

於有限時域差分法模擬時使用解析場傳播
技術實現任意平面波作為有損半空間中之
入射源條件

Using the Analytical Field-Propagation Technique
to Implement Arbitrary Plane Waves as Incident
Source Conditions for the Lossy Half-Space
In FDTD Simulation

研 究 生：王煥之

Student : Huan-Chih Wang

指導教授：林俊華 博士

Advisor : Dr. Jiun-Hwa Lin

國 立 臺 灣 海 洋 大 學
電 機 工 程 學 系
碩 士 論 文

A Thesis

Submitted to the Department of Electrical Engineering
College of Electrical Engineering and Computer Science
National Taiwan Ocean University
in partial fulfillment of the requirements
for the Degree of
Master of Science
in

Electrical Engineering
January 2014
Keelung, Taiwan, Republic of China

中華民國 103 年 1 月

摘要

時域有限差分法(FDTD)，是一種常用來解析電磁場分布的數值分析方法，經常被使用作模擬電磁輻射或電磁散射問題，其模型基礎就是電動力學中最基本的馬克斯威爾方程式 (Maxwell's equation)。可以計算多種不同的結構在模擬空間所可能造成的影響，若同時搭配吸收邊界條件，可以精準的模擬有限大小空間中的電磁現象。

本實驗室所開發的程式空間架構方面以平面波正向入射自由空間和斜向入射半空間為主。但現實生活環境中，每一種物質幾乎都是有損的，也就是這些物質的組成含有金屬的成份，所以本篇論文所探討的使用解析場傳播技術實現任意平面波作為有損半空間中之入射源條件，就是當反射係數與透射係數公式在有損介質情況下，不適用所採取的作法。

反射波方面不同頻率的平面波反射方向都相同，所以不同點的電磁場可以採用線性內差的方法獲得，透射波則因為在不同頻率有不同的透射角度，所以不能採用相同的作法，而是採用解析場傳播技術實現任意平面波作為有損半空間中之入射源條件的作法，除了把頻域時微分的高斯脈波乘上頻域時的透射係數之外，還需乘上頻域時的相位常數項和頻域時平面波從自由空間到接觸介質層的延遲時間再乘上頻域時的衰減係數項，之後再把它反快速傅立葉轉換(iFFT)到時域。最後為了加快模擬速度，而採用 DFT 頻譜累加到一半的方法，其模擬出來的結果都和 iFFT 吻合而且也都符合它的物理現象。

關鍵詞：時域有限差分法(FDTD)、平面波、半空間、解析場傳播技術。

Abstract

The Finite Difference Time-Domain(FDTD) method, often used as a calculating method of simulating electromagnetic radiations or scattering problems. The model foundation is Maxwell's equation which is the most basic equation in electric-dynamic . It is also capable of simulating the effect of various structures in the real environment, surrounded with the absorbing boundary condition like PML(Perfectly Matched Layer), so that we can simulate the effect of electromagnetic wave in a limited space accurately.

In our developed program, we mainly use plane wave normally incident into a free space structure and plane wave oblique incident into a half space structure. But in reality, every medium are all lossy that means these medium consists of metal substance .So the purpose of using the analytical field propagation technique to implement arbitrary plane wave as incidence source condition for the lossy half space in the program that we developed is when the reflection coefficient and transmission coefficient are not suitable to use in the case of lossy substance that the method we adopt.

The plane wave reflective direction are all the same in different frequency for the reflective wave, so the electric field and the magnetic field at different point can be obtain by interpolation method but as for transmission wave we can't use the same method, because it has different transmitted angle in different frequency. The method we use is the analytical field propagation technique to implement arbitrary plane wave as incidence source condition for the lossy half space, except for multiply frequency domain differential Gauss pulse to frequency domain transmission coefficient yet need to multiply frequency domain phase constant item and frequency domain incident plane wave delay time from free space until it contact the medium layer and the frequency domain attenuation constant item. After that do the Inverse Fast Fourier Transform (iFFT) to time domain. At last we wanted to accelerate the simulation speed so we use DFT spectrum accumulation to half method, it's simulation result are all fit well with iFFT method and also fit with it's physics phenomenon.

Keywords : FDTD, plane wave, half space, analytical field propagation technique .

目次

摘要.....	I
Abstract.....	II
目次.....	III
圖目次.....	V
表目次.....	VIII
第 1 章 序論.....	1
1.1 研究動機與目的.....	1
1.2 文獻回顧.....	1
1.3 章節概要.....	2
第 2 章 時域有限差分法相關理論分析.....	3
2.1 有限差分法.....	3
2.1.1 有限差分的結構.....	3
2.2 時域有限差分法.....	5
2.2.1 簡介.....	5
2.2.2 時域有限差分法.....	5
2.2.3 收斂、穩定、準確度.....	9
2.3 平面波.....	10
2.4 高斯脈波.....	11
2.5 總場和散色場交界處的更新.....	12
第 3 章 斜向平面波入射於有損半空間的理論及作法.....	17
3.1 任意平面波作為有損半空間中之入射源.....	17
3.2 反射係數(Reflection coefficient).....	20
3.3 反射波的作法.....	23
3.3.1 正向入射.....	28
3.3.1.1 $\epsilon_r=1$ $\sigma_g=0$	28
3.3.1.2 $\epsilon_r=4$ $\sigma_g=0$	30
3.3.2 斜向入射.....	32
3.3.2.1 $\epsilon_r=1$ $\sigma_g=0$	32
3.3.2.2 $\epsilon_r=4$ $\sigma_g=0$	34
3.4 透射係數(Transmission coefficient).....	36
3.5 透射波的作法.....	38
3.5.1 iFFT.....	38
3.5.1.1 正向入射.....	39
3.5.1.1.1 $\epsilon_r=1$ $\sigma_g=0$	39
3.5.1.1.2 $\epsilon_r=4$ $\sigma_g=0$	40
3.5.1.2 斜向入射.....	41
3.5.1.2.1 $\epsilon_r=1$ $\sigma_g=0$	41

3.5.1.2.2	$\varepsilon_r = 4$ $\sigma_g = 0$	42
3.5.2	DFT 頻譜累加到一半	43
第 4 章	模擬結果討論	46
4.1	反射係數與透射係數	46
4.2	不同導電系數的反射波	48
4.2.1	正向入射	48
4.2.2	斜向入射	49
4.3	不同導電系數的透射波	50
4.3.1	正向入射	50
4.3.2	斜向入射	53
4.4	入射波與反射波的延遲	55
4.5	DFT 頻譜累加到一半和 iFFT 比較	60
4.5.1	模擬時間比較	62
4.6	不同深度的反射波與透射波比較	63
4.6.1	$\varepsilon_r = 4$ $\sigma_g = 0$	63
4.6.2	$\varepsilon_r = 4$ $\sigma_g = 0.1$	65
4.6.3	$\varepsilon_r = 4$ $\sigma_g = 1$	67
4.6.4	$\varepsilon_r = 4$ $\sigma_g = 2$	69
4.6.5	$\varepsilon_r = 4$ $\sigma_g = 4$	71
4.7	不同脈波寬度的反射波與透射波比較	73
第 5 章	結論	76
參考文獻	77

圖目次

圖 1 前差分近似.....	3
圖 2 後差分近似法.....	4
圖 3 中間差分近似法.....	4
圖 4 三維 FDTD 單位網格電磁場配置.....	7
圖 5 E_z 電場與周圍磁場.....	8
圖 6 磁場與周圍電場配置圖.....	9
圖 7 高斯脈衝(a)時域波形 (b)頻譜.....	11
圖 8 總場和散色場交界處示意圖.....	12
圖 9 全場與散射場交界處 E_z 示意圖.....	13
圖 10 全場與散射場交界處 H_z 示意圖.....	15
圖 11 高斯脈波微分.....	18
圖 12 高斯脈波經 FFT 轉換的實部.....	18
圖 13 高斯脈波經 FFT 轉換的虛部.....	19
圖 14 高斯脈波經 FFT 轉換後的大小.....	19
圖 15 高斯脈波頻譜.....	20
圖 16 TM 極化波示意圖.....	21
圖 17 頻域的反射係數實部.....	23
圖 18 頻域的反射係數虛部.....	23
圖 19 頻域高斯脈波微分乘上頻域反射係數再反複立葉的反射波.....	24
圖 20 無損半空間中入射波與反射、透射波.....	25
圖 21 有損半空間反射波的示意圖.....	26
圖 22 線性內差示意圖.....	27
圖 23 反射波線性內差示意圖.....	27
圖 24 電場全場在自由空間公式和線性內差比較.....	28
圖 25 磁場全場在自由空間公式和線性內差比較.....	28
圖 26 電場在自由空間反射波公式和線性內差比較.....	29
圖 27 磁場在自由空間反射波公式和線性內差比較.....	29
圖 28 電場全場在介質半空間公式和線性內差比較.....	30
圖 29 磁場全場在介質半空間公式和線性內差比較.....	30
圖 30 電場在介質半空間反射波公式和線性內差比較.....	31
圖 31 磁場在介質半空間反射波公式和線性內差比較.....	31
圖 32 電場全場在自由空間公式和線性內差比較.....	32
圖 33 磁場全場在自由空間公式和線性內差比較.....	32
圖 34 電場在自由空間反射波公式和線性內差比較.....	33
圖 35 磁場在自由空間反射波公式和線性內差比較.....	33
圖 36 電場全場在介質半空間公式和線性內差比較.....	34
圖 37 磁場全場在介質半空間公式和線性內差比較.....	34
圖 38 電場在介質半空間反射波公式和線性內差比較.....	35
圖 39 磁場在介質半空間反射波公式和線性內差比較.....	35
圖 40 頻域透射係數的實部.....	37

圖 41	頻域透射係數的虛部.....	37
圖 42	有損半空間透射波的示意圖.....	38
圖 43	電場全場在自由空間公式和本論文提出方法比較.....	39
圖 44	磁場全場在自由空間公式和本論文提出方法比較.....	39
圖 45	電場全場在介質半空間公式和本論文提出方法比較.....	40
圖 46	磁場全場在介質半空間公式和本論文提出方法比較.....	40
圖 47	電場全場在自由空間公式和本論文提出方法比較.....	41
圖 48	磁場全場在自由空間公式和本論文提出方法比較.....	41
圖 49	電場全場在介質半空間公式和本論文提出方法比較.....	42
圖 50	磁場全場在介質半空間公式和本論文提出方法比較.....	42
圖 51	θ_i	43
圖 52	α	44
圖 53	β	44
圖 54	頻域的反射係數實部.....	46
圖 55	頻域的透射係數實部.....	47
圖 56	電場反射波在不同導電係數時的曲線.....	48
圖 57	磁場反射波在不同導電係數時的曲線.....	48
圖 58	電場反射波在不同導電係數時的曲線.....	49
圖 59	磁場反射波在不同導電係數時的曲線.....	49
圖 60	電場透射波在不同導電係數時的曲線.....	50
圖 61	(峰頂放大圖)電場透射波在不同導電係數時的曲線.....	51
圖 62	磁場透射波在不同導電係數時的曲線.....	51
圖 63	(峰頂放大圖)磁場透射波在不同導電係數時的曲線.....	52
圖 64	電場透射波在不同導電係數時的曲線.....	53
圖 65	(峰頂放大圖)電場透射波在不同導電係數時的曲線.....	53
圖 66	磁場透射波在不同導電係數時的曲線.....	54
圖 67	(峰頂放大圖)磁場透射波在不同導電係數時的曲線.....	54
圖 68	電場在介質層以上入射波.....	55
圖 69	電場介質層以上反射波.....	56
圖 70	電場在介質層以上入射波波峯放大圖.....	56
圖 71	電場介質層以上反射波波谷放大圖.....	57
圖 72	磁場在介質層以上入射波.....	57
圖 73	磁場介質層以上反射波.....	58
圖 74	三維空間 TM 波入射和反射的示意圖.....	58
圖 75	磁場在介質層以上入射波波峯放大圖.....	59
圖 76	磁場介質層以上反射波波谷放大圖.....	59
圖 77	電場透射場在有損介質層裡.....	60
圖 78	磁場透射場在有損介質層裡.....	61
圖 79	電場反射波在不同高度($\epsilon_r = 4$ $\sigma_g = 0$).....	63
圖 80	電場透射波在不同深度($\epsilon_r = 4$ $\sigma_g = 0$).....	63
圖 81	磁場反射波在不同高度($\epsilon_r = 4$ $\sigma_g = 0$).....	64
圖 82	磁場透射波在不同深度($\epsilon_r = 4$ $\sigma_g = 0$).....	64
圖 83	電場反射波在不同高度($\epsilon_r = 4$ $\sigma_g = 0$.).....	65

圖 84 電場透射波在不同深度($\varepsilon_r = 4$ $\sigma_g = 0$.).....	65
圖 85 磁場反射波在不同高度($\varepsilon_r = 4$ $\sigma_g = 0$.).....	66
圖 86 磁場透射波在不同深度($\varepsilon_r = 4$ $\sigma_g = 0$.).....	66
圖 87 電場反射波在不同高度($\varepsilon_r = 4$ $\sigma_g = 1$).....	67
圖 88 電場透射波在不同深度($\varepsilon_r = 4$ $\sigma_g = 1$).....	67
圖 89 磁場反射波在不同高度($\varepsilon_r = 4$ $\sigma_g = 1$).....	68
圖 90 磁場透射波在不同深度($\varepsilon_r = 4$ $\sigma_g = 1$).....	68
圖 91 電場反射波在不同高度($\varepsilon_r = 4$ $\sigma_g = 2$).....	69
圖 92 電場透射波在不同深度($\varepsilon_r = 4$ $\sigma_g = 2$).....	69
圖 93 磁場反射波在不同高度($\varepsilon_r = 4$ $\sigma_g = 2$).....	70
圖 94 磁場透射波在不同深度($\varepsilon_r = 4$ $\sigma_g = 2$).....	70
圖 95 電場反射波在不同高度($\varepsilon_r = 4$ $\sigma_g = 4$).....	71
圖 96 電場透射波在不同深度($\varepsilon_r = 4$ $\sigma_g = 4$).....	71
圖 97 磁場反射波在不同高度($\varepsilon_r = 4$ $\sigma_g = 4$).....	72
圖 98 磁場透射波在不同深度($\varepsilon_r = 4$ $\sigma_g = 4$).....	72
圖 99 不同脈波寬度倍數電場反射波比較.....	73
圖 100 不同脈波寬度倍數電場透射波比較.....	74
圖 101 不同脈波寬度倍數磁場反射波比較.....	74
圖 102 不同脈波寬度倍數磁場透射波比較.....	75

表目次

表格 1	iFFT 和 DFT 頻譜累加到一半模擬時間比較.....	62
表格 2	斜向入射不同空間大小無損和有損模擬時間比較.....	62

第 1 章 序論

時域有限差分法(Finite-Difference Time-Domain ,FDTD)最早是由 Yee [1]於 1966 年提出，其原理是以馬克斯威爾方程式(Maxwell's equations)中的法拉第定律及安培定理兩種旋度方程式為基礎，將其在時域離散化得到的數值方法，在電磁模擬的應用如今已相當的廣泛。

繼之前學長架構的半空間(half space)以及斜向入射 (oblique incident)的設計，因為考慮到現實生活環境裡，物質材料的組成都不同，大部份都含有金屬的成份，導致平面波入射到介質層時透射波強度衰減，為了觀察平面波經過有損介質後所產生的反射波和透射波，本篇論文便以此為方向，進行研究及程式的修改與建立以符合學長建立的模擬架構，解析場傳播技術實現任意平面波作為有損半空間中之入射源條件的理論及反射係數與透射係數的建立和作法會在三章描述，第四章是模擬結果的討論，第五章將以上所有的理論及其結果做一些整理及總結。

1.1 研究動機與目的

有限時域差分法(Finite-Difference Time Domain method, FDTD)在目前已經是一個廣泛應用的計算電磁場量的計算方法，隨著計算技術，特別是電子計算機技術的發展，FDTD 方法得到了長足的發展。此解析方法只要選定適當的網格大小與時間間隔，便能得到相當精確的結果；而在模擬開放空間時，為了準確模擬開放空間無限大的特性，便使用無反射的吸收邊界(Absorbing Boundary Condition, ABC)搭配有限時域差分法進行模擬。但因為整個模擬架構的解析空間必須全部包含於吸收邊界內，因此解析空間中置放的散射物體必將受到可計算網格的限制，且切割出來的網格數量也會受到個人電腦記憶體與計算時間的影響而有所限制。

本實驗室已發展的完美匹配層吸收邊界所建立的 FDTD 解析空間，是以正向平面波入射自由空間(free space)和斜向入射介質半空間為主，有鑑於在現實中的實際情況，可能會出現有損介質，本實驗室決定以此為方向開始修改及建立程式，以期更符合現實中有可能會出現的情況及條件。

1.2 文獻回顧

◎1966 年，Yee 提出將馬克斯威爾方程組差分離散化，搭配電磁場點與時間軸交互更新運算，將此運用到計算空間中電磁場的近似值，同時也可處理電磁脈波的入射及散射問題。

◎於 1975 年，Taflove 等人使用時域有限差分法在非均勻介質中，探討正弦波入射時的時域諧波場電磁散射，以及數值穩定條件。

◎於 1975 年，Taflove 提出二維和三維入射場的計算方式，並使用入射場做為總場和散射場交界處的更新。

◎於 1975 年，Taflove 提出在全場和散色場交接處更先進的散射補償技術，做為入射波源條件。

◎於 1992 年，James G. Maloney and Glenn S. Smith 把表面阻抗觀念引入(FDTD)裡，有損介質半空間可以被表面阻抗邊界條件(SIBC)取代，以減少解空間和計算時間。

◎1996 年，Yee 提出在等向性的介質裡，馬克斯威爾方程式初始邊界質問題的數值解，只要選定一個合適的場點，有線差分方程式的集合可以應用包含在完美導體表面的邊界條件上。

◎1999 年，由林振華編譯，電磁場與天線分析(使用有限時域差分法)。介紹 FDTD 公式推導、激發源的選取及天線模擬等。

◎於 2004 年，John B. Schneider 提出幾乎完美的總場與散色場邊界，如果入射場傳遞和 FDTD 格點是成一直線和 FDTD 格點匹配，一個完美的 TFSF 實行可以藉由一維輔助 FDTD 模擬，但對於沒和 FDTD 格點匹配的，齊性平面波傳遞要嚴格的被量化，不同於連續的世界，磁場電場和波數向量沒有建立一個相互正交的集合，群速也通常會被考慮進來。

◎2008 年，Ilker R. Çapoğlu and Glenn S. Smith , FDTD 分析 TF/SF 平面波源在多層介質裡，TF/SF 平面波源是為了一般的多層介質層發展的，在採用 FDTD 分析時。

◎2012 年，Penghui Chen and Xiaojian Xu,使用 FDTD 分析斜向入射平面波於多層的有損色散介質，為了滿足多層的有損色散介質，因此一個封閉的 TFSF 邊界便形成，入射波直接由輔助模擬獲得不用採線性內差。

◎於 2013 年，Takuji Arima,在遠場的暴露下，當電場和人的身高平行時，超高頻的情況下可以觀察到整個身體的共振現象，這個現象的感應電流可以在人體裡被觀察到。為了估計感應電流的大小影響在有損平坦的地球上，產生感應電流和地球接觸的物體，可以被 FDTD 方法所分析，平坦地球則用表面阻抗邊界條件取代。

◎M. Jaur!guy , P. Borderies,使用一個效率高的初始設定方法於 FDTD 計算平面波散色，它的入射場和全場一樣是由 Yee's 的演算法所更新，消除每回的誤差值和避免入射脈波漏出內單胞來。

1.3 章節概要

本篇論文分為五個章節，第一章是研究動機與目的、論文回顧與章節概要，第二章是有限時域差分法的相關理論與介紹，包含有限差分形式、馬克斯威爾方程式離散差分化及散色場和全場交界處的更新等等，第三章是斜向平面波入射於有損半空間時，所採取的作法以及理論，第四章是模擬結果與討論，最後第五章是結論。

第 2 章 時域有限差分法相關理論分析

在此章節中，將介紹本實驗室已經建構好的解析空間所使用到的基本理論，也就是以 Maxwell's equations 為基礎方程式，配置在由 Yee [1]所提出的離散方法所建構的解析空間。解析空間的組成包含模擬電磁波在自由空間中行進的區域及包圍此區域的無反射吸收邊界，以及在解析空間中穩定傳遞的入射波源。上述三項解析空間的設定，在此章節會個別詳細介紹。

2.1 有限差分法

2.1.1 有限差分的結構

有限時域差分法是將微分方程經由有限差分法的近似過程得到的，以下會介紹三種有限差分法的定義。

假設有一函數 $f(x)$ 如圖 1，若想近似函數上任一點的一次微分項，即該點的切線分量，則可以用三種方法近似：

- (1)前項差分法(forward-difference formula)
- (2)後項差分法(backward-difference formula)
- (3)中間差分法(central-difference formula)

—前項差分法

$$f'(x_0) \cong \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (1)$$

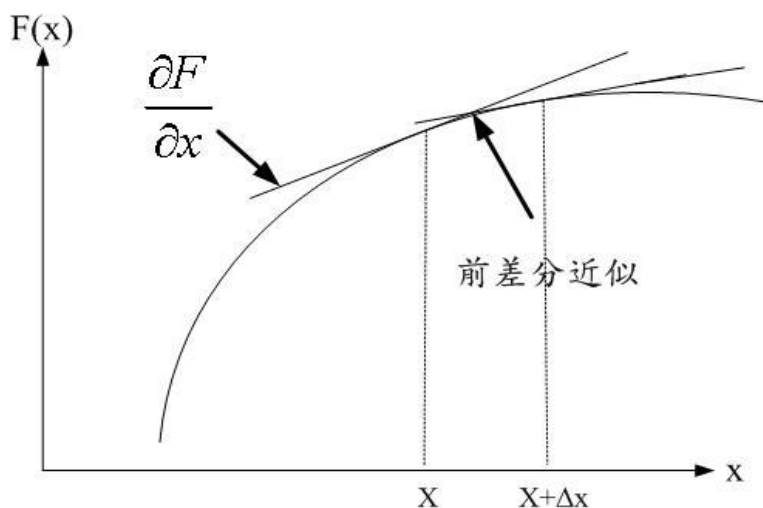


圖 1 前差分近似

—後項差分法

$$f'(x_0) \cong \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} \quad (2)$$

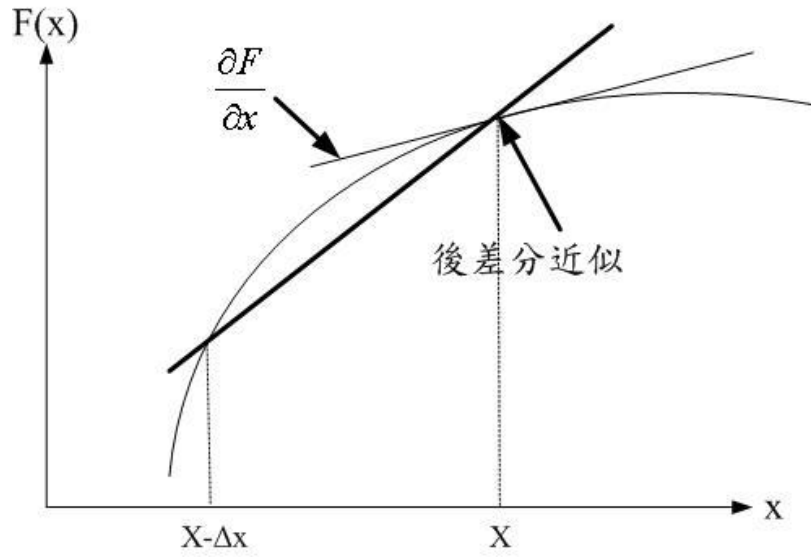


圖 2 後差分近似法

— 中間項差分法

$$f'(x_0) \cong \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (3)$$

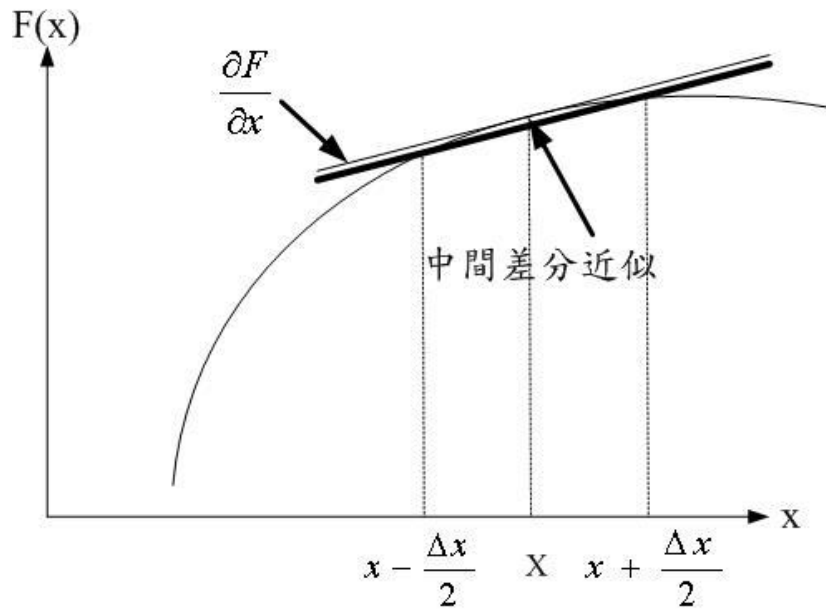


圖 3 中間差分近似法

由於中間差分的精確度為三種差分法之中最好的，故本篇論文的模擬架構採用中間差分的形式。而若將 F 表示為空間中電磁場某一分量，且將其空間及時間座標差分化，則可將其表示如下：

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cong \frac{F(i + \frac{\Delta x}{2}, j, k) - F(i - \frac{\Delta x}{2}, j, k)}{\Delta x} \quad (4)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} \cong \frac{F^{n+\frac{\Delta t}{2}}(i, j, k) - F^{n-\frac{\Delta t}{2}}(i, j, k)}{\Delta t} \quad (5)$$

2.2 時域有限差分法

2.2.1 簡介

Maxwell's equations 有微分與積分兩種形式，能夠完好的表現電磁場在時域及頻域的狀況。而時域有限差分方法（Finite-Difference Time-Domain，FDTD）便是利用差分將微分形式的 Maxwell's curl equations 予以離散化，並以時域的方式來表示。本節會將 Maxwell's equation 推導過程進行描述，並討論其差分後的穩定性與穩定條件。

2.2.2 時域有限差分法

Maxwell's curl equations：

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \\ &= \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma \vec{E} \end{aligned} \quad (7)$$

其中

\vec{E} 是電場強度，單位 V/m； \vec{D} 是電通密度，單位元 C/m²； \vec{H} 是磁場強度，單位 A/m；

\vec{B} 是磁通密度，單位元 Wb/m²； \vec{J} 是電流密度，單位元 A/m²。

具有線性與等向性特徵的介質且均向及非分散性可得：

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (8)$$

其中

ε 是介電係數，單位 F/m； μ 是導磁係數，單位 H/m； σ 是導電係數，單位 S/m。

以直角坐標系作為空間位置的標示，將電場及磁場的旋度方程式針對 x 軸、 y 軸、 z 軸，分解成三個分量，將(6)、(7)展開寫成：

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma E_x \right) \quad (8-a)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y \right) \quad (8-b)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z \right) \quad (8-c)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \quad (8-d)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \quad (8-e)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \quad (8-f)$$

根據 Yee [1] 的標示法，空間上任一點的座標位置表示為：

$$(i, j, k) = (i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z) \quad (9)$$

而空間與時間中之任意函數則表示為：

$$F^n(i, j, k) = F(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) \quad (10)$$

其中 i, j, k, n 為整數， Δt 為時間離散後增加的時間大小， Δx 、 Δy 、 Δz 分別是 x 軸、 y 軸、 z 軸空間離散切割後的單位間隔， $(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z)$ 表示計算空間中離散之座標位置，且由於各方向取的時間一致，所以整個計算空間則便是由這些單位網格組合而成的大矩形。

單位網格中電場與磁場配置如圖 4 所示。每一個電(磁)場分量由四個磁(電)場分量圍繞，互以半個離散空間間隔，交錯分佈在計算空間中。

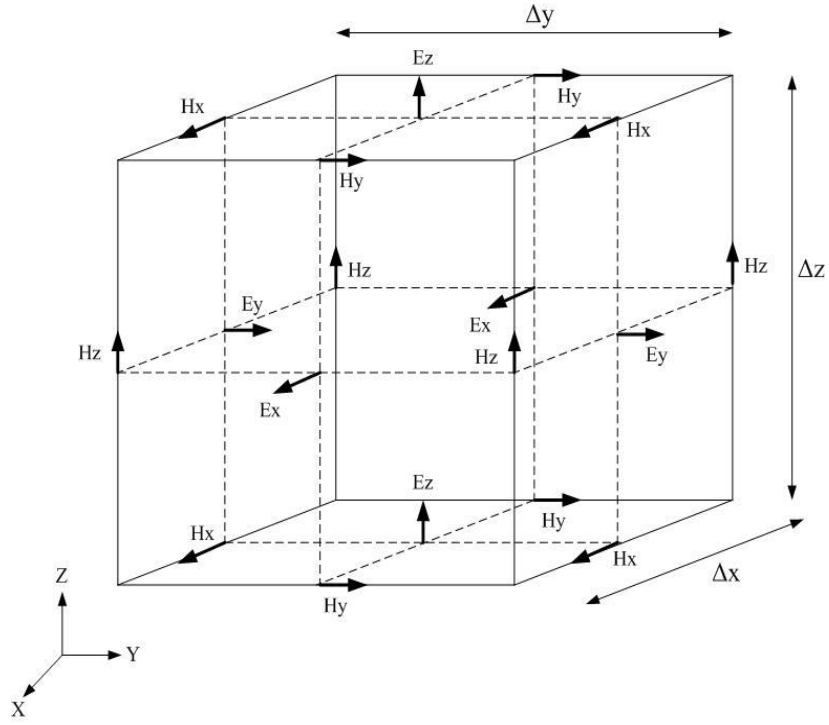


圖 4 三維 FDTD 單位網格電磁場配置

依據 Yee[1]的演算法將中間差分近似應用在(8-a)~(8-c)，則可以得到以下算式：

$$E_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) = M(r) \cdot E_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) + N(r) \cdot \left[\left(\frac{H_z^n(i, j+1, k+\frac{1}{2}) - H_z^n(i, j, k+\frac{1}{2})}{\Delta y} \right) - \left(\frac{H_y^n(i, j+\frac{1}{2}, k+1) - H_y^n(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta z} \right) \right] \quad (11-a)$$

$$E_y^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) = M(r) \cdot E_y^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) + N(r) \cdot \left[\left(\frac{H_x^n(i+\frac{1}{2}, j, k+1) - H_x^n(i+\frac{1}{2}, j, k)}{\Delta z} \right) - \left(\frac{H_z^n(i+1, j, k+\frac{1}{2}) - H_z^n(i, j, k+\frac{1}{2})}{\Delta x} \right) \right] \quad (11-b)$$

$$E_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) = M(r) \cdot E_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) + N(r) \cdot \left[\left(\frac{H_y^n(i+1, j+\frac{1}{2}, k) - H_y^n(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta x} \right) - \left(\frac{H_x^n(i+\frac{1}{2}, j+1, k) - H_x^n(i+\frac{1}{2}, j, k)}{\Delta y} \right) \right] \quad (11-c)$$

其中，

$$M(r) = \frac{1 - \frac{\sigma(r)\Delta t}{2\varepsilon(r)}}{1 + \frac{\sigma(r)\Delta t}{2\varepsilon(r)}}$$

$$N(r) = \frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon(r)}}{1 + \frac{\sigma(r)\Delta t}{2\varepsilon(r)}}$$

若以 E_z 為例，則 r 所對應到的座標則為 $(i+1/2, j+1/2, k)$ ，場量配置圖如圖 5，可以看出旋度公式中求取 E_z 時使用周邊磁場進行更新。

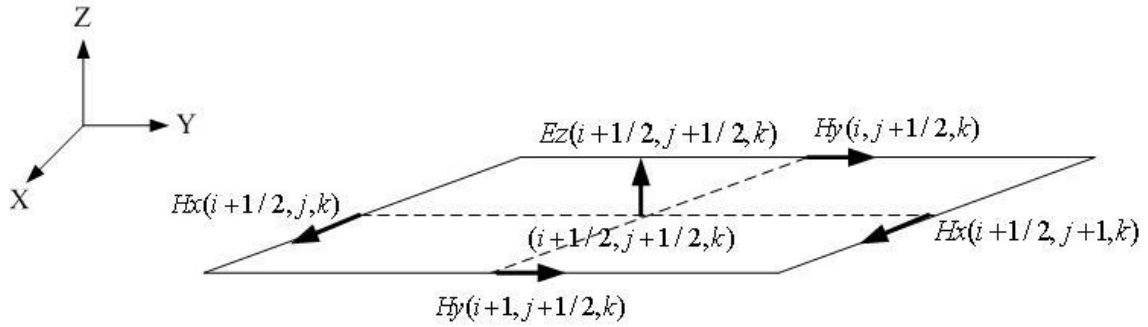


圖 5 E_z 電場與周圍磁場

同理，以 E_x 為例，則 r 所對應到的座標則為 $(i, j+1/2, k+1/2)$ 而 E_y 所對應到的 r 則為 $(i+1/2, j, k+1/2)$ 。

同理，將中間差分近似應用在(2-8-d)~(2-8-f)，則可以得到以下磁場的更新式子：

$$H_x^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j, k) = H_x^n(i+\frac{1}{2}, j, k) - O(r) \cdot [(\frac{E_y^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) - E_y^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k-\frac{1}{2})}{\Delta z}) - (\frac{E_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - E_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k)}{\Delta y})]$$

(11-d)

$$H_y^{n+1}(i, j+\frac{1}{2}, k) = H_y^n(i, j+\frac{1}{2}, k) - O(r) \cdot [(\frac{E_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) - E_z^{n-\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2})}{\Delta x}) - (\frac{E_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) - E_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2})}{\Delta z})]$$

(11-e)

$$H_z^{n+1}(i, j, k + \frac{1}{2}) = H_z^n(i, j, k + \frac{1}{2}) - O(r) \cdot [(\frac{E_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - E_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})}{\Delta y} - (\frac{E_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) - E_y^{n-\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k)}{\Delta x})] \quad (11-f)$$

