1,k}} \right), \quad \alpha_2 = \frac{1}{h_i} \cdot \left[\frac{1}{\mu_{i,k}} \ln \left(1 + \frac{q_k}{2r_k} \right) - \frac{1}{\mu_{i-1,k}} \ln \left(1 - \frac{q_{k-1}}{2r_k} \right) \right] \quad (5.12)$$

Für die Indizierungen $k-1$ statt k in α_1 und $i-1$ statt i in α_2 ergeben sich α_3 und α_4 .

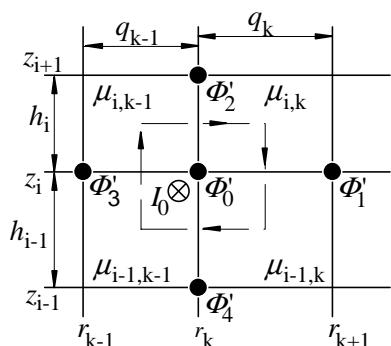


Bild 5.3:

Ausschnitt aus orthogonalem Längsschnittgitter mit Gebietsvorgaben, Indizierungen und Knotendurchflutung I_0 innerhalb des durch Integrationsweg begrenzten Teilgebietes [Kl03].

Ebenso wie bei den rotierenden Maschinen kann die Erregung des Feldes durch Wicklungsgebiete mit homogener Windungs- und damit Stromdichteverteilung erfolgen. Die Kopplung zu den erregenden Strömen i_w ist wieder über die Flächenwindungszahlen gegeben. Diese ergeben sich in (5.13) als Produkte aus den Flächenwindungsdichten der an den Knoten grenzenden Wicklungsquerschnitte und den Teilflächen, die der Integrationsweg aus dem jeweiligen Wicklungsquerschnitt herausschneidet.

$$I_0 = \sum_{\Delta k=-1}^0 \sum_{\Delta i=-1}^0 \frac{q_{k+\Delta k} h_{i+\Delta i}}{4} \cdot \frac{N_{Wdg,w(i+\Delta i, k+\Delta k)}}{a_{Q,w(i+\Delta i, k+\Delta k)}} \cdot i_{w(i+\Delta i, k+\Delta k)} = \sum_{\Delta k=-1}^0 \sum_{\Delta i=-1}^0 F_{N,0,w(i+\Delta i, k+\Delta k)} \cdot i_{w(i+\Delta i, k+\Delta k)} \quad (5.13)$$

5.2.2 Spannungsgleichungen gleichmäßig verteilter Wicklungen

Die ohmsch-induktive Spannungsgleichung einer Wicklung mit dem ohmschen Widerstand R_w und der Zuleitungsstreuung $L_{\sigma,w}$ lautet:

$$u_w = R_w \cdot i_w + \frac{d}{dt} \Psi_w = R_w \cdot i_w + \frac{d}{dt} \left(L_{\sigma,w} i_w + N_{Wdg,w} \cdot \frac{2\pi}{a_{Q,w}} \iint_Q \Phi' dr dz \right) \quad (5.14)$$

Sie geht aufgrund der durch das FD-Gitter vorgegebenen Diskretisierung über in:

$$u_w = R_w \cdot i_w + \frac{d}{dt} \left(L_{\sigma,w} i_w + 2\pi \sum_{j(Q,w)} F_{N,j,w} \Phi_j \right) \quad (5.15)$$

Hierbei treten durch die diskrete Flächenintegration wieder die Flächenwindungszahlen auf. Der Index j bezeichnet hierbei die Knoten im Rechengebiet, wobei $j(Q,w)$ jene Knoten adressiert, die zum Wicklungsquerschnitt Nr. w gehören.

(5.14) stellt eine Zweipolgleichung dar, wobei sich allerdings die Quell- oder Leerlaufspannung aus der zeitlichen Änderung der Flussverkettung und damit der Verteilung der modifizierten Vektorpotentiale ergibt. Hierdurch wird eine direkte Kopplung zum Feldproblem begründet.

Die zeitliche Diskretisierung gemäß der θ -Methode führt schließlich auf:

$$\begin{aligned} & - \sum_{j(Q,w)} F_{N,j,w} \Phi_j \Big|_{t+h} + \frac{1-\theta}{2\pi} h \cdot u_w \Big|_{t+h} - \frac{L_{\sigma,w} + (1-\theta)hR_w}{2\pi} i_w \Big|_{t+h} \\ &= - \sum_{j(Q,w)} F_{N,j,w} \Phi_j \Big|_t - \frac{\theta h}{2\pi} u_w \Big|_t - \frac{L_{\sigma,w} - \theta hR_w}{2\pi} i_w \Big|_t \end{aligned} \quad (5.16)$$

5.2.3 Feldgleichungen für wirbelstrombehaftete Massivleiter mit externer Speisung

Die Homogenität des erregenden Stromdichtefeldes bei Spannungsspeisung kann für die in 5.2.2 betrachteten verteilten Wicklungen vorausgesetzt werden. Dort wird sie durch die Gleichmäßigkeit der Windungsverteilung und die Serienschaltung der einzelnen Windungen erzwungen. Sie gilt des Weiteren, wenn durch Aufteilung eines Leiters in parallele isolierte Teilquerschnitte und verdrillte Führung dieser Teilleiter jeder von ihnen bei gleichem Teilstrom dem gleichen Fluss und der gleichen Flussänderungsgeschwindigkeit ausgesetzt ist. Hierbei muss gleichfalls eine identische elektrische Länge aller Teilleiter vorausgesetzt werden, so dass sich der ohmsche Spannungsabfall bei homogener Stromdichteverteilung als unabhängig vom jeweiligen Teilleiter darstellt.

Bei massiven Leitern mit ausgedehnten Querschnittabmessungen muss jedoch aufgrund der unterschiedlichen Teilflüsse für die Punkte des Querschnitts mit verschiedenen großen, induzierten Umlaufspannungen und damit Teilströmen und Stromdichten gerechnet werden. Dies gilt unabhängig davon, ob es sich um Kurzschlussringe oder aus externen Quellen gespeiste Massivleiterpulse handelt. Für letztere führen darüber hinaus schon im Gleichstromfall die unterschiedlichen Umfangslängen paralleler infinitesimaler Strompfade zur Ausbildung inhomogener, mit $1/r$ abklingender Stromdichteverteilungen.

Das stromtreibende elektrische Feld genügt dem Induktionsgesetz. Für rotations-symmetrische Anordnungen kann es in einfacher Weise entlang zur z -Achse konzentrischer Kreislinien ausgewertet werden. Hierbei ist zu berücksichtigen, dass bei extern gespeistem Leiter die Spannung u_{ex} zwischen Anfangs- und Endstirnfläche auftritt und entlang der Kreislinie der Beitrag zur Zirkulation des elektrischen Feldes durch die Stromdichte J_ϕ und den Kreisumfang gegeben ist. Der magnetische Fluss durch die Kreisfläche kann als Zirkulation des Vektorpotentials entlang der Kreislinie ausgedrückt werden.

$$\oint_{\partial A_{\text{Kreis}}} \vec{E} d\vec{l} = -u_{\text{ex}} + 2\pi r \frac{J_\phi}{\gamma} = -\frac{d}{dt} \iint_{A_{\text{Kreis}}} \vec{B} d\vec{a} = -\frac{d}{dt} \oint_{\partial A_{\text{Kreis}}} \vec{A} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} 2\pi r A_\phi = -2\pi \frac{d}{dt} \Phi' \quad (5.17)$$

Die Stromdichte für einen Punkt innerhalb eines Massivleiterquerschnitts ergibt sich somit zu:

$$J_\phi = \frac{\gamma}{r} \left(\frac{u_{\text{ex}}}{2\pi} - \frac{d}{dt} \Phi' \right) \quad (5.18)$$

Für die Knotendurchflutung in (5.11) heißt dies, dass neben den modifizierten Vektorpotentialen des Fünf-Punkte-Sterns auch die Zeitableitung im Zentralknoten 0 sowie die externe Spannung u_{ex} auftreten. Bei dieser Betrachtung wird die Stromdichte auf der

Fläche a_0 , d. h. innerhalb des Integrationswegs um den zentralen Knoten in Bild 5.3 als örtlich konstant angenommen.

$$-\sum_{l=1}^4 \alpha_l \cdot \Phi'_l + \Phi'_0 \cdot \sum_{l=1}^4 \alpha_l - \iint_{a_0} \frac{\gamma}{r} \cdot \left(\frac{u_{\text{ex}}}{2\pi} - \frac{d}{dt} \Phi'_0 \right) dr dz = 0 \quad (5.19)$$

Aus dem Integral geht ein Leitwertkoeffizient $F_{\gamma,0}$ hervor, in den die Leitfähigkeiten der angrenzenden Zellen eingehen und der aufgrund der $1/r$ -Abhängigkeit des Integranden logarithmische Terme enthält:

$$F_{\gamma,0} = \sum_{\Delta k=0}^1 \left[(-1)^{\Delta k} \ln \left(1 + (-1)^{\Delta k} \frac{q_{k-\Delta k}}{2r_k} \right) \cdot \sum_{\Delta i=0}^1 \frac{\gamma_{i-\Delta i, k-\Delta k} \cdot h_{i-\Delta i}}{2} \right] \quad (5.20)$$

Die zeitliche Diskretisierung des Differentialkoeffizienten in (5.19) mittels der θ -Methode liefert schließlich:

$$\begin{aligned} & -\sum_{l=1}^4 \alpha_l \Phi'_l|_{t+h} + \left(\frac{F_{\gamma,0}}{(1-\theta)h} + \sum_{l=1}^4 \alpha_l \right) \Phi'_0|_{t+h} - \frac{F_{\gamma,0}}{2\pi} u_{\text{ex}}|_{t+h} = \\ & = \frac{\theta}{1-\theta} \sum_{l=1}^4 \alpha_l \Phi'_l|_t + \left(\frac{F_{\gamma,0}}{(1-\theta)h} - \frac{\theta}{1-\theta} \sum_{l=1}^4 \alpha_l \right) \Phi'_0|_t + \frac{\theta}{1-\theta} \frac{F_{\gamma,0}}{2\pi} u_{\text{ex}}|_t \end{aligned} \quad (5.21)$$

Bei reinen Wirbelstromgebieten, d. h. leitfähigen Bereichen ohne externe Speisung ist u_{ex} gleich Null. Solche Gebiete erscheinen gleichsam wie kurzgeschlossene Massivleiterwindungen und sind insofern ein Spezialfall des allgemeinen Falls in (5.21).

5.2.4 Stromgleichungen der Massivleiter mit externer Speisung

Der Gesamtstrom durch einen Massivleiterquerschnitt Q_M ergibt sich aus der Flächenintegration der Stromdichte. Für Massivleiter Nr. m heißt das unter Einbeziehung der Ortsdiskretisierung:

$$\begin{aligned} i_m &= \iint_{Q_M, m} \frac{\gamma}{r} \left(\frac{u_{\text{ex},m}}{2\pi} - \frac{d}{dt} \Phi' \right) dr dz \approx \\ &\approx \sum_{j(Q_M, m)} F_{\gamma,j} \left(\frac{u_{\text{ex},m}}{2\pi} - \frac{d}{dt} \Phi'_j \right) = \frac{u_{\text{ex},m}}{2\pi} \sum_{j(Q_M, m)} F_{\gamma,j} - \sum_{j(Q_M, m)} F_{\gamma,j} \frac{d}{dt} \Phi'_j \end{aligned} \quad (5.22)$$

Die Summe aller Leitwertkoeffizienten eines Massivleiterquerschnittes entspricht dem 2π -fachen Gleichstromleitwert des Leiters und wird nachfolgend mit $G'_{Q,m}$ bezeichnet.

$$\begin{aligned}
& - \sum_{j(Q_M, m)} F_{\gamma, j} \Phi_j' \Big|_{t+h} + (1-\theta)h \frac{G'_{Q, m}}{2\pi} u_{ex, m} \Big|_{t+h} - (1-\theta)h i_m \Big|_{t+h} = \\
& = - \sum_{j(Q_M, m)} F_{\gamma, j} \Phi_j' \Big|_t - \theta h \frac{G'_{Q, m}}{2\pi} u_{ex, m} \Big|_t + \theta h i_m \Big|_t
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Letztlich handelt es sich auch bei den Gleichungen (5.22) und (5.23) um die Zweipolgleichung der Massivleiterwicklung Nr. m mit Kopplung zum Feldproblem.

Die Berücksichtigung der Verschaltung von verteilten Wicklungen und Massivleitern mit dem äußeren Netzwerk und dort gegebenen Quellen erfolgt wie schon bei den rotierenden elektrischen Maschinen durch die Kirchhoff'schen Maschen- und Knotengleichungen. Diese werden in dem resultierenden Gleichungssystem ebenso wie die Spannungsgleichungen der externen Netzwerkelemente, die keine Kopplung zum Feldproblem haben, explizit aufgestellt.

5.2.5 Einfaches Rechenbeispiel

Mit den bisher angegebenen Gleichungen lässt sich schon eine ruhende rotationssymmetrische Anordnung transient berechnen. Im nachfolgenden wird eine Spiralspule mit vier Windungen betrachtet, die als vier konzentrische Leiterschleifen modelliert werden. Die Leiterquerschnitte sind kreisförmig mit einem Durchmesser von 10 mm. Die Radialkoordinaten der Querschnittsmittelpunkte sind 15 mm, 27 mm, 39 mm und 51 mm. Das Leitermaterial ist Kupfer mit der elektrischen Leitfähigkeit $\gamma_C = 56 \cdot 10^6$ S/m. Damit ergeben sich die Gleichstromwiderstände der Windungen zu $20,69 \mu\Omega$, $38,013 \mu\Omega$, $55,16 \mu\Omega$ und $72,26 \mu\Omega$. Oberhalb der Spule befindet sich eine Aluminiumkreisscheibe, $\gamma_{Al} = 28 \cdot 10^6$ S/m, mit dem Außenradius $R = 70$ mm und der Dicke $d = 1,25$ mm. Der Abstand zwischen der unteren Oberfläche der Scheibe und der oberen Spulenkontur beträgt 1,1 mm. Die Windungen werden in einem Fall als Massivleiter und im anderen Fall vergleichend als Wicklungsgebiete mit homogener Stromdichteverteilung angenommen. Als Erregung wird eine Stromquelle mit linearem Stromanstieg ab Null mit einer Anstiegs geschwindigkeit von $0,1$ kA/ μ s vorgegeben.

Die Feldlinienbilder, die sich aus einer FD-Zeitschrittrechnung mit einer Zeitschrittweite von $h = 0,5 \mu$ s bei einem Zeitschrittparameter $\theta = 0,333$ für den Zeitpunkt $t = 100 \mu$ s mit $i(t) = 10$ kA ergeben, sind in Bild 5.4 dargestellt. Deutlich zu erkennen ist in beiden Fällen die Abschirmwirkung der Aluminiumplatte, die aufgrund der durch die induzierten Kreisspannungen getriebenen Wirbelströme ein Gegenfeld aufbaut. Hieraus resultiert eine Feldkonzentration in dem Luftspalt zwischen Spule und Wirbelstromscheibe. Der wesentliche Unterschied in den Feldbildern ist jedoch dadurch gegeben, dass im Falle der Massivleiter-

modellierung transiente Stromverdrängungs- und Proximityeffekte Eingang finden. Dies zeigt sich u. a. in einer deutlichen Feldschwächung im Leiterinneren.

Die Flussskalierung ist für den direkten Vergleich der Darstellungen beider Fälle mit $10 \mu\text{Wb}/\text{rad}$ zwischen benachbarten Feldlinien identisch. Die Feldlinienbilder zeigen daher qualitativ auch an, dass bei gleichem Strom die Flussverkettung der homogen durchfluteten Wicklungs höher ist. Dementsprechend wird, wie Bild 5.5 zeigt, auch eine höhere Erregerspannung an der Wicklung berechnet. Deren Integralwert abzüglich des zeitintegrierten ohmschen Spannungsabfalls ergibt die Flussverkettung.

Der scheinbare Einschwingvorgang zu Beginn ist rein numerisch bedingt und hängt damit zusammen, dass die hochgradig resistive Stromeinprägung eine sehr steife Eigenwertkonfiguration des Problems in der Numerik nach sich zieht.

Die transienten Skin- und Proximityeffekte werden besonders deutlich auch durch die Stromdichteveerteilungen in Bild 5.6 illustriert, wo im Massivleiterfall durch die Schattierung und die Anzahl und Dichte der Niveaulinien starke Inhomogenitäten angezeigt werden. Diese gehen für die beiden innersten Windungen sogar mit einem Vorzeichenwechsel einher. Die beschriebenen Effekte sind bei homogen vorausgesetzter Durchflutung der Wicklungsquerschnitte nicht gegeben. Das Feld durchdringt hier die Leiterquerschnitte. Die Stromdichte hat ortsunabhängig exakt den konstanten Betrag $J = i/a_Q$ von hier $10 \text{ kA}/(\pi \cdot 5^2 \text{ mm}^2) = 0,127 \text{ kA/mm}^2$.

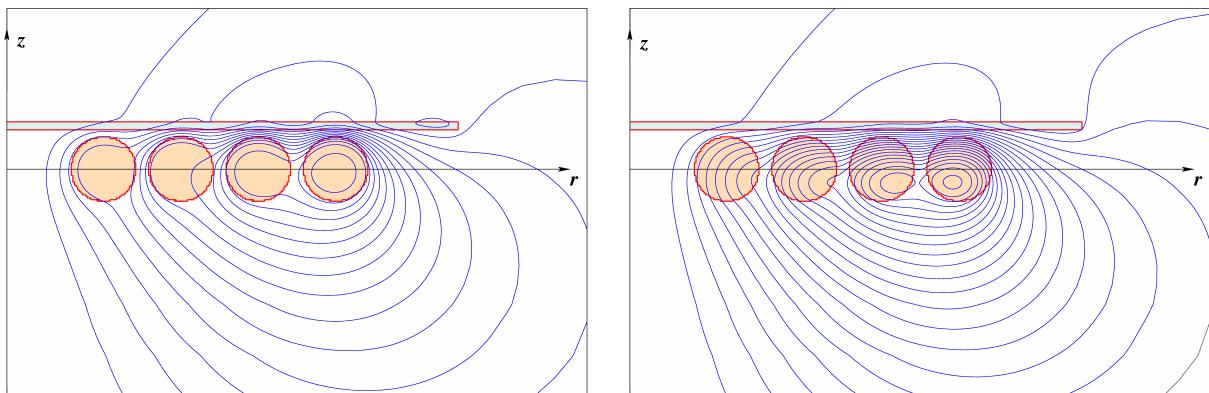


Bild 5.4: Ausschnitte aus Feldbildern bei Massivleitermodellierung (links) und Vorgabe homogener Durchflutung der Wicklungsgebiete (rechts) einer Spiralspule.

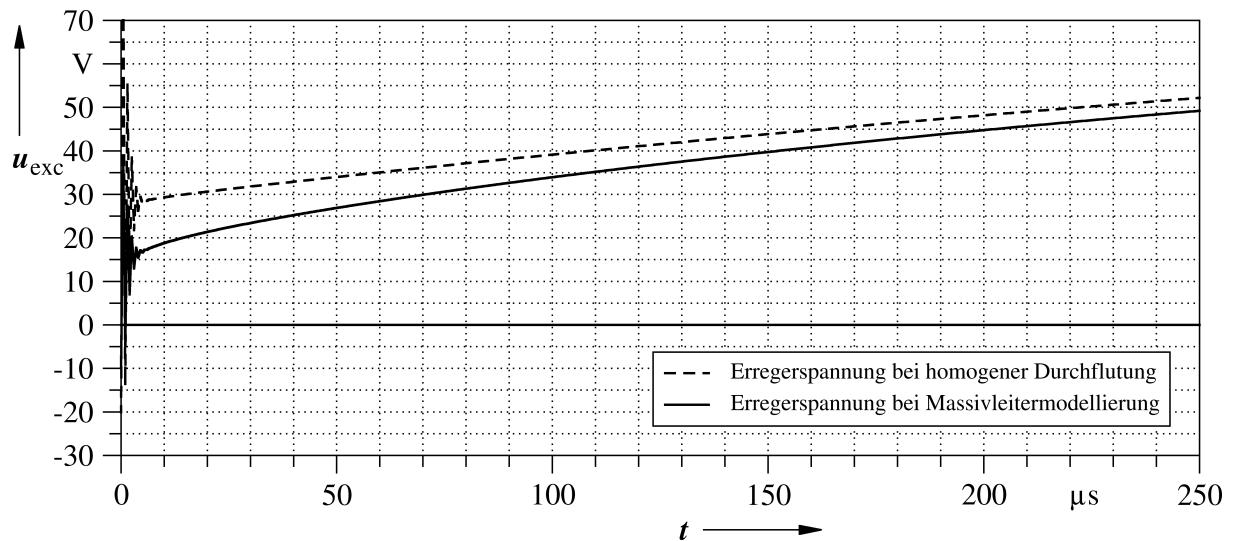


Bild 5.5: Zeitverläufe der Erregerspannung an der Vier-Windungsspule bei Stromvorgabe.

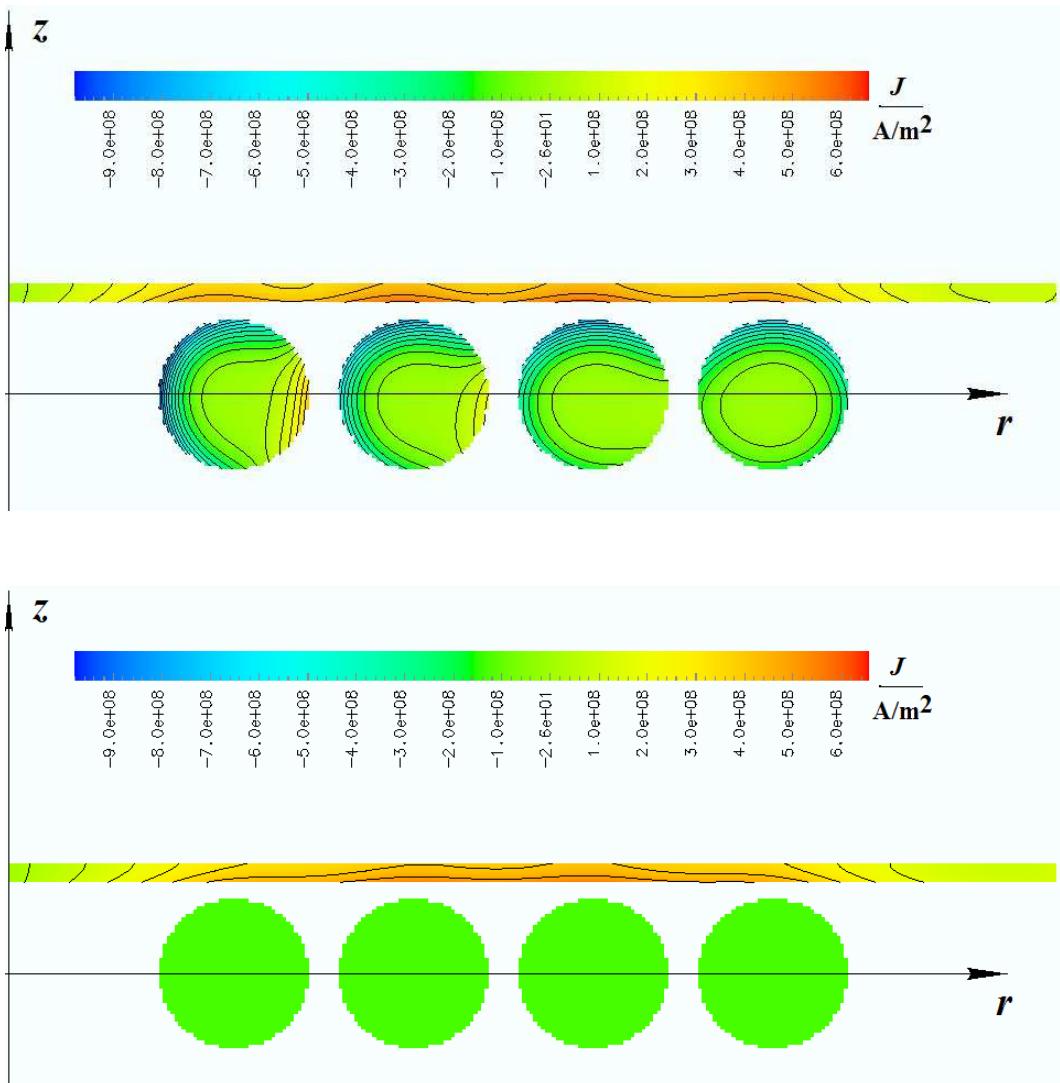


Bild 5.6: Stromdichteverteilung zu Bild 5.4 als Farbskalierung und mit Niveaulinien bei Massivleitermodellierung (oben) und Vorgabe homogener Durchflutung (unten).

5.2.6 Interpolationsanbindung der bewegten wirbelstrombehafteten Struktur

Wie zuvor erwähnt, wurden im Rahmen der Feldberechnungen zu elektromagnetischen Umformprozessen verschiedene Möglichkeiten untersucht, formveränderliche, elektrisch leitfähige, bewegte Strukturen in das bestehende transiente Feldberechnungsprogramm zu integrieren.

Nachfolgend wird eine Methode vorgestellt und diskutiert, bei der die diskretisierte, bewegte Struktur wie in Bild 5.7 auf ein bestehendes Grundgitternetz aufgelegt wird. Die Vektorpotentialwerte dieses Aufsatzgitters werden über Interpolationsgleichungen mit denjenigen des Grundgitters in Beziehung gesetzt. In Bild 5.7 sind die modifizierten Vektorpotentiale $\Phi'_{b,1\dots4}$ in den Ecken einer exemplarischen Grundgitterzelle und der in ihr gelegene Aufsatzgitterpunkt mit modifiziertem Vektorpotential $\Phi'_{M,0}$ aufgeführt. Im Gegenzug wird die in dem Aufsatzgitter induzierte StromdichteVerteilung, die als zu den Knoten des Aufsatzgitters gehörende Durchflutungen in Erscheinung treten, auf die Knoten des Grundgitters umgerechnet. Das sich ergebende Gleichungssystem beinhaltet zusätzlich zu den Gleichungen für die Vektorpotentialwerte des Grundgitters und die Zweiggrößen des externen Netzwerkes sowie der Wicklungs- und Massivleiter auch Gleichungen für diese Knotendurchflutungen des Aufsatzgitters. Die Vektorpotentialwerte des Aufsatzgitters treten dagegen nicht auf, sondern werden zuvor eliminiert.

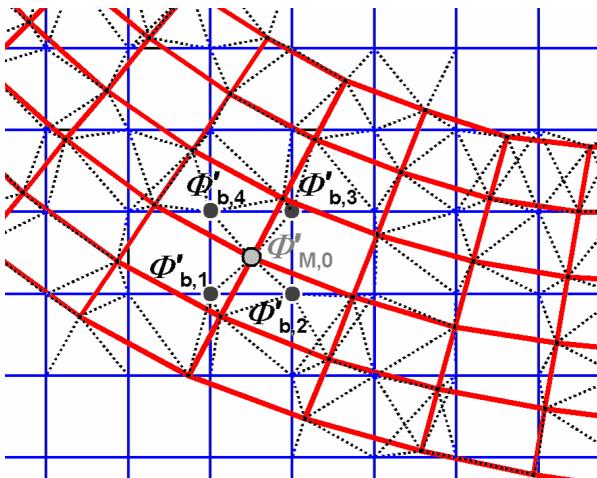


Bild 5.7:

Ausschnitt aus Grundgitter mit Aufsatzgitter (hellgrau) und Interpolationsbeziehungen zwischen Punkten von Grund- und Aufsatzgitter (punktige Linien).

Die Interpolationsgleichungen für die Vektorpotentialwerte des Aufsatzgitters haben die Gestalt von Linearkombinationen der Vektorpotentiale der jeweils beteiligten Grundgitterzelle:

$$\Phi'_{M,0} = \sum_{n=1}^4 \beta_{0,n} \cdot \Phi'_{b,n} \quad (5.24)$$

Die Interpolationskoeffizienten bestimmen sich aus der Position des Knotens $(r_{M,0}, z_{M,0})$ im Aufsatzgitter innerhalb der zugehörigen Grundgitterzelle mit den Eckknotenpositionen $(r_{k...k+1}, z_{i...i+1})$ gemäß folgender Gleichung:

$$\beta_{0,n} = \frac{1}{V'} |r_{k+\Delta k} - r_{M,0}| (r_{k+\Delta k} + r_{M,0}) |z_{i+\Delta i} - z_{M,0}| \quad \text{mit} \quad V' = (r_{k+1} - r_k)(r_{k+1} + r_k)(z_{i+1} - z_i)$$

und $\Delta k = \begin{cases} 1 & \text{für } n=1 \text{ or } n=4 \\ 0 & \text{für } n=2 \text{ or } n=3 \end{cases}$, $\Delta i = \begin{cases} 1 & \text{für } n \leq 2 \\ 0 & \text{für } n \geq 3 \end{cases}$

(5.25)

Für den hier ausschließlich betrachteten Fall, dass nur kurzgeschlossene bewegliche Strukturen in Betracht gezogen werden, treten keine äußeren Spannungsquellen auf. Daher hängen die induzierten Knotenströme im Aufsatzgitter nur von den Änderungsgeschwindigkeiten der modifizierten Vektorpotentiale ab. Für jeden Knoten des Aufsatzgitters kann eine Gleichung für den induzierten Knotenstrom $I_{M,0}$ durch Approximation des Flächenintegrals der Stromdichte über die an den Knoten grenzende wirksame Fläche $\tilde{a}_{M,0}$ angegeben werden. Bei ausreichend feiner Diskretisierung kann diese Fläche mit der geometrischen Fläche gleichgesetzt werden, die sich aus den Seitenhalbierungslinien in den angrenzenden Zellen des Aufsatzgitters ergibt.

$$i_{M,0} = - \iint_{a_{M,0}} \frac{\gamma}{r} \cdot \frac{d}{dt} \Phi_M' dr dz \approx - \frac{d}{dt} \Phi_{M,0}' \iint_{a_{M,0}} \frac{\gamma}{r} dr dz = - \frac{\gamma}{r_{M,0}} \tilde{a}_{M,0} \frac{d}{dt} \Phi_{M,0}' =$$

$$= - \frac{\gamma}{r_{M,0}} \tilde{a}_{M,0} \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^4 \beta_{0,n} \cdot \Phi_{b,n}'$$
(5.26)

Eine exakte Berechnung des Leitwertes G' eines Kreisringsegmentes mit polygonal berandeter Querschnittfläche, wie in Kap. 7.2 beschrieben, d. h. vorliegend mit vier- bis achteckiger Querschnittfläche, wäre zwar denkbar, würde aber die Genauigkeit des Verfahrens bei ausreichender radialer Diskretisierung nur unwesentlich verbessern.

Die Auswertung der totalen Ableitung des modifizierten Vektorpotentials, d. h. der Flussfunktion, bedingt, dass sowohl transformatorische wie auch generatorische Induktionswirkungen berücksichtigt werden und der Term $\vec{v} \times \vec{B}$ explizit nicht auftritt.

Im Bewegungsfall sind die Knotenkoordinaten und auch die wirksamen knotenadjazenten Flächen Funktionen der Zeit und unterliegen der Diskretisierung nach der θ -Methode. Deren Anwendung auf (5.26) liefert somit:

$$- \sum_{n=1}^4 \beta_{0,n} \Big|_{t+h} \Phi_{b,n}' \Big|_{t+h} - (1-\theta)h \frac{r_{M,0} \Big|_{t+h}}{\gamma \tilde{a}_{M,0} \Big|_{t+h}} i_{M,0} \Big|_{t+h} =$$

$$= - \sum_{n=1}^4 \beta_{0,n} \Big|_t \Phi_{b,n}' \Big|_t + \frac{\theta h r_{M,0} \Big|_t}{\gamma \tilde{a}_{M,0} \Big|_t} i_{M,0} \Big|_t = - \Phi_{M,0}' \Big|_t + \frac{\theta h r_{M,0} \Big|_t}{\gamma \tilde{a}_{M,0} \Big|_t} i_{M,0} \Big|_t$$
(5.27)

Die Ströme, die im Aufsatzgitter als induzierte Ströme auftreten, müssen zur Auswertung des Durchflutungsgesetzes bei der Aufstellung des gesamten Gleichungssystems für die Knoten des Grundgitters auf diese zurückverteilt werden, da im Aufsatzgitter selbst das Durchflutungsgesetz nicht angewendet wird. Die Teilbeiträge der zu den Aufsatzgitterknoten gehörenden Ströme $i_{M,0}$ zu den Knotendurchflutungen der unterliegenden Grundgitterknoten können in einer reziproken Weise entsprechend den Interpolationskoeffizienten β bestimmt werden.

$$\Delta I_{b,n} = \beta_{0,n} \cdot i_{M,0} \quad (5.28)$$

Fasst man also die Interpolationskoeffizienten in einer Matrix (β) zusammen und die modifizierten Vektorpotentiale des Aufsatzgitters in einem Vektor (Φ'_M) , der sich als Produkt der Matrix (β) mit dem Vektor der Grundgitterpotentiale (Φ'_b) ergibt, dann können die rückverteilten Knotendurchflutungen zu den unterliegenden Grundgitterknoten durch Multiplikation mit der transponierten Matrix gewonnen werden:

$$(I_b) = (\beta)^T \cdot (i_M) \quad (5.29)$$

Die Knotenstromgleichungen des Aufsatzgitters (5.27) werden als zusätzlicher Block an das bereits bestehende Gleichungssystem angehängt. Die Struktur des resultierenden Gesamtgleichungssystems mit allen Optionen ist in Bild 5.8 dargestellt. Die Matrix (α) bezeichnet dabei die Reluktanzmatrix gemäß den Koeffizientengleichungen (5.12) einschließlich der Ergänzungen um die Leitfähigkeitsterme nach (5.21) in den wirbelstrombehafteten Teilgebieten des Grundgitters. Über $(F_N)^T$ werden Knotendurchflutungsanteile eingekoppelt, die sich in den Wicklungsgebieten aus den Wicklungsströmen i_w ergeben. In einem nachfolgenden Block von Gleichungen dient die Matrix (F_N) zur Berechnung der Flussverkettungen der verteilten, homogen durchfluteten Wicklungen im Rahmen der Auswertung der Spannungsgleichungen der Wicklungen (5.16). Die Matrix $(F_\gamma)^T$ koppelt die in (5.21) auftretenden Spannungen $u_{ex,m}$ der extern gespeisten Massivleiter in die Feldgleichungen ein. Umgekehrt tritt die nicht transponierte Matrix (F_γ) bei der Bestimmung der Massivleiterströme nach (5.23) im Gleichungssystem auf. Über $(\beta)^T$ werden schließlich wie in (5.29) angegeben die Knotendurchflutungen des Aufsatzgitters in das Grundgitter projiziert. Die Matrix der Interpolationskoeffizienten (β) dient in den Knotenstromgleichungen des Aufsatzgitters (5.27), in denen das Induktionsgesetz für das Aufsatzgitter ausgewertet wird, als Berechnungsgrundlage für die Vektorpotentiale der Aufsatzgitterknoten aus den Potentialwerten des Grundgitters.

(α)	(0)	(0)	$(F_N)^T$	$(F_\gamma)^T$	$(\beta)^T$	(Φ_b')	(b_1)
(0)	$(N_{i,i})$	$(N_{i,u})$	(K_I)	(0)	(0)	(i_n)	$(b_{u,n})$
(0)	$(N_{u,i})$	$(N_{u,u})$	(0)	(K_U)	(0)	(u_n)	$(b_{i,n})$
(F_N)	(0)	(C_U)	(D_w)	(0)	(0)	(i_w)	(b_w)
(F_γ)	(C_I)	(0)	(0)	(D_γ)	(0)	(u_{ex})	(b_{ex})
(β)	(0)	(0)	(0)	(0)	(D_M)	(i_M)	(b_M)

Bild 5.8: Schematische Darstellung des gesamten Gleichungssystems mit allen wesentlichen Matrizen, der Struktur des Lösungsvektors und der rechten Seite.

Unmittelbar unter den Feldgleichungen sind die Netzwerkgleichungen externer Schaltungselemente ohne Kopplung zum Feldproblem gegeben. Die Matrizen $(N_{i,i})$ $(N_{i,u})$ $(N_{u,i})$ und $(N_{u,u})$ resultieren hierbei aus den Zweipolbeziehungen der externen Schaltungselemente sowie aus den Kirchhoff'schen Gesetzen, d. h. Knotenstrombilanzen und Maschenumläufen. Innerhalb der letztgenannten Beziehungen treten als Zweipolelemente auch die verteilten Wicklungen und Massivleiter auf. Die Inzidenzmatrizen (K_I) und (K_U) koppeln folgerichtig die Wicklungsströme und die Massivleiterspannungen in die Bilanzgleichungen des Netzwerkes ein. Reduzierende Netzwerkanalyseverfahren werden wegen des erwarteten geringfügigen Vorteils angesichts der hohen Zahl von Feldgleichungen nicht angewandt.

Die Massivleiterströme i_m sind in dem Vektor der Netzelementströme (i_n) aufgeführt, wie auch umgekehrt die Wicklungsspannungen u_w im Vektor der Netzelementspannungen (u_n) enthalten sind. Diese Bestandteile der Netzgrößenvektoren werden über die Matrizen (C_U) und (C_I) in die zum Feldproblem verknüpfenden Zweipolgleichungen der Wicklungs- und Massivleiterzweige (5.16) und (5.23) eingekoppelt. Diese sind unmittelbar im Anschluss an die Netzwerkgleichungen der externen, nicht feldverknüpften Netzwerkgleichungen aufgeführt und zuvor im Zusammenhang mit den Matrizen (F_N) und (F_γ) erwähnt worden.

Die Matrizen (D_w) , (D_γ) und (D_M) sind Diagonalmatrizen. (D_w) beinhaltet dabei die Koeffizienten, mit denen die Wicklungsströme (i_w) in die Wicklungsspannungsgleichungen eingehen. In (D_γ) befinden sich die entsprechenden Koeffizienten für die Massivleiter-

spannungen in den Massivleiterstromgleichungen, und (D_M) bringt schließlich die Knotenströme des Aufsatzgitters in die zugehörigen Gleichungen ein.

Die Auflösung des Gleichungssystems nach den Feld- und Zweiggrößen zum Zeitpunkt $t+h$ wird prinzipiell direkt mit Hilfe eines zeilenorientierten Gaussalgorithmus vorgenommen, wobei partikulär, d. h. im Bereich der unstrukturierten Netzwerkgleichungen Pivotstrategien zum Einsatz kommen.

Im Gegensatz zu einer durchgängigen Berechnung der oberen Dreiecksmatrix von der ersten zur letzten Gleichung werden bei der Behandlung der Feldgleichungen zunächst die Einträge der Matrix $(\beta)^T$ unter Zuhilfenahme der jeweiligen Aufsatzknotenstromgleichungen eliminiert. Jeder Aufsatzknotenstrom steht mit maximal vier Knoten einer Grundgitterzelle in Beziehung. Aufgrund dieser engen Verknüpfung zwischen den Grundgitterknoten und denen des Aufsatzgitters steigt daher die Bandbreite der so behandelten Feldgleichung nur unwesentlich an. Das Auffüllen der Matrix $(\beta)^T$ mit Nichtnullelementen im Verlauf einer gewöhnlichen Auflösung des Systems ohne Vorelimination der $(\beta)^T$ -Einträge wird jedoch auf diese Weise verhindert.

Trennt man formal den Prozess der Vorelimination von dem Gesamtalgorithmus, kann man dieses Vorgehen wie folgt notieren:

Die Feldgleichungen

$$(\alpha) \cdot (\Phi_b') + (F_N)^T \cdot (i_w) + (F_\gamma)^T \cdot (u_{ex}) + (\beta)^T \cdot (i_M) = (b_1) \quad (5.30)$$

werden um den Eintrag $(\beta)^T \cdot (i_M)$ reduziert. Die Knotenstromgleichungen des Aufsatzgitters

$$(\beta) \cdot (\Phi_b') + (D_M) \cdot (i_M) = (b_M) \quad (5.31)$$

werden dazu zunächst nach (i_M) aufgelöst und danach mit $(\beta)^T$ multipliziert:

$$(\beta)^T (D_M)^{-1} (\beta) \cdot (\Phi_b') + (\beta)^T \cdot (i_M) = (\beta)^T (D_M)^{-1} \cdot (b_M) \quad (5.32)$$

Der Term $(\beta)^T \cdot (i_M)$ kann dann durch Subtraktion der modifizierten Knotenstromgleichungen (5.32) von (5.30) eliminiert werden, was die folgenden modifizierten Feldgleichungen liefert:

$$((\alpha) - (\beta)^T (D_M)^{-1} (\beta)) \cdot (\Phi_b') + (F_N)^T \cdot (i_w) + (F_\gamma)^T \cdot (u_{ex}) = (b_1) - (\beta)^T (D_M)^{-1} \cdot (b_M) \quad (5.33)$$

Das so modifizierte Gleichungssystem kann zunächst mit Ausnahme der Knotenströme des Aufsatzgitters (i_M) nach allen gesuchten Größen einschließlich der modifizierten Vektorpotentiale (Φ_b') des Grundgitters aufgelöst werden.

Um die Elimination der zwar schwach besetzten, aber unstrukturierten und breitbandigen Matrix (β) in den angehängten Knotenstromgleichungen des Aufsatzgitters zu vermeiden, werden die Ströme (i_M) durch Einsetzen der zuvor schon bestimmten Potentiale (Φ_b') direkt berechnet:

$$(i_M) = (D_M)^{-1}((b_M) - (\beta) \cdot (\Phi_b')) \quad (5.34)$$

5.2.7 Einbettung der bewegten wirbelstrombehafteten Struktur durch Neuvernetzung

Im Gegensatz zu der zuvor beschriebenen Methode mit einem regulären, orthogonalen Grundgitter und dem davon unabhängigen, überlagerten Gitter der bewegten Struktur ist es auch möglich, ein gemeinsames Netz wie in Bild 5.9 gezeigt zu generieren und das Gleichungssystem hierfür aufzustellen. Dazu werden die Zellen und Gitterpunkte des Grundgitters, die zu einem gegebenen Zeitpunkt unter dem einzubettenden Gitter der bewegten Struktur liegen, deaktiviert, d. h. von der Aufstellung des Gleichungssystems und der Berechnung von Potentialwerten ausgenommen. In Bild 5.9 sind diese Grundgitterstrecken gestrichelt dargestellt. Die hierdurch gegebene, innere Grenzkontur des aktiven Grundgitters wird mit der äußeren Kontur des Gitters der bewegten, formveränderlichen Struktur in ähnlicher Weise verbunden, wie dies für die Simulation eines Luftspaltes einer rotierenden elektrischen Maschine geschieht.

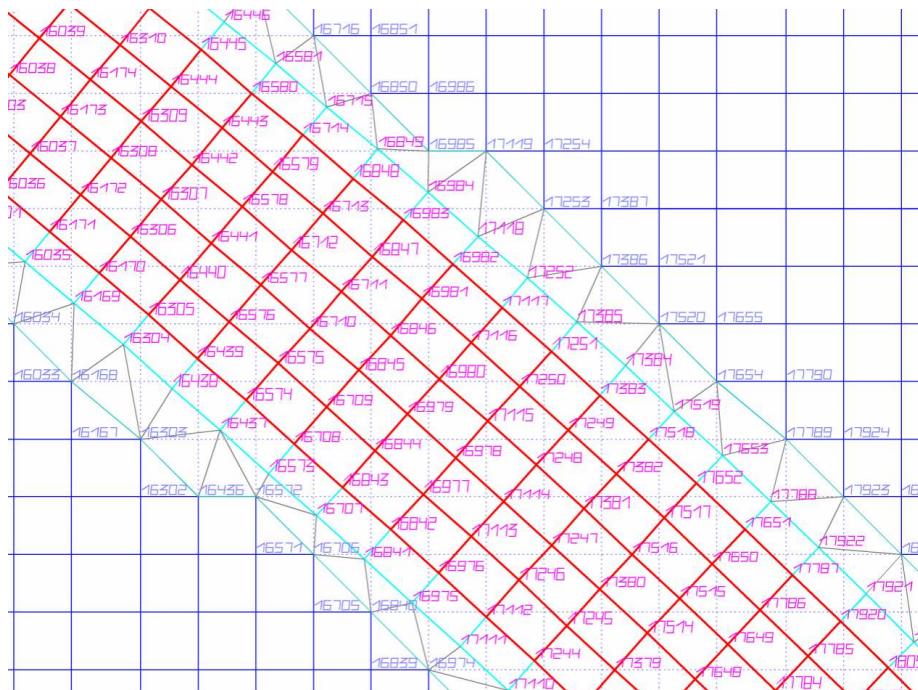


Bild 5.9: Formveränderliches, in orthogonales Grundgitter eingebettetes Einsatznetz mit Anbindung an Grundgitter über Dreieckszellen und angedeuteter fünfstelliger Knotenindizierung der Grundgitterkonturknoten und Einsatzgitterknoten.

Die durch die Verbindung der beiden Konturen definierten Dreieckszellen erfordern eine spezielle Behandlung, weil die in (5.12) angegebenen Koeffizienten der Differenzengleichungen (5.11) nur für Orthogonalgitter, d. h. Rechteckzellen, gelten. Auch für die nicht radial und axial ausgerichteten Viereckszellen der bewegten Struktur mit grundsätzlich nicht-orthogonalen Kanten müssen spezielle Gleichungen aufgestellt werden. Diese Gleichungen werden wie in Kap. 4 beschrieben durch Auswertung des Durchflutungsgesetzes gewonnen.

Für die Koeffizientenbeiträge, die in Dreieckszellen anfallen, kann die nachfolgende Überlegung angestellt werden. Für den Verlauf der Flussfunktion, des modifizierten Vektorpotentials Φ' , bietet sich eine Funktion mit linearer Abhängigkeit in z und quadratischer Abhängigkeit in r^2 an:

$$\Phi'(r, z) = c_0 + c_r r^2 + c_z z \quad (5.35)$$

Für die Flussdichte in der Gitterzelle gilt:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= B_r \vec{e}_r + B_z \vec{e}_z = \text{rot}(A_\phi(r, z) \vec{e}_\phi) = \text{rot}\left(\frac{1}{r} \Phi'(r, z) \vec{e}_\phi\right) = \frac{1}{r} \left(-\frac{\partial}{\partial z} \Phi' \vec{e}_r + \frac{\partial}{\partial r} \Phi' \vec{e}_z\right) = \\ &= \frac{1}{r} \left(-c_z \vec{e}_r + 2c_r r \vec{e}_z\right) = -\frac{c_z}{r} \vec{e}_r + 2c_r \vec{e}_z \end{aligned} \quad (5.36)$$

Die Konstanten c_r und c_z ergeben sich aus den Funktionswerten $\Phi'_{I, \dots, III}$ in den Knoten einer betrachteten Dreieckszelle durch Auflösung eines Gleichungssystems, das aus (5.35) durch Einsetzen der Potentiale und bekannten gegebenen Koordinaten hervorgeht:

$$c_r = \frac{(\Phi'_{II} - \Phi'_{I})(z_{III} - z_I) - (\Phi'_{III} - \Phi'_{I})(z_{II} - z_I)}{(r_{II}^2 - r_I^2)(z_{III} - z_I) - (r_{III}^2 - r_I^2)(z_{II} - z_I)}, \quad c_z = -\frac{(\Phi'_{II} - \Phi'_{I})(r_{III}^2 - r_I^2) - (\Phi'_{III} - \Phi'_{I})(r_{II}^2 - r_I^2)}{(r_{II}^2 - r_I^2)(z_{III} - z_I) - (r_{III}^2 - r_I^2)(z_{II} - z_I)} \quad (5.37)$$

Um die Koeffizientenbeiträge des gegebenen Dreiecks zu bestimmen, muss der Anteil zur Zirkulation der magnetischen Feldstärke \vec{H} für den im Dreieck gelegenen Teil des Integrationswegs um einen betrachteten Punkt herum berechnet werden. Anhand von (5.36) lässt sich hierzu zeigen, dass die Flussdichte innerhalb einer Zelle rotationsfrei ist und somit das zugehörige Linienintegral über \vec{B} nur vom Anfangs- und Endpunkt des Integrationswegs abhängt. Wie in Kap. 4 dargestellt sind diese Punkte die Seitenhalbierungspunkte. Bild 5.10 zeigt eine exemplarische Dreieckzelle mit den Seitenhalbierungspunkten $M_{I,II}$ und $M_{III,I}$ und dem durch die Zelle verlaufenden Teil des Integrationswegs bei Umlauf um den Knoten I. Dieser führt über den Dreieckschwerpunkt. Der gleichwertige, geradlinig von $M_{I,II}$ nach $M_{III,I}$ verlaufende Weg ist punktiert eingezeichnet.

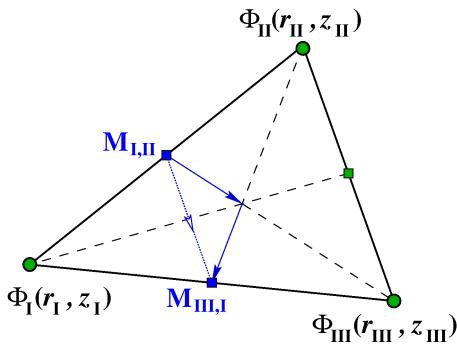


Bild 5.10:

Dreieckszelle mit Werten der Flussfunktion Φ'_I , Φ''_I und Φ'''_I in den Eckpunkten (r_I, z_I) , (r_{II}, z_{II}) und (r_{III}, z_{III}) sowie Seitenhalbierungspunkte $M_{I,II}$ und $M_{III,I}$.

Mit einer linearen Parametrisierung des geradlinigen Integrationswegs von $M_{I,II}$ nach $M_{III,I}$ und der Flussdichte nach (5.36) kann der Beitrag zur Zirkulation des Feldes um den Punkt I wie folgt angegeben werden:

$$\begin{aligned} \int_{M_{I,II}}^{M_{III,I}} \vec{H} d\vec{l} &= \frac{1}{\mu} \int_{M_{I,II}}^{M_{III,I}} \vec{B} d\vec{l} = \frac{1}{\mu} \int_{M_{I,II}}^{M_{III,I}} \left(-\frac{c_z}{r} \vec{e}_r + 2c_r \vec{e}_z \right) d\vec{l} = \\ &= \frac{1}{\mu} \int_{u=0}^1 \left(-\frac{c_z(r_{III} - r_{II})}{(r_{II} + r_I) + u(r_{III} - r_{II})} + c_r(z_{III} - z_{II}) \right) du = \frac{1}{\mu} \left(-c_z \ln \frac{r_{III} + r_I}{r_{II} + r_I} + c_r(z_{III} - z_{II}) \right) \end{aligned} \quad (5.38)$$

Die Konstanten c_r und c_z können in (5.38) mit den Ausdrücken aus (5.37) ersetzt werden. Der Term, der daraus hervorgeht, kann als Linearkombination der drei Potentialwerte Φ'_I , Φ''_I und Φ'''_I mit den Reluktanzkoeffizienten $\alpha_{I,II}$ und $\alpha_{I,III}$ wie folgt dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \int_{M_{I,II}}^{M_{III,I}} \vec{H} d\vec{l} &= -\alpha_{I,II} \Phi''_I - \alpha_{I,III} \Phi'''_I + (\alpha_{I,II} + \alpha_{I,III}) \Phi'_I \\ \text{mit } \alpha_{I,II} &= \frac{1}{\mu \Delta} \left((z_{II} - z_{III})(z_{III} - z_I) + (r_{III}^2 - r_I^2) \ln \frac{r_{II} + r_I}{r_{III} + r_I} \right) \\ \text{und } \alpha_{I,III} &= \frac{1}{\mu \Delta} \left((z_{III} - z_{II})(z_{II} - z_I) + (r_{II}^2 - r_I^2) \ln \frac{r_{III} + r_I}{r_{II} + r_I} \right), \\ \text{wobei } \Delta &= (r_{II}^2 - r_I^2)(z_{III} - z_I) - (r_{III}^2 - r_I^2)(z_{II} - z_I) \end{aligned} \quad (5.39)$$

Die Reluktanzkoeffizienten, die in die Zirkulationen um die Punkte II und III eingehen, $\alpha_{II,I}$ und $\alpha_{II,III}$ sowie $\alpha_{III,I}$ und $\alpha_{III,II}$, können durch zyklisches Hochzählen der Indizes in (5.39) errechnet werden.

Für die im Allgemeinen beliebigen Viereckszellen, die sich aus der Diskretisierung der bewegten Struktur ergeben, wird die innerhalb eines Vierecks gültige Ansatzfunktion aus vier Gleichungen des Typs (5.35) zusammengesetzt. Das Viereck wird dazu nach Bild 5.11 in vier Dreiecke unterteilt, die jeweils durch zwei Eckpunkte des Vierecks und den Schnittpunkt der Seitenhalbierenden inmitten des Vierecks gegeben sind. Dieser Schnittpunkt ist durch die

arithmetischen Mittelwerte der vier Eckpunktkoordinaten bei $r_m = (r_1 + r_2 + r_3 + r_4)/4$ und $z_m = (z_1 + z_2 + z_3 + z_4)/4$ festgelegt.

Der Beitrag zur Zirkulation von \vec{H} um einen Eckpunkt des Vierecks ergibt sich abweichend von (5.38) und Bild 5.10 über Wege, die von den jeweiligen Seitenhalbierungspunkten über den gemeinsamen Eckpunkt der vier Dreiecke, d. h. den Schnittpunkt „m“ der Seitenhalbierenden, geführt werden, wie in Bild 5.11 angedeutet. Die Seitenhalbierungspunkte sind dort mit $M_{1,2}$, $M_{2,3}$, $M_{3,4}$ und $M_{4,1}$ bezeichnet. Das Bild zeigt mit Pfeilen auch den durch das Viereck verlaufenden Teil des Integrationswegs für den Umlauf um Punkt 1. Dieser führt über den Schnittpunkt „m“ der Seitenhalbierenden, wo der interpolierte Potentialwert Φ'_m angenommen wird.

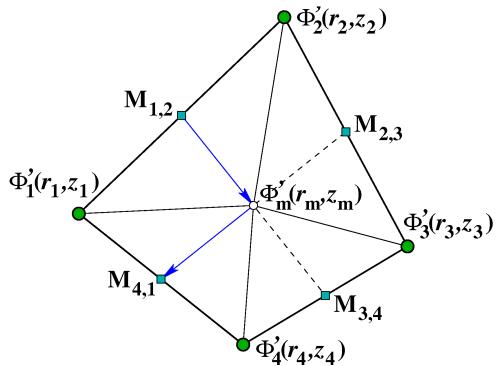


Bild 5.11:

Viereckszelle mit Unterteilung in Dreieckszellen und Werten der Flussfunktion $\Phi'_{1\dots 4}$ in den Eckpunkten $(r_{1\dots 4}, z_{1\dots 4})$.

Für ein Dreieck mit den Eckpunkten a , „m“ und e ergibt sich der Beitrag zur Zirkulation entlang der Strecke $\overline{M_{e,a}, m}$ zu:

$$\begin{aligned} \int_{M_{e,a}}^m \vec{H} d\vec{l} &= \frac{1}{\mu} \int_{M_{e,a}}^m \vec{B} d\vec{l} = \frac{1}{\mu} \int_{u=0}^1 \left(-\frac{c_{z,a,e}(2r_m - (r_a + r_e))}{(r_a + r_e)(1-u) + 2r_m u} + c_{r,a,e}(2z_m - (z_a + z_e)) \right) du = \\ &= \frac{1}{\mu} \left(-c_{z,a,e} \ln \frac{2r_m}{r_a + r_e} + c_{r,a,e}(2z_m - (z_a + z_e)) \right) \end{aligned} \quad (5.40)$$

Hierbei bezeichnen $c_{z,a,e}$ und $c_{r,a,e}$ die in dem Dreieck mit den Außenpunkten Nr. a und Nr. e gültigen Koeffizienten der Ansatzfunktion, die analog zu (5.37) zu bestimmen sind. Das Einsetzen dieser Koeffizienten in (5.40) und Sortieren nach den Potentialwerten liefert:

$$\begin{aligned} \int_{M_{e,a}}^m \vec{H} d\vec{l} &= \frac{1}{\mu \Delta_{a,e}} \left((r_a^2 - r_m^2) \ln \frac{2r_m}{r_a + r_e} + (z_a - z_m)(2z_m - (z_a + z_e)) \right) \Phi'_e + \\ &\quad + \frac{1}{\mu \Delta_{a,e}} \left((r_m^2 - r_e^2) \ln \frac{2r_m}{r_a + r_e} + (z_m - z_e)(2z_m - (z_a + z_e)) \right) \Phi'_a + \\ &\quad + \frac{1}{\mu \Delta_{a,e}} \left((r_e^2 - r_a^2) \ln \frac{2r_m}{r_a + r_e} + (z_e - z_a)(2z_m - (z_a + z_e)) \right) \Phi'_m \end{aligned} \quad (5.41)$$

mit $\Delta_{a,e} = (r_e^2 - r_m^2)(z_a - z_m) - (r_a^2 - r_m^2)(z_e - z_m)$

Weganteile, die in entgegengesetzter Richtung, also vom mittleren Punkt „m“ zu einem Seitenhalbierungspunkt $M_{e,a}$, durchlaufen werden, gehen vorzeichenverkehrt ein.

Der Schnittpunkt „m“ der Seitenhalbierenden wird nicht als Punkt des Gitters betrachtet. Sein Potentialwert soll nicht als zusätzliche Unbekannte in das Gesamtgleichungssystem eingehen. Um die Koeffizientenbeiträge zu den Systemgleichungen berechnen zu können, muss also zusätzlich ein Interpolationsausdruck für den Potentialwert Φ'_m in Abhängigkeit der Potentialwerte $\Phi'_{1,\dots,4}$ der Ecken des betrachteten Vierecks bestimmt werden, der in die Zirkulationsbeiträge nach (5.41) einzusetzen ist. Dieser Interpolationsausdruck hat die Form

$$\Phi'_m = \frac{1}{\sum_{n=1}^4 c_n} \sum_{n=1}^4 c_n \Phi'_n = \sum_{n=1}^4 \kappa_n \Phi'_n \quad (5.42)$$

Die Koeffizienten c_n in (5.42) werden dabei durch Auswertung des Durchflutungsgesetzes auf einem infinitesimalen Weg um den Punkt „m“ herum durch die vier angrenzenden Dreiecke gewonnen. Da dieser Weg grenzwertig eine Fläche von Null umschließt, ergeben sich unter der Voraussetzung einer nichtsingulären StromdichteVerteilung eine Durchflutung und damit eine Zirkulation von Null. Die Linearkombination der Potentialwerte $\Phi'_{1\dots 4}$ und Φ'_m , die also Null ergibt, kann dann nach Φ'_m aufgelöst und in die Form (5.42) gebracht werden. Für den Koeffizienten c_1 zum Potential des Punktes 1 erhält man dabei z. B. den folgenden Ausdruck:

$$c_1 = \frac{1}{\Delta_{2,1}} \left(\frac{r_2^2 - r_1^2}{2r_m^2} (r_2^2 - r_m^2) + 2(z_2 - z_1)(z_2 - z_m) \right) + \frac{1}{\Delta_{1,4}} \left(\frac{r_4^2 - r_1^2}{2r_m^2} (r_4^2 - r_m^2) + 2(z_4 - z_1)(z_4 - z_m) \right) \quad (5.43)$$

Die übrigen Ausdrücke $c_{2\dots 4}$ erhält man durch zyklisches Hochzählen der Indizes 1 bis 4.

