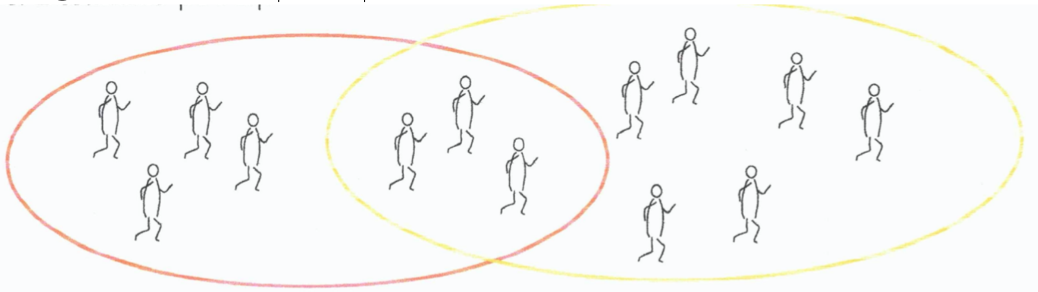
5.7 Der Additionssatz

Wir bestimmen zufällig eine Person aus der Klasse und wetten (angesprochene Personen stehen auf):

- A::Schüler/in trinkt morgens Kaffee
- B: Schüler/in hat blonde Haare

|S|=28, abzählen in der Klasse ergibt z.B. |A|=7 und |B|=19.

Aufgabe: Bestimme $|A \cup B|$.



Diese Aufgabe ist nur lösbar, wenn man weiß, wie viele Schüler/innen insgesamt aufgestanden sind, d.h. wenn man $|A \cap B|$ bekannt ist (und andersrum).

Herleitung des Additionssatzes:

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \qquad | : |S| \\ \frac{|A \cup B|}{|S|} &= \frac{|A|}{|S|} + \frac{|B|}{|S|} - \frac{|A \cap B|}{|S|} \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

Merke: Es gilt der Additionssatz:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Bemerkung: Sind A und B unvereinbar (disjunkt), so ist
$P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$
Somit gilt $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, d.h. die Wahrscheinlichkeiten addieren sich einfach

Beispiele:
Würfeln mit einem 100-seitigen Würfel, d.h. $S = \{0; 1; 2; ...; 98; 99\}$.

A: Ergebnis ist gerade, $P(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{50}{100} = 0,5$

B: Ergebnis ist einstellig, $P(B) = \frac{|B|}{|S|} = \frac{10}{100} = 0,1$

$P(A \cap B) = P(\{0; 2; 4; 6; 8\}) = \frac{5}{100} = 0,05$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,5 + 0,1 - 0,05 = 0,55$
$\rightarrow$ 55% aller Zahlen sind gerade oder einstellig.

(Das wäre auch mit einem Baum gegangen)
Übung:
Löse mit und ohne Additionssatz: S. 250 Nr. 1,3b
Löse mit oder ohne Additionssatz: S. 250 Nr. 2,3a), c), d), 4, 5

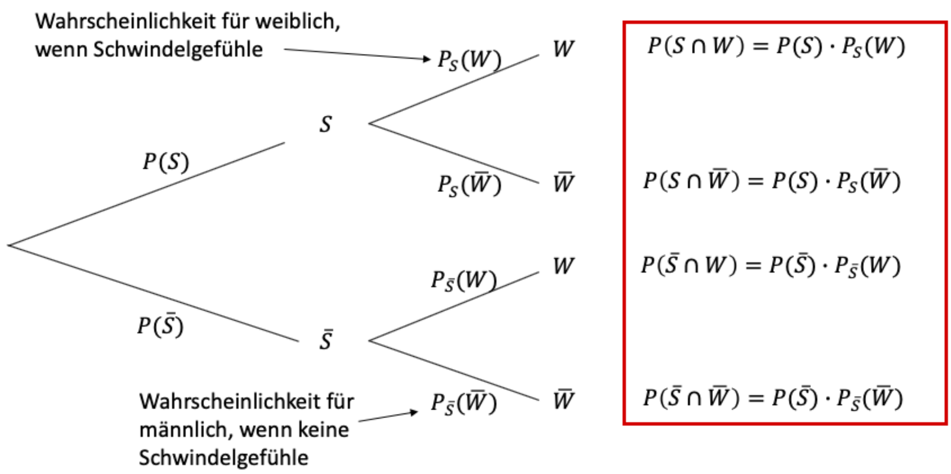
Rückblick:

- Laplace: $P(A) = \frac{|A|}{|S|}$
- Gegenereignis: $P(A) = 1 - P(\overline{A})$
- Baum und Pfadregeln: Entlang: Multiplikation, nach unten: Addition
- Additionssatz: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

5.8 Die bedingte Wahrscheinlichkeit

→ Eigentlich schon bekannt, nur wurde der Name noch nicht genannt, des Weiteren gibt es dazu gute Anwendungen.
→ AB Rutenfest.

Die Klasse wird stochastisch untersucht.
Ereignisse:
S: Schwindelgefühle $\overline{S}$: Keine Schwindelgefühle
W: weiblich $\overline{W}$: nicht weiblich



Definition: A und B seien zwei Ereignisse.
$P_A(B)$ heißt die bedingte Wahrscheinlichkeit von B unter A, d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass B eintritt, wenn bekannt ist, dass A schon eingetreten ist.

Allgemein gilt (1. Pfadregel umgeformt):

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Frage:
Man trifft einen männlichen Schüler, wir groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er Schwindelgefühle hat.
Gesucht: $P_{\overline{W}}(S) = \frac{P(\overline{W} \cap S)}{P(\overline{W})}$
Durch Abzählen der Klasse.

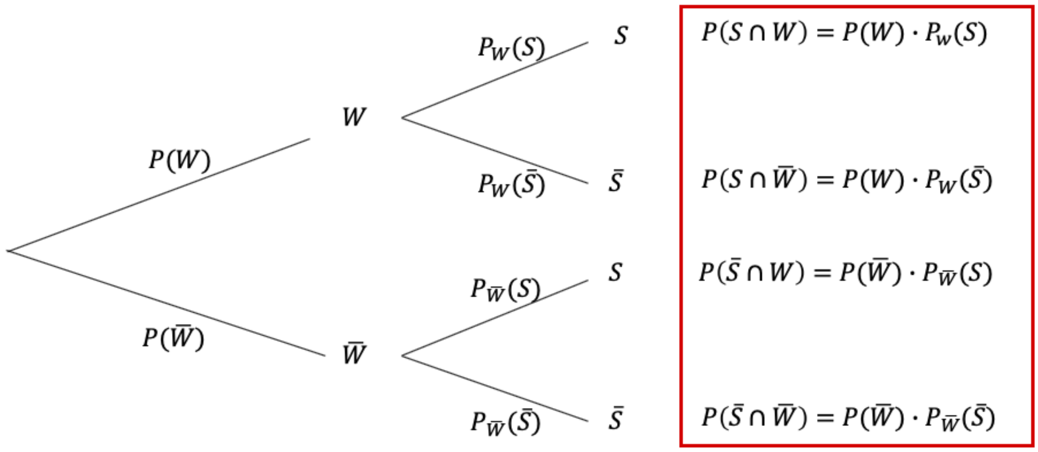
Was ist, wenn man nicht abzählen kann? → Vierfeldertafel

Vierfeldertafel:

	S: Schwindelgefühle	**$\bar{S}$: keine Schwindelgefühle**	
W: weiblich	$P(S \cap W)$	$P(\bar{S} \cap W)$	$P(W) = \cdots.$
$\overline{W}$: nicht weiblich	$P(S \cap \overline{W})$	$P(\bar{S} \cap \overline{W})$	$P(\overline{W}) = \cdots.$
	$P(S)$=....	$P(\bar{S})$=....	1

Wo sehe ich hier $P_{\overline{W}}(S)$? Nirgends! Achtung: In der Vier-Felder-Tafel stehen keine bedingten Wahrscheinlichkeiten, aber man kann sie damit berechnen.
Beispiel: (Sucht euch ein Beispiel aus:)
Berechne: $P_W(\overline{S}) = \frac{P(W \cap \overline{S})}{P(W)}$

Wir können jetzt auch das Baumdiagramm umdrehen:

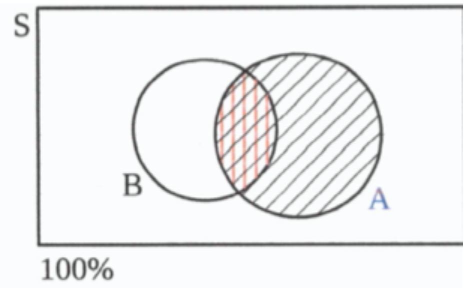


Anderer Rechenweg, gleiches Ergebnis!