其中，

$$O(r) = \frac{\Delta t}{\mu(r)} \quad (12)$$

以 H_z 為例，其對應到的 r 為 $(i, j, k + 1/2)$ ，其場量配置圖如圖 2.6 所示：

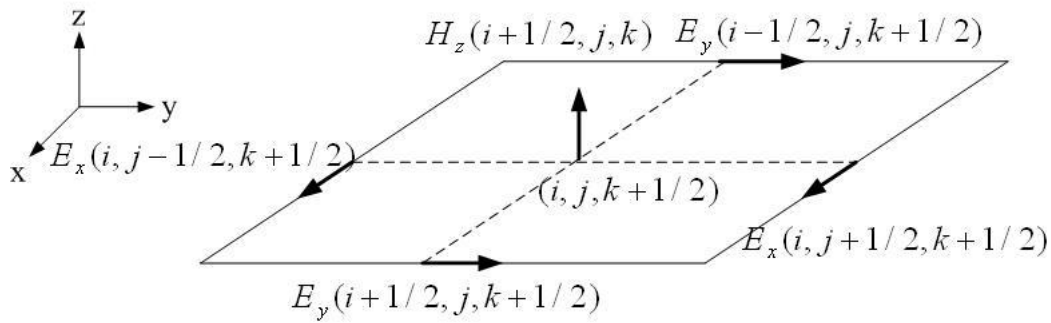


圖 6 磁場與周圍電場配置圖

而由圖 5 與圖 6 可看出模擬空間中電場與磁場在單位晶格內的配置情形，每個電或磁場分量周圍環繞著四組磁或電場分量，以半個離散空間間隔交錯互相組合，而本篇論文將電磁場分量設定為電場位於平面中央，磁場位於邊緣中央。

Yee's algorithm [1]提出了以舊的時間點及周圍的電磁場分量來更新下一個時間點的場值，形同交互迭代一樣的方式來計算離散空間中的電磁場變化。

2.2.3 收斂、穩定、準確度

有限時域差分法應用了差分技巧為基礎，但差分方程解必須是穩定收斂才能進行模擬，且當差分離散化後的誤差趨近於零時，其值會與原方程解相近，而為了確保穩定，模擬空間設定的時間間隔 Δt 與空間間隔 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ ，但必須符合 Courant 穩定條件，即

$$v_{\max} \Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta y}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta z}\right)^2}} \quad (13)$$

v_{\max} 為離散模擬空間中的最大相速，若單胞為正方體時，即 $\Delta x = \Delta y = \Delta z$ ，則(13) 式可改寫為：

$$\frac{v_{\max}\Delta t}{\delta} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (14)$$

其中 n 為空間中的維度，若是以三維空間為例，則電磁波在空間中傳送所需要的最短時間為 $\Delta t \leq \delta / (v_{\max} \sqrt{3})$ ，由此可看出(14)式所隱含的物理意義，也就是時間間隔必須小於或等於電磁波在空間中傳遞的時間，如此才能確定模擬的結果為穩定。

由於 FDTD 方法是用差分作近似，即使介質本身是無色散的，也將導致波的色散。這種現象會造成數值計算的誤差(grid-dispersion error)。為了要降低誤差提高結果的準確度，必需考慮分析的波源的頻帶所對應到的最高頻率的波長 λ_{\min} 對空間離散間隔的要求。當 $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \delta$ 時，選定的條件如下：

$$\delta \leq \frac{\lambda_{\min}}{10} \quad (15)$$

可將誤差降到可以接受的範圍內。

2.3 平面波

對於平面波引入模擬空間中的方法，我們依據 Taflove [5] 中所使用 Total-Field/Scattered-Field 技術

$$\begin{aligned} \bar{E}_{total} &= \bar{E}_{inc} + \bar{E}_{scat} \\ \bar{H}_{total} &= \bar{H}_{inc} + \bar{H}_{scat} \end{aligned} \quad (16)$$

在總場與散射場的交界處形成的虛擬界面引進入射場，以含有 E_y 分量與 H_x 分量的入射場為例，在此虛擬界面上的更新公式

$$\begin{aligned} E_{ys}^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) &= A(m) \cdot E_{ys}^n(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) \\ &+ B(m) \cdot \left[\frac{(H_x^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k+1) - H_{xi}^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k+1)) - H_{xs}^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k)}{\Delta z} \right. \\ &\quad \left. - \frac{H_{zs}^{n+\frac{1}{2}}(i+1, j, k+\frac{1}{2}) - H_{zs}^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k+\frac{1}{2})}{\Delta x} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

對應於 E_{ys} 的位置， $m = (i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2})$ 。

$$\begin{aligned} H_x^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k) &= C(m) \cdot H_x^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k) \\ &- D(m) \cdot \left[\frac{E_z^n(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - E_z^n(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k)}{\Delta y} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(E_{ys}^n(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) + E_{yi}^n(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2})) - E_y^n(i+\frac{1}{2}, j, k-\frac{1}{2})}{\Delta z} \right] \end{aligned} \quad (18)$$

對應於 H_x 的位置， $m = (i+\frac{1}{2}, j, k)$ 。

平面波的波源使用高斯脈波

$$E_y^{inc} = \exp\left[-\left(\frac{t + \frac{r}{c} - t_0}{T}\right)^2\right] \quad (19)$$

$$H_x^{inc} = \frac{1}{\eta_0} \exp\left[-\left(\frac{t + \frac{r}{c} - t_0}{T}\right)^2\right]$$

其中， c 是光速， r 則是關於入射波行進方向與進入模擬空間的參數。

2.4 高斯脈波

選用高斯脈波的原因為，高斯脈波的頻譜較平滑且廣，較適合時域有限差分方法的運算。使用高斯脈波做為平面波，可以得到一個寬頻的響應，方便觀察多種頻率的結果，圖 7 為一高斯脈波圖。式子(19)中 t_0 可控制脈衝波出現的時間， T 則可改變脈衝波的寬度。

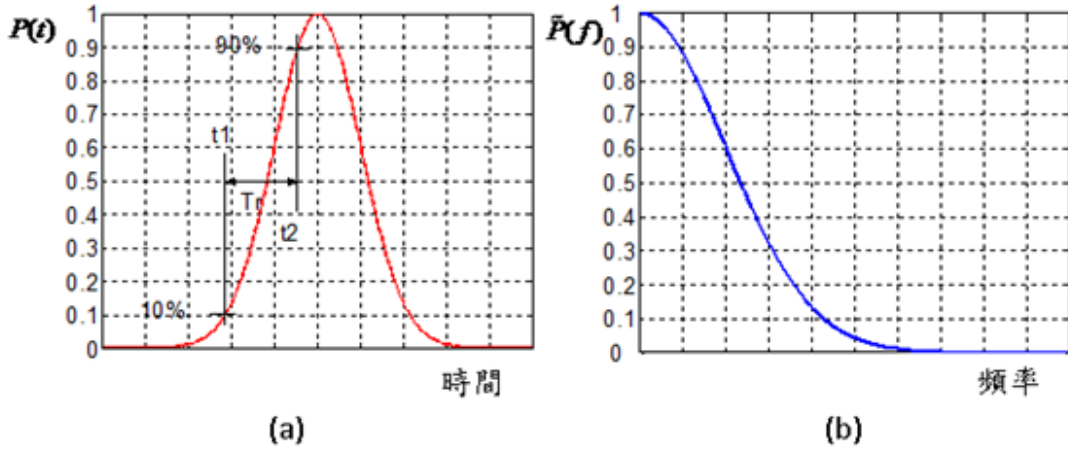


圖 7 高斯脈衝(a)時域波形 (b)頻譜

假設有一個高斯脈衝，假設由 10% 上升到 90% 的時間為 T_r ，脈衝寬度為 T ，脈衝最大值發生的時間在 $t = t_0$ 時，如圖 7(a) 所示。可以由上升時間比例得到(20)(21)：

$$e^{-\frac{t_1^2}{T^2}} = 0.1 \quad (20)$$

$$e^{-\frac{t_2^2}{T^2}} = 0.9 \quad (21)$$

經過化簡

$$t_1 = \sqrt{-\ln(0.1)}T \quad (22)$$

$$t_2 = \sqrt{-\ln(0.9)}T \quad (23)$$

上升時間 T_r 表示為

$$T_r = t_1 - t_2 = (\sqrt{\ln(10)} - \sqrt{\ln(10) - \ln(9)})T = 1.19T \quad (24)$$

F_{3dB} 為脈衝所對應的最高頻率，可得如(25)的關係式：

$$T_r = \frac{K}{F_{3dB}} \quad (25)$$

K 為脈衝圖形的比例常數(constant of proportionality depending on exact pulse shape)，在本論文中使用高斯脈衝的 $K=0.265$ 。

2.5 總場和散色場交界處的更新

在 2.3 節提到，將平面波引入模擬空間，要利用在總場與散射場的交界處所形成的虛擬界面引進入射場，如圖 8 紅色正方形的地方。這裡的入射場是指入射電場和入射磁場而把紅色正方體分為兩半，介質層以上包含入射波與反射波的計算，介質層以下只有透射波的計算，我們就是要用本論文第三章所建立的入射電場和入射磁場來更新總場與散色場的交界處。

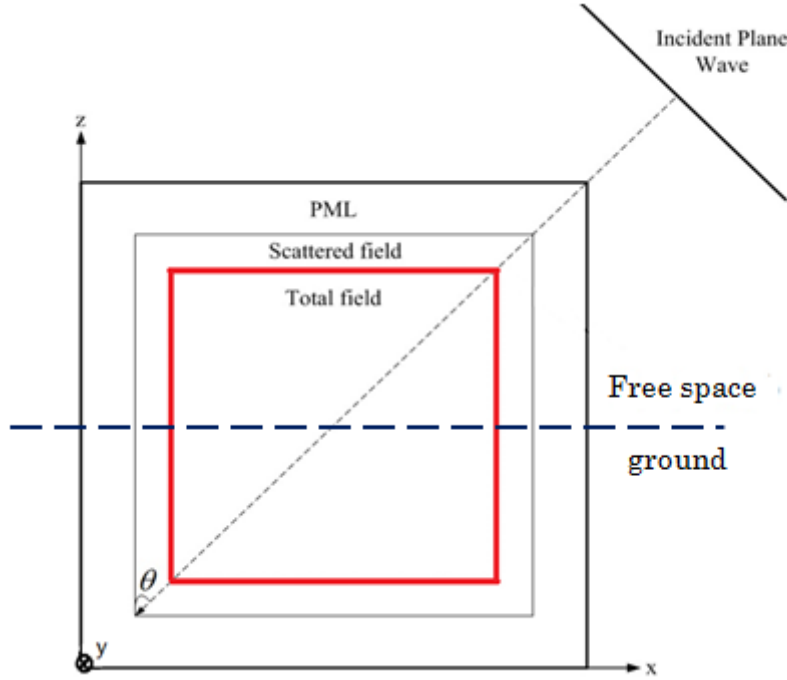


圖 8 總場和散色場交界處示意圖

以含有 E_z 分量與 H_z 分量的入射場為例， E_z 所對應到的 r 座標 $(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k)$ 和 H_z 所對應到的 r 座標 $(i, j, k+\frac{1}{2})$ ，在總場與散射場交界處的更新公式

$$\begin{aligned}
E_{zs}^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) &= A(m) \cdot E_{zs}^n(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) \\
&+ B(m) \cdot \left[\frac{(H_y^{n+\frac{1}{2}}(i+1, j+\frac{1}{2}, k) - H_{yi}^{n+\frac{1}{2}}(i+1, j+\frac{1}{2}, k)) - H_{ys}^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta x} \right. \\
&\quad \left. - \frac{H_{xs}^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+1, k) - H_{xs}^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k)}{\Delta y} \right]
\end{aligned} \tag{26}$$

其中

$$A(m) = \frac{1 - \frac{\sigma(r)\Delta t}{2\varepsilon(r)}}{1 + \frac{\sigma(r)\Delta t}{2\varepsilon(r)}} \quad B(m) = \frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon(r)}}{1 + \frac{\sigma(r)\Delta t}{2\varepsilon(r)}}$$

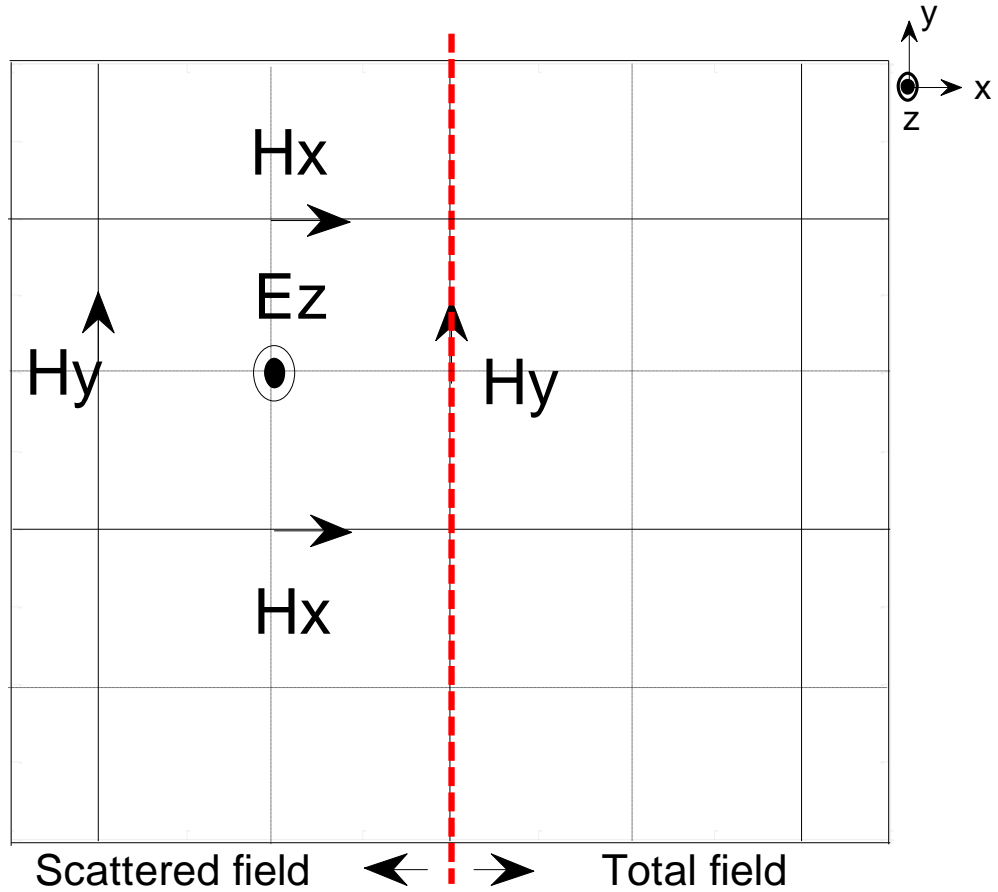


圖 9 全場與散射場交界處 E_z 更新示意圖

由圖 9，可以看出在全場和散色場的交接面上，右邊的 H_y 剛好坐落在其上，

所以公式(26)裡的 $H_y^{n+\frac{1}{2}}(i+1, j, k) - H_{yi}^{n+\frac{1}{2}}(i+1, j, k)$ 表示磁場的全場減掉磁場的入射場也就是散射場從(16)可得知，這樣的做法是為了和左邊坐落在散色場裡的其它分量相呼應。

$$\begin{aligned}
 H_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k + \frac{1}{2}) &= H_z^{n-\frac{1}{2}}(i, j, k + \frac{1}{2}) \\
 +C(m) \cdot &\left[\frac{E_x^n(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - E_x^n(i, j - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})}{\Delta y} \right. \\
 &\left. - \frac{E_y^n(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) - (E_{ys}^n(i - \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) + E_{yi}^n(i - \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}))}{\Delta x} \right]
 \end{aligned} \tag{27}$$

其中 $C(m) = \frac{\Delta t}{\mu(r)}$

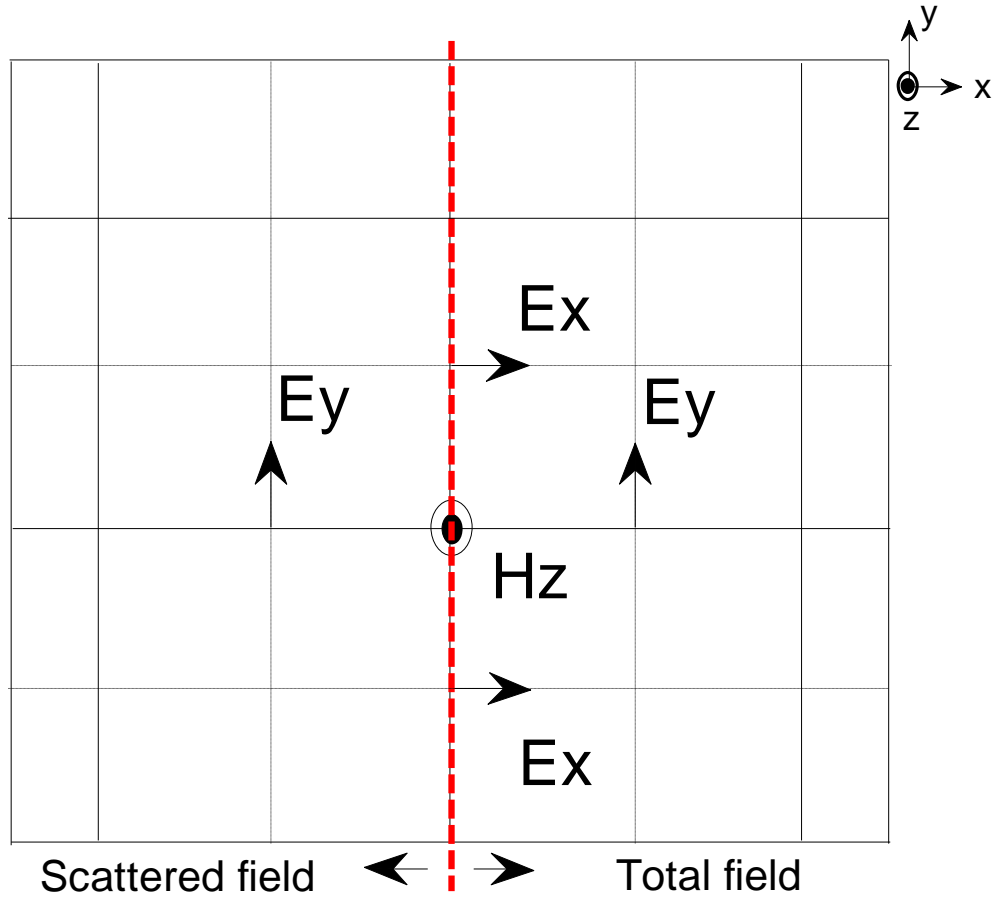


圖 10 全場與散射場交界處 H_z 更新示意圖

由圖 10，可以看出左邊的 E_y 坐落在散色場，所以公式(27)裡 $E_{ys}^n(i-1, j, k) + E_{yt}^n(i-1, j, k)$ 表示散射場加入射場等於全場(16)，也是為了呼應右邊坐落在全場裡的各分量。

我們就是使用這個方法把外面的平面波(微分的高斯脈波)，引入進解析模擬空間中，目的就是要來探討平面波從自由空間入射到有損介質時的反射和透射情況。

透射波方面，有些論文採取(SIBC)法，surface impedance boundary condition 也就是所謂的表面阻抗邊界條件法，用意是來取代有損介質層，它的優點是減少解空間和產生顯著的計算節省時間，但其缺點是無法觀察有損介質裡透射波的變化情形，只能觀察到有損介質層以上反射波的情形，而本論文的目的就是要觀察有損介質層以上和以下反射波和透射波的情形所以沒採用這個方法，而採用所謂的快速傅立葉和反傅立葉轉換。至於在節省計算時間方面，我們在透射波計的算地方，使用了(DFT)離散傅立葉計算，又因其透射角度和衰減係數在不同頻率呈現對稱，而相位常數呈現反對稱，所以我們有可以使其簡化只需計算透射波的一半分量就好。

透射波採用 DFT 累加一半頻譜的模擬結果和採用 iFFT 的模擬結果相符合，但所節省的時間比 iFFT 少了三倍半左右，細節會在第三章時說明。

第 3 章 斜向平面波入射於有損半空間的理論及作法

地球上大部份的物質都有損耗(含有金屬成份)，有鑑於此本實驗室便朝此方向進行研究及修改一些模擬參數。任意角度的平面波在無損耗的半空間中傳播時，因為無損耗，所以不用考慮到導電係數對透射係數和反射係數的影響，但在有損耗的半空間時就要把它考慮進來。也因為多了這項因素，使原本簡單的反射係數和透射係數公式變得更複雜，反射係數和透射係數已不是單一定值，它是會隨著不同的頻率而改變，每點頻率所對應到的值都不一樣，所以原來的做法已經不適用。

因此我們構思了一個方法，首先以在自由空間任意角度中傳播的任意平面波，微分的高斯脈波為入射源，將其作快速傅立葉轉換(FFT)，使其轉到頻域，以便和頻域時的反射係數和透射係數相乘(在時域做折積)，之後再使用反快速傅立葉轉換(iFFT)把它們轉回時域，以得知時域時的反射分量和透射分量，但這只適合反射波，透射波的方面在反快速傅立葉轉換(iFFT)之前還要考慮其它因素。

3.1 任意平面波作為有損半空間中之入射源條件

這裡我們取微分的高斯脈波為入射源，是因為高斯脈波在頻率為零時有直流的成份，所以無法表示平面波從無窮遠處傳來，為了避開此因素，我們把高斯脈波微分，把直流的成份避開掉。

接下來我們取任意平面波，模擬空間大小 $x=136$ 、 $y=136$ 、 $z=50$ ，入射角度 $\theta=30$ 、 $\phi=60$ 、time step=1024、 $z_{\text{ground}}=18$ 、在點(60,60,24)接收到的高斯脈波微分來說明。

圖如下：

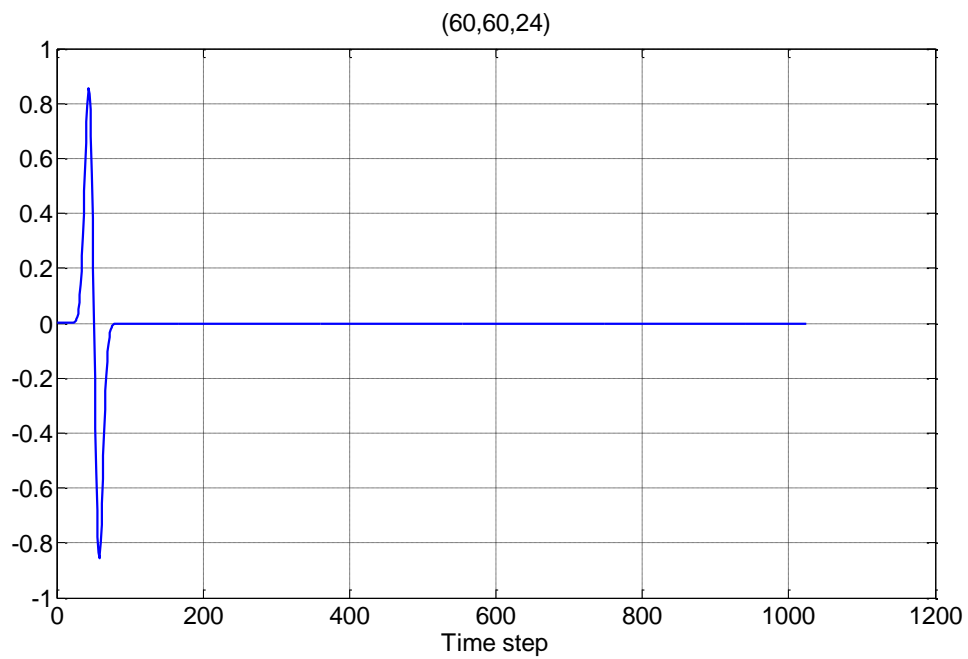


圖 11 高斯脈波微分

高斯脈波經由 FFT 轉換

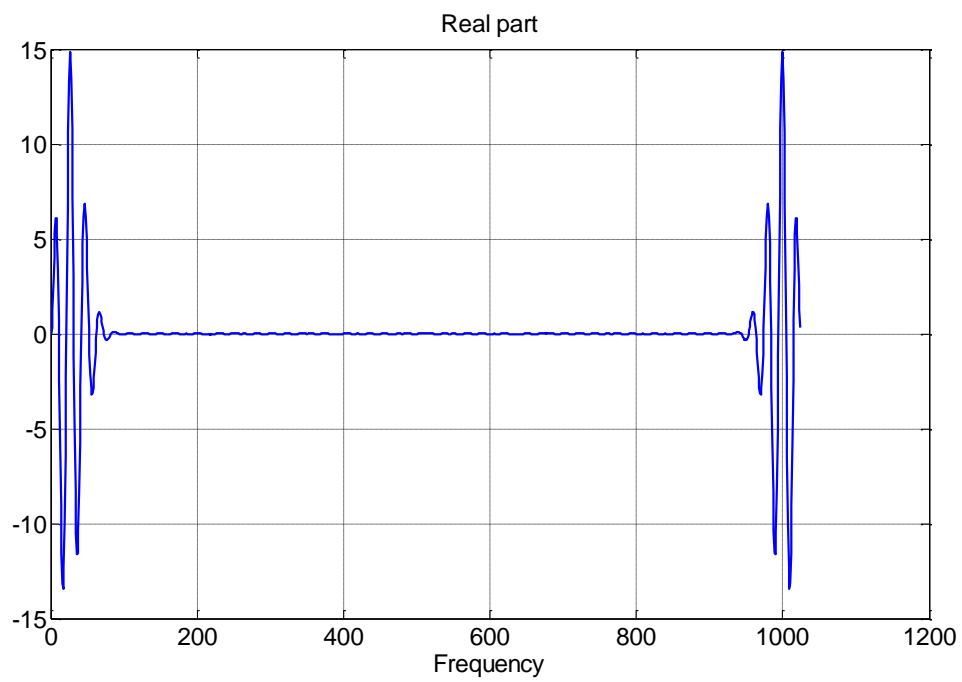


圖 12 高斯脈波經 FFT 轉換的實部

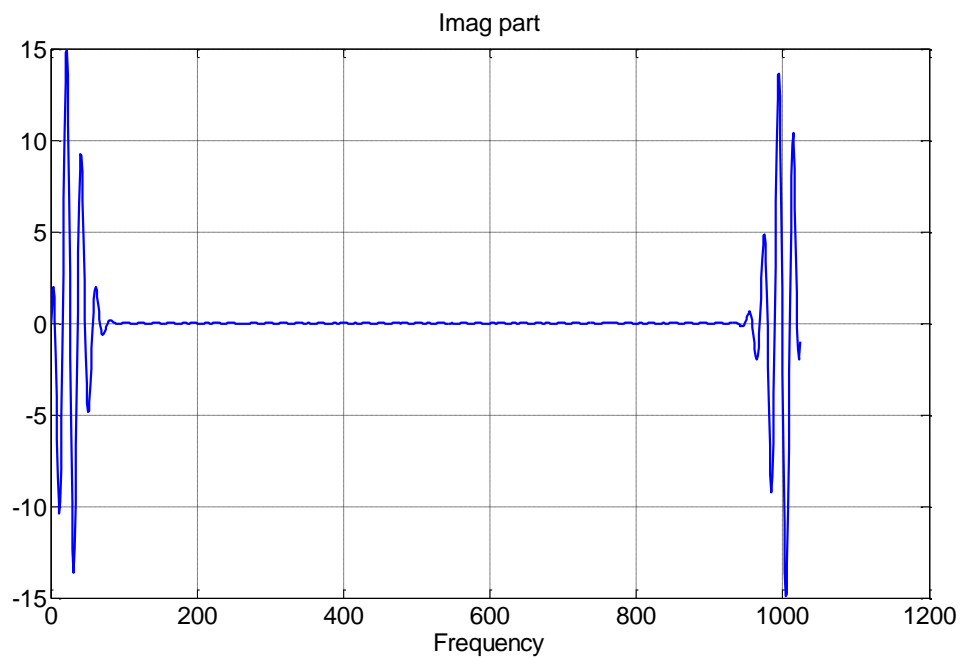


圖 13 高斯脈波經 FFT 轉換的虛部

再取它的大小也就是它的振幅

$$|S(f)| = \sqrt{(\text{實部})^2 + (\text{虛部})^2} \quad (28)$$

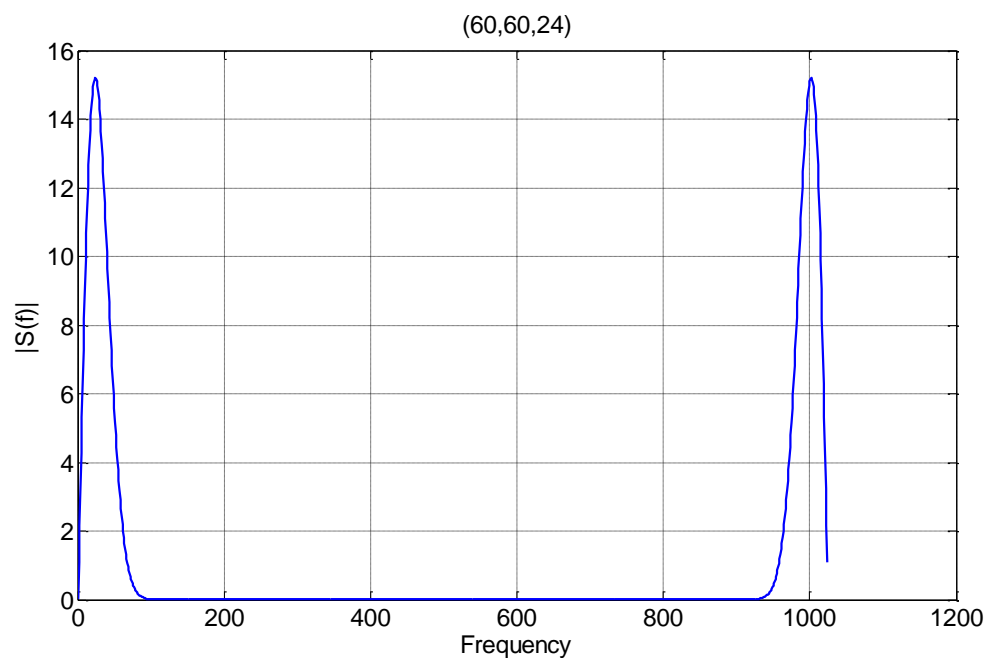


圖 14 高斯脈波經 FFT 轉換後的大小

但事實上高斯脈波微分經傅立葉轉換後，會有正的和負的頻譜，所以真實的圖形應該是把圖 14 的後半第 513 到第 1024 個頻率移到 x 軸原點的左邊來，所以

頻譜就會變成是 $-512\Delta f \sim 512\Delta f$ 。

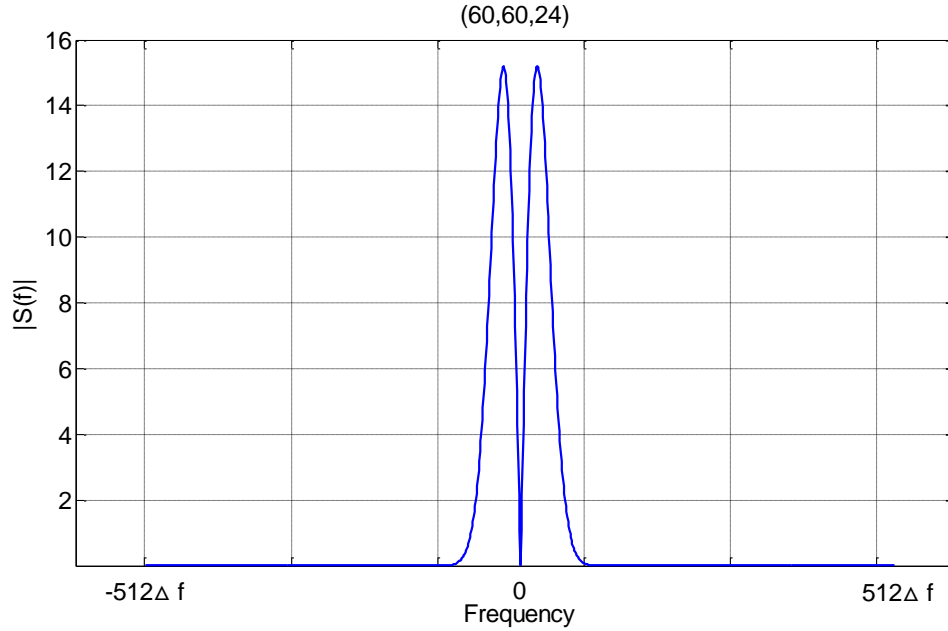


圖 15 微分的高斯脈波頻譜

其中 $\Delta f = \frac{1}{T}$ 、 $T = N \times \Delta t$ 、 $\Delta t = 3.6 \times 10^{-12} s$

T 是微分的高斯脈波週期， N 是 time step， Δt 是時間間隔。

我們就是要採取快速傅立葉轉換這個方法，才能把頻域時的高斯脈波微分乘上頻域時的反射係數和透射係數，然後再做反快速傅立葉轉換以得到在時域時的數值。

3.2 反射係數(Reflection coefficient)

在模擬平面波入射於有損介質時，頻率會對反射係數和透射係數有影響，最主要的原因就是透射角度 θ_t ，因為反射係數和透射係數的公式都有透射角度的因子。也就是說透射角度 θ_t 不在和無損介質時一樣是一個定值，每個頻率都有不同的 θ_t ，所以原先無損的(Snell's Law)斯乃爾定律(29)要採用原來的形式(30)。

$$n_1 \sin(\theta_i) = n_2 \sin(\theta_t) \quad (29)$$

$$\beta_1 \sin(\theta_i) = \beta_2 \sin(\theta_t) \quad (30)$$

其中 β_2 相位常數(phase constant)是取 k_2 波數的實部

$$\text{因為導體的波數(wavenumber of conductor) } k_2 = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \quad (31)$$

，導體的介電常數(permittivity of conductor)

亦稱之為複數介電常數(complex permittivity) $\epsilon_c = \epsilon_0(\epsilon_{r2} + \frac{\sigma_2}{j\omega\epsilon_0})$ (32)

需要把介質層的導電係數考慮進來，所以 β_2 是實數， k_2 是數複數。

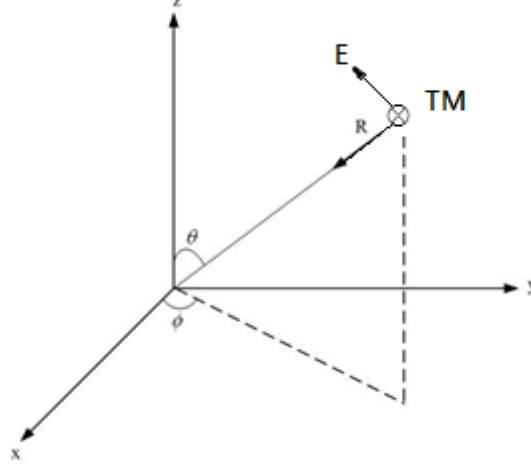


圖 16 TM 極化波示意圖

本篇論文是採平行極化波 TM wave 來做模擬，圖 16。在有損半空間模擬反射波和入射波時，和先前無損時的自由空間不一樣，無損的反射和透射係數公式在這裡都不適用，因為有損時的介電常數 ϵ_c 和無損的介電常數 ϵ 不一樣。所以要考慮到不同頻率所對應到的反射係數和透射係數，也就是每個時間點反射係數和透射係數都不一樣，不會像無損時都是一個定值。

