Chapitre III

Abdallah Khemais

Isitcom

Novembre 2016

Introduction

Rappels :

Une variable aléatoire réelle (VAR) est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ où $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé. Lorsque $X(\Omega)$ est un ensemble discret on dit que X est une VAR discrète.

Pour **toutes** les VAR (discrètes ou non) on définit la fonction de répartition de X, que l'on note F_X, par $F_X(x) = P(X \leqslant x)$ pour tout réel x.

Notion de variable aléatoire à densité

Densité

Définition

Soit X une VAR définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$
et F_X sa fonction de répartition.
On dit que X est **une variable aléatoire réelle à densité**
s'il existe une fonction $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

(i) f_X est à valeur réelles positives ou nulles

(ii) f_X est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points

(iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,dt$ est convergente et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,dt = 1$

(iv) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$

La fonction f_X s'appelle alors **une densité** de la variable aléatoire X.

Nous admettrons le théorème suivant, qui nous permet de vérifier si une fonction f donnée est une densité d'une variable X.

Théorème

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant :

(i) f est à valeur réelles positives ou nulles

(ii) f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points

(iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$

alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et une variable aléatoire réelle X définie sur cet espace, tels que f est une densité de la variable X.
On dit alors que f est une **densité de probabilité**.

Exemple 1:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

Montrons que c'est une densité de probabilité.

Caractérisation par la fonction de répartition

Théorème

Si F est la fonction de répartition d'une variable à densité X et si f est une densité de X alors :

- F est continue sur $\mathbb{R}$.
- F est de classe $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre fini de points et lorsque F est dérivable en x, $F'(x) = f(x)$.

Ces propriétés sur la fonction de répartition suffisent à caractériser les variables à densité :

Théorème

Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F. Si :

(i) F est continue sur $\mathbb{R}$

(ii) F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points

alors X est une variable aléatoire à densité.

De plus si f est une fonction positive ou nulle telle que $F'(x) = f(x)$ en tout point x où F est dérivable, alors f est une densité de X.

Exemple 2:

Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ 1 - \dfrac{8}{x^3} & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$$

Montrer que X est une variable à densité et en déterminer une densité.

En pratique :

Pour démontrer qu'une variable X donnée est une variable à densité, il faut trouver sa fonction de répartition et vérifier qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sauf peut être en un nombre fini de points. Pour trouver la densité de X il suffit de prendre la dérivée de F.

Exemple 3:

Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ 1 - \dfrac{8}{x^3} & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$$

Montrer que X est une variable à densité et en déterminer une densité.

Le théorème suivant permet de déterminer si une fonction F donnée est la fonction de répartition d'une variable à densité X.

Théorème

Soit F une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si

(i) F est une fonction continue sur $\mathbb{R}$

(ii) F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points

(iii) F est croissante sur $\mathbb{R}$.

(iv) $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$ et $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et une variable aléatoire X définie sur cet espace, tels que F est la fonction de répartition de X.
De plus X est alors une variable à densité et si f est une fonction positive ou nulle telle que $F'(x) = f(x)$ en tout point x où F est dérivable, alors f est une densité de X.

Exemple 4:

On considère la fonction F définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{1-\sqrt{-x}}{2} & \text{si } -1 \leqslant x < 0 \\ \dfrac{1+\sqrt{x}}{2} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable à densité et en déterminer une densité.

Quelques propriétés

Soit X une variable aléatoire admettant une densité f.

(i) Pour tout x réel :

$$P(X < x) = P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$$P(X > x) = P(X \geqslant x) = \int_{x}^{+\infty} f(t)\,dt$$

(ii) Pour tout a et b réels tels que $a \leqslant b$:

$$P(a < X < b) = P(a \leqslant X < b) = P(a < X \leqslant b) = P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_{a}^{b} f(t)\,dt$$

(iii) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $P(X = a) = 0$

Corollaire

Soit X une variable à densité et f une densité de X. Si f est nulle en dehors d'un intervalle $[a; b]$, alors on a $P(X < a) = 0$ et $P(X > b) = 0$. On dit alors que X prend ses valeurs dans l'intervalle $[a; b]$.

Indépendance

Définition

Des VAR à densité $X_1, \cdots, X_n$ sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sont dites **indépendantes** si pour tous réels $(x_1, \cdots, x_n)$:

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n}[X_k \leqslant x_k]\right) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k \leqslant x_k)$$

Remarque :

Pour montrer que deux variables à densité X et Y sont indépendantes il faut montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ on a $P([X \leqslant x] \cap [Y \leqslant y]) = P(X \leqslant x) \times P(Y \leqslant y)$.