Mit den vorangegangenen Ausführungen ergibt sich für den Beitrag zur Zirkulation von \vec{H} um den Punkt 1 des betrachteten Vierecks die umseitig aufgeführte Gleichung. In diese gehen im allgemeinen Fall die Potentialwerte aller Ecken ein. In (5.44) erscheinen die Koeffizienten $\kappa_{1\dots 4}$ aus (5.42) symbolisch eingesetzt. Aus der Sortierung nach den Potentialwerten können die Reluktanzkoeffizienten $\alpha_{1,1\dots 4}$ abgelesen werden, die als Beiträge der betrachteten Gitterzelle zu den Koeffizienten des Gleichungssystems für die Gleichung des Punktes 1 eingehen. Die Reluktanzkoeffizienten $\alpha_{2\dots 4,1\dots 4}$, d. h. die Beiträge der Gitterzelle zu den Koeffizienten der Gleichungen für die übrigen Eckpunkte können durch zyklisches Hochzählen der Indizes gewonnen werden.

$$\begin{aligned}
 & \int_{M_{1,2}}^{\text{M}_{4,1}} \vec{H} d\vec{l} = \int_{M_{1,2}}^m \vec{H} d\vec{l} - \int_{M_{4,1}}^m \vec{H} d\vec{l} = \\
 &= \frac{1}{\mu \Delta_{2,1}} \left((r_2^2 - r_m^2) \ln \frac{2r_m}{r_2 + r_1} + (z_2 - z_m)(2z_m - (z_2 + z_1)) \right) \boldsymbol{\Phi}'_1 + \\
 &+ \frac{1}{\mu \Delta_{2,1}} \left((r_m^2 - r_1^2) \ln \frac{2r_m}{r_2 + r_1} + (z_m - z_1)(2z_m - (z_2 + z_1)) \right) \boldsymbol{\Phi}'_2 + \\
 &+ \frac{1}{\mu \Delta_{2,1}} \left((r_1^2 - r_2^2) \ln \frac{2r_m}{r_2 + r_1} + (z_1 - z_2)(2z_m - (z_2 + z_1)) \right) \sum_{n=1}^4 \kappa_n \boldsymbol{\Phi}'_n + \\
 &+ \frac{1}{\mu \Delta_{1,4}} \left((r_m^2 - r_1^2) \ln \frac{2r_m}{r_1 + r_4} + (z_m - z_1)(2z_m - (z_1 + z_4)) \right) \boldsymbol{\Phi}'_4 + \\
 &+ \frac{1}{\mu \Delta_{1,4}} \left((r_4^2 - r_m^2) \ln \frac{2r_m}{r_1 + r_4} + (z_4 - z_m)(2z_m - (z_1 + z_4)) \right) \boldsymbol{\Phi}'_1 + \\
 &+ \frac{1}{\mu \Delta_{1,4}} \left((r_1^2 - r_4^2) \ln \frac{2r_m}{r_1 + r_4} + (z_1 - z_4)(2z_m - (z_1 + z_4)) \right) \sum_{n=1}^4 \kappa_n \boldsymbol{\Phi}'_n = \\
 &= \left[\frac{1}{\mu \Delta_{2,1}} \left((r_2^2(1 - \kappa_1) + r_1^2 \kappa_1 - r_m^2) \ln \frac{2r_m}{r_2 + r_1} + (z_2(1 - \kappa_1) + z_1 \kappa_1 - z_m)(2z_m - (z_2 + z_1)) \right) + \right. \\
 &+ \frac{1}{\mu \Delta_{1,4}} \left((r_4^2(1 - \kappa_1) + r_1^2 \kappa_1 - r_m^2) \ln \frac{2r_m}{r_1 + r_4} + (z_4(1 - \kappa_1) + z_1 \kappa_1 - z_m)(2z_m - (z_1 + z_4)) \right] \boldsymbol{\Phi}'_1 + \\
 &+ \left[\frac{1}{\mu \Delta_{2,1}} \left((r_m^2 - r_1^2(1 - \kappa_2) - r_2^2 \kappa_2) \ln \frac{2r_m}{r_2 + r_1} + (z_m - z_1(1 - \kappa_2) - z_2 \kappa_2)(2z_m - (z_2 + z_1)) \right) + \right. \\
 &+ \frac{\kappa_2}{\mu \Delta_{1,4}} \left((r_1^2 - r_4^2) \ln \frac{2r_m}{r_1 + r_4} + (z_1 - z_4)(2z_m - (z_1 + z_4)) \right] \boldsymbol{\Phi}'_2 \\
 &+ \left[\frac{\kappa_3}{\mu \Delta_{2,1}} \left((r_1^2 - r_2^2) \ln \frac{2r_m}{r_2 + r_1} + (z_1 - z_2)(2z_m - (z_2 + z_1)) \right) + \right. \\
 &+ \frac{\kappa_3}{\mu \Delta_{1,4}} \left((r_1^2 - r_4^2) \ln \frac{2r_m}{r_1 + r_4} + (z_1 - z_4)(2z_m - (z_1 + z_4)) \right] \boldsymbol{\Phi}'_3 + \\
 &+ \left[\frac{1}{\mu \Delta_{1,4}} \left((r_m^2 - r_1^2(1 - \kappa_4) - r_4^2 \kappa_4) \ln \frac{2r_m}{r_1 + r_4} + (z_m - z_1(1 - \kappa_4) - z_4 \kappa_4)(2z_m - (z_1 + z_4)) \right) + \right. \\
 &+ \frac{\kappa_4}{\mu \Delta_{2,1}} \left((r_1^2 - r_2^2) \ln \frac{2r_m}{r_2 + r_1} + (z_1 - z_2)(2z_m - (z_2 + z_1)) \right] \boldsymbol{\Phi}'_4 \\
 &= \underbrace{(\alpha_{1,2} + \alpha_{1,3} + \alpha_{1,4})}_{= \alpha_{1,1}} \boldsymbol{\Phi}'_1 - \alpha_{1,2} \boldsymbol{\Phi}'_2 - \alpha_{1,3} \boldsymbol{\Phi}'_3 - \alpha_{1,4} \boldsymbol{\Phi}'_4
 \end{aligned} \tag{5.44}$$

Es lässt sich zeigen, dass im Spezialfall orthogonaler, achsenparalleler Gitterzellen der Diagonalbeitrag, in (5.44) ist dies der Koeffizient $\alpha_{1,3}$, verschwindet und die übrigen Koeffizienten jene Form annehmen, die den Beiträgen in der anfänglich aufgeführten Gleichung (5.42) für orthogonale Gitter entsprechen. Des Weiteren ist ersichtlich, dass sich die Summe der Koeffizienten zu Null ergibt.

Die grundsätzliche Struktur des Gesamtgleichungssystems, wie sie in Bild 5.8 für die Interpolationsanbindung gezeigt ist, wird auch für die Neuvernetzungsvariante beibehalten. Die Matrix (α) beinhaltet hierbei allerdings nicht nur Reluktanzkoeffizienten, die aus den orthogonalen Anteilen des Gitters resultieren, sondern auch die soeben präsentierten Koeffizienten von Dreiecks- und Viereckszellen. Nach wie vor treten dort auch Leitfähigkeitskoeffizienten der wirbelstrombehafteten Massivleiter auf.

Für die Wirbelströme in den bewegten Strukturen werden weiterhin die Knotenstromgleichungen explizit in Analogie zu (5.27) aufgestellt, obwohl ein unmittelbares Einsetzen in die Feldgleichungen mit (α) möglich wäre. Hierbei geht jedoch statt des Interpolationsausdrucks über vier Potentialwerte nur der Potentialwert des betrachteten Knotens ein. Eine entsprechende Zeile der Matrix (β) enthält daher nur diesen einen Eintrag. Bei der Auflösung gemäß dem zuvor im Umfeld von (5.30) geschilderten Vorgehen ist daher der Aufwand reduziert und es tritt überhaupt keine Erweiterung der Bandbreite von (α) auf. Der leichte Mehraufwand bei der Elimination der zusätzlichen Gleichungen nach (5.34) gegenüber einer Lösung mit vorherigem Einsetzen der Knotenstromgleichungen in die Feldgleichungen erscheint dafür, dass diese Knotenströme anschließend als unmittelbare Ausgaben vorliegen und zur Stromdichteberechnung herangezogen werden können, gerechtfertigt.

5.2.8 Vergleich der Methoden für bewegte Strukturen anhand eines Testbeispiels

Die Interpolationsmethode wurde in [Kl03] anhand einfacher Bewegungsprofile einer relativ schlecht leitfähigen Teststruktur mit axialer Verschiebung im radialem Feld und radialer Expansionsbewegung im axialen Feld untersucht und mit einem Kettenleitermodell verglichen. Nachfolgend soll eine vergleichende Untersuchung von Interpolationsmethode und Einbettungsmethode stattfinden, wobei hinsichtlich der Feldverteilung und der Geometrievariation ein geringfügig anspruchsvollereres Beispiel gewählt wird.

Gemäß Bild 5.12 liegt in einer durch zwei Kegelmantelflächen mit senkrechtem Feldeintritt begrenzten Nut in der Nähe des Nutgrundes ein felderregender Leiter. Dieser wird über einen Vorwiderstand auf eine Gleichspannungsquelle geschaltet. Eine weitere leitfähige

Struktur ist in der Nut durch einen Kurzschlussring gegeben, der in dem Nutenquerfeld entlang der mittleren Kegelmantelfläche gemäß eines vorgegebenen Bewegungsprofils nach außen bewegt wird. Hierbei überlagern sich eine axiale Verschiebungs- und eine radiale Expansionsbewegung. Bei der Vorgabe des Bewegungsprofils und resultierenden Geschwindigkeitsfeldes wird eine Volumeninvarianz vorausgesetzt. Der Bewegungsablauf besteht wie in [Kl03] aus einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung von $10 \mu\text{s}$ Dauer, die $20 \mu\text{s}$ nach Einschaltung der Spannungsquelle einsetzt. Darauf folgt ein Intervall von $20 \mu\text{s}$ mit gleichförmiger Bewegung, worauf sich ein Verzögerungsintervall von wiederum $10 \mu\text{s}$ mit dem gleichen Beschleunigungsbetrag wie zuvor anschließt. Hierdurch gelangt der Ring in den ruhenden Endzustand.

Die Geometrie der Anordnung in Bild 5.12 ist durch Flankenöffnungswinkel der Nut von innen $\vartheta_i = 33,69^\circ$ und außen $\vartheta_a = 56,31^\circ$ bestimmt. Der Nutgrundradius liegt bei $r_i = 14,12 \text{ mm}$, der Nutaußenradius ist durch $r_a = 44,55 \text{ mm}$ gegeben. Für den Kurzschlussring gilt ein Anfangsinnenradius $r_R(0) = 14,5 \text{ mm}$ bei einer initialen radialen Ringdicke von $d(0) = 4 \text{ mm}$. Seine Bewegung kommt bei einem Endinnenradius $r_R(60 \mu\text{s}) = 34,5 \text{ mm}$ zum Stillstand. Der Ringöffnungswinkel wird mit $\Delta\vartheta_R = 19^\circ$ konstant gehalten. Die Leitfähigkeiten der kupfernen Erregerwindung und des Aluminiumringes sind als $\gamma_{Cu} = 56 \cdot 10^6 \text{ S/m}$ und $\gamma_{Al} = 25,9 \cdot 10^6 \text{ S/m}$ vorgegeben.

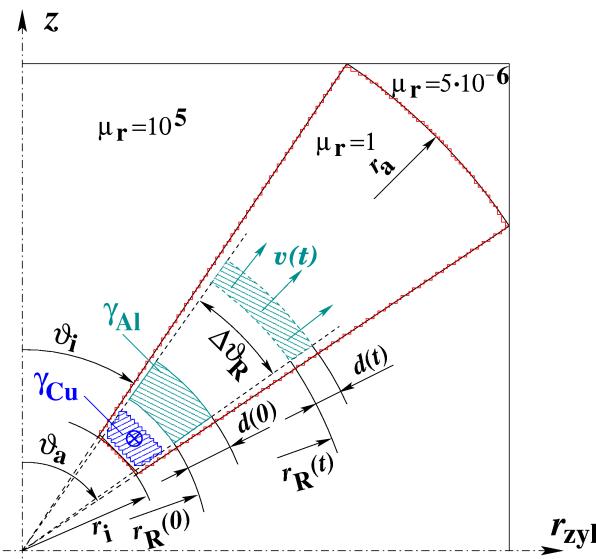


Bild 5.12:

Schema der Testanordnung mit konischer, durch Kegelmantelflächen begrenzter Nut, Erregerwindung und sphärisch expandierendem Kurzschlussring.

Die Feldverteilung kann nach Kap. 7.3 in Kugelkoordinaten bestimmt werden. Hierbei tritt unter der Voraussetzung, dass die Erregerwindung und der Kurzschlussring stets dicht an den Nutflanken liegen, näherungsweise nur eine Abhängigkeit der Flussdichte von der Radialkoordinate auf. Das Feld weist dann nur eine ϑ -Komponente auf. Als weitere Randbedingung ist dazu aber ein Abschluss des Nutkopfbereiches durch eine Feldlinie mit

konstanter radialer Kugelkoordinate r_a notwendig. Dieser kann trotz Beschränkung auf die Vorgabe eines rechteckigen Rechengebietes durch eine Definition eines künstlichen, magnetisch nahezu impermeablen Materialgebietes mit angenähert runder Kontur erzwungen werden. Auf Grundlage der analytisch bestimmbarer Feldverteilung wird in Kap. 7.3 ein Schichtenmodell und Kettenleiterersatzschaltbild hergeleitet, das an dieser Stelle als zusätzliches Referenzmodell verwendet wird.

Der Vorteil der beschriebenen Anordnung als Testbeispiel gegenüber den in [Kl03] präsentierten liegt darin, dass bei der numerischen Berechnung in Zylinderkoordinaten im Gegensatz zur analytischen Behandlung in Kugelkoordinaten gleichermaßen eine axiale wie auch eine radiale Abhängigkeit von Φ auftritt, also faktisch eine Zweidimensionalität gegeben ist. In [Kl03] wurden dagegen nur reine z -Abhängigkeiten, also Radialfelder, und r -Abhängigkeiten, d. h. Axialfelder, in getrennten Testbeispielen behandelt.

Die Ströme, die mit den unterschiedlichen Verfahren in der Erregerwindung und im Kurzschlussring berechnet werden, zeigen nach Bild 5.13 und Bild 5.14 im Wesentlichen eine gute Übereinstimmung. Hierbei liefern insbesondere das Interpolationsverfahren und das Neuvernetzungsverfahren bei dem Stromverlauf im Kurzschlussring keine ersichtliche Abweichung. Bei dem mittels Interpolationsverfahren berechneten Erregerstrom können, wie schon in [Kl03], leichte, in Bild 5.13 jedoch kaum erkennbare Oszillationen während der Bewegung des Kurzschlussringes beobachtet werden, die als Hinweis auf eine potentielle Instabilität aufgefasst werden müssen.

Der Vergleich mit dem Netzwerkschichtenmodell zeigt beim Erregerstrom eine starke Abweichung zu Beginn der Auferregung. Diese ist auf eine unzureichende Nachbildung der Erregerwindung im Netzwerkmodell mit vier äquidistanten Schichten zurückzuführen, sowie auf eine Vorgabe des Erregerquerschnittes als trapezförmig in der Feldberechnung gemäß Bild 5.12, abweichend von der analytisch vorausgesetzten kreisringsektoriellen Gestalt. Des Weiteren haben hier die Luftspalte zwischen den Durchflutungsgebieten und den Nutflanken einen Einfluss auf die Feldverteilung. Dieser ist umso stärker, je schmäler der Luftspalt zwischen Kurzschlussring und Erregerwindungsoberkante ist und je stärker die Feldänderung und damit die Schirmwirkung des Ringes ist. Deswegen treten hier die größten Abweichungen zu Beginn des Vorgangs auf.

Beim Stromverlauf im Kurzschlussring ergibt sich eine während der Bewegung zunehmende Abweichung zu den numerischen Feldberechnungen. Diese überschreitet nach Abschluss des Vorgangs jedoch ca. 5 % nicht. Sie ist ebenfalls dadurch begründet, dass das tatsächliche Feldproblem, wie es numerisch behandelt wird, nicht exakt den Voraussetzungen

des Netzwerkschichtenmodells genügt. Der Feldverlauf in unmittelbarer Nähe des Kurzschlussringes ist, wie Bild 5.15 schon für den Zeitpunkt $t = 40 \mu\text{s}$ zeigt, nicht rein tangential zur Oberfläche des Ringes. Aufgrund des unvermeidlichen Spaltes zu den Nutflanken kommt es auch zu einem seitlichen Eindringen des Feldes mit zugehörigen induzierten Stromdichten dort.

Aus dem Verlauf der Feldlinien, wie er in Bild 5.15 für die Neuvernetzungsmethode gezeigt wird, ist kaum ein Unterschied zu den Ergebnissen der Interpolationsmethode ersichtlich. Dagegen zeigen die berechneten Stromdichteveerteilungen, wie in Bild 5.16 aufgeführt, wesentliche Diskrepanzen. Während das Ergebnis der Neuvernetzungsmethode einen stetigen, physikalisch plausiblen Verlauf hat, weist die bei der Interpolationsmethode aus den Knotendurchflutungen des Kurzschlussringes bestimmte Stromdichteveerteilung starke, physikalisch nicht begründbare Verwerfungen auf. Diese deuten wiederum auf ein instabiles Verhalten hin, wie es u. a. auch bei der expliziten Integration der Wirbelstromgleichung unter Nichtberücksichtigung der Restriktionen für Orts- und Zeitdiskretisierung auftreten würde. Es ist daher des Weiteren zu erwarten, dass lokale Kraftdichteveerteilungen, wie sie für eine Kopplung zu strukturmechanischen Berechnungen benötigt werden, nicht mit ausreichender Genauigkeit bestimmt werden können.

Die beobachteten Verwerfungen in der Stromdichteveerteilung treten als räumliche Oszillationen mit alternierenden Vorzeichen von Knotenschicht zu Knotenschicht auch bei einfachen Rechtecknutanordnungen für ein unbewegtes Aufsatzgitter in Erscheinung, wenn dieses in nicht koinzidenter Weise zu den Knoten des Grundgitters ausgerichtet ist. Bei völliger Koinzidenz aller Aufsatzgitterknoten mit zugehörigen Grundgitterknoten werden dagegen Stromdichteveerteilungen mit monotonem und stetigem Eindringverhalten bei Aufmagnetisierung berechnet. Auch bei sehr schlechter Leitfähigkeit wie in [Kl03] und in der Folge geringeren transienten Stromverdrängungseffekten werden plausible Stromdichteveerteilungen – natürlich jedoch mit entsprechend niedrigerer Inhomogenität – berechnet.

Es soll an dieser Stelle jedoch nicht unerwähnt bleiben, dass Nowak und Demenko [NoD00] mit einem ähnlichen Interpolationsansatz – allerdings unter Verwendung der A-T Methode in 3D – belastbare Ergebnisse erzielen.

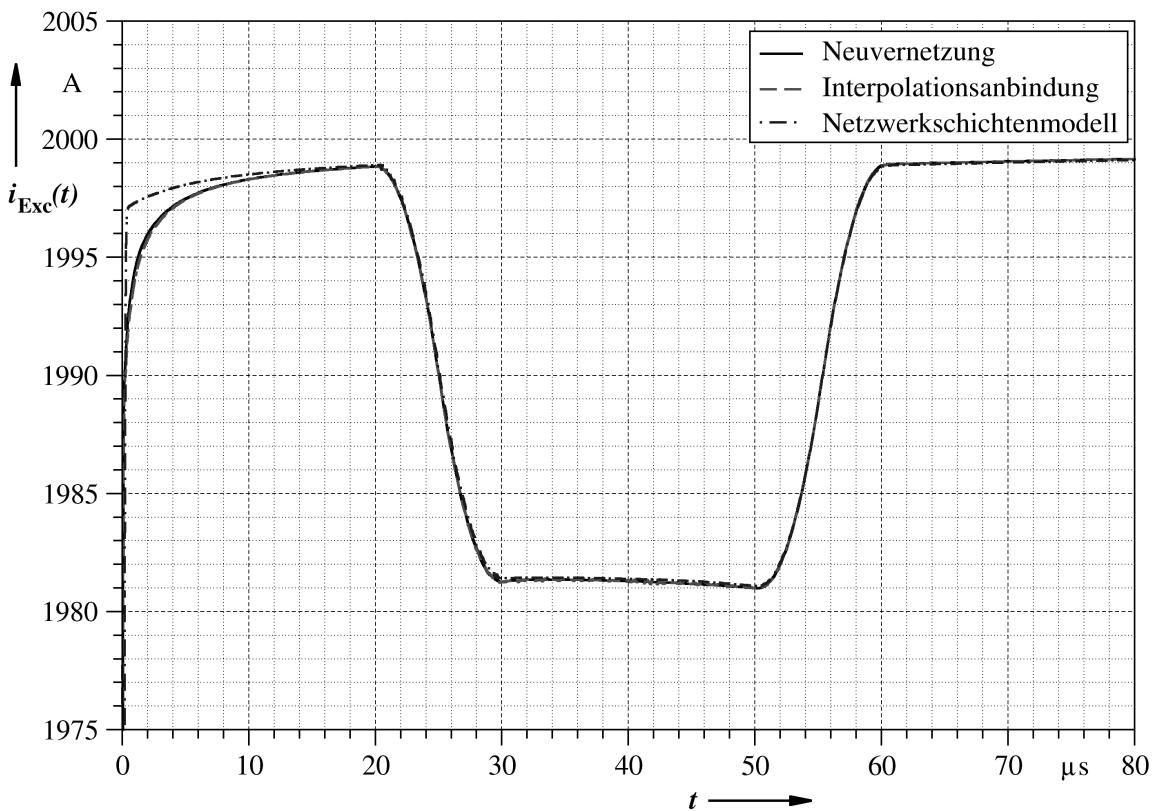


Bild 5.13: Stromverlauf in Erregerwindung nach Einschalten von $U_0 = 2 \text{ kV}$ über Vorwiderstand $R = 1 \Omega$ zum Zeitpunkt $t = 0 \mu\text{s}$. Bewegungsbeginn des Kurzschlussringes bei $t = 20 \mu\text{s}$, Bewegungsende bei $t = 60 \mu\text{s}$.

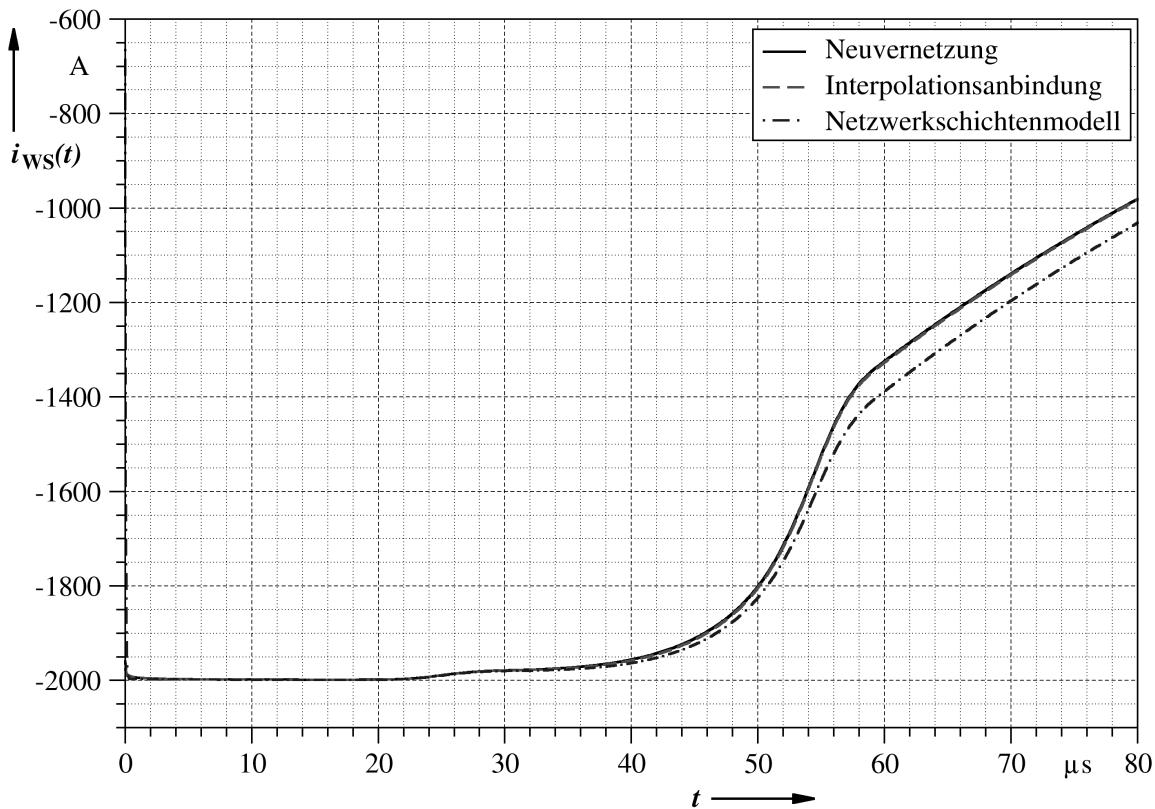


Bild 5.14: Stromverlauf in bewegtem Kurzschlussring nach Einschalten von $U_0 = 2 \text{ kV}$ über Vorwiderstand $R = 1 \Omega$ auf Erregerwindung zum Zeitpunkt $t = 0 \mu\text{s}$. Bewegungsbeginn des Kurzschlussringes bei $t = 20 \mu\text{s}$, Bewegungsende bei $t = 60 \mu\text{s}$.

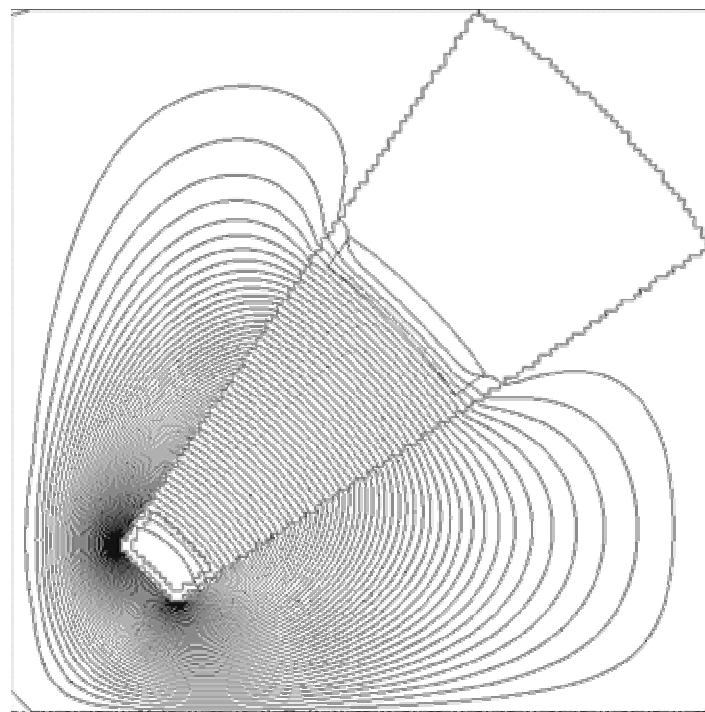


Bild 5.15: Feldbild aus numerischer Feldberechnung, hier mit Neuvernetzung, jedoch identisch zu Interpolationsanbindung, zum Zeitpunkt maximaler Geschwindigkeit $t = 40 \mu\text{s}$. Differenz der Flussfunktion zwischen Feldlinien $\Delta\Phi = 1,25 \mu\text{Wb}/\text{rad}$.

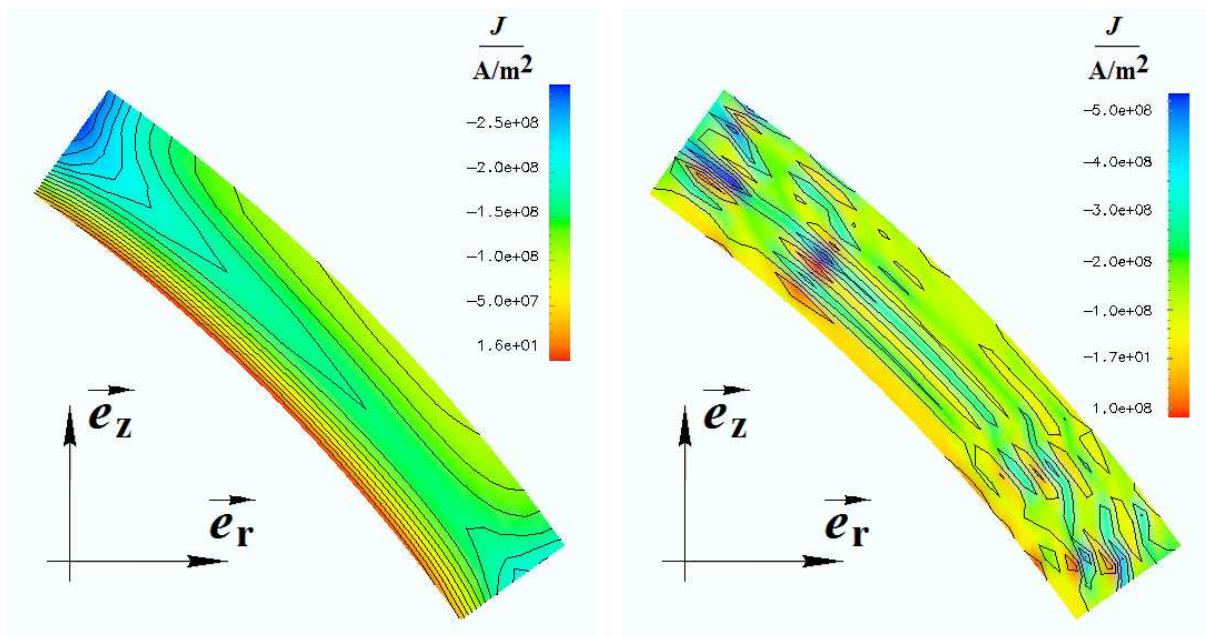


Bild 5.16: Numerisch berechnete Stromdichteveislungen im Kurzschlussring zum Zeitpunkt maximaler Geschwindigkeit $t = 40 \mu\text{s}$. Links: mit Neuvernetzung, rechts: aus Interpolationsanbindung des Kurzschlussringes.

5.2.9 Berechnung der Kraftdichteverteilung in der wirbelstrombehafteten Struktur

Das Neuvernetzungsverfahren liefert zwar eine plausible Stromdichteverteilung in der bewegten Struktur. Dennoch erscheint eine direkte Auswertung der Lorentzkraftdichte aufgrund der örtlichen Diskretisierung problematisch, da als primäre Näherungslösung des Feldproblems die Verteilung der Flussfunktion auf den Knoten des Gitters gegeben ist. Die Flussdichtekomponenten ergeben sich durch numerische Differentiation. Sie sind in den Zellen für die axiale Richtung konstant und folgen für die radiale Richtung der $1/r$ -Abhängigkeit. An den Zellengrenzen und in den Knoten sind sie im Allgemeinen unstetig. Die Stromdichtewerte sind demgegenüber durch die Knotenströme im Einsatzgitter und die Flächen der an den Knoten grenzenden Viertelzellen gegeben.

Eine unmittelbare Verwendung der Stromdichteverteilung zur Berechnung der Lorentzkräfte kann vermieden werden, wenn die Berechnung der wirksamen Knotenkräfte über eine lokale Auswertung der fiktiven Maxwell'schen Flächenspannungen auf die an einen Knoten grenzenden Viertelzellen, d. h. zugehörigen Teilvolumina erfolgt.

Der Maxwell'sche Spannungstensor ergibt sich in kartesischen Koordinaten für isotrope Medien zu:

$$\Phi = \vec{H} \mid \vec{B} - \frac{1}{2}(\vec{B} \cdot \vec{H})E = \frac{1}{2\mu} \begin{pmatrix} B_x^2 - B_y^2 - B_z^2 & 2B_x B_y & 2B_x B_z \\ 2B_x B_y & B_y^2 - B_x^2 - B_z^2 & 2B_y B_z \\ 2B_x B_z & 2B_y B_z & B_z^2 - B_x^2 - B_y^2 \end{pmatrix} \quad (5.45)$$

Drückt man hierin die kartesischen Komponenten der Flussdichte durch diejenigen in Zylinderkoordinaten aus, so erhält man:

$$\Phi = \frac{1}{2\mu} \begin{pmatrix} \frac{x^2 - y^2}{r^2} B_r^2 - B_z^2 & 2 \frac{xy}{r^2} B_r^2 & 2 \frac{x}{r} B_r B_z \\ 2 \frac{xy}{r^2} B_r^2 & \frac{y^2 - x^2}{r^2} B_r^2 - B_z^2 & 2 \frac{y}{r} B_r B_z \\ 2 \frac{x}{r} B_r B_z & 2 \frac{y}{r} B_r B_z & B_z^2 - B_r^2 \end{pmatrix} \quad (5.46)$$

Die Auswertung von $\operatorname{div} \Phi$ unter der Voraussetzung ortsunabhängiger Permeabilität führt nach längerer Zwischenrechnung unter der Verwendung von

$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$, $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$, $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r} \right) = \frac{x^2}{r^3}$, $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{r} \right) = \frac{y^2}{r^3}$ und $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ auf die Volumenkraftdichte, die mit $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}$ erwartungsgemäß als Lorentzkraftdichte identifiziert werden kann.

$$\begin{aligned}
 \vec{f}_v = \operatorname{div} \Phi &= \frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{r} (x \vec{e}_x + y \vec{e}_y) B_z \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) - \vec{e}_z B_r \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) \right) = \\
 &= \frac{1}{\mu} \left(\vec{e}_r B_z \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) - \vec{e}_z B_r \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) \right) = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot}(B_r \vec{e}_r + B_z \vec{e}_z) \times (B_r \vec{e}_r + B_z \vec{e}_z) = J_\varphi \vec{e}_\varphi \times \vec{B}
 \end{aligned} \tag{5.47}$$

Die Kraft auf ein Volumen kann also statt durch Integration der Volumenkraftdichte über das Volumen nach dem Gauss'schen Satz auch durch Integration des Spannungstensors über die Oberfläche des Volumens erfolgen.

Der Kraftbeitrag, der dabei durch ein Flächenelement einer allgemeinen Kegelmantelfläche nach Bild 5.17 aufgebracht wird, ist durch Multiplikation des Spannungstensors Φ mit dem Flächenvektor $d\vec{a}$ bestimmbar. Dieser setzt sich aus einer Radial- und einer Axialkomponente zusammen und ist in einer kartesischen Vektorbasis unter Verwendung der Zylinderkoordinaten r und φ wie folgt beschreibbar:

$$d\vec{a} = r d\varphi (dr \vec{e}_z - dz \vec{e}_r) = (r dr \vec{e}_z - x dz \vec{e}_x - y dz \vec{e}_y) d\varphi = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z) \cdot \begin{pmatrix} -\cos \varphi dz \\ -\sin \varphi dz \\ dr \end{pmatrix} r d\varphi \tag{5.48}$$

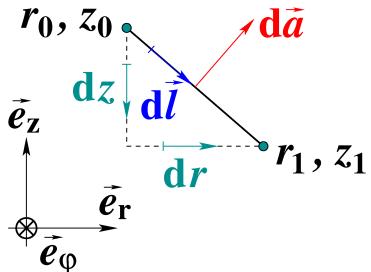


Bild 5.17:

Querschnittsfläche durch allgemeine Kegelmantelfläche mit Anfangspunkt (r_0, z_0) und Endpunkt (r_1, z_1) sowie Längen-, Koordinaten- und Flächendifferentialen

Unter Verwendung von Zylinderkoordinaten, aber unter Beibehaltung der kartesischen Basis geht der Spannungstensor aus (5.46) über in:

$$\Phi = \frac{1}{2\mu} \begin{pmatrix} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) B_r^2 - B_z^2 & 2 \sin \varphi \cos \varphi B_r^2 & 2 \cos \varphi B_r B_z \\ 2 \sin \varphi \cos \varphi B_r^2 & (\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi) B_r^2 - B_z^2 & 2 \sin \varphi B_r B_z \\ 2 \cos \varphi B_r B_z & 2 \sin \varphi B_r B_z & B_z^2 - B_r^2 \end{pmatrix} \tag{5.49}$$

Damit ergibt sich der gesuchte Kraftbeitrag zu:

$$d\vec{T} = \Phi d\vec{a} = \frac{r d\varphi}{2\mu} \begin{pmatrix} -((B_r^2 - B_z^2) dz - 2 B_r B_z dr) \cos \varphi \\ -((B_r^2 - B_z^2) dz - 2 B_r B_z dr) \sin \varphi \\ -2 B_r B_z dz + (B_z^2 - B_r^2) dr \end{pmatrix} \tag{5.50}$$

Mit einer Parametrisierung eines geradlinigen Linienstücks einer Querschnittberandung von einem Anfangspunkt (r_0, z_0) zu einem Endpunkt (r_1, z_1) , wie in Bild 5.17 skizziert, kann die Integration entlang dieser Berandung ausgeführt werden. Berücksichtigt man hierbei, dass gemäß (5.36) die Komponenten der Flussdichten in den Zellen des Einsatzgitters durch die Konstanten c_z und c_r der Ansatzfunktionen für das modifizierte Vektorpotential mittels $B_r = -c_z/r$ und $B_z = 2 c_r$ gegeben sind, so erhält man nach einer Zwischenrechnung den nachfolgenden Ausdruck:

$$\int_{(r_0, z_0)}^{(r_1, z_1)} d\vec{T} = \int_{\lambda=0}^1 d\vec{T} = \frac{1}{2\mu} \left(\begin{array}{l} \left[(z_0 - z_1) \left(\frac{c_z^2}{r_1 - r_0} \ln \frac{r_1}{r_0} - 2c_r^2(r_1 + r_0) \right) - 4c_z c_r(r_1 - r_0) \right] \cdot \begin{Bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{Bmatrix} \\ - 4c_z c_r(z_0 - z_1) + \left(2c_r^2(r_1 + r_0) - \frac{c_z^2}{r_1 - r_0} \ln \frac{r_1}{r_0} \right)(r_1 - r_0) \end{array} \right) d\varphi \quad (5.51)$$

In den Spezialfällen, in denen $r_1 \approx r_0$ gilt, ist der durch die Radiendifferenz dividierte Logarithmus durch den Kehrwert des arithmetischen Radienmittelwertes zu ersetzen, was durch Entwicklung des logarithmischen Terms um diesen Mittelwert gezeigt werden kann.

$$\int_{\lambda=0}^1 d\vec{T} = \frac{1}{2\mu} \left(\begin{array}{l} \left[(z_0 - z_1) \left(\frac{2c_z^2}{r_1 + r_0} - 2c_r^2(r_1 + r_0) \right) - 4c_z c_r(r_1 - r_0) \right] \cdot \begin{Bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{Bmatrix} \\ - 4c_z c_r(z_0 - z_1) + \left(2c_r^2(r_1 + r_0) - \frac{2c_z^2}{r_1 + r_0} \right)(r_1 - r_0) \end{array} \right) d\varphi \quad (5.52)$$

Hierdurch wird auch der unbestimmte Ausdruck 0/0 vermieden, der bei exakter Gleichheit $r_1 = r_0$ in (5.51) auftritt.

Für die weitere Berechnung der Kraft, die auf das an einen Gitterknoten P angrenzende Teilvolumen einwirkt, wird ein solches ringsektorförmiges Teilvolumen betrachtet. Im Querschnitt zeigt sich dieses als polygonale, durch $N = 8$ Eckpunkte definierte Fläche, wie in Bild 5.18 skizziert. Die Eckpunkte sind dabei zum einen durch die vier Kantenhalbierungspunkte der mit dem Knoten P verbundenen Kanten der vier angrenzenden Gitterzellen gegeben. Zum anderen treten auf dem Umlaufpfad die aus den Schnittpunkten der Kantenhalbierenden hervorgehenden Mittelpunkte der vier angrenzenden Gitterzellen auf. Die Ausdehnung in Umfangsrichtung entspricht einem Winkel α , wobei ohne Einschränkung der Allgemeinheit eine symmetrische Verteilung zur x-Achse des einbeschriebenen kartesischen Koordinatensystems gelte, d. h. $-\alpha/2 < \varphi < \alpha/2$, wie in Bild 5.19 gezeigt. Bei Nummerierung

der Eckpunkte von 0 bis $N = 8$ mit $r_0 = r_N$ und $z_0 = z_N$ gemäß Bild 5.18 kann mit (5.51) für die Beiträge der Umfangsflächen zur wirkenden Kraft die folgende Summe angegeben werden:

$$\vec{F}_U = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2\mu} \begin{pmatrix} \left[(z_i - z_{i+1}) \left(\frac{c_{z,i}^2}{r_{i+1} - r_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i} - 2c_{r,i}^2 (r_{i+1} + r_i) \right) - 4c_{z,i}c_{r,i}(r_{i+1} - r_i) \right] \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{2} \\ 0 \\ \left[-4c_{z,i}c_{r,i}(z_i - z_{i+1}) + \left(2c_{r,i}^2(r_{i+1} + r_i) - \frac{c_{z,i}^2}{r_{i+1} - r_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i} \right)(r_{i+1} - r_i) \right] \cdot \alpha \end{pmatrix} \quad (5.53)$$

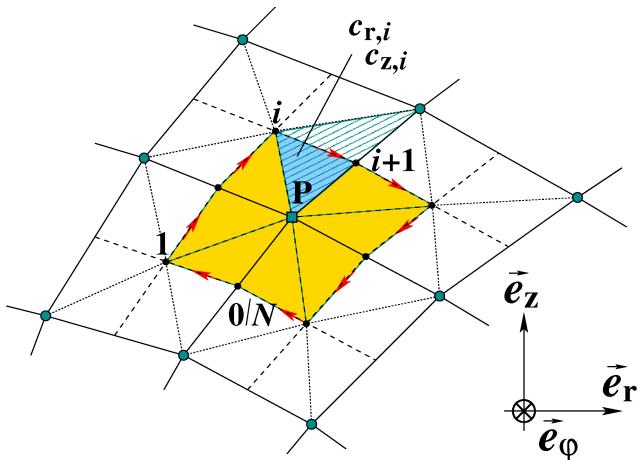


Bild 5.18:

Querschnitt durch ringsektorförmiges Volumen der an Gitterpunkt P angrenzenden Teilgitterzellen mit schraffiertem Teildreieck Nr. i und dortigen Konstanten der Ansatzfunktion $c_{r,i}$ und $c_{z,i}$.

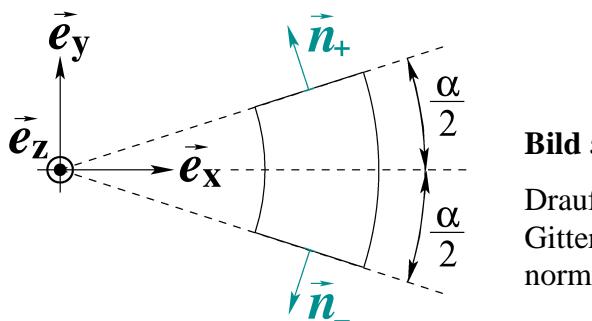


Bild 5.19:

Draufsicht auf ringsektorförmiges Volumen der an Gitterpunkt P angrenzenden Gitterzellen mit Flächennormalenvektoren der Stirnflächen.

Zusätzlich zu den Umfangsflächen des betrachteten Ringsektors müssen aber auch die Stirnflächen bei der Berechnung der wirksamen Kraft berücksichtigt werden, deren Beiträge zusätzlich eine von Null verschiedene x -Komponente zum Kraftvektor liefern. Mit den Flächennormalenvektoren $\vec{n}_{+/-}$ von vorderer und hinterer Stirnfläche nach Bild 5.19 und dem Spannungstensor nach (5.49) ergibt sich für die Stirnflächen bei $\varphi = \alpha/2$ und $\varphi = -\alpha/2$:

$$\vec{T} = \Phi \vec{n}_{+/-} = \Phi \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\alpha/2) \\ \pm \cos(\alpha/2) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\mu} \begin{pmatrix} (B_r^2 + B_z^2) \sin(\alpha/2) \\ \mp (B_r^2 + B_z^2) \cos(\alpha/2) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.54)$$

Bei Integration über beide Stirnflächen heben sich ersichtlich und anschauungsgemäß die y -Komponenten auf. Mit den Konstanten c_z und c_r ergibt sich der Kraftbeitrag beider, durch jeweils N Dreiecksflächen Q_i des Querschnitts gegebener Stirnflächen zu

$$F_{s,x} = 2 \cdot \iint_Q \frac{1}{2\mu} \left(\frac{c_z^2}{r^2} + 4c_r^2 \right) \sin \frac{\alpha}{2} dr dz = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2\mu} \left(4c_{r,i}^2 a_{Q,i} + c_{z,i}^2 \iint_{Q_i} \frac{1}{r^2} dr dz \right), \quad (5.55)$$

wobei $a_{Q,i}$ die Fläche des durch die Punkte P, i und $i+1$ bestimmten Dreiecks bezeichnet.

Die Flächenintegrale über $1/r^2$ können mit Hilfe des Stokes'schen Satzes in geschlossene Kurvenintegrale überführt werden.

$$\iint_{Q_i} \frac{1}{r^2} dr dz = \iint_{Q_i} \text{rot} \left(\frac{1}{r} \vec{e}_z \right) \cdot \vec{e}_\phi dr dz = \oint_{\partial Q_i} \frac{1}{r} \vec{e}_z \cdot d\vec{l} \quad (5.56)$$

Die Auswertung von (5.56) für die aus dem Gitterknoten P und den Umlaufpunkten i und $i+1$ gebildeten Dreiecksfläche Q_i liefert mit den Bezeichnungen aus Bild 5.19

$$\oint_{\partial Q_i} \frac{1}{r} \vec{e}_z \cdot d\vec{l} = \frac{z_i - z_p}{r_i - r_p} \ln \frac{r_i}{r_p} + \frac{z_{i+1} - z_i}{r_{i+1} - r_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i} + \frac{z_p - z_{i+1}}{r_p - r_{i+1}} \ln \frac{r_p}{r_{i+1}}, \quad (5.57)$$

wobei für die Fälle mit gleichen Radien dieselbe Grenzwertbildung wie bei (5.52) gilt.

Die Gesamtkraft \vec{F}_α auf das betrachtete Ringsektorvolumen mit der Winkelabmessung in Umfangsrichtung α ergibt sich aus der Summe der Beiträge von (5.53) und (5.55) unter Einsetzen von (5.57). In den für strukturmechanische Berechnungen vorzugebenden Lasten in Form der radialen und axialen Umfangskraftkomponenten werden die entsprechenden Komponenten auf infinitesimale Ausschnitte $d\alpha$ über den gesamten Ringumfangswinkel 2π aufsummiert. Hieraus ergeben sich die Komponenten der auf den Knoten P entfallenden Knotenkraft zu:

$$\begin{aligned} F_{K,r} &= 2\pi \frac{d}{d\alpha} (F_{U,x} + F_{S,x}) \Big|_{\alpha=0} = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\pi}{\mu} \left[2c_{r,i}^2 ((z_{i+1} - z_i)(r_{i+1} + r_i) + 2a_{Q,i}) - 4c_{z,i}c_{r,i}(r_{i+1} - r_i) + \right. \\ &\quad \left. + c_{z,i}^2 \left(\frac{z_i - z_p}{r_i - r_p} \ln \frac{r_i}{r_p} + \frac{z_p - z_{i+1}}{r_p - r_{i+1}} \ln \frac{r_p}{r_{i+1}} \right) \right], \\ F_{K,z} &= 2\pi \frac{d}{d\alpha} F_{U,z} = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\pi}{\mu} \left[4c_{z,i}c_{r,i}(z_{i+1} - z_i) + \left(2c_{r,i}^2(r_{i+1} + r_i) - \frac{c_{z,i}^2}{r_{i+1} - r_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i} \right)(r_{i+1} - r_i) \right] \end{aligned} \quad (5.58)$$

In [Stie04] und [Ros04] sind Beispiele aufgeführt, bei denen die so berechneten Knotenlasten im Rahmen einer schwach gekoppelten transienten Berechnung einer elektromagnetischen Blechumformung zu jedem Zeitschritt als Vorgaben für das strukturmechanische Teilproblem verwendet werden.

Die Gesamtkraft auf die leitfähige Struktur kann bei gleichzeitig geforderter Berechnung der einzelnen Knotenlasten in einfacher Weise aus der Summe derselben erhalten werden. Bei alleiniger Berechnung dieser Gesamtkraft wäre auch eine direkte Auswertung des gesamten Oberflächenintegrals der fiktiven Maxwell'schen Flächenspannungen unter Nichtberücksichtigung der inneren Grenzflächen zwischen benachbarten Knoten denkbar. Für den in Kap. 5.2.8 beschriebenen Vorgang ergeben sich die Verläufe dieser Summenkraft, aufgeschlüsselt in Radialkraft- und Axialkraftkomponente, gemäß den Diagrammen in Bild 5.20. Diese beinhalten zum Vergleich auch eine Näherung, die aus dem Netzwerkschichtenmodell, wie in Kap. 7.3, angegeben hergeleitet werden kann.

Der Vergleich zwischen den Ergebnissen der FD-Zeitschrittechnung und der Näherung über das Netzwerkschichtenmodell zeigt eine Abweichung von maximal ca. 5 %. Hierbei fällt insbesondere auf, dass die Radialkraft während der Aufmagnetisierungs- und Anfangsrühphase des Vorgangs in der FD-Zeitschrittechnung höher berechnet wird als in dem Schichtenmodell, das auf der als eindimensional idealisierten Feldverteilung beruht. Die Axialkräfte stimmen dagegen während dieses Zeitintervalls auf Strichstärke miteinander überein. Diese Situation kehrt sich mit Erreichen der Endrühphase um. Während nunmehr die Radialkräfte in guter Übereinstimmung miteinander liegen, unterschreitet jetzt die Axialkraft aus der FD-Zeitschrittechnung den Verlauf, der sich aus dem Netzwerkmodell ergibt.

Die Ursache für die Abweichungen der Kraftverläufe ist in der Eindimensionalität des Netzwerkschichtenmodells zu sehen, die durch die alleinige radiale Abhängigkeit des modifizierten Vektorpotentials, d. h. der Flussfunktion, bedingt ist. Dies zeigte sich bereits bei den berechneten Stromverläufen. Inhomogenitäten von Stromdichte- und Feldverteilung in Richtung des Polwinkels ϑ , die sich aus dem nichtbündigen Abschluss zwischen Nutflanken und Leiterquerschnitt des Kurzschlussringes ergeben und u. a. wegen dessen hoher Leitfähigkeit stark ausgeprägt sind, werden nur in der zweidimensionalen Feldberechnung berücksichtigt. Bei niedrigerer Leitfähigkeit des Kurzschlussringes treten gleichmäßigere, dem Netzwerkmodell eher entsprechende Stromdichte- und Feldverteilungen auf, so dass in solchen Fällen eine bessere Übereinstimmung zwischen der Näherung und der zweidimensionalen Feldberechnung erwartet werden kann. In [Kl03], wo ein Material mit der

Leitfähigkeit von Graphit für die bewegte Struktur angenommen wird, ergibt sich schon bei den Strömen eine Übereinstimmung auf Strichstärke und die Feldbilder weisen nur unmerkliche Verzerrungen auf.

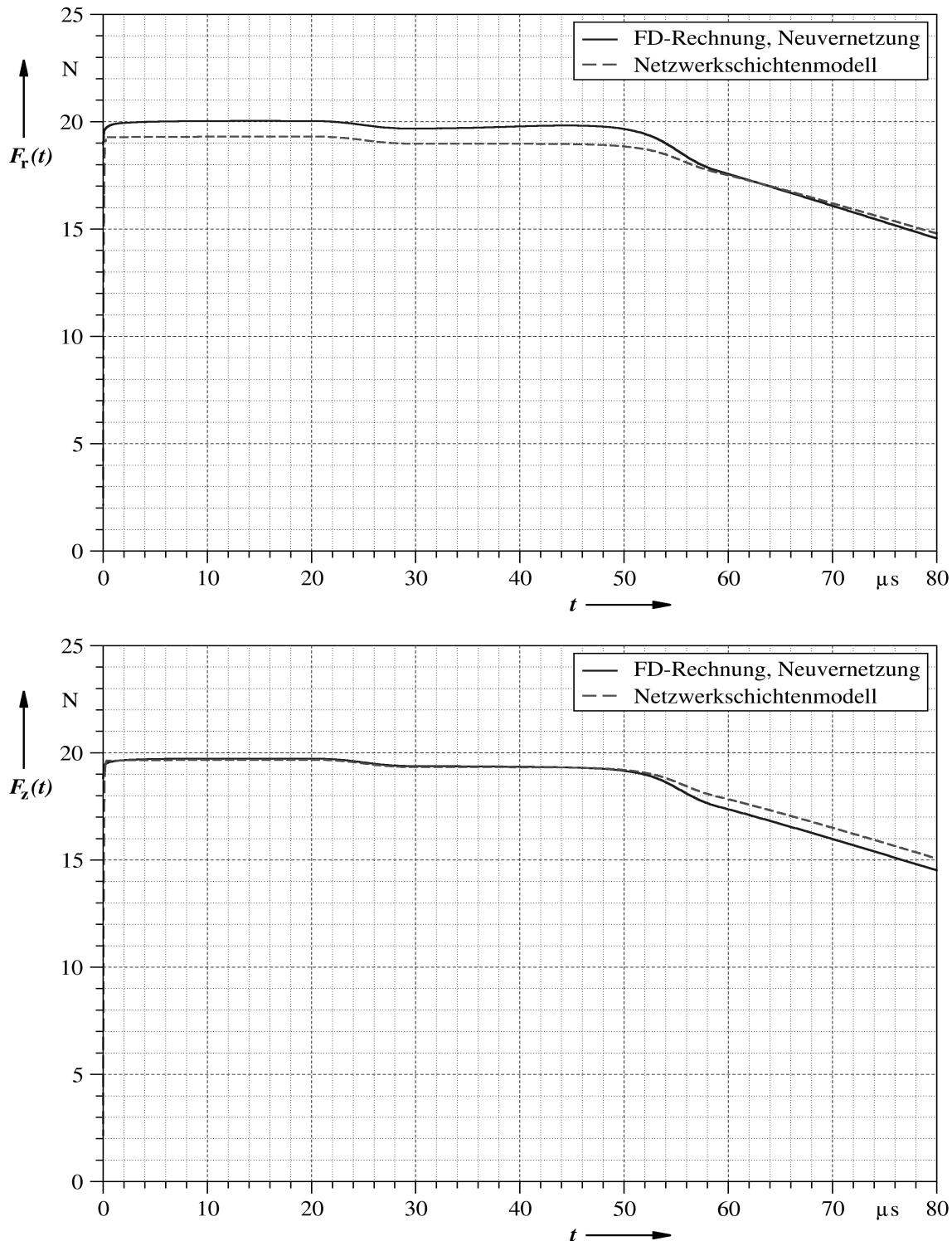


Bild 5.20: Radialkraftkomponente F_r (oben) und Axialkraftkomponente F_z (unten) bei Expansion und Axialverschiebung des Kurzschlussringes in konischer Nut nach Kap. 5.2.8.

6 Der Einsatz unterschiedlicher Programme zur Lösung spezieller Probleme

6.1 Berechnung elektromagnetischer Kräfte

6.1.1 Einseitiger magnetischer Zug infolge statischer Exzentrizität bei einem polumbaren Aufzugmotor

Eine statisch exzentrische Lagerung des Rotors in einem Asynchronmotor kann Ursache für viele unerwünschte Effekte sein. In einem Aufzugmotor, der aufgrund seiner integralen Montage an das zugehörige Getriebe einen nur einseitig gelagerten Rotor mit auf der anderen Seite freiem Wellenende hat, kann der durch die statische Exzentrizität verursachte einseitige magnetische Zug zu einer starken Durchbiegung der Welle und einem Anstreifen des Rotors in der Bohrung führen. Dies gilt insbesondere für transiente Vorgänge mit ihren Stromspitzen wie z. B. das Einschalten oder die Polumschaltung. In [Fm98] wird beschrieben, wie der einseitige magnetische Zug unter Vorgabe einer statischen Exzentrizität des Rotors in dem Programm FELMEC berechnet werden kann.

Als wesentliche Voraussetzung für eine einfache Berücksichtigung der vorzugebenden Rotorexzentrizität kann die Kombination von Dreiecksvernetzung und orthogonaler, in Polarkoordinaten definierter Vernetzung im Luftspalt genannt werden. Die Verschiebung der Rotorachse gegen die Statorachse darf die Spaltbreite zwischen den polaren Rotor- und Statornetzen im unverschobenen Zustand nicht überschreiten. Geringfügige Netzverzerrungen im Dreiecksübergangsbereich, die aufgrund der Verschiebung auftreten, sind unvermeidlich, wenn das Diskretisierungsverfahren nicht durch zusätzliche Übergangskreise mit allmählicher Anpassung der Exzentrizität und mehrere triangulare Schichten kompliziert werden soll. Der triangulare Übergang dient gleichzeitig zur Realisierung der Drehbewegung des Rotors im Programm, da er in jedem Zeitschritt neu generiert wird. In der Literatur ist dieses Vorgehen im Rahmen der FEM auch als „Moving Band Method“ [Dem96] bekannt.

Bei Aufstellung der Gleichungen durch Integralbilanzen verlaufen die Integrationspfade entlang den Linien eines dualen Gitters, das durch die Halbierungslinien gebildet wird. Die Gleichungen für Knoten im Übergangsbereich werden für die orthogonalen Anteile des Integrationspfades gemäß Kap. 5.1 und für die Seitenhalbierenden der Dreieckszellen nach Kap. 4 aufgestellt, wobei für den letzteren Fall lokale kartesische Koordinaten zugrunde gelegt werden. Bild 6.1 zeigt einen Ausschnitt aus einem zusammengesetzten Gitter im Übergangsbereich mit zwei Beispielknoten und dazugehörigen Integrationspfaden.

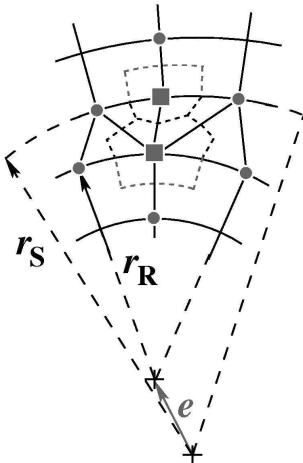


Bild 6.1:

Ausschnitt aus FD-Gitter mit exzentrischer Verschiebung des Rotor- netzes e und Übergangsnetz aus Dreiecken („Moving Band“), sowie gestrichelten Integrationspfaden für zwei Beispielknoten. Radius des Rotornetzes r_R und des Statornetzes r_S .

Die Berechnung von Kräften und Drehmomenten beruht auf einer diskreten Auswertung des fiktiven Maxwellschen Flächenspannungstensors auf zylindrischen Hüllflächen im Luft- spalt durch die Mitten der polaren Gitterzellen. Unter Zugrundelegung der Flussdichtekom- ponenten in Zylinderkoordinaten kann der Beitrag zum Kraftvektor $d\vec{F}$, der von einem Oberflächenelement da einer koaxialen zylindrischen Hüllfläche mit der Eisenlänge l_{Fe} herrührt, berechnet werden zu:

$$d\vec{F} = \vec{T} da = (\vec{\Phi} \cdot \vec{n}) ds = \frac{l_{Fe}}{\mu} \left(\frac{1}{2} (B_r^2 - B_\phi^2) \vec{e}_r + B_r B_\phi \vec{e}_\phi \right) r d\varphi = dF_r \vec{e}_r + dF_\phi \vec{e}_\phi \quad (6.1)$$

In das Drehmoment geht hierbei aus der Integration in Umfangsrichtung bezüglich der Zylinderachse nur die Umfangskomponente dF_ϕ ein:

$$\vec{M} = \int_0^{2\pi} r \vec{e}_r \times dF_\phi \vec{e}_\phi = r^2 l_{Fe} \frac{\vec{e}_z}{\mu} \int_0^{2\pi} B_r B_\phi d\varphi \quad (6.2)$$

Der Umkehrschluss, dass zur translatorischen Zugkraft in der Summe nur die Radial- komponenten dF_r einen Beitrag liefern, gilt nicht, auch wenn die Summenkraft mit der Rotor- mitte als Angriffspunkt als rein radial erscheinen mag. Die azimutalen Komponenten der fiktiven Maxwellschen Flächenspannungen müssen unbedingt berücksichtigt werden und heben sich nur in wenigen speziellen symmetrischen Feldsituationen gegenseitig auf.

