

Das vorliegende Miniskript entsteht im Rahmen des Tutoriums zur Analysis II, zum Ende des Wintersemesters 2020/2021 an der Heinrich Heine Universität Düsseldorf. Inhaltlich ist es an [2] orientiert, viele Schreibweisen kommen von Wikipedia und sind mit monospace verlinkt.

1 Differential- und Integralrechnung im \mathbb{R}^n

1.1 Grundlagen

Definition 1.1.1 (Metrik). Eine Abbildung $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Metrik auf einer Menge X wenn für alle $x, y, z \in X$ gilt:

- i) $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$ (Definitheit).
- ii) $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie).
- iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreieckungleichung)

Das Paar (X, d) heißt metrischer Raum.

Auf jeder Menge X ist eine triviale „gleichmäßig diskrete“ Metrik gegeben durch:

$$d(x, y) := \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (1)$$

Definition 1.1.2 (Norm). Eine Abbildung $\| \cdot \|: V \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ heißt Norm auf einem Vektorraum V über den Körper \mathbb{K} , wenn für alle $x, y \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

- i) $\|x\| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$, (Definitheit).
- ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, (absolute Homogenität).
- iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, (Dreieckungleichung).

Das Paar $(V, \| \cdot \|)$ heißt Vektorraum.

Eine Norm induziert durch die Festlegung $d(x, y) := \|x - y\|$ eine Metrik auf $V \times V$.

Bemerkung 1.1.3 (Skalarprodukt). Eine positiv definite symmetrische Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}_+$, auf einem reellen Vektorraum V heißt Skalarprodukt. Das bedeutet für alle $x, y, w, z \in V$ und $\lambda \in K$ gilt:

- i) $\langle x, x \rangle = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ (Definitheit).
- ii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ (Symmetrie).
- iii) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ sowie $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$ (linear in beiden Argumenten).

Der Zusammenhang zwischen Skalarprodukt, Norm und Metrik ist:

$$\text{Skalarprodukt} \xrightarrow{\|x\|:=\sqrt{\langle x, x \rangle}} \text{Norm} \xrightarrow{d(x,y):=\|x-y\|} \text{Metrik.}$$

Andersherum induziert eine Metrik im Allgemeinen keine Norm und eine Norm im Allgemeinen kein Skalarprodukt.

Definition und Satz 1.1.4. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Dann heißt f stetig auf X , wenn für alle $a \in X$ gilt $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Das bedeutet

$$\forall a \forall \epsilon \exists \delta \quad \forall x \in X : \quad d_X(x, a) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

Dies ist äquivalent zu: Für allen offenen Mengen $V \subseteq Y$ ist $f^{-1}(V)$ offen in X . Ferner heißt f gleichmäßig stetig genau dann, wenn

$$\forall \epsilon \exists \delta \forall a, x \in X : \quad d_X(x, a) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

Zuletzt heißt f Lipschitz stetig, wenn eine Konstante L existiert, sodass

$$\forall a, x \in X : d_X(f(x), f(a)) \leq L \cdot d_Y(x, y)$$

Lemma 1.1.5. Seien X, Y und Z metrische Räume und $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ sowie $h: Y \rightarrow X$ stetige Funktionen.

- i) Dann sind $f + g$ und $f \cdot g$ stetig.
- ii) Sei ferner $g(x) \neq 0$ für $x \in X$, dann ist f/g stetig.
- iii) Die Verkettung $f \circ h: Y \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig.
- iv) Gleichmäßig stetige Funktionen sind stetig.
- v) Lipschitz stetige Funktionen sind stetig¹.

Definition und Satz 1.1.6. Definition. Eine Teilmenge K eines metrischen Raumes X heißt kompakt, wenn jede offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von K eine endliche Teilüberdeckung besitzt, d.h. es existieren $i_1, \dots, i_k \in I$, so dass

$$K \subset U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \dots \cup U_{i_k}.$$

Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$, dann ist K genau dann kompakt wenn eine der folgenden Eigenschaften gelten:

- i) K ist beschränkt und abgeschlossen.
- ii) Jeder Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \in K$ für $n \in \mathbb{N}$ besitzt eine in K konvergente Teilfolge.

Sei $f: K \rightarrow X$ stetig, dann gilt:

- i) f ist gleichmäßig stetig.
- ii) $f(K)$ ist kompakt.
- iii) f nimmt auf K Maximum und Minimum an.

Definition und Satz 1.1.7 (Kurve). Sei I ein Intervall, dann heißt $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ Weg² stetig differenzierbar, falls für $1 \leq i \leq n$ die reelle Funktion $I \ni x \mapsto \varphi_i(x)$ stetig³ differenzierbar ist. In diesem Fall ist die Weglänge gegeben durch

$$\int_I \|f'(x)\| dx.$$

Definition 1.1.8 (partiell differenzierbar). Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, dann heißt $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar, wenn für alle $x \in U$ und der Grenzwert

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + he_i) - f(x)}{h}, \quad (1 \leq i \leq n)$$

existiert, wobei $e_i \in \mathbb{R}^n$ den i -ten Einheitsvektor bezeichnet. Wir sagen, f ist *stetig* partiell Differenzierbar, falls alle partiellen Ableitungen stetig sind.

Zu partiell differenzierbaren f ist der Gradient ∇f von f gegeben durch:

$$\nabla f(x) := \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Für ein partiell differenzierbares Vektorfeld $v: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ setzen wir die Divergenz „div v “ von v :

$$\operatorname{div} v := \langle \nabla, v \rangle := \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} v_i.$$

Sei f zudem zwei Mal stetig differenzierbar, dann ist das Laplace Operator „ Δf “ von f gegeben durch:

$$\Delta f := \langle \nabla, \nabla \rangle f = \operatorname{div} \nabla f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f.$$

¹Lineare stetige Funktionen sind Lipschitz stetig.

²Das Bild $\varphi(I)$ heißt Kurve.

³Und nur differenzierbar, wenn die Ableitung nicht stetig ist.

Satz 1.1.9 (von Schwarz). Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ k -Mal stetig partiell differenzierbar, dann gilt für alle $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ und Permutationen π von $1, \dots, k$:

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} f(x) = \frac{\partial}{\partial x_{i_{\pi(1)}}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_{\pi(k)}}} f(x).$$

1.2 Totale Differenzierbarkeit

Definition 1.2.1. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, dann heißt $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ in $x \in U$ (*total*) differenzierbar, wenn eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ existiert, sodass für ζ in einer Umgebung der Null

$$f(x + \zeta) = f(x) + A\zeta + \|\zeta\| \cdot \varphi(\zeta),$$

und $\varphi(\zeta)$ für $\zeta \rightarrow 0$ stetig gegen Null konvergiert⁴.

Definition 1.2.2. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, dann ist die Richtungsableitung von $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ im Punkt $x \in U$ in Richtung $v \in S^{n-1}$ (bei Existenz) gegeben durch

$$D_v f(x) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} = \frac{d}{dt} f(x + tv) \Big|_{t=0}$$

Bezüglich des Zusammenhang zwischen den Differenzierbarkeitsbegriffen gelten die Implikationen

$$\text{stetig part. diff'bar} \Rightarrow \text{total diff'bar} \Rightarrow \text{Richtungsabl. existieren} \Rightarrow \text{part. diff'bar}.$$

Die Richtungsableitung von f im Punkt x in Richtung des kanonischen i -ten Einheitsvektors e_i entspricht der partiellen Ableitung

$$D_{e_i} f(x) := D_i f(x) := \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

Zusammen rechtfertigt dies die Identifizierung von A aus Definition 1.2.1 mit der Funktionalmatrix Df , auch „Jakobi-Matrix“ J_f oder auch einfach Ableitung f' im Punkt x ,

$$Df(x) := J_f(x) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}},$$

welche sich aus den partiellen Ableitungen zusammensetzt. Auch für die mehrdimensionale Ableitung gilt die Kettenregel:

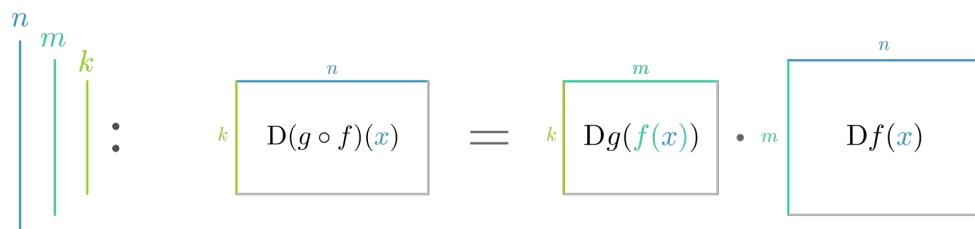


Abbildung 1: Größe der Matrizen in der mehrdimensionalen Kettenregel.