Moments d'une variable aléatoire à densité

Espérance

Définition

Soit X une VAR de densité f. Si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt$ est absolument convergente alors on dit que X **admet une espérance** que l'on note $E(X)$ et on a :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt$$

Exemple 5:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire X. X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Exemple 6:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.

Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire X. X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Linéarité

Soit X une VAR à densité admettant une espérance. Alors pour tout réels a et b, $aX + b$ admet une espérance et

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

.

Théorème

Soient X et Y deux VAR à densité admettant une espérance. Si $X + Y$ est une VAR à densité alors elle admet une espérance et $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

Moment d'ordre r

Définition

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)\,dx$ est absolument convergente alors on dit que X **admet un moment d'ordre** r, notée $m_r(X)$ et on a

$$m_r(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)\,dx$$

Variance et écart-type

Définition

Si la variable aléatoire X admet une espérance et si la variable $(X - E(X))^2$ admet une espérance, on appelle **variance de** X le réel

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$$

Pour le calcul de variance dans la pratique on utilisera tout comme pour les variables discrètes plutôt le théorème suivant :

Théorème

Soit X une VAR à densité. X admet une variance ssi X admet un moment d'ordre 2 et en cas d'existence, on a :

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Exemple 7:

Soit X une VAR dont une densité f est définie par $f(x) = 6x(1-x)$ si $x \in [0;1]$ et $f(x) = 0$ sinon. Nous avons vu que $E(X) = \dfrac{1}{2}$.
X admet-elle une variance ? Si oui, la calculer

Exemple 8:

Soit X une VAR dont une densité f est définie par $f(x) = 0$ si $x < 1$
et $f(x) = \dfrac{2}{x^3}$ si $x \geqslant 1$.
X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer. Même question pour la variance.

Définition

Si X admet une variance alors $V(X) \geqslant 0$. On appelle alors **écart-type** le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Soit X une variable à densité admettant une variance.
Alors pour tout réels a et b, $aX + b$ admet une variance et

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

Définition

Si X est une VAR telle que $E(X) = 0$ on dit que X **est une variable centrée**.

Définition

Si X est une variable à densité telle que $\sigma(X) = 1$, on dit que X **est une variable réduite**.

Définition

Si X admet une espérance et un écart-type non nul, la variable $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est appelée **la variable centrée réduite associée à X**.

Lois usuelles

Loi uniforme

Il s'agit ici de la loi la plus simple pour les variables aléatoires à densité. Elle correspond au fait de choisir au hasard un réel dans un segment $[a; b]$.

Définition

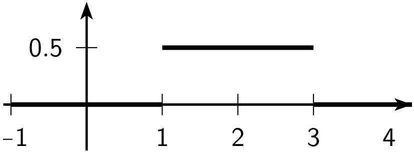
Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On dit qu'une variable aléatoire X suit **la loi uniforme sur** $[a; b]$, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a; b])$, si elle admet pour densité la fonction f définie par :

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } t \in [a; b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

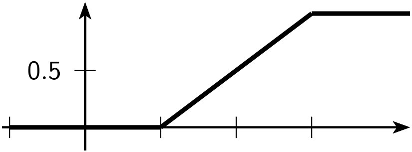
La fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a; b]$ est :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \textbf{si } x \leqslant a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \textbf{si } a < x < b \\ 1 & \textbf{si } x \geqslant b \end{cases}$$

Voici la représentation graphique de la densité et de la fonction de répartition d'une VAR suivant une loi uniforme sur $[1; 3]$:



Densité de la loi $\mathcal{U}([1; 3])$



Fonction de répartition de la loi $\mathcal{U}([1; 3])$

Théorème

Soit X une VAR à densité suivant une loi uniforme sur $[a; b]$. Alors X admet une espérance égale à $\dfrac{a+b}{2}$.

Loi exponentielle

Définition

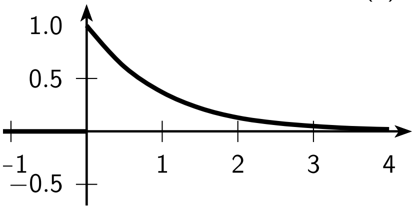
Soit λ un réel **strictement positif**. On dit qu'une variable aléatoire X suit **la loi exponentielle de paramètre** λ ; et on note $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, si elle admet pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

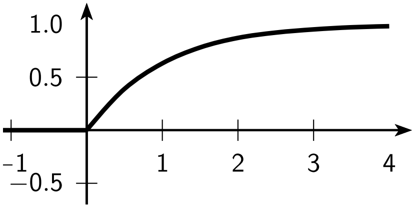
La fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ est :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \textbf{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \textbf{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Voici la représentation graphique de la densité et de la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{E}(1)$:



Densité de la loi $\mathcal{E}(1)$



Fonction de répartition de la loi $\mathcal{E}(1)$

Théorème

Si X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ alors X admet une espérance et une variance et :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Théorème

Caractérisation de la loi exponentielle

Soit X une VAR à densité, qui n'est pas la variable certaine nulle et qui est à valeur dans $\mathbb{R}^+$.