Bei der numerischen Integration zur Gesamtkraft ist zudem ein globales kartesisches Koordinatensystem zugrunde zu legen, auf das die im lokalen Zylinderkoordinatensystem gültigen Komponenten dF_r und dF_ϕ zu transformieren sind. Da der Rotor betrachtet wird, werden hierfür rotorfeste Koordinaten verwendet, deren Basisvektoren mit den lokalen Einheitsvektoren wie folgt in Beziehung stehen:

$$\begin{aligned}\vec{e}_r &= \vec{e}_{x2} \cdot \sin(\varphi - \varphi_{2,\text{Anf}}) + \vec{e}_{y2} \cdot \cos(\varphi - \varphi_{2,\text{Anf}}) \\ \vec{e}_\varphi &= \vec{e}_{x2} \cdot \cos(\varphi - \varphi_{2,\text{Anf}}) - \vec{e}_{y2} \cdot \sin(\varphi - \varphi_{2,\text{Anf}})\end{aligned}\quad (6.3)$$

Die Winkel φ und $\varphi_{2,\text{Anf}}$ werden hierbei gegen die Anfangslinie des festen Statornetzes gemessen, wobei $\varphi_{2,\text{Anf}}$ den im Allgemeinen aufgrund der Rotordrehung zeitabhängigen Winkel der radialen Anfangslinie des Rotornetzes darstellt.

Durch Einsetzen von (6.3) in (6.1) und Ersetzen der Flussdichtefunktionen durch ihre konstanten Mittelwerte innerhalb der Zellen, die aus den Differenzenquotienten der beteiligten Vektorpotentialwerte hervorgehen, werden die Rotorkraftkomponenten F_{x2} und F_{y2} für jede gittermittige Zylinderfläche des polaren Stator- und Rotorgitters innerhalb des Luftspaltes bestimmt. Ebenso wie bei der Berechnung des wirksamen Gesamtdrehmomentes wird auch bei den resultierenden Kraftkomponenten F_{x2} und F_{y2} der arithmetische Mittelwert der Werte aller beteiligten Zylinderhüllflächen im Luftspalt gebildet. Der Übergangsbereich mit den Dreieckszellen bleibt dagegen aufgrund der nichtorthogonalen Vernetzung und eines vermuteten höheren lokalen Diskretisierungsfehlers unberücksichtigt.

Als analytisches Testbeispiel wird in [Fm98] ein ideal ferromagnetischer Eisenzylinder betrachtet, der gemäß Bild 6.2 exzentrisch zwischen den beiden Leitern einer Doppelleitung angebracht ist und mit einer vorgegebenen Umdrehungsfrequenz um seine statisch exzentrisch verschobene Achse rotiert. Die Kraft kann analytisch anhand eines Ersatzleitersystems bestimmt werden, in dem das Innere des Zylinders durch ein Material der Permeabilität μ_0 und die an der Zylinderoberfläche kreisgespiegelten Leiter der Doppelleitung repräsentiert wird.

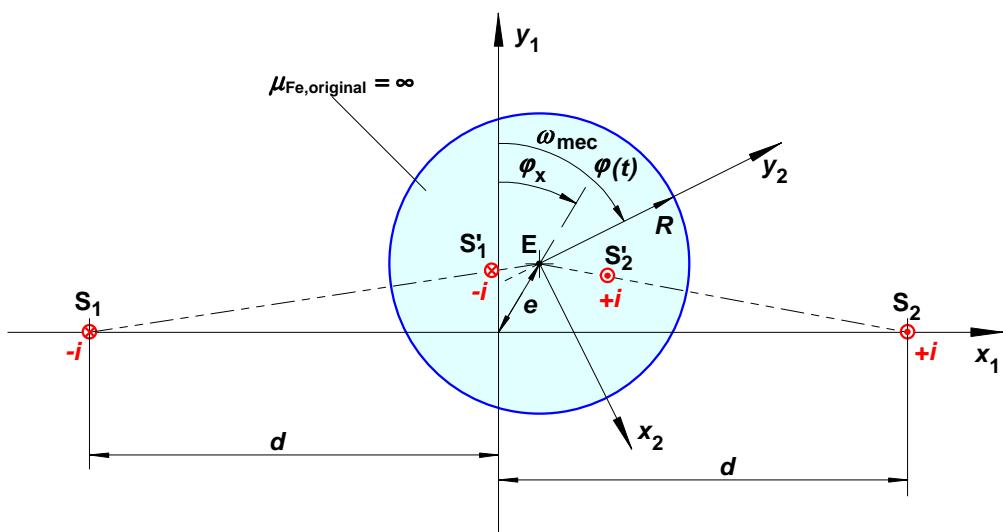


Bild 6.2: Ideal ferromagnetischer, zwischen den Leitern einer Doppelleitung positionierter und mit mechanischer Winkelgeschwindigkeit ω_{mec} rotierender Zylinder und Ersatzanordnung mit gespiegelten Leitern bei S_1' und S_2' nach [Fm98].

Die anhand der Ersatzanordnung berechnete Gesamtkraft setzt sich aus den vier Wechselwirkungskräften zwischen den äußereren und den gespiegelten inneren Leitern zusammen. Diese werden nachfolgend in (6.4) angegeben. Ihre Komponenten können durch Anwendung des Gesetzes der reziproken Radien bei der Kreisspiegelung und weiteren geometrischen Überlegungen bestimmt werden, wie in [Fm98] aufgeführt.

$$\begin{aligned}\vec{F}_{S1,S1'} &= l_z \cdot \frac{\mu_0 i^2}{2\pi \cdot S_1 S_1'} \cdot \vec{e}_{\overline{ES}_1} , \quad \vec{F}_{S2,S2'} = l_z \cdot \frac{\mu_0 i^2}{2\pi \cdot S_2 S_2'} \cdot \vec{e}_{\overline{ES}_2} , \\ \vec{F}_{S1,S2'} &= -l_z \cdot \frac{\mu_0 i^2}{2\pi \cdot S_1 S_2'} \cdot \vec{e}_{\overline{S_2' S_1}} , \quad \vec{F}_{S2,S1'} = -l_z \cdot \frac{\mu_0 i^2}{2\pi \cdot S_2 S_1'} \cdot \vec{e}_{\overline{S_1' S_2}} .\end{aligned}\quad (6.4)$$

Dabei ist l_z die Länge in axialer Richtung. Strecken zwischen den Punkten sind mit Überstrich gekennzeichnet. Die e-Vektoren stellen die zugehörigen Einheitsvektoren dar.

Für die FD-Testrechnung werden folgende Daten angesetzt:

$$i = 4 \text{ kA}, l_z = 1 \text{ m}, e = 0,1 \text{ mm}, R = 10 \text{ mm}, d = 20 \text{ mm}, \mu_{r,\text{Fe}} = 10^5.$$

Eine der exzentrischen Verschiebung entsprechend feine Diskretisierung mit Umfangsgitterweiten von ca. $0,25^\circ$ und radialen Abständen von 0,15 mm an der Oberfläche des Zylinders führt zu einem Gitter mit etwa 30000 Knoten. Die Rotation des Zylinders bewirkt Sinus- und Cosinus-Abhängigkeiten der Kraftkomponenten F_{x2} und F_{y2} von der Zeit, welche im Rahmen der Zeitschrittechnung richtig wiedergegeben werden.

In der nachfolgenden Tabelle 6.1 werden die Ergebnisse der analytischen Berechnung mit den numerisch bestimmten Werten verglichen. Der Fehler erscheint akzeptabel, was im vorliegenden Fall jedoch auch auf die einfache Feldkonfiguration, nämlich den nahezu senkrechten Feldeintritt in den Zylinder zurückzuführen sein dürfte.

Tabelle 6.1: Ergebnisse von analytischer und numerischer Kraftberechnung [Fm98]

φ_x	$ \vec{F}_{\text{analytisch}} $	$ \vec{F}_{\text{numerisch}} $	Fehler
0°	$ -1,365 \text{ N} \cdot \vec{e}_{y1} $	$1,35 \text{ N}$	-1,1 %
90°	$ 2,276 \text{ N} \cdot \vec{e}_{x1} $	$2,26 \text{ N}$	-0,7 %
$57,5^\circ$	$ 1,919 \text{ N} \cdot \vec{e}_{x1} + -0,734 \text{ N} \cdot \vec{e}_{y1} \approx 2,055 \text{ N}$	$ 1,906 \text{ N} \cdot \vec{e}_{x1} + -0,726 \text{ N} \cdot \vec{e}_{y1} \approx 2,04 \text{ N}$	-0,72 %

Im Rahmen der Untersuchungen zu [Fm98] wurde ein 4/16-poliger, polumschaltbarer, einseitig gelagerter Aufzugsmotor untersucht. Die Bemessungsleistung betrug 6,7 kW für die 4-polige Wicklung und 1,7 kW für die 16-polige. Bei einigen Maschinen war zuvor trotz des relativ großen Luftspaltes von 1,4 mm ein Anstreifen des Rotors in der Statorbohrung

beobachtet worden. Für einen neuen Prototyp mit verstärkter Welle, $d = 2r = 70$ mm, wurden hierzu die Biegesteifigkeit gemessen und der einseitige magnetische Zug für unterschiedliche Schalthandlungen und vorgegebene statische Exzentrizitäten berechnet. Die Messung der Biegesteifigkeit ergab eine in etwa lineare Abhängigkeit der Wellendurchbiegung von der am Wellenende angreifenden Kraft, wobei erst Kräfte um ca. 9 kN in der Lage wären, den Luftspalt vollständig zu überbrücken.

Die Berechnungen der magnetischen Kräfte auf den Rotor zeigten, dass erst unrealistisch hohe statische Exzentrizitäten von mehr als der Hälfte der Luftspaltweite Kräfte in einer Größe hervorrufen würden, die geeignet wäre, den verbleibenden Restluftspalt zu überbrücken. Dies wurde sowohl für den Anlauf als auch bei der Polumschaltung von 4- auf 16-poligen Betrieb beobachtet, wie die Bilder 6.3 und 6.4 zeigen.

Bei den Berechnungen wurden die Eisensättigung durch Unterrelaxation der Permeabilitätsverteilung in Ständer und Rotor sowie die verdrängungsbehaftete Induktion der Rotorströme gemäß Kap. 5 berücksichtigt. Um jedoch den Rechenbedarf um die Auflösung von Rotorspannungsgleichungen zu reduzieren, wurden der Ringwiderstand für die Stromgrundwelle auf den Stab transformiert und der Stabquerschnitt mit einer gesenkten resultierenden Ersatzleitfähigkeit belegt. Die berechneten Ständernetzströme im Stillstand von $I_{K,\text{eff}} = 55$ A stimmen brauchbar mit der Messung von $I_{K,\text{eff}} = 58$ A überein.

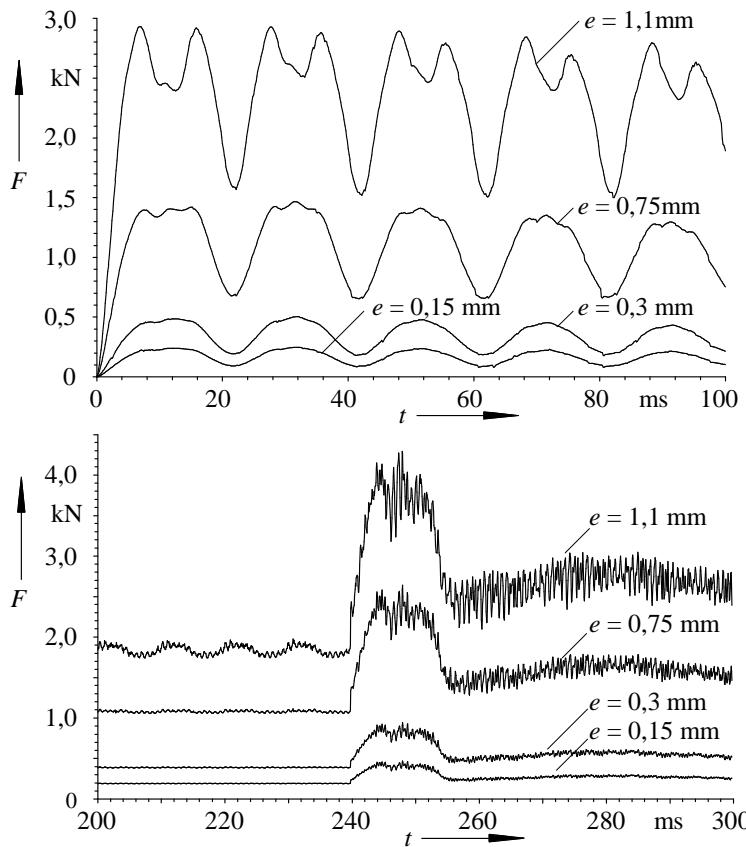


Bild 6.3:

Elektromagnetische Zugkraft auf den Rotor in Abhängigkeit der Zeit unter verschiedenen Exzentrizitäten e bei Aufschalten der Bemessungsspannung von 380 V auf den stehenden Motor. Winkel der exzentrischen Verschiebung $\varphi_x = 45^\circ$.

Bild 6.4:

Elektromagnetische Zugkraft auf den Rotor in Abhängigkeit der Zeit unter verschiedenen Exzentrizitäten e bei Polumschaltung von 4- auf 16-poligen Betrieb. Vorgabe gemessener Ströme. Winkel der exzentrischen Verschiebung $\varphi_x = 45^\circ$.

6.1.2 Statorstabkräfte in Synchronmaschinen bei Störfällen

Die Ständernutkeile in Synchrongeneratoren schließen die Nut zum Luftspalt hin ab und geben den Stäben in der Nut über die Nutkopffeder Halt. In Nuten mit Stäben gleicher Strangzugehörigkeit werden aufgrund der stets gleichen Richtung der Ströme die Leiter magnetisch in Richtung des Nutgrundes gezogen, so dass die Keile scheinbar obsolet sind. Dies ist für Nuten mit Ober- und Unterstab unterschiedlicher Strangzugehörigkeit nicht mehr gegeben und führt insbesondere in Störfällen mit Gleichanteil in den Strömen und z. B. zehnfach erhöhten Maximalwerten der Strangströme zu Abstoßungskräften, die Nutkopffeder und Nutkeil auf Druck belasten. Diese Kräfte werden in [Kl01c] analytisch unter Vorgabe einfacher eindimensionaler Querfeldverteilungen untersucht und mit FELMEC unter Berücksichtigung der Eisensättigung transient für einen 775 MVA-Generator berechnet.

Im Gegensatz zu den vorangegangenen Ausführungen in Kap. 5.2 sowie Kap. 6.1 kann für die vorliegende Aufgabenstellung die Kraftberechnung aufgrund der Homogenität der StromdichteVerteilung in einfacher Weise durch direkte numerische Integration der Lorentzkraftdichte erfolgen, wobei letztlich der Flächenmittelwert des Flussdichtevektors auf dem Stabquerschnitt zusammen mit dem Leitergesamtstrom in Erscheinung tritt.

$$\vec{F} = \iiint_V \vec{J} \times \vec{B} dV = \vec{J} \times \iiint_V \vec{B} dV = l_z \frac{i}{A_{QS}} \vec{e}_z \times \iint_{QS} \vec{B} dA = l_z i \vec{e}_z \times \frac{1}{A_{QS}} \iint_{QS} \vec{B} dA = l_z i \vec{e}_z \times \vec{B}_m \quad (6.5)$$

Für die analytische Vergleichsbetrachtung wird ein Nutenfeld wie in Bild 6.5 mit linearen Verläufen der Feldstärke in Abhängigkeit der Radialkoordinate in der Nut zugrunde gelegt.

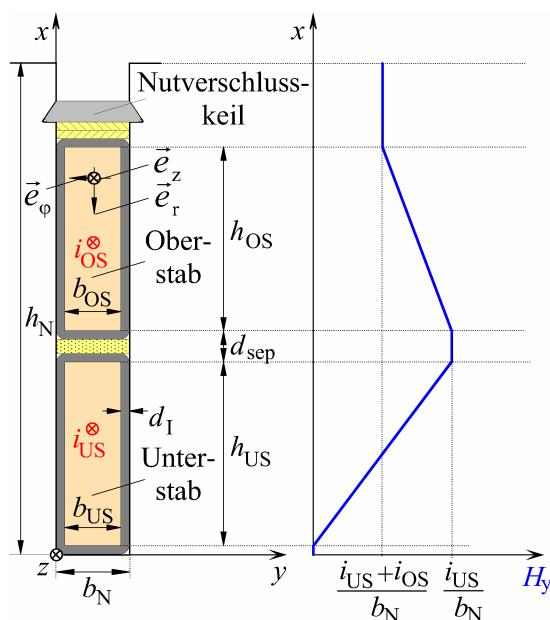


Bild 6.5:

Typischer vereinfachter Querschnitt einer rechteckigen Statornut eines Synchrongenerators mit Verteilung des Nutenquerfeldes, exemplarisch für $i_{OS} = -0,5 i_{US}$ [Kl01c].

Mit den mittleren magnetischen Feldstärken auf den Querschnitten von Ober- und Unterstab, die aus der in Bild 6.5 gezeigten Verteilung leicht ablesbar sind, folgen die nachstehend aufgeführten Kräfte:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\text{US}} &= l_z i_{\text{US}} \vec{e}_z \times \mu_0 H_{y,\text{m,US}} \vec{e}_y = \mu_0 l_z i_{\text{US}} \vec{e}_z \times \frac{i_{\text{US}}}{2b_N} \vec{e}_y = \frac{\mu_0 l_z}{2b_N} i_{\text{US}}^2 (-\vec{e}_x) = \frac{\mu_0 l_z}{2b_N} i_{\text{US}}^2 \vec{e}_r \\ \vec{F}_{\text{OS}} &= l_z i_{\text{OS}} \vec{e}_z \times \mu_0 H_{y,\text{m,OS}} \vec{e}_y = \mu_0 l_z i_{\text{OS}} \vec{e}_z \times \frac{1}{b_N} \left(i_{\text{US}} + \frac{1}{2} i_{\text{OS}} \right) \cdot \vec{e}_y = \frac{\mu_0 l_z}{b_N} i_{\text{OS}} \left(i_{\text{US}} + \frac{1}{2} i_{\text{OS}} \right) \cdot \vec{e}_r\end{aligned}\quad (6.6)$$

Der Unterstab ist also nur Zugkräften in Richtung Nutgrund ausgesetzt, während der Oberstab abhängig von den Vorzeichen und Beträgen der Ströme in Unter- und Oberstab, $i_{\text{OS}} > 0$ und $i_{\text{US}} < -0,5 i_{\text{OS}}$ oder $i_{\text{OS}} < 0$ und $i_{\text{US}} > -0,5 i_{\text{OS}}$, auch momentane Druckkräfte erfahren kann. Dies tritt schon im Nennbetrieb für Nuten mit Leitern unterschiedlicher Strangzugehörigkeit auf. Bei einer Phasenverschiebung von 60° zwischen den Strömen von Unter- und Oberstab ist der Maximalwert der in negativer Richtung, d. h. in Richtung Nutkeil, auf den Oberstab ausgeübten Kraft in etwa ein Drittel der maximalen Zugkraft auf den Unterstab, wie auch in [Vgt96] gezeigt. Eine Abschätzung in [Kl01c] zeigt des Weiteren, dass während des subtransienten Ausgleichsvorgangs nach einem Stoßkurzschluss die Druckkraft auf den Oberstab bis zu 100-fach höhere Momentanwerte annehmen kann als im stationären Bemessungsbetrieb.

Die Berechnung der Stabkräfte findet für den Stoßkurzschluss eines 775 MVA-Synchrongenerators mit maximaler Asymmetrie statt, wobei zum Vergleich mit der FD-Zeitschritt-methode auch eine Auswertung der analytischen Gleichung (6.6) stattfindet. Für diese werden die Ströme einer transienten Netz- und Maschinenberechnung eingesetzt, die mit dem Programm NETOMAC® [Klck81] durchgeführt werden. Bei diesem wird die Synchronmaschine durch ein Ersatzschaltbild gemäß der Parkschen Zweiachsentheorie beschrieben.

Bei der FD-Zeitschritt-methode werden zur Auswertung von (6.5) die mittleren Flussdichten für Ober- und Unterstab durch Aufsummierung der mit den Flächen der Gitterzellen multiplizierten mittleren Differenzenquotienten der Vektorpotentiale gebildet. Dies muss dabei nicht zwingend zur Ausführungszeit der Rechnung vorgenommen werden, sondern kann bei Abspeicherung der Vektorpotentialverteilungen in ausreichender zeitlicher Dichte zusammen mit der Multiplikation der Stabströme auch im Rahmen einer Nachbearbeitung geschehen.

Das Nutenbelegungsschema des in [Kl01c] betrachteten Generators ist in Bild 6.6 für den halben Umfang dargestellt.

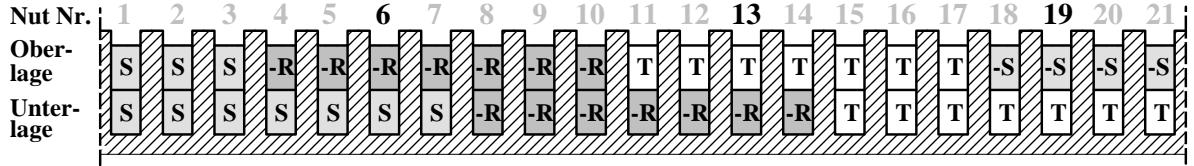


Bild 6.6: Schema der Ständerwicklung des untersuchten Synchrongenerators [Kl01c].

Die Bemessungsspannung des 2-poligen 775 MVA-Generators liegt bei $U = 26 \text{ kV}$. Die Ständernutbreite beträgt $b_N = 50,2 \text{ mm}$, die Ständereisenlänge $l_z = 7,196 \text{ m}$. Die in [Kl01c] untersuchten Nuten Nr. 6, 13 und 19 mit unterschiedlichen Phasenströmen in Ober- und Unterstab sind in Bild 6.6 hervorgehoben. Die jeweils zwei Spulengruppen je Wicklungsstrang der Ständerwicklung sind parallel und im Stern geschaltet.

Die aus der NETOMAC-Rechnung hervorgehenden Stromverläufe nach Bild 6.7 beschreiben in etwa den maximal asymmetrischen Fall eines 3-poligen Klemmenkurzschlusses. Dabei entspricht der Spitzenwert des Strangstroms in Strang R dem ca. 10,7-fachen Amplitudenwert bei Bemessungsbetrieb. Maximale Druckkräfte auf einen Oberstab sind für eine Nut mit Strangbelegungen S und -T, also z. B. Nut 19 zu erwarten. Die Auswertung von (6.6) hierfür ergibt den Kraftverlauf nach Bild 6.8, der aus einfach und doppelt netzfrequenten Schwingungen mit exponentiell abnehmender Amplitude sowie einem abnehmenden Gleichanteil besteht. Der hier interessierende negative Spitzenwert von 469 kN ist in etwa 110 mal höher als der negative Maximalwert von 4,28 kN im Bemessungsbetrieb. Die Verläufe der Kräfte auf die Oberstäbe von Nut 13 und 6 sind qualitativ mit dem hier gezeigten Verlauf vergleichbar, weisen aber negative Kraftspitzen von 222 kN und 77 kN auf.

Bei der Finite-Differenzen-Zeitschrittechnung mit FELMEC werden Wirbelströme im Rotor sowie die Eisensättigung direkt berücksichtigt. Ebenso werden Spannungs- und Netzwerkgleichungen der Erreger- und Ständerwicklungen simultan gelöst. Daher sollte die Berechnung der Nutenfelder insbesondere im Bereich des Oberstabes in der Nähe des Luftspaltes genauer sein und die unmittelbare Auswertung von (6.5) verlässlichere Werte für die Stabkräfte liefern. Dem steht jedoch ein gewisser Diskretisierungsfehler gegenüber. Auch der verhältnismäßig hohe Aufwand der Berechnung ist negativ zum FELMEC-System festzuhalten.

Die Ergebnisse für die Strangströme und die Kraft auf den Oberstab in Nut 19 in Bild 6.9 und Bild 6.10 erscheinen vergleichbar mit denen der NETOMAC Rechnung. Insbesondere wird eine akzeptable Übereinstimmung des negativen Spitzenkraftwertes erreicht, der für Nut 19 praktisch unverändert ist und für Nut 13 und Nut 6 mit 228 kN und 70 kN von dem vorherigen Resultat um +2,7 % und -10 % abweicht. Für die positiven Kraftspitzen ergeben sich jedoch erhebliche Abweichungen von bis zu 25 %. Dies ist vermutlich auf die

Eisensättigung zurückzuführen, die bei gleichorientierter Durchflutung beider Stäbe einen größeren Einfluss hat als bei der Druckkraft erzeugenden gegensinnigen Durchflutung, bei der eine gewisse Kompensation der zughörigen Feldbeiträge im umliegenden Zahnbereich auftritt.

Die Rückrechnung einer effektiven magnetischen Nutbreite aus den Kraft- und Stromergebnissen der FELMEC-Rechnung nach (6.6) ergibt eine wesentliche Erhöhung auf $b_{N,\text{eff}} = 74 \dots 77$ mm gegenüber der geometrischen Nutbreite von 50,2 mm zu Zeitpunkten mit positiver Maximalkraft für die Nuten 6 und 13, was als Maß für die Eisensättigung aufgefasst werden kann.

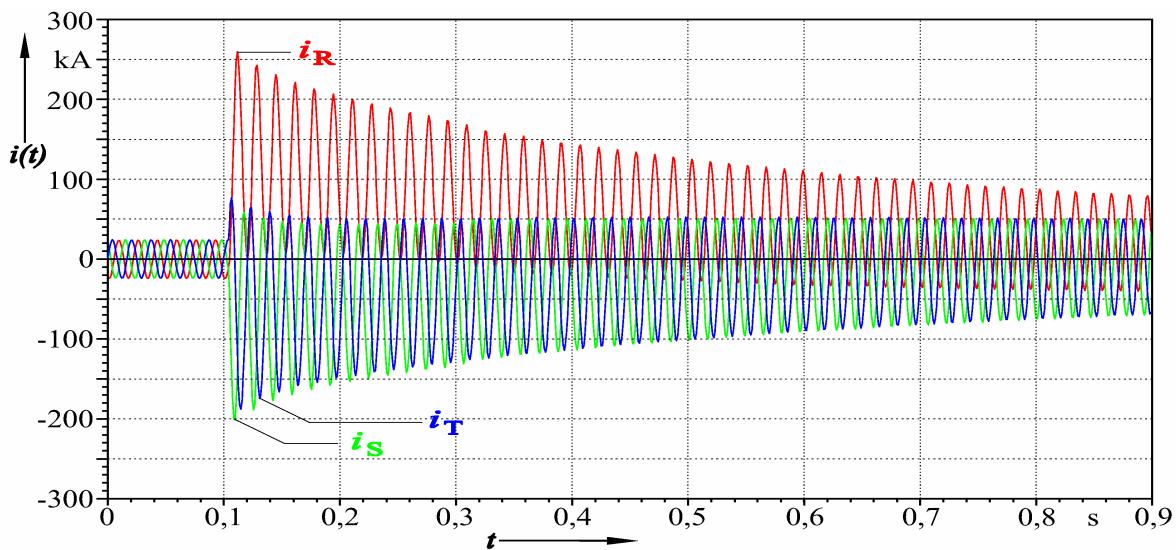


Bild 6.7: Strangströme für dreiphasigen Klemmenkurzschluss des untersuchten Generators aus NETOMAC Rechnung [Kl01c].

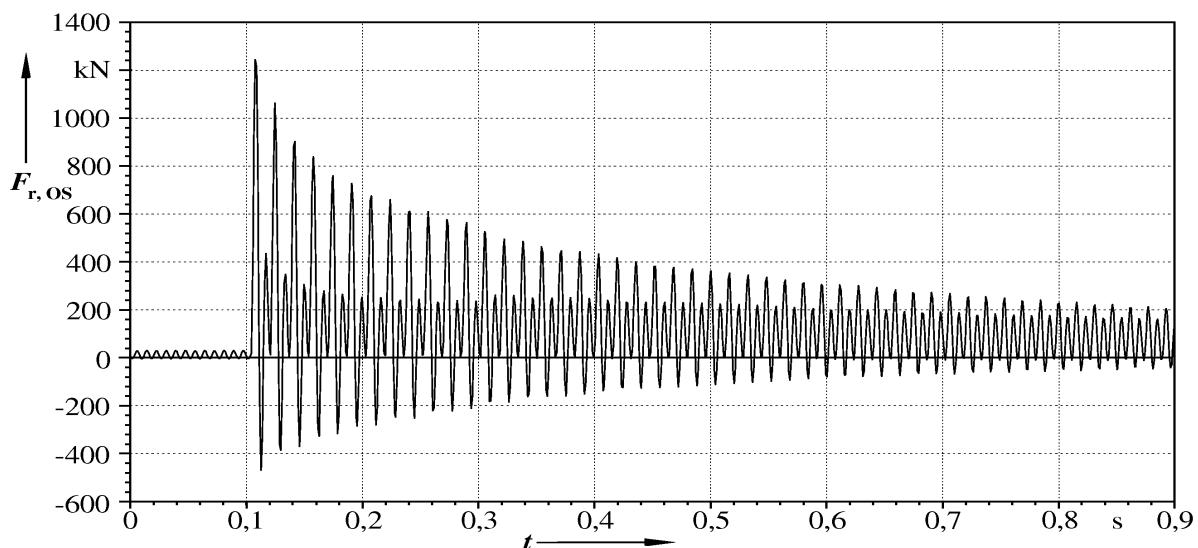


Bild 6.8: Radialkraft auf Oberstab in Nut Nr. 19, berechnet aus den Stabströmen $i_{OS} = -i_S/2$ und $i_{US} = +i_T/2$ mit den Strangströmen i_S und i_T aus der NETOMAC Rechnung nach Bild 6.7 [Kl01c].

Im Gegensatz dazu führt in Nut 19 die gegensätzliche Orientierung der Ströme, auf welcher letztlich die Abstoßung beruht, zu einer Absenkung des Sättigungseffektes in den benachbarten Zähnen, da die Feldbeiträge kompensatorisch aufeinander wirken. Die effektive Nutbreite aus Rückrechnung nach (6.6) steigt hier nur auf ca. 59 ... 60 mm. Im Bemessungsbetrieb erreicht $b_{N,\text{eff}}$ in etwa 56 mm, ein Ergebnis, das gut mit der mittleren geometrischen Nutbreite der Diskretisierung übereinstimmt.

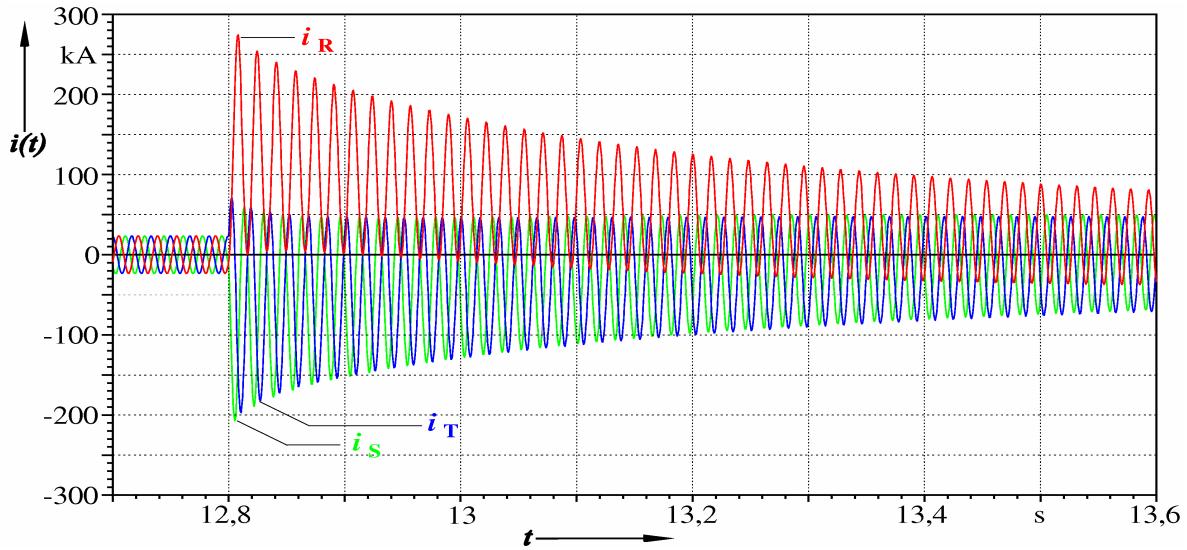


Bild 6.9: Strangströme für dreiphasigen Klemmenkurzschluss aus FELMEC 2D-Finite-Differenzen-Zeitschrittrechnung, Zeitschritt $h = 0,111 \text{ ms}$ [Kl01c].

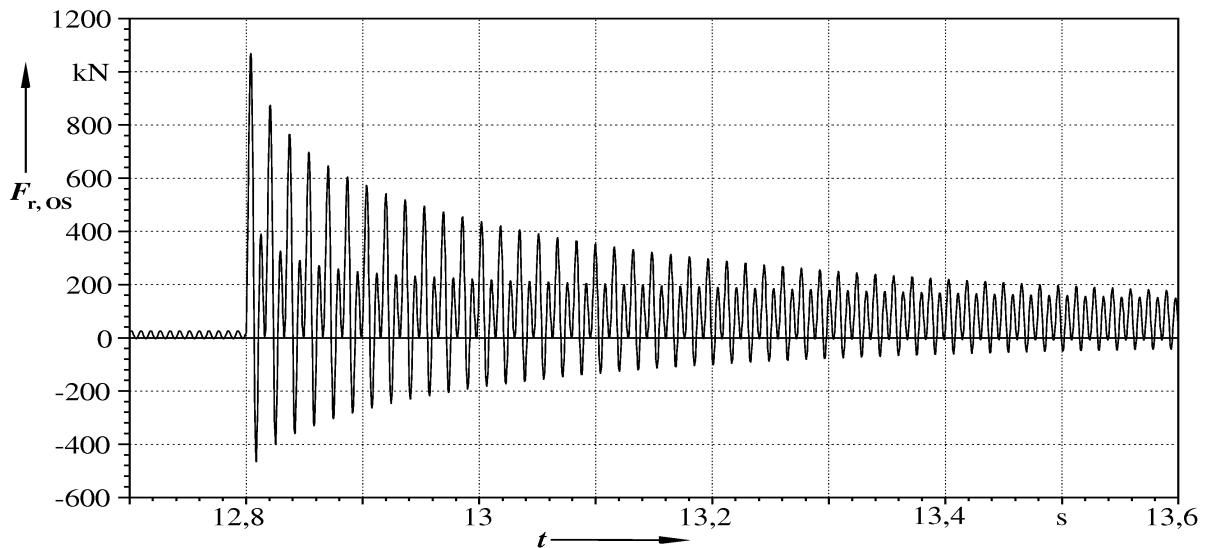


Bild 6.10: Radialkraft auf Oberstab in Nut Nr. 19, berechnet aus der mittleren Flussdichte auf dem Querschnitt und den Stabströmen i_{OS} und i_{US} aus der FELMEC Rechnung [Kl01c].

Für Nut 19 sind nachfolgend in Bild 6.11 Feldbilder aufgeführt, die für die Zeitpunkte mit maximaler positiver Kraft und maximaler negativer Kraft auf den Oberstab angefertigt wurden. Es ist zu erkennen, dass im Zahnkopfbereich bei dem positiven Maximum der Radialkraft höhere Flussdichten erreicht werden als bei dem negativen, so dass der erhöhte Einfluss der Eisensättigung hier plausibel erscheint.

Die Dichtegradienten der Feldlinien veranschaulichen zudem in beiden Fällen die Wirkungsrichtung der elektromagnetischen Kraft auf den Oberstab. Während die Dichte im ersten Fall zum Luftspalt hin zunimmt und eine magnetische Kraft in positiv radialer Richtung anzeigt, sind die Verhältnisse im zweiten Fall genau umgekehrt. Das dichtere Feld zwischen den beiden Leitern kann hier als Druck interpretiert werden, der zwischen den gegensinnig durchfluteten Leitern wirkt und somit den Oberstab aus der Nut zu drängen trachtet.

Durch den Vergleich zwischen NETOMAC- und FELMEC-Rechnung mit der guten Übereinstimmung der negativen Spitzenwerte der Stabkraft wird letztlich gezeigt, dass für die Bestimmung der Nutkeilbelastung während transienter Vorgänge vereinfachte Berechnungen der Stabkräfte möglich sind.

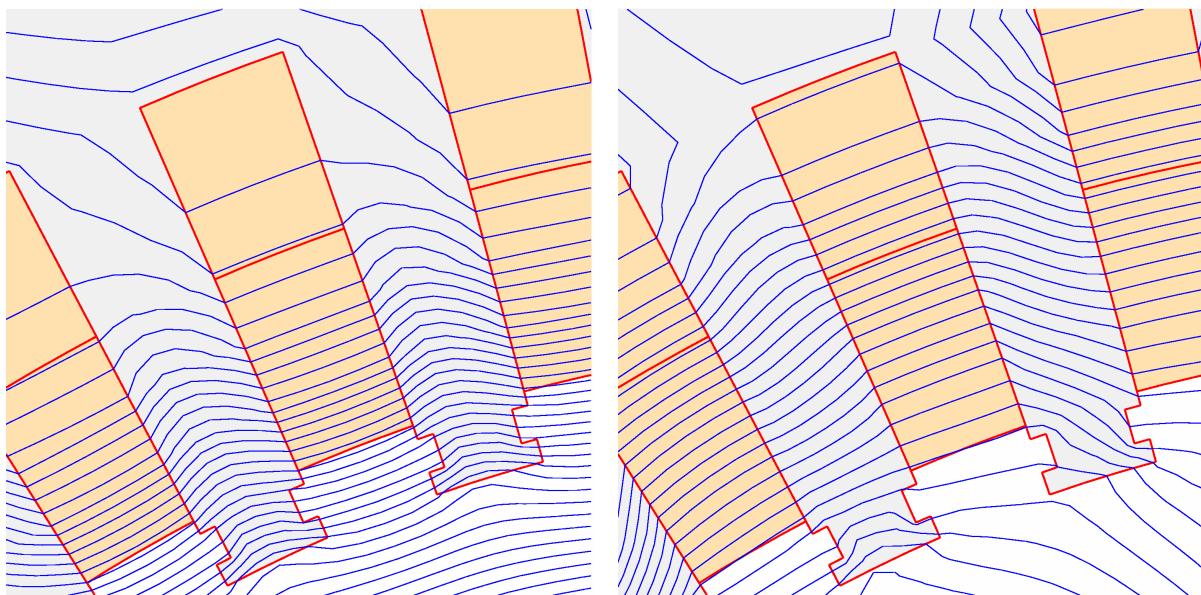


Bild 6.11: Feldbilder von Nut 19 bei dreipoligem Stoßkurzschluss, links zum Zeitpunkt maximaler positiver Radialkraft, $t = 12,80411$ s, d. h. 4,11 ms nach Einleitung des Kurzschlusses, rechts zum Zeitpunkt maximaler negativer Radialkraft, $t = 12,80867$ s, d. h. 8,67 ms nach Einleitung des Kurzschlusses.

6.2 Berücksichtigung untypischer Netzwerktopologien

6.2.1 Windungsschlüsse in Rotoren von Synchrongeneratoren

In [Kl01b] und [Dan01] werden die Auswirkungen von Rotorwindungsschlüssen auf verschiedene elektrische und mechanische Betriebsgrößen eines 760 MVA-Synchrongenerators mit der FD-Zeitschrittmethode untersucht.

Rotorwindungsschlüsse spielen eine wichtige Rolle in großen Synchrongeneratoren, da sie zu schwerwiegenden Schäden führen können, wenn sie nicht rechtzeitig entdeckt und beseitigt werden. Derartige Fehler werden u. a. durch Materialermüdung der Wicklungsisolation ausgelöst, die durch mechanische Spannungen und thermische Belastungen bedingt ist. Eine Anhäufung von Kupferabrieb, der insbesondere bei langsamer Drehung des Rotors durch die Biegewechselbelastung entsteht, wird ebenfalls als Ursache für Rotorwindungsschlüsse genannt.

Für die Fortentwicklung von Schutzeinrichtungen und Diagnosegeräten erscheint eine genaue Kenntnis der Auswirkungen von Rotorwindungsschlüssen auf beobachtbare Größen wünschenswert. Die Simulation einer Maschine mit derartigen Fehlern auf der Basis der numerischen Feldberechnung ist geeignet, entsprechende Einblicke in die Maschine zu liefern, wozu das Programm FELMEC angepasst und verwendet wurde.

Die Ständerwicklung kann für die nachfolgend präsentierten Berechnungen mit der festen, regulären Topologie, vorliegend Sternschaltung der Wicklungsstränge und Parallelschaltung der jeweiligen beiden Spulengruppen, beschrieben werden. Demgegenüber verlangt die Behandlung der beliebigen Zusammenschaltung von Rotoreinzelspulen, wie sie für die Analyse von Windungsschlüssen erforderlich ist, einen sehr flexiblen Ansatz. Vereinfacht lässt sich dieser dadurch charakterisieren, dass die Rotorwindungen als eigenständige Zweipolelemente eines umfassenden Netzwerkes betrachtet werden und als solche in den Listen zu dessen Beschreibung erscheinen, wodurch eine beliebige Topologie darstellbar wird. Die Spannungsgleichungen der Rotorzweipolelemente nach Kap. 5 werden bei der Aufstellung des Gleichungssystems aber nicht bei den Spannungsgleichungen der konzentrierten Netzwerkelemente aufgeführt, sondern aufgrund ihrer großen Bandbreite, die durch die direkte Kopplung zu den Vektorpotentialen des Feldproblems gegeben ist, an das gesamte Gleichungssystem angehängt.

Alle Zweigbeziehungen werden explizit, d. h. ohne die Anwendung reduzierender Netzwerkberechnungsverfahren, berücksichtigt, deren Vorteil angesichts der hohen Zahl von Gleichungen aus der Felddiskretisierung im Gesamtsystem vernachlässigbar erscheint. Jeder

Zweig wird durch eine Differential- oder Integralgleichung erster Ordnung, die zeitlich in einfacher Weise nach der θ -Methode diskretisierbar ist, oder durch eine algebraische Gleichung beschrieben. Für einen mit j indizierten, ohmsch-induktiven Zweig, der zudem induktive Kopplungen zu anderen Zweigen l aufweist, gilt beispielsweise [Kl99]:

$$u_j = R_j i_j + L_j \frac{di_j}{dt} + \sum_{l=1, l \neq j}^N M_{j,l} \frac{di_l}{dt} \quad (6.7)$$

Ein ohmsch-kapazitiver Zweig dagegen liefert die Beziehung:

$$u_j = R_j i_j + \frac{1}{C_j} \int_{\tau=0}^t i_j \, d\tau + U_{C,0} \quad (6.8)$$

Die topologischen Beziehungen oder Kirchhoffschen Gleichungen $(C) \cdot (i) = (0)$ und $(B) \cdot (u) = (0)$ werden ebenfalls direkt aufgestellt. Zusammen mit einer bei Auflösung der Netzwerkgleichungen lokal angewandten totalen Pivotsuche ergibt sich im Vergleich zu stark reduzierenden Netzwerkanalyseverfahren eine geringere Störanfälligkeit bei irregulären Netzwerkkonfigurationen, die z. B. durch ideal leitend verbundene Knoten ($R = 0 \Omega$) oder unterbrochene Maschen ($G = 0 \text{ S}$) entstehen. Für eine mögliche iterative Behandlung nicht-linearer Elemente, wie z. B. Halbleiterventile, steht zudem der vollständige Netzwerkzustand zur Verfügung. Diese Option wird aber für die vorliegende Rechnung nicht gebraucht.

Der kombinierte Feld- und Netzwerkansatz mit beliebiger Anordnung von Rotorfeldspulen wird in [Kl01b] an einem einfachen Einnutenbeispiel nach Bild 6.12 erprobt, bei dem zwei Spulenseiten einer geteilten Spule von einem ideal ferromagnetischen Material für den magnetischen Rückschluss der sich ergebenden Querfelder umgeben sind. Neben der Programmprüfung ermöglicht das Beispiel auch einen ersten Einblick in das Verhalten eines induktiv gekoppelten Systems bei plötzlichem Eintritt eines Kurzschlusses. Die Anordnung besteht aus zwei ohmsch-induktiven Zweigen der beiden Teilwicklungen mit den Widerständen R_1 und R_2 sowie den Selbstinduktivitäten L_1 und L_2 , die über die Gegeninduktivität M gekoppelt sind. Die Wicklung wird über eine konstante Spannung U_0 mit Gleichstrom gespeist, wobei stationäre Verhältnisse vorausgesetzt werden. Zu einem Zeitpunkt t_K wird der zweite Teilstrang der Wicklung kurzgeschlossen, wodurch der Speisestrom gemäß zweier charakteristischer Exponentialfunktionen gegen einen neuen, höheren stationären Wert strebt. Der Strom in dem kurzgeschlossenen Teil geht mit derselben Charakteristik gegen Null. Ähnliche Ausgleichsvorgänge finden den nachfolgenden Ergebnissen entsprechend auch bei plötzlichem Eintritt eines Rotorwindungsschlusses statt.

Aufgrund des einfachen Feldverlaufs können die Induktivitäten der Testanordnung leicht berechnet werden. Dies ermöglicht die quantitative Auswertung einer netzwerkbasierten analytischen Lösung und eine Lösung durch direkte numerische Netzwerksimulation als Vergleich zu der numerischen Finite-Differenzen-Zeitschrittechnung.

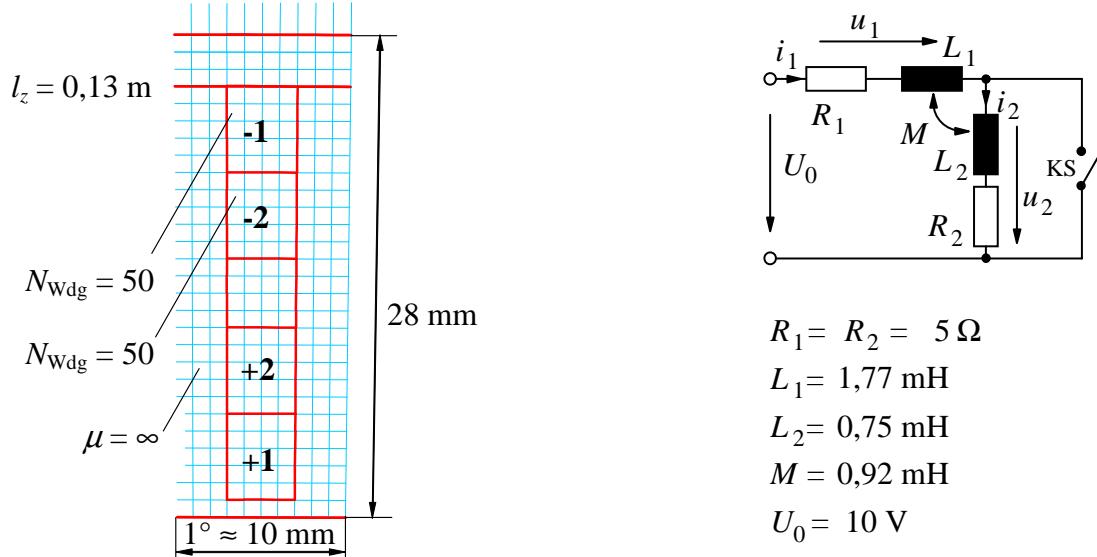


Bild 6.12: Querschnitt mit FD-Gitter und Abmessungen (links) sowie Ersatzschaltbild mit Netzwerkelementen (rechts) einer geteilten Wicklung in einer ideal ferromagnetischen Nut mit Kurzschluss der inneren Teilwicklung [Kl01b].

Die analytische Lösung wird anhand der Spannungsgleichungen des kurzgeschlossenen Zweispulensystems mit dem Stromanfangswert aus dem stationären Betrieb mit offener Kurzschlussverbindung, $i_1(t = t_{KS}) = i_2(t = t_{KS}) = U_0 / (R_1 + R_2)$, bestimmt.

$$\begin{aligned} R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} &= U_0 \\ M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 &= 0 \end{aligned} \quad (6.9)$$

Gleichung (6.9) kann mittels der Laplace-Transformation gelöst werden. Aus dem algebraischen System der Gleichungen in p werden dabei die Transformierten der Ströme $I_1(p)$ und $I_2(p)$ berechnet. Dabei erscheinen zwei charakteristische Eigenwerte $p_{1,2}$, die wie folgt angegeben werden können:

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-k^2} \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right)^2 - \frac{4(1-k^2)}{\tau_1 \tau_2}} \right) \quad (6.10)$$

Dabei bezeichnen $\tau_1 = L_1/R_1$ und $\tau_2 = L_2/R_2$ die Zeitkonstanten der einzelnen Teilwicklungen ohne magnetische Kopplung oder galvanische Verbindung und $k = M/\sqrt{L_1 L_2}$ den Kopplungskoeffizienten der beiden Wicklungen. Die Lösungen, die sich für die Ströme aus der Rücktransformation ergeben, sind:

$$i_1(t) = U_0 \cdot \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{p_1 - p_2} \cdot \left[\begin{array}{l} \left(\frac{1}{L_1 L_2 - M^2} \cdot \left(\frac{R_2}{p_1} + L_2 + \frac{(L_1 + M)R_2}{R_1 + R_2} \right) + \frac{p_1}{R_1 + R_2} \right) \cdot \exp(p_1 \cdot (t - t_{KS})) + \\ + \left(\frac{-1}{L_1 L_2 - M^2} \cdot \left(\frac{R_2}{p_2} + L_2 + \frac{(L_1 + M)R_2}{R_1 + R_2} \right) - \frac{p_2}{R_1 + R_2} \right) \cdot \exp(p_2 \cdot (t - t_{KS})) \end{array} \right] \right]$$

$$i_2(t) = \frac{U_0}{(R_1 + R_2)(p_1 - p_2)} \cdot \left[\left(\frac{R_1 L_2 - R_2 M}{L_1 L_2 - M^2} + p_1 \right) \exp(p_1(t - t_{KS})) + \left(-\frac{R_1 L_2 - R_2 M}{L_1 L_2 - M^2} - p_2 \right) \exp(p_2(t - t_{KS})) \right] \quad (6.11)$$

Im angegebenen Beispiel sind die hieraus für den Kurzschluss nach $t = t_{KS} = 2,05$ ms berechneten Stromverläufe in Bild 6.13 ebenfalls aufgeführt und praktisch deckungsgleich mit den Berechnungen aus der FD-Zeitschrittrechnung oder transienten numerischen Netzwerk-analyse.

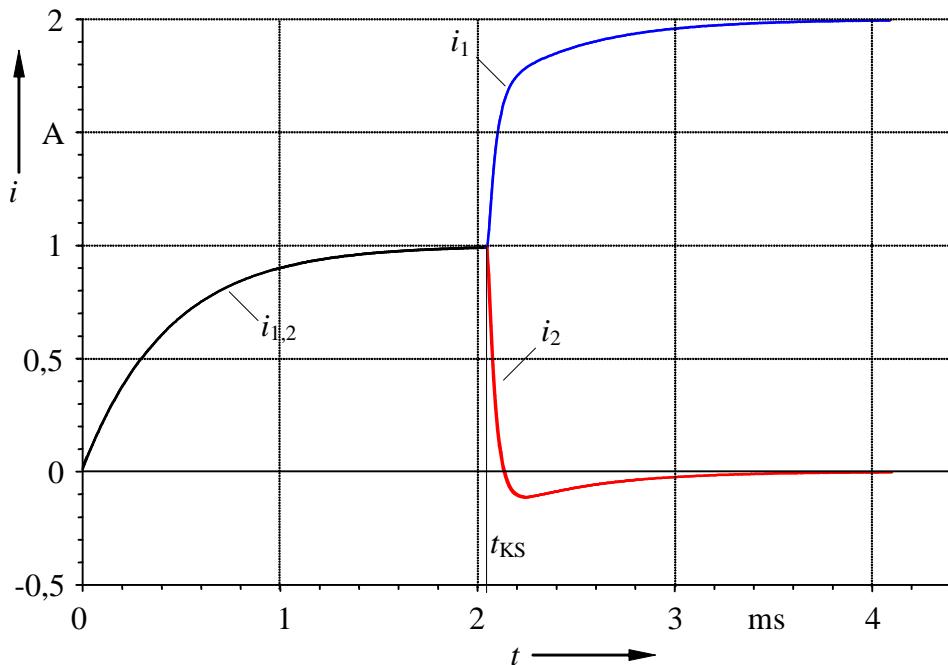


Bild 6.13: Stromverläufe aus FD-Zeitschrittrechnung und Netzwerkberechnung vor und nach Einleitung des Kurzschlusses über Teilwicklung 2 [Kl01b].

Für den untersuchten Generator werden nach Bild 6.14 fünf hinsichtlich der Umfangs und der Radialposition unterschiedliche Orte für kurzgeschlossene Spulen gewählt.

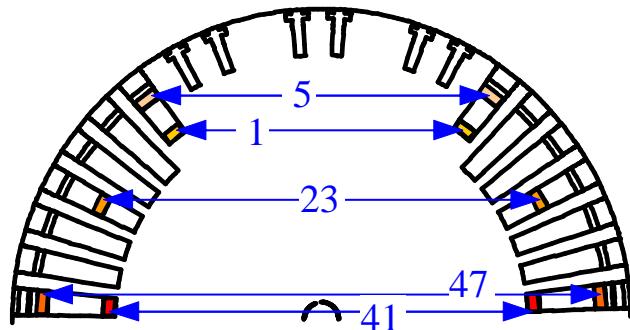


Bild 6.14:

Rotor des untersuchten Generators mit Spulenquerschnitten der kurz zu schließenden Windungen [Kl01b].

Das zugehörige Netzwerk in Bild 6.15 zeigt die Verschaltung der Rotorwindungen. Der größte Teil der Wicklung wird dabei durch die einfach seriell geschalteten Windungen 2, 3, 4, 6 ... 22, 24 ... 40 sowie 42 ... 46 und 48 ... 94 gebildet. Die Überbrückungswiderstände parallel zu den Einzelwindungen 1, 5, 23, 41 und 47 werden für den ungestörten Betrieb auf $10^{12} \Omega$ gesetzt und zur Einleitung des Kurzschlusses, im vorliegenden Fall nach $t_{KS} = 12,3$ s, in der jeweils zu untersuchenden Windung auf 0Ω reduziert. Durch die sofortige Berücksichtigung aller zu untersuchender Kurzschlussorte braucht nur eine Berechnung zum Erreichen des stationären Zustandes ausgeführt zu werden. Andererseits fallen aber sechs statt sonst nur zwei Rotorspannungsgleichungen an. Der Maschinenquerschnitt wird mit etwa 19 000 Knoten diskretisiert. Die Zeitschrittweite beträgt für alle Rechnungen $h = 0,111$ ms.

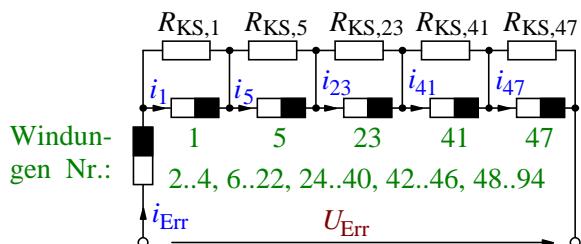


Bild 6.15:

Netzwerk der Rotorteilwicklungen und kurzzuschließenden Einzelwindungen des Generators mit Überbrückungswiderständen [Kl01b].

Nach Einleitung eines plötzlichen Kurzschlusses zeigen die Ströme in den kurzgeschlossenen sowie in den nicht betroffenen Windungen ein ähnlich doppelt exponentielles Verhalten wie in dem Testbeispiel. Als wesentliche Abweichungen dazu müssen aber nach Bild 6.16 die durch elektromechanische Wechselwirkungen und die Eisensättigung bedingten Unterschiede zur Kenntnis genommen werden. Im Gegensatz zu Bild 6.13 zeigt der abklingende Strom in den Kurzschlusswindungen nach Bild 6.17 kein Unterschwingen, während der ansteigende Strom in den restlichen Windungen in Bild 6.16 teils überschwingt und sich ihm durch Rotorpendelungen induzierte Schwankungen überlagern. Die Erhöhung

des stationären Wertes des Erregerstroms um ca. 1 % erscheint allerdings unter praktischen Betriebsbedingungen kaum als ursächlich für einen Rotorwindungsschluss nachweisbar.

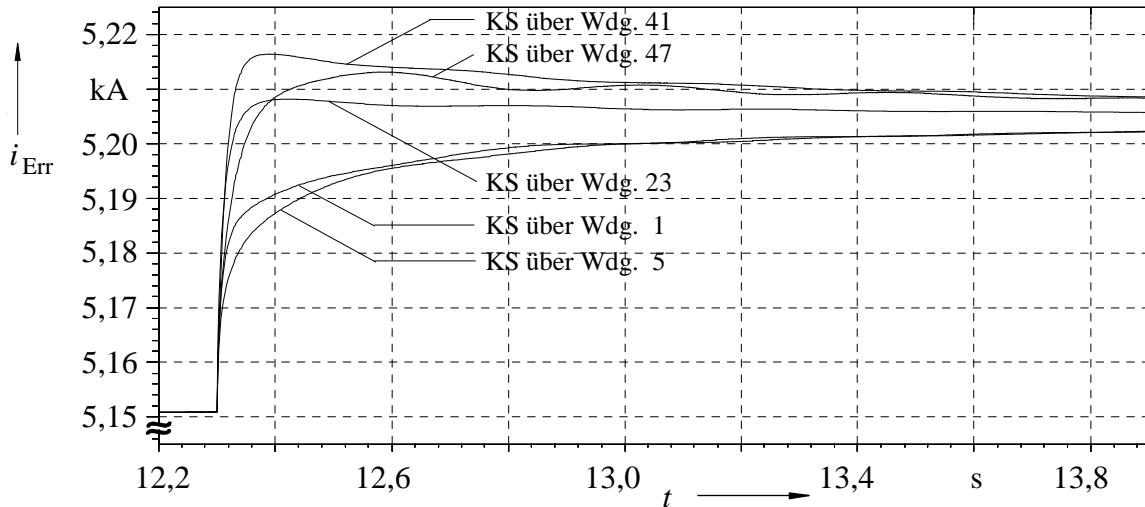


Bild 6.16: Stromverläufe in Erregerwicklung nach plötzlichem Eintritt eines Windungsschlusses in Windungen Nr. 1, 5, 23, 41 und 47 [Kl01b].