Satz 1.2.3 (Kettenregel). Seien $U \in \mathbb{R}^n$, $V \in \mathbb{R}^m$ offene Mengen mit wohldefinierter Komposition

$$(g: V \rightarrow \mathbb{R}^k) \circ (f: U \rightarrow V): U \rightarrow \mathbb{R}^k$$

differenzierbarer Abbildungen f, g . Dann ist $g \circ f$ differenzierbar und für das Differential⁵ gilt

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \cdot Df(x).$$

⁴Das bedeutet $r(\zeta) := \|\zeta\| \cdot \varphi(\zeta)$ ist eine Fehlerfunktion, welche welche **asymptotisch** gegenüber $\|\zeta\|$ vernachlässigbar ist, auch „ $r(\zeta) = o(\|\zeta\|)$ “.

⁵Klarer wird die Kettenregel Möglicherweise mit der Jakobi-Matrix: $J_{g \circ f}(x) = J_g(f(x)) \cdot J_f(x)$.

1.3 Satz von Taylor

Definition 1.3.1 (Multiindex). Für ein Tupel $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ und $x \in \mathbb{R}^n$ sei

$$|\alpha| := \sum_{k=1}^n \alpha_k, \quad \alpha! := \prod_{k=1}^n \alpha_k!, \quad x^\alpha := \prod_{k=1}^n x_k^{\alpha_k}.$$

Für eine $|\alpha|$ -mal stetig differenzierbare Funktion f und Differentialoperator D sei

$$D^\alpha := D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \dots D_n^{\alpha_n} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \text{wobei} \quad D_k^{\alpha_k} := \underbrace{D_k \circ D_k \circ \dots \circ D_k}_{\alpha_k\text{-Mal}}.$$

Satz 1.3.2 (Taylorsche Formel). Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $x, \zeta \in \mathbb{R}^n$ sodass $\{x + t\zeta : 0 \leq t \leq q\} \subset U$. Dann existiert für alle $n+1$ -mal stetig differenzierbaren $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ ein $t \in [0, 1]$ sodass

$$f(x + \zeta) = \underbrace{\sum_{|\alpha| \leq n} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} \zeta^\alpha}_{:= T_n f(\zeta; x)} + \underbrace{\sum_{|\alpha|=n+1} \frac{D^\alpha f(x + t\zeta)}{\alpha!} \zeta^\alpha}_{:= R_n f(\zeta; x)}.$$

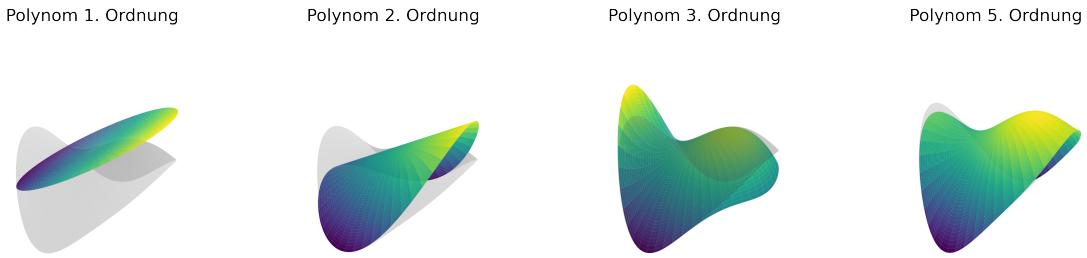


Abbildung 2: Taylorpolynome von $(x, y)^T \mapsto \sin(x) - y^2/2$ (in grau hinterlegt) auf der Einheitskreisscheibe [Animation].

1.4 Lokale Extrema

Definition 1.4.1 (Definitheit, Hessematrix). Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt

$$\begin{array}{lll} \text{positiv [negativ] definit} & \text{also } A \succ 0 [A \prec 0] & \text{wenn } x^T A x > 0 [x^T A x < 0] \\ \text{positiv [negativ] semidefinit} & \text{also } A \succeq 0 [A \preceq 0] & \text{wenn } x^T A x \geq 0 [x^T A x \leq 0] \end{array}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und indefinit sonst. Betrachte hierzu die **Eigenwerten** oder **Hauptminoren** von A .

Bei der Bestimmung von Extrema spielt die Definitheit der Hessematrix

$$H_f(x) := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

von zweimal stetig differenzierbaren f auf offenem $U \subseteq \mathbb{R}^n$ im Punkt $x \in U$ eine entscheidende Rolle.

Satz 1.4.2 (Notwendige Bedingung für Extremum). Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ partiell Differenzierbar. Besitzt f in $x \in U$ ein lokales Extremum, dann gilt

$$\nabla f(x) = 0$$

Satz 1.4.3 (Hinreichende Bedingung für Extremum). Zweimal stetig differenzierbares $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ hat für offenes U in $x \in U$ ein striktes lokales Maximum [respektive Minimum], wenn

$$\nabla f(x) = 0 \quad \text{sowie} \quad H_f(x) \prec 0, \quad [\text{respektive } H_f(x) \succ 0].$$

1.5 Satz über implizite Funktionen

Satz 1.5.1 (Banachscher Fixpunktsatz). Auf der abgeschlossenen, nicht leeren Teilmenge A eines vollständig normierter Raumes $(X, \|\cdot\|)$ besitzt eine „Kontraktion“ $\Phi : A \rightarrow A$,

$$\|\Phi(y) - \Phi(z)\| < \|y - z\|, \quad (y, z \in A)$$

genau einen Fixpunkt. Das bedeutet für einen beliebigen Startwert $x_0 \in A$ konvergiert die Folge $x_{i+1} := \Phi(x_i)$ gegen einen Fixpunkt x

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x = \Phi(x).$$

Satz 1.5.2 (über implizite Funktionen). Seien $U \subseteq \mathbb{R}^m$, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit Jakobi-Matrix

$$DF(x, y) := \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m} & \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix}.$$

Sei $F(x_0, y_0) = 0$ und $\frac{\partial}{\partial y} F(x_0, y_0)$ invertierbar. Dann existieren offene Umgebungen $U_0 \subseteq U$ von x_0 und $V_0 \subseteq V$ von y_0 sowie stetig differenzierbares $f : U_0 \rightarrow V_0$ sodass $f(x_0) = y_0$ und für alle $(x, y) \in (U_0 \times V_0)$:

$$F(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = f(x).$$

Insbesondere können wir f „implizit differenzieren“, also die Jakobi-Matrix angeben

$$Df(x) = - \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) \quad (2)$$

auch ohne die Abbildungsvorschrift $x \mapsto f(x)$ zu kennen.

1.6 Minimierung unter Nebenbedingungen

Definition 1.6.1. (Untermannigfaltigkeit) Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt k -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n , wenn für alle $a \in M$ eine offene Umgebung U von a existiert sodass eine folgenden Eigenschaften erfüllt ist:

	\exists offene Mengen	$\exists C^p$ -Abbildung	Rang	
i)	$U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V = \mathbb{R}^{n-k}$	$f : U \rightarrow V$,	$n - k$	$U \cap M = \{x \in U \mid f(x) = 0\}$
ii)	$U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^n$	$h : U \rightarrow V$ diffeomorph	n	$h(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{n-k}}\})$
iii)	$U \subseteq M$, $V \subset \mathbb{R}^k$	$\varphi^{-1} : V \rightarrow U$ homöomorph ⁶	k	

Wir nennen (das implizit gegebene) φ Karte und φ^{-1} lokale Parametrisierung.