以 TM 波為例：

$$\Gamma_{TM} = \frac{\eta_2 \cos \theta_t - \eta_1 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i} \quad (33)$$

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} \quad \eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \quad (34)$$

其中 μ_2 、 ϵ_2 為在有損材質時的導磁係數和介電係數，有損材質的介電常數如(32)， μ_1 、 ϵ_1 為在自由空間中的導磁係數和介電係數， η_2 為介質層的特性阻抗， η_1 則是自由空間中的本質阻抗，因為在自由空間和有損空間(free space)的導磁係數 μ 一樣， $\mu = \mu_1 = \mu_2$

所以公式可簡化成如下：

$$\Gamma_{TM} = \frac{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_{r1} + \frac{\sigma_1}{j\omega}} \cos \theta_t - \sqrt{\epsilon_0 \epsilon_{r2} + \frac{\sigma_2}{j\omega}} \cos \theta_i}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_{r1} + \frac{\sigma_1}{j\omega}} \cos \theta_t + \sqrt{\epsilon_0 \epsilon_{r2} + \frac{\sigma_2}{j\omega}} \cos \theta_i} \quad (35)$$

其中 $\omega = 2\pi f$

從公式(35)可以明顯的看出反射係數是一個以頻率為變數的函數。

在公式(35)中，要特別留意的是頻率為零的時候，當分母頻率為零時會導致無窮大現象，電腦會顯示不出數值來。所以我們把在頻率為零時的透射角度和反射係數特別拿出來說明。

我們假設 k_1 為在自由空間的波數， k_2 為在有損介質中的波數， $k_1 = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = \beta_1$

$$k_2 = \omega\sqrt{\mu\epsilon_c} = \omega\sqrt{\mu(\epsilon' - j\frac{\sigma}{\omega})} \quad (31) \text{ 當頻率為零時 } \omega \text{ 也為零， } \epsilon' \text{ 就會遠小於 } j\frac{\sigma}{\omega} \text{ 這時}$$

就可以把 ϵ' 忽略掉變成 $\omega\sqrt{\mu(-j\frac{\sigma}{\omega})}$ 再以複數的極式把它寫成 $\omega\sqrt{\mu\frac{\sigma}{\omega}}e^{-j\frac{\pi}{4}}$ 接下來再

取它的實部給相位常數 β_2 ，所以 $\beta_2 = \sqrt{\mu\sigma\omega}\frac{1}{\sqrt{2}}$ 。

$$\text{帶入公式(30)移項得 } \frac{\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sin(\theta_i)}{\sqrt{\mu\sigma\omega}\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sin(\theta_i) \text{ 經化簡 } \frac{\sqrt{\omega\mu\epsilon}\sin(\theta_i)}{\sqrt{\mu\sigma}\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sin(\theta_i) \quad (36)$$

從(36)可以明顯的看出分子為零所以 $\sin(\theta_i)$ 為零， $\theta_i = 0$ 。

從這個推導可以得知當頻率為零時的透射角度為零。接著把 $\theta_i = 0$ 和 $\omega = 0$ 帶入

$$(35) \text{ 式中 } \Gamma_{TM} = \frac{\sqrt{\epsilon_0\epsilon_{r1} + \frac{\sigma_1}{j\omega}} - \sqrt{\epsilon_0\epsilon_{r2} + \frac{\sigma_2}{j\omega}} \cos \theta_i}{\sqrt{\epsilon_0\epsilon_{r1} + \frac{\sigma_1}{j\omega}} + \sqrt{\epsilon_0\epsilon_{r2} + \frac{\sigma_2}{j\omega}} \cos \theta_i} \text{ 也發現分母為零時反射係數變無窮大}$$

的情形，這時 $\epsilon_0\epsilon_1 \ll \frac{\sigma_1}{j\omega}$ 、 $\epsilon_0\epsilon_2 \ll \frac{\sigma_2}{j\omega}$ 再使用複數的極式型態把它寫成

$$\Gamma_{TM} = \frac{\sqrt{\frac{\sigma_1}{\omega}}e^{-j\frac{\pi}{4}} - \sqrt{\frac{\sigma_2}{\omega}}e^{-j\frac{\pi}{4}} \cos \theta_i}{\sqrt{\frac{\sigma_1}{\omega}}e^{-j\frac{\pi}{4}} + \sqrt{\frac{\sigma_2}{\omega}}e^{-j\frac{\pi}{4}} \cos \theta_i} \text{ 因為從無損介質往有損傳播 } \sigma_1 = 0$$

$$\text{所以又可以簡化成 } \Gamma_{TM} = \frac{-\sqrt{\frac{\sigma_2}{\omega}}e^{-j\frac{\pi}{4}} \cos \theta_i}{\sqrt{\frac{\sigma_2}{\omega}}e^{-j\frac{\pi}{4}} \cos \theta_i} = -1$$

這樣一來我們就解決了頻率為零時，電腦無法給值的問題。

以下是頻域時不同導電係數的反射係數實部和虛部圖。

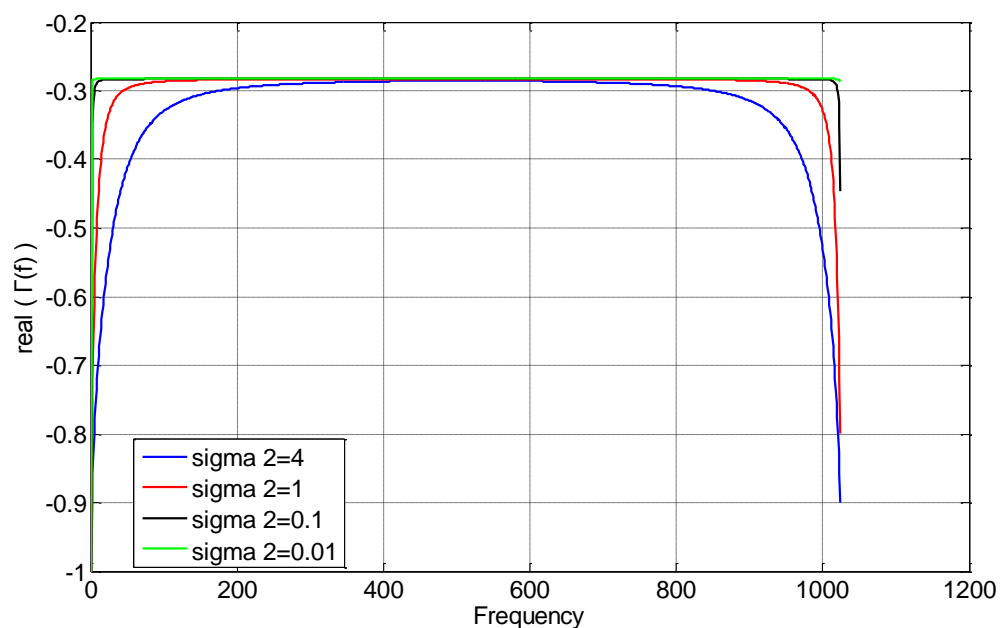


圖 17 頻域的反射係數實部

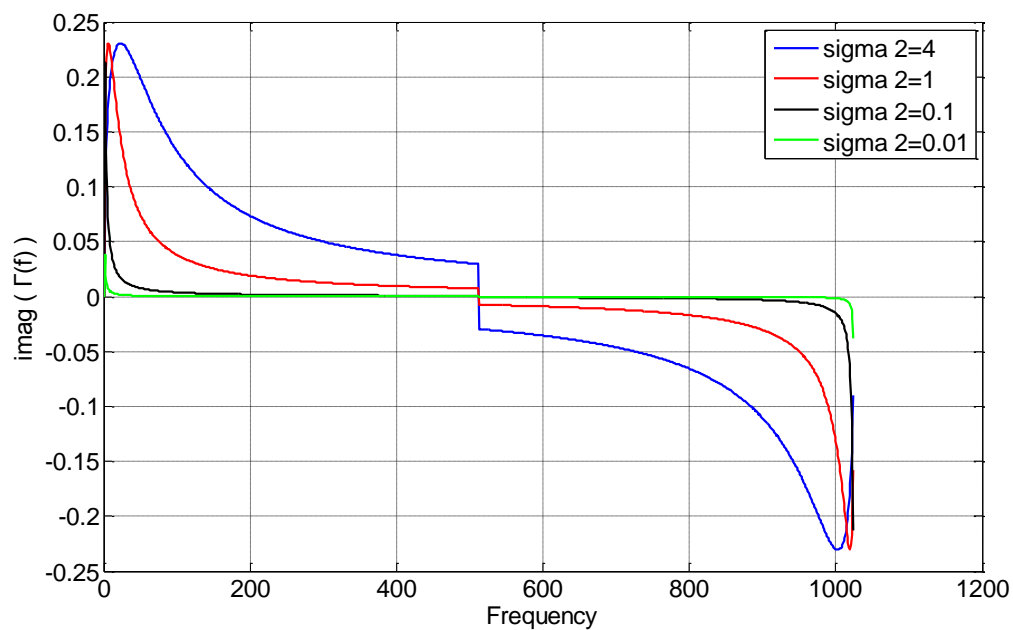


圖 18 頻域的反射係數虛部

3.3 反射波的作法

有了經 FFT 轉換微分的高斯脈波後，就可以把它和頻域時的反射係數和透射

係數相乘，頻域反射分量的部分，直接做 iFFT $f(t) = F^{-1}\{S(f)\Gamma(f)\}$ ，就可以得到時域時的數值。

圖 19 就是把經 FFT 的高斯脈波微分頻譜乘上頻域時的反射係數(複數)，再反複立葉(iFFT)以得到它在時域時的反射波分量值。

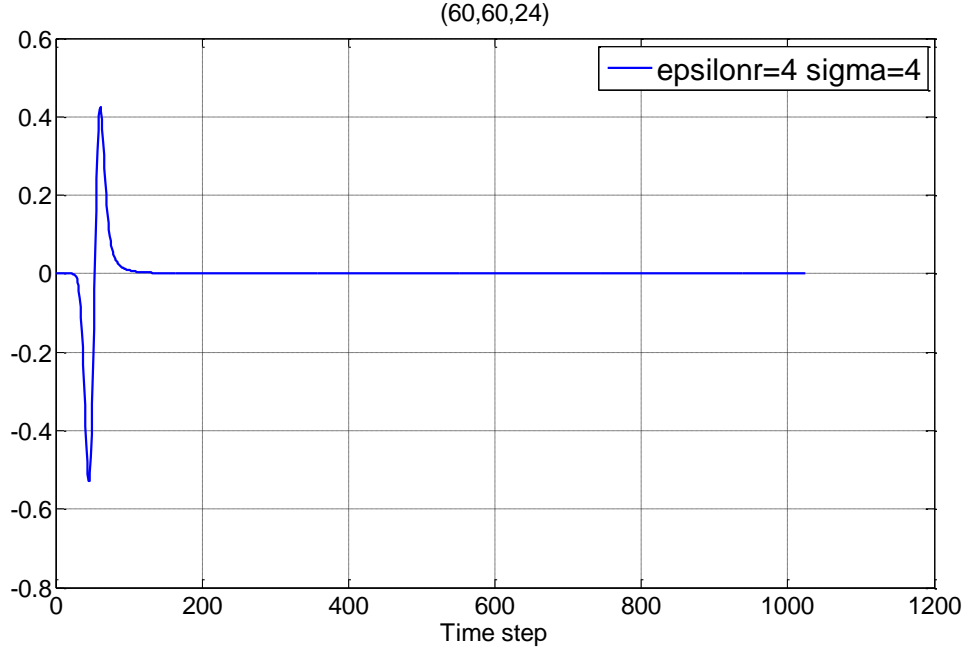


圖 19 頻域高斯脈波微分乘上頻域反射係數再反複立葉的反射波

在斜向平面波入射於無損半空間時，反射和透射係數有固定的公式可以表式 (37)、(38)。

$$E_1 = E_0 \cdot (-2) \cdot \left(\frac{t + \frac{z - z_0}{c} - t_D}{T} \right) \cdot \exp \left[- \left(\frac{t + \frac{z - z_0}{c} - t_D}{T} \right)^2 \right] \\ + \Gamma \cdot E_{r0} \cdot (-2) \cdot \left(\frac{t + \frac{(-1) \cdot |z_G - z_0|}{\cos(\theta_i)} \cdot \frac{1}{c} - \frac{\hat{k}_r \cdot (\bar{r} - \bar{r}_G)}{c} - t_D}{T} \right) \cdot \exp \left[- \left(\frac{t + \frac{(-1) \cdot |z_G - z_0|}{\cos(\theta_i)} \cdot \frac{1}{c} - \frac{\hat{k}_r \cdot (\bar{r} - \bar{r}_G)}{c} - t_D}{T} \right)^2 \right]$$

for $z \geq z_G$

(37)

$$E_2 = \tau \cdot E_{io} \cdot (-2) \cdot \left(\frac{t + \frac{(-1) \cdot |z_G - z_0|}{\cos(\theta_i)} \cdot \frac{1}{c} - \frac{\hat{k}_i \cdot (\bar{r} - \bar{r}_G)}{c_g} - t_0}{T} \right) \cdot \exp \left[- \left(\frac{t + \frac{(-1) \cdot |z_G - z_0|}{\cos(\theta_i)} \cdot \frac{1}{c} - \frac{\hat{k}_i \cdot (\bar{r} - \bar{r}_G)}{c_g} - t_0}{T} \right)^2 \right]$$

for $z < z_G$

(38)

E_{ro} 代表電場反射波投影在各分量的正餘旋值， E_{io} 代表電場透射波投影在各分量的正餘旋值，而圖 20 是無損半空間中入射波與反射及透射波的示意圖。

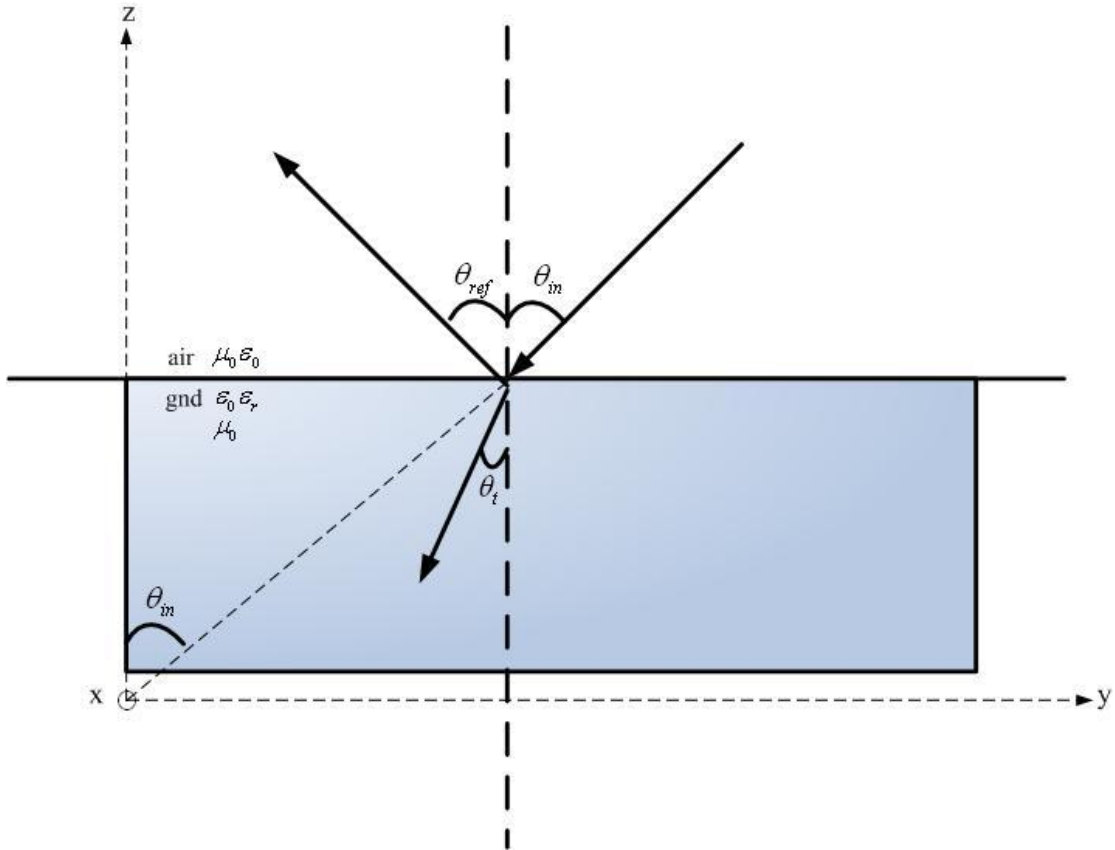


圖 20 無損半空間中入射波與反射、透射波

其中 θ_{in} 與 θ_{ref} 為入射方向與入射平面法向量夾角。(37)、(38) 式中 $\frac{|z_G - z_0|}{\cos(\theta_i) \cdot c}$ 表達的是入射平面波進入自由空間到接觸介質層的時間，經過此段時間反射波才會出現，如此才符合物理意義；而 $\hat{k}_r \cdot (\bar{r} - \bar{r}_G)$ 則是表現反射波的行進方向。

在介質層中相速會變慢，因為介電常數係數不為一的關係，所以在透射波的

地方介質層中光速應改為 $\frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{\epsilon_r}} (m/s)$ 。

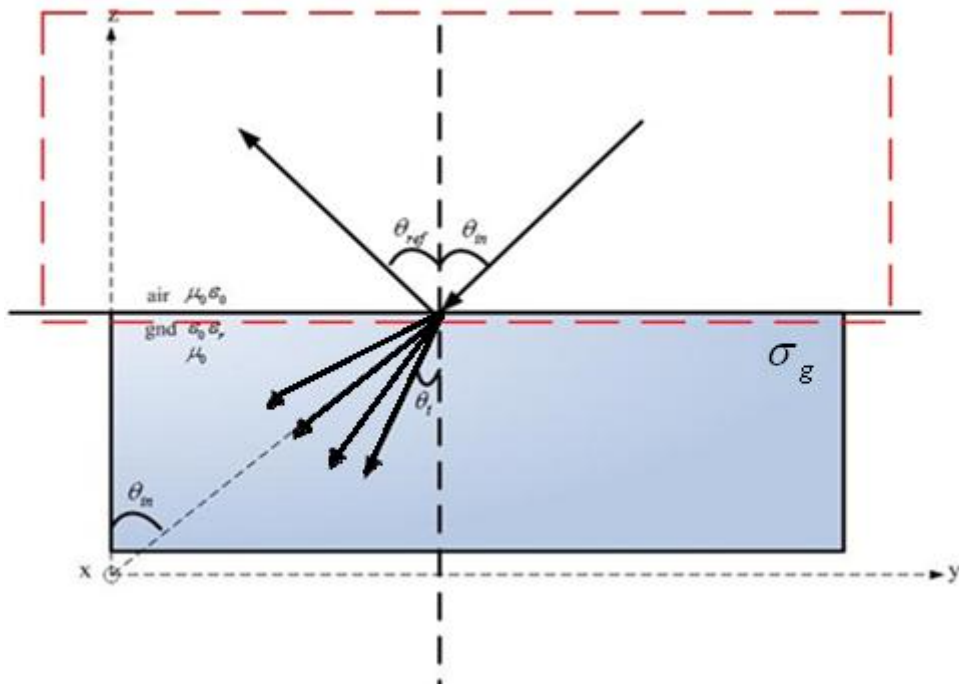


圖 21 有損半空間反射波的示意圖

但在有損介質時，考慮到不同頻率所產生不同的反射係數和透射係數，因此 (37) 式中

$$\Gamma \cdot E_{r0} \cdot (-2) \cdot \left[\frac{t + \frac{(-1) \cdot |z_G - z_0|}{\cos(\theta_i)} \cdot \frac{1}{c} - \frac{\hat{k}_r \cdot (\bar{r} - \bar{r}_G)}{c} - t_D}{T} \right] \cdot \exp \left[- \left(\frac{t + \frac{(-1) \cdot |z_G - z_0|}{\cos(\theta_i)} \cdot \frac{1}{c} - \frac{\hat{k}_r \cdot (\bar{r} - \bar{r}_G)}{c} - t_D}{T} \right)^2 \right]$$

已經不適用，但有剛才求得時域反射分量的數值，於是我們改採線性內差的方法，取前一個時間點的數值和後一個時間點的數值把它們平均，當做這個時間點的數值來取代(37)式中的

$$\Gamma \cdot E_{r0} \cdot (-2) \cdot \left[\frac{t + \frac{(-1) \cdot |z_G - z_0|}{\cos(\theta_i)} \cdot \frac{1}{c} - \frac{\hat{k}_r \cdot (\bar{r} - \bar{r}_G)}{c} - t_D}{T} \right] \cdot \exp \left[- \left(\frac{t + \frac{(-1) \cdot |z_G - z_0|}{\cos(\theta_i)} \cdot \frac{1}{c} - \frac{\hat{k}_r \cdot (\bar{r} - \bar{r}_G)}{c} - t_D}{T} \right)^2 \right]。$$

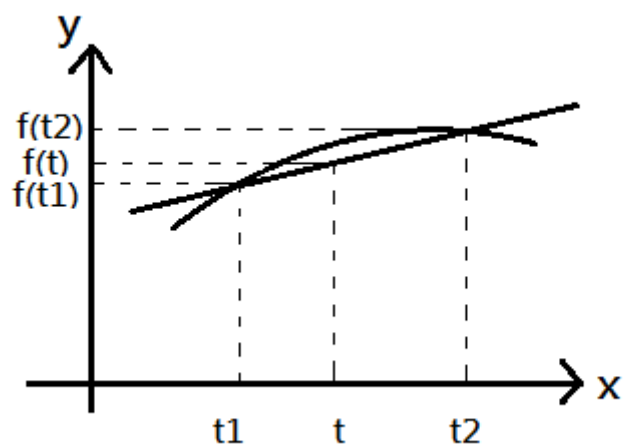


圖 22 線性內差示意圖

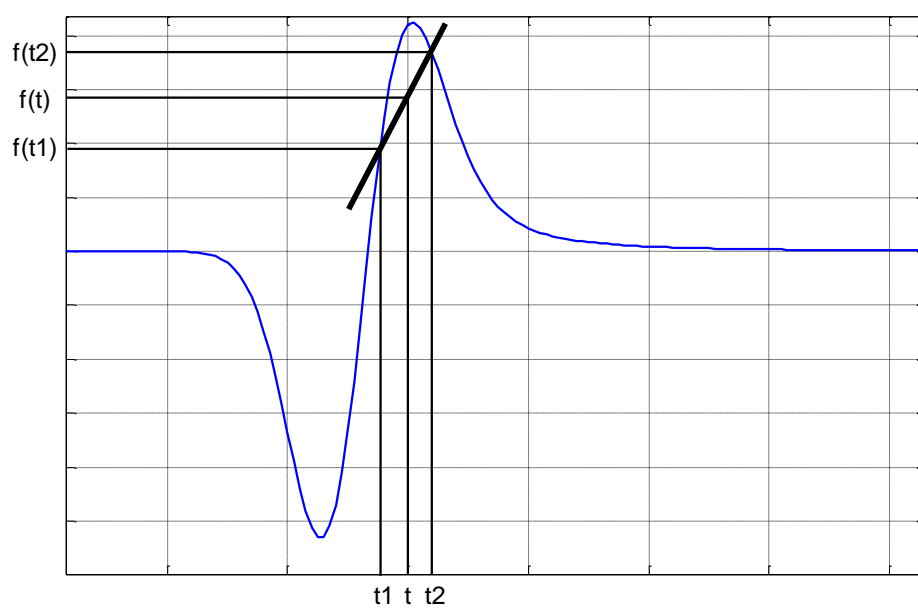


圖 23 反射波線性內差示意圖

$$y = f(t) = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} (t - t_1) + f(t_1) \quad (39)$$