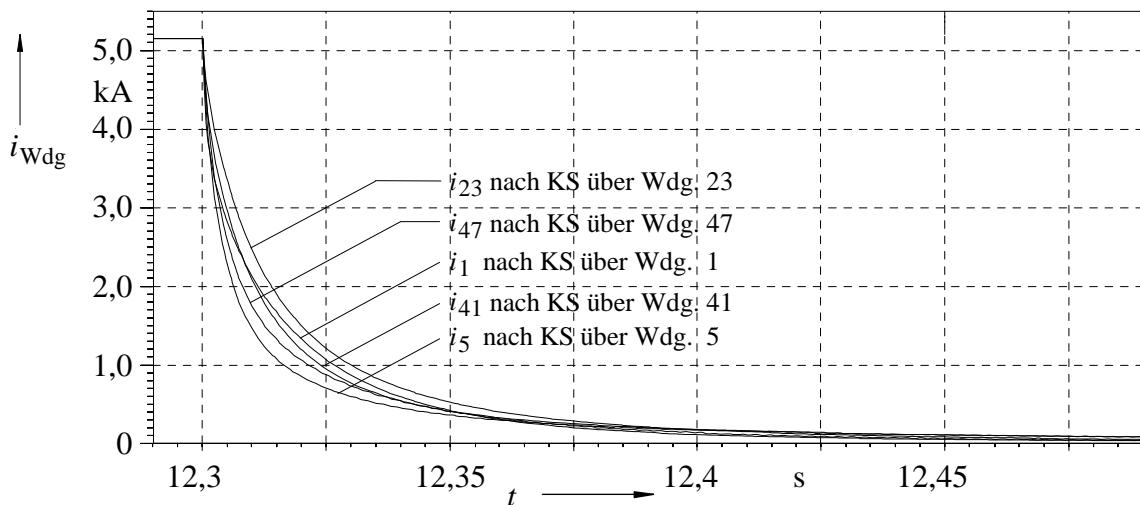


Bild 6.17: Stromverläufe in den kurzgeschlossenen Windungen nach plötzlichem Eintritt eines Windungsschlusses in Windungen Nr. 1, 5, 23, 41 und 47 [Kl01b].

Weitere Effekte, die zwar in der FD-Simulation beobachtbar sind, aufgrund ihres geringen Ausmaßes aber in der Betriebspraxis nicht messbar sind, ergeben sich durch leichte Variationen des Ständerstromeffektivwertes, der in Bild 6.18 aufgeführt ist, oder als mechanische Pendelungen, wie Bild 6.19 zeigt.

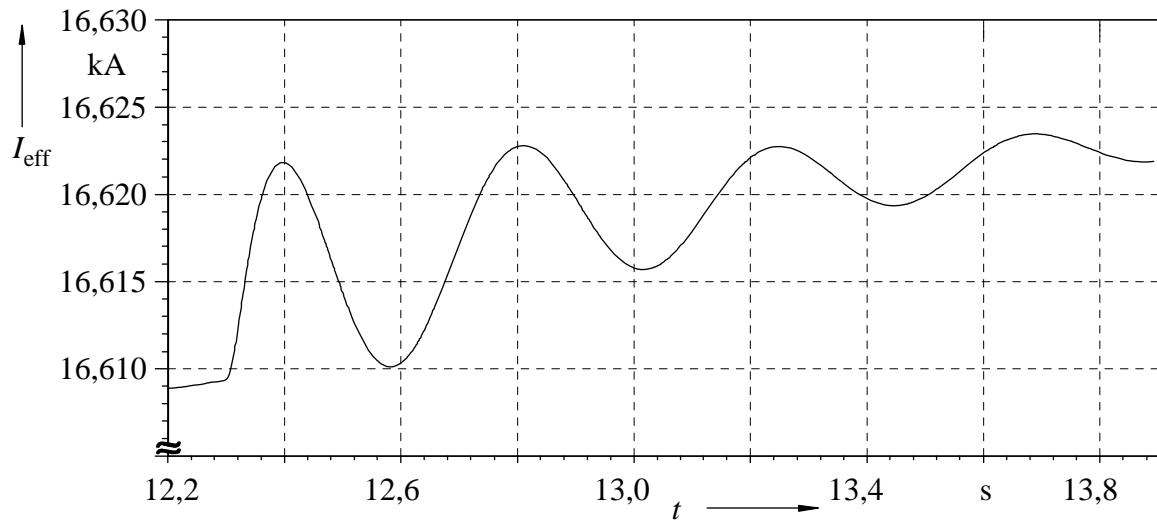


Bild 6.18: Statorstromeffektivwert nach plötzlichem Eintritt eines Windungsschlusses in Windung 1.

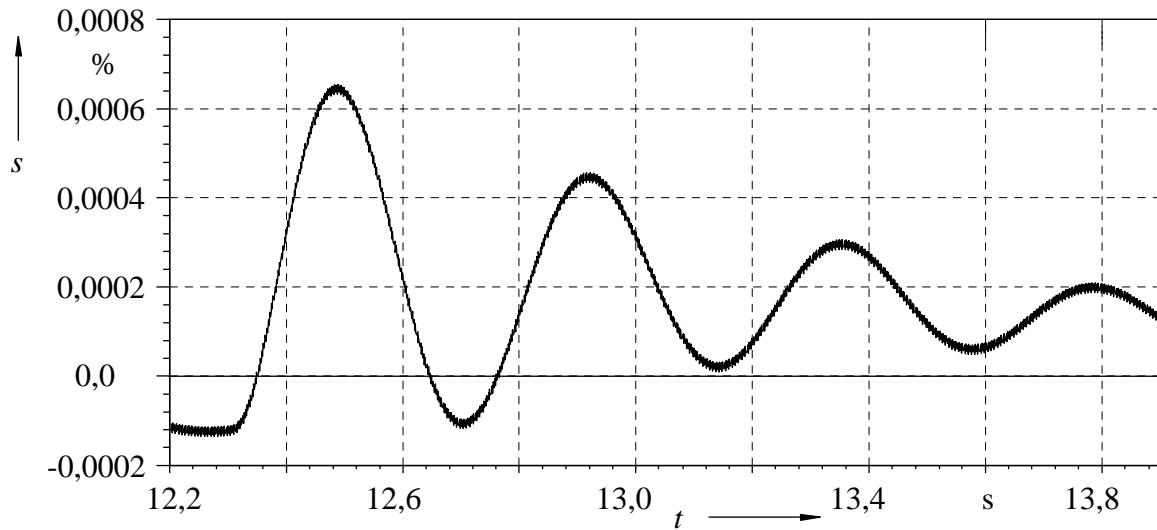


Bild 6.19: Rotorschlupf nach plötzlichem Eintritt eines Windungsschlusses in Windung 1.

Einen weiteren, scheinbar einflussreichereren mechanischen Effekt stellt der einseitige magnetische Zug dar. Dieser ist durch die Asymmetrie der Rotordurchflutung und des resultierenden magnetischen Feldes nach einem Windungsschluss gegeben. Für zwei der betrachteten Fälle sind die Kraftkomponenten in Richtung der Rotorpolachse F_d und quer dazu F_q als Trajektorien aufgeführt. Offensichtlich tritt ein von Null verschiedener Mittelwert des Kraftbetrages auf. Der Kraftvektor wirkt dabei nicht ausschließlich in Richtung der Rotorpolachse, sondern weist ebenso eine q-Komponente auf, die jedoch weit niedriger als die d-Komponente ist. Da vorliegend die Feldschwächung, d. h. der Ort der Windungsschlüsse, im Bereich der positiven d-Achse gegeben ist, wirkt die Kraft vorwiegend in negativer d-Richtung. Windungsschlüsse mit stärkerer Asymmetrie bewirken dabei ein größeres Ungleichgewicht als jene, die aufgrund ihrer Nähe zur Rotorquerachse diesbezüglich eine geringere

Wirkung nach sich ziehen. In den Bildern 6.20 und 6.21 werden die Extremfälle gezeigt. Das Minimum des Kraftbetrages, das bei Kurzschluss von Windung Nr. 41 auftritt, ist nur ca. ein Zehntel des Maximums, das sich für den Kurzschluss der Windung Nr. 5 ergibt.

Neben dem konstanten einseitigen Zug tritt in beiden Komponenten der Kraft eine Schwingung mit sechsfacher Netzfrequenz auf, d. h. hier 360 Hz. Der Kraftvektor beschreibt einen kreisförmigen oder elliptischen, gegen die Maschinendrehrichtung orientierten Orbit, wie die Bilder 6.20 und 6.21 zeigen. Obschon die Kraftamplituden recht hoch erscheinen, bleibt fraglich, ob Biegeschwingungen, die als Hinweis auf einen Rotorwindungsschluss gewertet werden könnten, angesichts der hohen Rotormasse und anderer Störungen des Rundlaufs im praktischen Betrieb nachweisbar sind.

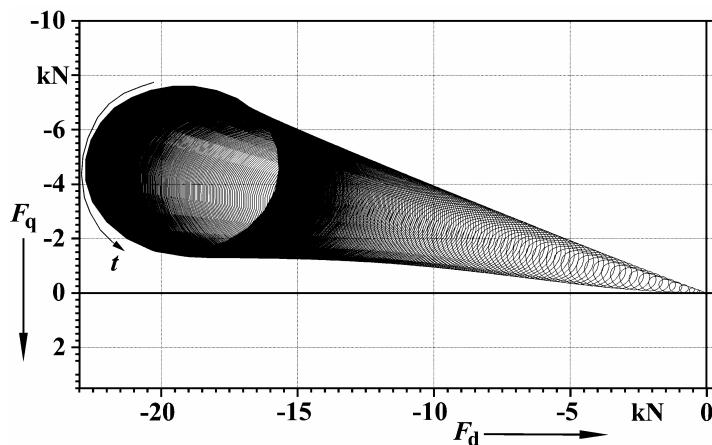


Bild 6.20:
Ortskurve des Kraftvektors im Rotorbezugssystem nach plötzlichem Kurzschluss von Windung Nr. 5 aus [Kl01b].

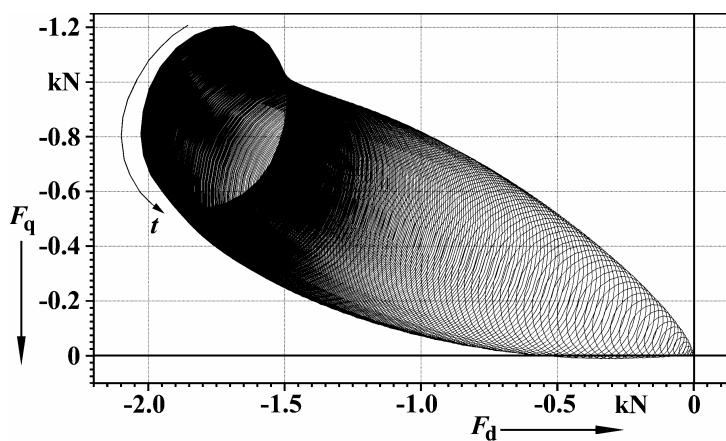


Bild 6.21:
Ortskurve des Kraftvektors im Rotorbezugssystem nach plötzlichem Kurzschluss von Windung Nr. 41 aus [Kl01b].

Zusammenfassend ist anzumerken, dass die FD-Zeitschrittrechnung einen tiefen Einblick in die Auswirkungen eines Rotorwindungsschlusses auf verschiedene Größen in einem Synchrongenerator gewährt. Als wesentliches Ergebnis fällt jedoch auf, dass diese Auswirkungen in der Betriebspraxis aufgrund ihrer Geringfügigkeit nicht als messbare Kriterien zum Nachweis eines Rotorwindungsschlusses herangezogen werden können.

6.2.2 Hochlauf eines Schleifringläufersynchronmotors mit einphasiger Rotorunterbrechung

Konventionelle Modelle rotierender elektrischer Maschinen beruhen häufig auf der Annahme symmetrischer Verhältnisse, die im Falle schwerwiegender Fehler jedoch nicht mehr gegeben sind. Die Auswirkungen entsprechender Fehler lassen sich demzufolge nur mit entsprechend angepassten Methoden bestimmen.

Nachfolgend wird die Berechnung des Hochlaufs einer Schleifringläufersynchronmaschine mit einphasiger Rotorkreisunterbrechung im Vergleich zum Hochlauf der intakten Maschine beschrieben. Diese Berechnung wurde notwendig, nachdem in einem industriellen Inselnetz der wiederholte Hochlauf eines derartig vorgeschädigten Asynchronmotors zu erheblichen Folgeschäden an den speisenden Generatorsätzen geführt hatte. Der Primärfehler der Asynchronmaschine war während des Hochlaufs mit fremdfrequenten Stromsystemen aus der Rückwirkung des schadhaften Asynchronmotors sowie mit zughörigen Leistungsschwankungen im Inselnetz verbunden. Die resultierenden Pendelmomente in den einspeisenden Turbinen-Generatorsätzen führten schließlich zur Zerstörung der Wellenstränge durch Torsionsresonanzen.

In Bild 6.22 sind die wesentlichen Elemente des simulierten Teilsystems dargestellt. Eingangsseitig wird ein starres Netz zu Grunde gelegt, das formal über Zuleitungsimpedanzen, die auch Längersatzelemente von Transformatoren beinhalten könnten, an den Ständer der Asynchronmaschine angeschlossen ist. Diese Zuleitungsimpedanzen werden jedoch hier auf einen vernachlässigbar niedrigen Wert gesetzt.

Die im vorangegangenen Kapitel beschriebene Betrachtung der Rotorwicklungen einer Drehfeldmaschine vorrangig als Zweige eines Netzwerkes mit beliebiger Topologie ermöglicht nicht nur die Modellierung eines Schleifringläufers, sondern auch der Anlasswiderstände, die hier vereinfachend als lineare Zeitfunktionen $R_A(t) = R_{A,0} \cdot (1 - t / t_E)$ mit einer Endzeit t_E von 21 s vorgegeben werden. Zur Erfassung der einphasigen Unterbrechung wird in einem Rotorkreis der Anlasswiderstand auf einen hohen Wert von 400 kΩ gesetzt. Für die Simulation der Hochläufe wird des Weiteren die Dynamik der Last berücksichtigt, die nicht nur mit ihrem Massenträgheitsmoment, sondern auch mit einer nichtlinearen Drehzahl-Drehmoment-Charakteristik als stationäre Lastmomentkennlinie eingeht.

Die so berechneten Zeitverläufe für Ströme und Leistungen dienten als Grundlage für die Analyse des Verhaltens der Generatorsätze in dem Inselnetz, indem sie als Eingabedaten für eine umfassende Netzwerkberechnung des Inselnetzes mit Parkscher Darstellung der Synchronmaschinen herangezogen wurden. Die elektrischen Momente der Synchron-

maschinen konnten schließlich für eine Wellenermüdungsberechnung herangezogen werden. Die Finite-Differenzen-Zeitschrittrechnung konnte hier im Wesentlichen jene Ergebnisse bestätigen, die, basierend auf einer Netzwerkmodellierung von Ständer und Rotor der Schleifringläufermaschine und Lösung des zugehörigen Differentialgleichungssystems, erzielt wurden, ohne jedoch einschränkende Annahmen über die Feldverteilung hinsichtlich der Grund- und Oberwellen oder bei der Berechnung von Netzwerkelementen machen zu müssen.

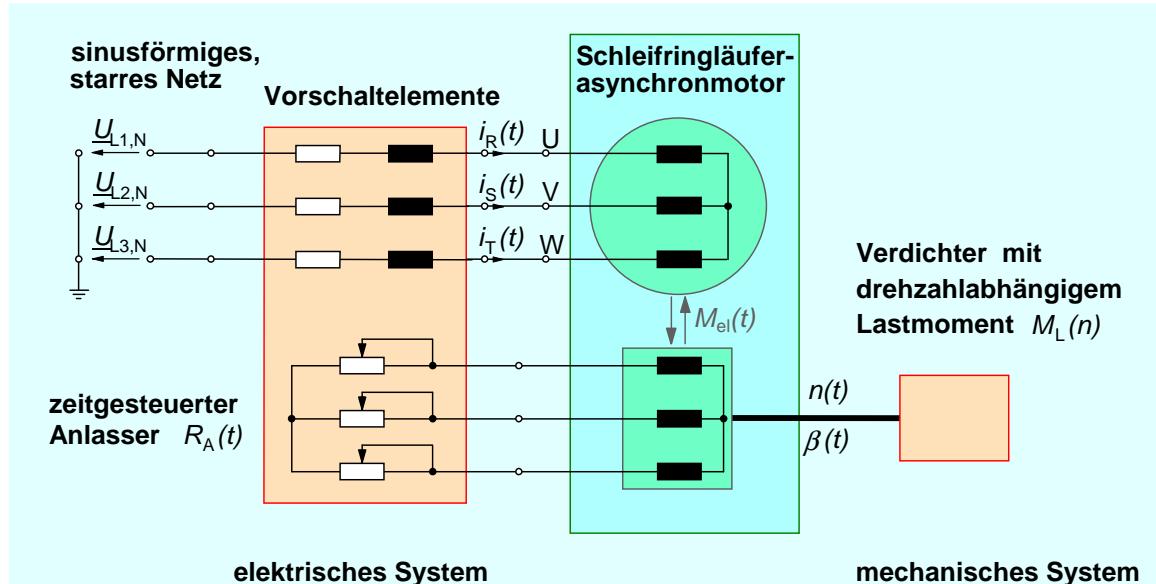


Bild 6.22: Schema des Schleifringläuferantriebs mit wesentlichen Komponenten für die Berechnung des Hochlaufvorganges. Daten: $U_{\text{verk}} = 13,8 \text{ kV}$, $P_N = 7 \text{ MW}$, $f = 60 \text{ Hz}$, $2p = 4$, $J_{\text{ges}} = 1540 \text{ kgm}^2$.

Bild 6.23 zeigt den berechneten Zeitverlauf der Drehzahl beim Hochlauf einer intakten Maschine und bei Unterbrechung einer Rotorphase. Während die intakte Maschine innerhalb von 22 s ihre Betriebsdrehzahl erreicht, auf die sie sich einschwingt, sinkt in der Berechnung bei der beschädigten Maschine die Drehzahl aufgrund eines verringerten Drehmomentes nach Reduktion des Anlasswiderstandes auf 0Ω wieder ab. Dies ist dadurch bedingt, dass für die Rechnung keine Drehzahlsteuerung des Flüssigkeitsanlassers vorgesehen war.

Für die Veranschaulichung der Asymmetrie sind andere Zeitverläufe geeigneter. Bildet man für alle Ständerstrangströme gleitende Effektivwerte gemäß

$$i_{1,\text{eff}}(t) = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} i^2 dt}, \quad (6.12)$$

so zeigen die Verläufe bei intakter Maschine in Bild 6.24 keine wesentlichen, höherfrequenten Fluktuationen, die auf netzfremde Stromsysteme hinweisen würden. Im Anfangsbereich sind

die Werte aufgrund des langsam abklingenden Einschaltvorgangs in den drei Strängen unterschiedlich. Nach etwa 12 s ergeben sich aber in allen Strängen nahezu identische Verläufe. Auch die relativ starken, nach ca. 21 s auftretenden Stromschwankungen während des Einpendelns in den Endbetriebszustand verlaufen synchron.

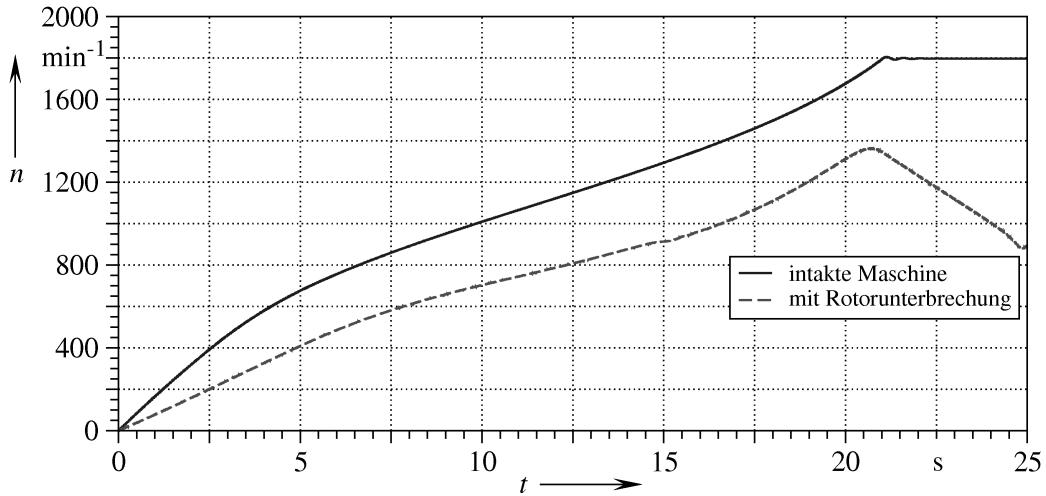


Bild 6.23: Drehzahlzeitverläufe aus berechneten Hochläufen von intakter und geschädigter Maschine.

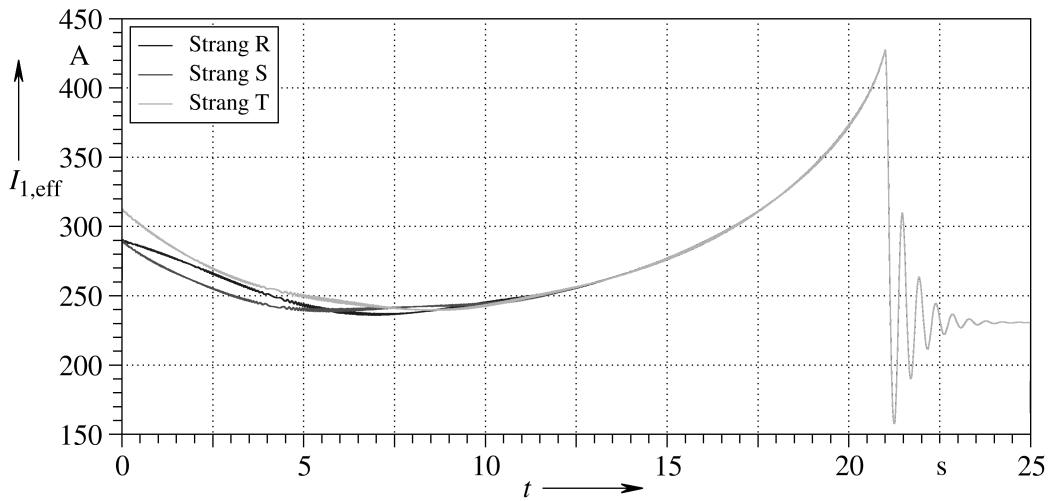


Bild 6.24: Gleitend berechnete Effektivwerte der Ständerstrangströme über Intervalle von einer Periodendauer $T = 1/60$ s aus berechneten Hochläufen bei intakter Maschine.

Berechnet man aus den drei Stromverläufen $i_R(t)$, $i_S(t)$ und $i_T(t)$ den Raumzeiger des Ständerstroms nach

$$I_1(t) = \frac{2}{3} \cdot \left(i_R(t) + e^{j\frac{2\pi}{3}} i_S(t) + e^{j\frac{4\pi}{3}} i_T(t) \right) = \frac{2}{3} (1 - j) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_R(t) \\ i_S(t) \\ i_T(t) \end{pmatrix}, \quad (6.13)$$

so ergibt sich für diesen im unmittelbaren Anlaufbereich eine nahezu kreisförmige Ortskurve in der komplexen Ebene, deren Mittelpunkt aufgrund des Einschaltvorgangs nicht mit dem Koordinatenursprung zusammenfällt. Während des Hochlaufvorgangs strebt der Mittelpunkt mit abklingendem Gleichanteil der Ströme gegen den Koordinatenursprung, andeutungsweise in Bild 6.25 links zu erkennen. Der Bahnradius, der hier dem Amplitudenwert der Ströme entspricht, ändert sich entsprechend der Stromaufnahme der Maschine und pendelt sich letztlich auf einen stationären Endwert ein. Dieser wird in Bild 6.25 rechts für die letzten 4 s des berechneten Hochlaufs gezeigt. Die einem Sechseck ähnelnde Gestalt im Übergangsbereich ist auf überlagerte Oberströme zurückzuführen. Diese tragen in unmittelbarer Nähe zum Synchronismus mit ca. siebenfacher Netzfrequenz als Mitsystem und fünffacher Netzfrequenz als Gegensystem zum Gesamtstrom bei, wie später auch Bild 6.29 verdeutlicht.

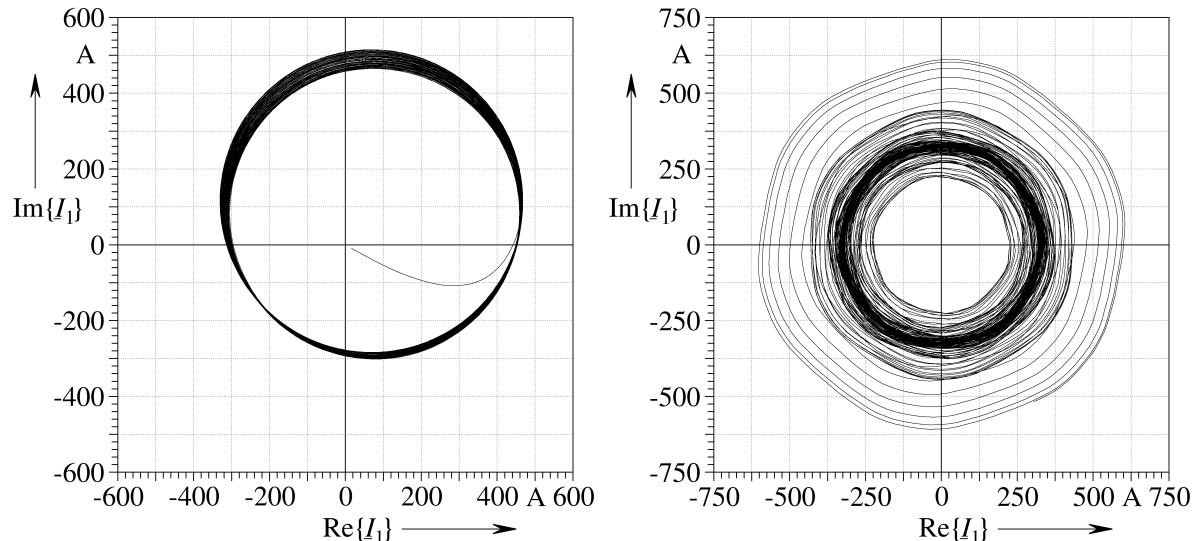


Bild 6.25: Ortskurve des Ständerstromraumzeigers im Ständerkoordinatensystem bei intakter Maschine. Links bis 1,0 s nach Beginn des Hochlaufs, rechts von $t = 21$ s bis 25 s.

Eine Anwendung von (6.13) auf die Rotorströme liefert den Rotorstromraumzeiger im Rotorkoordinatensystem. Auch hier zeigt sich deutlich eine Kreisbahn im Anlaufbereich, deren Mittelpunkt nach Bild 6.26 links gleichsam sofort mit dem Ursprung des Koordinatensystems zusammenfällt. Dies hängt mit der niedrigen Zeitkonstante des Rotorkreises zusammen, die durch den hohen Anlasswiderstand bedingt ist. Bild 6.26 rechts zeigt die Ortskurve des Rotorstromraumzeigers für den Übergang in den stationären Betriebszustand. Deutlich zu erkennen ist hier neben den Oberstromeinflüssen auch der Einpendelvorgang, der gleichermaßen Betrag und Phase des Stromzeigers betrifft und in einen mit Schlupffrequenz durchlaufenen Kreis mündet.

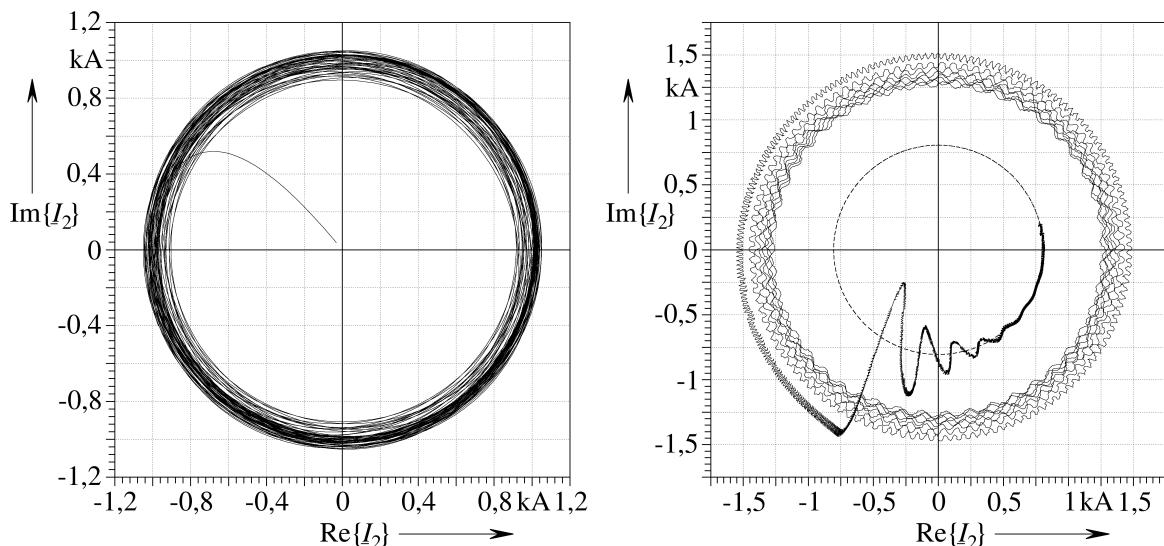


Bild 6.26: Ortskurve des Rotorstromraumzeigers im Rotorkoordinatensystem bei intakter Maschine. Links bis 1,0 s nach Beginn des Hochlaufs, rechts von $t = 19$ s bis 25 s, mit Schlupffrequenz stationär durchlaufene Kreisbahn gestrichelt.

Bei der vorgeschädigten Maschine treten dagegen erhebliche Symmetriefehler auf, die sich schon bei der Bildung der gleitenden Effektivwerte nach (6.12) zeigen. In Bild 6.27 ergeben sich keine konstanten oder nur langsam zeitveränderliche Werte, sondern starke höherfrequente Schwankungen, die aus der nicht netzfrequenten Rückwirkung des Rotors resultieren. Bei dieser handelt es sich um ein gegenläufiges Stromsystem der Frequenz $(1 - 2 \text{ s})f_N$, das in der Raumzeigerdarstellung in Bild 6.28 links im Anlaufbereich zu einer Rosettenbildung führt. Ausgehend von einer Ellipse, die sich aus der Überlagerung von Mit- und Gegensystem gleicher Frequenz im Stillstand ergibt, resultiert die mit der beginnenden Rotordrehung einsetzende betragsmäßige Abnahme der Frequenz des Gegensystems in einer Drehung dieses elliptischen Orbits. Die Beschleunigung des Rotors ist in Bild 6.28 links an dem zunehmenden Winkelversatz der großen Halbachse der Ellipsen deutlich zu erkennen. In Bild 6.28 rechts ist die Drehzahl der Maschine und die Frequenz des rückwirkend induzierten Gegensystems dagegen so hoch, dass eine entsprechende Zuordnung einzelner Orbiten nicht mehr möglich ist. Stattdessen wird eine Kreisringfläche zwischen einem Minimal- und einem Maximalwert der Amplitude des Stromraumzeigers überstrichen. Dieses sind wesentliche Unterschiede zu den Bildern 6.25, wo sich kreisförmige Orbiten ergaben.

Eine Darstellung des Rotorstromraumzeigers im Rotorkoordinatensystem erübrigत sich für die Maschine mit Rotorunterbrechung, da er sich wegen $i_{S,2} = 0$ und $i_{R,2} = -i_{T,2}$ auf eine Strecke mit der Steigung $\sqrt{3}/3$ reduzieren würde.

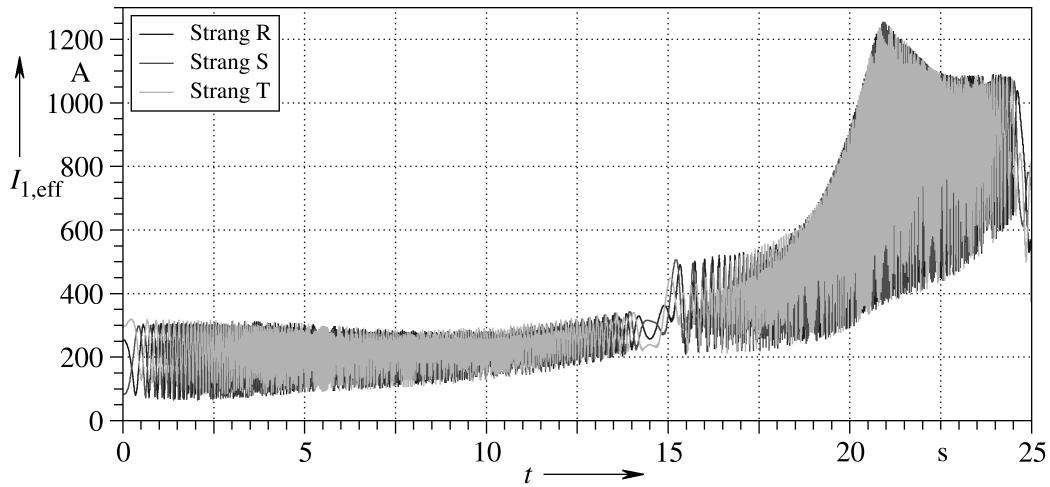


Bild 6.27: Gleitend berechnete Effektivwerte der Ständerstrangströme über Intervalle von einer Periodendauer $T = 1/60$ s aus berechneten Hochläufen bei Maschine mit Rotorkreisunterbrechung.

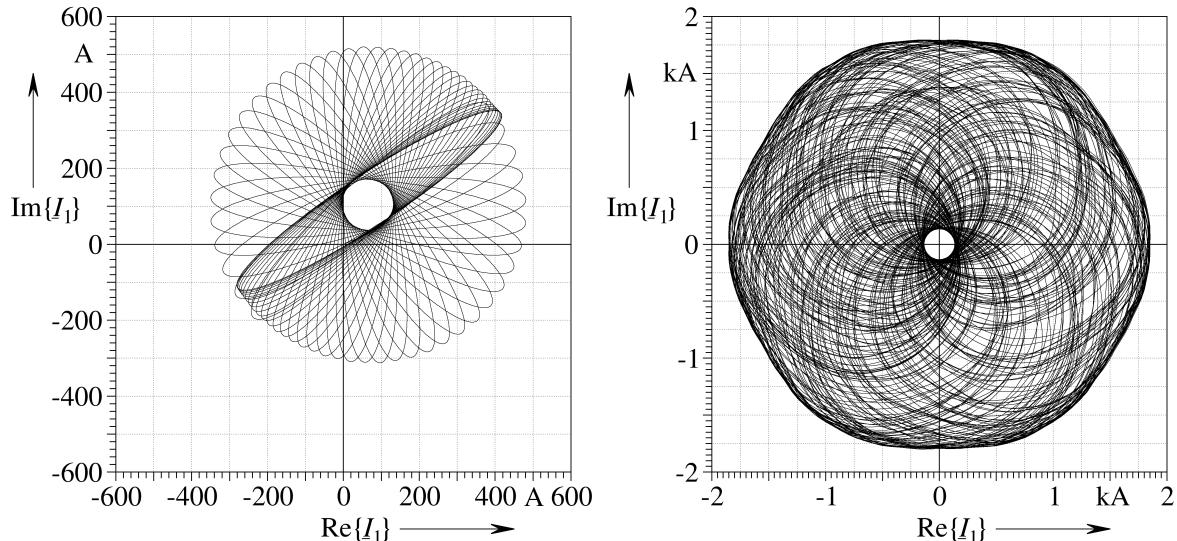


Bild 6.28: Ortskurve des Ständerstromraumzeigers im Ständerkoordinatensystem bei Unterbrechung eines Rotorstranges. Links bis 0,65 s nach Beginn des Hochlaufs, rechts von $t = 21$ s bis 25 s.

Unterzieht man die komplexen Ständerstromraumzeiger einer gleitenden Fast-Fourier-Transformation (FFT) wie in Bild 6.29, so erhält man Spektrogramme, in denen die Vorzeichen der Frequenzen die Drehrichtungen zugehöriger Stromsysteme anzeigen. Es werden Fenster von 8192 Stützstellen entsprechend einer Fensterweite von ca. $\Delta t_w = 0,455111$ s verwendet. Eine Gewichtungsfunktion $w(\tau) = \cos^2(\pi \cdot \tau / \Delta t_w)$ dämpft hierbei die Flanken des Fensters ab und reduziert so die Aliaseffekte der FFT. Der Betrag der komplexen Fourier-transformierten des komplexen Raumzeigers wird in Bild 6.29 mit 0,25 potenziert. Hierdurch ergibt sich eine Grauskalierung der Signalintensität, die neben den Grundströmen auch wesentliche Oberströme qualitativ entsprechend ihrer Größe darzustellen vermag.

Der Vergleich der so erstellten Spektrogramme des Ständerstromraumzeigers in Bild 6.29 zeigt bei der geschädigten Maschine eine zusätzliche drehzahlabhängige Linie in ähnlicher Stärke wie die Grundschwingung, die im Stillstand der Maschine mit negativer Grundfrequenz, d. h. als Gegensystem beginnt. Bei ca. 14,5 s hat diese Linie ihren Frequenznulldurchgang, was sich auch in Bild 6.27 bei der Bildung der gleitenden Effektivwerte zeigt. Des Weiteren treten gegenüber der intakten Maschine zusätzliche Oberstromlinien auf. In beiden Spektrogrammen tritt auch der abklingende Gleichanteil des Ständerstroms als Linie bei der Frequenz Null auf, die in etwa nach 17,5 s abgeklungen ist.

Das starke Stromgegensystem mit der schlupfabhängigen Frequenz $(1 - 2 \text{ s}) f_N$ führt in den Generatoren des Inselnetzes zu einem gegenläufigen Feld, dessen Wechselwirkung mit den Erregerfeldern der Rotoren Pendelmomente mit Frequenzen von doppelter Schlupffrequenz des Asynchronmotors $2 \text{ s } f_N$ erzeugt. Bei langsamem quasistationären Hochläufen der defekten Maschine werden so die Resonanzfrequenzen der Wellenstränge regelmäßig langanhaltend angeregt, was letztlich zur Zerstörung derselben führt.

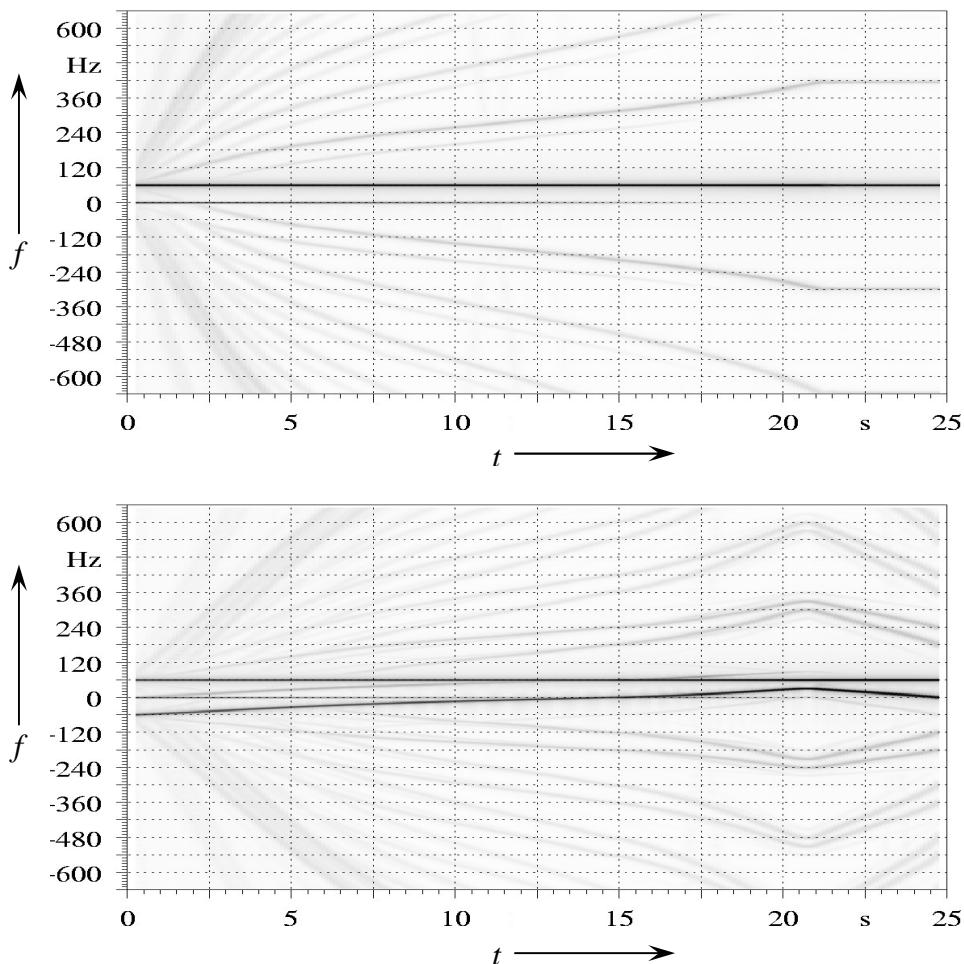


Bild 6.29: Spektrogramme des Ständerstromraumzeigers während des Hochlaufs der Maschine mit intakter Rotorwicklung oben und mit einphasiger Unterbrechung im Rotor unten.

6.2.3 Windungsschlüsse im Ständer von Synchronmaschinen

Neben den im Betrieb schwer zu diagnostizierenden Rotorwindungsschlüssen, die in Kap. 6.2.1 behandelt wurden, stellen ebenso die Ständerwindungsschlüsse wesentliche Fehler einer elektrischen Maschine dar, die abhängig von Art und Lage des Fehlers deutlich spürbare Auswirkungen nach sich ziehen.

Die Anwendung der numerischen Feldberechnung ermöglicht es, die Auswirkungen von Windungsschlüssen für verschiedene Szenarien vorherzusagen. Lokale Einflüsse, wie z. B. die Eisensättigung in unmittelbarer Nähe der kurzgeschlossenen Windung können dabei in einer transienten Rechnung direkt berücksichtigt werden, was bei erweiterten netzwerkbasierter Modellen der Maschinenentwicklung mit Induktivitätsmatrizen aus statischen Feldberechnungen [Kul90] nicht ohne weiteres möglich ist. Experimentelle Untersuchungen an ausgeführten Maschinen sind aufgrund des hohen Aufwandes, der u. a. aus der Notwendigkeit, die Ständerwicklung zu beschädigen, hervorgeht, nicht in ausreichendem Umfang möglich, sondern allenfalls in Einzelfällen an abgeschriebenen Generatoren durchführbar und auch dann sehr kostspielig.

In der vorliegenden Untersuchung [Kl06] werden drei mögliche Fehlerstellen im Wickelkopf für Windungsschlüsse innerhalb einer Spulengruppe angenommen und drei weitere Fehlerstellen für Phasenschlüsse, d. h. Kurzschlussverbindungen zwischen den Windungen von Spulengruppen unterschiedlicher Strangzughörigkeit. Die sechs Spulengruppen der parallel im Stern geschalteten Wicklungsstränge werden dazu in jeweils zwei Teilwicklungen aufgespalten. In dem Stromlaufplan nach Bild 6.30 sind dies die Teilwicklungen $w_1 - w_7$ und $w_{10} - w_4$ für den Strang U, $w_2 - w_8$ und $w_{11} - w_5$ für den Strang V sowie $w_3 - w_9$ und $w_6 - w_{12}$ für den Strang W. Die Beiträge der Teilwicklungen zum ohmschen Widerstand und zur Wickelkopfstreuung einer Spulengruppe sind dabei in den ohmsch-induktiven Elementen RL_4 bis RL_{15} aufgeführt. Diese werden anteilig aus dem Gesamtbeitrag einer Spulengruppe in linearer Abhängigkeit zur jeweiligen Windungszahl der Teilwicklung berechnet. Im unstörten Fall ergibt sich damit der volle Gruppenbeitrag der in Serie geschalteten Teilwicklungen. Induktive Wechselwirkungen im Wickelkopf, die im Fehlerfall möglicherweise zum Tragen kommen, werden allerdings durch reine Selbstinduktivitäten nicht berücksichtigt, sondern würden die genaue Berechnung zugehöriger Gegen- und Selbstinduktivitäten erfordern. Hierbei wären letztere eher in Abhängigkeit des Quadrates der Teilwindungszahlen zu sehen. Die drei ohmsch-induktiven Zweige $RL_{1\dots 3}$ beinhalten die Netzimpedanz und die Streuung des Maschinentransformators, dessen relative Kurzschlussspannung zu 11 %

angenommen wird. Der Sternpunkt der Maschine wird aus Gründen einer symmetrischen Vorgabe der Netzwerkmaschengleichungen über ein ohmsch-kapazitives Zweigelement mit vernachlässigbar kleiner Admittanz geerdet. Hierdurch kann in den Ausgaben auch auf die Sternpunktspannung zugegriffen werden.

Die Teilwicklungen w_1, w_2 und w_3 haben jeweils eins, zwei und drei Windungen und können zur Simulation von Windungsschlüssen innerhalb einer Spulengruppe niederohmig überbrückt werden. Die Trennknoten zwischen den Teilwicklungen $w_{10} - w_4$ und $w_{11} - w_5$ sowie $w_6 - w_{12}$ können durch entsprechende Widerstandszweige untereinander verbunden werden, um auf diese Weise Phasenschlüsse darzustellen.

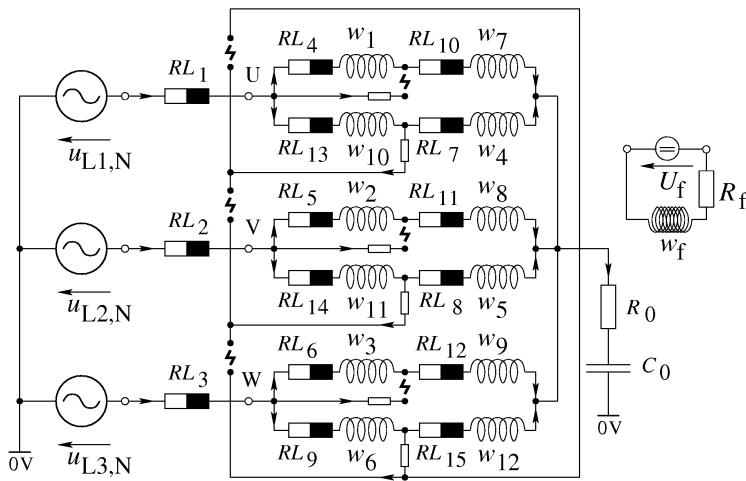


Bild 6.30:

Netzwerkanordnung der Ständerwicklung mit Teilwicklungen $w_{1\dots 12}$ und konzentriert ohmsch-induktiven Elementen $RL_{4\dots 15}$ für Wicklungswiderstände und Beiträge zur Wickelkopfstreuung [Kl06].

Für den ungestörten Betrieb werden die Verbindungswiderstände in den angenommenen Fehlerstellen auf $10^{12} \Omega$ gesetzt. Zu einem vorgesehenen Zeitpunkt des stationären Betriebs hier $t_{KS} = 3,5$ s wird für die Einleitung eines Störfalls der entsprechende Widerstand auf einen Wert von $5 \text{ m}\Omega$ reduziert. Im Gegensatz zu der netzwerkbasierteren und über die Definition geeigneter Verbindungsmaatrizen formalisierten Methode von Kulig [Kul79, KBL86] wird bei der Berechnung mit FELMEC die Topologie des Netzwerkes über willkürlich durch den Benutzer formulierte Maschenumläufe und Knotengleichungen beschrieben. Es müssen bereits im Vorfeld alle zu erwägenden Kurzschlüsse durch zugehörige Zweigelemente sowie die zu verwendende Zerlegung in Teilwicklungen festgelegt werden. Eine Auflösung der Wicklung bis auf Einzelpulenebene findet dagegen nicht statt.

Die Positionen der angenommenen Fehlerstellen im Wickelkopf sind im Wicklungsplan Bild 6.31 aufgeführt. Kurzschlüsse an den gekennzeichneten Kreuzungspunkten der Leiter ergeben unterschiedliche Anzahlen von Windungen der Teilwicklungen in den betroffenen Spulengruppen. Die Fälle unterscheiden sich des Weiteren in den betroffenen Phasen. Tabelle 6.2 gibt eine kurze Charakteristik der Störfälle.

Die bei reinen Windungsschlüssen überbrückten Windungen in den Spulengruppen sind in Bild 6.31 durch Kreuze „ \times “ gekennzeichnet. Windungen, die bei Phasenschlüssen Kurzschlusspfade über den Sternpunkt bilden, werden durch einen Pfeil „ \uparrow “ markiert.

Tabelle 6.2: Charakterisierungen und Abkürzungen für in [Kl06] untersuchte Störfälle.

Störfall	Phasen	Spulengruppe	Betroffene Windungen
ws_I	U	positive	zweite von Klemme U ausgehend
ws_II	V	positive	fünfte und sechste von Klemme V ausgehend
ws_III	W	negative	dritte, vierte und fünfte (mittlere Windungen)
ps_I	U / V	negativ / negative	erste / erste und zweite vom Sternpunkt N ausgehend
ps_II	V / W	negativ / positive	erste und zweite vom Sternpunkt N ausgehend / erste bis dritte von Klemme W ausgehend
ps_III	W / U	positiv / negativ	erste bis dritte von Klemme W ausgehend / erste vom Sternpunkt N ausgehend

Teilwicklung Nr.:

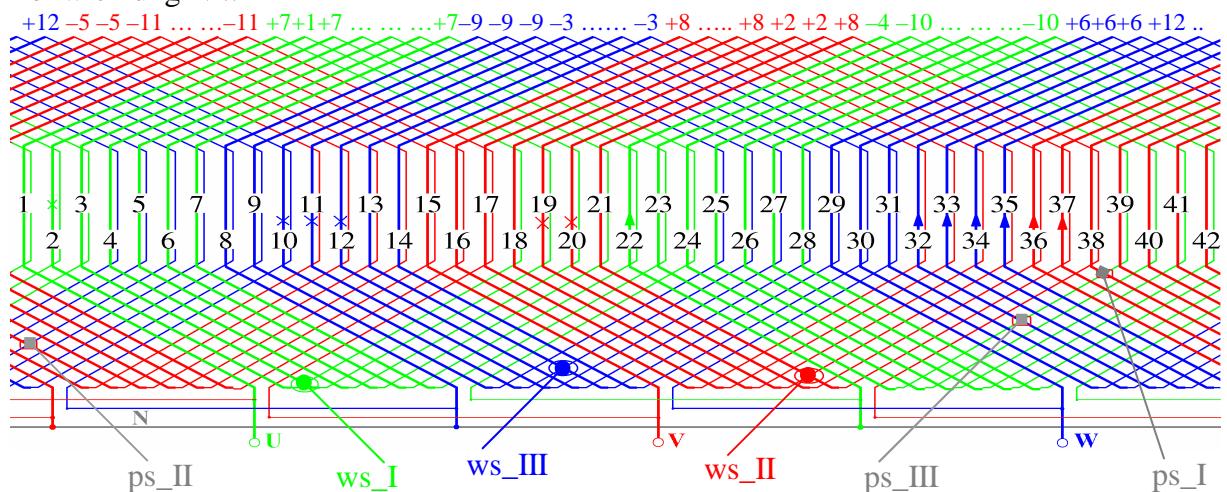


Bild 6.31: Wicklungsschema des untersuchten 775 MVA-Synchrongenerators mit angenommenen Störstellen für Windungsschlüsse innerhalb von Spulengruppen (o) und zwischen unterschiedlichen Phasen () [Kl06].

Die Simulationsrechnungen der Fehlerfälle beginnen wie erwähnt mit der Einleitung des zugehörigen Kurzschlusses. Eine kurze Zeitspanne nach Eintritt des Fehlers, hier 0,2 s, wird die Maschine vom Netz getrennt. Gleichzeitig wird durch ein sprungartiges Nullsetzen der Erregerspannung U_f die Entregulation der Maschine eingeleitet.

Bei allen sprungartigen Änderungen der Netzwerkelemente wird der Zeitschrittparameter θ auf Null gesetzt. Für alle anderen Zeitschritte wird er dagegen zu 0,49 gesetzt. Die Zeitschrittweite beträgt durchgehend $h = 111,111 \mu\text{s}$.

Bei allen untersuchten Störfällen können sehr hohe Ströme in den Kurzschlussverbindungen festgestellt werden. Die zeitlichen Verläufe weisen alle eine qualitativ ähnliche Gestalt auf, die wie in Bild 6.32 durch einen schnell abklingenden asymmetrischen Anteil gekennzeichnet sind, dessen Ausprägung stark von der Phasenlage bei Auftreten des Fehlers abhängt. Der Effektivwert des Dauerkurzschlussstroms $I_{KS, eff, Netz}$ in dem Verbindungselement bei mit dem Netz verbundener Maschine wird innerhalb von ca. 150 ms angenommen. Er wird allein durch die Netztrennung nicht sehr stark reduziert. Nach Tabelle 6.3 ist der Stromeffektivwert unmittelbar nach Netztrennung, $I_{KS, eff, 0}$, höchstens um etwa 20 % niedriger als der vorherige Wert $I_{KS, eff, Netz}$. Auch nach 1,8 s des Entregungsvorganges fließt noch ein beträchtlicher Strom mit einem Effektivwert $I_{KS, eff, 1.8 s}$ in dem Kurzschlusspfad, der in etwa dem halben Wert zu Beginn der Entregung unmittelbar nach der Netztrennung entspricht.

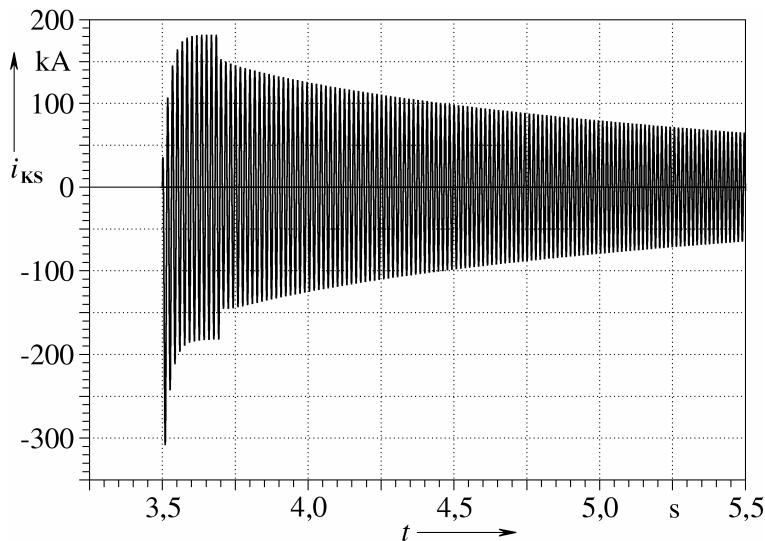


Bild 6.32:

Strom in Kurzschlussverbindung bei Windungsschluss in Strang W, Fall ws_III [Kl06].

Tabelle 6.3: Charakteristische Werte des Kurzschlussstromverlaufs [Kl06]. Zum Vergleich: Bemessungswert des Stroms in einer Spulengruppe: $I_{eff, Gruppe} = 8,6$ kA.

	$ i_{KS, max} $	$I_{KS, eff, Netz}$	$I_{KS, eff, 0}$	$I_{KS, eff, 1.8 s}$
Störfall	kA	kA	kA	kA
ws_I	215,2	107,8	107,9	59,96
ws_II	207,9	118,7	105,5	51,14
ws_III	307,4	128,2	104,8	45,48
ps_I	139,4	96,6	87,8	41,25
ps_II	250,1	113,5	79,72	29,89
ps_III	259,2	103,5	79,56	34,87

Der Verlauf des Erregerstroms in Bild 6.33 weist eine leichte Anhebung während des Windungsschlusses mit noch am Netz laufender Maschine auf. Dies ist dadurch erklärbar, dass der Stoßkurzschluss eines Teils der Windungen zu einem Verlust an Grundwellenankerdurchflutung führt, da in den betroffenen Windungen quasi unmittelbar nach Eintritt des Kurzschlusses nur noch induzierte Kreisströme auftreten. Die dadurch hervorgerufene Feldänderung geht mit einem Induktionsvorgang einher, der eine teilweise Kompensation der fehlenden Grundwellendurchflutung im Ständer durch einen zusätzlichen Erregerstrom im Rotor bewirkt.

Nach der Netztrennung der Maschine und Nullsetzung der Erregerspannung fällt der Erregerstrom zunächst steil ab und geht anschließend in einen flacheren Verlauf über. Die induktive Wechselwirkung zwischen Dämpferstäben sowie Massiveisen einerseits und der Erregerwicklung andererseits bewirkt hier diesen angenähert doppelt exponentiellen Verlauf. Dabei ist die kleine Zeitkonstante, deren Einfluss anfänglich deutlich zu sehen ist, durch die Streuung zwischen den beiden Ersatzstromkreisen bedingt, während das spätere Abklingen des Erregerstroms gemäß der größeren Zeitkonstante dem sinkenden Hauptfluss dieser beiden Kreise zuzuordnen ist. Der schnelle Ausgleichsvorgang mit der kleineren Zeitkonstante ist mit einer induktiven Übernahme der abfallenden Erregerdurchflutung durch eine entsprechend steigende Durchflutung der Dämpferstäbe und des Massiveisens im Rotor verbunden. Dadurch ändern sich die Rotorgesamtdurchflutung und auch der Hauptfluss in direkter Richtung nahezu ausschließlich mit der größeren Zeitkonstante. Da der Rotorgesamtfluss bei vom Netz getrennter Maschine die einzige Einflussgröße für die Induktionsvorgänge im Stator ist, ist also das Abklingen induzierter Statorspannungen ebenso einzig durch den langsameren Ausgleichsvorgang gekennzeichnet. Der doppelt exponentielle Charakter des Entregungsvorganges tritt dementsprechend nicht in dem induzierten Kurzschlussstrom nach Bild 6.32 auf.

Des Weiteren hat die magnetische Nichtlinearität des Eisens einen gewissen Einfluss auf die Verläufe. Die induzierten Spannungen im Ständer verhalten sich der Leerlaufkennlinie entsprechend degressiv ansteigend in Abhängigkeit vom Erregerstrom. Auch deswegen kann ein anfänglicher steiler Abfall des Erregerstroms nicht auf einen ähnlich steilen Abfall des induzierten Teilwicklungskurzschlussstroms abgebildet werden. Im Gegensatz zur nahezu linearen Charakteristik des Ständerstroms beim dreipoligen Dauerkurzschluss ist vermutlich bei einem Windungsschluss nicht mit einer linearisierenden Entättigung des gesamten magnetischen Kreises durch das Feld der induzierten Gegendurchflutung des Ständers zu rechnen.

Im Zeitverlauf des Erregerstroms ist weiterhin ein überlagerter netzfrequenter Anteil zu erkennen, der durch die elektromagnetische Asymmetrie der Ständerwicklung mit Kurzschlusswindungen induziert wird.

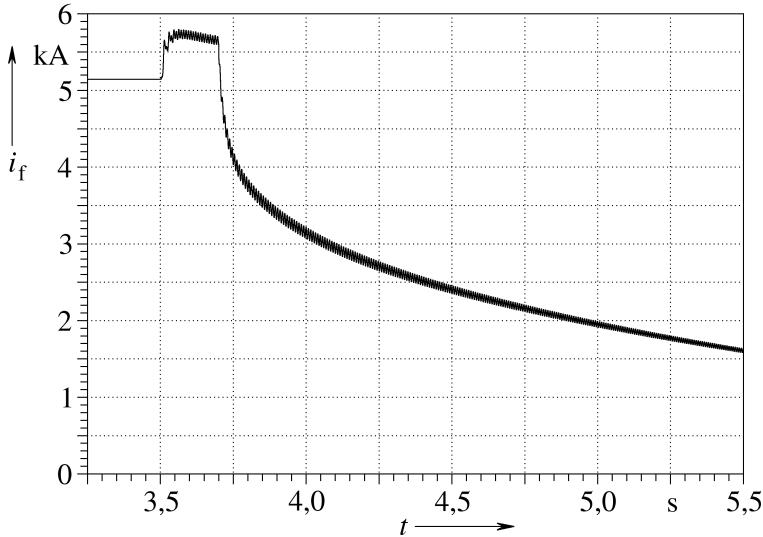


Bild 6.33:

Zeitverlauf des Erregerstroms i_f während eines Windungsschlusses in Strang W und Entregung der Maschine, Fall ws_III [Kl06].