Satz 1.6.2 (Lagrange Multiplikatoren). Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und induziert $f = (f_1, \dots, f_{n-k}) : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit

$$M = \{x \in U \mid f(x) = 0\}$$

dann existieren für differenzierbares $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit lokalem Extremum a von $F|_M$ „lagrangsche Multiplikatoren“ $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-k} \in \mathbb{R}$, so dass

$$\nabla F(a) + \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i \nabla f_i(a) = 0.$$

⁶Praktisches Kriterium: Wenn φ auf offenem $V \subseteq \mathbb{R}^k$ stetig differenzierbar und der Rang $D\varphi$ in jedem Punkt gleich k , existiert für jedes $t \in V$ eine offene Umgebung V_t , sodass $\varphi|_{V_t} \rightarrow \varphi(V_t)$ homöomorph.

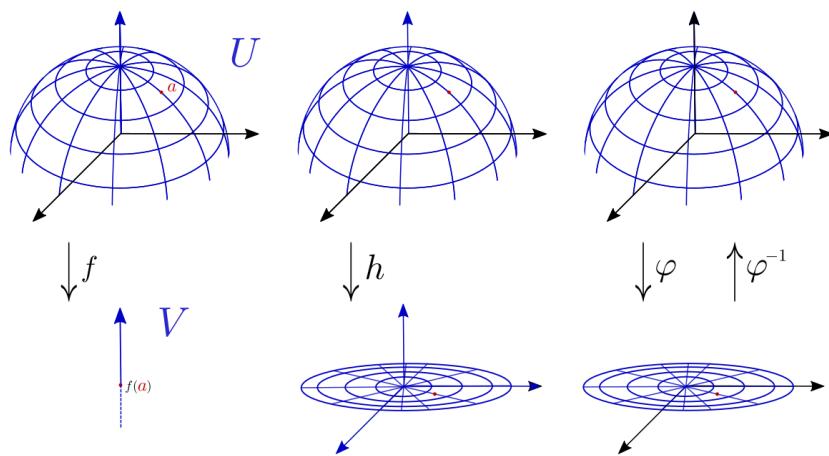


Abbildung 3: Urbild und Bild der C^p -Abbildungen von Untermannigfaltigkeiten.

1.7 Parameterabhängige Integrale

Satz 1.7.1 (Differentiation unterm Integral). Seien I, J kompakt und $f: I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $y \in J$ stetig differenzierbar, dann ist $y \mapsto \int_I f(x, y) dx$ stetig differenzierbar und

$$\frac{d}{dy} \int_I f(x, y) dx = \int_I \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx.$$

1.8 Übungsaufgaben

Aufgabe 1.8.0. Recherchieren Sie jeh ein Ihnen unbekanntest Beispiel und Gegenbeispiel für eine Metrik und eine Norm. Stellen Sie ihren Gruppenmitgliedern davon ein Beispiel mit Begründung vor.

Aufgabe 1.8.1. Zeigen Sie, dass eine Norm eine Metrik induziert, die Umkehrung im Allgemeinen aber nicht gilt. Zeigen Sie insbesondere, dass durch d wie in (1) eine Metrik gegeben ist, die keine Norm induziert.

HINWEIS! Norm induziert Metrik per Definition.

Zeilige, dass durch $(0, x)p = \|x\|$ keine Norm gegeben ist.

Aufgabe 1.8.2. Zeigen Sie mit der offenen Überdeckungseigenschaft und dem Folgenkriterium, dass die offene Einheitskreisscheibe $B_1(0) := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 < 1\}$ nicht kompakt ist.

Aufgabe 1.8.3. Sei

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{cases} 0 & x = y = 0 \\ \frac{\sqrt{|x|}y^3}{x^2+y^2} & \text{sonst} \end{cases}$$

- i) Zeigen Sie, dass f stetig ist.
- ii) Zeigen Sie mit dem ϵ - δ -Kriterium, die Stetigkeit von f in $(0, 0)^T$.
- iii) Zeigen Sie, dass $U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) < c\}$ für alle $c \in \mathbb{R}$ offen ist.
- iv) Zeigen Sie, dass $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = c\}$ für alle $c \in \mathbb{R}$ abgeschlossen ist.

HINWEIS! Identifizieren Sie (x, y) mit den Polarkoordinaten $(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$.

Wie entstehen U und B aus f ?

Aufgabe 1.8.4. Zeigen Sie, dass

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{cases} 0 & x = y = 0 \\ \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{sonst} \end{cases}$$

nicht stetig ist, aber in jedem Argument stetig ist⁷.

HINWEIS! Konstruieren Sie eine Folge (x_n, y_n) , sodass $f(x_n, y_n) \leftarrow (0, 0)$ nicht gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 1.8.5. Zeigen Sie, dass alle Richtungsableitungen von

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \sqrt[3]{x^2y}$$

existieren, nicht jedoch das totale Differential.

HINWEIS! Wie verhält sich f im Ursprung?
Leiten Sie in Richtung $(\cos \varphi, \sin \varphi)$ ab.

Aufgabe 1.8.6. Sei $a \in \mathbb{R}^n$, $p \geq 2$ und $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Stellen Sie Gradient und Hessematrix zu folgenden Funktionen auf:

- | | |
|---|--|
| i) $x \mapsto \text{spur}(ax^T)$ | iii) $(x, y)^T \mapsto \exp(-\ x - y\ _2^2)$ |
| ii) $x \mapsto \frac{1}{2} \exp(x^T Q x - a^T x)$ | iv) $(x, y)^T \mapsto (1 + x^T y)^p$ |

Aufgabe 1.8.7. Bestimmen Sie die Ableitung von

$$h: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^x$$

sowohl mit Analysis I Methoden, als auch mit der Mehrdimensionalen Kettenregel.

⁷Das bedeutet, für $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ sind $x \mapsto f(x, y_0)$ und $y \mapsto f(x_0, y)$ stetig.

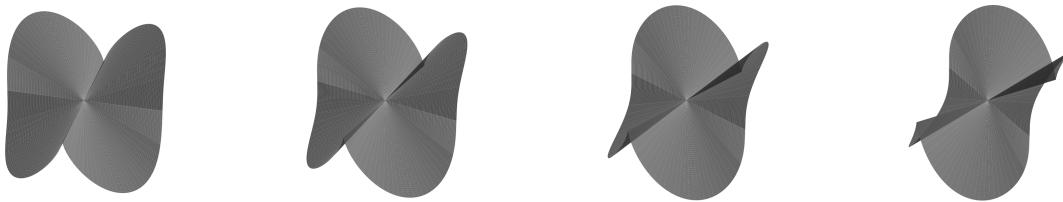


Abbildung 4: Eine im Ursprung nicht differenzierbare Funktion mit partiellen Ableitungen die übereinstimmen.

HINWEIS! Betrachte die partiellen Ableitungen von $g(u, v) := u^v$ und $f(x) := (x, x)^T$
Berechne die rechte Seite von Satz 1.2.8.

Aufgabe 1.8.8. Beweisen Sie mit der Kettenregel Satz 1.2.3, dass sich die Jakobi-Matrix von f wie in Satz 1.5.2 nach (2) auflösen lässt.

Aufgabe 1.8.9. Zeige, dass die Einheitsphäre

$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|_2 = 1\}$$

eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{n+1} ist. Geben Sie insbesondere für jedes $x \in S^n$ eine Karte an.

HINWEIS! Die Fußnote in Definition 1.6.1 erleichtert den Nachweis der Homöomorphie.
Eine einfache Karte ist in [3] gegeben.

Aufgabe 1.8.10. Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $(x, y)^T \mapsto \sin(x) - y^2/2$.

- i) Bestimme die Taylorentwicklung fünfter Ordnung $T_5 f(\zeta; 0)$ von f im Punkt $(0, 0)^T$.
- ii) Bestimme die strikten Maxima von f und $T_5 f(\zeta; 0)$.

Aufgabe 1.8.11 (Peanosche Fläche). Widerlegen Sie die Behauptung, dass eine Funktion die in einem Punkt nur Abstiegsrichtungen⁸ hat, in diesem ein lokales Maximum besitzt. Nehmen sie hierzu die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto (2x^2 - y)(y - x^2)$$

zu Hilfe [Abbildung 5]. Warum können wir Satz 1.4.3 nicht anwenden?

HINWEIS! Untersuchen Sie die Vorzeichen der Faktoren zwischen Ihren Nullstellen.
Geraden durch den Nullpunkt sind durch $r \cos \phi, r \sin \phi$ gegeben.