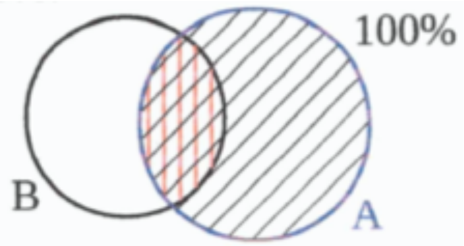
$$P(W) \cdot P_W(S) = P(S \cap W) = P(S) \cdot P_S(W)$$

Anschauliche Bedeutung: Was bedeutet

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$



$P_A(B)$ bedeutet: Ich weiß, dass ich mich in A befinde. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann ich dann auch in B? → A sind für mich jetzt 100%.



Der Übergang von $P(B)$ zur bedingten Wahrscheinlichkeit $P_A(B)$ entspricht dem Wechsel der Grundmenge.
Wie viel Prozent von A sind durch $P(A \cap B)$ überdeckt?

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P_A(B)$$

→ neue Grundmenge
Übungen Übungsblatt, Buch S. 256 Nr 2,3,4,5

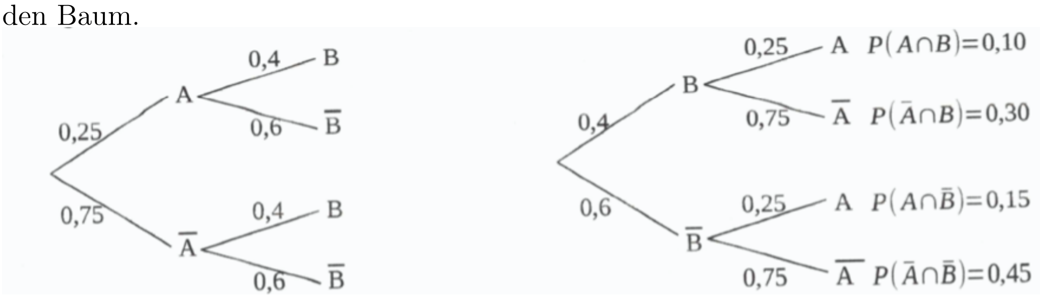
5.9 Unabhängigkeit

Experiment Ein 20-seitiger Würfel (1,2,3,...,20) wird zweimal geworfen.

A: Das Ergebnis des 1. Wurfs ist größer als 15, d.h. $A = \{16; 17; 18; 19; 20\} \rightarrow P(A) = \frac{5}{20} = 0,25$

B: Das Ergebnis des 2. Wurfs ist eine Primzahl, $B = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19\} \rightarrow P(B) = \frac{8}{20} = 0,4$

Aufgabe: Zeichne beide Bäume und drehe anschließend Wurf 1 und Wurf 2 und zeichne ebenfalls den Baum.



Der Baum kann ohne weiteres gedreht werden, da die Ereignisse A und B nicht miteinander zu tun haben, man sagt A und B sind stochastisch unabhängig.

Definition: Zwei Ereignisse A und B heißen (stochastisch) unabhängig, wenn gilt:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Dazu äquivalent sind die Aussagen $P_A(B) = P(B)$ bzw. $P_B(A) = P(A)$, wobei eine aus der anderen folgt, d.h. für die Unabhängigkeit zweier Ereignisse muss nur eine dieser drei Formeln nachgewisen werden.

Begründung: Es gelte $P_A(B) = P(B)$. Dann ist

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P_A(B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$$

Sind zwei Vorgänge in der Realität unabhängig voneinander, so kann man davon ausgehen, dass sie auch stochastisch unabhängig sind.
Wie unterscheidet man die Unabhängigkeit? → Mit Aufgabenblatt Nr 2
Entweder die bedingten Wahrscheinlichkeiten berechnen oder $P(A \cap B)$ sowie $P(A) \cdot P(B)$ berechnen. Ergebnisse gleich? Unabhängig!