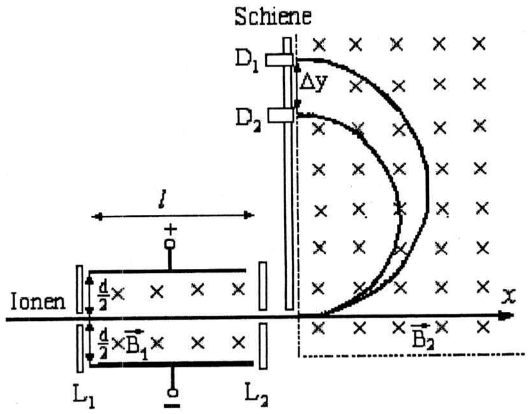
Massenspektrograph

LK-Abitur 2000-I-1 - Auszug

Ein Gemisch aus einfach positiv geladenen Kohlenstoffionen ^{12}C und ^{14}C tritt durch eine Lochblende L_1 in einen Plattenkondensator mit dem Plattenabstand d = 2,0 cm und der Länge l = 4,0 cm ein. Die gesamte Anordnung befindet sich im Vakuum. Das Magnetfeld mit der Flussdichte B_1 ist ***zunächst*** abgeschaltet; an den Platten liegt die Spannung U.



a) Skizzieren Sie die Bahnen zweier Ionen unterschiedlicher Masse, aber gleicher Geschwindigkeit zwischen L_1 und L_2. Begründen Sie, welche Bahn welchem Isotop zuzuordnen ist. (4 BE)

b) Die Ionen treten nun mit einer Mindestgeschwindigkeit $1{,}5 \cdot 10^5$ m/s in den Kondensator ein. Wie groß darf die Spannung am Kondensator höchstens sein, damit die Ionen nicht auf die Kondensatorplatten treffen? Berechnen Sie auch die dabei maximal auftretende Erhöhung der kinetischen Energie (in eV). (10 BE)

Am Kondensator liegt nun die Spannung U = 700 V. Die Flussdichte B_1 soll so eingestellt werden, dass alle Ionen mit der Geschwindigkeit $v_0 = 2{,}5 \times 10^5$ m/s den Kondensator unabgelenkt durchqueren.

c) Berechnen Sie B_1 und begründen Sie, dass Ionen beider Kohlenstoffisotope den Kondensator durch die Blende L_2 verlassen.

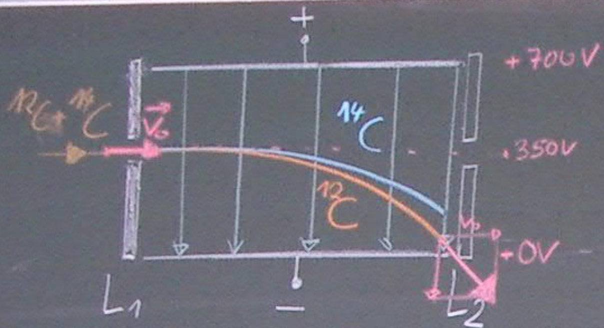
Das Magnetfeld rechts von L_2 hat die Flussdichte $B_2 = 0{,}14$ T. Die Teilchen, die den Kondensator verlassen, durchlaufen zwei Halbkreise.

d) Zeigen Sie, dass für den Abstand D y der beiden Punkte, an denen die Ionen das Magnetfeld wieder verlassen, gilt:

$$\Delta y = \frac{2 \cdot (m_{C14} - m_{C12}) \cdot v_0}{e \cdot B_2} \quad \text{(5 BE)}$$

Die Flussdichte B_2 wird nun variiert, alle anderen Größen bleiben unverändert. Die Ionen sollen durch zwei verschiebbare Detektoren D_1 und D_2 registriert werden, die einen Mindestabstand von 1,5 cm haben. Die äußerste Position von D_1 ist 60 cm von der x-Achse entfernt.

e) Berechnen Sie, zwischen welchen Werten die Flussdichte B_2 liegen muss, damit beide Isotope gleichzeitig gezählt werden können. (6 BE) a)



+700V einfach positiv geladene $^{12}C + ^{14}C$

$$m_{^{12}C} = 12 \cdot m_p$$
$$= 12 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\text{kg}$$

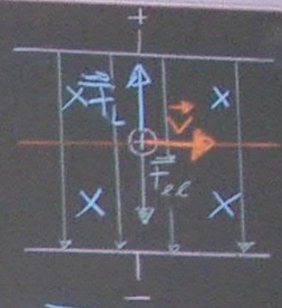
Das schwerere Teilchen (^{14}C) ist schwerer abzulenken als das leichtere (^{12}C).

b) $v_0 = 1{,}5 \cdot 10^5 \frac{m}{s}$

Flugdauer t zwischen den Platten: $t = \frac{s}{v} = \underline{2{,}67 \cdot 10^{-7}\,s}$