(39) 是線性內差公式。

3.3.1 正向入射

3.3.1.1 $\epsilon_r=1$ $\sigma_g=0$

模擬空間大小 $x=30$ 、 $y=30$ 、 $z=40$
 $z_{\text{ground}}=20$

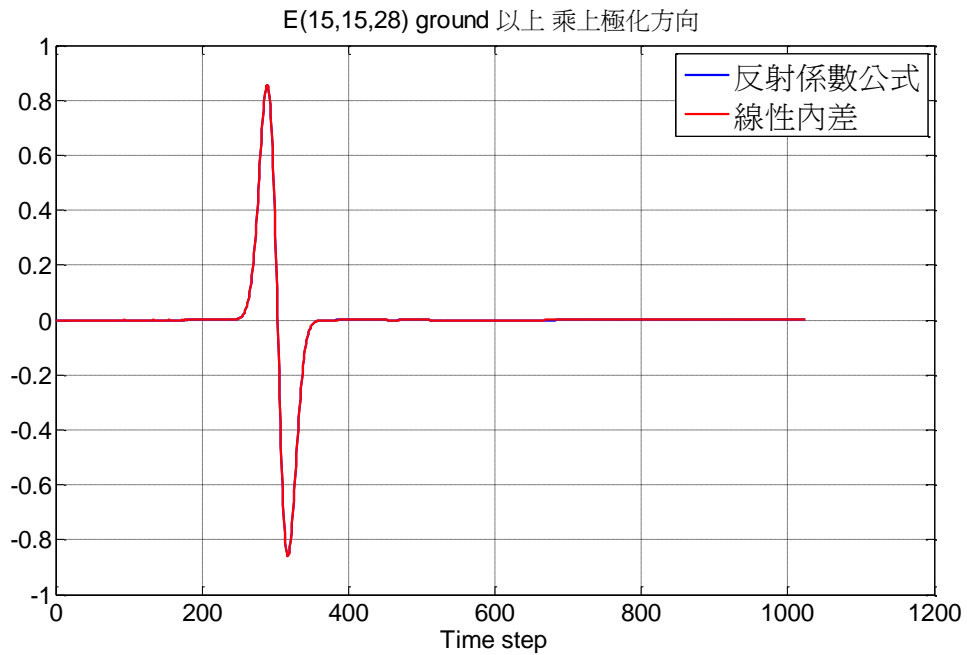


圖 24 電場全場在自由空間公式和線性內差比較

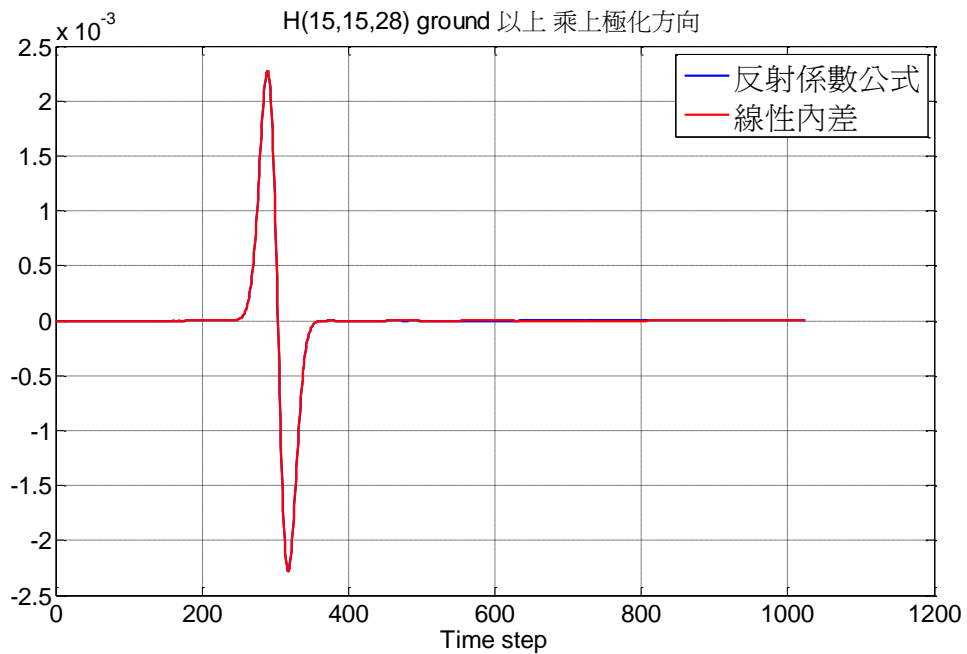


圖 25 磁場全場在自由空間公式和線性內差比較

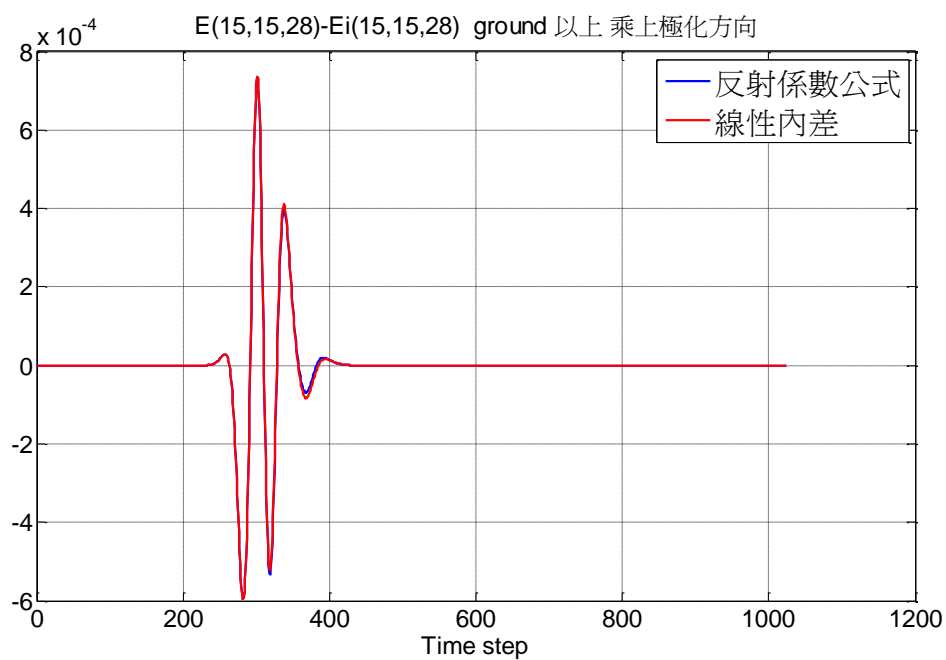


圖 26 電場在自由空間反射波公式和線性內差比較

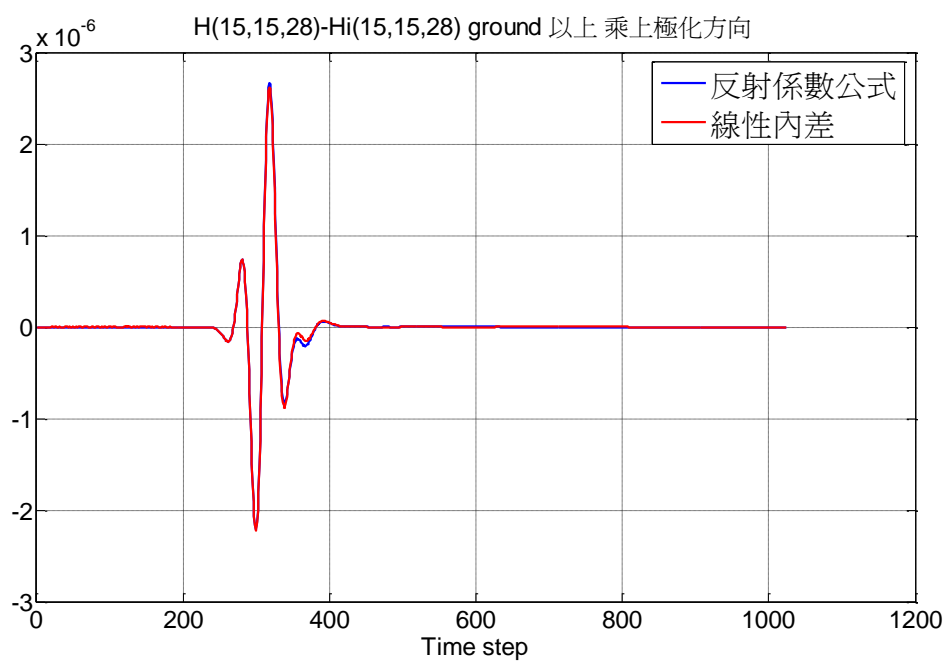


圖 27 磁場在自由空間反射波公式和線性內差比較

3.3.1.2 $\epsilon_r=4$ $\sigma_g=0$

模擬空間大小 $x=30$ 、 $y=30$ 、 $z=40$
 $z_{\text{ground}}=20$

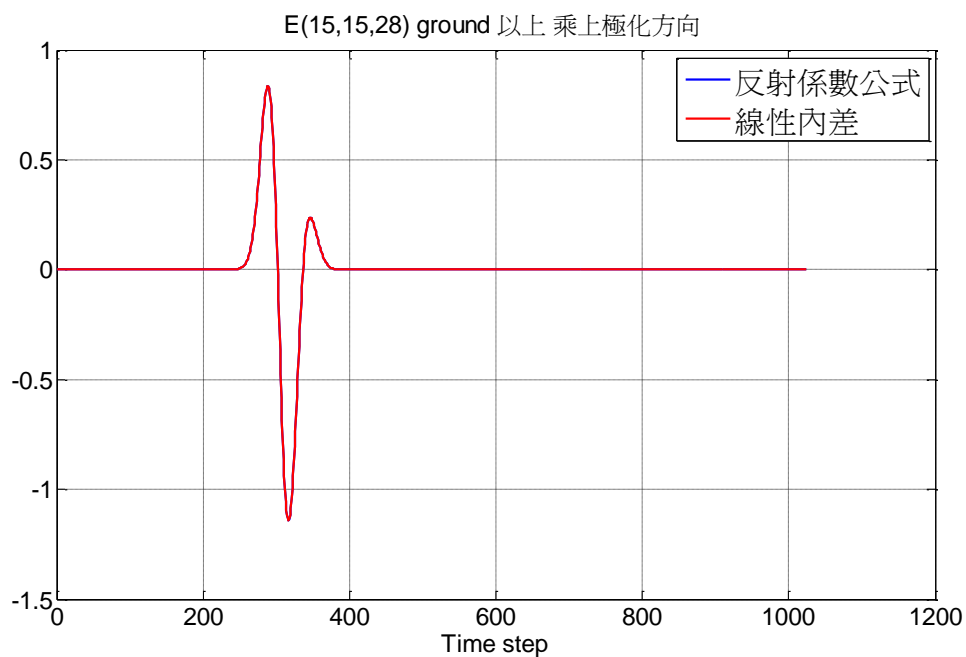


圖 28 電場全場在介質半空間公式和線性內差比較

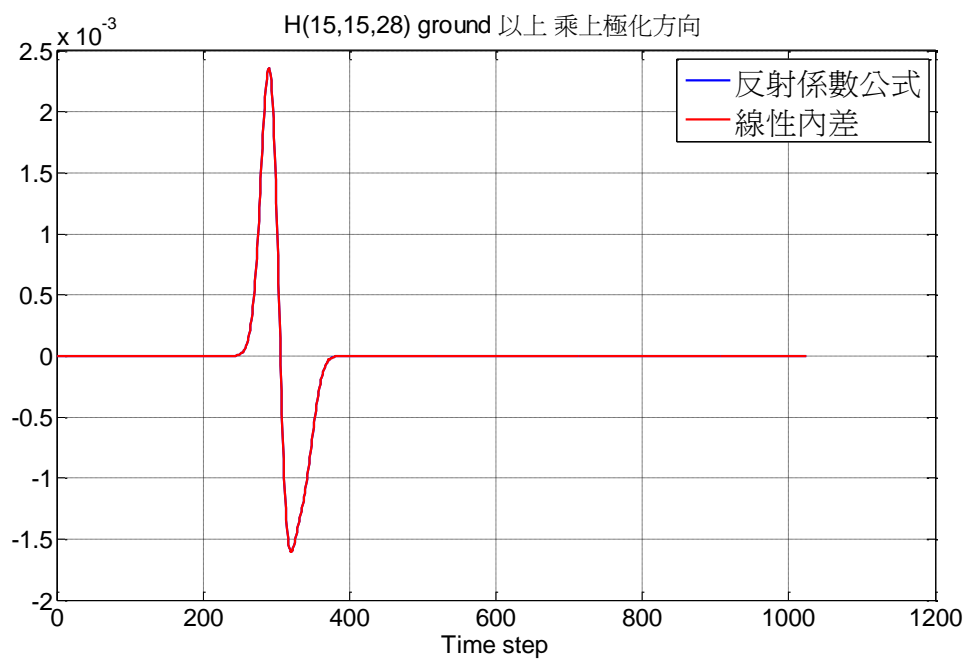


圖 29 磁場全場在介質半空間公式和線性內差比較

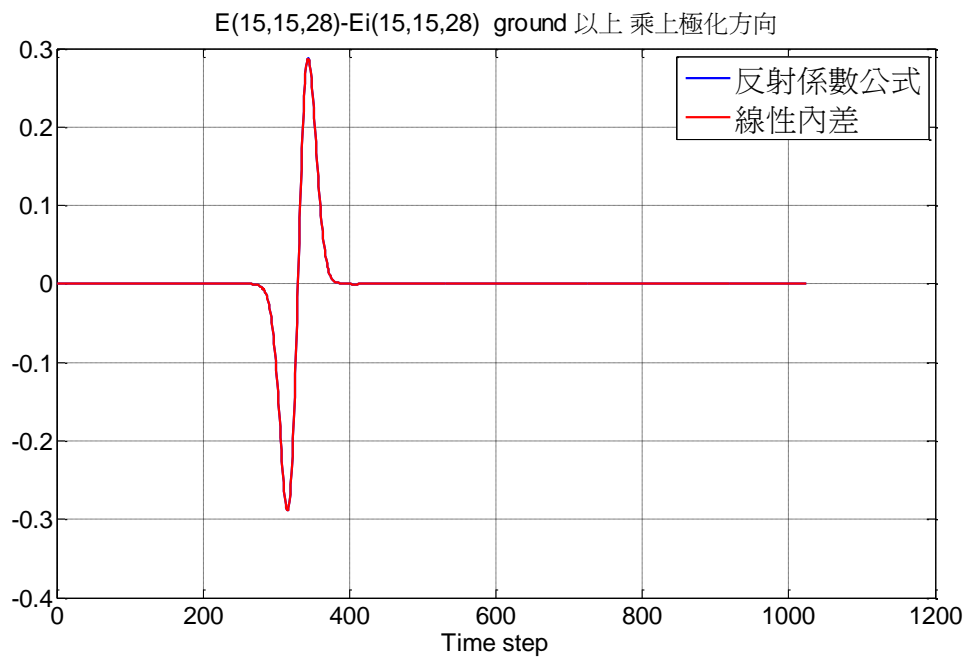


圖 30 電場在介質半空間反射波公式和線性內差比較

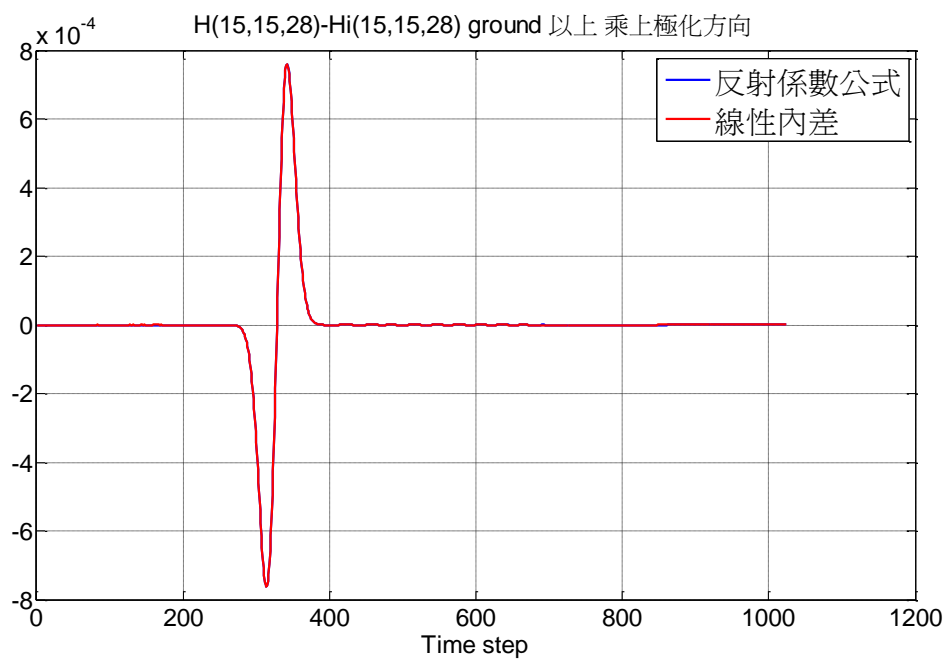


圖 31 磁場在介質半空間反射波公式和線性內差比較

3.3.2 斜向入射

3.3.2.1 $\epsilon_r=1$ $\sigma_g=0$

模擬空間大小 $x=30$ 、 $y=30$ 、 $z=40$
 $z_{\text{ground}}=20$

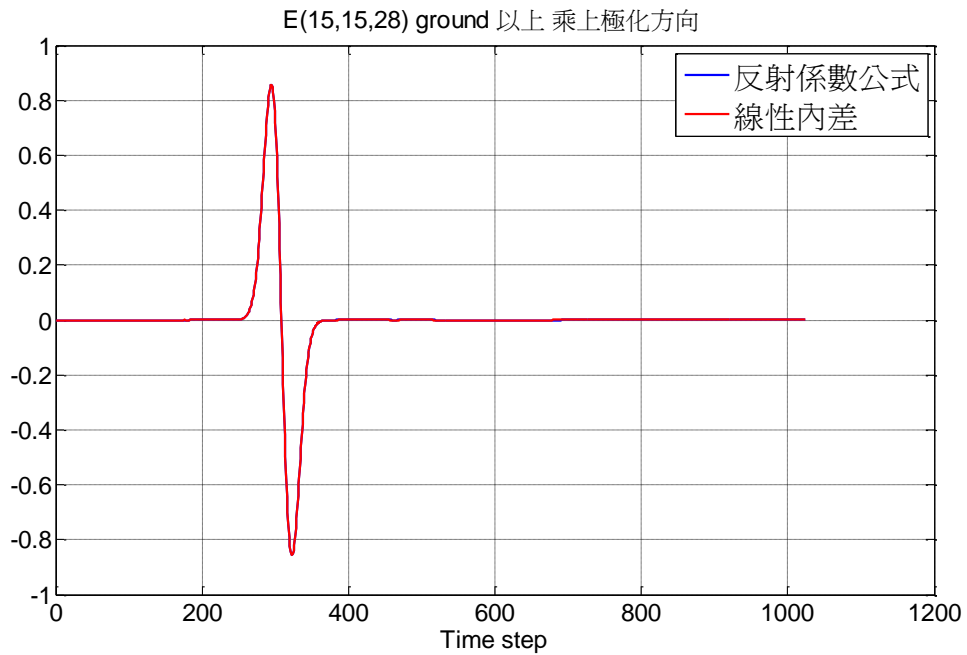


圖 32 電場全場在自由空間公式和線性內差比較

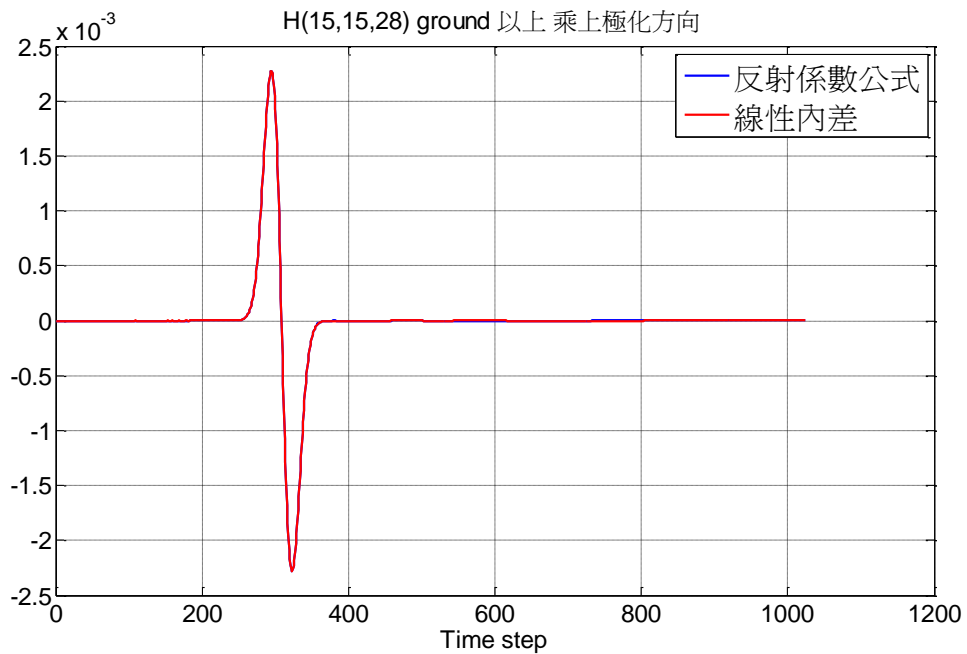


圖 33 磁場全場在自由空間公式和線性內差比較

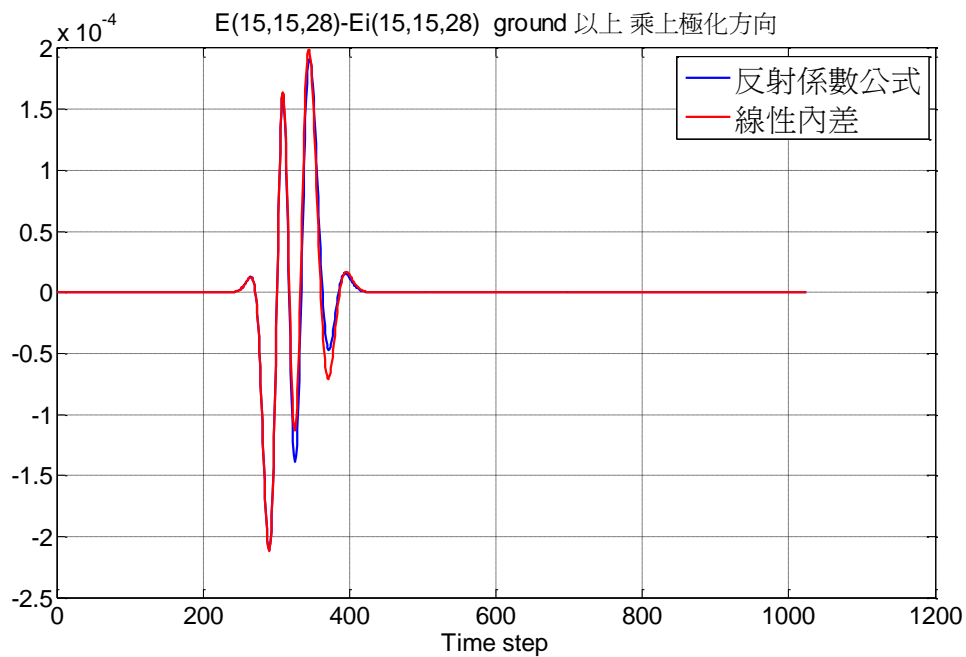


圖 34 電場在自由空間反射波公式和線性內差比較

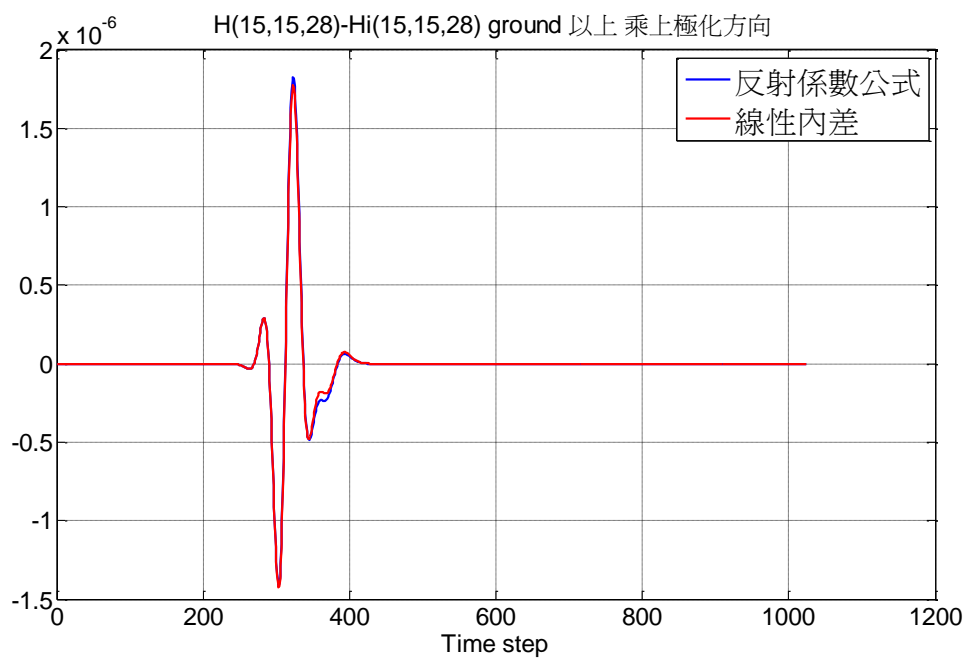


圖 35 磁場在自由空間反射波公式和線性內差比較

3.3.2.2 $\varepsilon_r=4$ $\sigma_g=0$

模擬空間大小 $x=30$ 、 $y=30$ 、 $z=40$
 $z_{\text{ground}}=20$

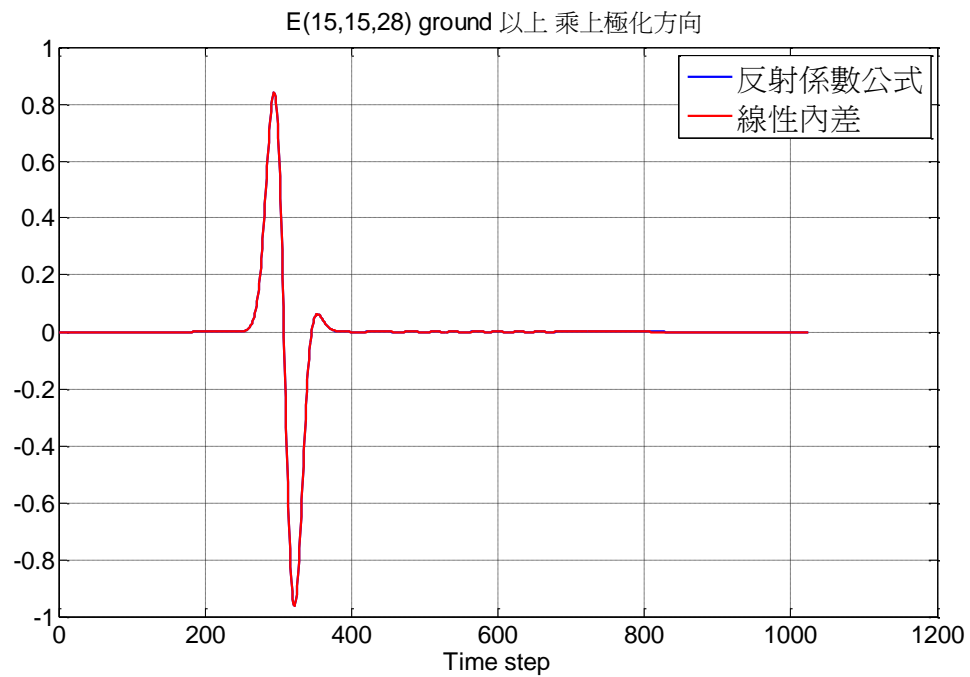


圖 36 電場全場在介質半空間公式和線性內差比較

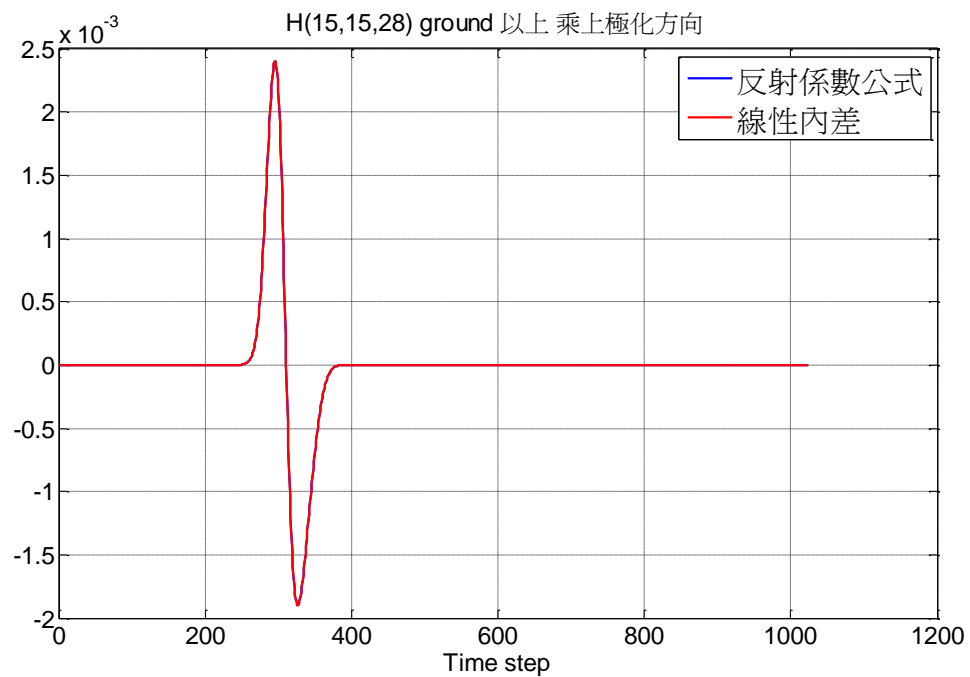


圖 37 磁場全場在介質半空間公式和線性內差比較

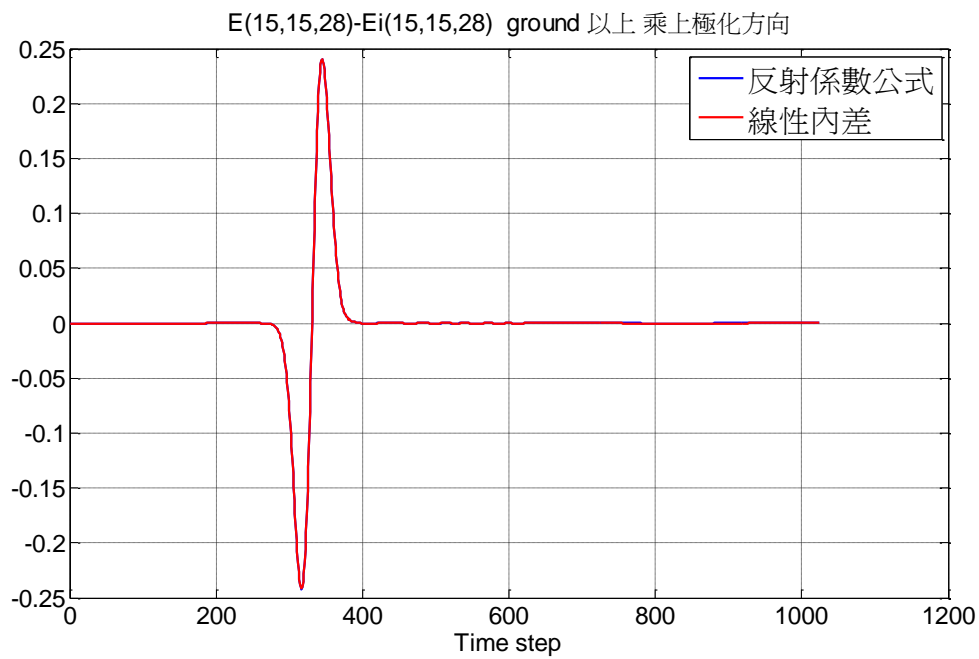


圖 38 電場在介質半空間反射波公式和線性內差比較

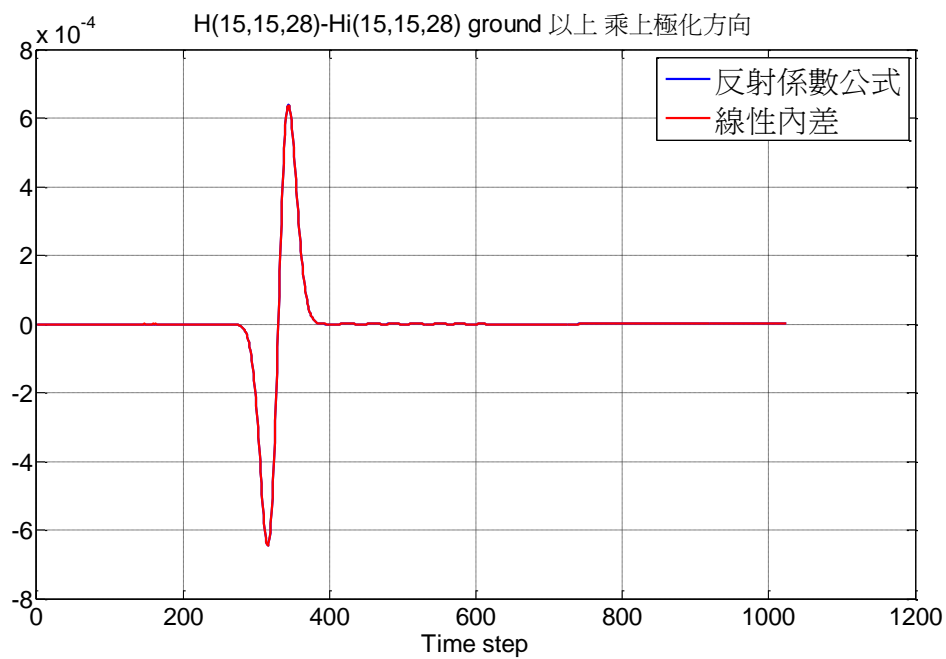


圖 39 磁場在介質半空間反射波公式和線性內差比較

從圖 24 到圖 39 可以觀察出紅色曲線和藍色曲線吻合情況非常的好。

3.4 透射係數(Transmission coefficient)

透射係數和反射係數的原理差不多。

以 TM 波為例：

$$\tau_{TM} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_i} \quad (40)$$

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} \quad \eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}$$

其中 μ_2 、 ϵ_2 為在有損材質時的導磁係數和介電係數，有損材質的介電常數如 (31)， μ_1 、 ϵ_1 為在自由空間中的導磁係數和介電係數， η_2 為介質層的特性阻抗， η_1 則是自由空間中的本質阻抗，因為在自由空間和有損空間(free space)的導磁係數 μ 一樣， $\mu = \mu_1 = \mu_2$ 。

所以公式可簡化成如下：

$$\tau_{TM} = \frac{2\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_{r1} + \frac{\sigma_1}{j\omega}} \cos \theta_i}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_{r1} + \frac{\sigma_1}{j\omega}} \cos \theta_i + \sqrt{\epsilon_0 \epsilon_{r2} + \frac{\sigma_2}{j\omega}} \cos \theta_i} \quad (41)$$

其中 $\omega = 2\pi f$

從公式(41)可以明顯的看出透射係數是一個以頻率為變數的函數。

在公式(41)中也是要特別留意頻率為零的情況，

接著把 $\theta_i = 0$ 和 $\omega = 0$ 帶入(41) 式中 $\tau_{TM} = \frac{2\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_{r1} + \frac{\sigma_1}{j\omega}} \cos \theta_i}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_{r1} + \frac{\sigma_1}{j\omega}} \cos \theta_i + \sqrt{\epsilon_0 \epsilon_{r2} + \frac{\sigma_2}{j\omega}} \cos \theta_i}$ 也發現分母為零時反射係數變無窮大的情形，這時 $\epsilon_0 \epsilon_1 \ll \frac{\sigma_1}{j\omega}$ 、 $\epsilon_0 \epsilon_2 \ll \frac{\sigma_2}{j\omega}$ 再使用複數的

極式型態把它寫成 $\tau_{TM} = \frac{2\sqrt{\frac{\sigma_1}{\omega}} e^{-j\frac{\pi}{4}} \cos \theta_i}{\sqrt{\frac{\sigma_1}{\omega}} e^{-j\frac{\pi}{4}} \cos \theta_i + \sqrt{\frac{\sigma_2}{\omega}} e^{-j\frac{\pi}{4}} \cos \theta_i}$ 由於頻率為零時 $\theta_i = 0$ 且自

由空間中無損 $\sigma_1 = 0$ 帶入得 $\tau_{TM} = \frac{2\sqrt{\frac{\sigma_1}{\omega}} e^{-j\frac{\pi}{4}} \cos \theta_i}{\sqrt{\frac{\sigma_1}{\omega}} e^{-j\frac{\pi}{4}} \cos \theta_i + \sqrt{\frac{\sigma_2}{\omega}} e^{-j\frac{\pi}{4}} \cos \theta_i} = \frac{0}{\sqrt{\frac{\sigma_2}{\omega}} e^{-j\frac{\pi}{4}} \cos \theta_i} = 0$

這樣一來我們也解決了透射波頻率為零時，電腦無法給值的問題。

在透射波的地方還要特別考慮 α 衰減係數(attenuation constant)的影響，其值越大代表電磁波在導體中的衰減程度越大。有損材質都有會有 α 項，所以也表示會

有集膚深度效應(skin depth) , $\delta = \frac{1}{\alpha}$ 。

以下是頻域時不同導電係數的透射係數實部和虛部圖。

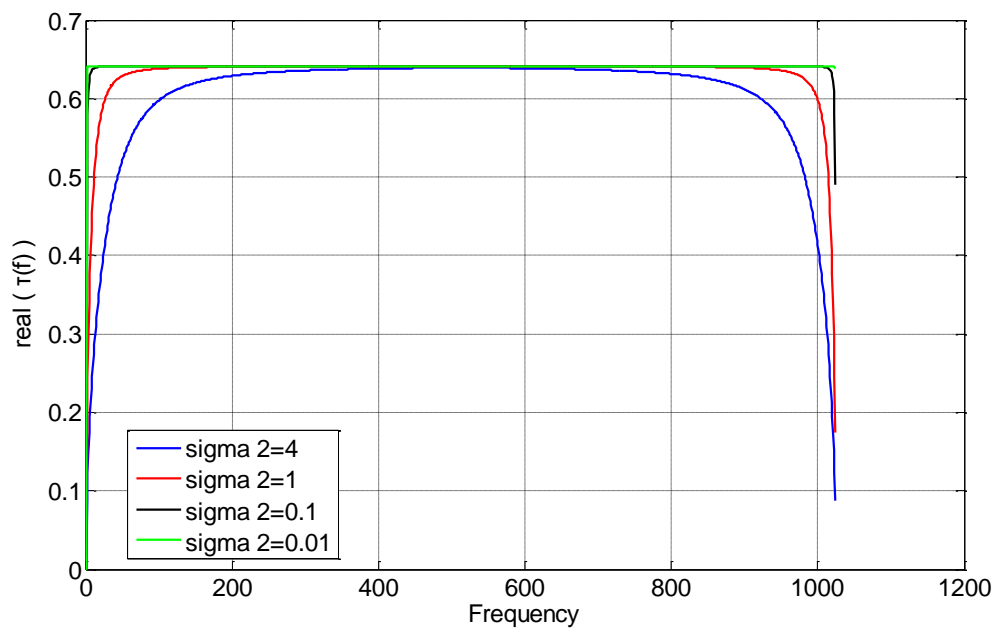


圖 40 頻域透射係數的實部

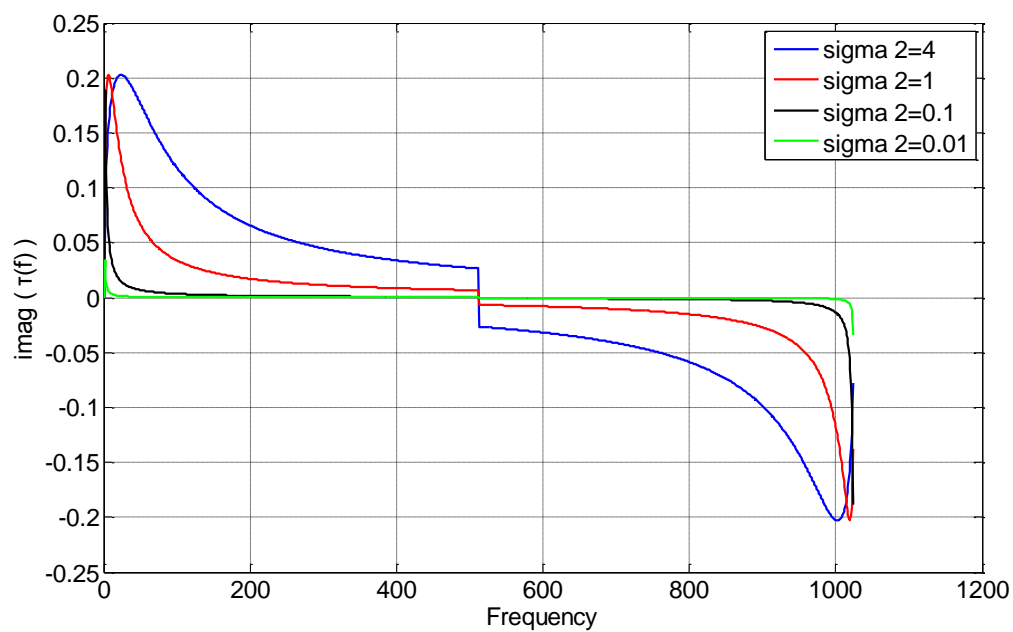


圖 41 頻域透射係數的虛部

3.5 透射波的做法

3.5.1 iFFT

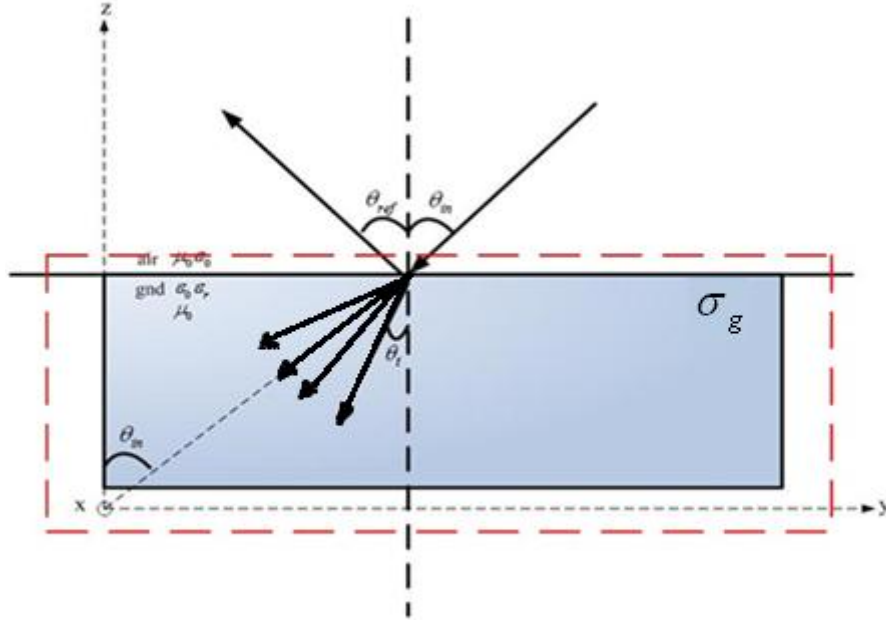


圖 42 有損半空間透射波的示意圖

反射波因為反射角度 θ_r 都一樣，才可以使用直接反復立葉轉換並採線性內差的做法，但在透射波這裡就不行，因為不同頻率所以造成透射角度 θ_t 都不同，從圖 42 的示意圖可以看出。

所以吾人在老師的指點下，找出了解決之道，就是把頻域時的高斯脈波微分乘以頻域時的透射係數再乘以頻域時從自由空間入射到接觸介質層的平面波展開式和衰減係數項(42)，然後再做反傅立葉轉換(43)。

$$S(f)\tau(f)e^{-j\beta_k\theta_k\bar{r}}e^{-j\alpha_{DG}}e^{-\alpha_k\theta_k\bar{r}} \quad (42)$$

$$f(t) \Rightarrow F^{-1} \{ S(f)\tau(f)e^{-j\beta_k\theta_k\bar{r}}e^{-j\alpha_{DG}}e^{-\alpha_k\theta_k\bar{r}} \} \quad (43)$$

反傅立葉轉換的圖確定是高斯脈波微分的形式後，把它乘上投影在 x、y、z 軸上各分量的正餘旋值就可求出 E_{x_i} 、 E_{y_i} 、 E_{z_i} 。

在(42)中， θ_k 就是透射波行進方向，x、y、z 分量都不一樣，因為 FDTD 的關係。 β_k 相位常數(phase constant)則是在介質層中波數的實部。

這裡的 t_{DG} 是從自由空間到接觸介質層的延遲時間 $t_{DG} = \frac{|z_G - z_0|}{\cos(\theta_i)} \cdot \frac{1}{c}$ 。