Aufgabe 1.8.12. Zeigen Sie, dass

$$f : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[, \quad x \mapsto \frac{x + \frac{1}{16}}{x + 1}$$

strikt kontraktiv ist und geben Sie den Fixpunkt an.

Aufgabe 1.8.13. Sei $(x_0, y_0) := (3, 3)^T$ und

$$F(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto x^3 + y^3 - 6xy$$

gegeben. Zeigen Sie, dass in einer Umgebung von $(x_0, y_0)^T$ eine Funktion f existiert, sodass

$$F(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = f(x)$$

⁸Gemeint ist, dass die Einschränkung der Funktion auf eine Gerade durch den Punkt, in ebenselbem ein lokales Maximum hat.

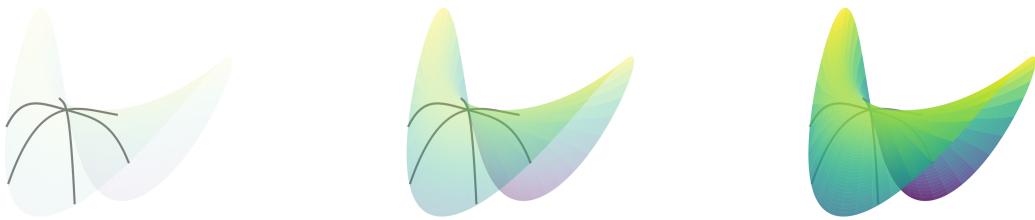


Abbildung 5: Schnittpunkt der Geraden im „Peano-Sattel“.

und geben Sie die Ableitung von f im Punkt $(x_0, y_0)^T$ konkret an.

HINWEIS! Benutzen Sie Satz 1.6.2 und (g)

Abbildung 6: Animation des Plot von $(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2, x_3)$ (links) sowie $(x_1, x_2) \mapsto \frac{1}{1+e^{-f(x_1, x_2, x_3)}}$ (rechts) für laufendes $0 \leq x_3 \leq 0.5$.

Aufgabe 1.8.14. Betrachte das Minimierungsproblem $\min\{F(x) \mid x \in \overline{B_1(0)}\}$ wobei

$$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto e^{1+x_1+x_2+x_3} - x_2 - x_3$$

und $\overline{B_1(0)} := \partial B_1(0) \cup B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2^2 \leq 1\}$. Suchen Sie Mithilfe von Satz 1.6.2 einen Kandidaten \bar{x} für ein lokales Minimum. Stellen Sie Vermutungen an, wie Sie die Minimalität nachweisen könnten.

HINWEIS! Zum Nachweis der Minimalität kann die Abschätzung $e^{1+z} \geq 1 + (1+z)$ hilfreich sein
Wähle Lagrange Multiplikator 1/2.

1.9 Musterlösungen

Lösung 1.9.1 (Aufgabe 1.8.1). „Norm induziert Metrik“. Wir zeigen, dass für einen Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ durch $d(x, y) := \|x - y\|$ eine Metrik gegeben ist. Definitheit: Sei $x, y \in V$ und $z := x - y$. Dann $z = 0$ genau dann, wenn $x = y$, also mit der Definitheit der Norm $0 = \|z\| \stackrel{\text{def.}}{=} \|x - y\| \stackrel{\text{def.}}{=} d(x, y)$ genau dann wenn $x = y$. Symmetrie: Wir benutzen die absolute Homogenität der Norm. Für alle $x, y \in V$ gilt.

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|-1 \cdot (y - x)\| = |-1| \cdot \|y - x\| = d(y, x).$$

Dreieckungleichung: Wir benutzen die Dreieckungleichung der Norm. Für all $x, y, z \in V$ gilt

$$d(x, z) = \|x - z\| = \|x - z + (y - y)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z).$$

Wir zeigen, dass d wie in (1) eine Metrik ist. *i)* gilt per Definition. *ii)* sehen wir mit Fallunterscheidung. Für $x = z$ gilt die Ungleichung in *iii)*. Sei $x \neq z$, dann entweder $x \neq y$ oder $y \neq z$ für alle $y \in X$, denn sonst $x = z$.

Insbesondere induziert die d Metrik keine Norm, falls die Menge X kein Vektorraum ist. Sei nun $X = V$. Angenommen d induziert eine Norm, dann muss $\|x\| := d(x, 0)$ um die Definitheit sicherzustellen. Jedoch gilt für $0 \neq x$:

$$1 = d(x, 0) = \|x\| = 2 \cdot \left\| \frac{1}{2}x \cdot 1 \right\| = d\left(\frac{1}{2}x, 0\right) + d\left(\frac{1}{2}x, 0\right) = 2, \quad \notin.$$

Lösung 1.9.2 (Aufgabe 1.8.2). „Offene Überdeckungseigenschaft“: Wir zeigen, dass eine offene Überdeckung existiert, sodass jede endliche Teilüberdeckung Elemente der offenen Einheitskreisscheibe verfehlt. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge die für $n \rightarrow \infty$ gegen 1 konvergiert, mit $a_n \in [0, 1]$. Dann existiert für alle $x \in B_1(0)$ ein $a_n > \|x\|$ sodass $x \in B_{a_n}(0)$. Das bedeutet $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{a_n}(0)$ ist eine offene Überdeckung von $B_1(0)$. Jedoch existiert keine Endliche Teiliüberdeckung, da für alle $I := \{i_1, \dots, i_m\} \subset \mathbb{N}$ und $C := \max\{a_i \mid i \in I\}$ gilt $\bar{x} := ((1+C)/2, 0) \in B_1(0)$ aber $\bar{x} \notin B_{i_1}(0) \cup \dots \cup B_{i_m}(0)$.

„Cauchyfolgenkriterium“: Wir zeigen, dass es eine Cauchyfolge gibt, die keine in $B_1(0)$ konvergente Teilfolge besitzt. Das bedeutet Dann ist x_n eine Cauchyfolge in $B_1(0)$ die für $n \rightarrow \infty$ gegen $(1, 0)$ konvergiert. Sei $x_n := (1 - 1/n, 0)$ für $n \in \mathbb{N}$. Sei $\hat{x} \in B_1(0)$ beliebig und $(x_{i_n})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Wir wollen zeigen:

$$\exists \epsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n_i \geq N : \|x_{n_i} - \hat{x}\| > \epsilon.$$

Sei $\epsilon = (1 - \|\hat{x}\|)/2 > 0$ und $\forall N \in \mathbb{N}$. Wähle $n > \lceil 2/(1 - \|\hat{x}\|) \rceil$ und $n > N$, dann gilt

$$\|x_{i_n} - \hat{x}\| \geq \left\| 1 - \frac{1}{i_n} \right\| - \|\hat{x}\| > 1 - \frac{1 - \|\hat{x}\|}{2} - \|\hat{x}\| = \frac{1 - \|\hat{x}\|}{2} = \epsilon.$$

Lösung 1.9.3 (Aufgabe 1.8.3). „i“: Identifizieren wie (x, y) mit den Polarkoordinaten $(r \cdot \cos \varphi, r \cdot \sin \varphi)$ für $\varphi \in [-\pi, \pi]$ und $r \geq 0$. Da $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ und $r \geq 0$

$$f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \frac{|r|^{\frac{1}{2}} r^3 \cdot \sqrt{|\cos \varphi|} \sin^3 \varphi}{r^2 \cdot 1} = r \cdot |r|^{\frac{1}{2}} \sqrt{|\cos \varphi|} \sin^3 \varphi.$$

f ist stetig, da $f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ Produkt stetiger Funktionen ist. Insbesondere $(x, y) \rightarrow 0$ genau dann, wenn $r \rightarrow 0$, also ist f stetig in der Null.

„ii“: Dies können wir auch mit den ϵ - δ -Kriterium zeigen: Sei $\epsilon > 0$ und $\delta = \epsilon^{\frac{2}{3}}$, dann gilt für $|(x, y)^T| < \delta$, also $|r| < \delta$:

$$|f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) - f(0, 0)| = |r|^{\frac{3}{2}} \cdot |\sqrt{|\cos \varphi|} \sin^3 \varphi| \leq |r|^{\frac{3}{2}} < \delta^{\frac{3}{2}} = \epsilon.$$

„iii“: U ist gerade das Urbild $f^{-1}(-\infty, c])$ einer offenen Menge unter einer stetigen Funktion, also mit Definition und Satz 1.1.4 offen.