Die Netzströme, die in den Netzwerkelementen $RL_{1\dots 3}$ geführt werden, sind für drei Fälle, nämlich ws_I, ws_III und ps_II, in den Bildern 6.34a bis 6.34c dargestellt. Sie setzen sich jeweils aus den Teilströmen der beschädigten und der unbeschädigten Spulengruppen zusammen. Im Fall ws_I ist die Phasenlage der Spannungen bei Eintritt des Kurzschlusses derart, dass ein transienter Einschaltvorgang mit exponentiell abklingendem Gleichanteil kaum angeregt wird. Im Gegensatz dazu weist der Stromverlauf in den Fällen ws_III und ps_II diesen abklingenden Einschaltvorgang unmittelbar nach Eintritt des Fehlers auf, wie er auch in Bild 6.32 für den Kurzschlussstrom im Fall ws_III aufgeführt ist. Bei den untersuchten reinen Windungsschlüssen ist der transiente Einschaltvorgang für den Fehlerfall mit drei überbrückten Windungen in Strang W am stärksten ausgeprägt. Die auch nach Abklingen des Einschaltvorganges asymmetrische Stromverteilung führt letztlich in der Praxis zur Auslösung des Differentialschutzes mit Netztrennung der Maschine und Einleitung der Entregung.

Interessant erscheint hinsichtlich der asymmetrischen Stromverteilung bei den reinen Windungsschlüssen, dass der in der Phasenfolge auf den beschädigten Wicklungsstrang nachfolgende mit einem höheren stationären Strom beaufschlagt wird, wohingegen der in der Phasenfolge zurückliegende Wicklungsstrang zumindest im hier gezeigten Fall ws_III und auch im Fall ws_II geschwächt wird. Dieses zirkulatorische Verhalten kann qualitativ anschaulich anhand der Überlagerung unterschiedlicher Feldbeiträge von Kurzschlusswicklung und intakten Strängen erläutert werden.

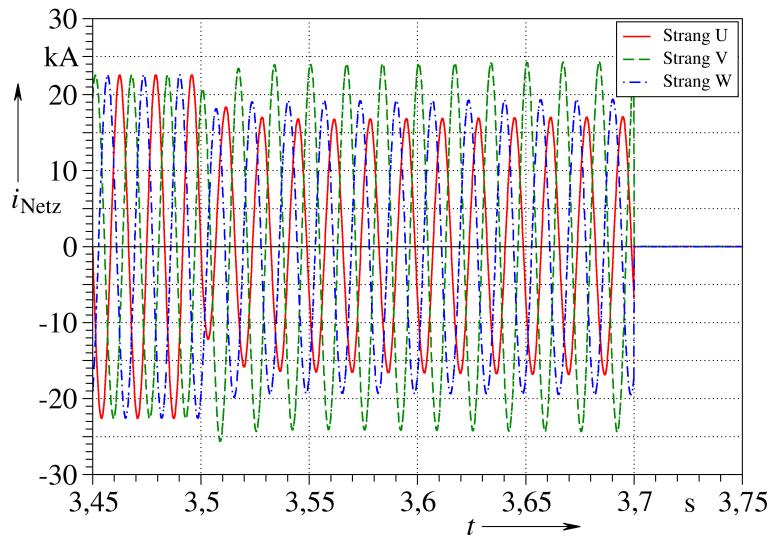


Bild 6.34a:

Zeitverlauf der Netzströme i_U , i_V und i_W nach Eintritt eines Windungsschlusses in Strang U bis zur Netztrennung der Maschine, Fall ws_I [Kl06].

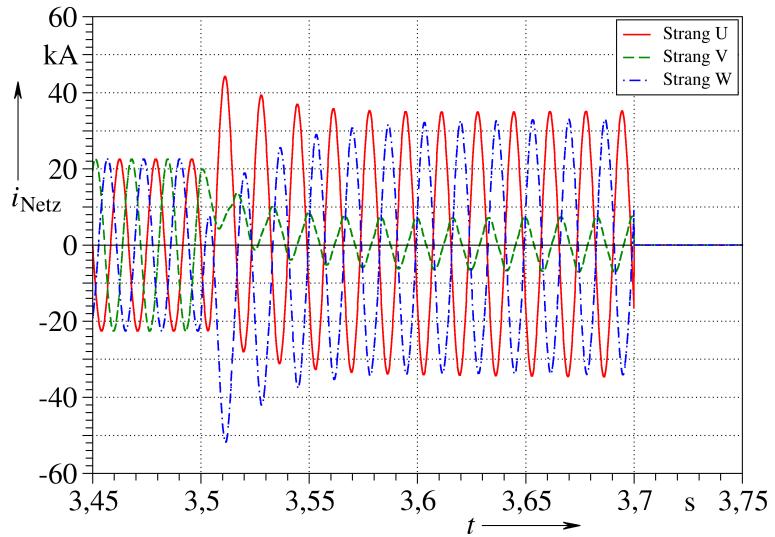


Bild 6.34b:

Zeitverlauf der Netzströme i_U , i_V und i_W nach Eintritt eines Windungsschlusses in Strang W bis zur Netztrennung der Maschine, Fall ws_III [Kl06].

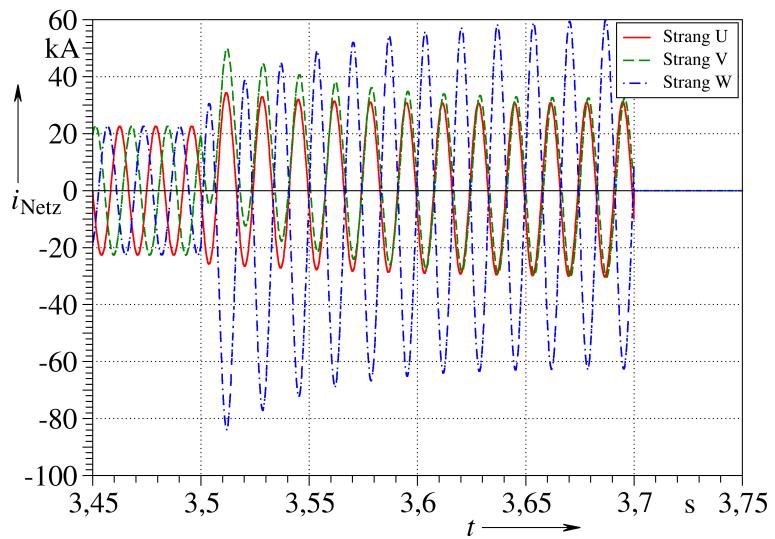


Bild 6.34c:

Zeitverlauf der Netzströme i_U , i_V und i_W nach Eintritt eines Phasenschlusses zwischen Strang V und W bis zur Netztrennung der Maschine, Fall ps_II [Kl06].

Bei gestörter Symmetrie tritt neben dem Grunddrehfeld des Mitsystems auch ein gegenläufiges Drehfeld, verbunden mit dem Gegensystem der Ankerbestromung und der zugehörigen Durchflutungen auf. Als resultierendes Gesamtfeld entsteht dadurch ein elliptisches Drehfeld. Im vorliegenden Fall ist der Feldbeitrag, der durch einen teilüberbrückten Wicklungsstrang hervorgerufen wird, in seiner Amplitude durch die induktive Wechselwirkung mit der Kurzschlussmasche geschwächt und in seinem Zeitverhalten phasenverschoben. Aus der Amplitudenschwächung geht hier der elliptische Feldorbit hervor. Die Phasenverschiebung bewirkt eine unsymmetrische, d. h. gedrehte Ausrichtung der Halbachsen gegen die Wicklungsachse der gestörten Wicklung, so dass die verbleibenden unbeschädigten Wicklungsstränge mit unterschiedlichen Feld- und Flussverket- tungsamplituden beaufschlagt werden. Hierdurch werden auch die Ströme unterschiedlich. Es ist zu vermuten, dass die Ausprägung und Ausrichtung dieser Asymmetrie stark vom Betriebs- und Erregungszustand der Maschine abhängt.

In Bild 6.34b zeigt der Netzstrom im Strang V eine nichtlineare, von der Sinusform abweichende Verzerrung in Richtung einer Dreieckgestalt, die unmittelbar auf den Einfluss der Sättigung zurückzuführen ist.

Die Bilder 6.35a bis 6.35c zeigen die Ströme in den einzelnen Teilsplulengruppen für den Fall ps_II, den Phasenschluss zwischen Strang W und Strang U, bei dem die Teilsplulengruppen w_{12} und w_4 eine Kurzschlussmasche über den Sternpunkt N bilden. Der hohe Kurzschlussstrom in dieser Masche ist deutlich in den Strömen i_{w4} und i_{w12} ersichtlich. Bei den unbeschädigten Spulengruppen ergibt sich für die positive Spulengruppe während des Phasenschlusses der Maschine am Netz nur ein verschwindend geringer Einfluss. Dass dies jedoch nicht der Regelfall ist, sondern aufgrund der induktiven Kopplung aller Spulengruppen im Allgemeinen auch die unbetroffenen Spulengruppen mit transienten Ausgleichsströmen und erhöhten stationären Strömen belastet sind, zeigt sich deutlich an den Stromverläufen der negativen Spulengruppe des Stranges W, aber in den Spulengruppen des Stranges V. Auch nach der Netztrennung der Maschine wird ein erheblicher Kreisstrom in der durch den Phasenschluss bedingten Kurzschlussmasche induziert, der nur unwesentlich unter den stationären Wert bei mit dem Netz verbundener Maschine sinkt und erst mit vollendeter Entregung verschwinden würde. Außer diesem Kreisstrom treten induzierte grundfrequente Kreisströme auch in allen anderen parallelen Zweigen der Wicklung auf, wovon aufgrund der magnetischen Asymmetrie auch der unbeschädigte Strang V betroffen ist. Dieser weist aber im Gegensatz zu den direkt betroffenen Strängen mit jeweils einigen Vielfachen des Stroms bei Bemessungsbetrieb nur etwa 20 ... 22 % dieses Wertes auf.

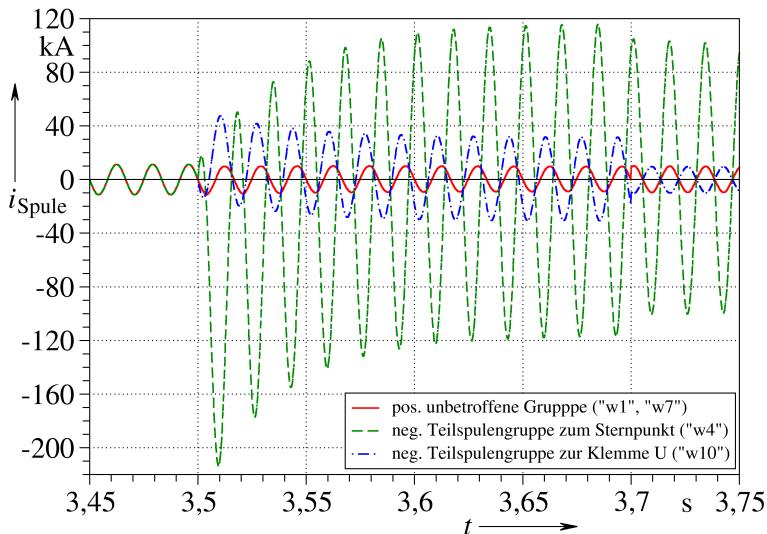


Bild 6.35a:

Zeitverlauf der Spulenströme im Strang U, i_{w1} , i_{w7} sowie i_{w4} und i_{w10} , nach Eintritt eines Phasenschlusses zwischen Strang W und U, Fall ps_III, bis zur Netztrennung der Maschine mit unmittelbarem Beginn der Entregung [Kl06].

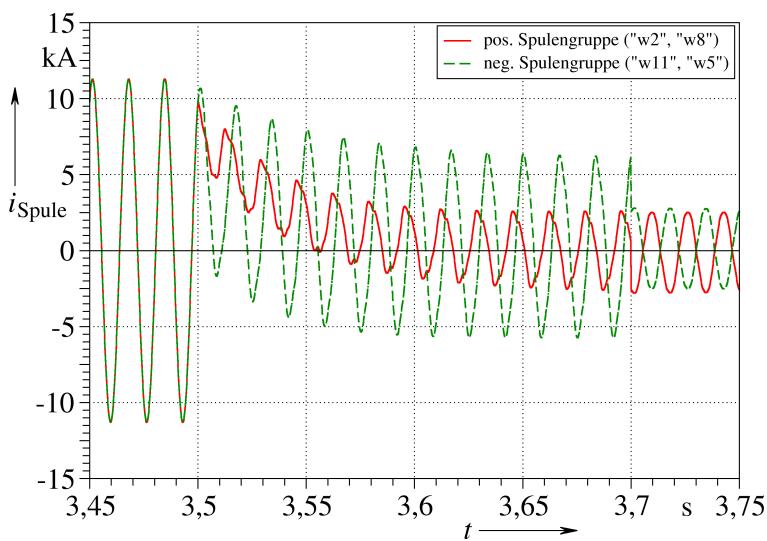


Bild 6.35b:

Zeitverlauf der Spulenströme im Strang V, i_{w2} , i_{w8} und i_{w11} , i_{w5} , nach Eintritt eines Phasenschlusses zwischen Strang W und U, Fall ps_III, bis zur Netztrennung der Maschine mit unmittelbarem Beginn der Entregung [Kl06].

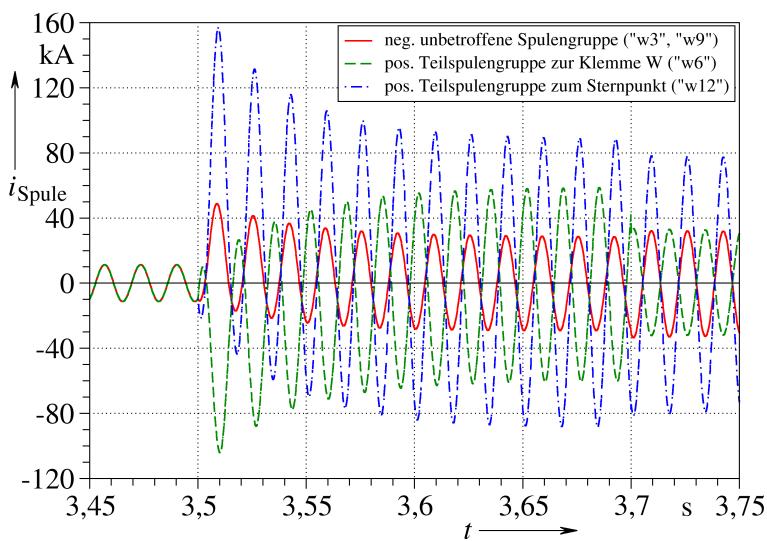


Bild 6.35c:

Zeitverlauf der Spulenströme im Strang W, i_{w3} , i_{w9} sowie i_{w6} und i_{w12} , nach Eintritt eines Phasenschlusses zwischen Strang W und U, Fall ps_III, bis zur Netztrennung der Maschine mit unmittelbarem Beginn der Entregung [Kl06].

Ein weiteres Phänomen, das schon im Zusammenhang mit den Rotorwindungsschlüssen untersucht worden ist und auch bei den Statorwindungs- und Phasenschlüssen auftritt, ist der einseitige magnetische Zug, der durch die elektromagnetische Asymmetrie der Maschine hervorgerufen wird und mit dem in Kap. 6.1.1 geschilderten Verfahren berechnet werden kann. Die Einhüllenden der zeitlichen Verläufe der Kraftkomponenten F_d und F_q zeigen ein ähnliches Verhalten wie diejenigen der Kurzschlussstromverläufe. Der sich ergebende Betrag der Kräfte kann daher in nahezu gleicher Weise wie der Verlauf des Kurzschlussstroms zu vier charakteristischen Zeitpunkten beschrieben werden. Die höchsten Kraftbeträge treten erwartungsgemäß unmittelbar nach dem Eintritt des Windungs- oder Phasenschlusses im Zusammenhang mit den transienten Einschaltvorgängen und den dazugehörigen Stromspitzen auf. Der Fall ps_II zeichnet sich dabei von allen betrachteten Fällen durch den Höchstwert von $|\vec{F}|_{\max, \text{WS ein}}$ aus, der dem Gewicht einer Masse von ca. 736 000 kg entspricht. Er erweist sich ebenso hinsichtlich der stationären Spitzenwerte bei am Netz befindlicher Maschine $|\vec{F}|_{\max, \text{Netz}}$ und unmittelbar nach der Netztrennung, $|\vec{F}|_{\max, 0}$ als am kritischsten. Die niedrigsten Werte des einseitigen magnetischen Zuges werden im Fall ws_I angenommen, bei dem nur eine Windung überbrückt wird und somit die geringsten Feldasymmetrien zu erwarten sind. Auch diese Werte sind jedoch verglichen mit denjenigen, die bei Rotorwindungsschlüssen auftreten, durchaus bedenklich.

Tabelle 6.4: Maximalbeträge der einseitigen magnetischen Zugkraft auf den Rotor zu charakteristischen Zeitpunkten [Kl06].

	$ \vec{F} _{\max, \text{WS ein}}$	$ \vec{F} _{\max, \text{Netz}}$	$ \vec{F} _{\max, 0}$	$ \vec{F} _{\max, 1.8 \text{ s}}$
Störfall	MN	MN	MN	MN
ws_I	1,076	0,741	0,750	0,257
ws_II	2,206	1,718	1,604	0,388
ws_III	1,267	0,582	0,502	0,0847
ps_I	1,980	1,894	1,850	0,496
ps_II	7,361	4,157	3,541	0,525
ps_III	6,364	3,275	2,753	0,558

In den Bildern 6.36 und 6.37 sind die Ortskurven des Kraftvektors im Rotorkoordinaten- system für die beiden Fälle mit minimaler und maximaler magnetischer Asymmetrie, ws_I

und ps_II für den transienten Ausgleichsvorgang nach Eintritt des Fehlers mit am Netz befindlicher Maschine sowie für die vom Netz getrennte Maschine während des Entregungsvorganges dargestellt. In allen Bildern tritt im Wesentlichen ein ähnliches, epizyklistisches Muster des Kraftorbits im stationären bzw. quasistationären Zustand auf. Es zeigt sich, dass hier umdrehungsgrundfrequente und 3-fachfrequente Wechselkraftkomponenten in d- und q-Richtung mit in etwa gleicher Amplitude so zusammenwirken, dass sie aufgrund ihrer Phasenverschiebung rotierende Kraftvektoren mit einfacher und dreifacher Umdrehungsfrequenz bilden. Auf ein ständerfestes Koordinatensystem bezogen entspricht dies der Summe aus einem ruhenden Kraftvektor und einem doppelt umdrehungsfrequenten Kraftvektor gleichen Betrages, wobei der Umlaufsinn gegen die Rotordrehrichtung orientiert ist. Eine qualitative Interpretation mag für bestimmte Fälle wie folgt gegeben sein: Bewegt sich während des Umlaufs von Rotor und Drehfeld das positive oder negative Feldmaximum in Richtung der Kurzschlusswicklung, führt die induktive Wechselwirkung mit dieser zu einer Kraftkomponente zur Gesamtkraft zwischen Rotor und Stator. Diese ist während des Auflaufens zunächst überwiegend in Umfangsrichtung orientiert. Bei direkter Opposition von Rotor und Kurzschlusswicklung nimmt sie eine radiale Ausrichtung und gleichzeitig ihr Betragmaximum an. Unmittelbar danach wirkt sie wiederum in Umfangsrichtung, aber mit umgekehrtem Vorzeichen.

Es ist auch zu erkennen, dass die epizyklistischen Kraftorbits des Rotorzuges grundsätzlich eine Umlaubbewegung des Kraftvektors mit Umdrehungsfrequenz gegen die Drehrichtung des Rotors darstellen, wenn man von den Betragsschwankungen und den damit zusammenhängenden Schleifen des Kraftorbits absieht. Vom Ständer aus betrachtet deutet dies auf eine nicht sehr stark fluktuierende Richtung des Zuges hin. Dies erscheint plausibel, da die Orientierung der Zugkraft in etwa mit der Achse der Kurzschlusssteilwicklung zusammenfallen wird. Entlang dieser Achse sind aufgrund der Feldschwächung im Bereich der Kurzschlusssteilwicklung nämlich die größten Flussdifferenzen zu erwarten. Gleichzeitig tritt aber während einer Rotorumdrehung oder eines Drehfeldumlaufs auch eine doppeltfrequente Modulation der Flussdichte in diesen Bereichen auf. Die niedrigste magnetische Asymmetrie mit Kräftebeträgen von nahezu Null wird dabei in etwa zu den Zeitpunkten angenommen, zu denen die Grundfeldnulldurchgänge in den Bereich der Kurzschlusswicklung fallen. Hingegen treten bei Koinzidenz der Feldmaxima mit der Kurzschlusswicklung maximale Asymmetrie und entsprechend großer einseitiger Zug auf.

Aufgrund unterschiedlicher Phasenlagen der auftretenden Feldbeiträge von Rotor und Ständer sowie der Netzströme und der induzierten Kurzschlussströme kommt es allerdings,

wie die Bilder 6.36 und 6.37 zeigen, zu zum Teil erheblichen Verdrehungen der Kraftorbits zur direkten Achse entgegen der obigen vereinfachten Darstellung. Hierbei spielt auch der Sättigungszustand der Maschine eine gewisse Rolle, wie die Drehung der Kraftorbits bei Entregung in den jeweils rechten Bildern nahelegt.

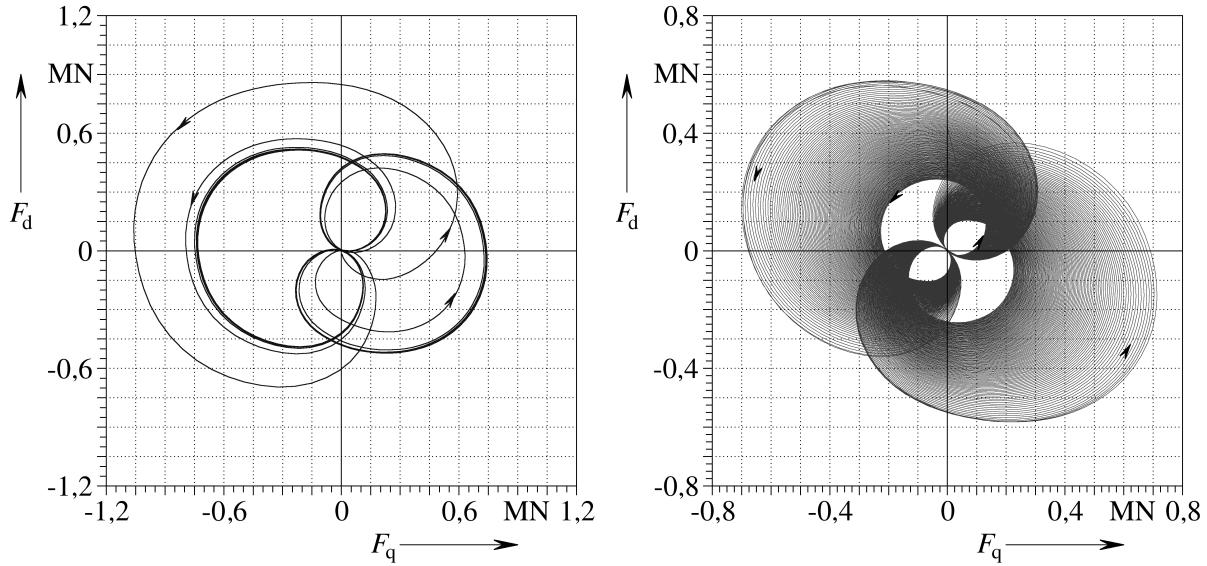


Bild 6.36: Ortskurve der einseitigen magnetischen Zugkraft auf den Rotor im rotorfesten d,q-Koordinatensystem nach reinem Windungsschluss in Strang U, Fall ws_I. Links: Ausgleichsvorgang und stationärer Lauf am Netz bis 0,2 s nach Eintritt des Fehlers. Rechts: Entregung der vom Netz getrennten Maschine [Kl06].

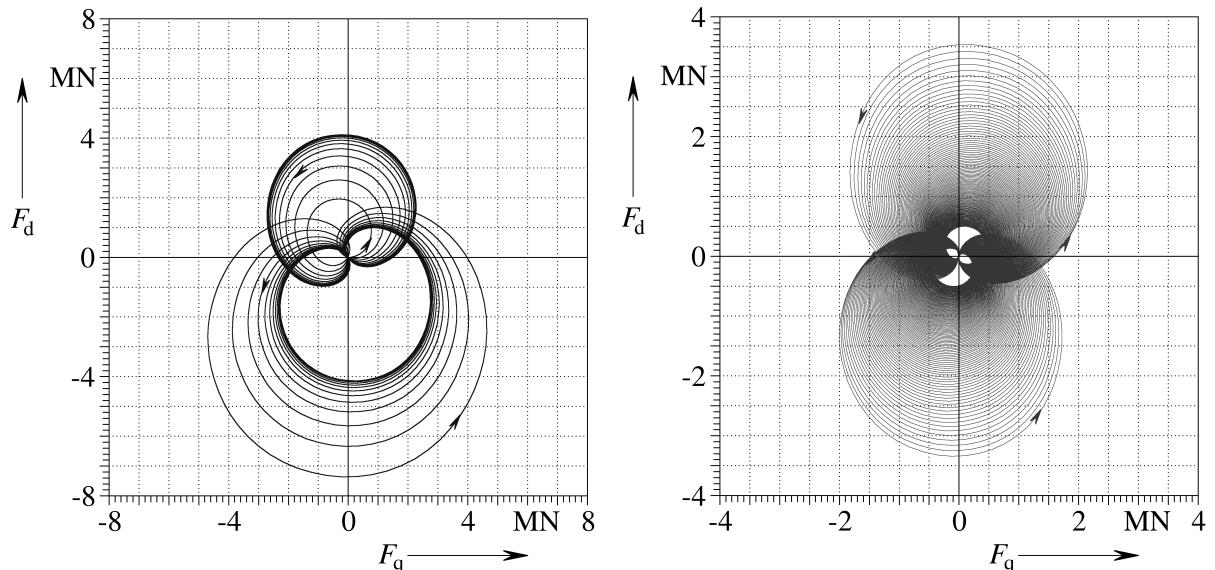


Bild 6.37: Ortskurve der einseitigen magnetischen Zugkraft auf den Rotor im rotorfesten d,q-Koordinatensystem nach Phasenschluss zwischen Strängen U und V, Fall ps_II. Links: Ausgleichsvorgang und stationärer Lauf am Netz bis 0,2 s nach Eintritt des Fehlers. Rechts: Entregung der vom Netz getrennten Maschine [Kl06].

Die nachfolgenden Feldbilder Bild 6.38a und 6.38b wurden für den Extremfall ps_II zum Zeitpunkt eines betragsmäßigen Kraftmaximums sowie -minimums aufgenommen. Die Maschine befindet sich hier noch am Netz und läuft nach dem transienten Einschaltvorgang quasistationär. Die Bilder veranschaulichen sehr deutlich den Einfluss der symmetrischen oder asymmetrischen Feldverteilung auf die Ausbildung des einseitigen magnetischen Zuges und den Einfluss des Kurzschlusspfades. Dieser besteht im Fall ps_II aus den Teilwicklungen w_5 und w_{12} , die über den Sternpunkt eine Masche mit gleichsinniger Serienschaltung von sechs unmittelbar aufeinander folgenden, in den Bildern markierten Windungen bilden, was den Störfall derart extrem gestaltet.

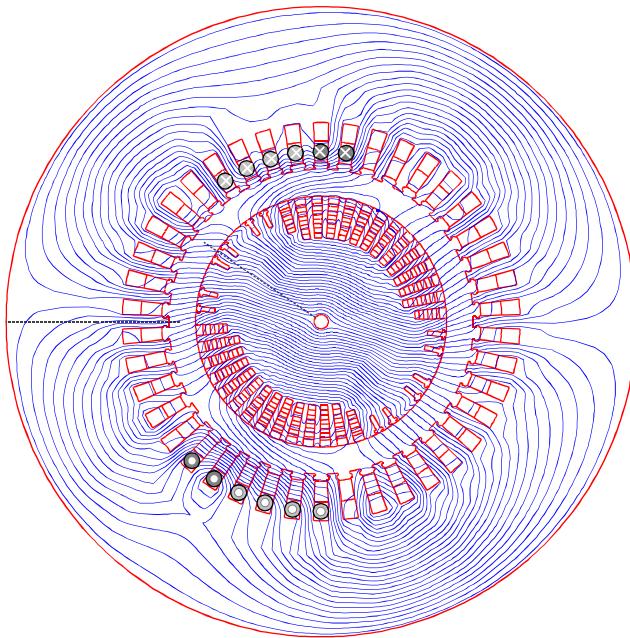


Bild 6.38a:

Feldbild für Zeitpunkt $t = 3,694$ s mit maximalem Rotorzug bei Maschine mit Phasenschluss zwischen Strang V und W, Fall ps_II. Feldachse in etwa parallel zur Wicklungsachse der Kurzschlussteilwicklung [Kl06].

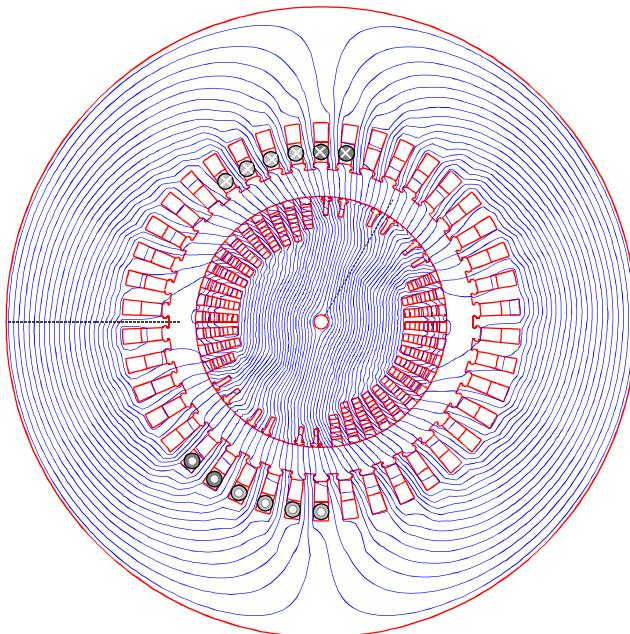


Bild 6.38b:

Feldbild für Zeitpunkt $t = 3,698$ s mit minimalem Rotorzug bei Maschine mit Phasenschluss zwischen Strang V und W, Fall ps_II.. Feldachse in etwa quer zur Wicklungsachse der Kurzschlussteilwicklung.

6.3 Wirbelstromeinfluss in Komponenten von Hochstromanlagen

6.3.1 Berücksichtigung der Eisensättigung durch externe Unterrelaxation

Bei einigen großtechnischen Anlagen, bei denen sehr hohe Wechselströme zur Anwendung kommen, sind die in mechanischen Komponenten dieser Anlagen infolge der hohen Flussdichten induzierten Wirbelströme hinsichtlich der durch sie verursachten Verluste sowie ihres Einflusses auf die Anlagenimpedanz von großem Interesse.

Für ein derartiges Konstruktionsteil, das einen Hochstromleiter konzentrisch umgibt und vereinfacht als hohler, aus Stahlblech aufgebauter Ring mit rechteckigem Querschnitt darstellbar ist, wie dies umseitig Bild 6.39 rechts zeigt, wird nachfolgend eine Berechnung von Wirbelstromverlusten mit dem Programm EMAS skizziert. Diese findet dreidimensional statt, da u. a. der Einfluss von magnetischen Unterbrechungen zu untersuchen ist, die eine axisymmetrische Modellierung nicht zulassen.

Die Dreidimensionalität bedingt eine Modellgröße, bei der eine transiente Berechnung sehr aufwändig, extrem zeitintensiv und insofern vermeidenswert erscheint. Diese wäre eigentlich zur Erfassung des nichtlinearen magnetischen Verhaltens erforderlich und im zweidimensionalen Fall auch ohne weiteres mit EMAS wie in [Kl04b] durchführbar.

Im Folgenden wird dargestellt, wie bei der Verwendung von EMAS ein zeitharmonischer Ansatz des magnetischen Vektorpotentials verwendet werden kann, bei dem die magnetische Nichtlinearität iterativ berücksichtigt wird. Diese Option stellt das Programm nicht von sich aus zur Verfügung, sondern erfordert externe Ergänzungen. Diese werden als eigenständige Programme zusammen mit dem EMAS-Programmaufruf durch ein Shellskript verwaltet.

Die durch besagtes Shellskript gesteuerte Prozedur beginnt damit, dass zunächst jedem Element mit ferromagnetischem Material eine eigene, eindeutige Materialkennziffer zugewiesen wird, was später die individuelle Permeabilitätszuweisung für alle ferromagnetischen, nichtlinearen Elemente ermöglicht. Die Originaleingabedatei wird zu diesem Zweck durch ein externes Programm modifiziert. Nach abgeschlossener EMAS-Rechnung liest ein weiteres Variationsprogramm die komplexen Induktionskomponenten in den betroffenen Elementen aus dem Ausgabedatensatz aus und ermittelt hieraus eine neue, der Feldverteilung mehr angepasste Permeabilitätsverteilung, die in den Eingabedatensatz eingeht. Mit der so modifizierten Eingabe startet eine neue EMAS-Rechnung, deren Ergebnisdatei anschließend wiederum zur Anpassung der Permeabilitäten ausgelesen wird, u.s.w., bis die berechneten Flußdichten und Feldstärken hinreichend genau auf der vorausgesetzten Kennlinie $B(H)$ liegen

und die relativen Änderungen der Permeabilitäten von Rechnung zu Rechnung ausreichend klein sind.

Das skizzierte Iterationsverfahren ist bei Patzwald [Pw88] genau beschrieben. Die Ersatzinduktion B_{ers} für eine Gitterzelle berechnet sich wie dort angegeben als geometrische Summe der Beträge der komplexen Komponenten von B , gewichtet mit einem Faktor $k_p = 0,75$. Ein Unterschied, der hier bei der Anwendung des Verfahrens gemacht wird, besteht darin, dass zunächst anhand der für die aktuelle komplexe Feldberechnung zu Grunde gelegten Permeabilität die magnetische Feldstärke H_{ers} aus B_{ers} bestimmt wird. Mit dieser wird anschließend ohne weitere Unterrelaxation die neue Permeabilität für die jeweilige Gitterzelle aus der Magnetisierungskurve (Kommutierungskurve, keine Grundwellencharakteristik) ermittelt. Weil sich der Einfluss unterschiedlicher Verläufe $B(H)$ schon in anderweitigen Rechnungen zu dem vorgestellten Thema als gering erwiesen hat, wird hier der Einfachheit halber der Kennlinienverlauf aus [Pw88] übernommen.

Das 3D-Modell des ringförmigen Konstruktionsteils erstreckt sich über einen Winkel von $22,5^\circ$ entsprechend einem Sechzehntel des Umfangs, wobei hinsichtlich der möglichen magnetischen Unterbrechungen vereinfachend eine entsprechende Symmetrie zugrunde gelegt wird. Die Abmessungen des Querschnitts in der r,z -Ebene können gemäß [Kl04b] anhand der folgenden in Bild 6.39 aufgeführten Skizzen definiert werden. Der Ringinnenradius ist hierin $r_i = 805 \text{ mm}$, der Außenradius $r_a = 915 \text{ mm}$, die Ringhöhe beträgt $h = 340 \text{ mm}$ und der Leiteraußenradius wird zu $r_{\text{Leit}} = 700 \text{ mm}$ angenommen. Das Rechengebiet endet bei $r_R = 1400 \text{ mm}$ und weist eine axiale Höhe von $h_R = 400 \text{ mm}$ auf. Die elektrische Leitfähigkeit des Ringmaterials wird auf $\gamma = 5 \cdot 10^6 \text{ S/m}$ gesetzt.

Das Gitter des 3D-Modells ist in Bild 6.40 aufgeführt. Auf den Stirnflächen in Umfangsrichtung besteht dabei für die Komponenten des magnetischen Vektorpotentials keine Randbedingung, was senkrechttem Feldeintritt entspricht. Ober- und Unterseite $z = 0$ und $z = 400 \text{ mm}$ weisen einen tangentialen Feldverlauf auf, weswegen dort A_r und A_ϕ verschwinden. Auf der Außenfläche $r = 1400 \text{ mm}$ verschwinden aus dem gleichen Grund A_ϕ und A_z . Das zeitintegrierte elektrostatische Potential wird für die Gitterpunkte des Leiters und des Stahlringes bei $z = 0$ auf Null gesetzt, wodurch u. a. der elektrische Rückschluss der Wirbelströme im Ring gewährleistet wird. Der Leiter wird über „Multi Point Constraints“ (MPCs) aller ihrer Gitterpunkte bei $z = 400 \text{ mm}$ zu einem unabhängigen Gitterpunkt mit $A_{r,\phi,z} = 0$ gespeist, in den der Elektrodenstrom von $100/16 \text{ kA}_{\text{eff}} = 6,25 \text{ kA}_{\text{eff}}$ als Erregerstrom bei $f = 50 \text{ Hz}$ für das Modell über einen Sechzehntelumfang eingeprägt wird.

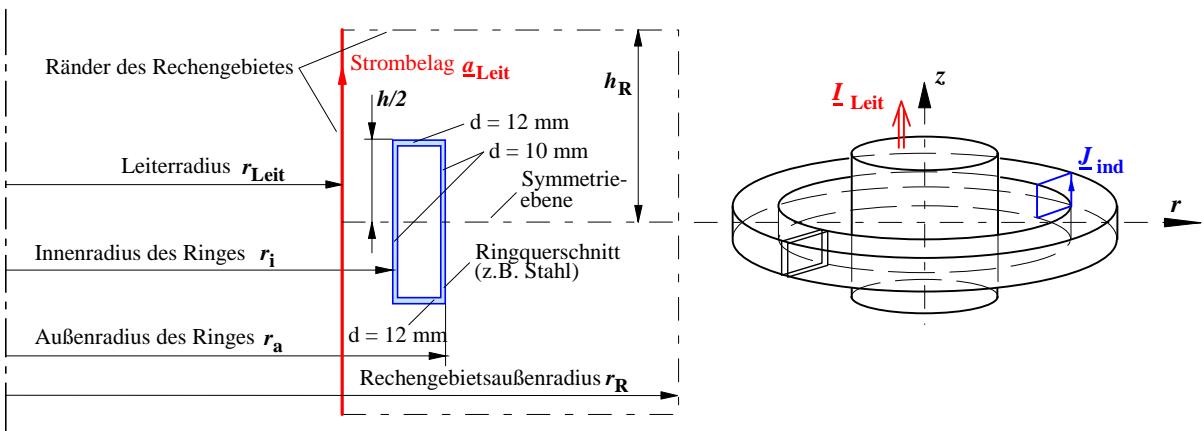


Bild 6.39: Längsschnitt durch Anordnung und Rechengebiet mit Querschnitt des untersuchten ringförmigen Konstruktionsteils und Bemaßung links. Prinzipieller Aufbau rechts mit Beispiel für eine potentielle magnetische Unterbrechung links unten.

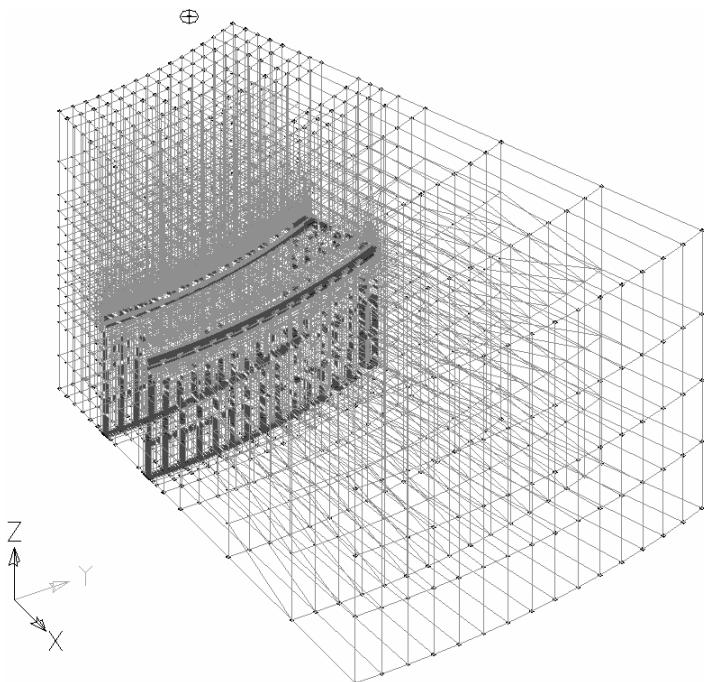


Bild 6.40:

FE-Gitter des 3D-Modells über ein Sechzehntel des Umfangs und obere Hälfte des untersuchten Ringes.

Für die Berücksichtigung von magnetischen Unterbrechungen wird das 3D-Modell in einfacher Weise um 2D-Schichtelemente mit den Eigenschaften von Luft auf einer der beiden Stirnseiten in Umfangsrichtung ergänzt. Diese wirken gleichermaßen als Flusssperren. Ihnen wird eine Dicke von 1,5 mm zugeordnet, woraus sich eine gesamte Luftspaltweite von 24 mm innerhalb des vollständigen magnetischen Kreises ergibt.

Für den Vergleich der unterschiedlichen Ringvarianten werden auch Rechnungen mit linear magnetisierbarem Eisen, $\mu_r = 2000$, durchgeführt. Des Weiteren wird als Extremfall der magnetischen Unterbrechung auch ideal diamagnetisches Spaltmaterial auf den Stirnflächen des Ringquerschnitts statt Luft eingesetzt. Die folgende Tabelle 6.5 zeigt, dass durch die

magnetischen Unterbrechungen keine wesentliche Minderung der Verluste erzielt wird, sofern man die Eisensättigung berücksichtigt. Auch bei ideal diamagnetischem Material im Trennspalt würde sich lediglich eine Verringerung von ca. 15 % gegenüber dem durchgehenden Ring ergeben.

Bei niedrigerem Speisestrom und demzufolge geringer Sättigung wird auch die Verlustreduktion größer. Der lineare Fall stellt hier jedoch die obere Grenze dar.

Für den ununterbrochenen Ring wird mit der zeitharmonischen 3D-Rechnung bei gleichzeitiger Permeabilitätsiteration ein Verlustwert von 119,6 kW berechnet, wie er in [Kl04b] auch für die transiente 2D-Rechnung an einem r,z -Modell des Ringes bestimmt wird. Dort ergab sich $P_V = 116,0$ kW, was einer Abweichung von lediglich 3,1 % entspricht.

Tabelle 6.5: Verlustleistungen aus unterschiedlichen EMAS-3D-Rechnungen. Werte gelten für den gesamten Ring. Spaltangabe 1,5 mm bezieht sich auf das berechnete Modell, 1/16 des Ringes. $I_{\text{Leit}} = 100$ kA, $\gamma_{\text{Fe}} = 5 \cdot 10^6$ S/m für alle Rechnungen.

Modell		P_V bei magnetischer Unterbrechung		Verlustabsenkung infolge der Unterbre- chung
		der Weite 0 mm	der Weite 1,5 mm	
		kW	kW	
EMAS Leiter als Strombe- lag über volle 22,5°	linear, $\mu_r = 2000$	475,2	334,7	29,6 %
	Sättigung	119,6	113,1	5,4 %
	linear, $\mu_r = 2000$, ideal diamagnetischer Spalt		210,9	44,4 %
	Sättigung, ideal diamagnetischer Spalt		101,3	15,3 %

Die nachfolgend in Bild 6.41 dargestellte Verteilung der Permeabilität lässt den Einfluss der magnetischen Unterbrechung in Form einer Entlastung erkennen, durch welche die Sättigung in den unmittelbar angrenzenden Elementen leicht gemindert wird. Aufgrund der individuellen Materialbelegungen der einzelnen Elemente findet jedoch keine Mittelwertbildung zwischen benachbarten Elementen statt. Auch die recht grobe Diskretisierung verhindert einen gleitenden Übergang der dargestellten Permeabilitätswerte. Die ungesättigte Innenseite des Ringes, auf der relative Permeabilitäten von über 7000 erreicht werden, zeigt, dass das Feld nur an der Außenoberfläche wirksam ist und in Richtung des Materialinneren abgeschirmt wird. Diese Verhältnisse ändern sich im Wesentlichen auch nicht in der Nähe des relativ schmalen Trennspaltes.

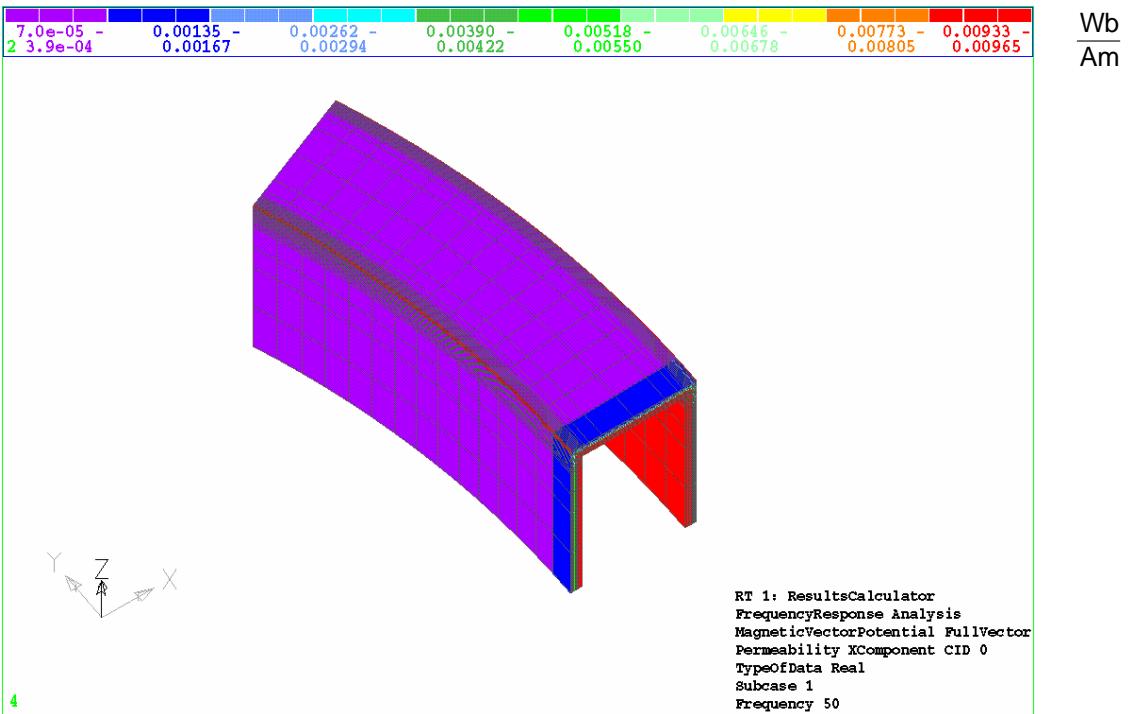


Bild 6.41: EMAS-Ausgabe der iterierten Permeabilitätsverteilung für die Feldgrundschwün-
gungen auf der Ringoberfläche. Kennlinie $B(H)$ aus [Pw88]. Spaltbreite 1,5 mm
im Modell, entspricht 8 mal 3 mm im Original.

6.3.2 3D-Modellreduktion durch bisektorische Randbedingung

Eine erhebliche Reduzierung der Anzahl erforderlicher Knoten, die insbesondere bei dreidimensionalen Feldberechnungen wünschenswert ist, lässt sich erreichen, wenn neben einer räumlichen Periodizität der zu untersuchenden Struktur auch eine Periodizität der Phasenverschiebungen der erregenden Ströme in Abhängigkeit des Ortes gegeben ist, so dass sich Drehfelder ausbilden. Für die komplexen Feldgrößen auf dem linken und dem rechten Rand kann dann folgende Randbedingung angegeben werden:

$$A_{\text{links}} \cdot \underline{\exp}\left(-j \frac{\varphi_{\text{el}}}{2}\right) = A_{\text{rechts}} \cdot \underline{\exp}\left(j \frac{\varphi_{\text{el}}}{2}\right) \quad (6.14)$$

Hierbei ist φ_{el} derjenige elektrische Phasenwinkel, dem das Rechengebiet entspricht. Ein Drehfeld bzw. Wanderfeld, das von links nach rechts fortschreitet, wird dabei vorausgesetzt. Die erregenden Ströme zwischen benachbarten Sektoren des Originalproblems sind um φ_{el} derart phasenverschoben, dass Ströme im linken Sektor denen im rechten Sektor vorausseilen.

Im Gegensatz zu anderen Programmsystemen können bei EMAS die komplexen Faktoren $\underline{\exp}(\pm j \varphi_{\text{el}} / 2)$ nicht im Zusammenhang mit den „Multi-Point-Constraints“ (MPCs) vorgegeben werden. Wird ein gewählter, zu betrachtender Sektor jedoch um den zeitlich 90° phasenver-

schobenen Sektor ergänzt, so geht daraus ein Modell über zwei Sektoren hervor, nachfolgend als bisektorielles Modell bezeichnet. Die Randbedingungen dieses ergänzten Modells sind mit Hilfe reellwertiger Koeffizienten formulierbar, wie nachfolgend gezeigt wird.

Der links gelegene, zeitlich vorauseilende Sektor habe eine reelle Feldverteilung, der rechte, mit um 90° nacheilenden Strömen erregte, weise eine zugehörige negativ imaginäre Feldverteilung auf. Dann gilt für die beiden Sektoren gemäß obiger Gleichung:

$$\begin{aligned} \underline{A}_{\text{links, real}} \cdot \exp\left(-j \frac{\varphi_{\text{el}}}{2}\right) &= \underline{A}_{\text{rechts, real}} \cdot \exp\left(j \frac{\varphi_{\text{el}}}{2}\right) && \text{für den linken, „reellen“ Sektor,} \\ \underline{A}_{\text{links, imag}} \cdot \exp\left(-j \frac{\varphi_{\text{el}}}{2}\right) &= \underline{A}_{\text{rechts, imag}} \cdot \exp\left(j \frac{\varphi_{\text{el}}}{2}\right) && \text{für den rechten, „imaginären“ Sektor.} \end{aligned} \quad (6.15)$$

Die Zerlegung der komplexen Exponentialfaktoren liefert:

$$\begin{aligned} \underline{A}_{\text{links, real}} \cdot \left(\cos \frac{\varphi_{\text{el}}}{2} - j \cdot \sin \frac{\varphi_{\text{el}}}{2} \right) &= \underline{A}_{\text{rechts, real}} \cdot \left(\cos \frac{\varphi_{\text{el}}}{2} + j \cdot \sin \frac{\varphi_{\text{el}}}{2} \right) \quad \text{und} \\ \underline{A}_{\text{links, imag}} \cdot \left(\cos \frac{\varphi_{\text{el}}}{2} - j \cdot \sin \frac{\varphi_{\text{el}}}{2} \right) &= \underline{A}_{\text{rechts, imag}} \cdot \left(\cos \frac{\varphi_{\text{el}}}{2} + j \cdot \sin \frac{\varphi_{\text{el}}}{2} \right). \end{aligned} \quad (6.16)$$

Mit $\underline{A}_{\text{links, real}} = j \cdot \underline{A}_{\text{links, imag}}$ und $\underline{A}_{\text{rechts, real}} = j \cdot \underline{A}_{\text{rechts, imag}}$ für die 90° Phasenverschiebung zwischen den Sektoren erhält man somit die Gleichungen für die vorzugebenden MPCs:

$$\begin{aligned} \underline{A}_{\text{links, real}} \cdot \cos \frac{\varphi_{\text{el}}}{2} + \underline{A}_{\text{links, imag}} \cdot \sin \frac{\varphi_{\text{el}}}{2} &= \underline{A}_{\text{rechts, real}} \cdot \cos \frac{\varphi_{\text{el}}}{2} - \underline{A}_{\text{rechts, imag}} \cdot \sin \frac{\varphi_{\text{el}}}{2} \quad \text{und} \\ \underline{A}_{\text{links, imag}} \cdot \cos \frac{\varphi_{\text{el}}}{2} - \underline{A}_{\text{links, real}} \cdot \sin \frac{\varphi_{\text{el}}}{2} &= \underline{A}_{\text{rechts, imag}} \cdot \cos \frac{\varphi_{\text{el}}}{2} + \underline{A}_{\text{rechts, real}} \cdot \sin \frac{\varphi_{\text{el}}}{2} \end{aligned} \quad (6.17)$$

Die so definierte bisektoruelle Randbedingung wird nachfolgend auf eine dreidimensionale Anordnung angewandt. Diese besteht im Wesentlichen aus einem Zylinder aus Stahlblech mit endlicher axialer Länge, der ein Bündel von drei Leitern umgibt, die symmetrisch um die Zylinderachse in einem Abstand von $d = 2900$ mm verteilt sind und dreiphasig symmetrisch mit einem Strom von $I_{\text{eff}} = 150$ kA bei $f = 50$ Hz gespeist werden. Bild 6.42 zeigt einen schematischen Querschnitt durch die Anordnung.

Die Blechdicke beträgt 25 mm, die elektrische Leitfähigkeit $\gamma = 5 \cdot 10^6$ S/m. Die axiale Länge des Zylinders ist $l_z = 1850$ mm. Auf der oberen und unteren Stirnseite sind kreisringförmige, 25 mm starke Bleche mit einem Innenradius von 7600 mm, entsprechend dem Innenradius R des Zylinders, und einem Außenradius von 7775 mm als Flansche aufgesetzt.

Für die Modellierung wird die Anordnung als symmetrisch zur mittleren Querschnittsebene aufgefasst, so dass nur die obere Hälfte betrachtet werden muss und der mittlere Querschnitt die Grundebene mit $z = 0$ bildet. Wirbelströme in dem Zylindermantel treten aus Symmetriegründen senkrecht in diese Grundebene ein. Diese wird durch Nullsetzung der skalaren elektrischen Potentiale in den Grundebenenknoten des Ofengefäßes erreicht.

Das magnetische Feld verläuft in der Grundebene tangential, weswegen das Vektorpotential dort nur eine axiale Komponente aufzuweisen braucht. Dies wird ebenfalls für die obere Stirnfläche des Modells angenommen, bei welcher der Einfluss weiterer nicht im Modell inbegriffener, elektrisch leitfähiger Komponenten der Gesamtanordnung als maßgeblich für eine tangentiale Feldverteilung angesehen wird. Die obere, stirnseitige Randfläche des Gesamtmodells befindet sich hierbei 20 mm über der stirnseitigen Oberfläche des modellierten Zylinderabschlusses. Die äußere, zylindrische Randfläche im Abstand von $r = 15$ m von der Modellachse soll ebenfalls nur ein tangentiales Feld aufweisen. Daher existiert im Modell hier nur die Radialkomponente des Vektorpotentials, während Azimutal- und Axialkomponente durch entsprechende Randbedingungen, „single point constraints“ (SPCs), auf Null gesetzt werden.

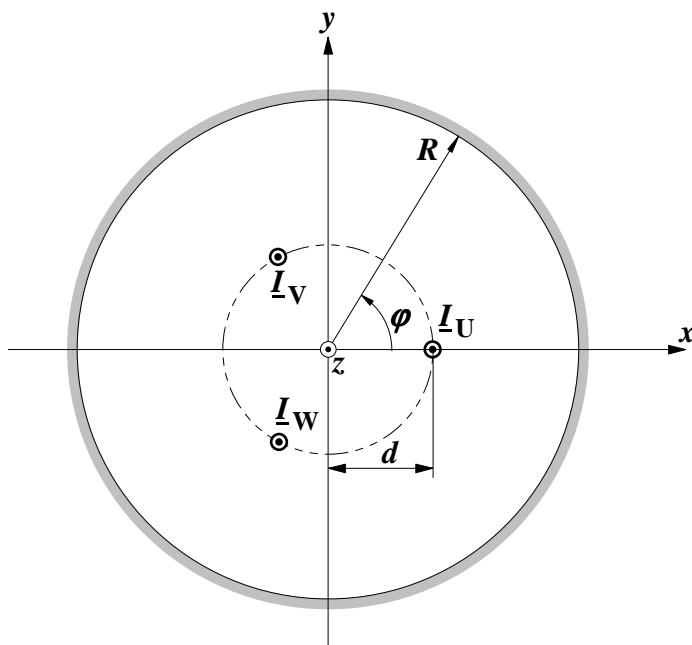


Bild 6.42:

Schematischer Querschnitt durch die betrachtete Anordnung mit fadenförmigen Leitern. Zylinder hier unsegmentiert dargestellt.

Hinsichtlich der Wirbelstromproblematik soll betrachtet werden, ob eine Unterteilung des Zylinders in nicht leitend verbundene Abschnitte von jeweils 30° Umfangswinkel eine Absenkung der Verluste bewirkt.

Im vorliegenden Fall ist also zwar die Ummantelung mit einem Segmentwinkel von 30° periodisch, nicht jedoch die dreisträngige Leiterkonfiguration. Berücksichtigt man jedoch,

dass die Wirbelstrominduktion bei den gegebenen Abmessungen maßgeblich als Folge eines rotierenden Dipolfeldes betrachtet werden kann, erscheint das ursprüngliche dreisträngige Leitersystem durch ein zwölfsträngiges ersetzbar, wodurch eine 30° -Periodizität auch der Erregungssituation bewirkt wird.

Für ein symmetrisches m -Leitersystem mit m -phasiger, symmetrischer Speisung und dem Abstand d zur Achse des gedachten Zylinders, auf dem die Leiter liegen, lässt sich zeigen, dass sein Liniendipolmoment ein rotierender Vektor konstanten Betrages mit der Amplitude $\hat{p}_l = (m/2) \cdot \hat{I}d$ ist. Da die Strangzahl in der Ersatzanordnung um den Faktor 4 steigt, muss die Stromamplitude also für eine Gleichheit der Dipolmomente um diesen Faktor sinken. Des Weiteren kann die Restabhängigkeit von d/R für kleine (d/R) -Werte berücksichtigt werden. Dazu ist anzunehmen, dass das Außenfeld eines zwölfphasigen Leiterbündels weit eher dem Fernfeld eines Liniendipols, also dem Wert $d = 0$ bei invariantem \hat{p}_l , entspricht, als die dreiphasige Originalanordnung. Ein ca. 7 %-iger Zuschlag auf den erregenden Strom im zwölfphasigen Ersatzsystem führt dann auf die gleichen Verluste, wie sie beim dreiphasigen Originalsystem auftreten, wenn diese nach einem analytischen Ansatz für lineare Medien und eine dreiphasige symmetrische Leiteranordnung bestimmt werden.

Aus der Anwendung der bisektoriellen Modellreduktion resultiert ein Modell mit zwei Sektoren von jeweils 30° Umfangswinkel. Auf den Längsschnittflächen der beiden Sektoren des Modells unterliegen alle Komponenten des magnetischen Vektorpotentials der zuvor angegebenen Randbedingungsgleichung (6.17). Für die elektrischen Potentiale gilt dies nur dann, wenn eine solche Längsschnittfläche durch das Zylindermaterial verläuft, was für das unsegmentierte Konstruktionsteil der Fall ist, jedoch im Vergleichsfall mit Unterteilung nicht auftritt. Außerhalb der elektrisch leitfähigen Gebiete werden die Skalarpotentiale auf Null gesetzt.