3.5.1.1 正向入射

3.5.1.1.1 $\varepsilon_r=1$ $\sigma_g=0$

模擬空間大小 $x=30$ 、 $y=30$ 、 $z=40$
 $z_{\text{ground}}=20$

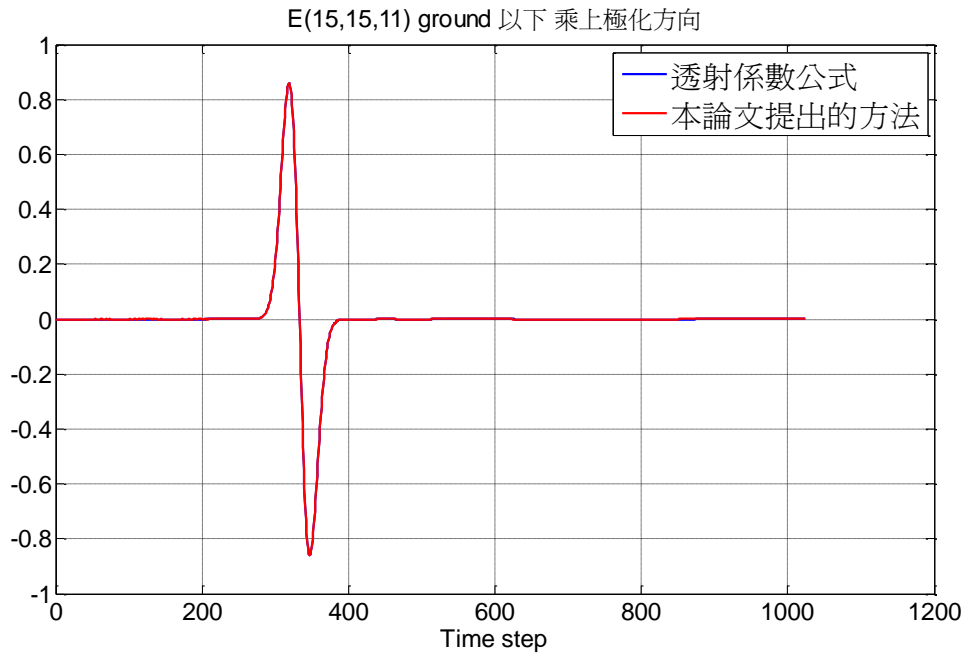


圖 43 電場全場在自由空間公式和本論文提出方法比較

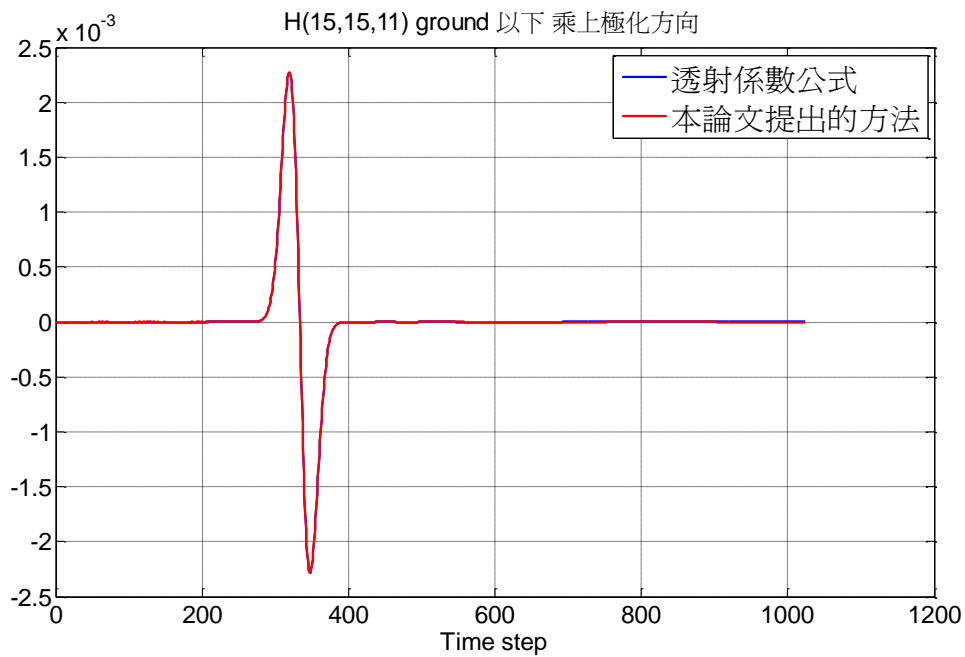


圖 44 磁場全場在自由空間公式和本論文提出方法比較

3.5.1.1.2 $\epsilon_r = 4$ $\sigma_g = 0$

模擬空間大小 $x=30$ 、 $y=30$ 、 $z=40$
 $z_{\text{ground}}=20$

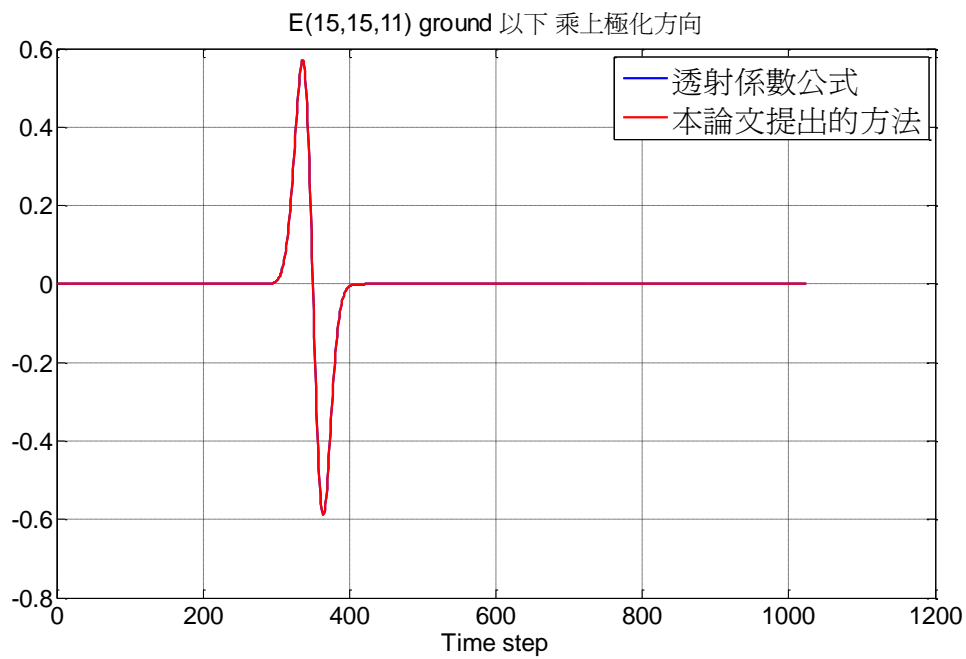


圖 45 電場全場在介質半空間公式和本論文提出方法比較

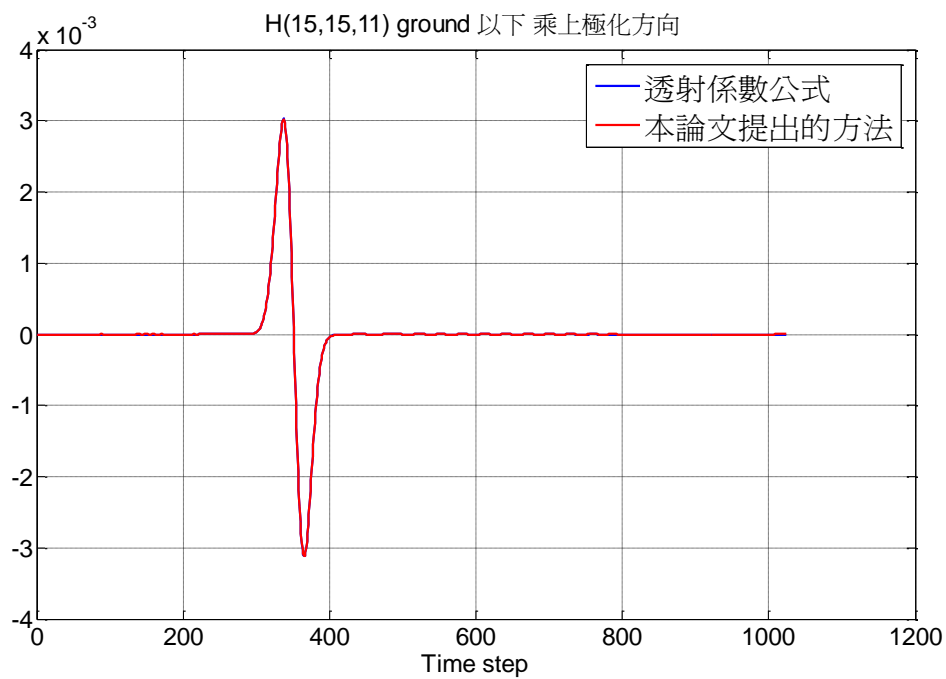


圖 46 磁場全場在介質半空間公式和本論文提出方法比較

3.5.1.2 斜向入射

3.5.1.2.1 $\varepsilon_r=1$ $\sigma_g=0$

模擬空間大小 $x=30$ 、 $y=30$ 、 $z=40$
 $z_{\text{ground}}=20$

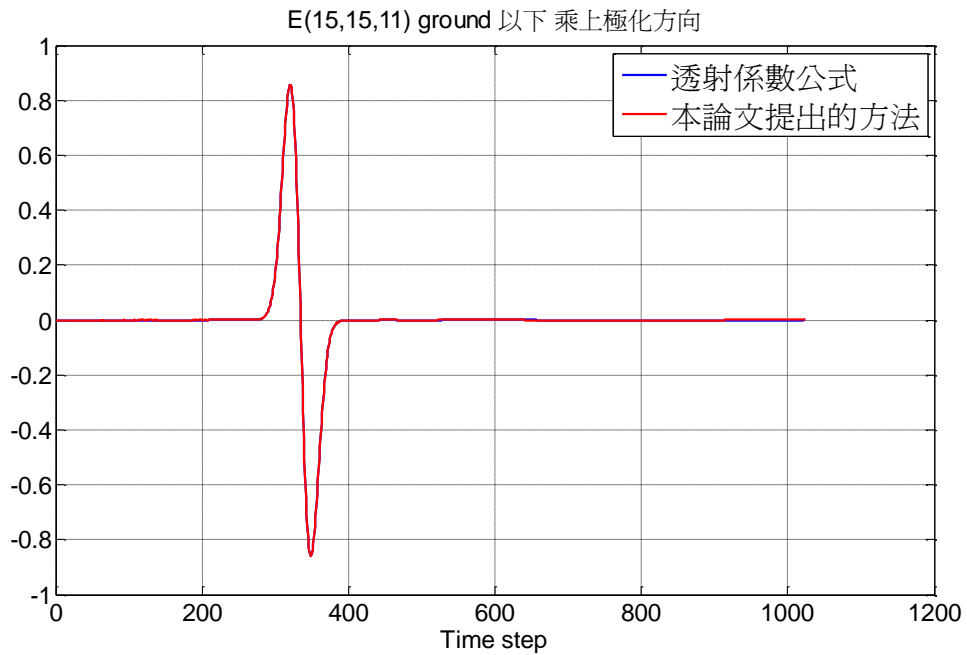


圖 47 電場全場在自由空間公式和本論文提出方法比較

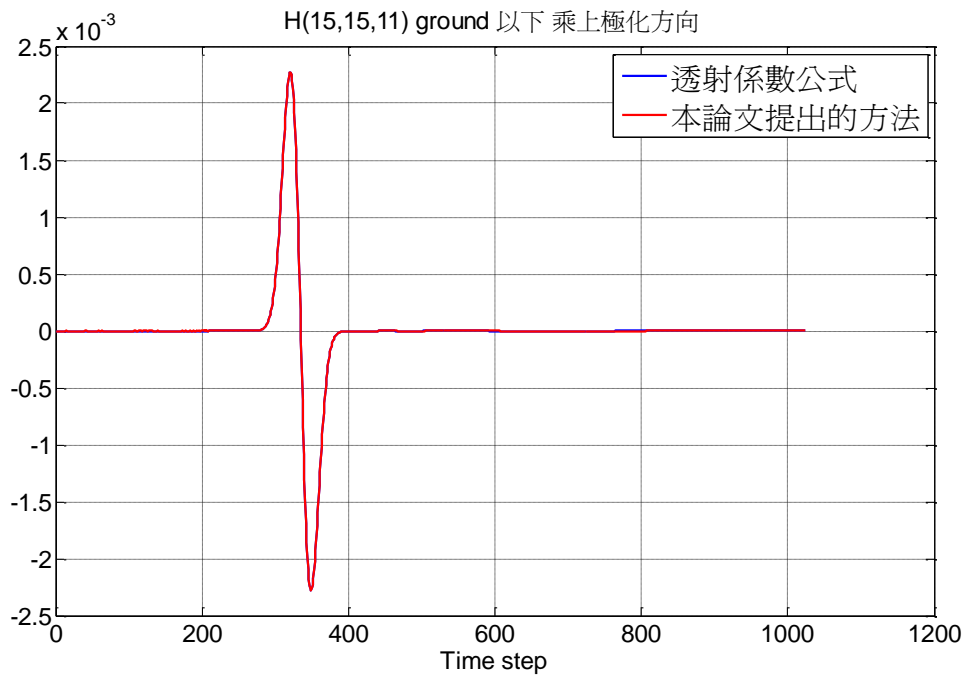


圖 48 磁場全場在自由空間公式和本論文提出方法比較

3.5.1.2.2 $\varepsilon_r = 4$ $\sigma_g = 0$

模擬空間大小 $x=30$ 、 $y=30$ 、 $z=40$
 $z_{\text{ground}}=20$

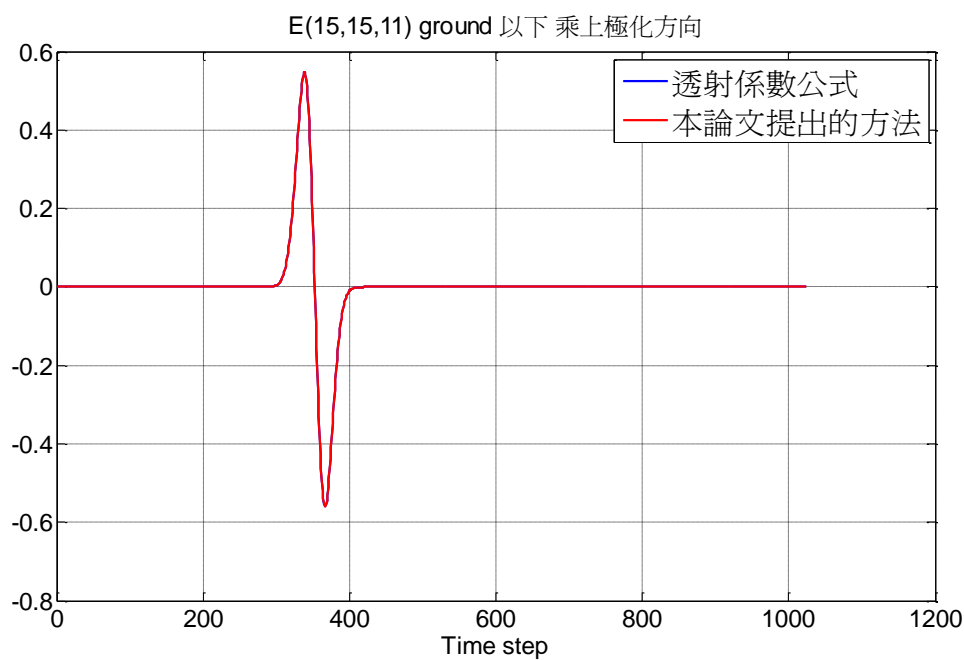


圖 49 電場全場在介質半空間公式和本論文提出方法比較

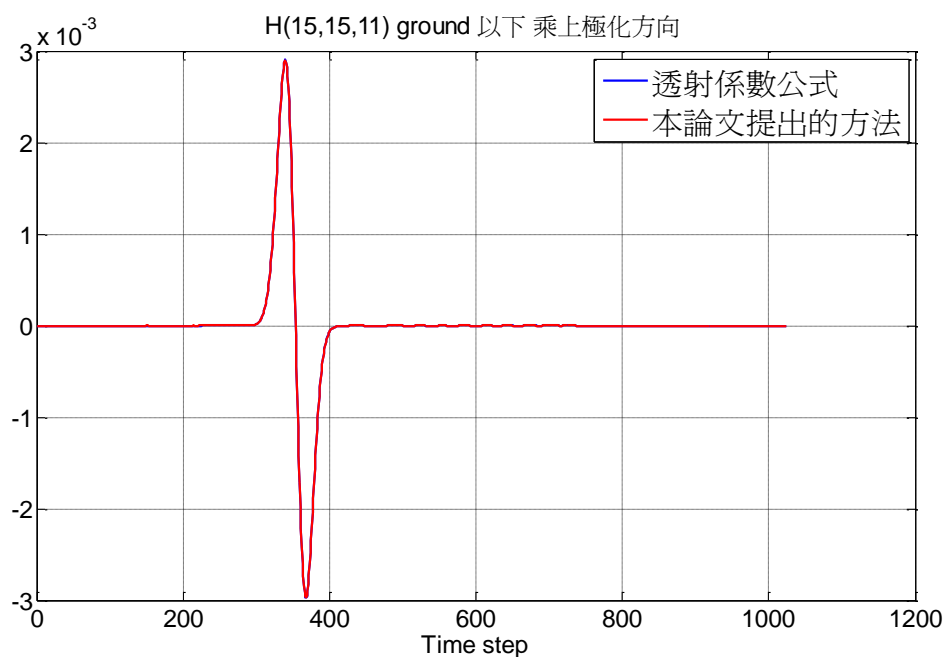


圖 50 磁場全場在介質半空間公式和本論文提出方法比較

從圖 43 到圖 50 可以觀察出紅色曲線和藍色曲線吻合情況非常的好。

3.5.2 DFT 頻譜累加到一半

在 2.5 節最後提到的，為了加快模擬的速度，我們採用離散傅立葉轉換 DFT(Discrete Fourier Transform)，因為在使用 iFFT 時是每一個時間都去計算，但我們只需要用到其中的一個時間，所以改採用 DFT 方法。又因(44)是實數函式，經 FFT 轉換後正頻率和負頻率會為共軛複數形式，再加在我們觀察到其透射角度 θ_t 和衰減係數 α 在不同頻率呈現對稱，圖 51、圖 52 而相位常數 β 圖 53 在不同頻率呈現反對稱，所以我們有可以使其公式簡化到只需計算透射波的一半分量就好，也就是頻譜累加到一半就好，這樣一來同樣的空間大小模擬時間減少了三倍半左右(表格 1)，且結果也和 iFFT 的結果相吻合。

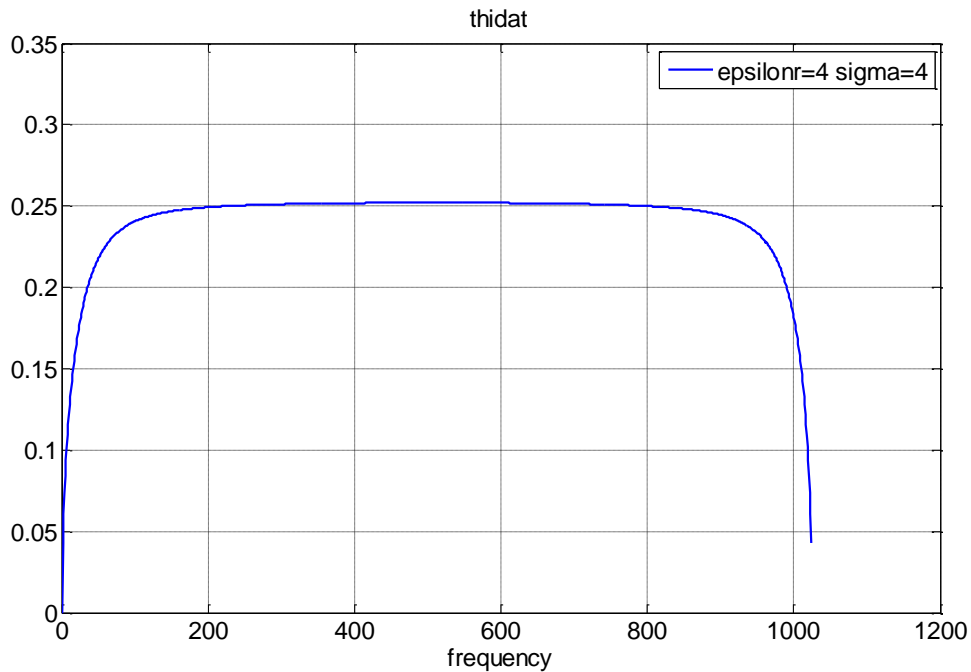


圖 51 θ_t

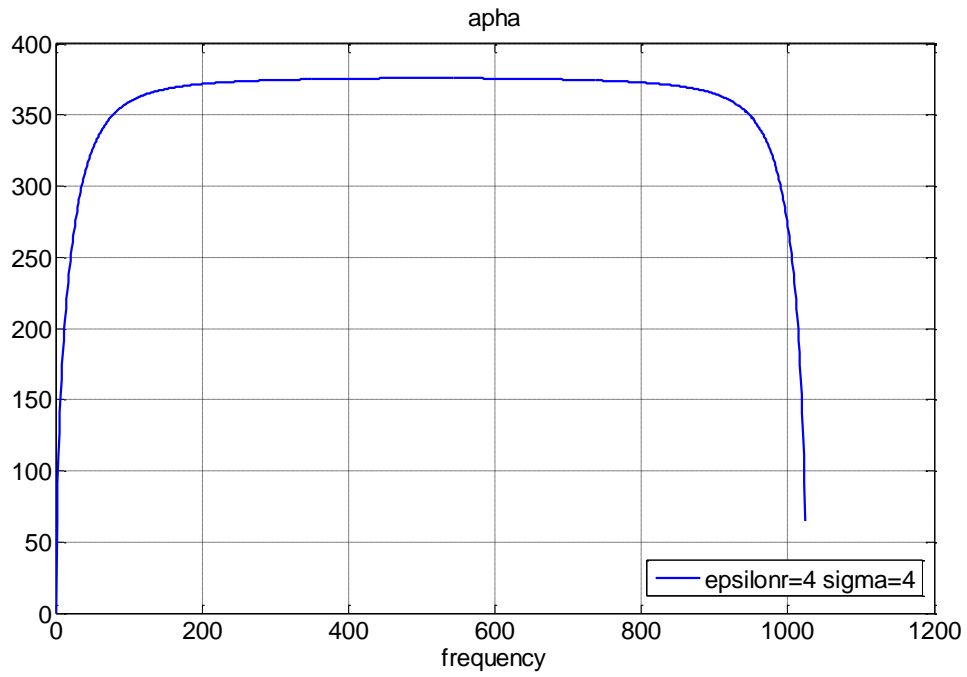


圖 52 α

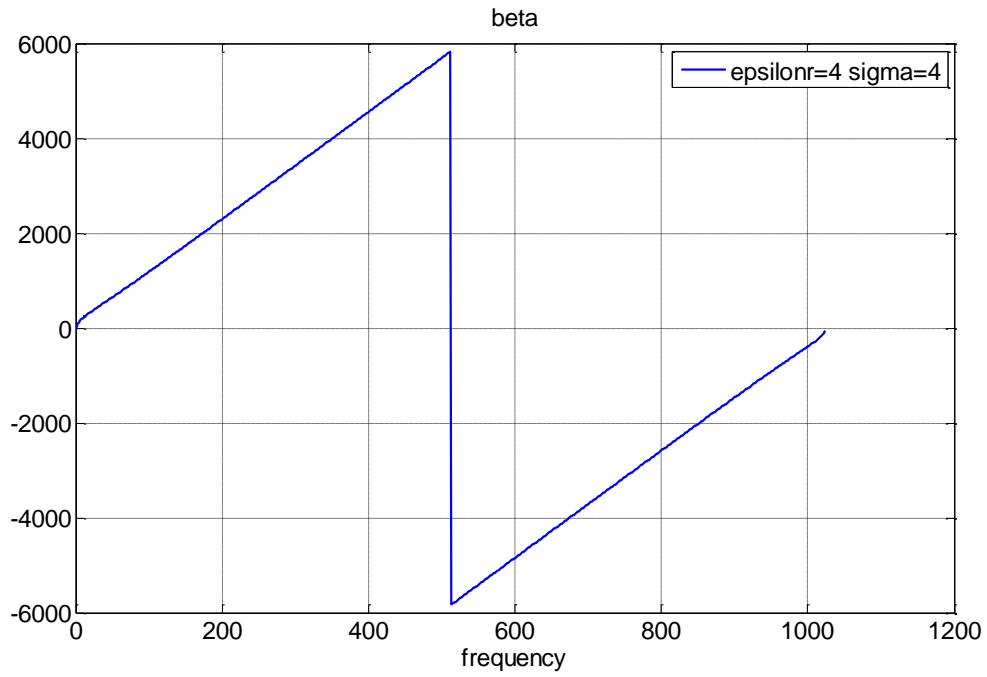


圖 53 β

圖 52 衰減係數 α 是取波數的負虛部，而圖 53 相位常數 β 是取波數的實部。

原來的 DFT 公式如下：

$$x(t_n) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x(k) e^{-j(\beta_k - j\alpha_k)\bar{\theta}_k \cdot \bar{r}} e^{j\omega_k t_n} e^{-j\alpha_k t_{DG}} \quad (44)$$

其中 $\omega_k = 2\pi(k-1)\Delta f$, $t_n = (n-1)\Delta t$, $\Delta f = \frac{1}{T} = \frac{1}{N\Delta t}$

$x(k)$ 是頻域時的透射係數乘上頻域時的高斯脈波微分。

$t_{DG} = \frac{|z_G - z_0|}{\cos(\theta_i)} \cdot \frac{1}{c}$ 是從自由空間到接觸介質層的延遲時間，

又因為 θ_i 和 α 呈現對稱， β 呈現反對稱所以公式可以簡化如下：

$$\begin{aligned} x(t_n) = & \frac{1}{N} \{ x(1) e^{-j\beta_1 \theta_1 \cdot \bar{r}} e^{-\alpha_1 \theta_1 \cdot \bar{r}} e^{j\omega_1 t_n} e^{-j\omega_1 t_{DG}} \\ & + \sum_{k=2}^{N/2} 2|x(k)| \cos \left[\omega_k t_n - \beta_k \theta_k \cdot \bar{r} + \phi_k - \omega_k t_{DG} \right] e^{-\alpha_k \theta_k \cdot \bar{r}} \\ & + x\left(\frac{N}{2}+1\right) e^{-j\beta_{-(\frac{N}{2}-1)} \theta_{-(\frac{N}{2}-1)} \cdot \bar{r}} e^{-\alpha_{-(\frac{N}{2}-1)} \theta_{-(\frac{N}{2}-1)} \cdot \bar{r}} e^{j2\pi\omega_{-(\frac{N}{2}-1)} t_n} e^{-j\omega_{-(\frac{N}{2}-1)} t_{DG}} \} \end{aligned} \quad (45)$$

其中第一點的頻率公式 $\frac{1}{N} \{ x(1) e^{-j\beta_1 \theta_1 \cdot \bar{r}} e^{-\alpha_1 \theta_1 \cdot \bar{r}} e^{j\omega_1 t_n} e^{-j\omega_1 t_{DG}} \}$ 和中間一半的下一點頻率也

就是負頻率的極大值公式 $x\left(\frac{N}{2}+1\right) e^{-j\beta_{-(\frac{N}{2}-1)} \theta_{-(\frac{N}{2}-1)} \cdot \bar{r}} e^{-\alpha_{-(\frac{N}{2}-1)} \theta_{-(\frac{N}{2}-1)} \cdot \bar{r}} e^{j2\pi\omega_{-(\frac{N}{2}-1)} t_n} e^{-j\omega_{-(\frac{N}{2}-1)} t_{DG}}$ 如果

模擬的時間(Time step)取得夠長，這兩點的值會相對非常的小，對 $x(t_n)$ 的影響也沒那麼大。

反之當時間點取的很小，這兩點對 $x(t_n)$ 的影響也就滿大的，所以這兩點頻率的公式要把它納入考量。

$$\frac{1}{N} \left\{ \sum_{k=2}^{N/2} 2|x(k)| \cos \left[\omega_k t_n - \beta_k \bar{\theta}_k \cdot \bar{r} + \phi_k - \omega_k t_{DG} \right] e^{-\alpha_k \bar{\theta}_k \cdot \bar{r}} \right\} \text{ 則是 } x(t_n) \text{ 最主要的公式，因}$$

為它幾乎就是 $x(t_n)$ 的數值，它就是因為 θ_i 和 α 呈現對稱， β 呈現反對稱所以頻譜可以累加到一半而不用去算全部的時間，這樣節省下來的時間就非常的可觀。我們也就可以模擬更大的空間(表格 2)，這裡的 $|x(k)|$ 就是高斯脈波微分的振幅(28)。

對於不同的透射磁場和透射電場的極化方向， $x(t_n)$ 也要乘上不同的極化方向，而和 θ_i 有關的極化方向分量，要把它合併到 DFT 公式 $x(t_n)$ 裡，一起去做計算。

