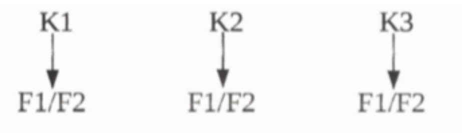
5.10 Kombinatorik

5.10.1 Die Produktregel

→ 3 Köpfe, 4 Bäuche, 2 Paar Füße.
Wie viele Tiere kann man damit legen?

Antwort: Es gibt $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ Möglichkeiten.

Erklärung: nur 3 Köpfe und 2 Füße: 5 oder 6 Möglichkeiten?



Es gibt daher $2 + 2 + 2 = 3 \cdot 2 = 6$ Möglichkeiten, also werden die Anzahlen multipliziert.

Allgemein:
Menge 1: $K = \{K_1; K_2; K_3\}$, $|K| = 3$
Menge 2: $B = \{B_1; B_2; B_3; B_4\}$, $|B| = 4$
Menge 3: $F = \{F_1; F_2\}$, $|F| = 2$

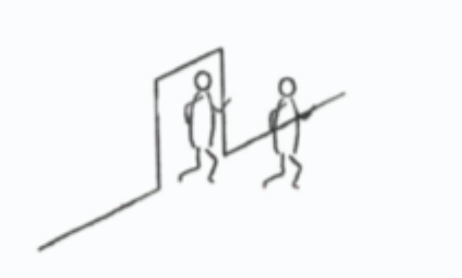
Und los geht es...
Wir ziehen 3-Tupel, z.B. $(K_2; B_3; F_1)$
Es gibt $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ Möglichkeiten

Merke: Die Produktregel:
Zieht man aus den k Mengen $M_1, M_2, ..., M_k$ je ein Element, kann man $|M_1| \cdot |M_2| \cdot ... \cdot |M_k|$ k-Tupel bilden, d.h. so viele Ergebnisse sind möglich.

Arbeitsblatt: Nr. 1,2 3

5.10.2 Anordnen einer Menge

Fr. Hund schließt die Türe auf, wie viele Möglichkeiten gibt es für eure Klasse den Raum zu betreten?
$S = \{s_1, s_2, ..., s_29\}$ und damit $|S| = 29$.



1. Schüler: $n = 29$ Möglichkeiten
2. Schüler: $n - 1 = 28$ Möglichkeiten
...
27. Schüler: 3 Möglichkeiten
28. Schüler: 2 Möglichkeiten
29. Schüler: 1 Möglichkeit

Insgesamt ergeben sich also $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$ (sprich n Fakultät) Möglichkeiten.

Für die Klasse sind dies:

- $30! = 2,65 \cdot 10^{32}$
- $29! = 8,84 \cdot 10^{30}$
- $28! = 3,05 \cdot 10^{29}$

10^{30}: Quintillionen
10^{15}: Billiarde
10^{18}: Trillion

Einfacher: Nach dem Unterricht muss in die Tasche von Frau Hund: ein Ordner, zwei Bücher, Kreide, Kalender, Mäppchen. Das sind 6 Dinge. Wie viele Möglichkeiten gibt es, diese Dinge hintereinander einzupacken?

Es sind $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ Möglichkeiten

Merke:
Es sind $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$ Möglichkeiten, n verschiedene Gegenstände anzuordnen.

5.10.3 Nur ein Teil einer Menge wird gezogen - Strichproben

Merkblatt anschauen, wo fällt z.B. Lotto drunter?

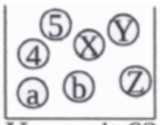
I Ziehen mit Zurücklegen - Reihenfolge ist wichtig (geordnete Stichprobe mit Wiederholung)

Beispiel:

Passwort aus 4 Zeichen (k), erlaubt sind: Groß-, Kleinbuchstaben, Ziffern, d.h. $26 + 26 + 10 = 62$ Zeichen (n):

Z8yF $\rightarrow 62 \cdot 62 \cdot 62 \cdot 62 = 62^4 = 14776336$ mögliche Passwörter.

P(Passwort wird erraten)= $\frac{1}{62^4} = \frac{1}{14776336} \approx 0,00000677\%$



Urne mit 62 Kugeln

Merke:
Hat man n Elemente und zieht daraus k Stück mit Zurücklegen und unter Beachtung der Reihenfolge (d.h. man bildet eine geordnete Stichprobe mit Wiederholung), so gibt es dafür $n \cdot n \cdot ... \cdot n = n^k$ Möglichkeiten.

Übung: Arbeitsblatt, Aufgaben 4,5 (Toto u. Wörter im Alphabet).

Geordnete Stichprobe ohne Wiederholung: kommt nicht vor!

IIa Ziehen ohne Zurücklegen - Reihenfolge ist wichtig (geordnete Stichprobe ohne Wiederholung)

Beispiel:

$k = 4$ Leute aus der Klasse $n = 29$ ziehen, jede(r) erhält einen anderen Preis. Auf wie viele Möglichkeiten können die Preise in der Klasse verteilt sein. (4 Stühle hinstellen, durch würfeln die Stühle besetzen.)