X suit une loi exponentielle ssi :

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad P_{[X>s]}(X > s+t) = P(X > t) \tag{1}$$

Remarque :

L'égalité (1) est équivalente à $P(X > s+t) = P(X > s)P(X > t)$.

Définition

Un VAR à densité vérifiant l'égalité (1) est dite **sans mémoire**.

Loi normale centrée réduite

Définition

On dit qu'une variable aléatoire X suit **la loi normale centrée réduite** si elle admet pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

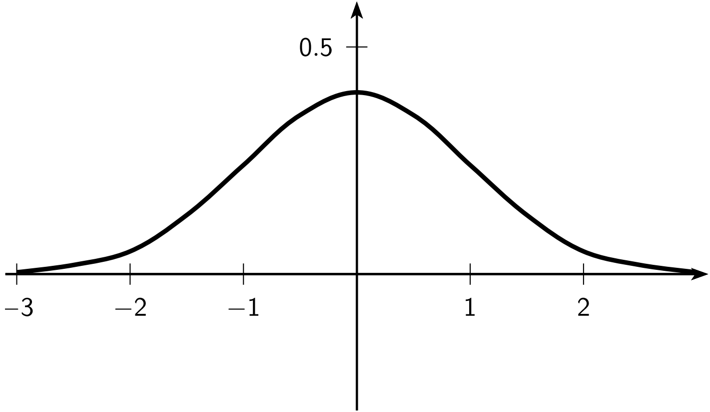
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

Remarque :

Pour vérifier que f est une densité de probabilité, il vous faudra admettre que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{2\pi}$.

Voici la représentation graphique de la densité d'une loi normale centrée réduite :



Densité de la loi $\mathcal{N}(0,1)$

Pour la fonction de répartition, nous ne sommes pas capable de l'exprimer avec de fonctions usuelles. Il faudra cependant bien savoir utiliser la propriété que nous allons mettre ci-dessous et savoir utiliser le tableau de valeurs approchées que nous verrons en exercice.

Soit Φ la fonction de répartition d'une VAR X suivant la loi $\mathcal{N}[0,1)$. Alors Φ vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

Démonstartion : Tout repose ici sur le fait que la densité est paire :

$$\begin{aligned}
\Phi(-x) &= \int_{-\infty}^{-x} f(t)\,dt = \lim_{A\to-\infty} \int_{A}^{-x} f(t)\,dt \\
&= \lim_{A\to-\infty} \int_{-A}^{x} f(-u)\,(-du) \qquad \textit{changement de variable } u = -t \\
&= \lim_{A\to-\infty} \int_{x}^{-A} f(u)\,du = \int_{x}^{+\infty} f(u)\,du = 1 - \Phi(x)
\end{aligned}$$

Théorème

Soit X qui suit une loi normale centrée réduite. Alors X admet une espérance et une variance :

$$E(X) = 0 \qquad V(X) = 1$$

Loi normale de Laplace-Gauss

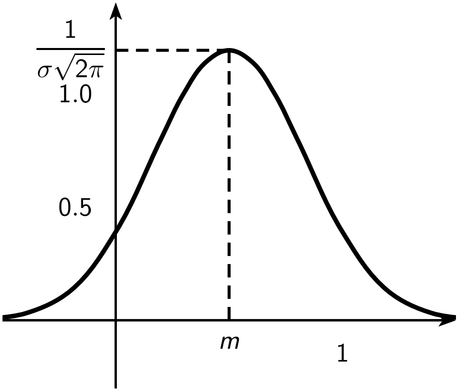
Définition

Soit m un réel, et σ un réel strictement positif. On dit que X suit **la loi normale de paramètres** (m, σ^2) si elle admet pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Voici la représentation graphique de la densité d'une loi normale.



Densité de la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$

Théorème

Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ alors X admet une espérance et une variance et :

$$E(X) = m \qquad V(X) = \sigma^2$$

	Densité	Fonction de répartition	Espérance	Variance
$\mathcal{U}([a;b])$	$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } t \in [a;b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a;b] \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$	$E(X) = \dfrac{a+b}{2}$	$V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$
$\mathcal{E}(\lambda)$	$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$	$E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$	$V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$
$\mathcal{N}(0, 1)$	$f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$	$\Phi(x)$	$E(X) = 0$	$V(X) = 1$
$\mathcal{N}(m, \sigma^2)$	$f(t) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right)$		$E(X) = m$	$V(X) = \sigma^2$