第 4 章 模擬結果討論

4.1 反射係數與透射係數

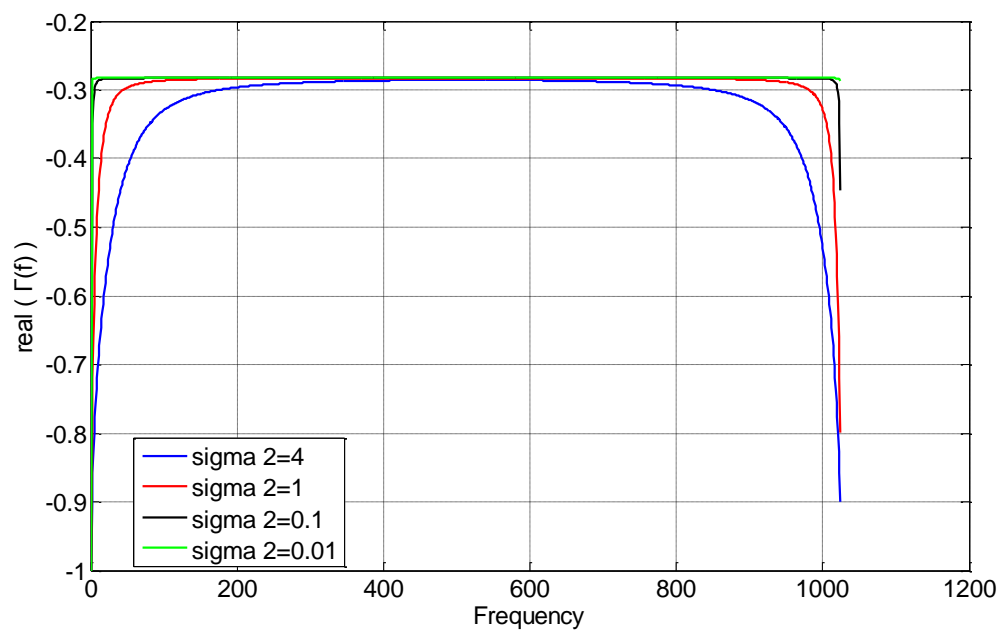


圖 54 頻域的反射係數實部

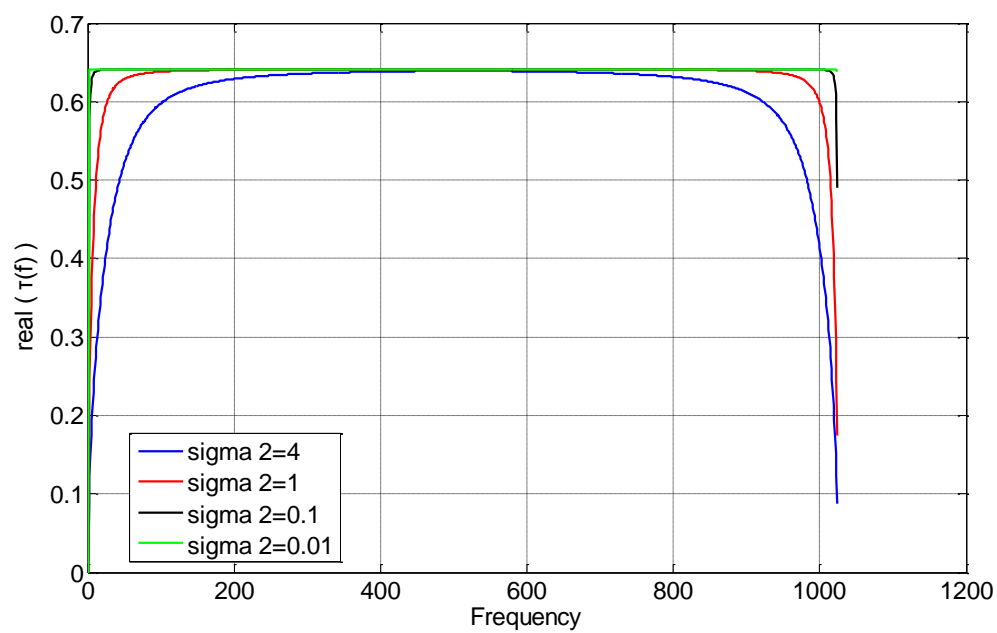


圖 55 頻域的透射係數實部

從圖 54 和圖 55 反射係數和透射係數的實部可以得證公式 $1 + \Gamma = \tau$ 。

4.2 不同導電係數的反射波

4.2.1 正向入射

$$\theta = 0^\circ \quad \phi = 0^\circ \quad R = 25$$

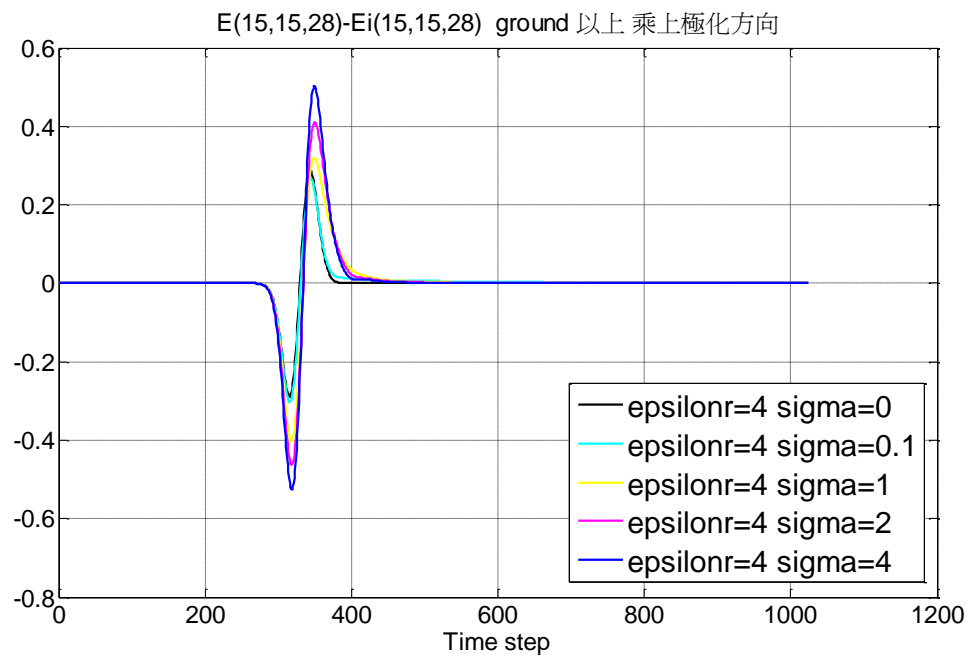


圖 56 電場反射波在不同導電係數時的曲線

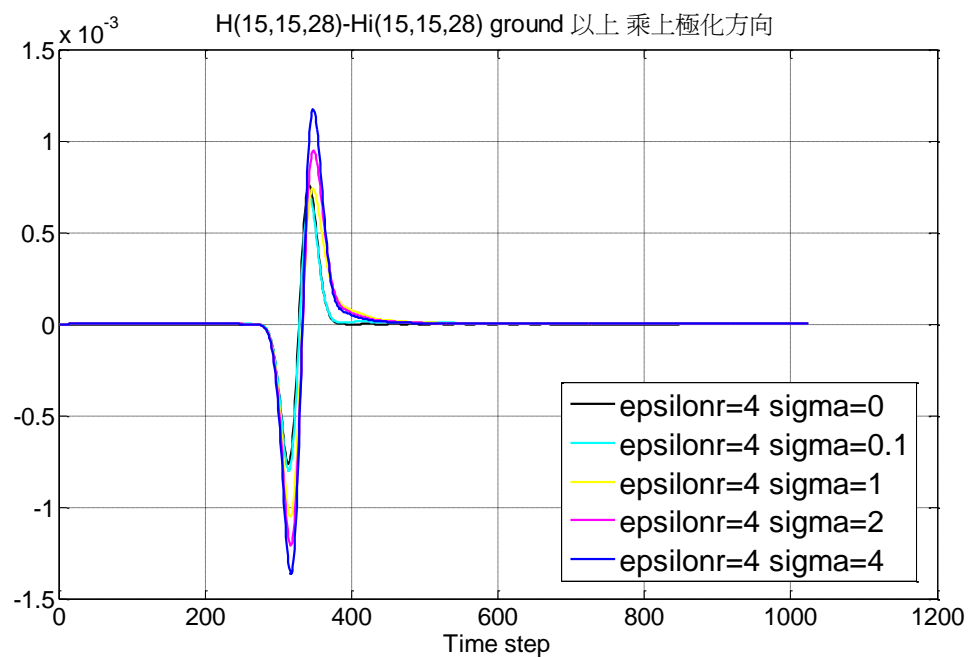


圖 57 磁場反射波在不同導電係數時的曲線

4.2.2 斜向入射

$$\theta = 30^\circ \quad \phi = 60^\circ \quad R = 35$$

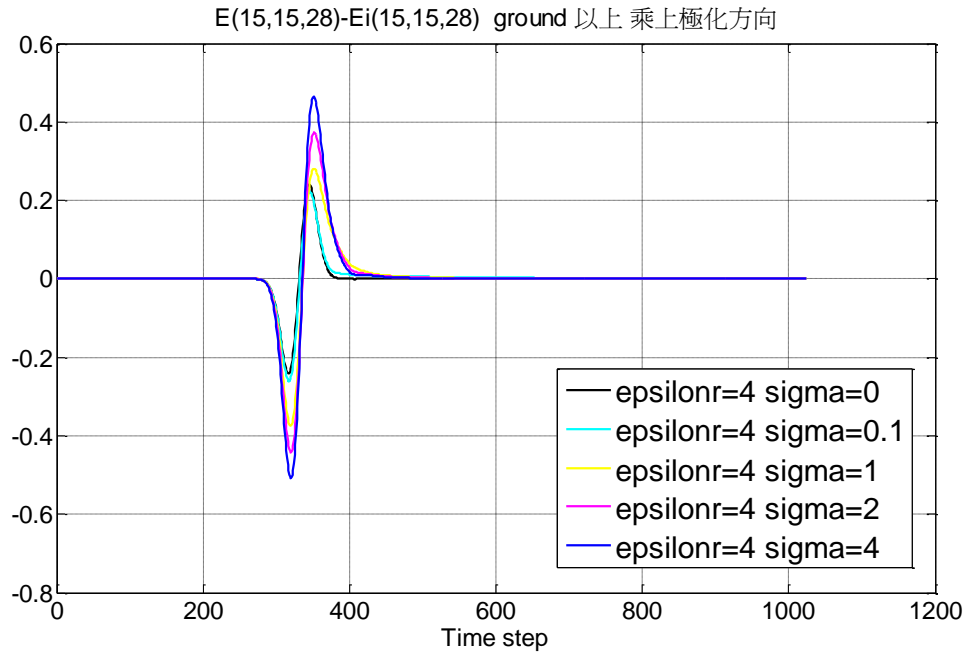


圖 58 電場反射波在不同導電係數時的曲線

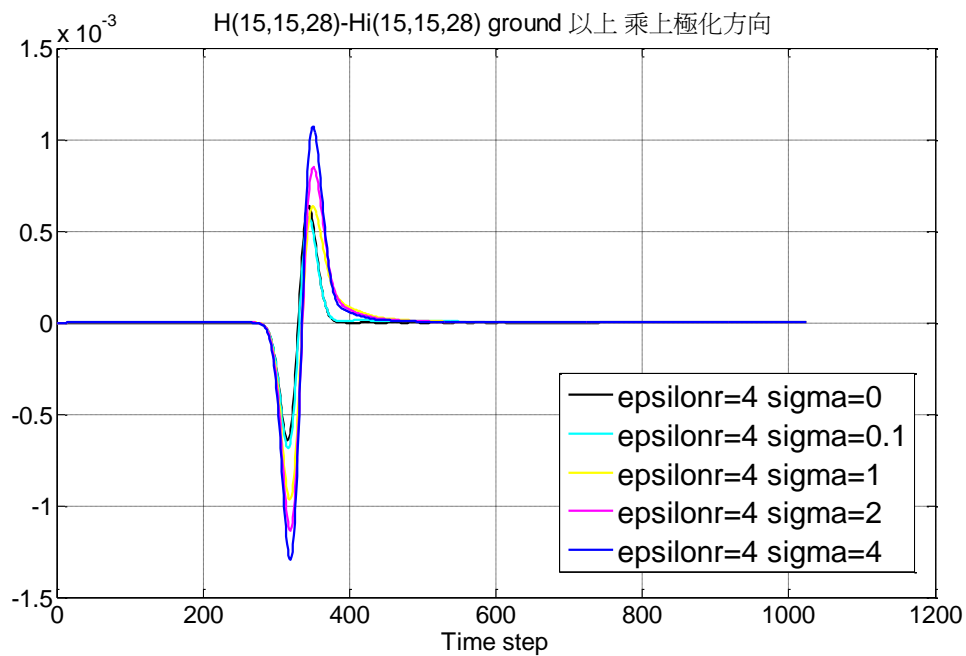


圖 59 磁場反射波在不同導電係數時的曲線

圖 56、圖 57、圖 58 和圖 59 都是以半空間 z_{ground} 為 20 (z 軸座標，自由空間和介質層的界線)所做出的模擬結果。

圖 56 和圖 58 電場的反射波是用電場的全場減掉電場的入射場所得來的結果，相同的圖 57 和圖 59 磁場的反射波是用磁場的全場減掉磁場的入射場所得來的結果，這裡也可以觀察到當導電係數越大時，反射波相對的也會越大。

4.3 不同導電係數的透射波

4.3.1 正向入射

$$\theta = 0^\circ \quad \phi = 0^\circ \quad R = 25$$

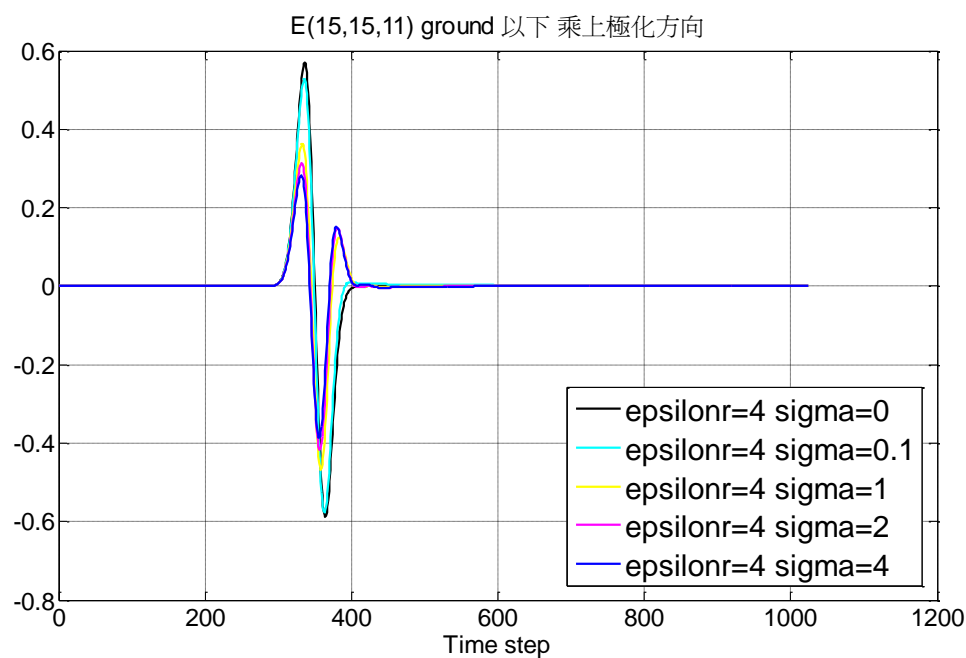


圖 60 電場透射波在不同導電係數時的曲線

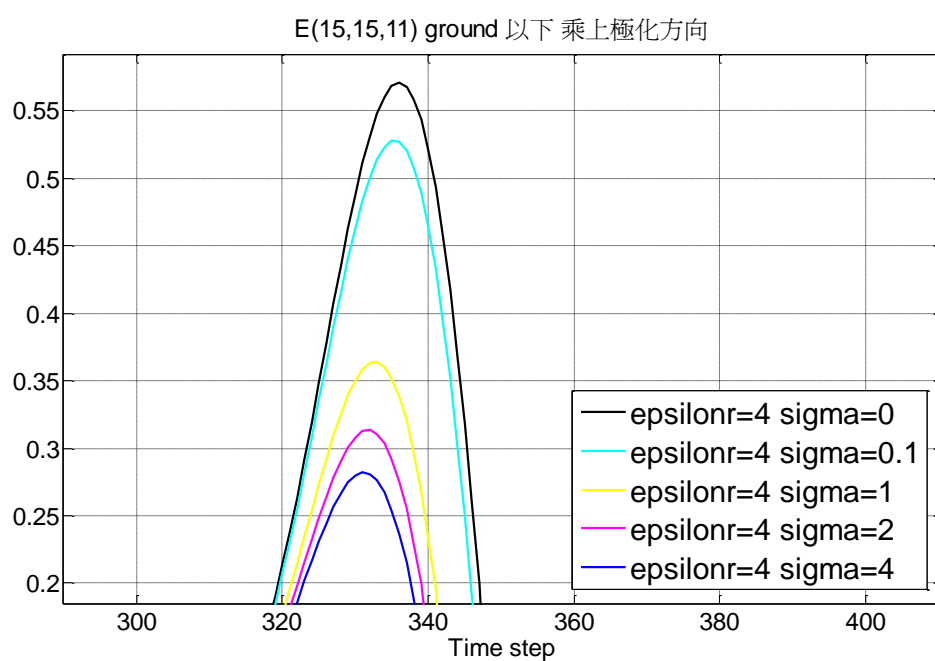


圖 61 (峰頂放大圖)電場透射波在不同導電係數時的曲線

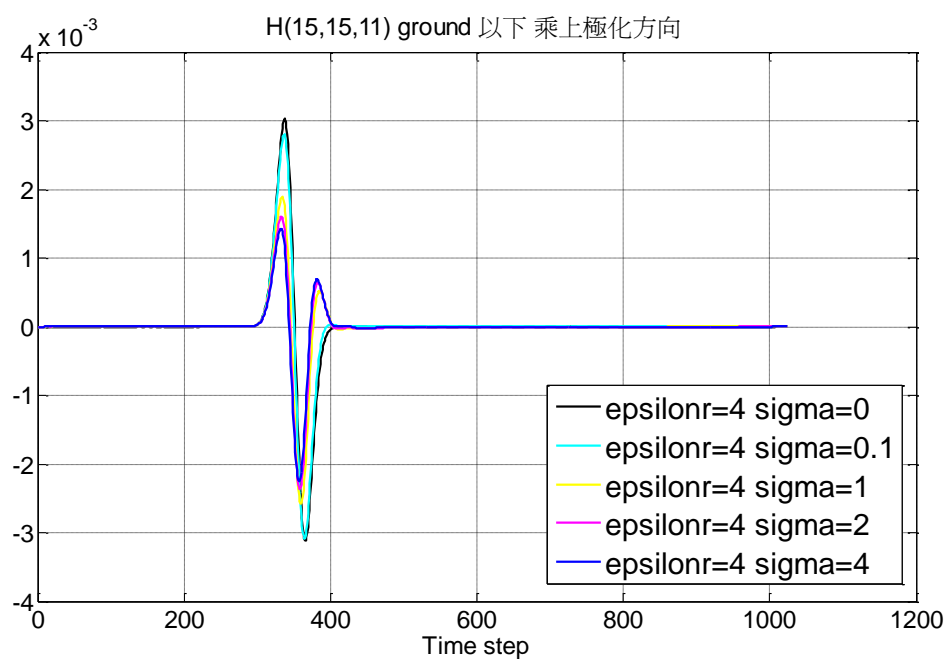


圖 62 磁場透射波在不同導電係數時的曲線

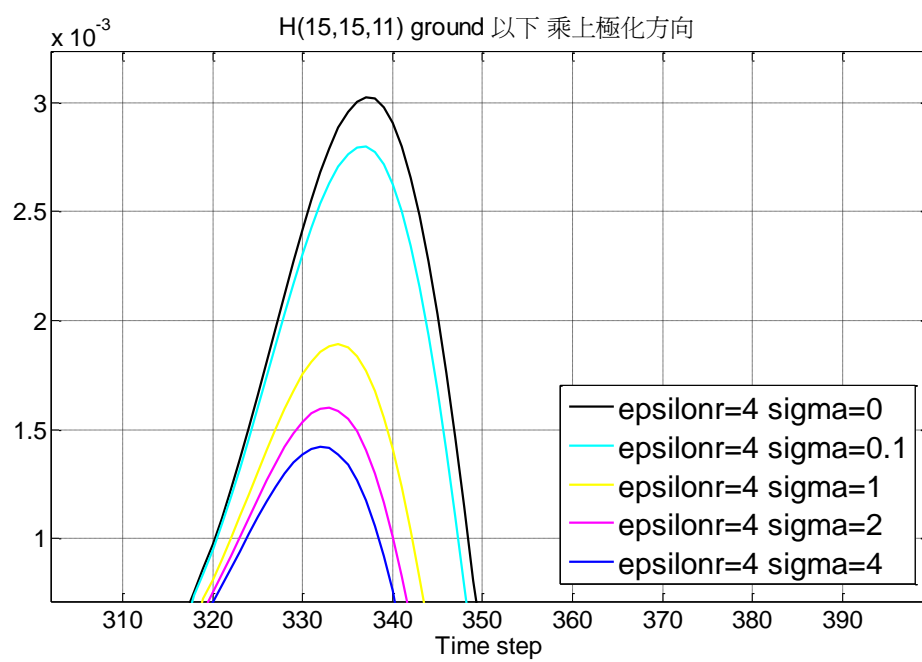


圖 63 (峰頂放大圖)磁場透射波在不同導電係數時的曲線

4.3.2 斜向入射

$$\theta = 30^\circ \quad \phi = 60^\circ \quad R = 35$$

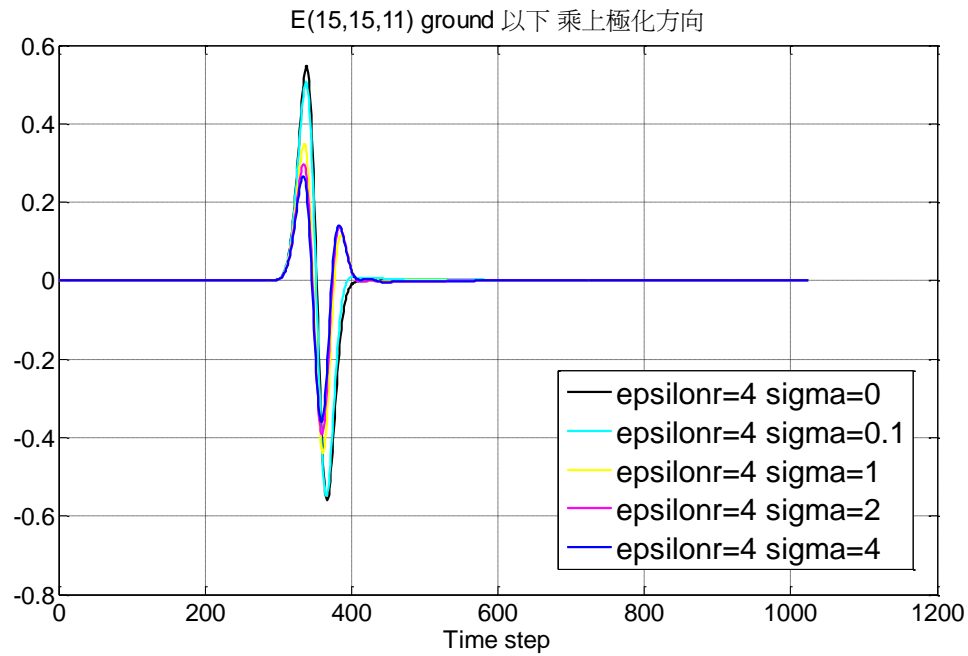


圖 64 電場透射波在不同導電係數時的曲線

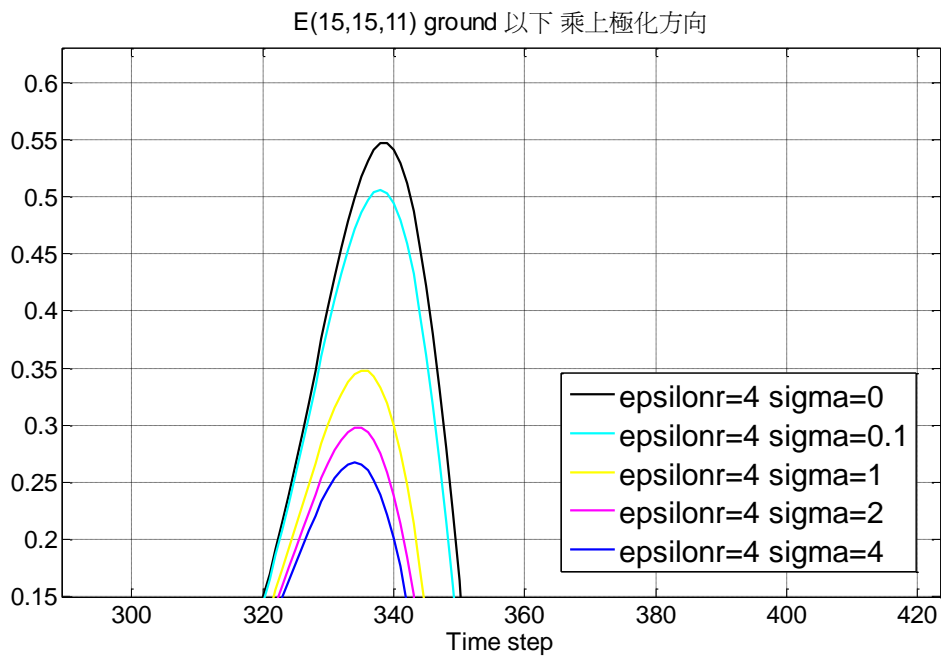


圖 65 (峰頂放大圖)電場透射波在不同導電係數時的曲線

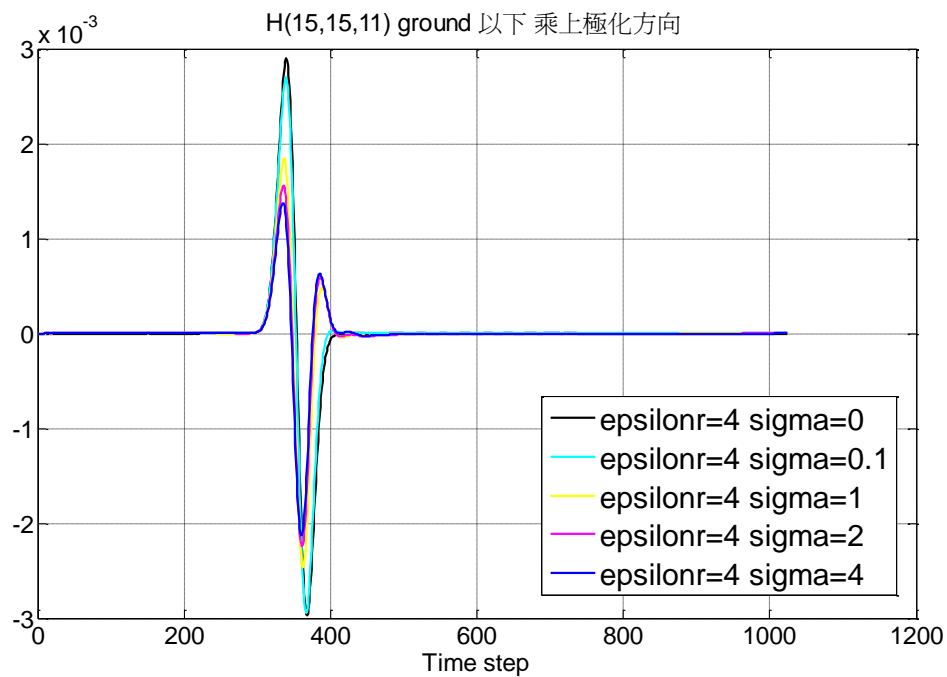


圖 66 磁場透射波在不同導電係數時的曲線

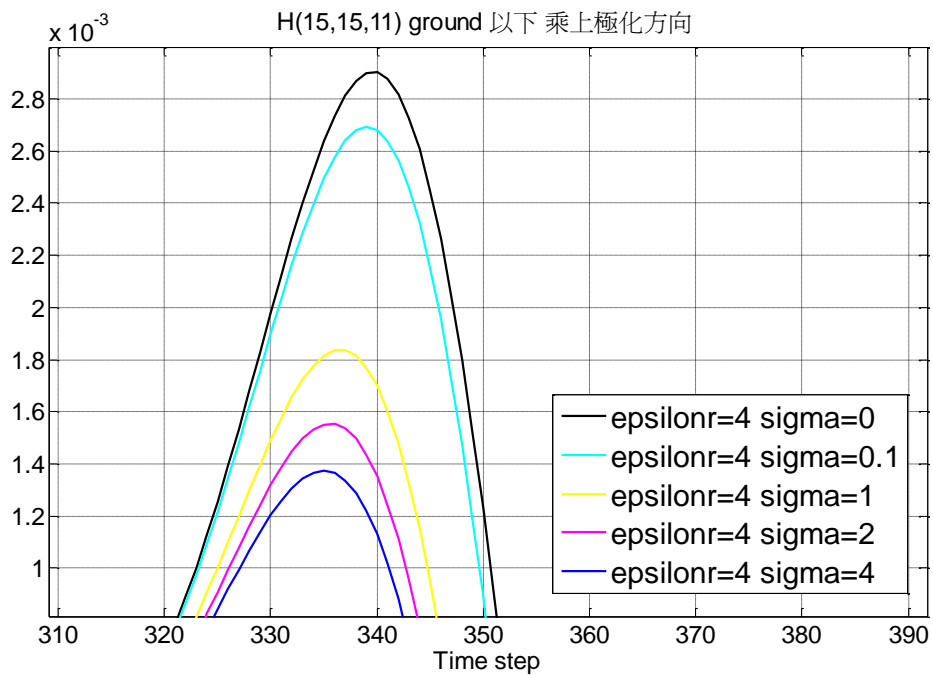


圖 67 (峰頂放大圖)磁場透射波在不同導電係數時的曲線

圖 60 到圖 67 是以 z_{ground} 為 20 所做出的模擬結果。

介質層裡沒有反射和入射的分量只有透射的分量(圖 20)，所以地表底下的這一點(15,15,11)我們看它的全場也就是透射場。

由圖 61、圖 63、圖 65 和圖 67 峰頂的放大圖可以觀察到，當導電係數越大時強度就會有衰減的情況，從這裡可以得証當有金屬物質也就是含有導電係數時，會有集膚深度效應進而導致電磁波衰減，當導電係數無窮大時(PEC)電磁波只存在該金屬的表面。

4.4 入射波與反射波的延遲

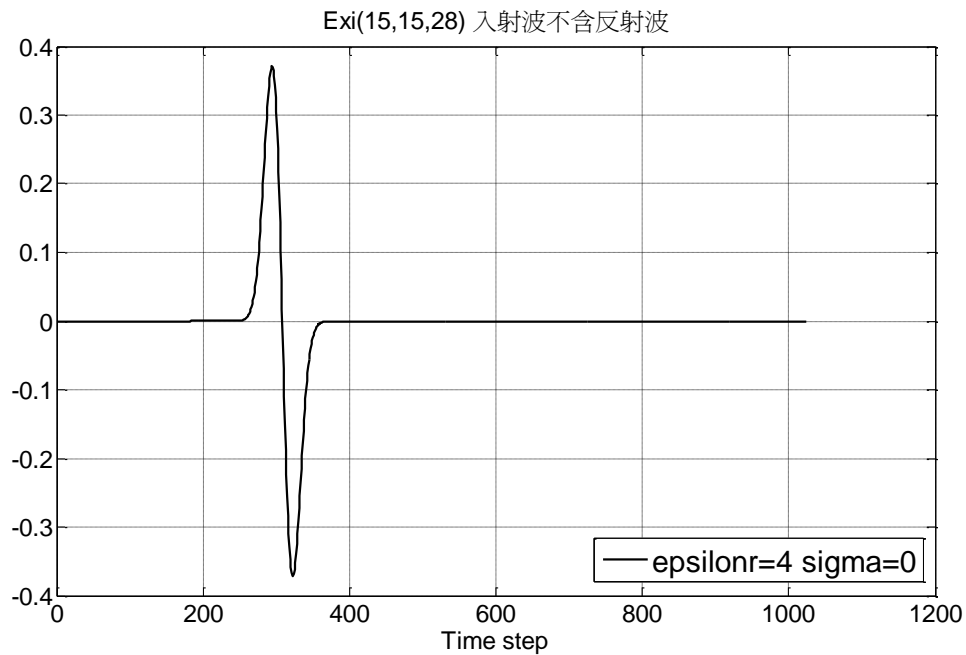


圖 68 電場在介質層以上入射波

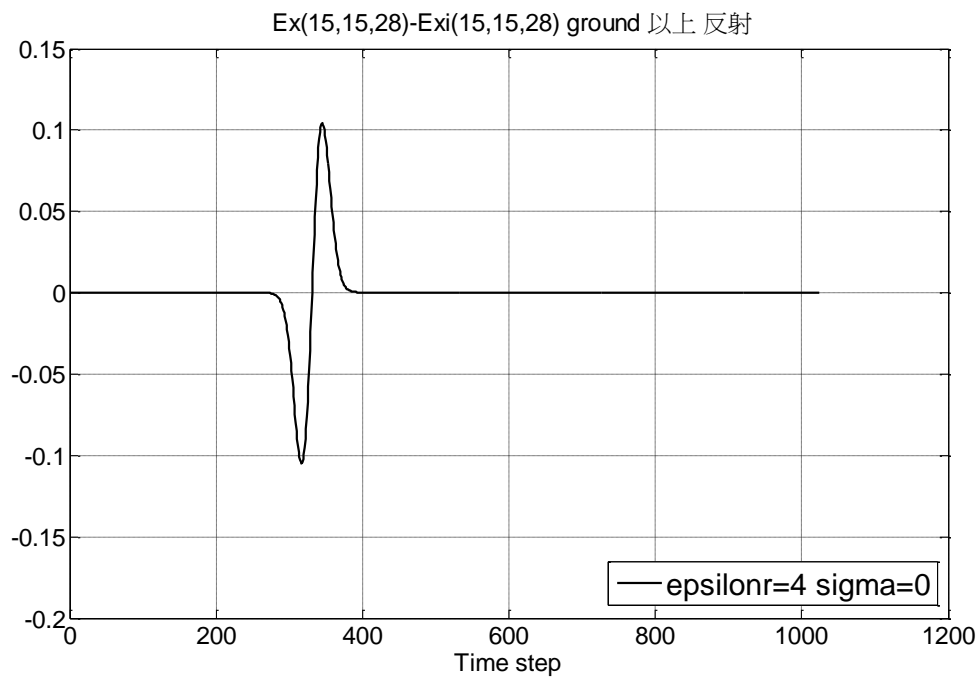


圖 69 電場介質層以上反射波

在這裡以電場在 x 方向為例，圖 68 為地表以上不含反射波的入射波，圖 69 為地表以上的反射波。

從圖 68 和圖 69 可以觀察出，當微分的高斯脈波入射在有介電常數的物質時，會改變其方向以及大小分量，會改變大小是因為有一部份的分量進入介質層裡。

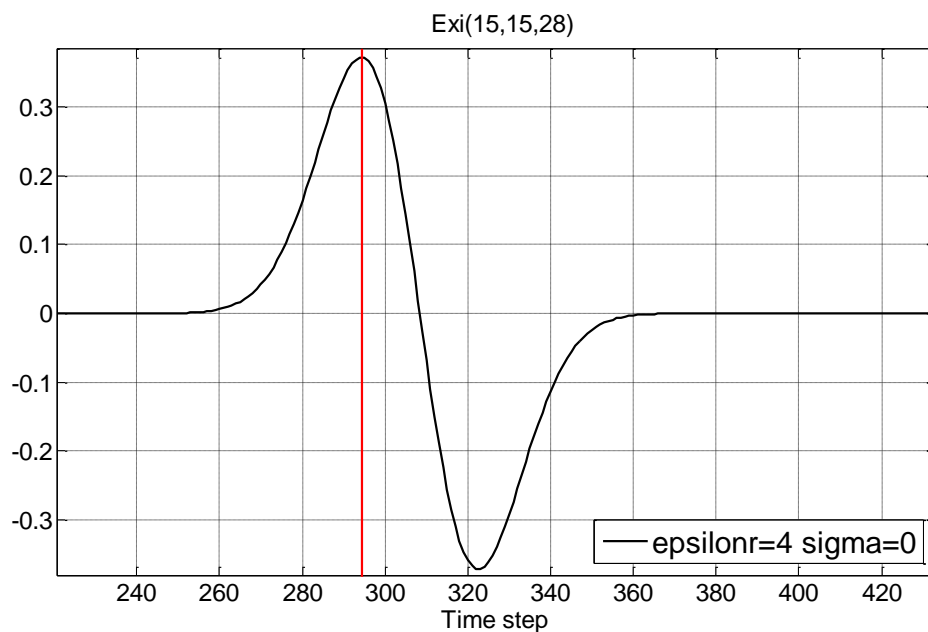


圖 70 電場在介質層以上入射波波峯放大圖

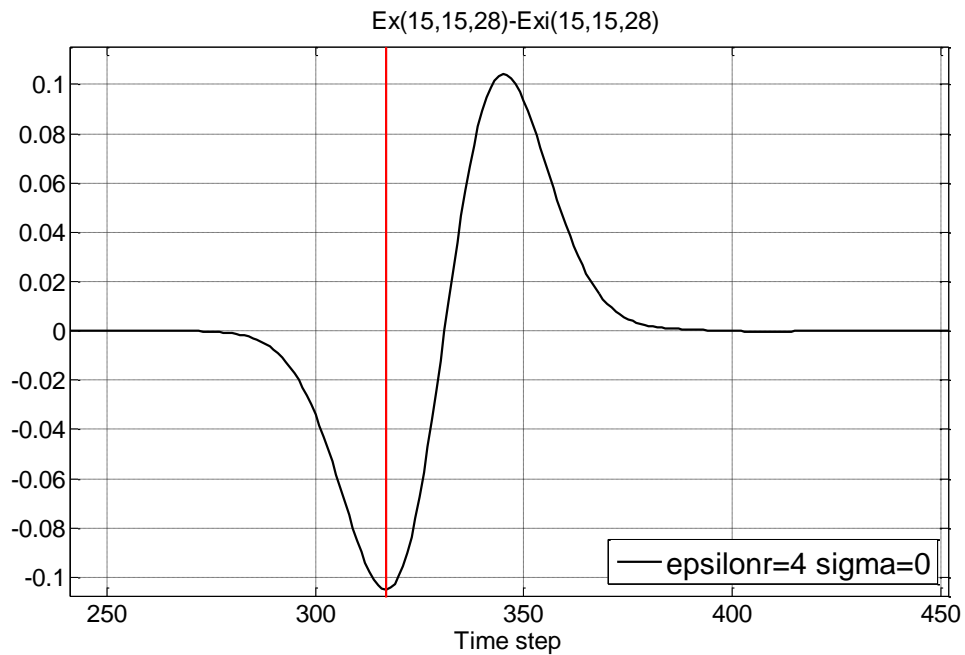


圖 71 電場介質層以上反射波波谷放大圖

為了觀察入射波和反射波的延遲狀況，我們把 z 軸的座標長度拉長，在總場裡 z 軸座標範圍是從 $z=10$ 到 $z=30$ 。由圖 70 和圖 71 紅色線的位置可以觀察出，在微分的高斯脈波波峯時，電場入射波在 294 time step 的地方，而電場反射波在波谷時則在 317 time step 的地方，可以明顯的看出延遲效應，電場入射波峯和反射波谷相差了 23 個 time step。