„iv“: $B = f^{-1}(\{c\})$ ist das Komplement einer offenen Menge $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{c\})$ und damit abgeschlossen.

Lösung 1.9.4 (Aufgabe 1.8.4). Beachte, dass $f(x, 0) = 0 = f(0, y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$. Für eine Konstante $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sind $x \mapsto x \cdot y_0$ und $x \mapsto x^2 + y_0^2$ stetige Polynome. Da $x^2 + y^2 \neq 0$ ist gilt mit Lemma 1.1.5.ii) dass f im ersten Argument stetig und analog im zweiten Argument stetig ist.

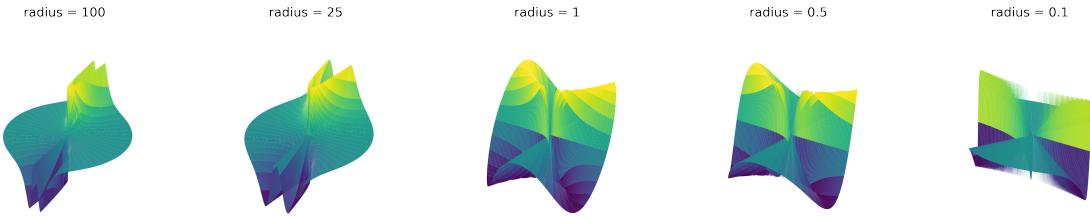


Abbildung 7: Plot von $B_r(0) \setminus \{(0,0)^T\} \ni (x,y)^T \mapsto \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ mit variierendem Radius.

Sei $x_n := 1/n$ und $y_n := 1/n^2$ für $n \in \mathbb{N}$, dann $(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, 0)$, aber

$$f(x_n, y_n) = \frac{(1/k^2) \cdot (1/k^2)}{1/k^4 + 1/k^4} = \frac{1}{k^4} \cdot \frac{k^4}{2} = \frac{1}{2}.$$

□

Lösung 1.9.5 (Aufgabe 1.8.5). Die Richtungsableitung von f in Richtung $v_\varphi := (\cos \varphi, \sin \varphi)^T$ ist im Ursprung wohldefiniert:

$$D_{v_\varphi} f(0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi}}{h} = \sqrt[3]{\cos^2 \varphi \sin \varphi}$$

Insbesondere stimmen die partiellen Ableitungen $D_{v_0} f(0) = 0 = D_{v_{\pi/2}} f(0)$ im Ursprung überein. Jedoch $D_{v_\varphi} f(0) \neq 0$ für $\varphi \in]0, \pi/2[$, also ist das Differential im Ursprung nicht wohldefiniert.

Lösung 1.9.6 (Aufgabe 1.8.6). Die Herausforderung besteht dabei, nicht den Überblick zu verlieren! Hilfsfunktionen die große Terme zusammenfassen erweisen sich als hilfreich.

Funktionsvorschrift	Gradient	Hessematrix
$x \mapsto \text{spur}(ax^T)$	a	$0_{n \times n}$
$x \mapsto \frac{1}{2} \underbrace{\exp(x^T Q x - a^T x)}_{:= \hat{e}(x)}$	$\frac{1}{2} \underbrace{((Q + Q^T)x - a)\tilde{e}(x)}_{\hat{Q}}$	$\frac{1}{2}(\tilde{Q}x - a)(\tilde{Q}x - a)^T \tilde{e}(x) + \frac{1}{2}\tilde{Q}\tilde{e}(x)$
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \underbrace{\exp(-\ x - y\ _2^2)}_{:= \hat{e}(x, y)}$	$2 \begin{bmatrix} y - x \\ x - y \end{bmatrix} \hat{e}(x, y)$	$2 \left(\begin{bmatrix} -I & I \\ I & -I \end{bmatrix} + \hat{z}\hat{z}^T \right) \hat{e}(x, y)$
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \underbrace{(1 + x^T y)^p}_{:= \phi(x, y)}$	$\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} \underbrace{p\phi(x, y)^{p-1}}_{:= z'}$	$\left(\begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \phi(x, y) + z'z'^T(p-1) \right) p\phi(x, y)^{p-2}$

□

Lösung 1.9.7 (Aufgabe 1.8.7). Betrachte die Funktionen

$$g: \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \mapsto u^v, \quad f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}.$$

Dann liegt das Bild von f im Definitionsbereich $f(\mathbb{R}_+^*) \subseteq \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ von g und die partiellen Ableitungen von f sind stetig. Mit der eindimensionalen Produkt und Kettenregel sowie $x^x = e^{x \ln x}$ rechnen wir

$$h'(x) = \left(\left(\frac{d}{dx} x \right) \ln x + \left(\frac{d}{dx} \ln x \right) x \right) e^{x \ln x} = \ln(x)x^x + x^x.$$

Damit sind auch die partiellen Ableitungen von g stetig, und die Funktionalmatrizen

$$Dg(u, v) = \begin{bmatrix} \ln(u) \cdot u^v & v \cdot u^{v-1} \end{bmatrix}, \quad Df(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sind wohldefiniert. Wegen $h = g \circ f$ folgt die Aussage mit der Kettenregel nach Ausmultiplikation von

$$Dg(f(x))Df(x) = Dg(u, v) = [\ln(x) \cdot x^x \quad x \cdot x^{x-1}] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \ln(x) \cdot x^x + x^x. \quad \square$$

Lösung 1.9.8 (Aufgabe 1.8.8). Seien die Voraussetzungen von Satz 1.5.2 erfüllt mit ebenselben Bezeichnungen. Wir untersuchen die Tangente an das **kartesische Blatt** im Punkt $(3, 3)^T$. Für die Hilfsfunktion

$$H: U_0 \rightarrow U_0 \times V_0, \quad x \mapsto \begin{bmatrix} x \\ f(x) \end{bmatrix}$$

ist die Komposition $F \circ H = 0$ wohldefiniert und die Voraussetzungen für Satz 1.2.3 erfüllt. Wir differenzieren beide Seiten der Gleichung und erhalten

$$0 = D(F \circ H)(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) & \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{m \times m} \\ Df(x) \end{bmatrix} = \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \circ Df(x).$$

Nach Voraussetzung ist $\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))$ invertierbar und wir können nach $Df(x)$ auflösen:

$$Df(x) = - \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)). \quad \square$$

Lösung 1.9.9 (Aufgabe 1.8.9). Mit Definition 1.6.1.i) ist S^n offensichtlich eine n -dimensionale C^∞ Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{n+1} : Das Polynom $f(x) = (\sum_{k=1}^{n+1} x_i^2) - 1$ ist eine C^∞ Abbildung und

$$\mathbb{R}^{n+1} \cap S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid f(x) = 0\}.$$

Als Karte φ mit lokaler Parametrisierung φ^{-1} kommen verschiedene Funktionen in Frage. Betrachte Beispielsweise im \mathbb{R}^2 die Stereographische Projektion

$$\varphi: S^1 \setminus \{(0, 1)^T\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \frac{x}{1-y}$$

oder die Polarkoordinaten

$$\varphi: S^1 \setminus \{(-1, 0)^T\} \rightarrow]-\pi, \pi[, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \arg(x + iy)$$

wobei $\arg(z)$ das **Argument** einer komplexen Zahl z bezeichnet. Wir konstruieren im Folgenden die Karte aus [Abbildung 3].

Sei $x := (x_1, \dots, x_{n+1})^T \in S^n$ beliebig. Für eine Karte benötigen wir eine (bezüglich der Relativtopologie) offene Umgebung U_x von x . Betrachte für $i = 1, \dots, n+1$ den Schnitt der Sphäre S^n mit dem Halbraum

$$\mathbb{R}_{i,\pm}^{n+1} := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \pm x_i > 0\}.$$

Nach Definition ist $\|x\|_2 = 1$, also existiert ein $\pm x_i > 0$ und x liegt in mindestens einer (relativ) offenen Umgebung $U_x := S^n \cap \mathbb{R}_{i,\pm}^{n+1}$. Sei V die offene Einheitskugel des \mathbb{R}^{n-1} , dann wähle φ_x respektive φ_x^{-1} wie in [Abbildung 3], also

$$\varphi_x: U_x \rightarrow V, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{i-1} \\ x_i \\ x_{i+1} \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{i-1} \\ x_{i+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \varphi_x^{-1}: V \rightarrow U_x, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \sqrt{1-x_1^2-\dots-x_n^2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Da $x_1^2 + \dots + x_{i-1}^2 + x_{i+1}^2 + \dots + x_{n+1}^2 = \|x\|_2^2 - x_i^2 < 1$ ist das Funktional

$$D\varphi^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \frac{2x_1}{\sqrt{1-x_1^2-\dots-x_n^2}} & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \frac{2x_2}{\sqrt{1-x_1^2-\dots-x_n^2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{2x_n}{\sqrt{1-x_1^2-\dots-x_n^2}} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

wohldefiniert und wird durch Streichung der i -ten Zeile zur Einheitsmatrix, also ist φ^{-1} ein Homöomorphismus.