Im Falle des unterteilten zylindrischen Konstruktionsteils wird eine Wirbelstromverlustleistung von $P_V = 123,51$ kW berechnet, eine Hochrechnung auf den Gesamtumfang inbegriffen. Dies entspricht bei der vorgegebenen Mantellänge von 925 mm einer längenspezifischen Verlustleistung von $P_V' = 133,52$ kW/m. Der modellierte Flansch trägt zu den Gesamtverlusten 23,32 kW bei, d. h. ca. 18,9 %. Aus der Darstellung des Stromdichteefektivwertes auf der Oberfläche eines Zylindersegmentes in Bild 6.43 geht hervor, dass auf der Innenseite geringfügig höhere Stromdichtewerte erreicht werden als auf der Außenseite. Die größten Wirbelstrombelastungen treten auf der Flanschoberfläche und in den Randbereichen in unmittelbarer Nähe der Grundebene auf.

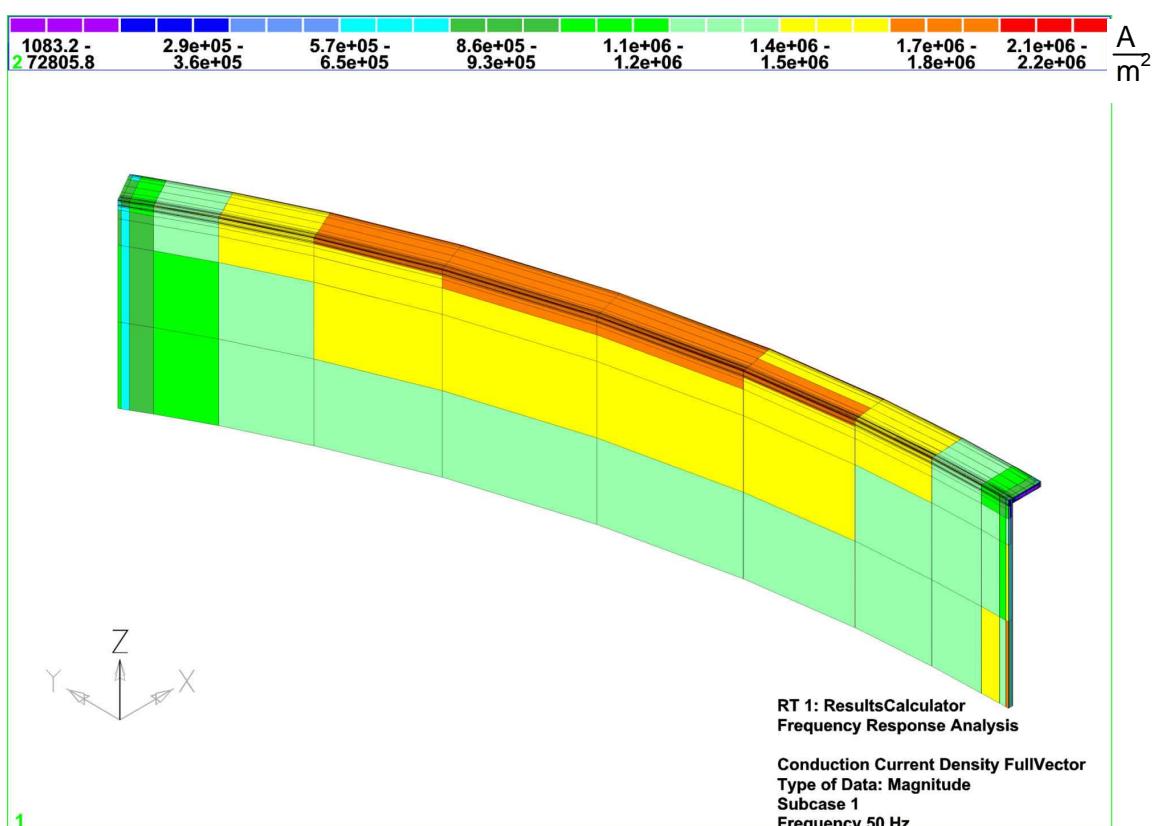
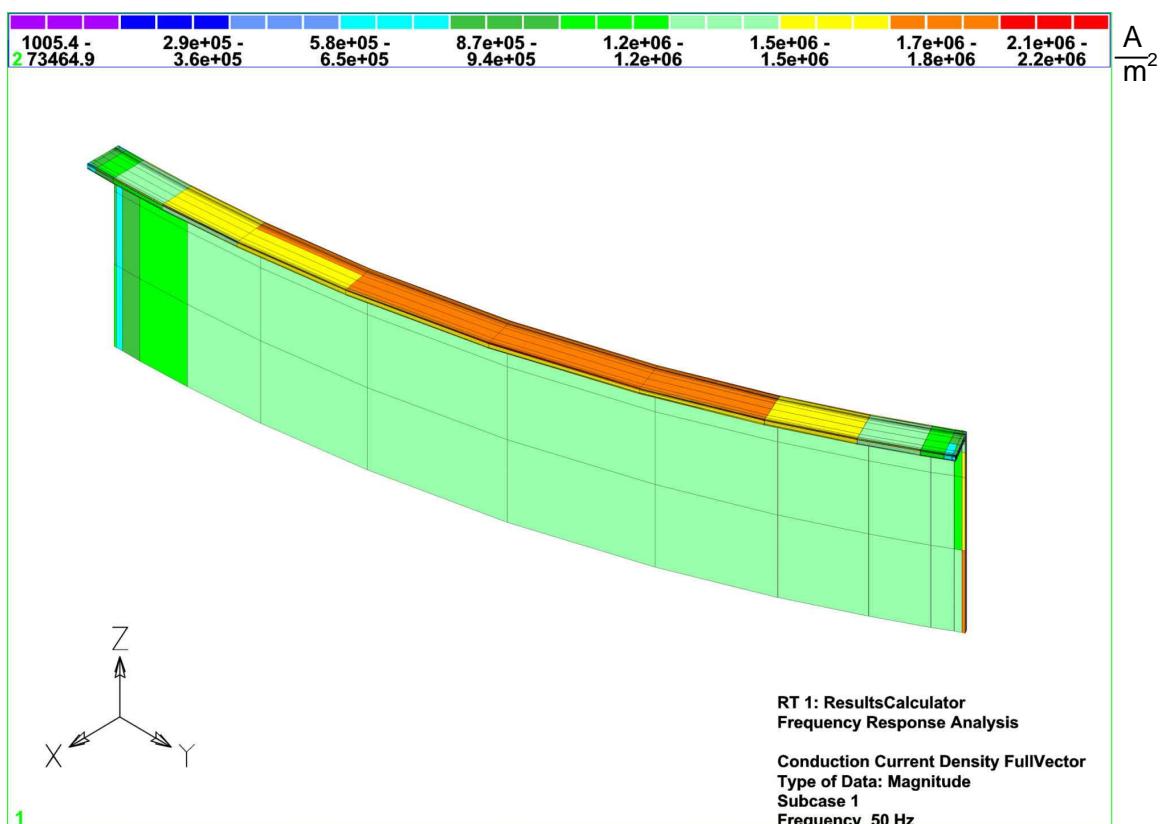


Bild 6.43: EMAS-Ausgaben des Stromdichteeffektivwertbetrages auf der Oberfläche des zylindrischen Konstruktionsteils, das aus unterbrochenen Stahlblechsegmenten mit stirnseitig aufgesetztem Flansch besteht. Rechnung mit iterativer Berücksichtigung der feldabhängigen Permeabilität.

Für die Berechnung der Verlustleistung in dem ununterbrochenen zylindrischen Konstruktionsteil wird in dem segmentierten Modell die Luftsicht im Trennspalt durch Stahlblech ersetzt. Die Diskretisierung wird unverändert übernommen. Die bisektorische Randbedingung wird in diesem Fall wie bereits angedeutet auch auf die Skalarpotentiale des leitfähigen Materials angewandt, was einen elektrischen Rückschluss über die Längsschnittsränder des Modells ermöglicht. Anhand des so beschaffenen Modells wird eine Verlustleistung von $P_V = 138,32 \text{ kW}$ berechnet, also $P_V' = 149,53 \text{ kW/m}$ bei 0,925 m Mantellänge. Dies übersteigt den zuvor berechneten Wert für das segmentierte Ofengefäß nicht wesentlich, sondern lediglich um 12,0 %. Der Anteil der in dem Flansch auftretenden Verluste beträgt 30,72 kW, was 22,2 % der Gesamtverluste entspricht.

Zur Veranschaulichung der Feldverhältnisse in der Grundebene, d. h. der axialen Symmetrieebene, dient das nachfolgende Feldbild, Bild 6.44, das im Rahmen von 2D-Vergleichsrechnungen zur Anwendung der bisektorischen Randbedingung erstellt wurde und deutlich den über die Sektorenengrenzen hinaus gültigen Dipolcharakter des Feldes zeigt.

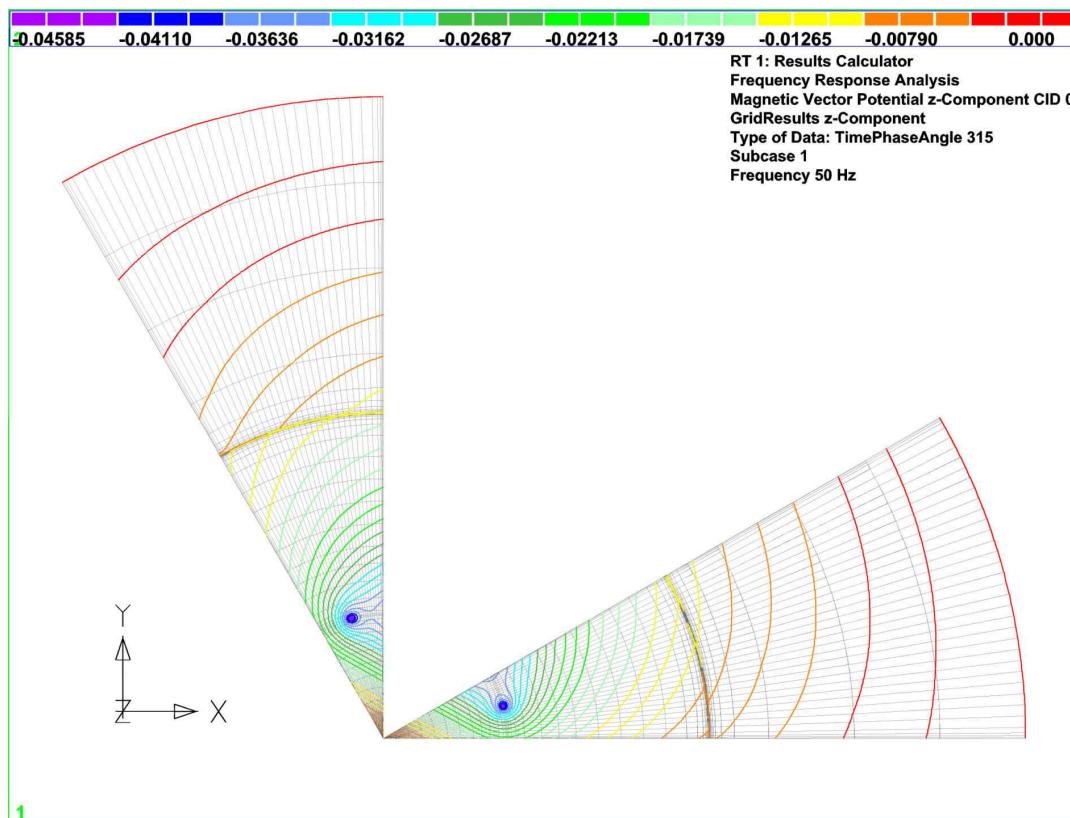


Bild 6.44: Feldbild aus EMAS-Rechnung mit bisektoriellem Modell an zweidimensionaler Anordnung zum Zeitpunkt $\omega t = -45^\circ$. Unterbrochener Zylinder aus Stahlblech mit feldabhängiger Permeabilität.

6.3.3 Wicklungsmodellierung durch geeignete Ausnutzung von anisotropen Materialvorgaben und Übergangsbedingungen

Bei der Auslegung einer Bitterspule für ein Magnetisiergerät ist neben der Berechnung der Selbstinduktivität für Gleichstromspeisung wegen der transienten Betriebsweise auch die Bestimmung der Selbstinduktivität und des ohmschen Widerstandes für höhere Frequenzen von Interesse. Bei der Modellierung muss der besonderen Wicklungsstruktur Rechnung getragen werden, die aufgrund der Serienschaltung der plattenartigen Windungen eine homogene Verteilung der Durchflutung in axialer Richtung erzwingt, aber innerhalb der einzelnen massiven Flächenleiter eine verdrängungsbehaftete Stromdichteverteilung zulässt. Bild 6.45 zeigt eine Skizze der untersuchten Spule und verdeutlicht die elementaren Abmessungen. Die Außenhöhe beträgt $a_o = 204$ mm, die Innenhöhe $a_i = 140$ mm bei einer Außenbreite von $b_o = 384$ mm und einer Innenbreite von $b_i = 320$ mm. Die axiale Länge der Spule ist $l_z = 450$ mm mit einer Windungszahl von $N = 200$. Als verwendetes Material wird Kupfer mit einer elektrischen Leitfähigkeit $\gamma = 56 \cdot 10^6$ S/m bei einer Dicke der einzelnen Windungsplatten von $d = 2$ mm vorausgesetzt.

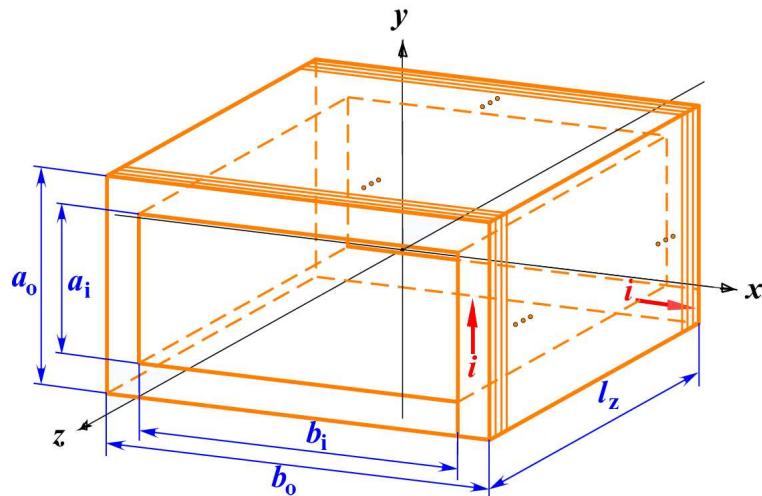


Bild 6.45:

Schematische Darstellung der untersuchten Magnetisierungs-spule [Kl02].

Zur dreidimensionalen Bestimmung der Verteilungen von magnetischer Flussdichte und elektrischer Stromdichte wird in [Kl02] das Programm EMAS verwendet. Dazu werden zeitharmonische Berechnungen mit komplexem Ansatz des Vektorpotentials durchgeführt. Die Frequenzen betragen 0,001 Hz, was als gleichwertig zum Gleichstromfall betrachtet wird, sowie 100 Hz und 2,5 kHz für tonfrequente Komponenten, bei denen die Stromverdrängung berücksichtigt werden muss. Die Speisespannung, die als Ergebnisgröße bei Vorgabe eines eingeprägten Stroms von $I_{eff} = 1$ kA berechnet wird, ist eine unmittelbares Maß für die Eingangsimpedanz der Spule.

Für die Modellerstellung reicht aufgrund der Symmetrien ein Achtel der Anordnung, gelegen im ersten Oktanten eines kartesischen Koordinatensystems, aus. Hierbei wird die axiale Steigung der Wicklung, die aufgrund der hohen Windungszahl sehr gering ist, vernachlässigt, so dass ein elektrisches Strömungsfeld mit einer z -Komponente von Null vorausgesetzt werden kann. Daher braucht auch das magnetische Vektorpotential nur x - und y -Komponenten zu besitzen, $A_z = 0$. Auf den Symmetrieflächen, die das Windungspaket schneiden, steht der Stromdichtevektor senkrecht. Die Flussdichte verläuft dort tangential. Das Vektorpotential weist nur die jeweils auf diesen Flächen senkrechte Komponente auf.

Das Problem, durch die Modellierung von insgesamt 100 Einzelwindungen nebst Berücksichtigung der Stromverdrängung eine sehr hohe Anzahl von Knoten zu erhalten, wird durch das Ersetzen des Windungspaketes durch einen homogenisierten, leitfähigen Block behandelt. Zur Erzwingung des rein ebenenparallelen Strömungsfeldes wird die Ersatzleitfähigkeit des Materials tensoriell vorgegeben, wobei nur die Komponenten $\gamma_{xx} = \gamma_{yy}$ von Null verschiedene Werte erhalten. Der Betrag der Ersatzleitfähigkeit ergibt sich durch Mittelwertbildung über die leitenden und isolierenden Querschnittsflächen des Windungspaketes.

Die Wicklungsstruktur wird durch die Kombination zweier verschiedener Rand- und Übergangsbedingungen eingebracht. Im allgemeinen Wechselstromfall wird die StromdichteVerteilung auf jedem Windungsquerschnitt inhomogen sein, wobei die Windungsquerschnitte auf den Symmetrieebenen jedoch auf gleichem elektrischen Potential liegen. Daher werden die Werte für den Freiheitsgrad des zeitintegrierten elektrischen Potentials auf den Einspeisequerschnitten in den Symmetrieflächen, die jeweils auf der gleichen axialen Höhe liegen und somit zu einer Windung gehören, von dem zugehörigen Wert eines externen Potentialknotens mittels „Multi Point Constraint“ (MPC) abhängig gemacht, d. h. gleichgeschaltet. Für die einzelnen Windungen wird so der Massivleitercharakter mit seinem Stromverdrängungsverhalten realisiert. Gleichzeitig ergibt sich eine Abhängigkeit des statischen elektrischen Potentials von der z -Koordinate für den Wicklungsquerschnitt entsprechend dem Aufbau der Wicklung aus einzelnen, in axialer Richtung geschichteten Windungen. Die externen Sammelknoten sind in Bild 6.46 zusammen mit dem FE-Gitter des Wicklungsblocks dargestellt, wobei die MPCs durch gestrichelte Linien angedeutet werden.

Die Beiträge der Einzelwindungen zum gesamten Spannungsabfall variieren je nach ihrer Flussverkettung und dem ohmschen Spannungsabfall. Setzt man das zeitintegrierte elektrische Potential für den rückseitigen Wicklungsquerschnitt auf Null und formuliert für die Einzelpotentiale der vorderen Einspeiseknoten eine Summenbedingung, so lässt sich hierüber die Serienschaltung der Windungen darstellen. Dabei geht die axiale Windungsdichte multi-

pliziert mit den unterschiedlichen Abständen der einzelnen Knotenlagen in z -Richtung als Gewichtungsfaktor ein, da wegen der nach oben hin feineren Axialdiskretisierung die einzelnen Knotenlagen eine unterschiedliche Anzahl von Windungen repräsentieren. Bei Vorgabe dieser Summengleichung als „Multi Point Constraint“ (MPC) mit dem Potential eines weiteren externen Knotens in Bild 6.46 als Summenpotential wird als Verteilung der in den Knoten berechneten Reaktionsströme eine in axialer Richtung gleichmäßige Verteilung der Gesamtdurchflutung auf den Wicklungsquerschnitt bewirkt. Bei insgesamt $n+1$ Knotenschichten in aufeinanderfolgenden Abständen Δz_i , $i = 1 \dots n$ mit den kollektiven Potentialen $\Phi_1 \dots \Phi_n$ lautet die besagte Bedingungsgleichung für das Summenpotential Φ_{tot} :

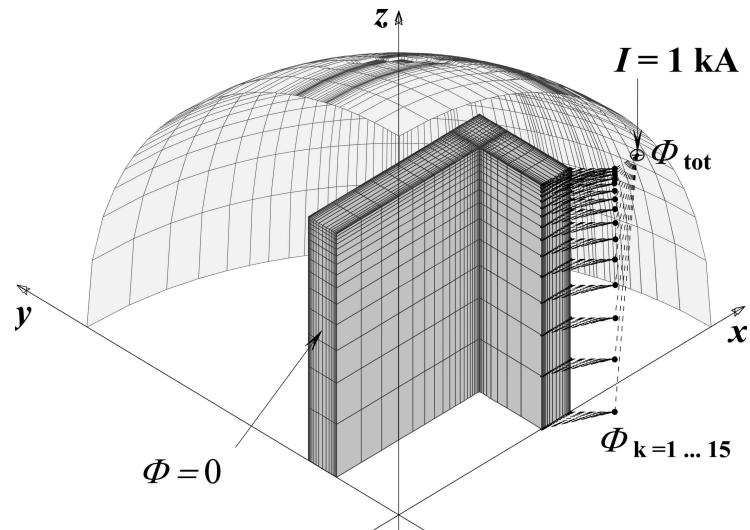
$$\Phi_{\text{tot}} = \frac{N}{l_z} \left(\frac{\Delta z_1}{2} \Phi_1 + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{2} (\Delta z_k + \Delta z_{k+1}) \Phi_k + \frac{\Delta z_n}{2} \Phi_n \right) \quad (6.18)$$

Die Potentiale $\Phi_1 \dots \Phi_n$ stellen dabei die Beiträge von jeweils einer Windung in den jeweiligen Höhen z zur Gesamtspannung dar.

Der Außenraum wird mit in EMAS verfügbaren Flächenelementen abgeschlossen, die wie in Bild 6.46 gezeigt sphärisch auf das Rechengebiet aufgesetzt sind und über Reihenentwicklungen den unendlichen Raum repräsentieren. Das gesamte Modell hat 33130 Knoten und 32940 Elemente.

Bild 6.46:

FEM-Gitter der Wicklung und der äußeren Berandungsfläche ohne Diskretisierung der umgebenden Luft [Kl02].



Als maßgeblicher Unterschied zu einer tatsächlichen Einzelwindungsmodellierung muss erwähnt werden, dass nur den Komponenten des Potentialgradienten in x - und y -Richtung eine physikalische Bedeutung zukommt. Die z -Komponente ist wegen der artifiziellen Randbedingungen, aufgrund derer die rückwärtigen Speiseflächen kollektiv auf Null liegen und die vorderen Speiseflächen nur Einzelwindungsbeiträge zur Gesamtspannung darstellen, nicht aber absolute Potentialwerte, unbrauchbar. Insbesondere sind Spannungen zwischen den Windungen und dielektrische Belastungen sowie der Einfluss von Verschiebungsströmen

nicht abbildbar, was aber bei der gewählten magnetisch quasistationären Betrachtung auch nicht vorgesehen ist. Da des Weiteren die zz -Komponente der Leitfähigkeit Null ist, sind auch keine fehlerhaften Ströme mit der Axialkomponente des skalaren Potentialgefälles verbunden.

Bei einer Einzelwindungsmodellierung mit verschwindend niedriger Isolationsschichtdicke müsste eigentlich eine Unstetigkeit der Tangentialkomponente des elektrischen Feldes an den isoliert aufeinander liegenden Leiteroberflächen ermöglicht werden, wie bei Dular und Geuzaine zur Betrachtung dünner isolierender Schichten formuliert [DuG03]. Die Zirkulationsfreiheit des lokal mit einer Fläche von Null verketteten elektrischen Feldes wäre dann durch lokale Zwischenwindungsspannungen gegeben. Bei der gegebenen Betrachtung des Wicklungsgebietes als Kontinuum entfallen jedoch derartige Unstetigkeitsstellen.

Die Stetigkeit der Tangentialkomponente des Vektorpotentials ist dagegen in jedem Fall durch die Endlichkeit der auftretenden Flussdichten erzwungen. Sie wird sowohl bei der Verwendung von Kantelementen als auch wie vorliegend bei knotenbasierten Elementen erfüllt, wobei im vorliegenden Fall keine Permeabilitätsunterschiede berücksichtigt werden müssen.

In der nachfolgenden Tabelle 6.6 sind die Ergebnisse für den Realteil und den Imaginärteil der Eingangsimpedanz und der sich hieraus ergebenden Induktivität für die gesamte Spule zusammengetragen. Der Widerstand bei 1 mHz korreliert gut mit dem Schätzwert für R_{DC} von 58,48 mΩ, den aus der Windungszahl $N = 200$ und der mittleren, rechteckigen Umfangslänge von $a_i + a_o + b_i + b_o = 1,048$ m und den Querschnittabmessungen 2 mm × 32 mm der Leiter sowie der Leitfähigkeit von Kupfer von $56 \cdot 10^6$ S/m erhält. Die Abweichung von etwa 5,7 % nach unten in der Feldberechnung ist vermutlich auf den entsprechend dem dortigen lokalen Strömungsfeld gegenüber der rechteckigen Abschätzung reduzierten Widerstandsbeitrag zurückzuführen.

Tabelle 6.6: Ergebnisse aus FEM-Berechnung für quaderförmige Bitterspule, Ersatzleitfähigkeit des Windungsblocks $\gamma_{Cu,Iso} = 49,78 \cdot 10^6$ S/m

Frequenz F	Eindringtiefe δ	Resistanz $R = \text{Re}\{\underline{Z}\} = \text{Re}\{\underline{U}\}/I$	Reaktanz $X = \text{Im}\{\underline{Z}\} = \text{Im}\{\underline{U}\}/I$	Induktivität $L = \text{Im}\{\underline{Z}\}/\omega$
Hz	mm	mΩ	mΩ	mH
0,001	2256	55,31	$0,02989 \cdot 10^{-3}$	4,757
100	7,133	179,73	2,726	4,339
2500	1,427	977,2	64,48	4,105

Mit zunehmender Frequenz tritt eine Widerstandserhöhung entsprechend der Konzentration des Stroms auf der dem Magnetfeld zugewandten Innenseite des Wicklungsblocks auf. Dieser Stromverdrängungseffekt ist deutlich in Bild 6.47 zu erkennen. Eine einfache, direkte eindimensionale Abschätzung des Widerstandes über die Eindringtiefe gemäß

$$R_{\sim} \approx N \cdot \frac{2 \cdot (a_i + b_i + 2 \delta)}{\gamma_{\text{Cu}} \delta d} \quad (6.19)$$

führt jedoch zu unbefriedigenden Ergebnissen, die mit $237,5 \text{ m}\Omega$ bei 100 Hz um ca. 32 % und mit $1,158 \Omega$ bei $2,5 \text{ kHz}$ um 18,5 % zu hoch ausfallen. Dies hängt damit zusammen, dass in den Windungen in geringerem Abstand zu den Stirnseiten der Spule wegen der zunehmenden Inhomogenität des Feldes dort auch die Stromverdrängung nicht so stark ausgeprägt ist wie für die zentralen Windungen, wie dies in Bild 6.47 andeutungsweise erkennbar ist.

Ähnliches gilt bei der Induktivitätsberechnung. Die Annahme homogener Feldverhältnisse und eines idealen magnetischen Rückschlusses würde hier z. B. im Gleichstromfall auf einen Wert führen, der um mehr als 40 % über dem Wert aus Tab. 6.6 liegt [Kl02].

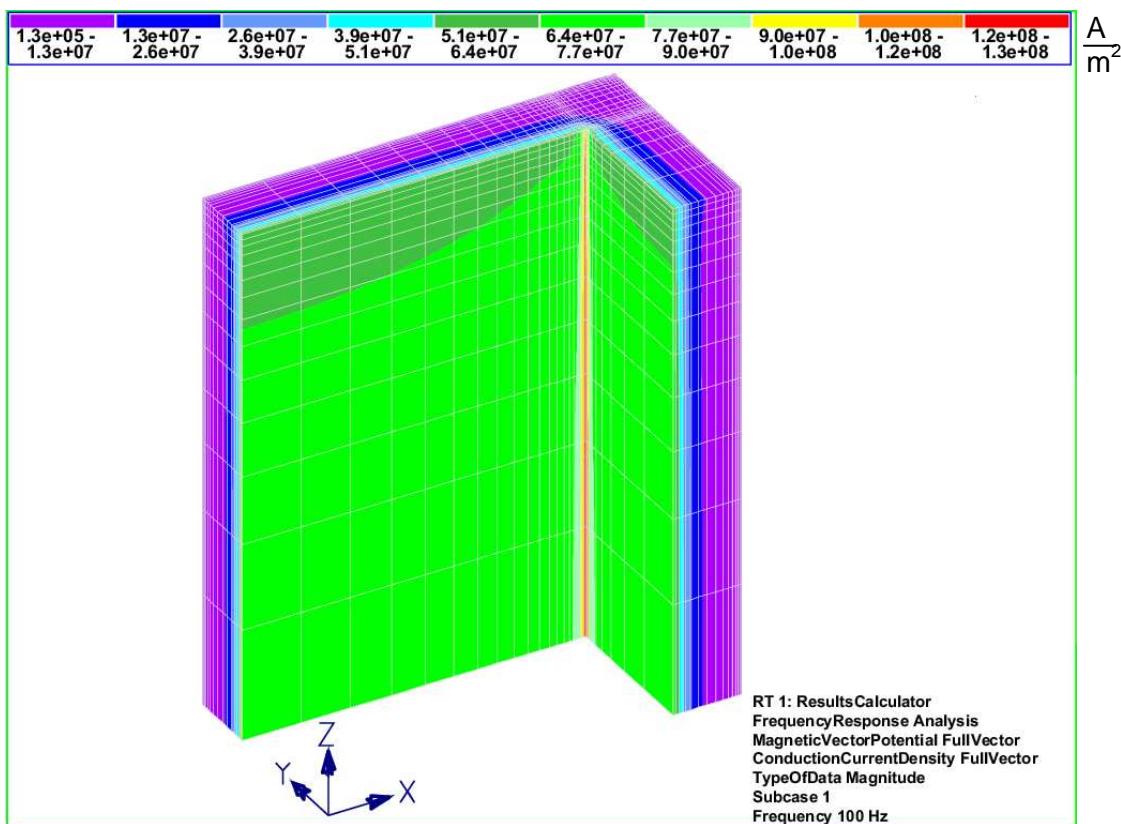


Bild 6.47: StromdichteVerteilung auf der Innenseite des Windungsblocks des FEM-Modells, Effektivwertbeträge bei Speisefrequenz von $f = 100 \text{ Hz}$ und felderregendem Strom $I_{\text{eff}} = 1 \text{ kA}$ [Kl02].

7 Begleitende analytische Berechnungen als Referenzbetrachtungen zu speziellen Fragen und Anwendungen numerischer Methoden

Nachfolgend werden einige analytische Betrachtungen präsentiert, die jeweils in einem spezifischen Zusammenhang zu Fragestellungen der numerischen Feldberechnung stehen. In Kap. 7.1 wird an einem einfachen Beispiel gezeigt, wie mit Hilfe des Separationsansatzes die Wirbelstromdichte- und Feldverteilung in einem zweidimensionalen Fall bestimmt werden kann. Das Beispiel stellt eine Anwendung für das elektrische Stromdichtevektorpotential dar. Gleichzeitig verdeutlichen die auftretenden Lösungen in Form von Reihen die Schwierigkeiten bei der Diskussion derartiger Ergebnisse gegenüber dem eindimensionalen Vergleichsfall, der als Grenzwert bei entsprechenden Abmessungsverhältnissen auftritt.

Kap. 7.2 beschäftigt sich mit der Berechnung des Gleichstromleitwertes kreisringsektorieller Leiter mit allgemeinem polygonalem Querschnitt unter Berücksichtigung wesentlicher denkbarer Sonderfälle. Die Fragestellung steht in Zusammenhang mit der Diskretisierung von zylindersymmetrischen Wirbelstromproblemen in der r , z -Ebene und betrifft Genauigkeit und mögliche Fehler bei der Aufstellung der Konduktanzmatrix.

In Kap. 7.3 wird ein Ersatzschaltbild mit Kettenleiterstruktur für einen massiven, leitfähigen Kurzschlussring mit zeitveränderlichem Radius hergeleitet. Die zugehörige Erregerwicklung ist dabei inbegriffen. Die Betrachtungen finden unter der Annahme eines idealen magnetischen Rückschlusses und vereinfachten Randbedingungen statt. Diese ermöglichen eine analytische Feldberechnung als Grundlage für die Bestimmung des Ersatzschaltbildes, das zur Berechnung der auftretenden transienten Ströme und Kräfte dient. Die Ergebnisse dienen in Kap. 5.2 als Vergleich für die implementierte numerische Feldberechnung.

7.1 Wirbelstromverluste in einem axial unendlich ausgedehnten Stab mit rechteckigem Querschnitt bei konstanter anregender Feldamplitude

Es wird ein Stab mit linearen Materialeigenschaften, d. h. mit der magnetischen Permeabilität $\mu = \mu_r \mu_0$ und der elektrischen Leitfähigkeit γ betrachtet. Der Stab habe nach Bild 7.1 eine rechteckige Querschnittfläche mit den Abmessungen a und b in x - und y -Richtung eines einbeschriebenen, kartesischen Koordinatensystems. Senkrecht zur Querschnittsfäche, d. h. in z -Richtung greife von außen ein magnetisches, zeitharmonisches Wechselfeld mit dem Effektivwert $H_{0,\text{eff}}$ und der Kreisfrequenz ω an. In axialer, d. h. z -Richtung sei der Stab derart ausgedehnt, dass im Bereich der betrachteten Querschnittebene die magnetische Feldstärke

ausschließlich eine Komponente senkrecht zur Querschnittebene und auftretende Wirbelstromdichten nur Komponenten innerhalb dieser Ebene, also x - und y -Komponenten, aufweisen.

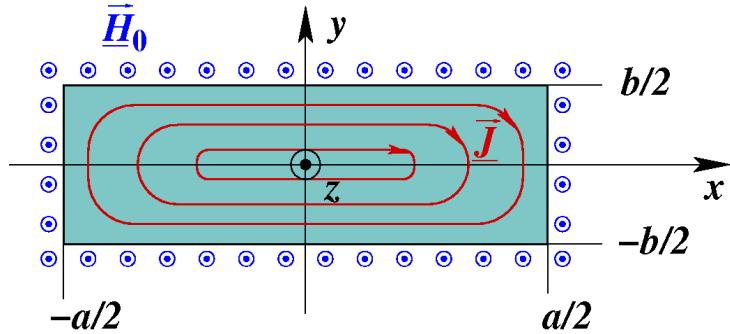


Bild 7.1: Querschnitt durch untersuchte Anordnung mit Abmessungen und Lage des Koordinatensystems sowie erregendem Außenfeld \underline{H}_0 und qualitativer Gestalt der Wirbelstromlinien.

Für diese Anordnung soll unter den gesetzten Voraussetzungen nachfolgend die Wirbelstromverlustleistung für ein Teilstück der axialen Länge l_z berechnet werden.

Unter Vernachlässigung von Verschiebungsströmen kann die erste Maxwell'sche Gleichung in komplexer Schreibweise wie folgt angegeben werden:

$$\text{rot } \underline{\vec{H}} = \underline{\vec{J}} \quad (7.1)$$

Wegen

$$\text{div } \underline{\vec{J}} = 0 \quad (7.2)$$

kann die sich ergebende Wirbelstromverteilung als Rotation eines elektrischen Vektorpotentials $\underline{\vec{T}}$ dargestellt werden.

$$\underline{\vec{J}} = \text{rot } \underline{\vec{T}} \quad (7.3)$$

Die magnetische Feldstärke lässt sich als Überlagerung des Wirbelfeldes $\underline{\vec{T}}$ und eines Gradientenanteils darstellen, wobei das Vektorfeld $\underline{\vec{T}}$ als quellenfrei angesetzt wird, und $\underline{\Omega}$ das reduzierte skalare magnetische Potential beschreibt:

$$\underline{\vec{H}} = \underline{\vec{T}} - \text{grad } \underline{\Omega} \quad (7.4)$$

Die zweite Maxwell'sche Gleichung ergibt unter Berücksichtigung der konstitutiven Gleichungen mit der ortsunabhängigen Leitfähigkeit γ und der Permeabilität μ innerhalb des leitfähigen Gebietes in komplexer Schreibweise:

$$\frac{1}{\gamma} \operatorname{rot} \vec{\underline{J}} = -j \omega \mu \vec{\underline{H}} \quad (7.5)$$

Mit (7.3) und (7.4) führt dies auf:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\underline{T}} + j \omega \mu \gamma \vec{\underline{T}} = j \omega \mu \gamma \operatorname{grad} \underline{\Omega} \quad (7.6)$$

Durch Auflösung der doppelten Rotation und Berücksichtigung der Quellenfreiheit des elektrischen Vektorpotentials gelangt man zu:

$$\Delta \vec{\underline{T}} - j \omega \mu \gamma \vec{\underline{T}} = -j \omega \mu \gamma \operatorname{grad} \underline{\Omega} \quad (7.7)$$

Beachtet man zusätzlich, dass bei ortsunabhängiger Permeabilität die magnetische Feldstärke quellenfrei ist, so erhält man aus (7.4) für das skalare magnetische Potential eine Laplace-Gleichung.

Für das zu betrachtende 2D-Problem gelten folgende Voraussetzungen:

$$\vec{\underline{T}} = \underline{T} \cdot \vec{e}_z, \quad \vec{\underline{H}} = \underline{H} \cdot \vec{e}_z, \quad \vec{\underline{J}} = \underline{J}_x \cdot \vec{e}_x + \underline{J}_y \cdot \vec{e}_y \quad (7.8)$$

Als eine Lösung für das skalare Potential $\underline{\Omega}$ kann für die vorliegende Problemstellung unmittelbar das Potential des homogenen Erregerfeldes angegeben werden:

$$\underline{\Omega} = -\sqrt{2} \hat{H}_{0,eff} \cdot z \cdot e^{j\omega t} = -\hat{H}_0 \cdot z \cdot e^{j\omega t} \quad (7.9)$$

Mit (7.8) und (7.9) geht (7.7) über in:

$$\frac{\partial^2 \underline{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{T}}{\partial y^2} - j \omega \mu \gamma \underline{T} = j \omega \mu \gamma \hat{H}_0 \cdot e^{j\omega t} \quad (7.10)$$

Für das elektrische Vektorpotential wird ein Ansatz in Form einer doppelten Fourierreihe gewählt, der auf den gegebenen Rändern bei $|x| = a/2$ und $|y| = b/2$ die Randbedingung $\underline{T} = 0$ erfüllt:

$$\underline{T} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \hat{T}_{m,n} \cdot \cos\left(m\pi \frac{x}{a}\right) \cos\left(n\pi \frac{y}{b}\right) \cdot e^{j\omega t} \quad (7.11)$$

Dieser Ansatz führt eingesetzt in (7.10) auf:

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + j \omega \mu \gamma \right] \cdot \hat{T}_{m,n} \cdot \cos\left(m\pi \frac{x}{a}\right) \cos\left(n\pi \frac{y}{b}\right) \cdot e^{j\omega t} = j \omega \mu \gamma \hat{H}_0 \cdot e^{j\omega t} \quad (7.12)$$

Wird nun auch die rechte Seite von (7.12) durch eine Fourierreihe ausgedrückt, können durch Vergleich der Reihen die Koeffizienten der Lösung des elektrischen Vektorpotentials berechnet werden. Dazu wird die rechte Seite mit folgender Fourierreihe multipliziert:

$$1 = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{16}{\pi^2} \cdot \frac{(-1)^{\left(\frac{m+n}{2}+1\right)}}{m \cdot n} \cdot \cos\left(m\pi \frac{x}{a}\right) \cos\left(n\pi \frac{y}{b}\right), \quad \text{für } |x| < \frac{a}{2} \text{ und } |y| < \frac{b}{2} \quad (7.13)$$

Die Koeffizienten $\hat{T}_{m,n}$ ergeben sich damit zu:

$$\hat{T}_{m,n} = \hat{H}_0 \cdot \frac{16}{\pi^2} \cdot \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}}}{m \cdot n} \cdot \frac{j\omega\mu\gamma}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + j\omega\mu\gamma}, \quad m=1,3,5,\dots, n=1,3,5,\dots \quad (7.14)$$

Dieses Ergebnis erhält man auch, wenn man (7.12) jeweils mit den Basisfunktionen multipliziert und unter Ausnutzung der Orthogonalitätseigenschaft über das Rechengebiet integriert.

In den Bildern 7.2a-d sind für ein Beispiel die Verteilungen der magnetischen Feldstärke für vier unterschiedliche Zeitpunkte im Verlauf einer Halbperiode dargestellt. Sie ergeben sich durch Auswertung von (7.4) unter Berücksichtigung des Reihenansatzes von (7.11) mit den Koeffizienten nach (7.14). Die Querschnittsbemessungen des Quaders sind dabei $a = 50$ mm und $b = 20$ mm. Das Material hat eine relative Permeabilität von $\mu_r = 5$ und eine elektrische Leitfähigkeit von $\gamma = 10^6$ S/m. Die anregende Frequenz beträgt $f = 600$ Hz, woraus sich eine Eindringtiefe von ca. 9,19 mm ergibt.

Die vier zeitlich im Abstand einer Achtelperiode aufeinander folgenden Feldstärkeverteilungen zeigen, dass die Feldstärke im Inneren dem Außenfeld erwartungsgemäß nacheilt und von niedrigerer Amplitude ist. Besonders deutlich wird der hier zweidimensional wellenförmige Charakter des Eindringverhaltens in Bild 7.1b, wo die Außenfeldstärke bereits im Abklingen begriffen ist, während im Zentrum die Feldstärke kurz vor Erreichen ihres Amplitudenwertes steht.

Durch Anwendung der Rotation auf (7.11) gelangt man zur Wirbelstromverteilung \vec{J} :

$$\begin{aligned} \vec{J} &= \frac{\partial \underline{T}}{\partial y} \cdot \vec{e}_x - \frac{\partial \underline{T}}{\partial x} \cdot \vec{e}_y = \\ &= \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \hat{T}_{m,n} \left(-\frac{n\pi}{b} \sin\left(n\pi \frac{y}{b}\right) \cdot \cos\left(m\pi \frac{x}{a}\right) \cdot \vec{e}_x + \frac{m\pi}{a} \sin\left(m\pi \frac{x}{a}\right) \cos\left(n\pi \frac{y}{b}\right) \cdot \vec{e}_y \right) \cdot e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (7.15)$$

Die Verlustleistung lässt sich durch Integration des komplexen Poyntingvektors über die Oberfläche bestimmen:

$$P_V = -\operatorname{Re} \left\{ \oint \vec{E}_{\text{eff}} \times \underline{\vec{H}}_{\text{eff}}^* d\vec{a} \right\} = -\frac{1}{2\gamma} \operatorname{Re} \left\{ \oint \hat{\underline{J}} \times \hat{\underline{H}}^* d\vec{a} \right\} \quad (7.16)$$

Im vorliegenden Fall führen das gegebene Randfeld H_0 und die Ausnutzung der Symmetrien zu folgendem:

$$\begin{aligned} P_V &= \frac{2\hat{H}_0}{\gamma} \operatorname{Re} \left\{ \oint \left(\frac{\partial T}{\partial y} \cdot \vec{e}_y + \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \vec{e}_x \right) \cdot e^{-j\omega t} \cdot d\vec{a} \right\} = \\ &= \frac{2\hat{H}_0 l_z}{\gamma} \operatorname{Re} \left\{ \left[\int_{(a/2, 0)}^{(a/2, b/2)} \frac{\partial T}{\partial x} dy + \int_{(a/2, b/2)}^{(0, b/2)} \frac{\partial T}{\partial y} \cdot (-dx) \right] \cdot e^{-j\omega t} \right\} \end{aligned} \quad (7.17)$$

Die Auswertung von (7.17) liefert mit (7.15) zunächst:

$$\begin{aligned} P_V &= \frac{2\hat{H}_0 l_z}{\gamma} \operatorname{Re} \left\{ \left[\int_0^{b/2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \hat{T}_{m,n} \left(-\frac{m\pi}{a} \sin\left(m\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(n\pi\frac{y}{b}\right) \right) dy + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_0^{a/2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \hat{T}_{m,n} \left(-\frac{n\pi}{b} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(m\pi\frac{x}{a}\right) \right) dx \right] \right\} = \\ &= -\frac{2\hat{H}_0 l_z}{\gamma} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \hat{T}_{m,n} \left(\frac{mb}{na} \sin\left(m\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{na}{mb} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(m\frac{\pi}{2}\right) \right) \right\} = \\ &= \frac{2\hat{H}_0 l_z}{\gamma} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \hat{T}_{m,n} \left(\frac{mb}{na} + \frac{na}{mb} \right) \cdot (-1)^{\frac{m+n}{2}} \right\} \end{aligned} \quad (7.17a)$$

Mit den in (7.14) berechneten Koeffizienten liefert (7.17a):

$$P_V = \frac{32\hat{H}_0^2 l_z}{\pi^2 \gamma} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{j\omega\mu\gamma}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + j\omega\mu\gamma} \left(\frac{b}{n^2 a} + \frac{a}{m^2 b} \right) \right\} \quad (7.18)$$

Hierin können, wie nachfolgend in (7.19) gezeigt, zum Zwecke einer verallgemeinerten Darstellung die auf die Eindringtiefe δ des elektromagnetischen Feldes bezogenen Abmessungen a' und b' eingeführt werden.

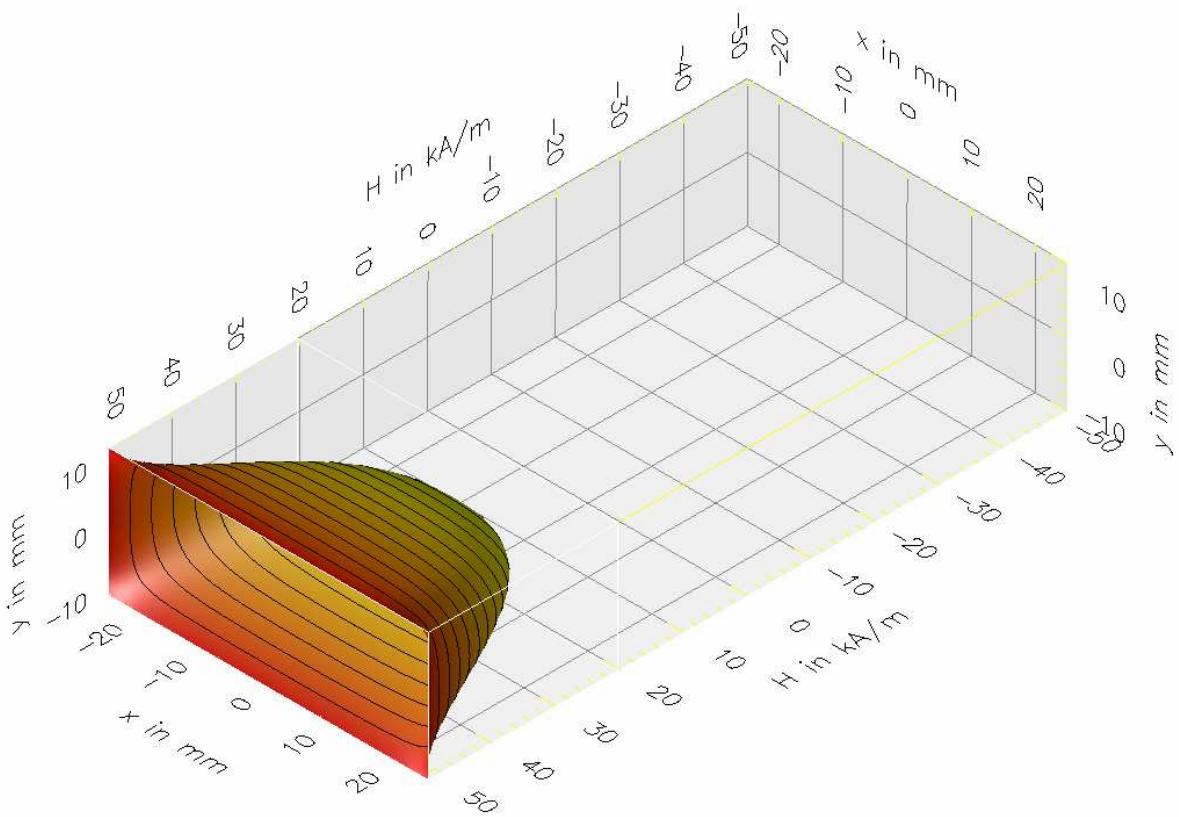


Bild 7.2a: Verteilung der magnetischen Feldstärke auf dem Querschnitt eines mit axialem Wechselfeld beaufschlagten Quaders. Zeitpunkt $\omega t = 0^\circ$ mit maximaler Außenfeldstärke H_0 .

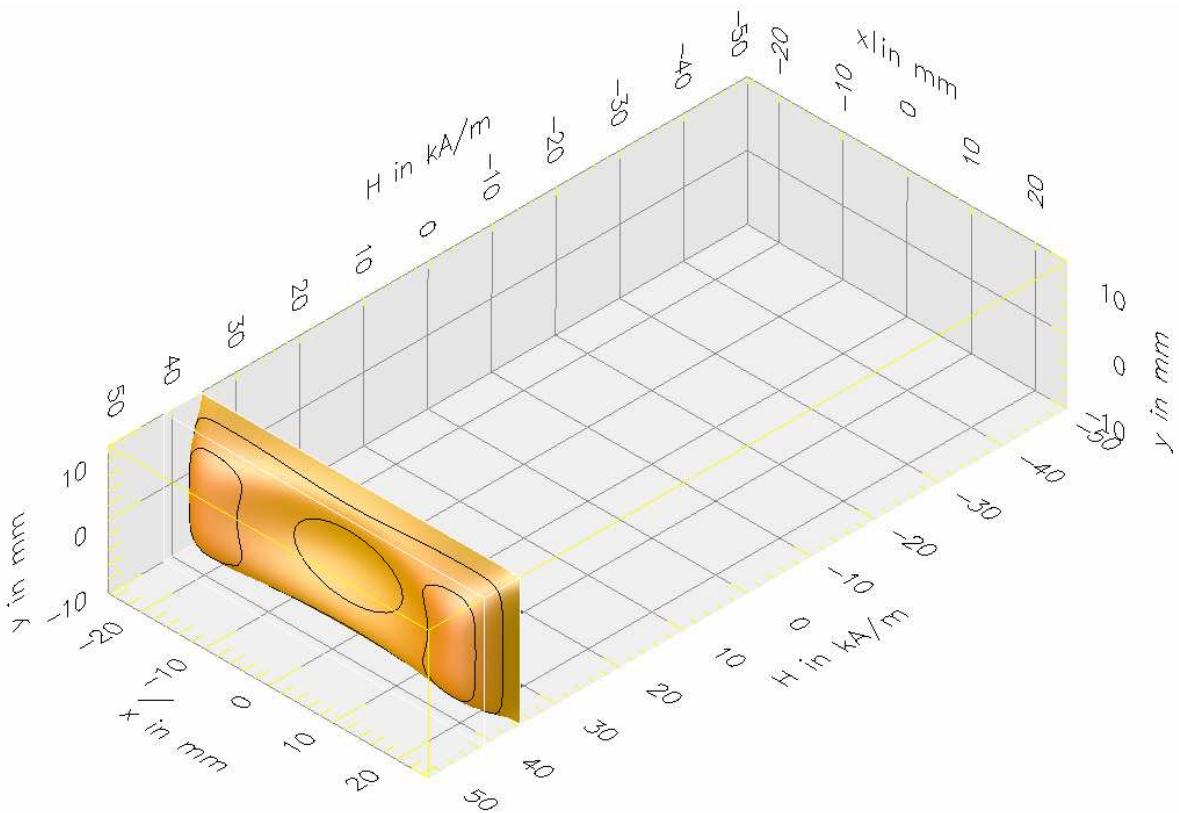


Bild 7.2b: Wie Bild 7.2a, jedoch eine Achtelperiode später, $\omega t = 45^\circ$.

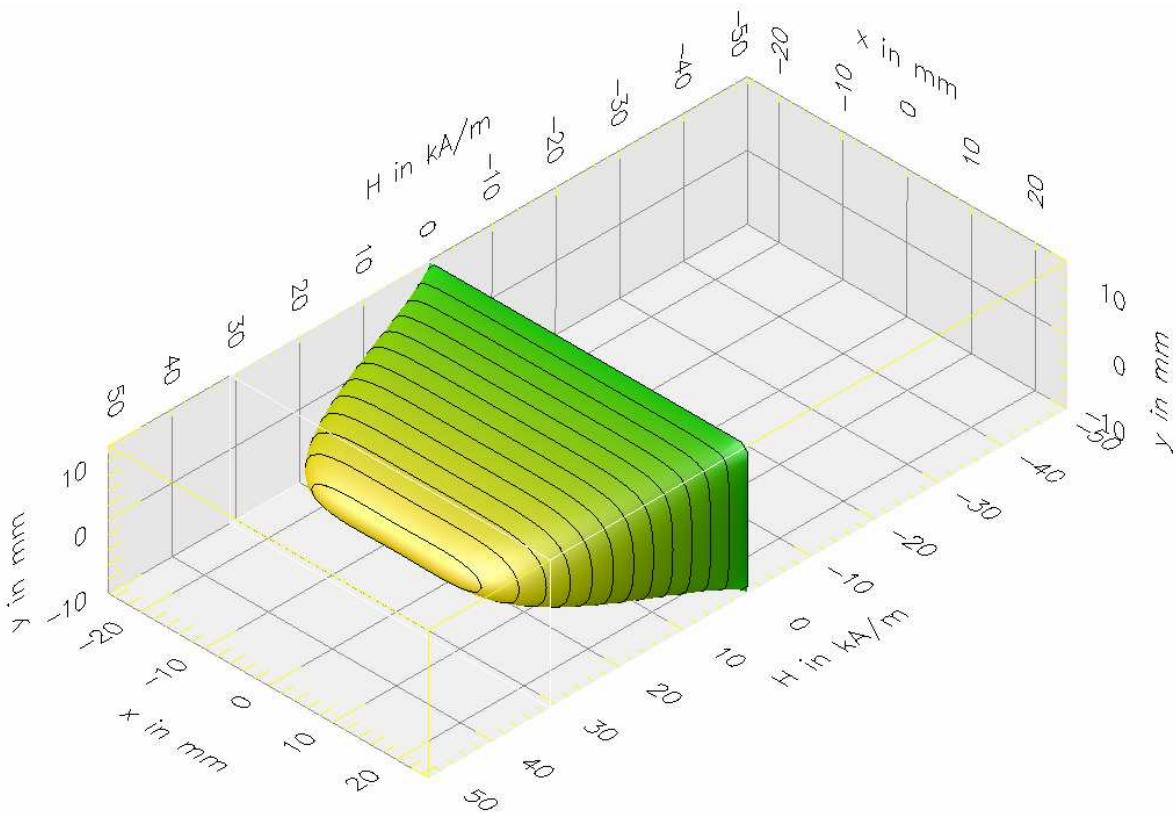


Bild 7.2c: Wie Bild 7.2a, jedoch eine Viertelperiode später, $\omega t = 90^\circ$, Zeitpunkt des Nulldurchgangs der Außenfeldstärke.

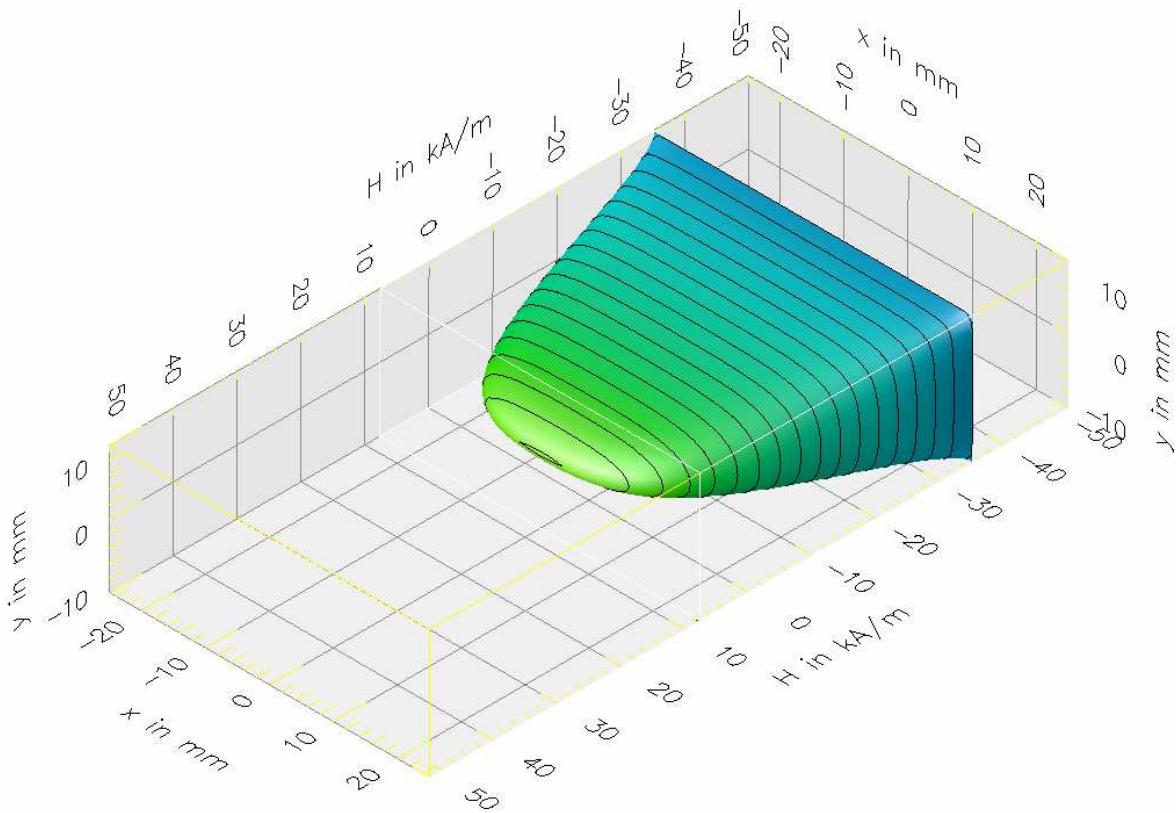


Bild 7.2d: Wie Bild 7.2a, jedoch drei Achtelperioden später, $\omega t = 135^\circ$.

$$P_V = \frac{64\hat{H}_0^2 l_z}{\pi^2 \gamma} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{j}{\left(\frac{m\pi}{a'}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b'}\right)^2 + 2j} \left(\frac{b'}{n^2 a'} + \frac{a'}{m^2 b'} \right) \right\} \quad (7.19)$$

mit $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \gamma}}$, $b' = \frac{b}{\delta}$ und $a' = \frac{a}{\delta}$.

Durch weitere Umformung ergibt sich schließlich für die gesuchte Verlustleistung:

$$P_V = \frac{128\hat{H}_0^2 l_z}{\pi^2 \gamma} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{4 + \left[\left(\frac{m\pi}{a'} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b'} \right)^2 \right]^2} \left(\frac{b'}{n^2 a'} + \frac{a'}{m^2 b'} \right) \quad (7.20)$$

Als Bezugswert zur Normierung der Verlustleistung kann derjenige Wert herangezogen werden, der sich bei Verwendung der Oberflächenverlustleistungsdichte für den Fall eines unendlichen Halbraumes ergeben würde, und der für im Verhältnis zu den Abmessungen niedrige Eindringtiefen näherungsweise erreicht wird:

$$P_{V,\infty} = p_{V,\infty} \cdot A = \frac{\hat{H}_0^2}{2\gamma\delta} \cdot 2 \cdot (a+b) \cdot l_z = \frac{\hat{H}_0^2}{\gamma} \cdot (a'+b') \cdot l_z \quad (7.21)$$

Damit geht (7.20) über in:

$$\frac{P_V}{P_{V,\infty}} = \frac{128}{\pi^2 (a'+b')} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{4 + \left[\left(\frac{m\pi}{a'} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b'} \right)^2 \right]^2} \left(\frac{b'}{n^2 a'} + \frac{a'}{m^2 b'} \right) \quad (7.22)$$

Die Auswertung dieses, bei invarianter Oberflächenfeldstärke gültigen Verlustleistungsverhältnisses in Abhängigkeit der bezogenen Abmessung b' ist für einige Werte von a' als Parameter in Bild 7.3 aufgeführt. Hierin ist deutlich zu erkennen, dass für eine Tiefe des Stabquerschnitts a bis zu ca. 7 Eindringtiefen δ die Verluste monoton mit der Breite b des Querschnitts anwachsen. Umgekehrt bewirkt jede Reduktion der Breite b eine Senkung der Verluste. Für größere Werte von a ist diese Monotonie jedoch nicht mehr gegeben, wie alle Kurven mit $a' \geq 10$ deutlich zeigen. Vielmehr ergibt sich mit zunehmendem Wert von a' ein lokales Maximum bei ca. $b' = 3,1 \dots 3,4$. Dieses Extremwertverhalten zeigt sich auch für vertauschte Rollen von a' und b' in dem steilen Anstieg der Kurve für $a' = 3$, die ab ca. $b' = 9,3$ höhere Verluste anzeigt als die Kurve für $a' = 5$.