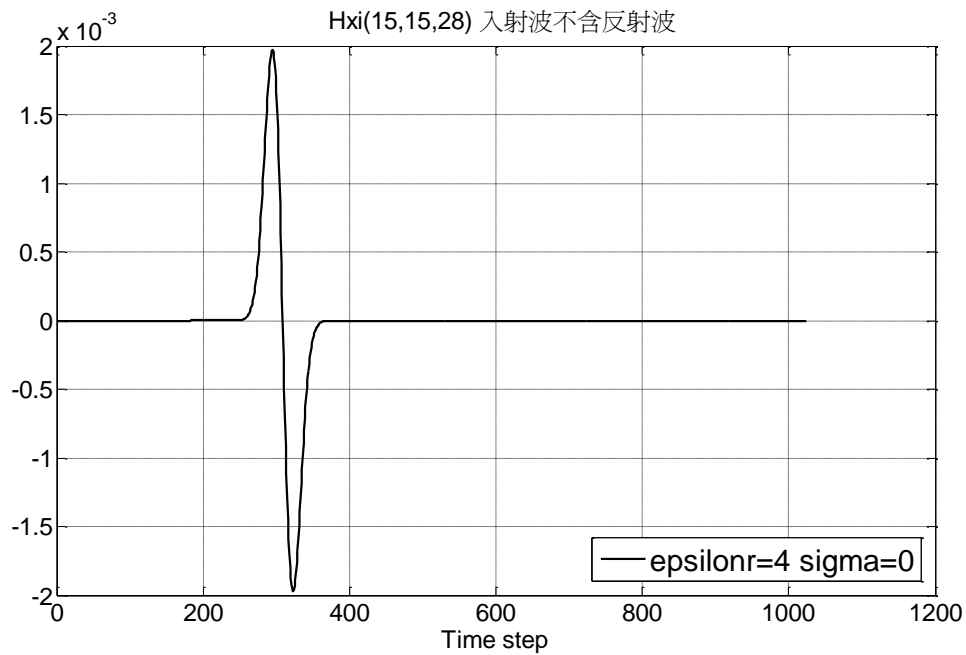


圖 72 磁場在介質層以上入射波

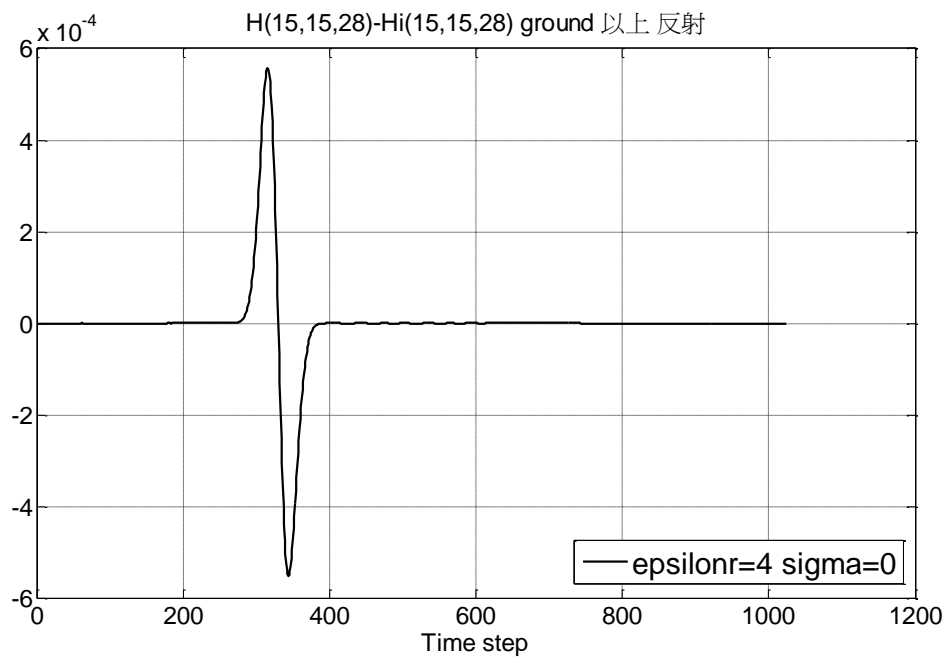


圖 73 磁場介質層以上反射波

同樣的以磁場在 x 方向為例，圖 72 為地表以上不含反射波的入射波，圖 73 為地表以上的反射波。

從圖 72 和圖 73 可以觀察出，當微分的高斯脈波入射在有介電常數的物質時，會改變其大小分量但不會改變其方向，因為 TM 波磁場在 x 、 y 平面上所以只有反射電場會改變方向，有符合 TM 波的物理意義，如圖 74，而改變大小的原因是因為有一部份的磁場分量進入了介質層裡。

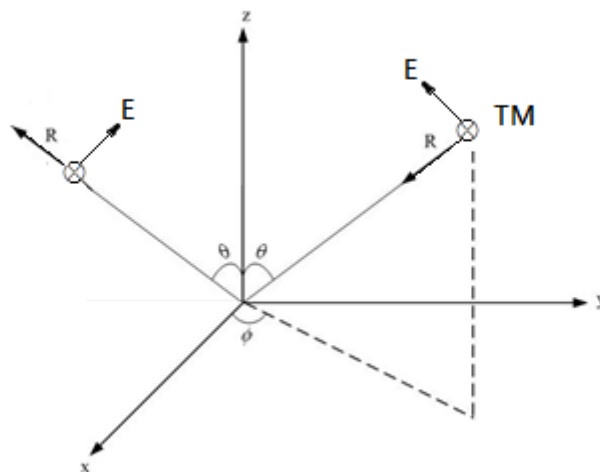


圖 74 三維空間 TM 波入射和反射的示意圖

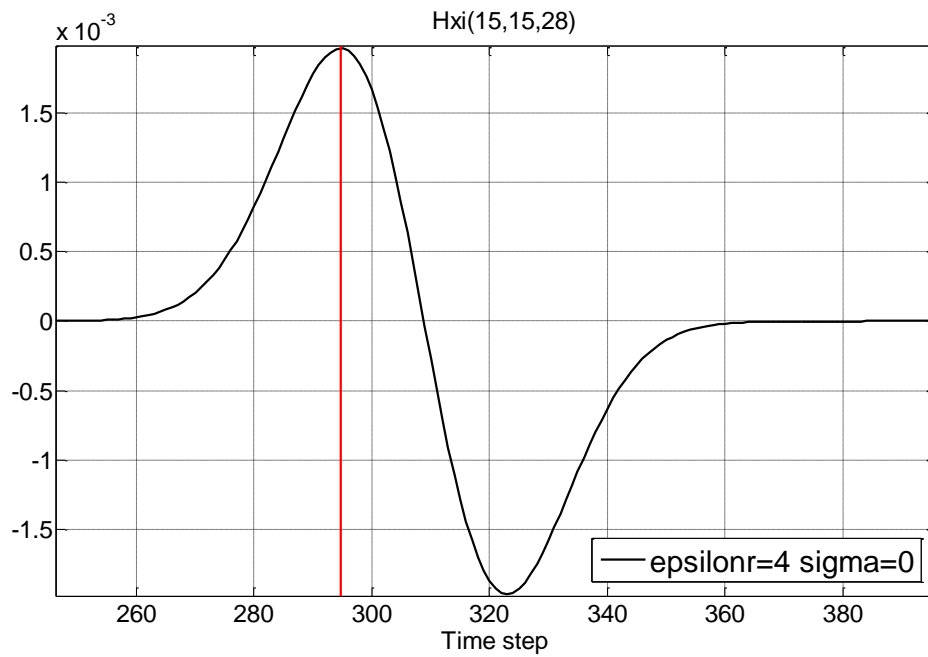


圖 75 磁場在介質層以上入射波波峯放大圖

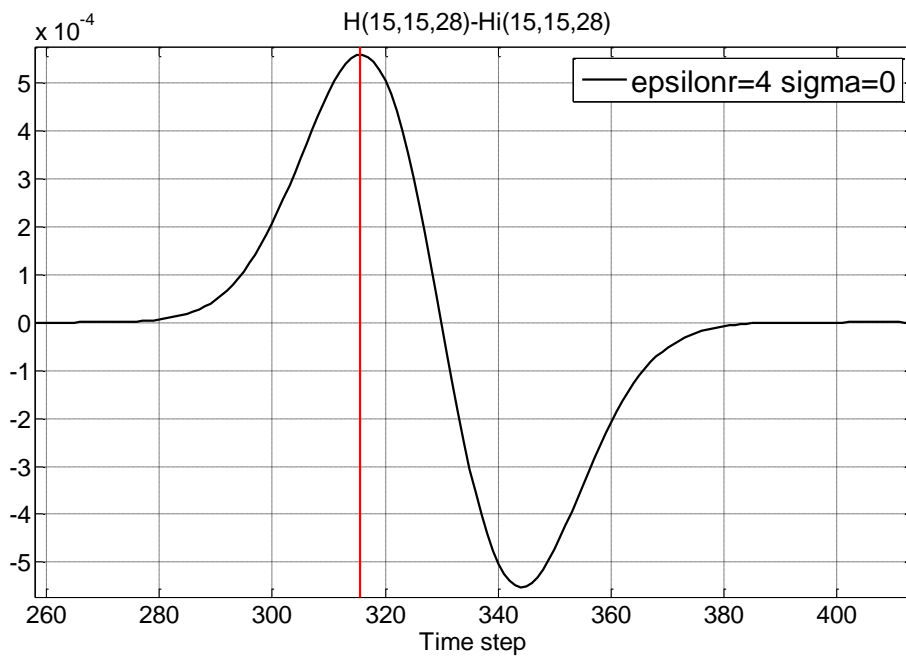


圖 76 磁場介質層以上反射波波谷放大圖

由圖 75 和圖 76 紅色線的位置可以觀察出，在微分的高斯脈波波峯時，磁場入射波在 295 time step 的地方，而磁場反射波在波峯時則是在 316 time step 的地方，所以可以明顯的看出延遲效應，入射波峯和反射波峯相差了 21 個 time step。

4.5 DFT 頻譜累加到一半和 iFFT 比較

這裡以斜向入射 $\theta = 30^\circ, \phi = 60^\circ, R = 35$ 在有損半空間中 $\varepsilon_r = 4, \sigma_g = 0.1$ 來舉例。

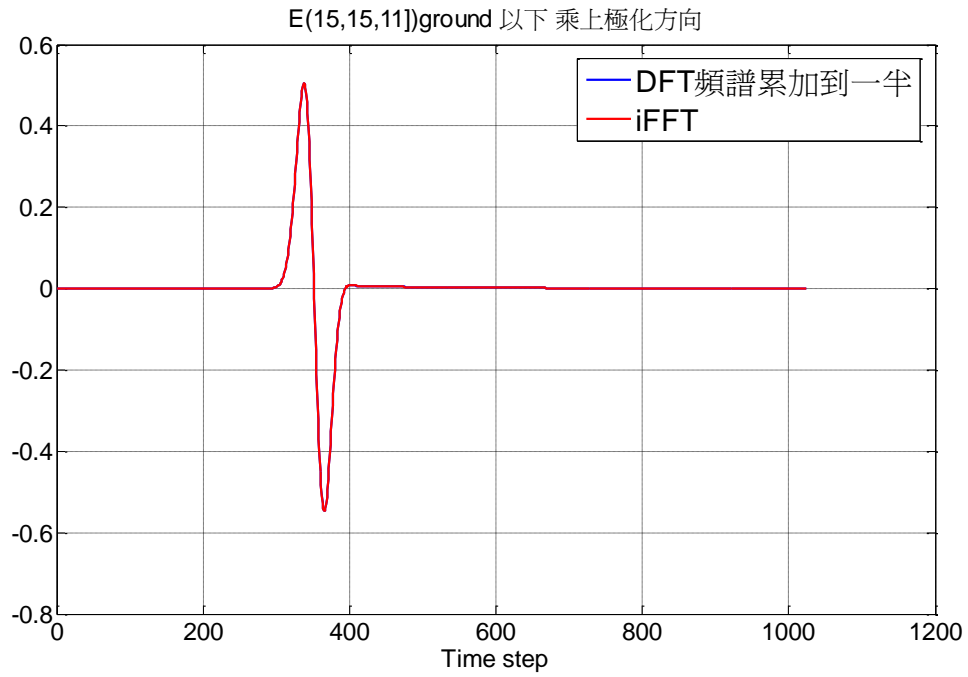


圖 77 電場透射場在有損介質層裡

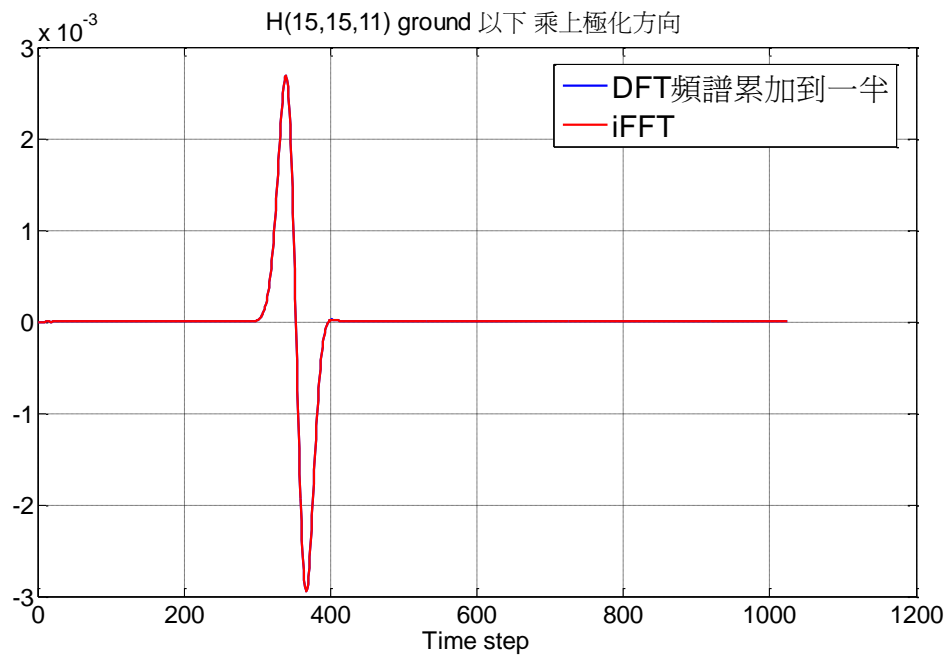


圖 78 磁場透射場在有損介質層裡

從圖 77 和圖 78 可以看出使用 DFT 頻譜累加到一半和使用本論文提出的方法 iFFT 結果吻合的相當好，但在相同的大小模擬空間 $x=30$ 、 $y=30$ 、 $z=40$ ，iFFT 需要 1.3 個小時左右而使用 DFT 頻譜累加到一半只需 23 分鐘左右，省下了三倍半的時間，這樣一來就可以模擬更大的有損半空間。

4.5.1 模擬時間比較

	$x=30 \ y=30 \ z=40$ $\varepsilon_r=4 \ \sigma_2=0.1$ 輸出檔案個數相同	$x=30 \ y=30 \ z=40$ $\varepsilon_r=4 \ \sigma_2=0.1$ 輸出檔案個數相同
採用作法	iFFT	DFT頻譜累加到一半
計算花費時間	4945 seconds (約1.373 hrs)	1403 seconds (約23.3833 min)

表格 1

	$x=30 \ y=30 \ z=40$ 斜向入射 輸出檔案個數相同	$x=136 \ y=136 \ z=50$ 斜向入射 輸出檔案個數相同
$\varepsilon_r=4 \ \sigma_2=0$ 計算花費時間	1317 seconds (約21.95 min)	36777 seconds (約10.2158 hr)
$\varepsilon_r=4 \ \sigma_2=4$ 計算花費時間	1426 seconds (約23.7666 min)	39876 seconds (約11.0766 hr)

表格 2

4.6 不同高度與深度的反射波與透射波比較

4.6.1 $\varepsilon_r = 4$ $\sigma_g = 0$

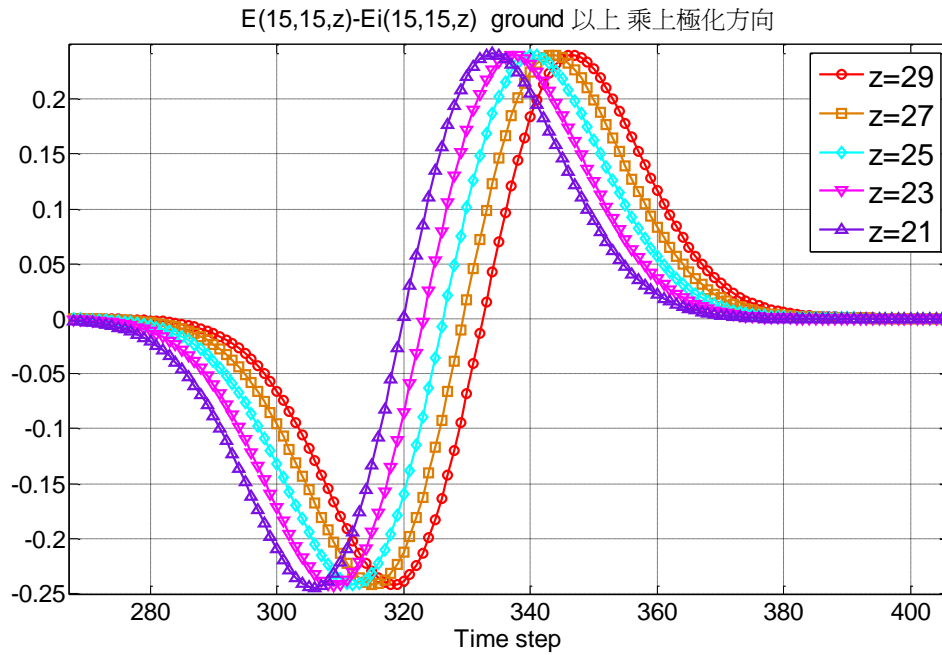


圖 79 電場反射波在不同高度

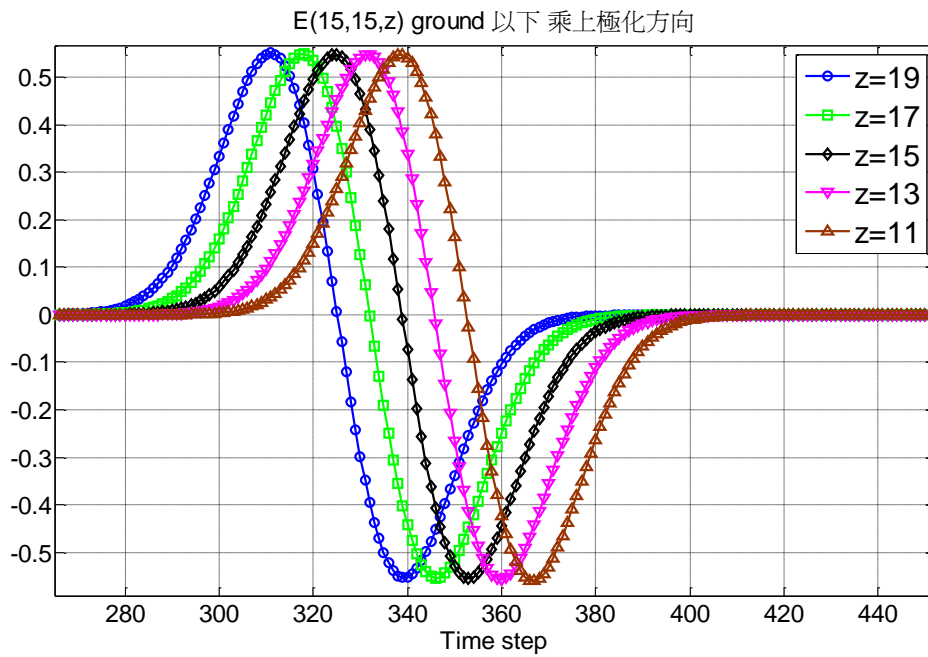


圖 80 電場透射波在不同深度

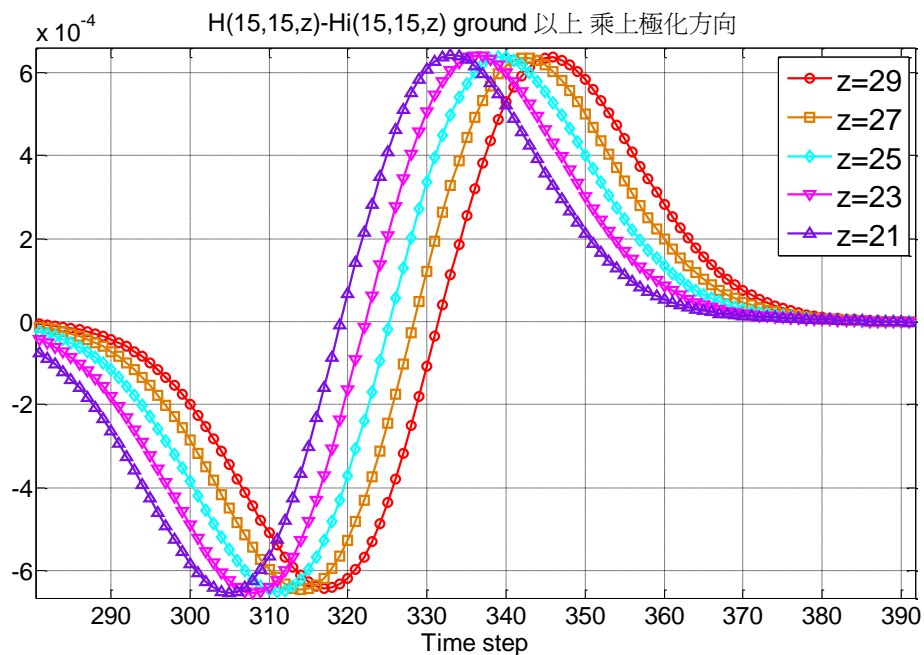


圖 81 磁場反射波在不同高度

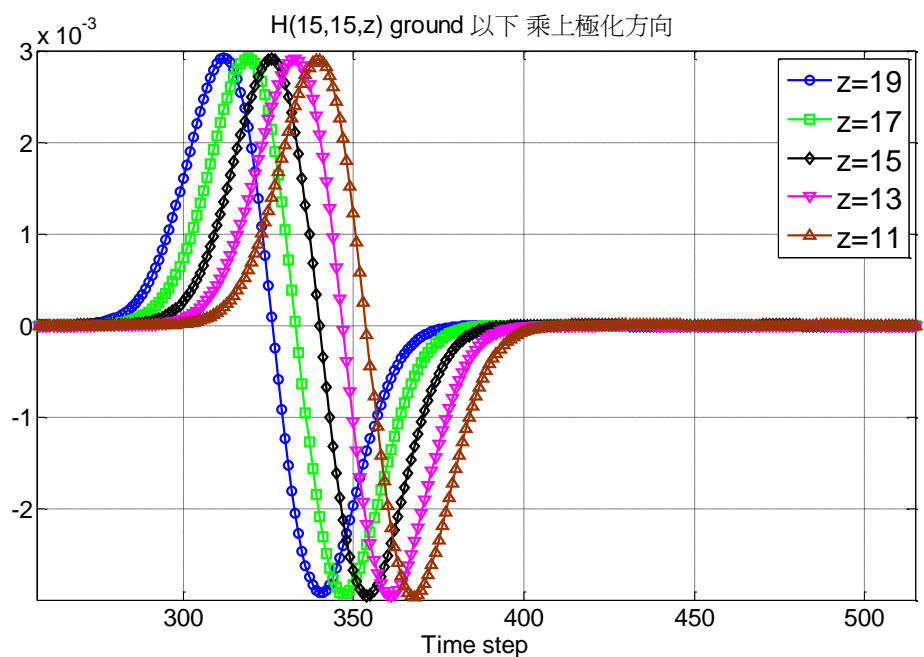


圖 82 磁場透射波在不同深度

從圖 79 到圖 82 可以觀察到，在介質層無損的情況下，在不同高度電場和磁場的反射波強度都一樣，在不同的深度電場和磁場的透射波強度也都一樣。

4.6.2 $\varepsilon_r = 4$ $\sigma_g = 0$

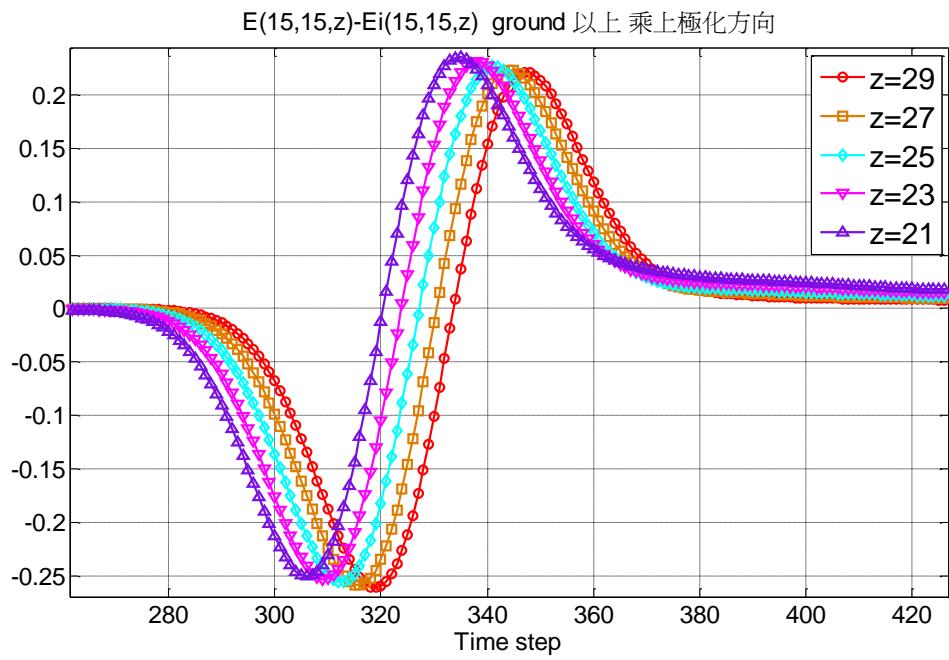


圖 83 電場反射波在不同高度

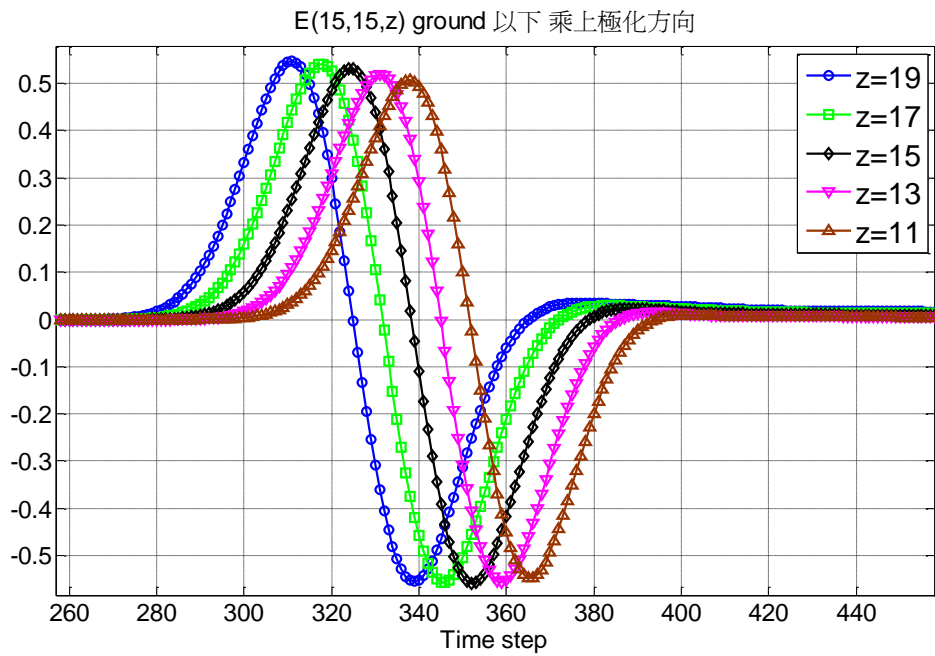


圖 84 電場透射波在不同深度

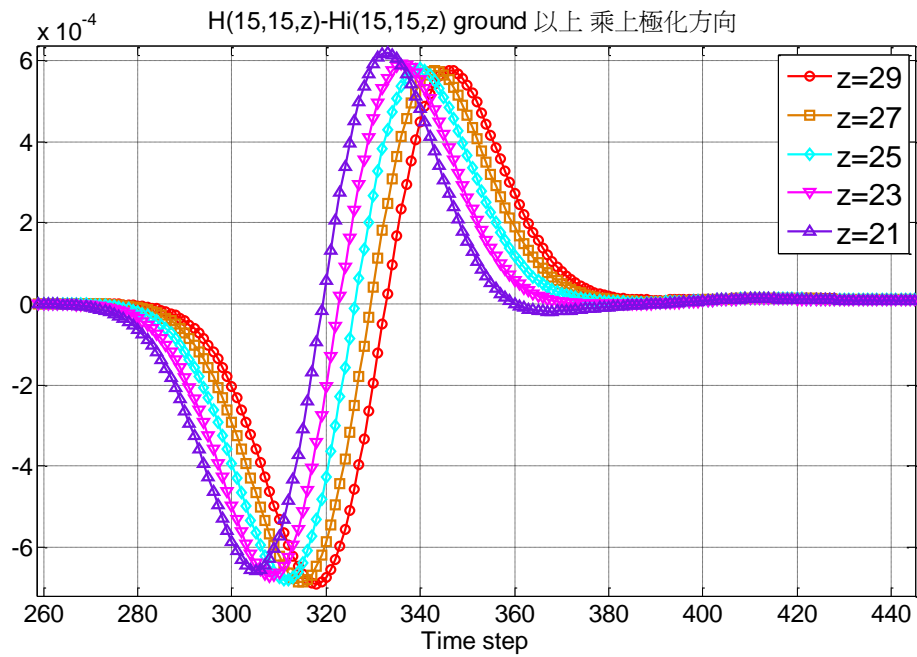


圖 85 磁場反射波在不同高度

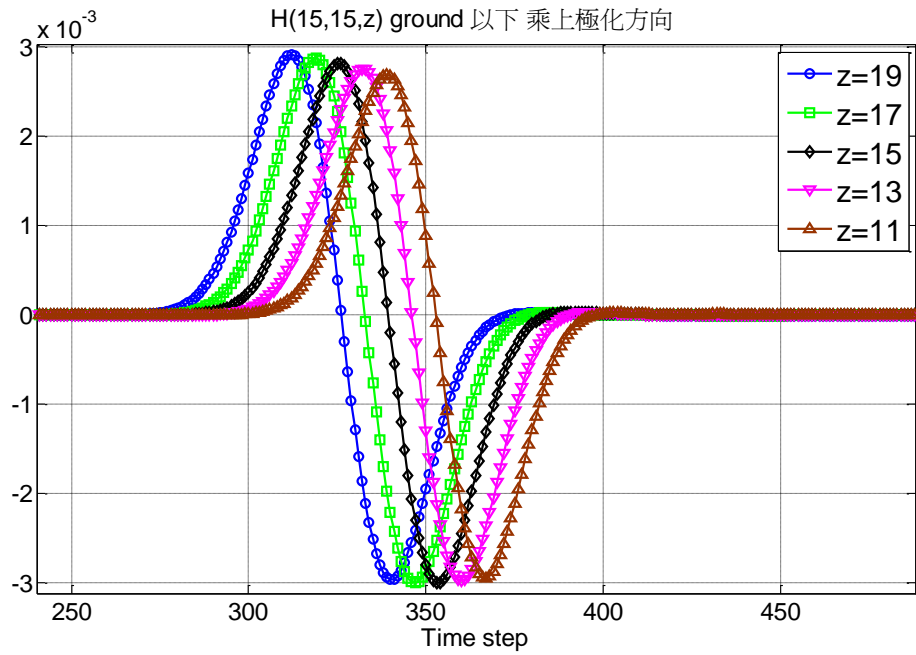


圖 86 磁場透射波在不同深度

從圖 83 到圖 86 可以觀察到，在介質層裡當導電係數為 0.1 的情況下，反射電場和反射磁場會隨著距離越高強度越小，透射電場和透射磁場會隨著深度越深強度越小，有衰減的情形發生。