Lösung 1.9.10 (Aufgabe 1.8.10). „i“: Wir erhalten $\frac{d^2}{dy^2} \left(-\frac{y^2}{2} \right) = -\frac{d}{dy} y = -1$ sowie induktiv

$$\sin^{(n)}(x)|_{x=0} = \begin{cases} 1, & n \equiv 1 \pmod{4} \\ -1, & n \equiv 3 \pmod{4} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und damit das Taylorpolynom 5. Ordnung im Punkt $x = 0$

$$T_5 f(\zeta; 0) = \zeta_1 - \frac{\zeta_2^2}{2} - \frac{\zeta_1^3}{6} + \frac{\zeta_1^5}{120}.$$

„ii“: Da $1 \geq \sin(x) \geq \sin(x) - y^2/2$ für $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ hat f für $z \in \mathbb{Z}$ seine globalen Maxima in $(4 \cdot z\pi + \pi, 0)^T$.

Setzen wir den Gradienten von $T_5 f(\zeta; 0)$ gleich Null

$$T_5 f(\zeta; 0) = \begin{bmatrix} 1 - \zeta_1^2/2 + \zeta_4/24 \\ -\zeta_2 \end{bmatrix}$$

und erhalten⁹ für

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{6 - 2\sqrt{3}}, \quad x_{2,3} = \pm \sqrt{6 + 2\sqrt{3}}$$

die Maximakandidaten $(x_i, 0)^T$ für $i = 1, \dots, 4$. Damit die Hessematrix

$$H_f(x) = \begin{bmatrix} -\zeta_1 + \zeta_1^3/6 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

negativ definit wird, muss ihr erster Diagonaleintrag negativ sein. Die reelle Funktion $a(\zeta_1) := -\zeta_1 + \zeta_1^3/6$ ist negativ auf $]-\infty, -\sqrt{6}]$ und $]\sqrt{6}, \infty[$. Damit erhalten wir das strikte Maximum von $T_5 f(\zeta; 0)$ in $(\sqrt{6} - 2\sqrt{3}, 0)^T$. \square

Lösung 1.9.11 (Aufgabe 1.8.11). Zwar verschwindet der Gradient von f

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 4x(y - x^2) - 2x(2x^2 - y) \\ -(y - x^2) + (2x^2 - y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6xy - 8x^3 \\ -2y + 3x^2 \end{bmatrix}$$

im Nullpunkt, jedoch ist die Hessematrix

$$H_f(x) = \begin{bmatrix} 6y - 24x^2 & 6x \\ 6x & -2 \end{bmatrix} \underset{x=0}{=} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

nur semidefinit, deshalb können wir Satz 1.4.3 nicht anwenden.

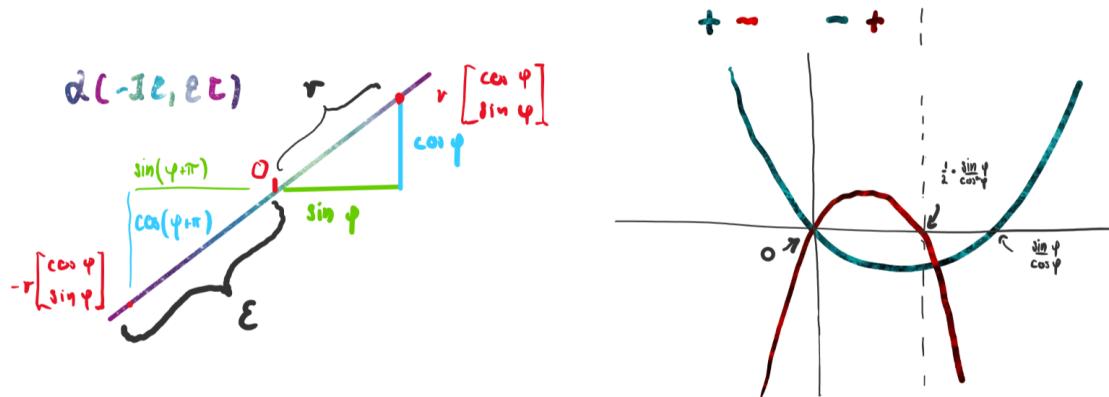


Abbildung 8: Gerade durch den Ursprung $\alpha_\varphi(r)$ links, sowie Parabeln β und γ rechts.

⁹Für die Nullstellen in der ersten Komponente substituiere $\zeta_1^2 = w$, löse mit pq-Formel und resupstituiere $\zeta_1 = \pm\sqrt{w}$.

Betrachten wir nun die Einschränkung des Bildes von f auf eine Gerade durch den Ursprung in einer kleinen Umgebung des Ursprungs. Diese sind für hinreichend kleines $\epsilon > 0$ und $0 < \varphi \leq 2\pi$ durch

$$\alpha_\varphi :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow \mathbb{R}^2, \quad r \mapsto r \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix}$$

gegeben. Aus symmetriegründen gilt $\alpha_\varphi(r) = \alpha_{\varphi+\pi \bmod [2\pi]}(-r)$, also können wir uns auf $0 < \lambda\varphi < \pi$ beschränken. Ferner sehen wir durch Einsetzen, dass 0 ein globales Maximum von α_0 sowie $\alpha_{\pi/2}$ ist. Wir zeigen, dass für hinreichend kleines $\epsilon > 0$ sowie $\varphi \in]0, \pi[\setminus \{\pi/2\}$ das Produkt

$$f(\alpha_\varphi(r)) = \underbrace{(2r^2 \cos^2(\varphi) - r \sin(\varphi))}_{:=\beta(r)} \cdot \underbrace{(r \sin(\varphi) - r^2 \cos^2(\varphi))}_{:=\gamma(x)}$$

negativ wird. Sei $c := \sin \varphi / (2 \cos^2 \varphi) > 0$, dann sind $\beta(r)$ und $\gamma(r)$ nach oben, respektive unten geöffnete Parabeln mit Nullstellen 0 sowie c respektive $2c$. Damit ist das Produkt für $\epsilon = c$ negativ und $f \circ \alpha_\varphi$ hat in 0 ein globales Maximum [Abbildung 8]. Hingegen ist $f(x, 2x/3) > 0$ für alle $x > 0$, was die Behauptung widerlegt. \square

Lösung 1.9.12 (Aufgabe 1.8.12). Sei $x, y \in [0, \infty[$, wobei $x \geq y$ o.B.d.A. Dann gilt

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{(x + \frac{1}{16})(y + 1) - (y + \frac{1}{16})(x + 1)}{(x + 1)(y + 1)} \right| = \frac{15}{16} \left| \frac{x - y}{(x + 1)(y + 1)} \right| \leq \frac{15}{16} |x - y|$$

also ist f eine Kontraktion. Der Fixpunkt ist $1/4$, da $f(x) = x$ genau dann, wenn

$$0 = x(x + 1) - (x + \frac{1}{16}) = x^2 - \frac{1}{16}. \quad \square$$

Lösung 1.9.13 (Aufgabe 1.8.13). Wir weisen die Voraussetzung in Satz 1.5.2 nach. Die Teilmatrizen von

$$DF(x, y) = \begin{bmatrix} 3x^2 - 6y & 3y^2 - 6x \end{bmatrix}$$

sind Parabeln, also für jedes offene $U \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0, 0\}$ invertierbar. Da $F(3, 3) = 0$ existiert die gesuchte implizite Funktion f .