$\rightarrow$ Es sind $29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 = \frac{29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot ... \cdot 2 \cdot 1}{25 \cdot ... \cdot 2 \cdot 1} = \frac{29!}{(29-4)!}$ Möglichkeiten

Allgemein:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) = \frac{n \cdot (n-1)(n-2) \cdot (n-3) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1}{(n-4) \cdot (n-5) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-4)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Merke:
Hat man n Elemente und zieht daraus k Stück ohne Zurücklegen und unter Beachtung der Reihenfolge (d.h. man bildet eine geordnete Stichprobe ohne Wiederholung), so gibt es dafür $\frac{n!}{(n-k)!}$ Möglichkeiten

Aufgabenblatt, Aufgabe 7a)

IIb Ziehen ohne Zurücklegen - Reihenfolge ist egal (geordnete Stichprobe ohne Wiederholung)

Beispiel:
Lotto 6 aus 49, d.h. $k = 6$ und $n = 49$.

Es gibt
$49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 = \frac{49!}{(49-6)!}$ Möglichkeiten

die Lottozahlen zu ziehen, aber 1,2,3,4,5,6 ist am Ende das Gleiche wie 6,4,1,2,5,3 oder 4,1,5,2,3,6.
Wie viele Möglichkeiten gibt es, die 6 Zahlen anzuordnen?
$\rightarrow 6! = 720$

Also sind 720 der berechneten Möglichkeiten gleich, wir müssten für die wahre Anzahl durch $720 = 6!$ teilen:
Es gilt:

$$\frac{49!}{(49-6)! \cdot 6!} = \binom{49}{6}$$

Möglichkeiten.
Allgemein:

$$\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$$

$\rightarrow$ Binomialkoeffizient, sprich "n über k".

Beispiel 2: 5 Stifte, rot, blau, gelb, orange, schwarz.
Wie viele Möglichkeiten gibt es, daraus 2 Farben auszuwählen?
1. Reihenfolge ist wichtig: rb, rg, ro, rs, br, bg, bo, bs, gr, gb, go, gs, or, ob, og, os, sr, sb, sg, so.
Das sind 20 Möglichkeiten (Nachrechnen!)

2. Reihenfolge ist egal: Es sind je 2! Möglichkeiten gleich, es ist nur die Hälfte der Möglichkeiten.

(Würde man drei Farben auswählen, wären je 3!=6 Möglichkeiten gleich, z.B. rbg, rgb, bgr, brg, gbr, grb d.h. es wäre nur ein Sechstel der Möglichkeiten).

Merke:
Hat man n Elemente und zieht daraus k Stück ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge (d.h. man bildet eine ungeordnete Stichprobe ohne Wiederholung, Ziehen mit einem Griff), so gibt es dafür

$$\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$$

Möglichkeiten.
am WTR: nCr.

$\rightarrow$ Dies entspricht der Anzahl der k-elementigen Teilmengen aus n Elementen.

Beispiel 3:
Du hast 8 farbige Stifte. Wie viele Möglichkeiten gibt es, daraus 5 Farben auszuwählen?
Es gibt $\binom{8}{5} = 56$ verschiedene Farbkombinationen.

Merke:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

und

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

Beispiel 4:
Lotto 6 aus 49. Wie viele mögliche Ziehungen gibt es?
Es gibt $\binom{49}{6} = 13983816$ mögliche Ziehungsergebnisse. Damit ist die Chance auf den Höchstgewinn.

$P(6Richtige) = \frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13983816} \approx \frac{1}{14Millionen}$

Wie sagen sie in der Werbung 1:140 Millionen?

$\rightarrow$ Superzahl von 0-9 muss auch noch getroffenen werden!

Weshalb spielen dann noch so viele Menschen?
Man gewinnt ja auch bei weniger richtigen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit auf einen 4er?

$$P(5Richtige) = \frac{\binom{6}{5} \cdot \binom{43}{1}}{\binom{49}{6}} = \frac{258}{13983816} \approx \frac{1}{54200} \approx 0,0018\%$$

Weiter Lotto-Wahrscheinlichkeiten:

$$P(4 \text{ richtige}) = \frac{\binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} = \frac{13\,545}{13\,983\,816} \approx \frac{1}{1032} \approx 0{,}1\% \quad P(3 \text{ richtige}) = \frac{\binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} = \frac{246\,820}{13\,983\,816} \approx \frac{1}{57} \approx 1{,}8\%$$

$$P(2 \text{ richtige}) = \frac{\binom{6}{2} \cdot \binom{43}{4}}{\binom{49}{6}} = \frac{1\,851\,150}{13\,983\,816} \approx \frac{1}{7{,}6} \approx 13{,}2\% \quad P(2 \text{ richtige + Superzahl}) = \frac{1}{10} \cdot P(2 \text{ richtige}) \approx \frac{1}{76} \approx 1{,}32\%$$

$$P(1 \text{ richtiger}) = \frac{\binom{6}{1} \cdot \binom{43}{5}}{\binom{49}{6}} = \frac{5\,775\,588}{13\,983\,816} \approx \frac{1}{2{,}4} \approx 41{,}3\% \quad P(0 \text{ richtige}) = \frac{\binom{6}{0} \cdot \binom{43}{6}}{\binom{49}{6}} = \frac{6\,096\,454}{13\,983\,816} \approx \frac{1}{2{,}3} \approx 43{,}6\%$$

Wie viele Felder wurden in der Klasse getippt?
Wie viele 0er, 1er etc. werden erwartet?
$\rightarrow$ Ziehung starten!
Übung:

- Aufgabenblatt "Übungen zur Kombinatorik"
- Buch S. 269 Nr. 1-6

"