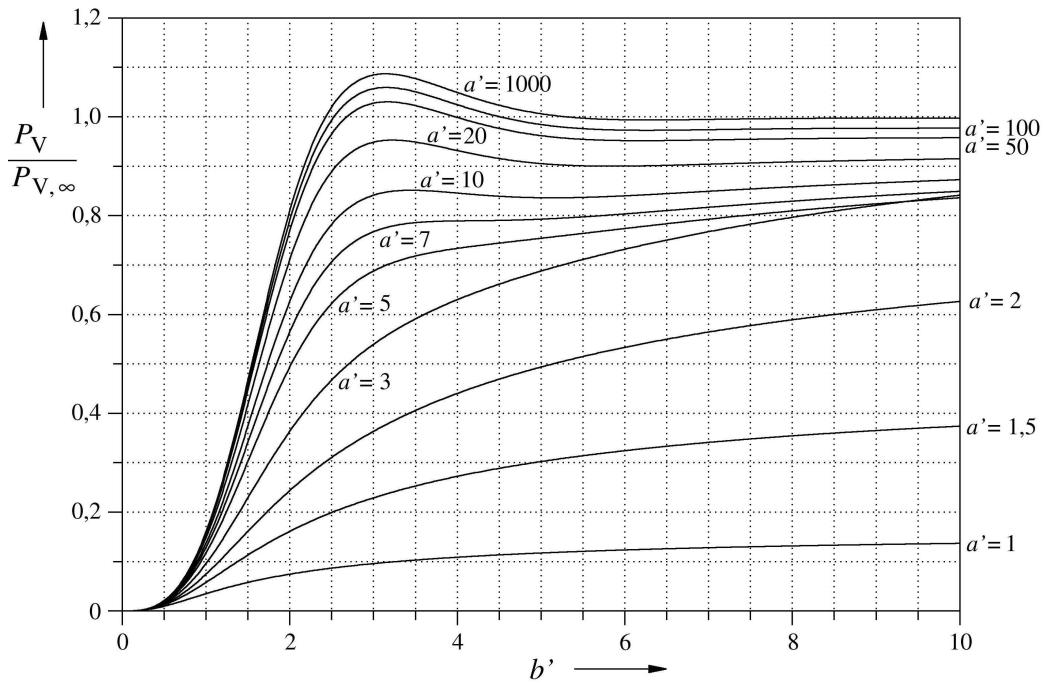


Bild 7.3: Wirbelstromverlustleistung in einem Stab mit rechteckigem Querschnitt in Abhängigkeit der auf die Eindringtiefe bezogenen Querschnittsbemessungen b' und a' bei unveränderlicher Oberflächenfeldstärke. Bezugswert der Wirbelstromverluste $P_{V,\infty}$ aus Leistungsdichte beim unendlichen Halbraum und Staboerfläche. Summierungsgrenzen für (7.22): $n_{\max} = m_{\max} = 901$.

Aus (7.22) ist dieses Auftreten lokaler Maxima der Verlustleistung analytisch nicht ersichtlich und ergibt sich erst durch die numerische Auswertung. Eine analytische Berechnung ist jedoch für den Grenzfall $a' \rightarrow \infty$ möglich, der eine eindimensionale Betrachtung zulässt. Hierfür kann die Feldstärke ausgedrückt werden durch [Km90]:

$$\underline{H} = \hat{H}_0 \cdot \frac{\cosh \left[(1+j) \frac{y}{\delta} \right]}{\cosh \left[(1+j) \frac{b}{2\delta} \right]} \cdot e^{j\omega t} \cdot \vec{e}_z \quad (7.23)$$

Daraus ergibt sich die Stromdichte durch Anwendung des Durchflutungsgesetzes zu:

$$\underline{J} = \frac{\partial H_z}{\partial y} \cdot \vec{e}_x = \frac{1+j}{\delta} \cdot \hat{H}_0 \cdot \frac{\sinh \left[(1+j) \frac{y}{\delta} \right]}{\cosh \left[(1+j) \frac{b}{2\delta} \right]} \cdot e^{j\omega t} \cdot \vec{e}_x \quad (7.24)$$

An der Oberfläche bei $y = b/2$ liefert (7.24) den Wert:

$$\underline{J}_0 = \frac{1+j}{\delta} \cdot \hat{H}_0 \cdot \tanh \left[(1+j) \frac{b}{2\delta} \right] \cdot e^{j\omega t} \cdot \vec{e}_x \quad (7.25)$$

Über den komplexen Poynting-Vektor und Multiplikation mit der Oberfläche $2 a l_z$ erhält man schließlich die Verlustleistung in der Anordnung zu:

$$P_V = \frac{a \cdot l_z}{\gamma \delta} \cdot \hat{H}_0^2 \cdot \operatorname{Re} \left\{ (1+j) \tanh \left[(1+j) \frac{b}{2\delta} \right] \right\} \quad (7.26)$$

Dies ergibt mit dem Bezugswert aus (7.21) und unter der Annahme $a' > b'$ oder $a' \rightarrow \infty$:

$$\frac{P_V}{P_{V,\infty}} = \operatorname{Re} \left\{ (1+j) \tanh \left[(1+j) \frac{b'}{2} \right] \right\} \quad (7.27)$$

Nach einiger Zwischenrechnung erhält man durch Zerlegung in Realteil und Imaginärteil:

$$\frac{P_V}{P_{V,\infty}} = \frac{\sinh b' - \sin b'}{\cosh b' + \cos b'} \quad (7.28)$$

Die Ableitung nach b' bestimmt sich zu:

$$\frac{d}{db'} \left(\frac{P_V}{P_{V,\infty}} \right) = \frac{(\cosh b' - \cos b')(\cosh b' + \cos b') - (\sinh b' - \sin b')^2}{(\cosh b' + \cos b')^2} = \frac{2 \sinh b' \sin b'}{(\cosh b' + \cos b')^2} \quad (7.29)$$

Offensichtlich ergibt sich für $b' = \pi$ eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel vom Positiven ins Negative, aus der ein Maximalwert für das Leistungsverhältnis folgt:

$$\left(\frac{P_V}{P_{V,\infty}} \right)_{\max} = \frac{\sinh \pi}{\cosh \pi - 1} = \coth \frac{\pi}{2} \approx 1,09 \quad (7.30)$$

Eine physikalische Anschauung für das Extremwertverhalten der Verlustleistung kann aus der Wellenvorstellung für die von beiden Seiten angreifenden elektromagnetischen Felder gewonnen werden. In leitfähigen Materialien mit zu vernachlässigendem Verschiebungstromeinfluss ergibt sich die Wellenlänge λ der eindringenden Wellen zu $2\pi\delta$. Bei einer Plattendicke von $\lambda/2 = \pi\delta$ überlagern sich die Stromdichtefelder, die zu den gegenläufigen, von den gegenüberliegenden Oberflächen ausgehenden Wellen gehören, konstruktiv, so dass zusätzliche Verluste entstehen. Der Zuwachs ist jedoch relativ gering, da im Verlauf einer halben Wellenlänge aufgrund der starken Dämpfung die Feldstärke- wie die Stromdichteamplitude auf ca. 4,3 % des Eingangswertes abklingen.

In technischen Anwendungen stellt sich nicht unbedingt die Frage nach Abhängigkeit der Wirbelstromverluste von den Abmessungen eines einzigen massiven Querschnitts, sondern häufig alternativ die Frage, wie ein vorgegebener Querschnitt mit den bekannten Abmessungen A und B in Teilquerschnitte mit den Abmessungen a und b zu unterteilen ist, um eine

ausreichende Reduktion der im Allgemeinen unerwünschten Wirbelstromverluste zu erreichen. Basierend auf (7.20) für einen Teilquerschnitt mit den Abmessungen a' und b' sowie den Vervielfältigungsfaktoren A/a und B/b ergibt sich zunächst:

$$P_V = \frac{128 \hat{H}_0^2 l_z}{\pi^2 \gamma} \cdot \frac{AB}{\delta^2 a' b'} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{4 + \left[\left(\frac{m\pi}{a'} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b'} \right)^2 \right]^2} \left(\frac{b'}{n^2 a'} + \frac{a'}{m^2 b'} \right) \quad (7.31)$$

Mit einer Definition der Bezugsverlustleistung analog zu (7.21), hier allerdings für die Umfangsoberfläche des gesamten Bündels von Einzelquerschnitten,

$$P_{V,\infty} = p_{V,\infty} \cdot A = \frac{\hat{H}_0^2}{2\gamma\delta} \cdot 2 \cdot (A+B) \cdot l_z = \frac{\hat{H}_0^2}{\gamma} \cdot (A'+B') \cdot l_z , \quad (7.32)$$

und der Einführung der bezogenen Abmessungen $A' = A/\delta$ und $B' = B/\delta$ ergibt sich:

$$\frac{P_V}{P_{V,\infty}} = \frac{128}{\pi^2} \cdot \frac{A'B'}{A'+B'} \cdot \frac{1}{a'b'} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{4 + \left[\left(\frac{m\pi}{a'} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b'} \right)^2 \right]^2} \left(\frac{b'}{n^2 a'} + \frac{a'}{m^2 b'} \right) \quad (7.33)$$

Da die bezogenen Abmessungen A' und B' unveränderliche Vorgaben der Problemstellung sein sollen, empfiehlt sich die Definition und Darstellung des folgenden Verlustkoeffizienten q_V , der in Bild 7.4 in Abhängigkeit von b' mit dem Parameter a' als Kurvenschar dargestellt ist:

$$q_V = \frac{P_V}{P_{V,\infty}} \cdot \left(\frac{1}{A'} + \frac{1}{B'} \right) = \frac{128}{\pi^2 a' b'} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{4 + \left[\left(\frac{m\pi}{a'} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b'} \right)^2 \right]^2} \left(\frac{b'}{n^2 a'} + \frac{a'}{m^2 b'} \right) \quad (7.34)$$

Auch hier zeigt sich, dass bei ungünstigen Geometrieverhältnissen unter Voraussetzung einer unveränderlichen Außenfeldamplitude maximale Wirbelstromverluste auftreten können. Das Maximum liegt hier für die Kurve mit $a = 1000 \delta$ etwa bei $b = 2,25 \delta$, im Gegensatz zum Maximum für einen nicht unterteilten Querschnitt bei $b' = \pi$. Eine Unterteilung eines vorgegebenen Gesamtquerschnittes in feinere Teilquerschnitte senkt unter der gegebenen Voraussetzung die Verluste nur dann, wenn die Abnahme der Einzelverluste in den Teilquerschnitten die Zunahme der inneren Oberflächen des magnetischen Leiterbündels überkompensiert. Im Bereich zwischen $b' = \pi$ und ca. 2,25 bewirkt die feinere Unterteilung

noch eine Zunahme der Verluste durch den Anstieg der inneren Oberflächen, obwohl die Einzelbeiträge der Teilquerschnitte gemäß Bild 7.3 schon zu sinken beginnen. Eine monotone Abnahme der Verluste mit zunehmender Unterteilung ist jedoch sichergestellt, wenn mindestens eine Abmessung eines Einzelquerschnittes von vornherein unterhalb von 2,25 Eindringtiefen liegt.

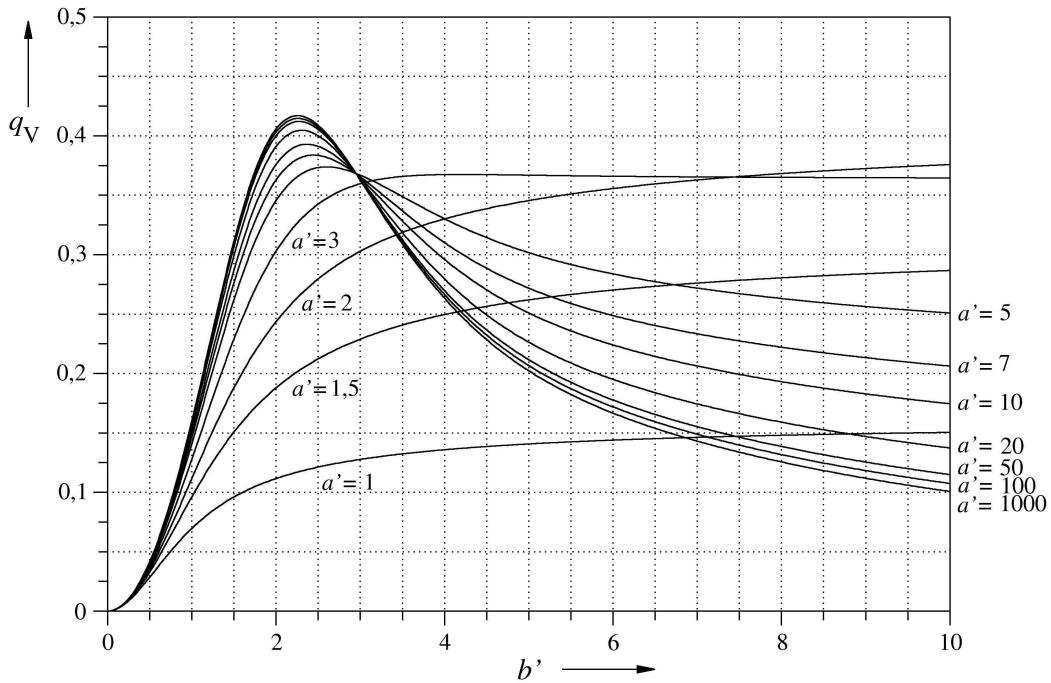


Bild 7.4: Koeffizient für Wirbelstromverlustleistung nach (7.34) in einem Bündel aus rechteckigen Teilquerschnitten in Abhängigkeit der auf die Eindringtiefe bezogenen Einzelquerschnittabmessungen b' und a' bei unveränderlicher Oberflächenfeldstärke. Bezugswert der Wirbelstromverluste $P_{V,\infty}$ aus Leistungsdichte beim unendlichen Halbraum und gesamter Bündeloberfläche. Summierungsgrenzen für (7.34): $n_{\max} = m_{\max} = 901$.

Für den als eindimensional betrachtbaren Grenzfall $A' = a' \rightarrow \infty$ mit alleiniger Unterteilung des Querschnittes in y -Richtung ergibt sich aufbauend auf (7.26), (7.27) und (7.28):

$$q_V = \frac{P_V}{P_{V,\infty}} \cdot \frac{1}{B'} = \frac{1}{b'} \cdot \frac{\sinh b' - \sin b'}{\cosh b' + \cos b'} \quad (7.35)$$

Diese Funktion ist auch in [Km90] im Zusammenhang mit der Abhängigkeit des Widerstands einer Drosselspule von der Blechdicke im Kern der Spule im Verhältnis zur Eindringtiefe aufgeführt.

Für die Berechnung des Extremums gilt:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{db'} q_v &= \frac{1}{b'} \frac{2 \sinh b' \sin b'}{(\cosh b' + \cos b')^2} - \frac{1}{b'^2} \cdot \frac{\sinh b' - \sin b'}{\cosh b' + \cos b'} = \\
 &= \frac{1}{b'^2} \cdot \frac{(2b' \sinh b' + \cosh b') \sin b' - \sinh b' \cos b' - 0,5 \cdot (\sinh 2b' - \sin 2b')}{(\cosh b' + \cos b')^2}
 \end{aligned} \tag{7.36}$$

Die Lösung der transzendenten Gleichung, die sich durch Nullsetzen der Ableitung ergibt, kann iterativ zu 2,25417 bestimmt werden, wobei der Vorzeichenwechsel vom Positiven ins Negative ein Maximum anzeigt. Die Funktion q_v nimmt hier den Wert 0,4172 an. Dieses Maximum ist wiederum aus der Summendarstellung im zweidimensionalen Fall nicht unmittelbar auf analytischem Wege ersichtlich.

Der Vollständigkeit halber ist zu erwähnen, dass die wesentliche Voraussetzung der obigen Vergleichsrechnungen, nämlich die Invarianz der Amplitude des Außenfeldes, bei vielen technischen Anwendungen nicht zwingend gegeben ist. Diese Bedingung würde u. a. im Kern einer Spule vorliegen, wenn die Amplitude des felderregenden Wechselstroms unabhängig von der Impedanz der Spule unveränderlich wäre. Viele elektrische Betriebsmittel sind jedoch eher auf eine vorgegebene unveränderliche Spannung zu dimensionieren, so dass bei Vernachlässigung ohmscher Spannungsabfälle der magnetische Fluss die konstante Bezugsgröße ist, so z. B. bei Transformatoren. Bei genauer Berechnung der Wirbelstromverluste unter Voraussetzung invarianten Flusses zeigen diese aber kein Extremwertverhalten, sondern einen monotonen Anstieg, so dass hier durch Unterteilung des flussführenden Querschnitts stets eine Abnahme der Verluste gegeben ist.

Die vorangegangenen Überlegungen gelten für monofrequente Anregungen. In Situationen, wo die Anregung multifrequent erfolgt, können die Verluste der einzelnen Fourierkomponenten summiert werden. Insbesondere für die Größe der durch Oberströme und hieraus resultierenden Wicklungsoberfeldern hervorgerufenen Verlustbeiträge in den Dauermagneten permanent erregter Maschinen ist dann jedoch zu prüfen, ob für sie nicht die Randbedingung konstanter Außenfeldamplitude erfüllt ist und bei der Optimierung auf niedrige Wirbelstromverluste berücksichtigt werden muss.

7.2 Exakte Berechnung des Gleichstromleitwertes eines Kreisringsegmentes mit polygonal berandeter Querschnittfläche

Bei der Entwicklung numerischer Gebietsmethoden zur Berechnung axialsymmetrischer Magnet- und Wirbelstromfelder tritt das Problem auf, die Leitwerte von Kreisringen und Kreisringsegmenten mit polygonaler Querschnittfläche zu bestimmen und die exakte Berechnung einer vereinfachten Bestimmung gegenüber zu stellen.

Im Falle gestreckter Anordnungen mit rein zweidimensionaler Feldverteilung und einer homogenen Durchflutung senkrecht zur x,y -Ebene, in der sich das Feld ausbildet, ergibt sich der Leitwert G für einen parallelflankigen Körper mit der elektrischen Leitfähigkeit γ und der Querschnittfläche a_Q sowie der Länge l zu:

$$G = \gamma \frac{a_Q}{l} \quad (7.37)$$

Für eine polygonale Berandung des Leiterquerschnitts mit den Punkten $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_i, y_i), \dots, (x_n, y_n)$ mit $(x_n, y_n) = (x_0, y_0)$ kann die Querschnittfläche aus der Auswertung eines geschlossenen Linienintegrals gewonnen werden:

$$a_Q = \iint_{a_Q} \mathbf{1} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{2} \left| \oint \vec{r} \times d\vec{l} \right| = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=0}^{n-1} (x_i \cdot (y_{i+1} - y_i) - y_i \cdot (x_{i+1} - x_i)) \right| = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=0}^{n-1} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \right|, \quad (7.38)$$

womit die Leitwertbestimmung für diesen Fall abgeschlossen ist.

Im Gegensatz zum gestreckten Leiter muss jedoch bei der Betrachtung von kreisbogenförmig gekrümmten Leitern berücksichtigt werden, dass das elektrische Strömungsfeld eine reziprok-proportionale Abhängigkeit von der Radialkoordinate r aufweist. Prinzipiell ergibt sich für diesen Fall der Leitwert bei gegebenem Segmentwinkel $\hat{\alpha}$ des Leiters aus:

$$G = \frac{I}{U} = \frac{1}{U} \iint_{a_Q} \vec{J} \cdot d\vec{a} = \frac{\gamma}{U} \iint_{a_Q} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{\gamma}{U} \iint_{a_Q} \frac{U}{\hat{\alpha} r} dr dz = \frac{\gamma}{\hat{\alpha}} \iint_{a_Q} \frac{1}{r} dr dz \quad (7.39)$$

Eine direkte Auswertung des Flächenintegrals ist zwar möglich, erscheint aber im Hinblick auf die notwendigen Fallunterscheidungen bei polygonaler Berandung aufwändig. Für die Auswertung des Integrals ist es daher vorteilhaft, wiederum eine Umwandlung in ein Linienintegral vorzunehmen, wozu der Stokes'sche Satz herangezogen wird. Der Integrand wird dabei als Betrag der Rotation eines Vektorfeldes \vec{v} aufgefasst und das Flächenintegral in ein Linienintegral über die geschlossene Berandungskurve überführt.

$$\iint_{a_Q} \frac{1}{r} dr dz = \iint_{a_Q} \underbrace{\frac{\vec{e}_\varphi}{r} \cdot \vec{e}_\varphi dr dz}_{d\vec{a}} = \iint_{a_Q} \text{rot } \vec{v} \cdot \vec{e}_\varphi dr dz = \oint_{\partial a_Q} \vec{v} \cdot d\vec{l} \quad (7.40)$$

Als Vektorfeld \vec{v} kann prinzipiell jedes Vektorfeld gewählt werden, das die Bedingung

$$\text{rot } \vec{v} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\varphi + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_z = \frac{1}{r} \vec{e}_\varphi \quad (7.41)$$

erfüllt. Als geeignete Wahl erscheint z. B. ein Vektorfeld mit keinerlei Umfangsabhängigkeit, das zudem nur eine von Null verschiedene Radialkomponente aufweist:

$$\text{rot } \vec{v} = \text{rot} \left(\frac{z}{r} \vec{e}_r \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{r} \right) \vec{e}_\varphi = \frac{1}{r} \vec{e}_\varphi \quad (7.42)$$

Die Leitwertberechnung nach (7.39) geht damit über in:

$$G = \frac{\gamma}{\bar{\alpha}} \iint_{a_Q} \frac{1}{r} dr dz = \frac{\gamma}{\bar{\alpha}} \oint_{\partial a_Q} \frac{z}{r} \vec{e}_r \cdot d\vec{l} \quad (7.43)$$

Bei polygonaler Berandung des Leiterquerschnitts mit den Punkten $(r_0, z_0), (r_1, z_1), \dots, (r_i, z_i), \dots, (r_n, z_n)$ mit $(r_n, z_n) = (r_0, z_0)$ zerfällt das Linienintegral über die geschlossene Berandungskurve in die Beiträge der einzelnen Kanten. Der Beitrag Δl_i der Kante vom Punkt (r_i, z_i) zum Punkt (r_{i+1}, z_{i+1}) berechnet sich dabei unter der Voraussetzung ungleicher Radialkoordinaten von Anfangs- und Endpunkt, $r_i \neq r_{i+1}$, zu:

$$\begin{aligned} \Delta l_i &= \int_{(r_i, z_i)}^{(r_{i+1}, z_{i+1})} \frac{z}{r} \vec{e}_r \cdot d\vec{l} = \int_{u=0}^1 \frac{(1-u)z_i + u z_{i+1}}{(1-u)r_i + u r_{i+1}} (r_{i+1} - r_i) du = \int_{u=0}^1 \frac{z_i + u(z_{i+1} - z_i)}{r_i + u(r_{i+1} - r_i)} (r_{i+1} - r_i) du = \\ &= z_i [\ln(r_i + u(r_{i+1} - r_i))]_0^1 + (z_{i+1} - z_i)(r_{i+1} - r_i) \left[\frac{u}{r_{i+1} - r_i} - \frac{r_i}{(r_{i+1} - r_i)^2} \ln(r_i + u(r_{i+1} - r_i)) \right]_0^1 = \\ &= z_i \ln \frac{r_{i+1}}{r_i} + (z_{i+1} - z_i) - \frac{z_{i+1} - z_i}{r_{i+1} - r_i} r_i \ln \frac{r_{i+1}}{r_i} = \frac{z_i r_{i+1} - z_{i+1} r_i}{r_{i+1} - r_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i} + (z_{i+1} - z_i) \end{aligned} \quad (7.44)$$

Für die Berechnung des Kurvenintegrals wird die Kante in parametrisierter Form mit dem Parameter u , der von 0 bis 1 läuft, dargestellt.

Für koaxial orientierte Teilstücke der Berandung, d. h. bei gleichen Radien r_i und r_{i+1} , ergibt sich aus dem Integral wegen $r_{i+1} - r_i = 0$ der Wert Null. Da aber bei der Summierung von (7.44) über alle n Kantenbeiträge die Summe über $z_{i+1} - z_i$ Null wird, ist es zweckmäßiger, formal zunächst diese Summe über die Terme nach (7.44) zu bilden. Je nach rechts-

oder linkswendiger Nummerierung der Knoten ist das Ergebnis dabei positiv oder negativ. Da der Leitwert unabhängig hiervon positiv ist, kann dies für einen beliebigen Umlaufsinn der Nummerierung durch Betragssbildung berücksichtigt werden. Es ergibt sich:

$$G = \frac{\gamma}{\hat{\alpha}} \oint_{\partial a_Q} \frac{z}{r} \vec{e}_r \cdot d\vec{l} = \frac{\gamma}{\hat{\alpha}} \left| \sum_{i=0}^{n-1} \Delta l_i \right| = \frac{\gamma}{\hat{\alpha}} \left| \sum_{i=0}^{n-1} \frac{z_i r_{i+1} - z_{i+1} r_i}{r_{i+1} - r_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i} \right| \quad (7.45)$$

Für die Fälle, in denen im Summanden Radiengleichheit auftritt, ist dann folgender Grenzwert einzusetzen:

$$\lim_{r_{i+1} \rightarrow r_i} \frac{z_i r_{i+1} - z_{i+1} r_i}{r_{i+1} - r_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i} = \lim_{r_{i+1} \rightarrow r_i} (z_i r_{i+1} - z_{i+1} r_i) \cdot \lim_{r_{i+1} \rightarrow r_i} \frac{1}{r_{i+1} - r_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i} = r_i (z_i - z_{i+1}) \frac{1}{r_i} = z_i - z_{i+1} \quad (7.46)$$

Um zu beurteilen, ob eine angeneherte Berechnung des Leitwertes über eine mittlere Länge in Umfangsrichtung und die Querschnittsfläche nach (7.37) und (7.38) akzeptabel ist, wird nachfolgend als Beispieldfall ein regelmäßig n -eckiger Querschnitt betrachtet, bei dem der innerste Punkt auf der r -Achse gelegen ist. Die Radialkoordinate des Querschnittmittelpunktes werde mit r_m bezeichnet. Die Punkte seien auf einem Kreis mit dem Radius R angeordnet. Sie haben somit die Koordinaten:

$$r_i = r_m - R \cos\left(i \frac{2\pi}{n}\right), \quad z_i = R \sin\left(i \frac{2\pi}{n}\right) \quad (7.47)$$

Für eine dimensionslose Analyse werden die Koordinaten der Punkte auf r_m bezogen, $\rho_i = r_i / r_m$ und $\zeta_i = z_i / r_m$ sowie $\rho_m = R / r_m$:

$$\rho_i = 1 - \rho_m \cos\left(i \frac{2\pi}{n}\right), \quad \zeta_i = \rho_m \sin\left(i \frac{2\pi}{n}\right) \quad (7.48)$$

Mit der Fläche des regelmäßigen n -Ecks und dem Mittelpunktradius ergibt sich nach (7.37) eine Näherung für den Leitwert zu:

$$\tilde{G} = \gamma \frac{a_Q}{l} = \frac{\gamma}{\hat{\alpha} \cdot r_m} \cdot \frac{n}{2} R^2 \sin \frac{2\pi}{n} = \frac{\gamma}{\hat{\alpha}} r_m \cdot \frac{n}{2} \rho_m^2 \sin \frac{2\pi}{n} \quad (7.49)$$

Andererseits liefert die exakte Lösung nach (7.45):

$$G_{ex} = \frac{\gamma}{\hat{\alpha}} \left| \sum_{i=0}^{n-1} \frac{z_i r_{i+1} - z_{i+1} r_i}{r_{i+1} - r_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i} \right| = \frac{\gamma}{\hat{\alpha}} r_m \cdot \left| \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\zeta_i \rho_{i+1} - \zeta_{i+1} \rho_i}{\rho_{i+1} - \rho_i} \ln \frac{\rho_{i+1}}{\rho_i} \right| \quad (7.50)$$

Der Fehler f , der sich aus der Näherung ergibt, ist somit:

$$f = \frac{\tilde{G} - G_{\text{ex}}}{G_{\text{ex}}} = \frac{\tilde{G}}{G_{\text{ex}}} - 1 = \frac{\frac{n}{2} \rho_m^2 \sin \frac{2\pi}{n}}{\left| \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\zeta_i \rho_{i+1} - \zeta_{i+1} \rho_i}{\rho_{i+1} - \rho_i} \ln \frac{\rho_{i+1}}{\rho_i} \right|} - 1 \quad (7.51)$$

Diese Fehlerfunktion ist umseitig in Bild 7.5 für unterschiedliche Zahlen von Eckpunkten n in Abhängigkeit von ρ_m dargestellt, wobei ρ_m wie oben aufgeführt das Verhältnis des Querschnittumkreisradius R zur Radialkoordinate r_m des Querschnittmittelpunktes bezeichnet.

Erstaunlicherweise wird für Fälle, in denen genau ein Eckpunkt mit der Koordinate $r = 0$ auftritt, d. h. für $\rho_m \rightarrow 1$, grenzwertig ein endlicher Leitwert und damit auch ein endlicher Fehler berechnet, obwohl die Umfangslänge für diesen Punkt Null beträgt und das Stromdichtefeld dort eine Singularität aufweist. Für drei Punkte in Folge, (r_{i-1}, z_{i-1}) , (r_i, z_i) und (r_{i+1}, z_{i+1}) , von denen der mittlere die Radialkoordinate $r_i = 0$ hat, liefert eine Grenzwertbetrachtung für den Beitrag der beiden beteiligten, aufeinander folgenden Kanten:

$$\begin{aligned} & \lim_{r_i \rightarrow 0} \left(\frac{z_{i-1} r_i - z_i r_{i-1} \ln \frac{r_i}{r_{i-1}}}{r_i - r_{i-1}} + \frac{z_i r_{i+1} - z_{i+1} r_i \ln \frac{r_{i+1}}{r_i}}{r_{i+1} - r_i} \right) = \\ &= \lim_{r_i \rightarrow 0} \left(\left(\frac{z_{i-1} r_i - z_i r_{i-1}}{r_i - r_{i-1}} - \frac{z_i r_{i+1} - z_{i+1} r_i}{r_{i+1} - r_i} \right) \ln \{r_i\} - \frac{z_{i-1} r_i - z_i r_{i-1}}{r_i - r_{i-1}} \ln \{r_{i-1}\} + \frac{z_i r_{i+1} - z_{i+1} r_i}{r_{i+1} - r_i} \ln \{r_{i+1}\} \right) = \\ &= \lim_{r_i \rightarrow 0} \left(\frac{z_{i-1}(r_{i+1} - r_i) - z_{i+1}(r_i - r_{i-1}) - z_i(r_{i+1} - r_{i-1})}{(r_i - r_{i-1})(r_{i+1} - r_i)} r_i \ln \{r_i\} \right) - z_i \ln \{r_{i-1}\} + z_i \ln \{r_{i+1}\} = \\ &= \frac{-z_{i-1} r_{i+1} - z_{i+1} r_{i-1} + z_i(r_{i+1} - r_{i-1})}{r_{i-1} r_{i+1}} \underbrace{\lim_{r_i \rightarrow 0} (r_i \ln \{r_i\})}_{0} + z_i \ln \frac{r_{i+1}}{r_{i-1}} = z_i \ln \frac{r_{i+1}}{r_{i-1}} \end{aligned} \quad (7.52)$$

Ersichtlich darf ein Punkt i die Radialkoordinate $r_i = 0$ annehmen, sofern weder der vorangehende Punkt $i-1$ noch der nachfolgende Punkt $i+1$ auch auf der z -Achse liegen.

In Bild 7.5 ist deutlich zu erkennen, dass wesentliche, wenn auch endliche Abweichungen in solchen Fällen auftreten, wo sich der betrachtete Querschnitt in unmittelbarer Nähe zur z -Achse befindet. Für einen hochgradig vieleckigen, nahezu kreisförmigen Querschnitt, der die z -Achse mit genau seinem innersten Punkt berührt, beträgt die relative Abweichung zwischen dem approximativ berechneten Leitwert und der exakten Lösung betragsmäßig 50 %.

Der Fehlerbetrag bleibt dagegen unabhängig von der Anzahl der Ecken unterhalb von 5 %, wenn der Umkreisradius des Querschnittes R weniger als 40 % des Abstandes r_m seines Mittelpunktes von der z -Achse beträgt. Bei einem Verhältnis von ca. 30 % sinkt der Fehler unter 2,5 % und bei $R/r_m = 0,2$ liegt er bei maximal ca. 1 %.

Angesichts dieser Ergebnisse und im Hinblick darauf, dass die überwiegende Anzahl von Knoten und Gitterzellen bei hinreichend feiner Diskretisierung weitaus niedrigere Radienverhältnisse aufweist, erscheint es gerechtfertigt, innerhalb von FD- oder ggf. auch FE-Programmen für axialsymmetrische Anordnungen die Leitwerte der einem Knoten zuzuordnenden Teilgebiete vereinfacht unter Verwendung von (7.37) zu berechnen.

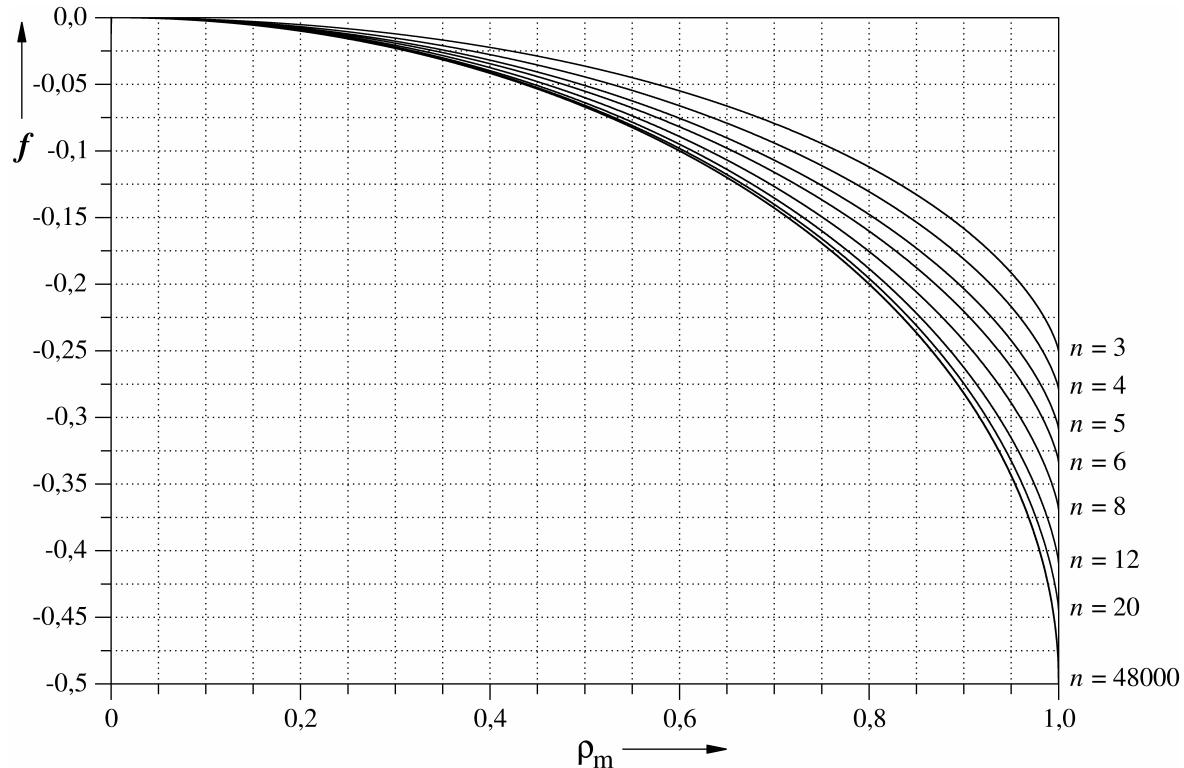


Bild 7.5: Relative Abweichung zwischen Näherungswert des Leitwertes eines Kreisringsegmentes mit regelmäßig polygonalem Querschnitt aus Umfangslänge der Mittelpunktslinie des Querschnitts und Querschnittfläche nach (7.37) und exakter Berechnung nach (7.45). Auswertung von (7.51) für unterschiedliche Anzahlen von Ecken n .

7.3 Magnetfeld in einer Testanordnung mit konischer, durch Kegelmantelflächen begrenzter Nut

In Bild 7.6 ist die in Kap. 5.2.8 untersuchte Testanordnung mit wesentlichen Geometriebezeichnungen unter Angabe der für die analytische Feldberechnung vorausgesetzten Randbedingungen dargestellt. Auf den Flanken der konischen Nut, die innen den Öffnungswinkel ϑ_i und außen ϑ_a aufweisen sollen, gilt für das modifizierte Vektorpotential die homogene Neumann'sche Randbedingung. Auf dem Nutgrund mit der Radialkoordinate r_i in Kugelkoordinaten liegt unmittelbar eine Erregerwindung aus massivem, d. h. stromverdrängungsbehaf-

tetem Material. Der Nutkopf bei r_a schließt mit einer Feldlinie in ϑ -Richtung ab, was einer Dirichlet'schen Randbedingung für Φ' mit dem gewählten Wert Null entspricht.

Zu dem skizzierten Problem kann gemäß der nachfolgend beschriebenen Rechnung eine einfache Lösung für die Verteilung des modifizierten Vektorpotentials unter Verwendung von Kugelkoordinaten angegeben werden. Diese Lösung ermöglicht des Weiteren eine alternative Betrachtung der Anordnung anhand eines Kettenleitermodells.

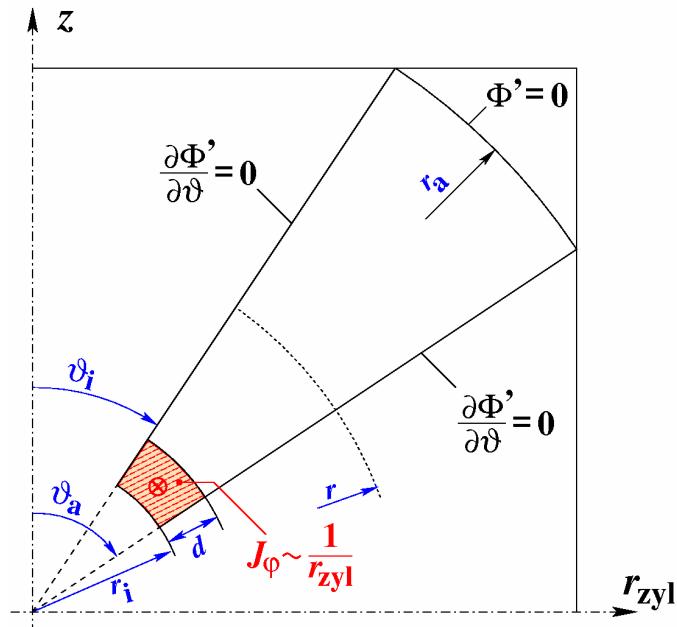


Bild 7.6:

Grundlegendes Schema der Testanordnung mit konischer, durch Kegelmanntelflächen begrenzter Nut für elementare Feldberechnung.

Aufgrund der Rotationssymmetrie braucht das magnetische Vektorpotential nur eine Komponente in Umfangsrichtung aufzuweisen. Für die linke Seite der hier mit konstanter Permeabilität μ_0 gültigen Gleichung

$$\text{rot rot } \vec{A} = \mu_0 \vec{J} \quad (7.53)$$

ergibt sich zunächst mit den Kugelkoordinaten r und ϑ in einer Längssnittebene $\varphi = 0$:

$$\text{rot rot } (A_\varphi \vec{e}_\varphi) = -\vec{e}_\varphi \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r A_\varphi) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (A_\varphi \sin \vartheta) \right) \right) \quad (7.54)$$

Berücksichtigt man, dass das durch Multiplikation mit dem Zylindradius r_{zyl} definierte modifizierte Vektorpotential Φ' in Kugelkoordinaten über den Faktor $r \sin \vartheta$ auszudrücken ist, erhält man für die linke Seite von (7.53) mit Φ' :

$$\text{rot rot } (A_\varphi \vec{e}_\varphi) = -\vec{e}_\varphi \left(\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \Phi' + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \Phi' \right) \right) \quad (7.55)$$

Aufgrund der in Bild 7.6 aufgeführten homogenen Neumann-Randbedingung für die Kegelmantelflächen wird der nachfolgende Ansatz für die Flussfunktion Φ' ohne eine ϑ -Abhängigkeit verfolgt, bei dessen Konstruktion bereits die Dirichlet-Randbedingung für die Kugelkappe $r = r_a$ und die Stetigkeit an der Stelle $r = r_i + d$ eingeht:

$$\Phi'(r) = \begin{cases} c_0(r_a - r), & r_i + d \leq r \leq r_a \\ c_0(r_a - r_i - d) + c_1(d^2 - (r - r_i)^2), & r_i \leq r < r_i + d \end{cases} \quad (7.56)$$

Da die Anordnung keine Strombeläge enthält, muss auch die erste Ableitung von Φ' nach r stetig sein, woraus sich $c_0 = 2 c_1 d$ ergibt und damit der folgende Ausdruck für das modifizierte Vektorpotential:

$$\Phi'(r) = \begin{cases} c_0(r_a - r), & r_i + d \leq r \leq r_a \\ c_0 \left[(r_a - r_i - d) + \frac{1}{2} \left(d - \frac{1}{d} (r - r_i)^2 \right) \right], & r_i \leq r < r_i + d \end{cases} \quad (7.57)$$

Das Einsetzen dieses Ansatzes in (7.55) und (7.53) liefert die Stromdichteverteilung mit der gemäß Vorgabe für einen gleichstromgespeisten Massivleiter anzunehmenden $1/r_{\text{zyl}}$ -Abhängigkeit:

$$J_\phi(r, \vartheta) = J_\phi(r_{\text{zyl}}) = \begin{cases} 0, & r_i + d \leq r \leq r_a \\ \frac{c_0}{r \sin \vartheta} \frac{1}{\mu_0 d} = \frac{c_0}{r_{\text{zyl}}} \frac{1}{\mu_0 d}, & r_i \leq r < r_i + d \end{cases} \quad (7.58)$$

Die Konstante c_0 kann mit dem felderregenden Gesamtstrom i_{Exc} entweder durch Integration der Stromdichte in Beziehung gesetzt werden oder durch Anwendung des Durchflutungsgesetzes. Es ergibt sich für sie:

$$c_0 = \frac{\mu_0 i_{\text{Exc}}}{\ln \frac{\tan(\vartheta_a/2)}{\tan(\vartheta_i/2)}} \quad (7.59)$$

Mit (C.6) und (C.7) lässt sich durch Vergleich mit

$$\vec{J} = \gamma \cdot \vec{E} = \gamma \cdot \frac{u}{2\pi r \sin \vartheta} \cdot \vec{e}_\phi = \gamma \cdot \frac{R_{\text{DC}} \cdot i_{\text{Exc}}}{2\pi r \sin \vartheta} \cdot \vec{e}_\phi \quad (7.60)$$

direkt auf den elektrischen Gleichstromwiderstand der Erregerwindung schließen:

$$R_{\text{DC}} = \frac{2\pi}{\gamma d} \frac{1}{\ln \frac{\tan(\vartheta_a/2)}{\tan(\vartheta_i/2)}} \quad (7.61)$$

Gleichung (C.9) gilt analog auch für die Einzelleiter bei einer Schichtenaufteilung eines Massivleiters, wobei für d die entsprechende Differenz von Außen- und Innenradius der betrachteten Schicht und für ϑ_a und ϑ_i die Begrenzungen des leitfähigen Gebietes einzusetzen sind.

Die Gleichstromselbstinduktivität L_{DC} der Erregerwindung kann aus der magnetischen Feldenergie bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
 W_m &= \frac{1}{2} L_{DC} i_{Exc}^2 = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{J} \vec{A} dV = \frac{1}{2} \iiint_V \frac{c_0 \Phi'}{(r \sin \vartheta)^2 \mu_0 d} dV = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\vartheta_i}^{\vartheta_a} \int_0^{2\pi r_i + d} \int_{r_i}^{r_a} \frac{c_0^2}{(r \sin \vartheta)^2 \mu_0 d} \left[(r_a - r_i - d) + \frac{1}{2} \left(d - \frac{1}{d} (r - r_i)^2 \right) \right] r^2 \sin \vartheta dr d\varphi d\vartheta = \\
 &= \frac{c_0^2}{2\mu_0 d} \int_{\vartheta_i}^{\vartheta_a} \frac{2\pi}{\sin \vartheta} \left[(r_a - r_i - d) \cdot d + \frac{1}{2} \left(d^2 - \frac{1}{3d} d^3 \right) \right] d\vartheta = \frac{i_{Exc}^2}{2} \frac{\mu_0 \cdot 2\pi}{\ln \frac{\tan(\vartheta_a/2)}{\tan(\vartheta_i/2)}} \left(r_a - r_i - \frac{2}{3} d \right)
 \end{aligned} \tag{7.62}$$

Die Selbstinduktivität ist damit:

$$L_{DC} = \frac{2\pi\mu_0}{\ln \frac{\tan(\vartheta_a/2)}{\tan(\vartheta_i/2)}} \left(r_a - r_i - \frac{2}{3} d \right) \tag{7.63}$$

Diese Gleichung gilt sinngemäß auch für Schichtteilleiter mit kreisringsektorförmigem Querschnitt. Hierbei ist r_a immer der Außenradius der Anordnung, ϑ_a und ϑ_i bezeichnen in jedem Fall die Nutflankenwinkel. Nur die Schichtdicke d und r_i , der innere Radius eines Schichtteilleiters, variieren.

Für die Gegeninduktivität $M_{1,2}$ zwischen zwei Schichtteilleitern mit den Strömen i_1 und i_2 kann aus dem Wechselwirkungsanteil der gesamten, von i_1 und i_2 erzeugten magnetischen Feldenergie ein Ausdruck hergeleitet werden. Nachfolgend soll dabei der Schichtleiter 2 mit dem Innenradius $r_{i,2}$ und der Schichtdicke d_2 im Nutquerfeld des weiter unten in der Nut gelegenen Leiters 1 betrachtet werden. Das Ergebnis für die Gegeninduktivität stimmt mit demjenigen überein, das man erhält, wenn man nur den oberen Leiter als erregt betrachtet. Der gesamte, von ihm erzeugte Fluss ist dann mit dem unteren Leiter 1 verkettet und lässt sich mittels (7.57) mit $r_i = r_{i,2}$ als Wert $\Phi(r = r_{i,2}) \cdot 2\pi$ direkt angeben, wobei die Konstante c_0 in (7.59) mit dem Strom i_2 zu bilden ist.

$$\begin{aligned}
W_{m,1,2} &= \frac{1}{2} M_{1,2} i_1 i_2 = \frac{1}{2} \iiint_{V_2} \vec{J}_2 \vec{A}_1 dV = \frac{1}{2} \frac{\mu_0^2 i_1 i_2}{\left(\ln \frac{\tan(\vartheta_a/2)}{\tan(\vartheta_i/2)} \right)^2} \iiint_{V_2} \frac{r_a - r}{(r \sin \vartheta)^2 \mu_0 d_2} dV = \\
&= \frac{1}{2} \frac{\mu_0 i_1 i_2}{\left(\ln \frac{\tan(\vartheta_a/2)}{\tan(\vartheta_i/2)} \right)^2} \int_{\vartheta_i}^{\vartheta_a} \int_0^{2\pi} \int_{r_{i,2}}^{r_{i,2} + d_2} \frac{r_a - r}{\sin \vartheta \cdot d_2} dr d\varphi d\vartheta = \frac{1}{2} \frac{2\pi \mu_0 i_1 i_2}{d_2 \ln \frac{\tan(\vartheta_a/2)}{\tan(\vartheta_i/2)}} \int_{r_{i,2}}^{r_{i,2} + d_2} (r_a - r) dr = \\
&= \frac{1}{2} \frac{2\pi \mu_0 i_1 i_2}{d_2 \ln \frac{\tan(\vartheta_a/2)}{\tan(\vartheta_i/2)}} \left[r_a r - \frac{1}{2} r^2 \right]_{r_{i,2}}^{r_{i,2} + d_2} = \frac{1}{2} \frac{2\pi \mu_0 i_1 i_2}{\ln \frac{\tan(\vartheta_a/2)}{\tan(\vartheta_i/2)}} \left(r_a - r_{i,2} - \frac{1}{2} d_2 \right)
\end{aligned} \tag{7.64}$$

Die Gegeninduktivität zum zweiten, oberen Schichtleiter ist damit:

$$M_{1,2} = \frac{2\pi \mu_0}{\ln \frac{\tan(\vartheta_a/2)}{\tan(\vartheta_i/2)}} \left(r_a - r_{i,2} - \frac{1}{2} d_2 \right) \tag{7.65}$$

Die Aufstellung eines Kettenleitermodells für zwei gekoppelte Massivleiter wird nachfolgend im Gegensatz zu anderen Abhandlungen wie z. B. in [Kl03] angedeutet auf streng netzwerktheoretischer Basis motiviert.

Die Abmessungen des inneren, gespeisten Massivleiters seien $r_{i,1}$ und D_1 für dessen Innenradius und Gesamtdicke und $r_{i,2}$ und D_2 für den Kurzschlussring. Bei Aufteilung der beiden Leiter in N_1 und N_2 Schichtleiter mit den Einzelschichtdicken $d_{1,1\dots N_1}$ und $d_{2,2\dots N_2}$, Nummerierung von innen nach außen, kann mit (7.63) und (7.65) eine Induktivitätsmatrix für alle Teilleiter aufgestellt werden. Diese beinhaltet vier Untermatrizen für die internen Kopplungen der Teilleiter innerhalb derselben Windung sowie für die wechselseitigen Kopplungen von innerer und äußerer Windung. Bei fortlaufender Indizierung der Elemente der resultierenden gesamten Matrix gilt für die Selbst- und Gegeninduktivitäten folgendes:

$$L_{k,k} = \frac{2\pi \mu_0}{\ln \frac{\tan(\vartheta_a/2)}{\tan(\vartheta_i/2)}} \cdot \begin{cases} r_a - \left(r_{i,1} + \sum_{l=1}^{k-1} d_{1,l} \right) - \frac{2}{3} d_{1,k}, & 1 \leq k \leq N_1 \\ r_a - \left(r_{i,2} + \sum_{l=1}^{k-N_1-1} d_{2,l} \right) - \frac{2}{3} d_{2,k-N_1}, & N_1 + 1 \leq k \leq N_1 + N_2 \end{cases} \tag{7.66}$$

Bei den Gegeninduktivitäten ist zu beachten, dass nach (7.65) ausschließlich die Geometrie des äußeren der beiden gekoppelten Teilleiter eingeht. In der Gesamtmatrix ist dies die Geometrie des Leiters mit dem höheren Index, was sich durch die Maximumbildung beider beteiligter Indizes $\max(j,k)$ ausdrücken lässt.

$$M_{j,k} = \frac{2\pi\mu_0}{\ln \frac{\tan(\vartheta_a/2)}{\tan(\vartheta_i/2)}} \cdot \begin{cases} r_a - \left(r_{i,1} + \sum_{l=1}^{\max(j,k)-1} d_{1,l} \right) - \frac{1}{2} d_{1,\max(j,k)}, & 1 \leq \max(j,k) \leq N_1 \\ r_a - \left(r_{i,2} + \sum_{l=1}^{\max(j,k)-N_1-1} d_{2,l} \right) - \frac{1}{2} d_{2,\max(j,k)-N_1}, & N_1+1 \leq \max(j,k) \leq N_1+N_2 \end{cases} \quad (7.67)$$

Eine wesentliche Vereinfachung für die nachfolgenden Operationen ergibt sich mit der Näherung $L_{k,k} \approx M_{k,k}$. Der absolute Fehler sinkt dabei mit abnehmender Schichtdicke, der relative zusätzlich mit der Größe der Selbstinduktivität, d. h. mit zunehmendem Schichtinnenradius. Die Induktivitätsmatrix nimmt dann die folgende Gestalt eines Viertels einer Stufenpyramide an:

$$(L) = \left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc} m_1 & m_2 & m_3 & \cdots & m_{N1} & m_{N1+1} & m_{N1+2} & \cdots & m_{N1+N2} \\ m_2 & m_2 & m_3 & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_3 & m_3 & m_3 & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline m_{N1} & \cdots & \cdots & \cdots & m_{N1} & m_{N1+1} & m_{N1+2} & \cdots & m_{N1+N2} \\ m_{N1+1} & \cdots & \cdots & \cdots & m_{N1+1} & m_{N1+1} & m_{N1+2} & \cdots & m_{N1+N2} \\ m_{N1+2} & \cdots & \cdots & \cdots & m_{N1+2} & m_{N1+2} & m_{N1+2} & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \hline m_{N1+N2} & \cdots & \cdots & \cdots & m_{N1+N2} & m_{N1+N2} & \cdots & \cdots & m_{N1+N2} \end{array} \right) \quad (7.68)$$

Mit einem äußeren Versorgungszweig, der eine Spannungsquelle U_0 und einen ohmschen Widerstand R_0 enthalten soll, ergeben sich aufgrund der Parallelschaltung aller Teilleiter der inneren Erregerwindung N_1 Maschen. Für den äußeren Massivleiter können ebenfalls so viele unabhängige Maschen wie Schichtleiter angegeben werden, nämlich N_2 .

Berücksichtigt man für die beiden Massivleiter jeweils einen externen Zweig, d. h. den Speisezweig sowie den im idealen Kurzschluss impedanzfreien Überbrückungszweig des äußeren Massivleiters, dann kann damit folgende Maschen-Zweig-Inzidenzmatrix (B) aufgestellt werden, wobei die externen Zweige links und rechts aufgeführt sind.

$$(B) = \left(\begin{array}{c|ccccc|c} 0 & +1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & & 0 & +1 & -1 & 0 & (0) \\ 0 & \vdots & & 0 & \ddots & -1 & \vdots \\ +1 & 0 & \cdots & 0 & +1 & & 0 \\ \hline 0 & & & & & +1 & -1 & 0 & 0 \\ \vdots & & (0) & & & 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & & & & \vdots & 0 & +1 & -1 & 0 \\ 0 & & & & & 0 & \cdots & 0 & +1 & +1 \end{array} \right) \quad (7.69)$$

Zur Berücksichtigung der zusätzlichen Zweige in einer vollständigen Zweiginduktivitätsmatrix ist die Induktivitätsmatrix der Teilleiter um Nullzeilen und -spalten an den Rändern zu erweitern, oder, falls externe Selbstinduktivitäten vorhanden wären, um diese als entsprechende Hauptdiagonaleinträge zu ergänzen.

Die Berechnung der Mascheninduktivitätsmatrix liefert damit:

$$(B)(L)(B)^T = \left(\begin{array}{cc|cccc|cccc} m_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -m_2 & & & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & m_2 & 0 & & & 0 & & & \vdots \\ -m_3 & & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & m_3 & & & 0 & & & \vdots \\ -m_4 & & -m_4 & & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{N1} & m_{N1+1} & \cdots & m_{N1+N2-1} & m_{N1+N2} \\ & & & & & -m_{N1+2} & & -m_{N1+N2} & \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & m_{N1+1} & m_{N1+1} & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & -m_{N1+2} & -m_{N1+2} & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \vdots & 0 & m_{N1+2} & & \vdots \\ & & & & & \vdots & -m_{N1+3} & & \\ \vdots & & & \vdots & m_{N1+N2-1} & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & m_{N1+N2} & 0 & \cdots & 0 & m_{N1+N2} \end{array} \right) \quad (7.70)$$

Für die Koeffizienten, die aus den Induktivitätsdifferenzen hervorgehen, gilt dabei:

$$m_k - m_{k+1} = L_k = \frac{\pi \mu_0}{\ln \frac{\tan(\vartheta_a/2)}{\tan(\vartheta_i/2)}} \cdot \begin{cases} d_{1,k} + d_{1,k+1}, & 1 \leq k \leq N_1 \\ d_{2,k-N_1} + d_{2,k-N_1+1}, & N_1 + 1 \leq k \leq N_1 + N_2 \end{cases} \quad (7.71)$$

Sie lassen sich als Selbstinduktivitäten L_k der durch zwei benachbarte Schichtleiter k und $k+1$ gebildeten Maschen interpretieren und liefern gemäß Vergleich von (7.57) und (7.59) mit dem

zugehörigen Maschenstrom multipliziert den Flussbeitrag dieses Maschenstroms zwischen den radialen Mitten der benachbarten Schichtleiter.

Das Diagonalelement m_{N1} der Masche, die auch den externen Speisezweig enthält, lässt sich wie in (7.72) angegeben zerlegen. Hieraus lassen sich die Kopplungsanteile zu den anderen Maschen des aufzustellenden Ersatzschaltbildes ablesen sowie der nur in der Masche N_1 enthaltene Anteil, der als Streuinduktivität zwischen der äußeren Schicht des Innenleiters und der inneren Schicht des Außenleiters darstellbar ist.

$$\begin{aligned}
 m_{N1} &= \frac{2\pi\mu_0}{\ln \frac{\tan(\vartheta_a/2)}{\tan(\vartheta_i/2)}} \left(r_a - \left(r_{i,1} + \sum_{l=1}^{N1-1} d_{1,l} \right) - \frac{1}{2} d_{1,N1} \right) = \\
 &= (m_{N1} - m_{N1+1}) + m_{N1+1} = (m_{N1} - m_{N1+1}) + \sum_{l=1}^{N2-1} (m_{N1+l} - m_{N1+l+1}) + m_{N1+N2} = \\
 &= \underbrace{\frac{2\pi\mu_0}{\ln \frac{\tan(\vartheta_a/2)}{\tan(\vartheta_i/2)}} \left(\left(r_{i,2} + \frac{1}{2} d_{2,1} \right) - \left(r_{i,1} + \sum_{l=1}^{N1-1} d_{1,l} + \frac{1}{2} d_{1,N1} \right) \right)}_{L_{N1}} + \sum_{l=1}^{N2-1} (m_{N1+l} - m_{N1+l+1}) + m_{N1+N2}
 \end{aligned} \tag{7.72}$$

Die Maschenwiderstandsmatrix mit den Schichtleiterwiderständen nach (7.61) sowie den externen Widerständen R_0 und R_{KS} ($\approx 0 \Omega$), die als erstes und letztes Hauptdiagonalelement der Zweigwiderstandsmatrix ergänzt werden, ergibt sich als Tridiagonalmatrix:

$$\begin{array}{c|ccccc}
 (B)(R)(B)^T = \frac{2\pi}{\ln \frac{\tan(\vartheta_a/2)}{\tan(\vartheta_i/2)}} \cdot & & & & \\
 \hline
 \left(\begin{array}{cccccc|cccccc}
 \rho_1/d_{1,1} & -\rho_1/d_{1,2} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
 +\rho_1/d_{1,2} & \rho_1/d_{1,2} & -\rho_1/d_{1,3} & & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\
 -\rho_1/d_{1,2} & +\rho_1/d_{1,3} & \rho_1/d_{1,3} & \ddots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\
 0 & -\rho_1/d_{1,3} & +\rho_1/d_{1,4} & \ddots & \ddots & \vdots & & & & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -\rho_1/d_{1,N1} & \vdots & & & & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & -\rho_1/d_{1,N1} & \tilde{R}_0 + & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
 & & & & +\rho_1/d_{1,N1} & & & & & \\
 \hline
 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \rho_2/d_{2,1} & -\rho_2/d_{2,2} & \dots & \dots & 0 \\
 \vdots & & & & \vdots & -\rho_2/d_{2,2} & \rho_2/d_{2,2} & -\rho_2/d_{2,3} & & \vdots \\
 \vdots & & & & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & -\rho_2/d_{2,N2} & \\
 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & -\rho_2/d_{2,N2} & \tilde{R}_{KS} + & \\
 & & & & & & & & +\rho_2/d_{2,N2} &
 \end{array} \right) & & & & \\
 \end{array} \tag{7.73}$$

ρ_1 und ρ_2 sind dabei die spezifischen Widerstände von Innen- und Außenleiter. Die mit der Tilde gekennzeichneten Widerstände \tilde{R}_0 und \tilde{R}_{KS} bezeichnen die durch den Vorfaktor der Matrix dividierten Originalgrößen.