$$f'(x) = - (3f(x)^2 - 6x)^{-1} (3x^2 - 6y) = \frac{x^2 - 2f(x)}{2x - f(x)^2} \stackrel{x=3}{=} -1. \quad \square$$

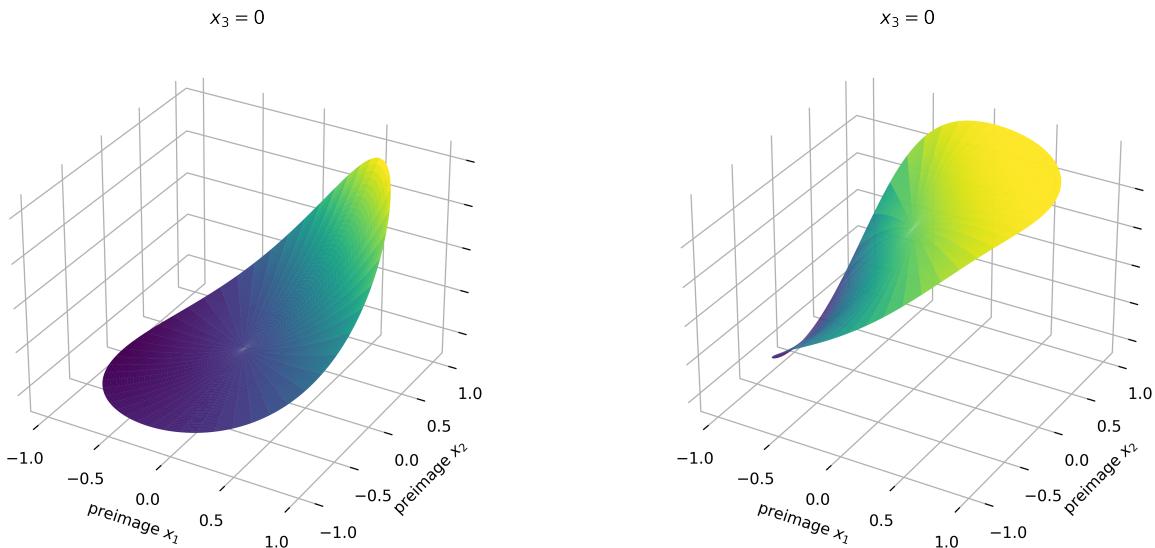


Abbildung 9: Plot von $(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2, 0)$ (links) sowie $(x_1, x_2) \mapsto \frac{1}{1+e^{-f(x_1, x_2, 0)}}$ (rechts).

Lösung 1.9.14 (Aufgabe 1.8.14). Wegen Satz 1.4.2 existiert kein lokales Extremum von F in \mathbb{R}^3 , da

$$\nabla F(x) = e^{1+x_1+x_2+x_3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq 0, \quad (x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}).$$

Da U kompakt ist, nimmt F sein Minimum auf U an. Sei $f(x) := \|x\|_2^2 - 1$, dann ist der Rand von $U = \partial B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = 0\}$ eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 . Also existiert mit Satz 1.6.2 ein Lagrange Multiplikator $\lambda \in \mathbb{R}$ sodass

$$\nabla F(x) + \lambda \cdot \nabla f(x) = e^{1+x_1+x_2+x_3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0.$$

Beachte, dass die Gleichheit für $\bar{x} = (-1, 0, 0)^T$ und $y = 1/2$ erfüllt ist. Insbesondere $f(\bar{x}) = 1$.

Für kleines $\epsilon > 0$ wähle $|\mu|, |\beta| \leq \epsilon$, also $x_\epsilon := (\epsilon, \mu, \beta)^T \in B_\epsilon((-1, 0, 0)^T) \cap \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \geq -1\}$. Wir zeigen, dass $f(x) \geq f(\bar{x})$. Wir möchten im Folgenden die Exponentialfunktion abschätzen. Beachte, dass für kleins $z \in \mathbb{R}$ gilt

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ gerade}}}^{\infty} \frac{z^n}{n!} + \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ gerade}}}^{\infty} z^n \frac{n+1+z}{(n+1)!} \geq z^n \frac{n+1+z}{(n+1)!}.$$

Weiterhin gilt wegen Stetigkeit $f(x_\epsilon) > 0$ für kleines ϵ . Daraus erhalten wir die Abschätzung

$$f(\epsilon, \mu, \beta) = e^{1+(-1+\epsilon)+\mu+\beta} - (\mu, \beta) \geq (1 + (\epsilon + \mu + \beta)) - (\mu + \beta) = 1 + \epsilon > 1.$$

Also ist \bar{x} tatsächlich ein lokales Minimum. □

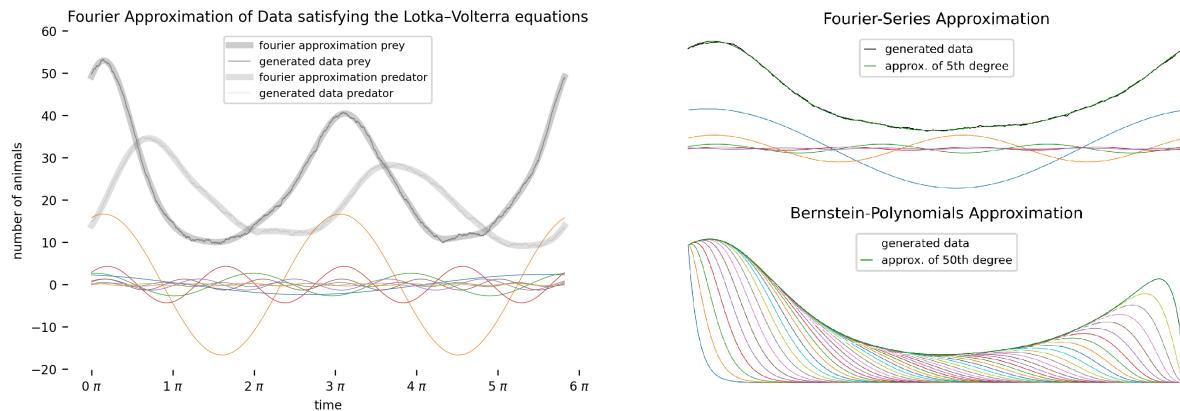


Abbildung 10: Fourier Reihe einer linearen Approximation der Lotka-Volterra Differentialgleichungen mit Störfaktor für feste Anfangswerte (links). Vergleich der schnellen Konvergenz der Fourier Reihe mit der langsamen Konvergenz von Bernstein Polynomen.

2 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Definition 2.0.1. Gewöhnliche Differentialgleichungen n -ter Ordnung, auch Differentialgleichungssysteme bei $m > 1$ Gleichungen sind von der Form

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

für $\Omega \times (\mathbb{R}^m)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ und stetiges $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ sowie Lösungen $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$. Wie sprechen von

- i) Anfangswertproblem, falls $y^{(i)}(x_0) = y^i$ für ein $x_0 \in \Omega$, $y^0, \dots, y^{n-1} \in \mathbb{R}^m$ gefordert ist
- ii) explizit, wenn in die Form $y^{(n)} = f(x, y', \dots, y^{(n-1)})$ aufgelöst wurde, was nicht immer möglich ist.

Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung lassen sich auf ein System von gewöhnlichen Differentialgleichung zurückführen:

$$(y_1, \dots, y_{n-1}, y_n)' = (y_2, \dots, y_n, f(x, y_1, \dots, y_n)).$$

Satz 2.0.2. (Existenzsatz von Peano) Sei f stetig auf $[a, b] \times \overline{B}_R(y_0)$, dann besitzt das Anfangswertproblem $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y^0$ für ein $\epsilon > 0$ eine Lösung $y \in C^1([x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon])$.

Satz 2.0.3. (Existenzsatz von Picard-Lindelöf, lokale Version) Ist f zusätzlich lokal Lipschitz stetig in der zweiten Komponente, ist y eindeutig.

