

5 Stochastik

5.1 Zufallsexperimente

Merke: Ein Zufallsexperiment

- hat klare Regeln (Vorschriften) unter denen es durchgeführt wird (Notar, man denke an die Lottoziehungen).
- ist beliebig oft wiederholbar
- ist nicht vorhersehbar
- hat mindestens zwei verschiedene Ergebnisse

Weitere Beispiele für Zufallsexperimente

- Würfeln mit zwei Würfeln, Summe bilden
- Ziehen der Lottozahlen
- Karte aus einem gut gemischten Kartenstapel ziehen
- Drehen eines Glücksrades oder eines Kreisel
- Ansprechen einer Person auf der Straße mit der Frage nach der Partei, die diese Person bei der letzten Wahl gewählt hat.
- Münzspiel: Kopf oder Zahl
- ...

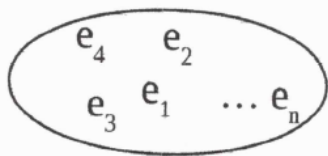
Was ist überhaupt ein Ergebnis?

Definition Ein einzelner Ausgang eines Zufallsexperiment heißt **Ergebnis**.
Alle möglichen Ergebnisse befinden sich in der **Ergebnismenge (im Ergebnisraum)**

$$S = \{e_1; e_2; e_3; \dots; e_n\}$$

Dies nennt man die **aufzählende Form**.

Darstellung im Mengendiagramm:



Beispiele:

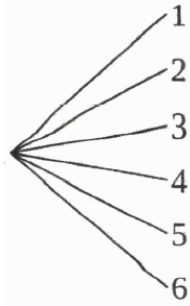
- Zufallsexperiment: Werfen eines sechsseitigen Würfels, Augenzahl notieren.
Mögliches Ergebnis: Augenzahl 5 (das was passiert)
Ergebnismenge $S = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ (das was passieren kann).
- Zufallsexperiment: Werfen einer 1-Euro Münze, Münzseite notieren.
Mögliches Ergebnis: Zahl (das was passiert)
Ergebnismenge $S = \{Kopf; Zahl\}$ (das was passieren kann).

Übung: Ergebnismenge angeben: S. 233 Nr. 1/2 und S. 226 Nr. 3/7.

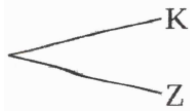
Weitere Darstellungsform von Zufallsexperimenten und Ergebnismenge: das **Baumdiagramm**

einstufiges Zufallsexperiment: Das Zufallsexperiment wird nur einmal durchgeführt.

- Werfen eines sechseitigen Würfels, Augenzahl wird notiert.

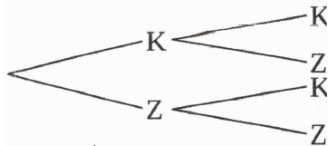


- Werfen einer Münze, Münzseite wird notiert.



mehrstufiges Zufallsexperiment: Das Zufallsexperiment besteht aus mehreren Schritten, die selbst auch Zufallsexperimente sind. Das einfachste Beispiel ist die mehrmalige Wiederholung eines einzelnen Zufallsexperiments (z.B. zweimal würfeln).

- Eine Münze zweimal werfen.
Mögliche Ergebnisse: Kopf (K), Zahl (Z)
Ergebnismenge: $S = \{KK; KZ; ZK; ZZ\}$
Baumdiagramm:



Es gibt $|S| = 4$ Möglichkeiten.

$|S|$ wird die **Mächtigkeit** der Ergebnismenge genannt.

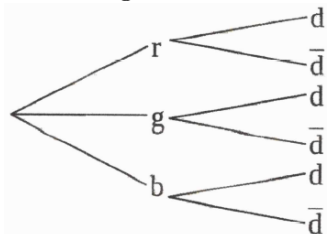
- Eine Maschine teste LED's zuerst, ob sie die Farbe rot, blau oder grün haben, danach, ob sie defekt ist oder nicht.