Es lässt sich einsehen, dass sich die Matrizen (7.70) und (7.73) auch bei Anwendung der Maschenstromanalyse auf das nachfolgende in Bild 7.7 aufgeführte Netzwerk ergeben. Dieses kann daher als gleichwertiges Ersatzschaltbild für zwei flankenbündig in die Kegelmantelnut eingelassene Massivleiter gelten. Im Falle eines idealen Kurzschlusses des äußeren Leiters 2 wird das Element $R_{KS} = 0 \Omega$. Bei zusätzlicher externer Speisung würde in diesem Zweig eine Spannungsquelle erscheinen.

Die skizzierte Herleitung und das resultierende Ersatzschaltbild gelten prinzipiell auch für Massivleiter in parallelfleckigen Nuten, deren Felder sich für gestreckte Anordnungen in kartesischen Koordinaten und für zirkulare Anordnungen in Zylinderkoordinaten beschreiben lassen. Lediglich die Berechnung der Induktivitäten und Teilleiterwiderstände wäre für solche Fälle anzupassen.

Die wesentliche zu erfüllende Voraussetzung, die letztlich auf die Stufenpyramidenform der Zweiginduktivitätsmatrix führt, besteht darin, dass es genau einen magnetischen Flusspfad für den Rückschluss des Nutenquerflusses eines Teilleiters gibt und dieser Flusspfad rektanzfrei ist, d. h. einen magnetischen Kurzschluss darstellt. Für die beschriebenen Anordnungen führt dieser Flusspfad über den Kern bzw. den Nutgrund.

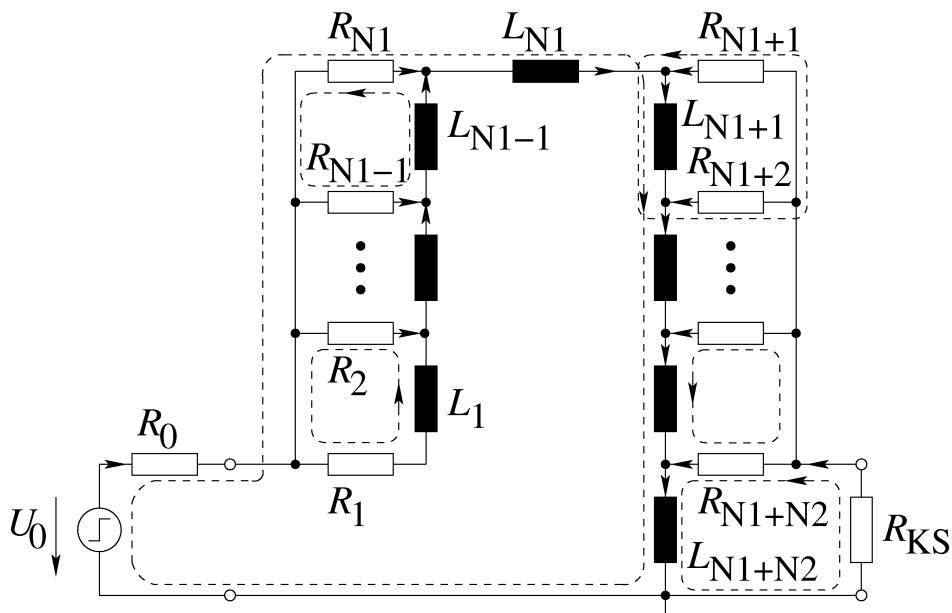


Bild 7.7: Ersatzschaltbild für zwei gekoppelte Massivleiter in Nut mit einseitigem, idealem Eisenrückschluss. Schichtwiderstände $R_{1\dots N1+N2}$ und Streuinduktivitäten $L_{1\dots N1+N2}$. Gestrichelt: Maschensystem für (7.70) und (7.73).

Bei dem in Kap. 5.2.8 behandelten Verschiebungsvorgang sind die Elemente des Ersatzschaltbildes $L_{N1\dots N1+N2}$ und $R_{N1+1\dots N1+N2}$ zeitvariant. Sie ergeben sich aus der Schichtdiskretisierung mit einer Aufteilung des initialen, konstanten Ringvolumens in $N_2 = 12$ Schichten gleichen, zeitlich konstanten Volumenanteils sowie dem vorgegebenen Wegprofil der Innenfläche des Ringes, wobei die Weite des Ringes in Meridianrichtung $\Delta\vartheta$ ebenfalls konstant bleiben soll.

Für die zeitinvariante Erregerwindung wird eine der Einfachheit halber äquidistante Diskretisierung trotz der damit verbundenen ungenauen Nachbildung des Zeitverhaltens aus $N_1 = 4$ Schichten vorgesehen. Nach (7.61) und (7.71) resultiert dabei die Äquidistanz unmittelbar in eine Gleichheit der ESB-Elemente $R_{1\dots 4}$ und $L_{1\dots 4}$, wobei sich die Widerstände unter Zugrundelegung des Gleichstromleitwerts der gesamten Windung gemäß Ausgabe des FD-Programms zu $R_{1\dots 4} = 0,4927 \text{ m}\Omega$ berechnen lassen. Die Induktivitäten folgen aus den Nutflankenwinkeln ϑ_a und ϑ_i bei einer Gesamtschichtdicke von $r_{a,\text{Exc}} - r_{i,\text{Exc}} = 2,02 \text{ mm}$ (bei $r_{i,\text{Exc}} = 9,12 \text{ mm}$) zu $L_{1\dots 4} = 7,00 \text{ nH}$.

Die auf die bewegte Struktur einwirkende Gesamtkraft kann auf der Basis der vorangegangenen Feldberechnung und der daraus abgeleiteten Netzwerkstruktur bei Bekanntheit aller Netzströme gemäß den nachfolgenden Überlegungen berechnet werden: Der Strom, der durch einen der Schichtwiderstände des Kurzschlussringes geführt wird, ist dort einem Feld ausgesetzt, das von allen vorgelagerten Widerstandszweigen des Netzwerkes und dem halben Wert seiner selbst als erregende Durchflutung erzeugt wird. Gemäß (7.57) ergibt sich mit der erwähnten Durchflutung, eingesetzt als erregender Strom i_{exc} in (7.59), der folgende Ausdruck für das modifizierte Vektorpotential:

$$\Phi_k'(r) = \frac{\mu_0(r_a - r)}{\ln \frac{\tan(\vartheta_a/2)}{\tan(\vartheta_i/2)}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{k-1} i_i + \frac{1}{2} i_k \right) \quad (7.74)$$

Die Flussdichte ergibt sich durch entsprechende Differentialoperationen zu:

$$\vec{B}_k = \frac{\mu_0}{\ln \frac{\tan(\vartheta_a/2)}{\tan(\vartheta_i/2)}} \cdot \frac{1}{r \sin \vartheta} \left(\sum_{i=1}^{k-1} i_i + \frac{1}{2} i_k \right) \cdot \vec{e}_\vartheta \quad (7.75)$$

Der Strom des Teilleiters k verteilt sich dabei gemäß der gleichen $1/(r \sin \vartheta)$ -Abhängigkeit. Dabei werde hier die in radialer Richtung dünne Schicht der Dicke d als Strombelagsverteilung angesetzt. Die gestrichenen Winkel ϑ_a' und ϑ_i' unterscheiden sich als Abmessungen des Kurzschlussringes von den Angaben ϑ_a und ϑ_i für die Nutflanken.

$$\vec{a}_{\varphi,k}(r,\vartheta) = \frac{i_k}{\ln \frac{\tan(\vartheta_a'/2)}{\tan(\vartheta_i'/2)}} \cdot \frac{1}{r \sin \vartheta} \cdot \vec{e}_\varphi \quad (7.76)$$

Aus dem Produkt von Feld und Strombelag ergibt sich eine Flächenkraftdichte mit in Kugelkoordinaten radialer Ausrichtung.

$$\vec{T}_k = \vec{a}_{\varphi,k} \times \vec{B}_k = -\frac{\mu_0}{\ln \frac{\tan(\vartheta_a'/2)}{\tan(\vartheta_i'/2)}} \cdot \frac{1}{\ln \frac{\tan(\vartheta_a'/2)}{\tan(\vartheta_i'/2)}} \cdot \frac{i_k}{(r \sin \vartheta)^2} \left(\sum_{i=1}^{k-1} i_i + \frac{1}{2} i_k \right) \cdot \vec{e}_r \quad (7.77)$$

Für die Berechnung der axialen und radialen Lastkomponente in Zylinderkoordinaten ist diese komponentenweise zu integrieren. Um die Kraft auf dem gesamten Kurzschlussring zu erhalten, ist des Weiteren über alle Schichtleiter ab N_1+1 zu summieren:

$$F_z = 2\pi \sum_{k=N_1+1}^{N_2} \int_{\vartheta_i'}^{\vartheta_a'} \vec{T}_k \cdot \vec{e}_z r^2 \sin \vartheta d\vartheta = -\frac{2\pi\mu_0}{\ln \frac{\tan(\vartheta_a'/2)}{\tan(\vartheta_i'/2)}} \cdot \frac{\ln \frac{\sin(\vartheta_a'/2)}{\sin(\vartheta_i'/2)}}{\ln \frac{\tan(\vartheta_a'/2)}{\tan(\vartheta_i'/2)}} \cdot \sum_{k=N_1+1}^{N_2} i_k \left(\sum_{i=1}^{k-1} i_i + \frac{1}{2} i_k \right),$$

$$F_{r,zyl} = 2\pi \sum_{k=N_1+1}^{N_2} \int_{\vartheta_i'}^{\vartheta_a'} \vec{T}_k \cdot \vec{e}_{r,zyl} r^2 \sin \vartheta d\vartheta = -\frac{2\pi\mu_0}{\ln \frac{\tan(\vartheta_a'/2)}{\tan(\vartheta_i'/2)}} \cdot \frac{\vartheta_a' - \vartheta_i'}{\ln \frac{\tan(\vartheta_a'/2)}{\tan(\vartheta_i'/2)}} \cdot \sum_{k=N_1+1}^{N_2} i_k \left(\sum_{i=1}^{k-1} i_i + \frac{1}{2} i_k \right) \quad (7.78)$$

Diese Gleichungen für die Berechnung der Kraftkomponenten liegen den Vergleichen mit den Ergebnissen der transienten numerischen Feldberechnung in Kap. 5.2.9 zu Grunde und sind für den dort behandelten Vorgang mit vordefiniertem Bewegungsprofil graphisch dargestellt.

8 Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Arbeit gibt einen Überblick über verschiedene Verfahren und Implementationen der numerischen Feldberechnung, wobei sich die Darstellung auf die Gebietsmethoden, hier namentlich die Finite-Elemente-Methode und die Finite-Differenzen-Methode, bezieht. Nach einer Übersicht über unterschiedliche frei erhältliche und kommerziell vertriebene Programmsysteme werden wesentliche mathematische Grundlagen der Verfahren vorgestellt und die Verfahren unter Verwendung verschiedener Ansätze abgeleitet. Hierbei wird auch auf sich ergebende Ähnlichkeiten eingegangen.

Ein großer Teil der Arbeit widmet sich anschließend wesentlichen Eigenentwicklungen, die am Lehrstuhl für Elektrische Antriebe und Mechatronik geschaffen wurden. Diese betreffen zum einen die vollständige simulatorische Berechnung rotierender elektrischer Drehfeldmaschinen. Diese Berechnung berücksichtigt alle wesentlichen inneren Effekte einschließlich der Wirbelstrominduktion und Stromverdrängung sowie der Eisensättigung. Gleichzeitig sind Rotor- und Statorwicklung mit beliebigen Wicklungstopologien in ein äußeres, übergeordnetes Netzwerk eingebunden. Zum anderen wird die transiente Feldberechnung axialsymmetrischer Anordnungen behandelt. Hierbei werden insbesondere jene Probleme untersucht, die sich aus der formveränderlichen Bewegung hochgradig leitfähiger und somit wirbelstrombehafteter Strukturen ergeben. Zwei Methoden zur Berücksichtigung solcher Strukturen werden vorgestellt, namentlich eine Interpolationsmethode mit feststehendem, vollständig aktivem Grundgitter und bewegtem Aufsatzgitter sowie eine Neuvernetzungsmethode mit Einbettung der bewegten Struktur in das teilweise deaktivierte Grundgitter. Von diesen beiden Methoden erweist sich in der vorliegenden Implementation hinsichtlich der korrekten Wiedergabe lokaler Größen der bewegten Struktur, wie z.B. Strom- und Kraftdichten, nur die Neuvernetzung als hinreichend genau. Bei den integralen Größen, d.h. dem induzierten Gesamtstrom, sind hingegen keine Unterschiede zu beobachten.

In dem anschließenden Kapitel werden einige Beispiele für die Behandlung nicht alltäglicher Fragestellungen mit dem kommerziellen Programm EMAS und dem lehrstuhlseigenen Programm FELMEC beschrieben, wobei auf die zugehörigen Besonderheiten eingegangen wird.

Im Hinblick auf zukünftige Entwicklungen ist anzumerken, dass mit der stetig wachsenden Rechnerleistung in Zukunft auch der dreidimensionalen transienten Feldberechnung eine größere Rolle zuwachsen wird. Für manche Typen elektromechanischer Energiewandler erscheinen derartige Berechnungen für eine genaue Analyse lokaler Effekte wie z.B.

der Wirbelstrominduktion durch Feldpulsationen erforderlich. Erwähnt seien hier die Transversalflussmaschine oder der Klauenpolgenerator.

Da 3D-Berechnungen momentan jedoch noch mit erheblichem Aufwand verbunden sind, wird für einige Aufgabenstellungen auch ein gewisses Potential in der Erweiterung und Anpassung zweidimensionaler Formulierungen gegeben sein. So erscheint es denkbar, einen unipolaren Wellenfluss durch einen externen, kumulierten magnetischen Kreis mit konzentrierten Reluktanzen zu berücksichtigen, wobei das 2D-Rechengebiet durch eine innere und äußere homogene Neumann'sche Randbedingung abzuschließen wäre, über die der Wellenfluss zu- und abgeführt wird. Dieses nicht einfach zusammenhängende Rechengebiet müsste durch einen radialen Schnitt getrennt werden, auf dessen linker und rechter Seite für das magnetische Vektorpotential unterschiedliche Werte angenommen werden, deren Differenz mit dem auf die Länge der Anordnung bezogenen Unipolarfluss gleichzusetzen ist. Als weitere Größe müsste der magnetische Spannungsabfall zwischen innerem und äußerem Rand bestimmt werden. Besondere Sorgfalt wäre bei der Berechnung der Wicklungsflussverkettungen und bei der Berücksichtigung circumaxialer Durchflutungen im Stirnraum erforderlich, wobei im Falle von Kurzschlussringen auch das Induktionsgesetz eingehen müsste.

Die Speisung von Antriebseinheiten durch Frequenzumrichter macht es in zunehmendem Maße erforderlich, parasitäre Effekte durch höherfrequente Stromoberschwingungen einerseits und die mit den steilen Spannungsflanken der Umrichter einhergehenden kapazitiven Einflüsse andererseits zu berücksichtigen. Dabei sind letztere insbesondere mit einem stark inhomogenen Potentialabbau entlang der Wicklung und lokalen Spannungsüberhöhungen mit entsprechender Belastung der Wicklungsisolation verbunden. An dieser Stelle ist eine Herausforderung für die quasistationäre Wirbelstrommodellierung zu sehen, die in der vorliegenden Form keinerlei Verschiebungsströme und somit kapazitive Effekte berücksichtigt. Es stellt sich die Frage, ob eine 3D-Vollwellenmodellierung, die stets möglich sein sollte, zugunsten einer ggf. zweidimensionalen Hybridlösung mit konzentrierten kapazitiven Elementen vermieden werden kann, oder auf welche Weise die zu berücksichtigenden Einflüsse modelliert werden können.

Wie die dargelegten Punkte zeigen, kann zusammenfassend ausgeführt werden, dass auch in der Zukunft noch ein weitreichender Forschungsbedarf hinsichtlich der Anwendung numerischer Feldberechnungsverfahren bei der Auslegung und Optimierung elektromechanischer Energiewandler gegeben sein wird.

Formelzeichen, Indizes und Schreibweisen

Symbol	Einheit	Bedeutung
A	Wb/m	magnetisches Vektorpotential
$A_{J,m}$	m^2	mittlere, durchsetzte Querschnittfläche eines Stromweges
$A_{\Phi,m}$	m^2	mittlere, durchsetzte Querschnittfläche eines Flusspfades
$A_{0...4}$	Wb/m	magnetisches Vektorpotential eines zentralen Knotens 0 oder seiner vier Nachbarn im Fünf-Punkte-Stern
A_Q	m^2	Querschnittfläche einer Spulenseite oder Rotorstäbes
a	m	Kantenlänge
$a_{Q,w}$	m^2	Querschnittfläche des Wicklungselementes Nr. w
$\tilde{a}_{M,0}$	m^2	zu einem zentralen Knoten „0“ des Aufsatzzitters adjazente Fläche bei Interpolationsanbindung eines bewegten Gitters
B	T	magnetische Flußdichte
(B_X)		Maschen-Zweig-Inzidenzmatrix, allgemein
b	m	Breite
(b_X)		Vektoren der rechten Seite des Gleichungssystems der Zeitschrittrechnung, allgemein
C	F	Kapazität
(C_X)		Schnitt-Zweig-Inzidenzmatrix, allgemein
(C_i)	Am/(Vs)	Elementreluktanzmatrix des Elements Nr. i
(C_{tot})	Am/(Vs)	totale Elementreluktanzmatrix aller Elemente, unvernetzt
(C_{res})	Am/(Vs)	resultierende Reluktanzmatrix der vernetzten Elemente
$c_{0,i}$	Wb/m	Konstantwertkoeffizient einer linearen Ansatzfunktion für das magnetische Vektorpotential im Element Nr. i
$c_{x,i} \ c_{y,i}$	Wb/ m^2	x,y - Koeffizient einer linearen Ansatzfunktion für das magnetische Vektorpotential im Element Nr. i
D_i	m^2	Determinante des i -ten Dreieckselementes
(D_X)		Diagonalmatrix, allgemein
d	m	Schichtdicke
E	V/m	elektrische Feldstärke
E		Einheitstensor
e	m	exzentrische Verschiebung der Rotorachse
F_r, F_z	N	Kraftkomponenten in radialer und axialer Richtung

Symbol	Einheit	Bedeutung
F_N		Flächenwindungszahl, d. h. Anteil des betrachteten Flächenelementes an der gesamten Windungszahl im Nutenquerschnitt
$F_{\gamma,0}$	Am/V	Flächenleitwert zu einem zentralen Knoten „0“
f	Hz	Frequenz, allgemein
f_N	Hz	Netzfrequenz
f_p	Hz	Frequenz der Pendelmomente
G	S	Leitwert
G_{DC}	S	Gleichstromleitwert eines Massivleiters
G'	S rad	Gleichstromleitwert eines 1-rad-Segmentes eines Kreisringmassivleiters
$g'_{1\dots NZwg}$		Koeffizient des Gleichungssystems für das Vorschaltnetzwerk
H	A/m	magnetische Feldstärke
h	μs	Zeitschrittweite
h	m	Höhe
h_x, h_y	m	Gitterweiten bei FD in kartesischen Koordinaten
I	A	Stromstärke
I	J	Variationsintegral
I_i	J	Beitrag des i -ten Elementes zum Variationsintegral
I_{Exc}	A	Erregerstrom
I_0	A	Knotenstrom in einem zentralen Knoten „0“
$I_{M,0}$	A	Knotenstrom in einem zentralen Knoten „0“ des Aufsatzgitters bei Interpolationsanbindung einer bewegten Struktur
$i_{1\dots NZwg}, i_{A,1\dots m}$	A	Stromstärken im Vorschaltnetzwerk
i_K	A	Kurzschlussstrom
i_w	A	Strom in Wicklungselement Nr. w
i_ρ	A	Strom der Spulengruppe ρ
$J_{i,k}$	A/m ²	Stromdichte in Gitterzelle (i, k)
J_w	A/m ²	Stromdichte auf Wicklungsquerschnitt Nr. w
(K_X)		Inzidenzmatrix, allgemein
L	H	Selbstinduktivität
L_R	H	Ringstreuinduktivität

Symbol	Einheit	Bedeutung
$L_{S,w}, L_{\sigma,w}$	H	Streuinduktivität des Wicklungselementes Nr. w
l	m	Länge, allgemein
l_e	m	Eisenlänge
$l_{\Phi,m}$	m	mittlere Länge eines Flusspfades oder magnetischen Weges
$l_{J,m}$	m	mittlere Länge eines Stromweges
$M_{l,j}$	H	Gegeninduktivität zwischen Zweig l und Zweig j
M_{el}	Nm	elektrisch erzeugtes Moment (Luftspaltmoment)
M_w	Nm	Drehmoment an der Maschinenwelle der ASM
m	kg	Masse
m_{ph}		Phasenzahl
N		Windungszahl einer Spule
$N_{I..III,i}$		Formfunktionen in Dreieckselement Nr. i
N_{Zwg}		Anzahl der Zweige im Vorschaltnetzwerk
$N_{K,i}$		Anzahl der inneren Knoten im Vorschaltnetzwerk
$N_{Wdg,w}$		Windungszahl auf Querschnittfläche von Wicklung Nr. w
\vec{n}		Normalenvektor
n	min^{-1}	Drehzahl
n_0	min^{-1}	Leerlaufdrehzahl, synchrone Drehzahl
n_{Wdg}		Windungszahl
P	kW	Leistung
p		Polpaarzahl
p_1, p_2	W	stator- und rotorseitige Augenblickswerte der Leistungen eines Asynchronmotors
p_m	W	Augenblickswert der magnetischen Leistung
p_i	rad	azimutale Weite zwischen den radialen Linien i und $i+1$
q		Lochzahl, Anzahl der Spulen pro Spulengruppe und Strang
q_k	m	radiale Weite zwischen den azimutalen Linien k und $k+1$
R	Ω	Widerstand
R_m	m	Radius einer Torusmittellinie
R_T	m	Radius der Querschnittfläche eines Torus
R_R	Ω	Ringwiderstand zwischen zwei benachbarten Stäben

Symbol	Einheit	Bedeutung
R_S	Ω	Stabwiderstand außerhalb des Eisens (beidseitig)
R_w	Ω	ohmscher Widerstand des Wicklungselementes Nr. w
R_p	Ω	ohmscher Widerstand einer Spulengruppe
r	m	Radius, radiale Koordinate
$r_{M,0}$	m	Radialkoordinate eines zentralen Knotens „0“ des Aufsatzgitters bei Interpolationsanbindung einer bewegten Struktur
r_k	m	Radius der azimutalen Gitterlinie k
$r'_{1\dots NZwg}, r'_{A,1\dots m}$		Koeffizienten des Gleichungssystems für das Vorschaltnetzwerk
S	kVA	Scheinleistung
s		Schlupf
s_K		Kippschlupf
T	N/m ²	mechanische Flächenspannung
$(T_Z), (T_A)$		obere Dreiecksmatrizen nach Triangulierung des Netzwerkgleichungssystems
t	s	Zeit
U	V	Spannung, allgemein
U_0	V	Gleichspannung
$u_{1\dots NZwg}$	V	Spannungen im Vorschaltnetzwerk
$u_{A,1\dots m}$	V	Leiter-Erdspannungen an den Ausgangsklemmen des Vorschaltnetzwerkes
$u_{A,w}, u_w$	V	Wicklungszweigspannung des Wicklungselementes w
V	V	elektrisches Potential
v_k		Wert der Gewichtungsfunktion im Knoten k
W_m	J	magnetische Energie
w		Gewichtungsfunktion
(X_{Zwg})		Vektor der inneren Zweigströme und Spannungen des Vorschaltnetzwerkes
x, y, z	m	kartesische Koordinaten x, y und z
x_I, x_{II}, x_{III}	m	x -Koordinaten von Punkt I, II und III einer Dreieckszelle
y_I, y_{II}, y_{III}	m	y -Koordinaten von Punkt I, II und III einer Dreieckszelle
Z_1, Z_2		Statornutenzahl, Rotornutenzahl

Symbol	Einheit	Bedeutung
$\alpha_{0..4}$	Am/Vs	Koeffizienten der Feldgleichung zum Knoten 0, Verknüpfung mit Vektorpotentialen der Nachbarknoten 1....4
$\beta_{0,n}$		Koeffizient bei Interpolationsanbindung eines bewegten Gitters
β_{Anf}	rad bzw. Grad	Rotoranfangswinkel bei FD-Rechnungen
β_2	rad bzw. Grad	Rotoranfangsposition in der Oberfeldtheorie
γ	S/m	elektrische Leitfähigkeit
θ		Zeitschrittparameter der modifizierten Trapezregel
θ_0	A	Durchflutung zu einem zentralen Knoten „0“
ϑ		Winkel zur Polachse in Kugelkoordinaten
μ	Vs/Am	Permeabilität
μ_0	Vs/Am	Vakuumpermeabilität, magnetische Feldkonstante
μ_r		relative Permeabilität
τ_{N1}, τ_{N2}	rad bzw. grad	Stator-, Rotornutteilung
τ_p	rad bzw. grad	Polteilung
Φ	N/m ²	fiktiver Maxwell'scher Flächenspannungstensor
Φ'	Wb/rad	modifiziertes magnetisches Vektorpotential, Flussfunktion
$\Phi_{0,1...4}$	Wb/rad	modifiziertes magnetisches Vektorpotential, Flussfunktion im zentralen Knoten „0“ und den Nachbarknoten 1 ... 4
$\Phi_{M,0}$	Wb/rad	Flussfunktion in einem zentralen Knoten „0“ des Aufsatztgitters bei Interpolationsanbindung einer bewegten Struktur
$\Phi_{b,n}$	Wb/rad	Flussfunktion in den Eckknoten $n = 1 \dots 4$ der mit einem Knoten des Aufsatztgitters inzidenten Zelle des Basisgitters bei Interpolationsanbindung einer bewegten Struktur

Indizes

a	Anfangsindex
A	Ausgang des Vorschaltnetzwerkes
Al	Aluminium
ASM	Asynchronmaschine
Cu	Kupfer
D	Dirichlet-Rand
e	Endindex
eff	Effektivwert
i	radiale Gitterlinie Nr. i , Sektor zwischen Nr. i und Nr. $i+1$
i, k	Knoten (i, k) , Gitterzelle (i, k)
j	j -ter Zweig, j -tes Maschinenelement
k	azimuthale Gitterlinie Nr. k , Kreisring zwischen Nr. k und $k+1$
m	Massivleiter Nr. m
L1, L2, L3	Außenleiter
N	Neutralleiter, Nulleiter; Bemessungswert
r, φ, x, y, z	Koordinatenrichtungen
U, V, W	Klemmen des Asynchronmotors
SM	Synchronmaschine
St, m bzw. R, m	Stab Nr. m , bzw. Ring Nr. m
syn, s	synchron
v	Verlust
w	Wicklung Nr. w
verk	verkettete (Spannung)
zyl	Zylinderkoordinaten

Schreibweisen

\hat{A}_i	numerisch approximierter Wert von $A(x, y)$ in Knoten Nr. i
\vec{B}	vektorielle Größe
(A)	Matrix oder Spaltenvektor
\underline{U}	komplexe Größe
\hat{M}	Amplitude von M
$\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$	Einheitsvektoren in Zylinderkoordinaten
$u(t)$	Funktion der Zeit t
$u _t$	diskreter, numerisch für den Zeitpunkt t berechneter Wert von u
${}_{\xi=1} U$	1. Harmonische (Grundschwingung) von U
$d\bar{a}$	Flächenelement
$d\bar{l}$	Linienelement
$dt, d\tau$	Zeitdifferential
dr	Radiendifferential
$d\varphi$	Winkeldifferential
Φ	Tensor
$\vec{H} \vec{B}$	dyadisches Produkt der Vektoren \vec{H} und \vec{B}

Quellen- und Literaturverzeichnis

- [Agar59] Agarval, P. D.: „Eddy-current losses in solid and laminated iron”, Trans. AIEE 78 Part I. (1959), p. 159 ff.
- [Alb00] Albertz, D.; Henneberger, G.: „On the use of the new edge based $\vec{A} - \vec{A}, \vec{T}$ formulation for the calculation of time-harmonic, stationary and transient eddy current field problems”, IEEE Trans. Mag., Vol. 36, No. 4, pp. 818-822, July 2000.
- [Alb98] Albertz, D.; Henneberger, G.: „Calculation of 3D eddy current fields using both electric and magnetic vector potential in conducting regions”, IEEE Trans. Mag., Vol. 34, No. 5, pp. 2644-2647, September 1998.
- [ANS#1] <http://www.ansys.com/assets/brochures/electromagnetics-solution-10.pdf>
- [BBH99] Beerwald, C., Brosius, A., Homberg, W., Kleiner, M., Wellendorf, A.: „New aspects of electromagnetic forming”, Proceedings of the 6th International Conference on Technology of Plasticity, Nürnberg, Sep. 19-24, 1999, Band III (1999), Seite 2471-2476.
- [Bee01] Beerwald, C.; Kleiner, M.; Klocke, M.; Kulig, S.: „Aspekte der Prozessführung beim Kalibrieren mittels Elektromagnetischer Umformung“, 1. Kolloquium Elektromagnetische Umformung, Dortmund, 15. Mai 2001.
- [Bee03] Beerwald, C.; Brosius, A.; Homberg, W.; Kleiner, M.; Klocke, M.; Kulig, S.: „Extended Finite Element Modelling of Electromagnetic Forming”, Proceedings of International Conference on Sheet Metal, SheMet 2003, 14 – 16 April 2003.
- [Bir89] Biró, O.; Preis, K.: „On the use of the magnetic vector potential in the finite element analysis of three-dimensional eddy currents”, IEEE Trans. Mag., Vol. 25, No. 4, pp. 3145-3159, July 1989.
- [Bir95] Biró, O.: „Various FEM-formulations for calculation of transient 3d eddy current in nonlinear media”, IEEE Trans. Mag., Vol. 31, No. 3, pp. 1307-1312, May 1995.
- [BLS81] Bolte, E.; Lütke-Dahldrup, B.; Stöber, P.: „Eindimensionales Wirbelstromproblem bei feldstärkeabhängiger Permeabilität und beliebigen Randbedingungen“, Archiv für Elektrotechnik AfE 64 (1981), S. 201 – 213.
- [Bos01] Bossavit, A.: „’Stiff’ problems in eddy-current theory and the regularization of Maxwell’s equations”, IEEE Trans. Mag., Vol. 37, No. 5, p. 3542 – 3545, Sep. 2001.
- [Bos88] Bossavit, A.: „A rationale for edge elements in 3D-field computations”, IEEE Trans. Mag., Vol. 24, No. 1, pp. 74 – 79, Jan. 1988.
- [Bos99] Bossavit, A.: „Some realizations of a discrete Hodge operator: A reinterpretation of finite element techniques”, IEEE Trans. Mag., Vol. 35, No. 3, pp. 1494-1497, May 1999.
- [Brau97] Brauer, J. R.: EMAS, Application Manual – Version 4, Ansoft Corporation, 1997.
- [BRK93] Bissig, H.; Reichert, K.; Kulig, T. S.: „Modelling and Identification of Synchronous Machines, a New Approach with an Extended Frequency Range“, IEEE Trans. Energy Conversion, Vol. 8, No. 2, June 1993.

-
- [BSL98] Biddlecombe, C. S.; Simkin, J.; Jay, A. P.; Sykulski, J. K.; Lepaul, S.: “Transient electromagnetic analysis coupled to electric circuits and motion”, *IEEE Trans. on Magnetics*, vol. 34, no. 5, pp. 3182-3185, Sep. 1998.
- [Can02] Canova, A.; Ottella, M.; Hill-Cuttingham, R.J.: „3D eddy current FE analysis of electromechanical devices”, *Compel* Vol. 20, No. 2, 2001, pp. 332 – 347.
- [Cle00] Clemens, M.; Weiland, T., Wilke, M.: „Transient Eddy Current Formulation Including Moving Conductors Using the FI Method”, *IEEE Trans. Mag.*, Vol. 36, No. 4, p. 804 – 808, July 2000.
- [Cle02] Clemens, M.; Weiland, T.: „Magnetic Field Simulation Using Conformal FIT Formulations“, *IEEE Trans. Mag.*, Vol. 38, No. 2, p. 389 – 392, March 2002.
- [Cle99] Clemens, M.; Weiland, T.: „Transient Eddy-Current Calculation with the FI-Method”, *IEEE Trans. Mag.*, Vol. 35, No. 3, p. 1163 – 1166, May 1999.
- [Dan01] Daneschnejad, M.: *Erfassung von Windungsschlüssen in der Erregerwicklung eines Turbogenerators*, Dissertation am Lehrstuhl MAL, Universität Dortmund, 2001.
- [DeG03] De Gersem, H.; Wilke, M.; Clemens, M.; Weiland, T.: „Efficient Modelling Techniques for Complicated Boundary Conditions Applied to Structured Grids“, *Symposium Reports of Sixth International Symposium on Electric and Magnetic Fields*, EMF 2003, p. 231-234, 6-9 October 2003.
- [Dem00] Demenko, A.: „Three dimensional eddy current calculation using reluctance-conductance network formed by means of FE method”, *IEEE Trans. Mag.*, Vol. 36, No. 4, pp. 741 – 745, July 2000.
- [Dem96] Demenko, A.: „Movement simulation in finite element analysis of electric machine dynamics”, *IEEE Trans. Mag.*, Vol. 32, No. 3, pp. 1553 – 1559, May 1996.
- [DeS02] Demenko, A., Sykulski, J. K.: „Network equivalents of nodal and edge elements in electromagnetics”, *IEEE Trans. Mag.*, Vol. 38, No. 2, pp. 1305 – 1308, March 2002.
- [DeW97] De Weerdt, R.; Tuinman, E.; Hameyer, K; Belmans, R.: „Finite Element Analysis of Steady State Behavior of Squirrel Cage Induction Motors Compared with Measurements”, *IEEE Trans. Mag.*, Vol. 33, No. 2, March 1997.
- [DGL99] Dular, P.; Geuzaine, C.; Legros, W.: „A natural method for coupling magneto-dynamic H-formulations and circuit equations”, *IEEE Trans. Mag.*, Vol. 35, No. 3, pp. 1626-1633, May 1999.
- [Dom69] Dommel, H. W.: „Digital computer solution of electromagnetic transients in single- and multiphase networks”, *IEEE Trans. On Power Apparatus and Systems*, Vol. PAS-88, No. 4, April 1969, p. 388-399.
- [Dop95] Doppelbauer, M.: *Oberfeldtheorie zur Berechnung der Kommutierung und des Betriebsverhaltens von Universalmotoren unter genauer Berücksichtigung aller Hilfswicklungen, der Geometrie und des Bürstenübergangswiderstandes*, Dissertation am Lehrstuhl TEM, Universität Dortmund, 1995.
- [Dor90] Dornau, U.: *Berechnung und Messung der Stirnstreuung von Asynchronmaschinen mit Käfigläufer*, Dissertation am Lehrstuhl TEM, Universität Dortmund, 1990.

-
- [Dot99] Dotterweich, M.; Patecki, A.; Turkot, A.: „The Local Net Method Implementation in Electromagnetic Field Computations Applying the Finite Difference Method”, Proceedings of X. International Symposium on Theoretical Electrical Engineering ISET 1999, p. 53 –56, 6-9 September 1999.
- [Dru00] Drubel, O.: „Die Berechnung der elektromagnetischen und thermischen Beanspruchung von Turbogeneratoren während elektrischer Störfälle mittels Finiter-Differenzen-Zeitschrittmetode“, Electrical Engineering 82 (2000), S. 327-338.
- [Dru01] Drubel, O.: *Elektromagnetische Vorgänge und Temperaturverteilungen im Rotor großer Turbogeneratoren im gestörten Betrieb*, Dissertation am Lehrstuhl MAL, Universität Dortmund, 2001.
- [DuG03] Dular, P.; Geuzaine, C.: „Modeling of thin insulating layers with dual 3-D magnetodynamic formulations”, IEEE Trans. Mag., Vol. 39, No. 3, pp. 1139-1142, May 2003.
- [Dul98] Dular, P.; Geuzaine, C.; Henrotte, F.; Legros, W.: „A General Environment for the Treatment of Discrete Problems and its Application to the Finite Element Method”, IEEE Trans. Mag., Vol. 34, No. 5, p. 3395 – 3398, May 1998.
- [Dul99] Dular, P.; Geuzaine, C.; Genon, A.; Legros, W.: „An evolutive software environment for teaching Finite Element Methods in Electromagnetism”, IEEE Trans. Mag., Vol. 35, No. 3, p. 1682 – 1685, May 1999.
- [Eck78] Eckhardt, H.: *Numerische Verfahren in der Energietechnik*, Teubner Studienschriften, Stuttgart, 1978.
- [EMP#1] <http://www.emclab.umr.edu/emap.html>
- [FFM#1] <http://www.freefem.org>
- [FFM#2] <http://savannah.nongnu.org/projects/ff3d>
- [FIT#1] <http://www.temf.de/DEUTSCH/Forschung/FIT.html>
- [FLX#1] <http://www.cedrat.com/software/flux/flux.htm>
- [FLX#2] <http://www.cedrat.com/software/flux/pdf/flux.pdf>
- [Fm98] Flockermann, D.; Klocke, M.; Kulig, S.: „Numerical Determination of Radial Electromagnetic Forces on Rotors of Electrical Machines”, Proceedings of the Fifth International Conference on Rotor Dynamics (IFToMM 1998), edited by H. Irretier and R. Nordmann. Darmstadt, Germany, September 7-10, 1998, Vieweg-Verlag.
- [Ger05] Gerling, D.: „ANSYS in der Antriebstechnik“, CADFEM Infoplaner 1/2005.
- [Geu01] Geuzaine, Ch.: „High order hybrid finite element schemes for Maxwell’s equations taking thin structures and global quantities into account”, PhD thesis, Université de Liège, Faculté des Sciences Appliquées, Oct. 2001.
- [Gh92] Gottkehaskamp, R.: *Nichtlineare Berechnung von Asynchronmaschinen mit massiveisernem Rotor und zusätzlichem Käfig im transienten Zustand mittels finiter Differenzen und Zeitschrittrechnung*, Dissertation am Lehrstuhl TEM, Universität Dortmund, 1992.
- [Gro92] Großmann, Ch.; Roos, H.-G.: *Numerik partieller Differentialgleichungen*, 2. Auflage, Teubner Studienbücher – Mathematik, Stuttgart 1992.

-
- [GVM99] Gyselinck, J.; Vandevenne, L.; Melkebeek, J.; Dular, P.; Henrotte, F.; Legros, W.: „Calculation of eddy currents and associated losses in electrical steel laminations“, IEEE Trans. Mag., Vol. 35, No. 3, p. 1191 – 1194, May 1999.
- [Har68] Harrington, R. F.: *Field Computation by Moment Methods*, The Macmillan Co., New York, 1968.
- [HCP03] Henneron, T.; Clénet, S.; Piriou, F.: „Comparison of 3D magnetodynamic formulations in term of potential with imposed imposed electric global quantities“, Reports of the Sixth International Symposium on Electric and Magnetic Fields (EMF 2003), p. 223-226. Aachen, Germany, October 6-9, 2003.
- [Hen99] Henrotte, F.; Meys, B.; Hedia, H.; Dular, P.; Legros, W.: „Finite Element Modelling with Transformation Techniques“, IEEE Trans. Mag., Vol. 35, No. 3, p. 1434 – 1437, May 1999.
- [Hes90] Heseler, U.: *Berechnung der Kommutierung von Gleichstrommotoren mit Wendepolen und Kompensationswicklung unter Berücksichtigung des Bürstenübergangswiderstandes*, Dissertation am Lehrstuhl TEM, Universität Dortmund, 1990.
- [Hol05] Hollaus, K.; Bíró, O.: „Comparison of Tetrahedral Edge Finite-Elements Using Different Potential Formulations“, IEEE Trans. Mag., Vol. 41, No. 5, p. 1676 – 1679, May 2005.
- [Hub91] Hubing, T. H.: *Survey of Numerical Electromagnetic Modeling Techniques*, University of Missouri-Rolla, Electromagnetic Compatibility Laboratory, Technical Report TR91-1-001.3, 1991.
- [Hub93a] Hubing, T. H.; Ali, M.: „EMC applications of EMAP-2: A 3D finite element modeling code“, Symposium Record of IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility, p. 279 – 283, Aug. 1993.
- [Hub93b] Hubing, T. H.; Ali, M. W.; Bhat G. K., „EMAP: A 3-D, finite element modeling code for analyzing time-varying electromagnetic fields“, Journal of the Applied Computational Electromagnetics Society, Vol. 8, No. 1, 1993.
- [IMS#1] http://www.iem.rwth-aachen.de/index.pl/finite_elemente_software
- [IMS#2] <http://www.imoose.de>
- [Ji00] Ji, Y; Hubing T.: „EMAP5: A 3D Hybrid FEM/MOM Code,“ Journal of the Applied Computational Electromagnetics Society, Vol. 15, No. 1, pp. 1-12, March 2000.
- [JPL#1] <http://203.162.7.79/webs/physics/emblib/emlib.jpl.nasa.gov/EMLIB/files.html>
- [Kae02] Kaehler, C.; Henneberger, G.: „Eddy Current Computation in the Claws of a Synchronous Claw Pole Alternator in Generator Mode“, IEEE Trans. Mag., Vol. 38, No. 3, March 2002.
- [Kae04] Kaehler, C.; Henneberger, G.: „Transient 3-D FEM Computation of Eddy-Current Losses in the Rotor of a Claw Pole Alternator“, IEEE Trans. Mag., Vol. 40, No. 2, March 2004.
- [KBL86] Kulig, T. S.; Buckley, G. W.; Lambrecht, D.; Liese, M.: „A new approach to determine generator winding and damper currents in case of internal and external faults and abnormal operation, Part 2: Analysis“, IEEE Winter Meeting, 1986.

-
- [Kl01a] Klocke, M.: „Slot Leakage Inductance and Eddy Current Losses in Multi-Turn Stator Windings for Very High Voltage Synchronous Generators”, XI. International Symposium on Theoretical Electrical Engineering, Linz, Austria, August 19-22, 2001.
- [Kl01b] Klocke, M.; Daneschnejad, M.: „New Aspects of Winding Faults in the Rotor of a Large Synchronous Generator”, Record of the 2001 IEEE International Symposium on Diagnostics for Electrical Machines, Power Electronics and Drives (SDEMPED 2001), p. 161-166, Grado, Italy, September 1-3, 2001.
- [Kl01c] Klocke, M.: „The Calculation of Radial Forces Exerted on the Stator Slot Conductors of Synchronous Generators in Steady and Transient Operating States”, Proceedings of X International Symposium on Electromagnetic Fields in Electrical Engineering (ISEF 2001), p. 75-80, Cracow, Poland, September 20-22, 2001.
- [Kl02] Klocke, M.: „Calculation of the Self-Inductance of a Rectangular Magnetizer Coil”, Proceedings of the 4th International Workshop on Scientific Computing in Electrical Engineering (SCEE 2002), Eindhoven, The Netherlands, 23-28 June 2002, p. 265-272. Mathematics in Industry 4, W.H.A. Schilders, S.H.M.J. Houben, E.J.W. ter Maten, Springer-Verlag.
- [Kl03] Klocke, M.: „Computation of Axisymmetric Transient Electromagnetic Fields by Finite-Difference Schemes Including Prescribed Motion”, Reports of the Sixth International Symposium on Electric and Magnetic Fields (EMF 2003), p. 243-248. Aachen, Germany, October 6-9, 2003.
- [Kl04] Klocke, M.: „Axisymmetric transient electromagnetic finite-difference scheme including prescribed motion”, COMPEL, Vol. 23. No. 4 2004, p. 1023-1035. Selected papers from the 6th International Symposium on Electric and Magnetic Fields (EMF 2003), Aachen, Germany.
- [Kl04b] Klocke, M.; Kulig, S.: „Eddy current losses in mechanical components of industrial plants with high current applications“, Proceedings of the XVIII Symposium on Electromagnetic Phenomena in Nonlinear Circuits (EPNC 2004), p. 11-12. Poznan, Poland, June 28-30, 2004.
- [Kl06] Klocke, M.; Rosendahl, J.: „Effects of turn to turn stator winding faults in synchronous generators”, Paper accepted for OPTIM 06, Bražov, Romania, 2006.
- [Kl99] Klocke, M.: *Zur Berechnung dynamischer Vorgänge bei von einem Drehstromsteller gespeisten Antrieben mit Asynchronmaschinen und mehreren gekoppelten Massen mittels Finite-Differenzen-Zeitschrittrechnung*, Dissertation am Lehrstuhl MAL, Universität Dortmund, 1999.
- [Kl99b] Klocke, M.: „Determination of Dynamical Phenomena in Soft-Started Induction-Motor-Drives using the Finite-Difference-Time-Stepping Method”, Proceedings of IX International Symposium on Electromagnetic Fields in Electrical Engineering (ISEF 1999). Pavia, Italy, September 23-25, 1999.
- [Klck81] Kulicke, B.: „Simulationsprogramm NETOMAC: Differenzenleitwertverfahren bei kontinuierlichen und diskontinuierlichen Systemen“, Siemens Forschungs- und Entwicklungsberichte, Vol. 10, pp. 299-302, 1981.
- [Km90] Küpfmüller, K.: „Einführung in die theoretische Elektrotechnik“, 13. verbesserte Auflage, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, etc., 1990.

-
- [Krt84] Kratki, N.: *Spannungskurvenform, Dämpferströme und Zusatzverluste in Dämpferstäben bei Synchronmaschinen mit ausgeprägten Polen im Leerlauf*, Dissertation am Lehrstuhl TEM, Universität Dortmund, 1984.
- [Kst94] Kost, A.: *Numerische Methoden in der Berechnung elektromagnetischer Felder*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1994.
- [Kul79] Kulig, T. S.: *Über die Beeinflussung der Ströme und des elektromagnetischen Drehmomentes von Turbogeneratoren durch Windungs- und Phasenschlüsse*, Dissertation, Universität Hannover, 1979.
- [Kul90] Kulig, T. S.: „Anwendung der numerischen Feldberechnung zur Modellierung elektrischer Drehstrom-Maschinen mit inneren Fehlern“, Bulletin SEV/VSE 81, No. 7, 1990.
- [Kul95] Kulig, T. S., Liese, M., Trebincevic, I.: „Shell Vibrations of Superconducting Generator Damper Cylinder Induced by Electrical Faults“, Paper presented at IEEE Winter Meeting 1995, New York.
- [Kul97] Senske, K., Kulig, T. S., Hauhoff J., Wünsch, D.: „Vibrational Behaviour of the Turbogenerator Stator End Winding in Case of Electrical Failures“, Paper presented at CIGRE 97, Yokohama, October 29th, 1997.
- [Kw01] Kwon, D.-H.; Burkholder, R.J.; Pathak, P.H.: „Efficient Method of Moments Formulation for Large PEC Scattering Problems Using Asymptotic Phasefront Extraction“, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 49, No. 4, April 2001.
- [Lan05] Langemyr, L.: „Die Stärken der schwachen Form“, COMSOL News, Nr. 1, 2005.
- [LKL84] Liese, M.; Kulig, T. S.; Lambrecht, D.: „Superconducting Generator Modeling by Iterative T-Network Equivalent Circuits for Investigation of Transient Performance“, IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-103, No. 7, July 1984.
- [Lüt83] Lütke-Daldrup, B.: *Verfahren zur Lösung zweidimensionaler, nichtlinearer elektromagnetischer Feld- und Wirbelstromprobleme mit Anwendungen*, Dissertation am Lehrstuhl TEM, Universität Dortmund, 1983.
- [Mee04] Meeker, D.: *Finite Element Method Magnetics, Version 3.4, User's Manual*, 2004, <http://femm.foster-miller.net/Archives/doc/manual34.pdf>
- [Mor97] Mirotznik, M. S.; Prather, D.: „How to choose EM software“, IEEE Spectrum December 1997 Volume 34 Number 12.
- [MXW#1] <http://www.ansoft.com/products/em/max2d/Maxwell2D.pdf>
- [MXW#2] <http://www.ansoft.com/products/em/max3d/Maxwell3D.pdf>
- [MXW#3] http://www.ansoft.com/products/em/max3d/transient_solver.cfm
- [Ned80] Nédélec, J. C.: „Mixed finite elements in \mathbb{R}^3 “, Numerische Mathematik, 35, p. 315 – 341, 1980.
- [NoD00] Nowak, L.; Demenko, A.: „The 3D coupled field-circuit simulation of transients in converters with conducting solid parts“, IEEE Trans. Mag., Vol. 36, No. 4, pp. 1412-1416, July 2000.
- [Ob59a] Oberretl, K.: „Die magnetische Rotorjochspannung bei Asynchronmaschinen“, Elektrotechnik und Maschinenbau EuM 76 (1959), S. 449 – 454.

-
- [Ob59b] Oberretl, K.: „Die genauere Berechnung des Magnetisierungsstromes von dreiphasigen Asynchronmaschinen“, Bulletin Oerlikon (1959), Nr. 335, S. 66.
- [Ob63a] Oberretl, K.: „Die Ermittlung von magnetischen Feldern, Wirbelströmen und Kräften in komplizierten Fällen durch Simulation an Gittermodellen“, AfE 48 (1963), H. 5.
- [Ob63b] Oberretl, K.: „Streufelder, Wirbelstromverluste, Erwärmungen, Kräfte und Eisenbrand im Stirnraum von Turbogeneratoren“, EuM 80 (1963), H. 23.
- [Ob69] Oberretl, K.: „Magnetic fields, eddy-currents and losses taking the variable permeability into account“, IEEE Trans PAS 88 (1969), p. 1646 – 1657.
- [Ob94a] Oberretl, K.: „Parasitäre synchrone Dreh- und Pendelmomente in Asynchronmotoren, Einfluss von Ausgleichsvorgängen und Eisensättigung, Teil I“, AfE 77 (1994), S. 179-190.
- [Ob94b] Oberretl, K.: „Parasitäre synchrone Dreh- und Pendelmomente in Asynchronmotoren, Einfluss von Ausgleichsvorgängen und Eisensättigung, Teil II“, AfE 77 (1994), S. 277-288.
- [OPR#1] http://www.vectorfields.com/images/stories/swdoc/opera_2d_data_sheet.pdf
- [OPR#2] http://www.vectorfields.com/images/stories/swdoc/carmen_data_sheet.pdf
- [Park29] Park, R. H.: „Two Reaction Theory of Synchronous Machines – Generalized Method of Analysis – Part I“, AIEE Trans., pp. 716 – 730, July 1929.
- [PDE#1] <http://www.pdesolutions.com>
- [Phil86] Philippow, E.: *Taschenbuch Elektrotechnik, Band 1: Allgemeine Grundlagen*, 3. Auflage, VEB Verlag Technik Berlin, 1986.
- [Pw88] Patzwald, D.: *Berechnung von Asynchron- und Linearmotoren mit Käfigläufer unter Berücksichtigung der Nichtlinearität des Eisens*, Dissertation am Lehrstuhl TEM, Universität Dortmund, 1988.
- [Rei03] Reichert, K.: *Benutzeranleitung FEMAG*, Institut für elektrische Maschinen, ETH Zürich, Schweiz, 2003.
- [Rei68] Reichert, K.: *Über ein numerisches Verfahren zur Berechnung von Magnetfeldern und Wirbelströmen in elektrischen Maschinen*, Habilitationsschrift Universität Stuttgart, 1968.
- [Ros04] Rosendahl, J.: *Untersuchung unterschiedlicher Kopplungsstrategien für die transiente, elektromagnetische und strukturdynamische Feldberechnung bei der elektromagnetischen Blechumformung*, Diplomarbeit am Lehrstuhl MAL, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Universität Dortmund, 2004.
- [Ros23] Rosenberg, E.: „Wirbelströme in massivem Eisen“, Elektrotechnik und Maschinenbau EuM 1923, S. 317 / Elektrotechnische Zeitschrift ETZ 44 (1923), S. 513 – 518.
- [Ru95] Runge, B.: *Dreidimensionale Berechnung der Stillstandserwärmung von Kurzschlussringen und Stäben explosionsgeschützter Asynchronmotoren unter Berücksichtigung des Wärmeübergangswiderstandes zwischen Stab und Blechpaket mittels Finiter-Elemente und Zeitschrittverfahren*, Dissertation am Lehrstuhl TEM, Universität Dortmund, 1995.

-
- [Ru96] Runge, B.: „Einfluß der Stanztoleranz zwischen Stab- und Blechpaket auf die Wärmeübergangszahl bei unverstemmten Rotorstäben“, Electrical Engineering 79 (1996), S. 443-448.
- [Schd84] Schröder, R.: *Oberfeldtheorie zur Berechnung der Kommutierung von Gleichstrommaschinen unter genauer Berücksichtigung der Geometrie und der Bürstenübergangswiderstände*, Dissertation am Lehrstuhl TEM, Universität Dortmund, 1984.
- [Schm96] Schmidt, E.; Ojak, S.: „3D MSC/EMAS Simulation of a Three Phase Power Transformer by Means of Anisotropic Material Properties“, MSC 1996 World Users' Conference Proceedings, http://www.mscsoftware.com/support/library/conf/wuc96/08a_schm.pdf
- [SiFe83] Sylvester, P. P.; Ferrari, R. L.: *Finite Elements for Electrical Engineers*, Cambridge University Press, Cambridge, London, New York, New Rochelle, Melbourne, Sydney, 1983.
- [Sko01] Škopek, M.; Bohuš, U.; Dolezel, I.: „Optimized Regime of Induction Heating of a Disk Before its Pressing on Shaft“, IEEE Trans. Mag., Vol. 37, No. 5, p. 3380 – 3383, Sep. 2001.
- [Ster05] Stermecki, A.; Tičar, I.; Bíró, O.; Preis K.: „Numerical Analysis of Permanent-Magnet Motor Performance Considering Rotor Movement“, IEEE Trans. Mag., Vol. 41, No. 5, p. 2004 – 2007, May 2005.
- [Stie04] Stiemer, M.; Klocke, M.; Suttmeier F. T.; Blum, H.; Joswig, A.; Kulig, S.: „Validation of Different Approaches to Coupled Electrodynmaic - Structural Mechanical Simulation of Electromagnetic Forming“, 1st International Conference on High Speed Forming (ICHSF 2004), Dortmund, March 30-31, 2004.
- [Um97] Ummelmann, R.: *Erweiterung eines Finite-Differenzen-Zeitschritt-Programmsystems auf Synchronmaschinen*, Diplomarbeit am Lehrstuhl MAL, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Universität Dortmund, 1997.
- [Um98] Ummelmann, R.: *Das Finite-Differenzen-Zeitschritt-Programmsystem SIMU-FDZS zur Simulation von Synchronmaschinen unter Vorgabe konstanter Erregerspannungen*, Technischer Bericht am Lehrstuhl MAL, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Universität Dortmund, 1998.
- [UMR#1] <http://www.emclab.umr.edu/csoft.html>, <http://www.emclab.umr.edu/codes.html>
- [VDE] EN 60034-4; VDE 0530: *Drehende elektrische Maschinen, Teil 4: Verfahren zur Ermittlung von Kenngrößen von Synchronmaschinen durch Messungen*.
- [Vgt96] Vogt, K.: *Berechnung elektrischer Maschinen*, Weinheim: VCH Verlagsgesellschaft mbH, 1996.
- [Vip05] Vipiana, F.; Pirinoli, P.; Vecchi, G.: „A Multiresolution Method of Moments for Triangular Meshes“; IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 53, No. 7, July 2005.
- [vRs04] van Riesen, D.; Monzel, C.; Kaehler, C.; Schlensok, C.; Henneberger, G.: „iMoose – An Open-Source Environment for Finite-Element Calculations“, IEEE Trans. Mag., Vol. 40, No. 2, March 2004.

-
- [Wei02] Wei, X.C.; Li, E.P.; Liang, C.H.: „Fast Solution for Large Scale Electromagnetic Scattering Problems Using Wavelet Transform and its Precondition”, Progress In Electromagnetics Research, PIER 38, 253-267, 2002.
 - [Wei04] Weiß, B.; Bíró, O.: „On the Convergence of Transient Eddy-Current Problems“, IEEE Trans. Mag. Vol. 40, No. 2, p 957 – 960, March 2004.
 - [Weil77] Weiland, T.: „A discretization method for the solution of Maxwell’s equations for six-component fields”, Electronics and Communication AEÜ, Vol. 31. No. 3, pp. 116 – 120, 1977.
 - [Wink73] Winkler, R.: *Hochgeschwindigkeitsbearbeitung – Grundlagen und technische Anwendungen elektrisch erzeugter Schockwellen und Impulsmagnetfelder*, VEB-Verlag Technik Berlin, 1973.
 - [Wol03] Wollenberg, G; Kochetov S. V.: „Modelling the skin-effect in wire-like 3D-interconnection structures with arbitrary cross section by a new modification of the PEEC method. 15th Intern. Zurich Symposium and technical exhibition on electromagnetic compatibility”, February 2003, Zürich, ISBN 3-9521199-7-0, p. 609-614, <http://iget96.et.uni-magdeburg.de/FOR417/Publications/Zurich2003/114q7.pdf>

Lebenslauf

Personalien:	Meinolf Klocke geboren am 19. Mai 1966 in Osnabrück, Land Niedersachsen Familienstand: verheiratet mit Heike Klocke, geb. Richter seit dem 22. März 2003
Schulausbildung:	1972 bis 1976 Johannisgrundschule in Hollage-Ost 1976 bis 1978 Orientierungsstufe, Thomas-Morus-Schule in Osnabrück-Haste 1978 bis 1985 Gymnasium Bramsche, (heute: Greselius-Gymnasium) Abschluss: Abitur
Militärdienst:	07/1985 bis 09/1986 Grundwehrdienst bei PzArtBtl 325, 4. Bttr, in Neuenkirchen/Schwanewede 03/1988, 12/1989, 10/1990, 27.03.1992 Mobilmachungsrahmenübungen
Studium:	10/1986 bis 09/1988 Grundstudium der Elektrotechnik an der Universität Dortmund 10/1988 bis 08/1992 Hauptstudium der Elektrotechnik an der Universität Dortmund Abschluss: Diplom 01/1995 bis 09/1999 Promotionsstudium der Elektrotechnik an der Universität Dortmund Abschluss: Doktor der Ingenieurwissenschaften
Berufstätigkeit:	seit 09/1992 wissenschaftlicher Angestellter am Lehrstuhl für Theoretische Elektrotechnik und Elektrische Maschinen der Universität Dortmund unter der Leitung von Prof. Dr. techn. K. Oberretl seit 1996 wissenschaftlicher Angestellter am Lehrstuhl für Elektrische Maschinen, Antriebe und Leistungselektronik unter der Leitung von Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. S. Kulig seit 25. Feb. 2002 Oberingenieur am Lehrstuhl für Elektrische Maschinen, Antriebe und Leistungselektronik, seit 25. Feb. 2004 umbenannt in Lehrstuhl für Elektrische Antriebe und Mechatronik