Beschleunigung a_y nach unten $a_y = \frac{F}{m} = \frac{F_{el}}{m_{^{12}C}} = \frac{E \cdot e}{m_{^{12}C}} = \frac{\frac{U}{d} \cdot e}{m_{^{12}C}}$

c)



keine Ablenkung: $F_{el} = F_L$

$$q\,E = q \cdot B \cdot v \qquad E = \frac{U}{d}$$

$$B = \frac{E}{v}$$

$$B = \frac{700\,V}{2{,}5 \cdot 10^5 \frac{m}{s} \cdot 0{,}02\,m} = \underline{\underline{0{,}14\,T}}$$

d) Zwei Halbkreise, $\Delta y = 2(r_2 - r_1)$

Lsg: $0{,}12\,T \le B_2 \le 0{,}69\,T$

Kreisbahn: $F_Z = F_L$

$$\frac{m v^{\cancel{2}}}{r} = B \cdot e \cdot \cancel{v}$$

$$\boxed{r = \frac{m \cdot v}{B \cdot e}}$$

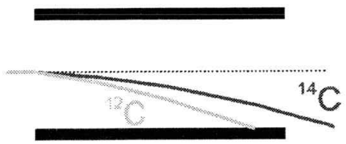
r einsetzen in $\Delta y = 2(r_2 - r_1)$

$$\Delta y = 2\left(\frac{m_{C_{14}} \cdot v_0}{B_2 \cdot e} - \frac{m_{C_{12}} \cdot v_0}{B_2 \cdot e}\right)$$

Massenspektrograph - Lösung

LK-Abitur 2000-I-1 - Auszug

a) ^{14}C wird aufgrund der größeren Masse in der gleichen Zeit weniger abgelenkt als ^{12}C.
Die Beschleunigung in y-Richtung ist:



$$a_y = \frac{q \cdot E}{m}$$

Also ist die Beschleunigung des schwereren Isotops kleiner und somit auch die Ablenkung.

b) In y-Richtung: *Konstant beschleunigte Bewegung ohne Anfangsgeschwindigkeit*

$$0{,}5 \cdot a_y \cdot t^2 \le \frac{d}{2} \;\Rightarrow\; \frac{e \cdot U}{2 \cdot d \cdot m(^{12}C)} \cdot \left(\frac{1}{v}\right)^2 \le \frac{d}{2} \;\Rightarrow\; U \le \frac{d^2 \cdot m(^{12}C) \cdot v^2}{e \cdot l^2}$$

$$U \le \frac{(2{,}0 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 12 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} \cdot (1{,}5 \cdot 10^5)^2}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot (4{,}0 \cdot 10^{-2})^2} V = 0{,}70 kV$$

Die beiden Ionen durchlaufen die Spannung $0{,}5 \cdot U = 0{,}35 kV$, also gewinnen sie maximal die Energie 0,35 keV.

c) Wenn die Ionen den Kondensator unabgelenkt verlassen sollen, so müssen die nach unten wirkende elektrischen Kraft F_e und die nach oben wirkende Lorentzkraft F_L gleichen Betrag haben: $q \cdot E = q \cdot v_0 \cdot B_1$ (1). Bei dieser Kraftgleichung spielt die Masse der Ionen keine Rolle. Aus (1) folgt:

$$B_1 = \frac{E}{v_0} \;\Rightarrow\; B_1 = \frac{U}{d \cdot v_0} \;\Rightarrow\; B_1 = \frac{700}{0{,}020 \cdot 2{,}5 \cdot 10^5} \frac{V \cdot s}{m^2} = 0{,}14 T$$

d) Im Magnetfeld B_2 durchlaufen die Ionen eine Kreisbahn. Es gilt:

$$F_{zp} = F_L; \Rightarrow \frac{m \cdot v^2}{r} = e \cdot v_0 \cdot B_2 \;\Rightarrow\; r = \frac{m \cdot v_0}{e \cdot B_2}$$

$$\Delta y = 2 \cdot r_{^{14}C} - 2 \cdot r_{^{12}C} = \frac{2 \cdot (m_{^{14}C} - m_{^{12}C}) \cdot v_0}{e \cdot B_2} \quad (*)$$

e) Der maximale Radius ist $r_{max} = 30$ cm. Dieser wird von ^{14}C-Ionen erreicht, wenn das Magnetfeld B_2 minimal ist:

$$B_{2,min} = \frac{m_{^{14}C} \cdot v_0}{e \cdot r_{max}} \;\Rightarrow\; B_{2,min} = \frac{14 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} \cdot 2{,}5 \cdot 10^5}{1{,}60 \cdot 10^{-19} \cdot 0{,}30} T = 0{,}12 T$$

Aus der Beziehung (*) sieht man, dass D y umso kleiner wird, je größer B_2 ist. Da D y mindestens 1,5 cm sein soll, darf B_2 nicht größer sein als

$$B_{2,max} = \frac{2 \cdot (m_{^{14}C} - m_{^{12}C}) \cdot v_0}{e \cdot \Delta y} \;\Rightarrow\; B_{2,max} = \frac{2 \cdot 2 \cdot u \cdot v_0}{e \cdot \Delta y} \;\Rightarrow$$

$$B_{2,max} = \frac{4 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} \cdot 2{,}5 \cdot 10^5}{1{,}60 \cdot 10^{-19} \cdot 0{,}015} T = 0{,}69 T \;\Rightarrow\; 0{,}12 T \le B_2 \le 0{,}69 T$$