4.6.3 $\varepsilon_r = 4$ $\sigma_g = 1$

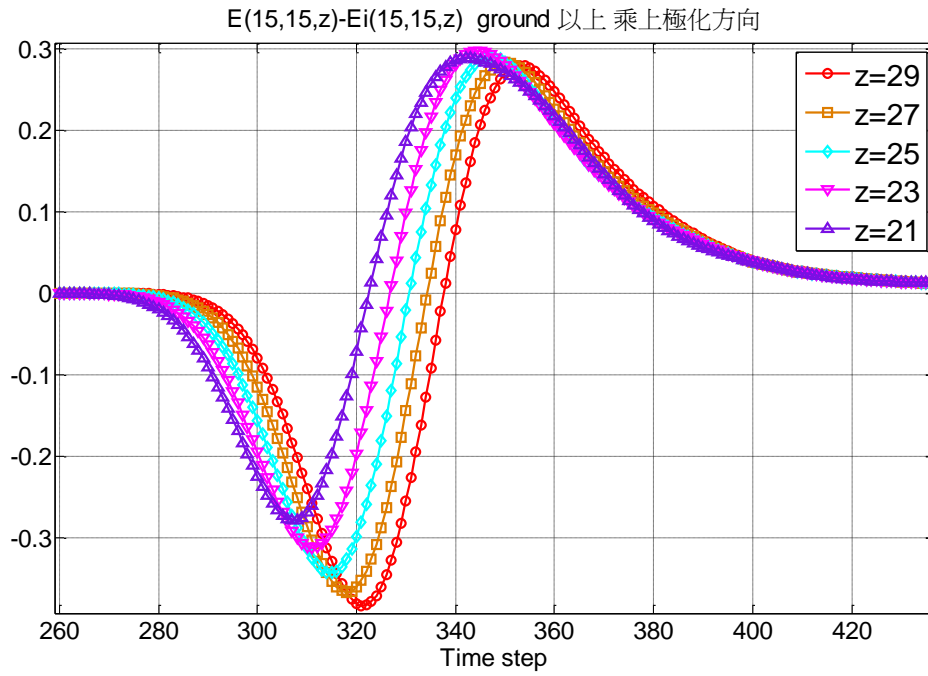


圖 87 電場反射波在不同高度

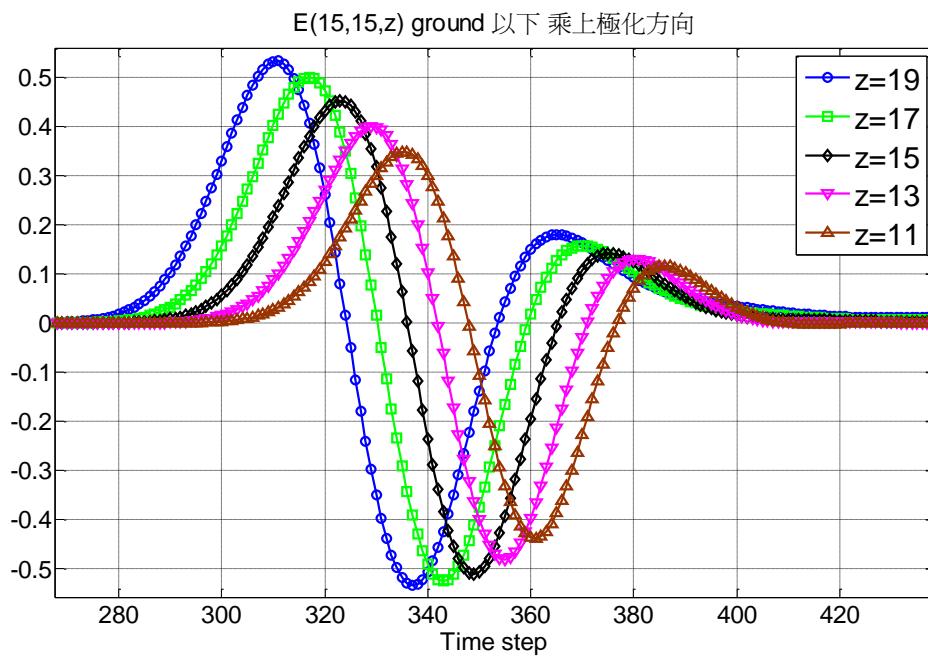


圖 88 電場透射波在不同深度

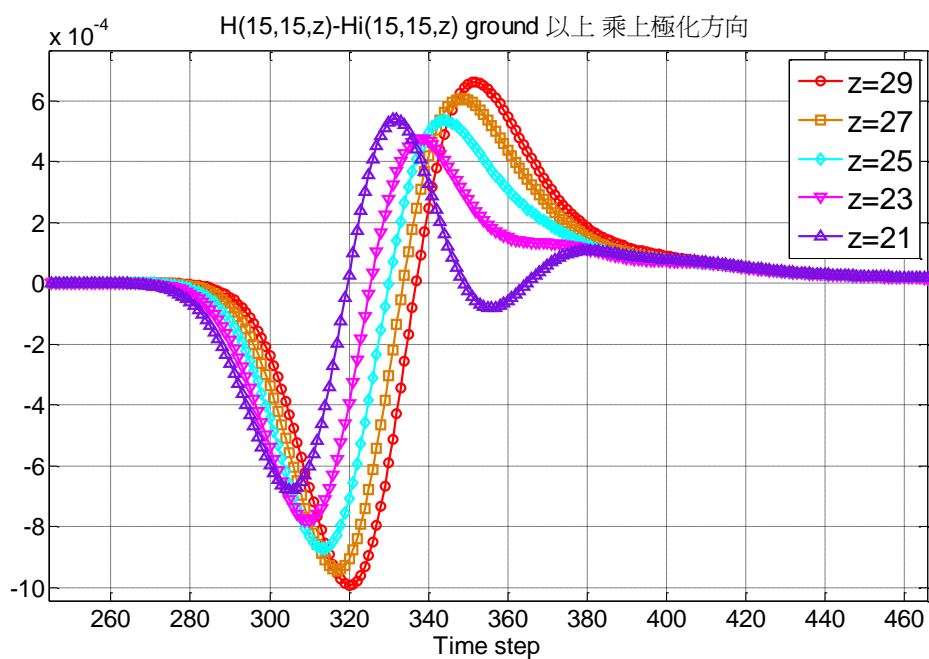


圖 89 磁場反射波在不同高度

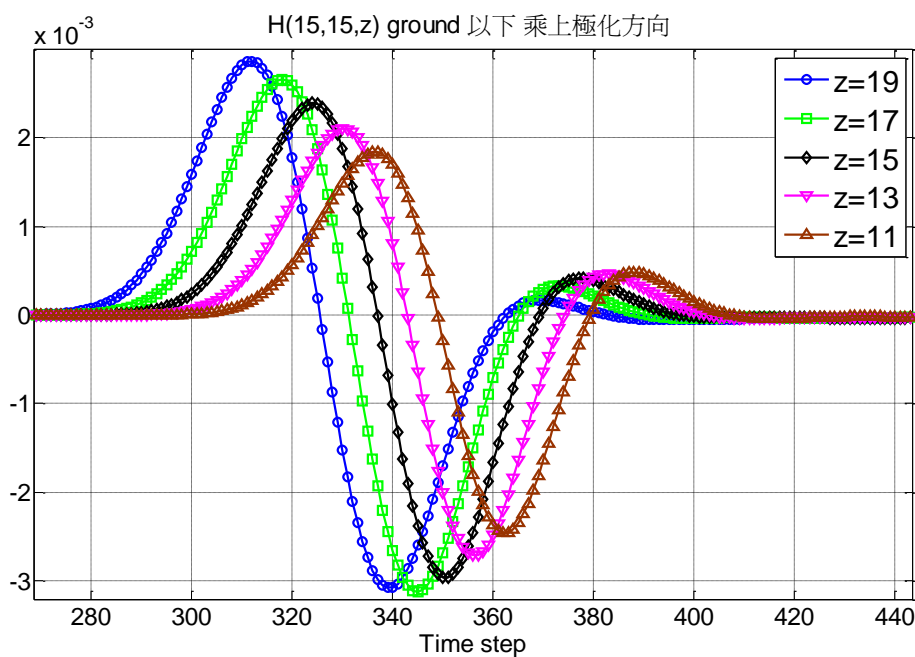


圖 90 磁場透射波在不同深度

從圖 87 到圖 90 可以觀察到，在介質層裡當導電係數為 1 的情況下，反射電場和反射磁場會隨著距離越高強度有先變小在變大的趨勢，透射電場和透射磁場會隨著深度越深強度越小，有衰減的情形發生。

4.6.4 $\varepsilon_r = 4$ $\sigma_g = 2$

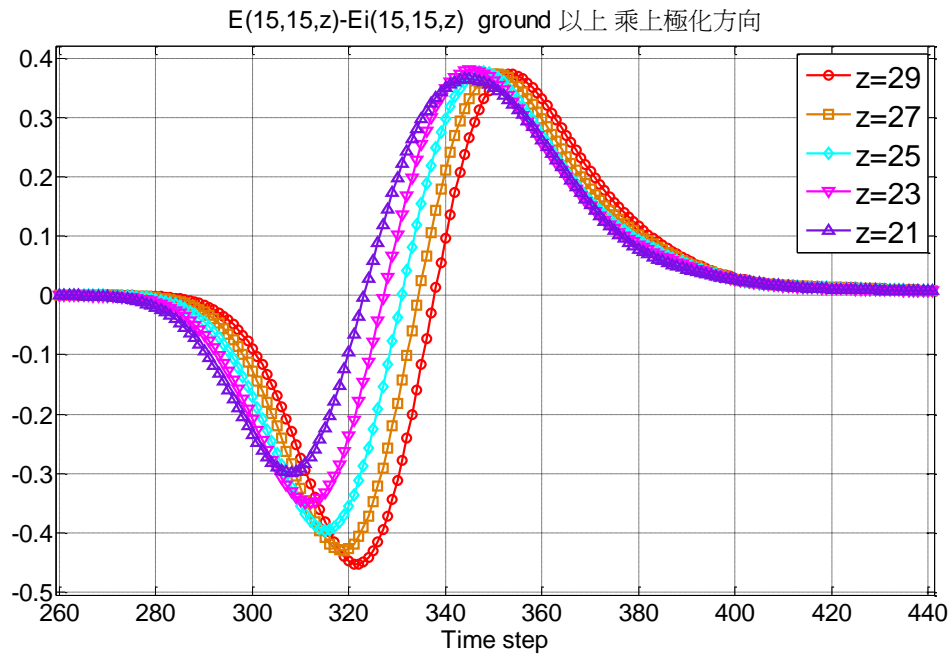


圖 91 電場反射波在不同高度

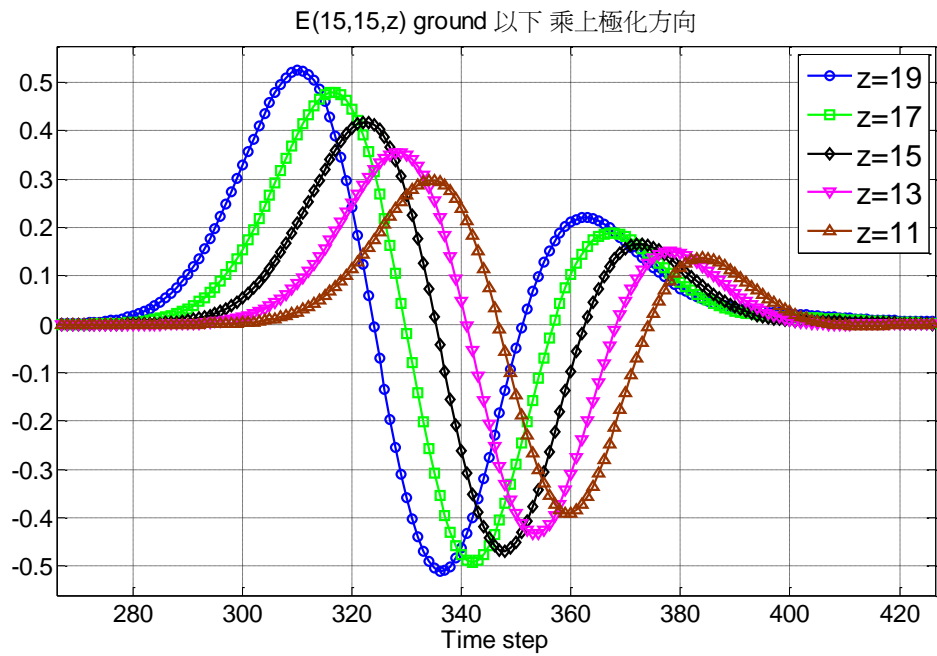


圖 92 電場透射波在不同深度

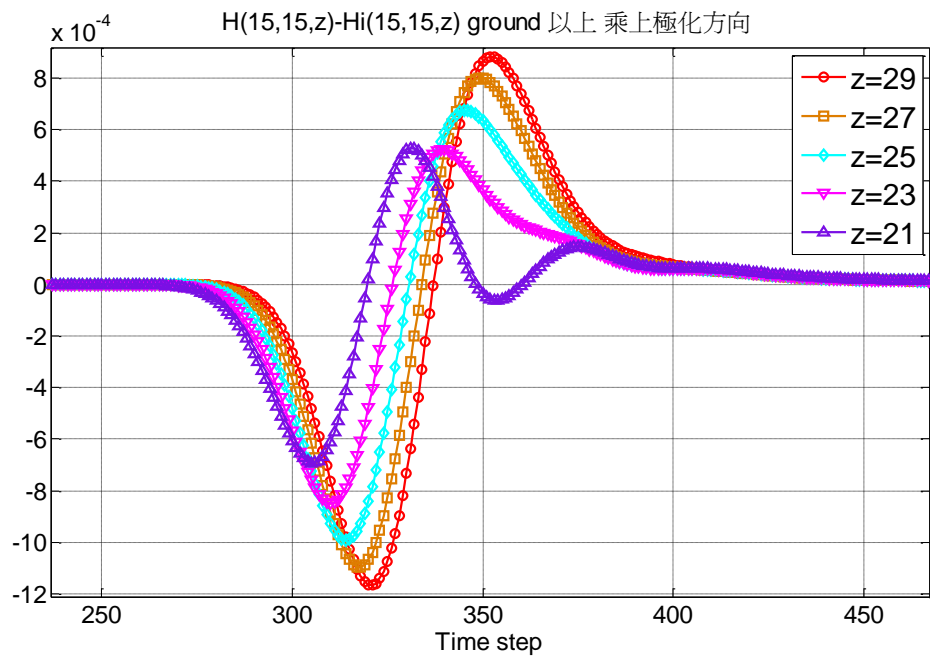


圖 93 磁場反射波在不同高度

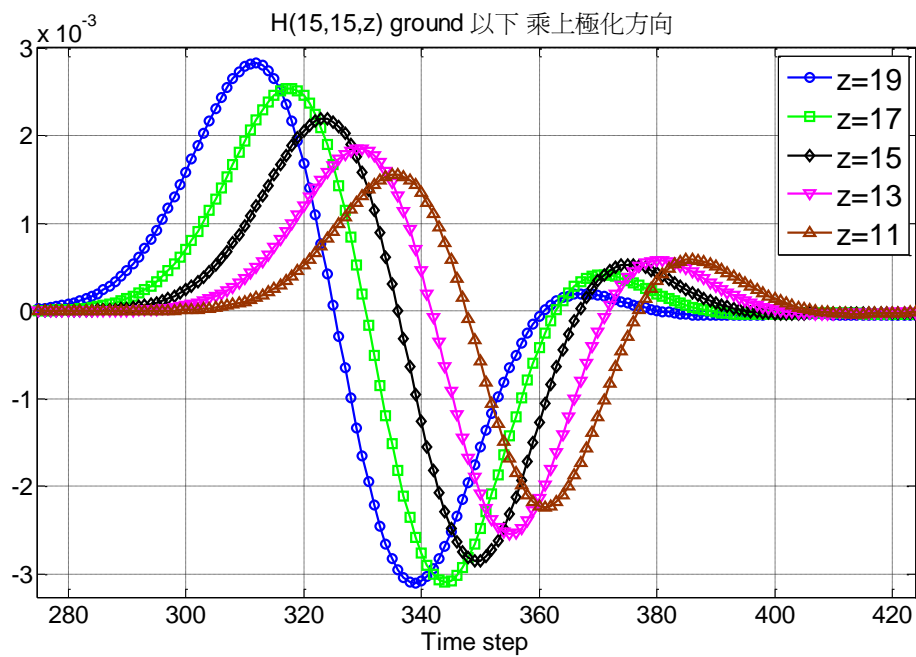


圖 94 磁場透射波在不同深度

從圖 91 到圖 94 可以觀察到，在介質層裡當導電係數為 2 的情況下，反射電場和反射磁場會隨著距離越高強度有先變小在變大的趨勢，透射電場和透射磁場會隨著深度越深強度越小，有衰減的情形發生。

4.6.5 $\varepsilon_r = 4$ $\sigma_g = 4$

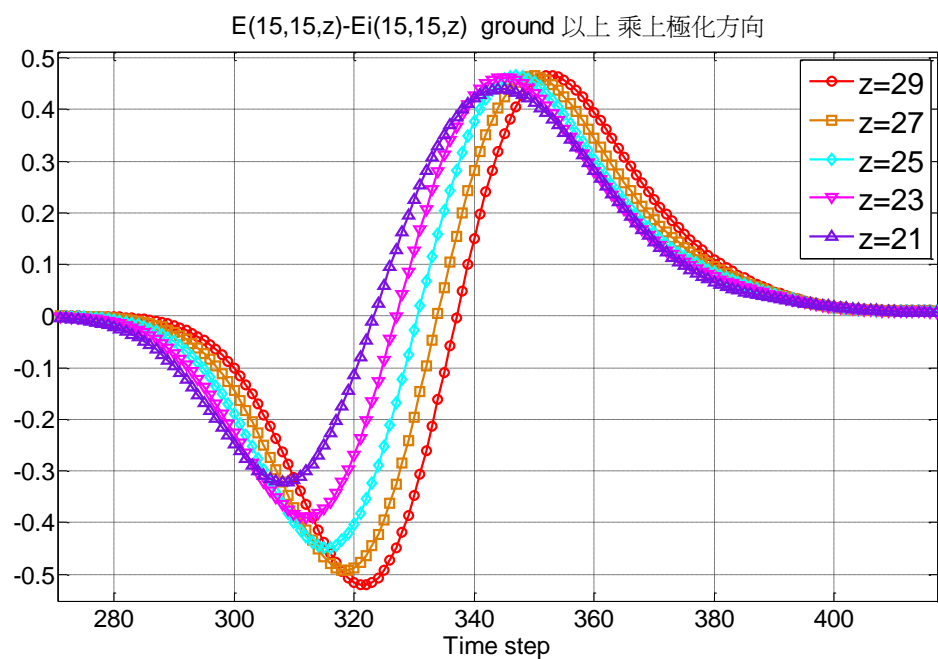


圖 95 電場反射波在不同高度

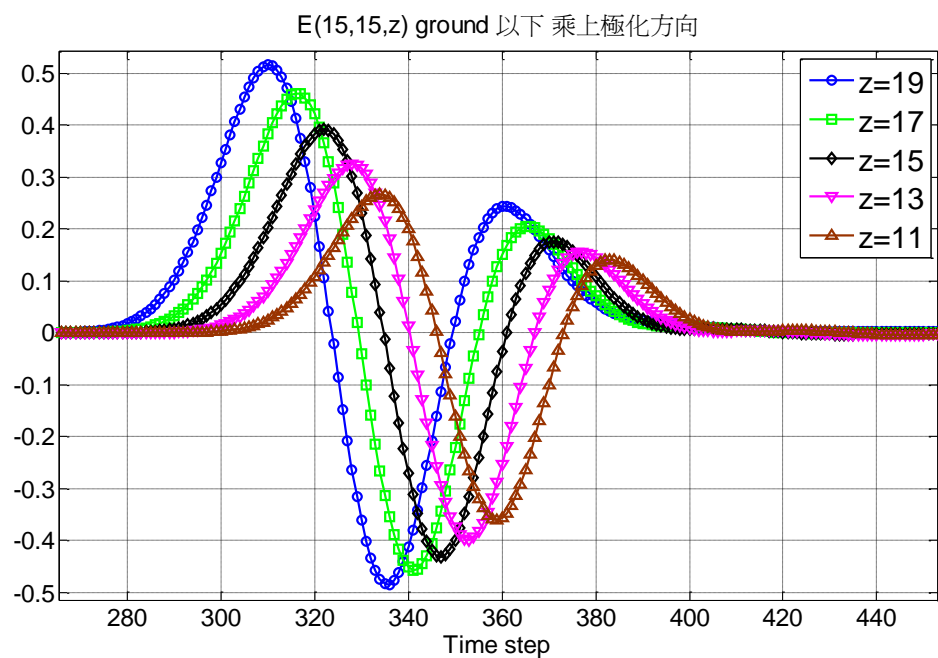


圖 96 電場透射波在不同深度

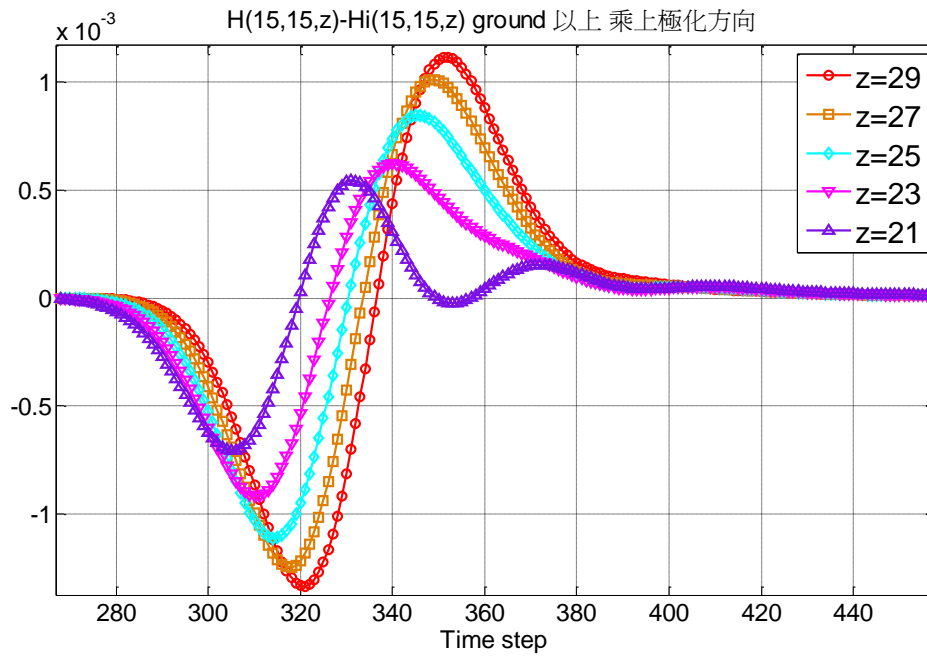


圖 97 磁場反射波在不同高度

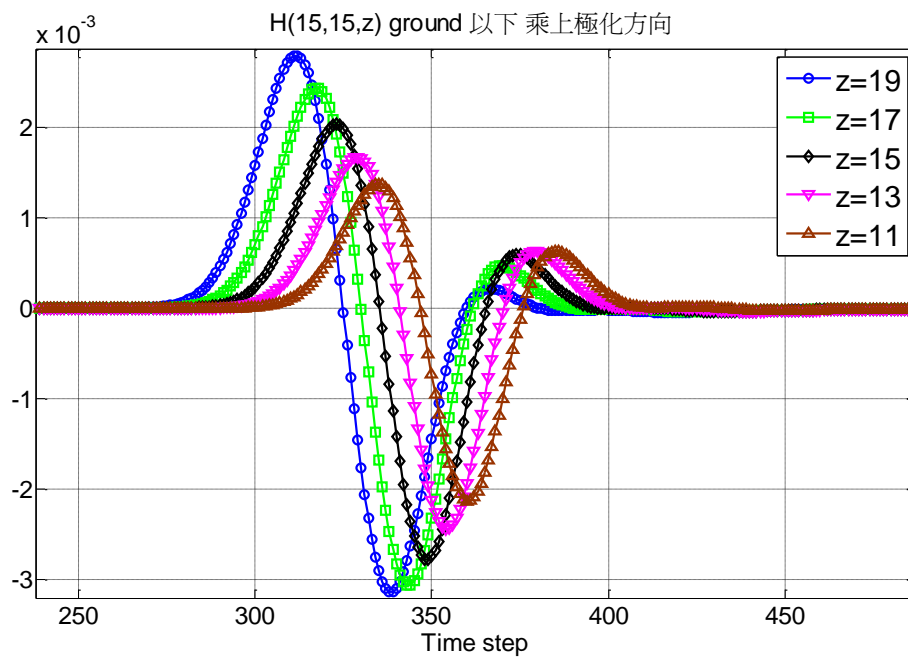


圖 98 磁場透射波在不同深度

從圖 95 到圖 98 可以觀察到，在介質層裡當導電係數為 4 的情況下，反射電場和反射磁場會隨著距離越高強度越大，透射電場和透射磁場會隨著深度越深強度越小，有衰減的情形發生。

從圖 84、圖 86、圖 88、圖 90、圖 92、圖 94、圖 96 和圖 98 可以觀察出，同樣的導電係數下，透射磁場和透射電場在越深的地方其強度會越小。

而從圖 79 到圖 98 則可以證時，反射波與透射波的接收時間，反射波的地方高度越高反射的曲線越後面才出現，相反的高度越低反射波接收到的時間越早曲線也就越早出現，透射波的地方也是相同的道理。

4.7 不同脈波寬度的反射波與透射波比較

$$\varepsilon_r = 4 \quad \sigma_g = 4$$

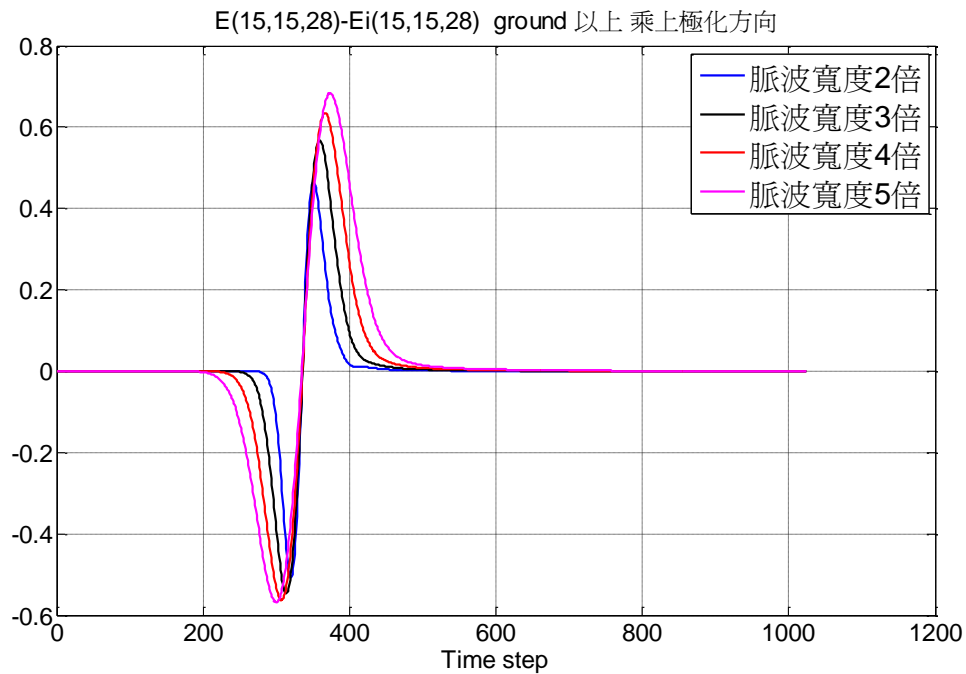


圖 99 不同脈波寬度倍數電場反射波比較

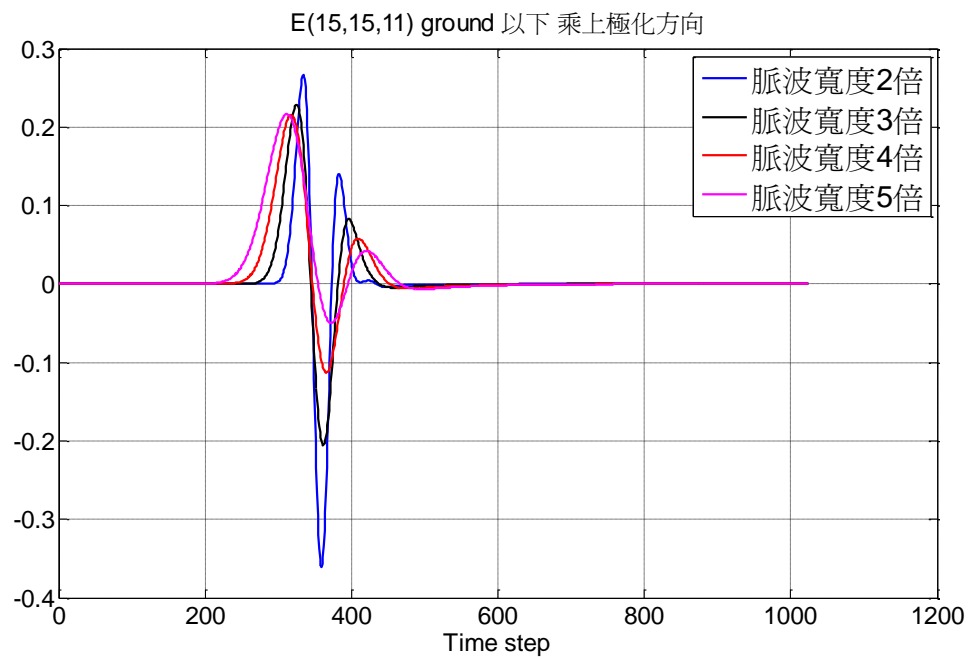


圖 100 不同脈波寬度倍數電場透射波比較

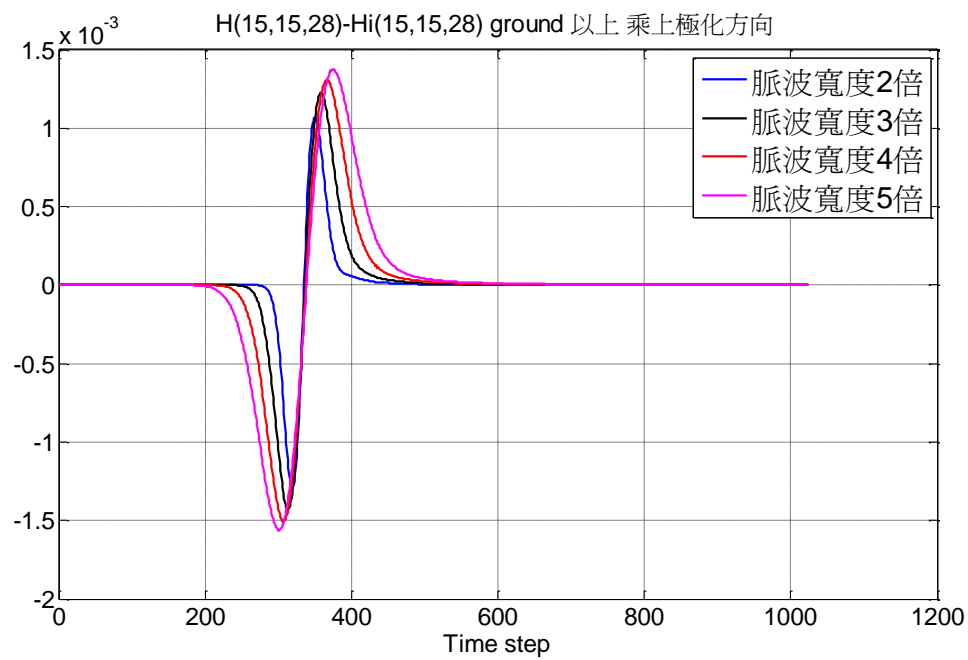


圖 101 不同脈波寬度倍數磁場反射波比較

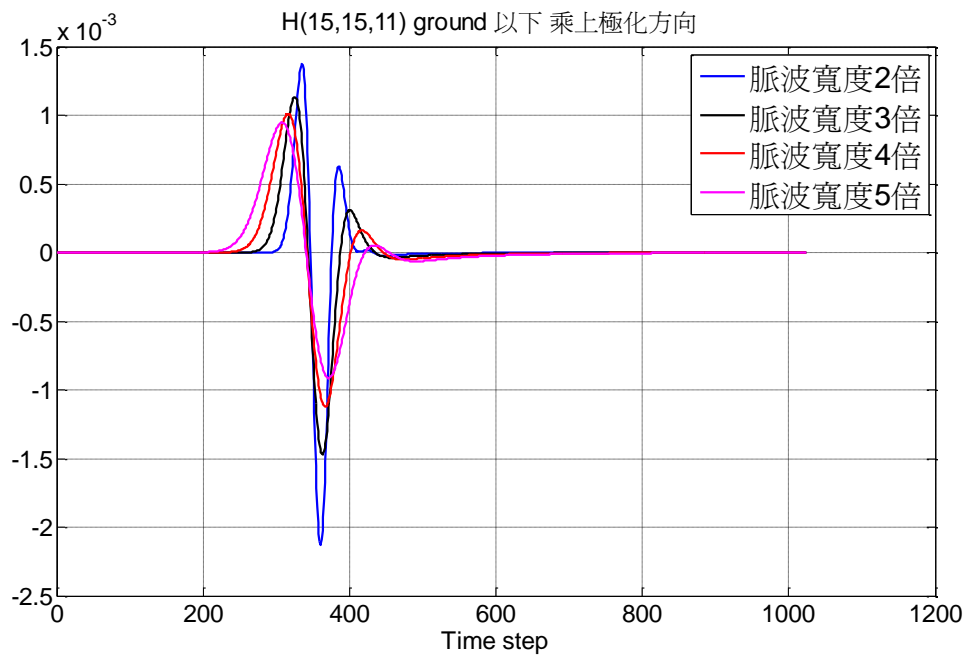


圖 102 不同脈波寬度倍數磁場透射波比較

圖 99 到圖 102 是在同一介電係數與導電係數之下，不同脈波寬度倍數的反射波與透射波比較，換句話說就是不同頻率的反射波與透射波比較。

從圖 99 和圖 101 可以觀察出，當脈波寬度倍數越大也就是低頻成份越多，反射波的脈波強度越強且曲線越圓滑。

從圖 100 和圖 102 可以觀察出，當脈波寬度倍數越大也就是低頻成份越多，透射波的脈波強度越小且曲線越圓滑。

第五章 結論

本篇論文探討的主要是當無窮遠處的平面波，入射到有損耗的半空間時，所採取的方法。因為現實生活環境中，大部份的物質都是有損的，為了更貼近實際情況，採用本實驗室先前所開發的程式，平面波正向入射自由空間(free space)和斜向入射於半空間，進行有損程式化的實現。測試結果相當的精準，反射波方面在測試無損介質時，因反射波的方向都一致，所以在地以上的不同點可以採用線性內差的方法，而使用線性內差方式取出的數值所呈現的反射波和代入反射係數公式的數值比較，曲線幾乎是吻合的。

至於透射波方面還需要考慮到其它的因素，因為在有損介質時，透射角度 θ_t 在不同頻率時有不同的值，所以不能像反射波一樣採線性內差的方式，因而在求得透射波數值方面，需使用本論文所提出的方法，在頻域時先把微分的高斯脈波乘上頻域時的透射係數，然後再乘以頻域時平面波從自由空間到接觸介質層的延遲時間，最後再乘上頻域時的衰減係數項和頻域時的相位常數項，整個過程完成之後，把它反快速傅立葉轉換到時域。此外透射電場和透射磁場還需再乘上在 x 軸、 y 軸、 z 軸各分量的極化方向。用此方法模擬無損介質透射波所得到的數值也幾乎和使用透射係數公式的值一樣。所以從這個模擬結果可以更加的確定，使用這兩種方法測試平面波入射於有損半空間時的反射波和透射波，結果也會相對的精準，而透射波採用 DFT 頻譜累加到一半的方法比起 iFFT 則會省下很多的模擬時間。

從模擬結果來看，當介質層的導電係數越大，反射波也就越大，透射波方面因為有 α 衰減係數的影響，所以透射波強度會隨著導電係數越大而變小，證實了有損介質會有集膚深度效應，當導電係數趨近無窮大，稱做完美導體(PEC)，電磁波就無法穿透進完美導體裡，只存在於導體表面。

所以本論文所提出的方法，可以精準的模擬平面波正向及斜向入射於半空間無損介質時的情況，但主要是模擬平面波正向及斜向入射於半空間有損介質時，其結果也都符合物理現象。

參考文獻

1. K.S. Yee, "Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's Equation in Isotropic Media," *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, AP-14(3): 302~307, May 1966
2. James G. Maloney and Glenn S. Smith, "The Use of Surface Impedance Concepts in the Finite-Difference Time-Domain Method," *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, January AP-40(1): 38~48, 1992
3. M. Jauregui and P. Borderies, "An efficient initialization method for FDTD computation of plane wave scattering," *Antennas and Propagation Society International Symposium*, 1995. AP-S. Digest , vol.2, pp.848~851, 18-23 June 1995
4. 林振華，電磁場與天線分析(使用時域有限差分法(FDTD))，於 1999 全華科技圖書公司出版。
5. A. Taflove and S. C. Hagness, *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*, 2nd ed. Norwood, MA: Artech House, 2000.
6. John B. Schneider, "Plane Waves in FDTD Simulations and a Nearly Perfect Total-Field/Scattered-Field Boundary," *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, AP-52(12):3280-3287, Dec. 2004
7. Scott C. Winton, Panagiotis Kosmas and Carey M. Rappaport, "FDTD Simulation of TE and TM Plane Waves at Nonzero Incidence in Arbitrary Layered Media," *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, AP-53(5):1721-1728, May. 2005
8. Ilker R. Çapoğlu and Glenn S. Smith, "A Total-Field/Scattered-Field Plane-Wave Source for the FDTD Analysis of Layered Media," *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, AP-56(1): 158~169, January 2008
9. Tengmeng Tan and Mike E. Potter, "Perfectly Matched Plane Wave Source in FDTD via an Efficient Mixed Time-Frequency Block Filter Formulation," *Antennas and Propagation Society International Symposium*, 2009. APSURSI '09. IEEE ,1-5 June 2009

10. 黃陳暉, “使用有限時域差分法與完美匹配層分析斜向平面波入射於有損半空間,” 國立台灣海洋大學碩士論文, 2011年1月
11. Penghui Chen and Xiaojian Xu, “Introduction of Oblique Incidence Plane Wave to Stratified Lossy Dispersive Media for FDTD Analysis,” *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, AP-60(8): 3693~3705 , August 2012
12. Takuji Arima and Toru Uno, “FDTD Analysis of Induced Current of PEC Wire Which In Contact with Half Space Lossy Ground by Using Surface Impedance Boundary Condition,” *Proceedings of the 2013 International Symposium on Electromagnetic Theory*, pp.999~1002, 20-24 May 2013