Ergebnisse: rot (r), blau (b), grün (g), defekt (d), nicht defekt (\bar{d})

Ergebnismenge: $S = \{rd; rd; bd; bd; gd; gd\}$

Mächtigkeit (Anzahl der Möglichkeiten) $|S|=6$.

Baumdiagramm:



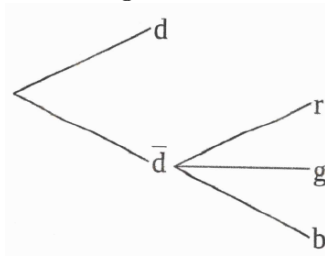
- Eine bessere Maschine testet die LED's zuerst, ob sie defekt sind oder nicht. Nur die ganzen LED's werden auf ihre Farbe (rot, blau, grün) getestet.

Ergebnisse: rot (r), blau (b), grün (g), defekt (d), nicht defekt (\bar{d})

Ergebnismenge: $S = \{d; \bar{d}r; \bar{d}b; \bar{d}g\}$

Mächtigkeit (Anzahl der Möglichkeiten): $|S|=4$

Baumdiagramm:



Übung: Ergebnismenge angeben: S. 226 Nr. 4,5,6,8

5.2 Ereignisse

Beispiel:

Würfeln mit zwei sechsseitigen Würfeln, es wird die Summe gebildet.

Ergebnismenge: $S = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$

Mögliche Ereignisse:

- $A = \{8\}$ Die Summe ist acht.
- $B = \{10; 11; 12\}$ Die Summe ist zweistellig. / Die Summe ist größer 9.
- $C = \{2; 4; 6; 8; 10; 12\}$ Die Summe ist gerade.
- $D = \{2; 3; 5; 7; 11\}$ Die Summe ist eine Primzahl.

Definition Gegeben sei ein Zufallsexperiment mit der Ergebnismenge S . Jede Teilmenge A von S ($A \subseteq S$) ist ein **Ereignis**.

Realisiert sich am Ende des Experiments ein Ergebnis aus A , sagt man das Ergebnis ist eingetroffen.

Spezielle Ereignisse:

- $A = \{e_i\} \rightarrow$ Elementarereignis, es besteht nur aus einem Ergebnis (z.B.: Die Summe der Augenzahl ist 5, $A = \{5\}$).
- $A = S \rightarrow$ sicheres Ereignis, tritt in jedem Fall ein. (z.B.: Die Summe der Augenzahl ist eine Zahl zwischen 2 und 12. Niemand nimmt diese Wette an, jeder würde Wetten.)
- $A = \{\} = \emptyset \rightarrow$ unmögliches Ereignis, tritt nie ein (z.B.: Die Augensumme ist 1. Jeder nimmt die Wette an, keiner würde wetten).
- Das Gegenereignis: Ein bestimmtes Ereignis tritt nicht ein.
 $\bar{A} = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 9; 10; 11; 12\}$ Die Summe ist nicht acht.
 $\bar{B} = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ Die Summe ist nicht zweistellig.
 $\bar{C} = \{3; 5; 7; 9; 11\}$ Die Summe ist nicht gerade (d.h. die Summe ist ungerade).
 $\bar{D} = \{4; 6; 8; 9; 10; 12\}$ Die Summe ist keine Primzahl.

weitere Beispiele zu Gegenereignissen:

- | | |
|----------------------------------|--|
| Genau zwei von drei Kinder lügen | \Leftrightarrow Kein, ein oder drei Kinder lügen. |
| Kein Auto ist gelb | \Leftrightarrow Mindestens ein Auto ist gelb. |
| Mindestens drei Gewinne gezogen | \Leftrightarrow Höchstens zwei Gewinne gezogen. |
| Alle Schüler sind faul | \Leftrightarrow Mindestens ein Schüler ist NICHT faul. |

Übungen: Buch S. 229 Nr. 1,2,3,5,7

Übungen: Buch S. 231 Nr. 2 (leicht), 3 (normal), 6,7