2.1 Lineare Differentialgleichung(ssysteme)

Definition 2.1.1. (Vektorwertige) Lineare gewöhnliche Differentialgleichung(ssysteme) n -ter Ordnung

$$y^{(n)} = \sum_{k=1}^{n-1} A_k(x) y^{(k)} + g(x)$$

für auf einem Intervall I gesuchtes $y : I \rightarrow \mathbb{C}^m$ und stetige $g : I \rightarrow \mathbb{C}^m$, $A_k : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ heißen

- i) *homogen*, wenn g die Nullfunktion ist und *inhomogen* sonst,
- ii) *Anfangswertproblem*, falls zusätzlich $y^{(k)}(x_0) = y^k$ für ein $x_0 \in I$ und $y^1, \dots, y^{n-1} \in \mathbb{C}^m$ gefordert,
- iii) *skalares* lineares Differentialgleichungssystem (also mit konstantem Koeffizienten), falls $A_k \in \mathbb{C}^{m \times m}$ nicht von x abhängen.

Beispiel 2.1.2 (Phasenraum). Insbesondere zum zweidimensionalen skalaren linearen homogenen Differentialgleichungssysteme

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

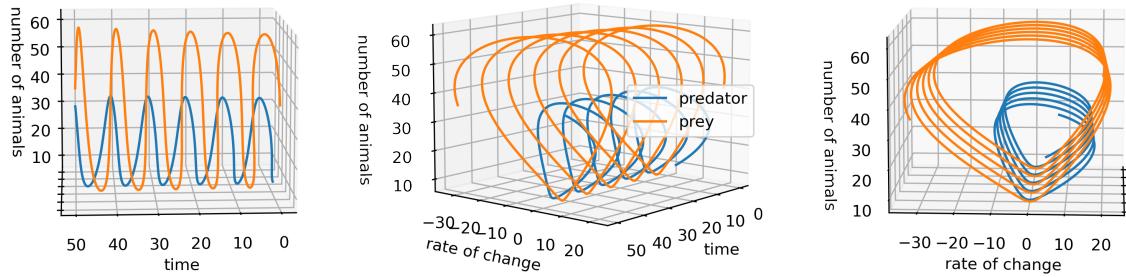


Abbildung 11: Übergang zum Phasenraum einer linearen Approximation der Lotka-Volterra Differentialgleichungen für feste Anfangswerte.

erster Ordnung können wir das durch $A := (a_{ij})_{i,j \leq 2}$ gegebene Vektorfeld skizzieren. Dafür skizzieren wir für einige Vektoren $v \in \mathbb{R}^2$ den Verbindungspfeil zu $Av \in \mathbb{R}^2$. Der Übersichtlichkeit halber sind die Vektoren in [Abbildung 12] normalisiert und ihre Länge entsprechend eingefärbt.

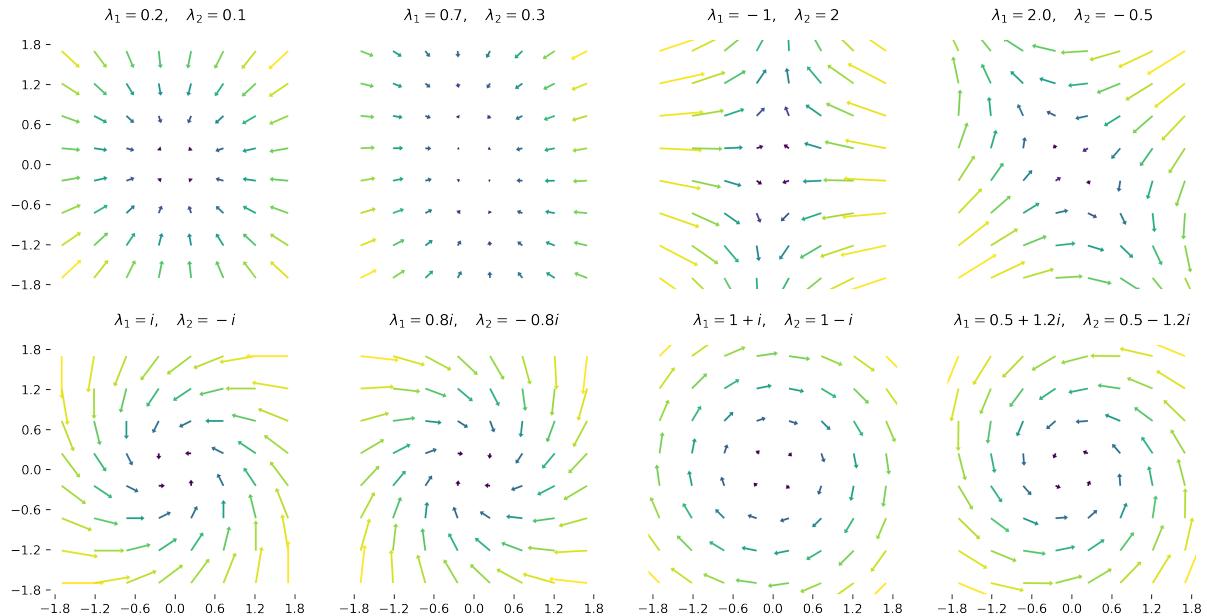


Abbildung 12: Die Phasenräume einiger zufallsgenerierter Matrizen mit eigenwerten λ_1, λ_2 .

Satz 2.1.3. Sei \mathcal{L}_H die Menge der Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung und \mathcal{L}_I die der inhomogenen, dann ist

- i) \mathcal{L}_H ein n -dimensionaler Vektorraum
- ii) $\mathcal{L}_I = \varphi + \mathcal{L}_H$ für beliebiges $\varphi \in \mathcal{L}_I$.

2.2 Fundamentalsystem

Definition 2.2.1. Ein Fundamentalsystem $\{y_1, \dots, y_n\}$ ist eine Basis des Vektorraums

$$\mathcal{L} := \{y \in C^1(I; \mathbb{C}^n) \mid y = \sum_{k=1}^n a_k y_k, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}\}$$

der Lösungen eines homogenen linearen Differentialgleichungssystems. Das lineare homogene Differentialgleichungssystem erster Ordnung hat die Fundamentalmatrix

$$\Phi(x) := [y_1(x) \mid \dots \mid y_n(x)].$$

Beispiel 2.2.2. Das *skalare* lineare homogene Anfangswertproblem $y' = Ay$, $y(x_0) = y^0$ erster Ordnung löst die Exponentialfunktion $y(x) = e^{xA}y^0$ mit Fundamentalmatrix

$$e^{xA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} A^k. \quad (3)$$

Gegeben sei eine *skalare* lineare homogene Differentialgleichung n -ter Ordnung. Dabei löst $y(x)$ die skalare Gleichung $y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} A_k y^{(k)}$ genau dann, falls $Y'(x) = A(x)Y(x)$ für

$$Y(x) = \begin{bmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{n-1}(x) \end{bmatrix}, \quad A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ A_0 & A_1 & \cdots & A_{n-1} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die (paarweise verschiedenen) Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A(\lambda)$ mit Vielfachheiten μ_1, \dots, μ_k . Dann trägt die Nullstelle λ_i zum (komplexen) Fundamentalsystem die μ_i linear unabhängigen Lösungen

$$y_{i,1}(x) = e^{\lambda_i x}, \quad y_{i,2}(x) = xe^{\lambda_i x}, \quad \dots \quad y_{i,\mu_i}(x) = x^{\mu_i-1}e^{\lambda_i x} \quad (5)$$

bei. Ersetze die paarweise auftretenden komplexwertigen $\{e^{\lambda x}v, e^{\bar{\lambda}x}\bar{v}\}$ durch $\{\Re(e^{\lambda x}v), \Im(e^{\lambda x}v)\}$ um ein reellwertiges Fundamentalsystem zu erhalten. Aus dem Fundamentalsystem $\{y_1, \dots, y_n\}$ erhalten wir die Fundamentalmatrix zum korrespondierenden System erster Ordnung

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ y'_1(x) & \cdots & y'_n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Beispiel 2.2.3. (Fundamentalmatrix berechnen) Sei zu einer skalaren linearen Differentialgleichung erster Ordnung $y'(x) = A \cdot y(x)$ die Jordan-Normalform $Q^{-1}AQ = J$,

$$Q = [v_{1,1} \mid \cdots \mid v_{k,s_1} \mid \cdots \mid v_{k,s_k}]$$

gegeben¹⁰. Dann ist $v_{j,1}, \dots, v_{j,s_j} := v_1, \dots, v_l$ die vollständige Hauptvektorkette

$$(A - \lambda I)v_{i+1} = v_i, \quad (i = 1, \dots, l-1)$$

zum Eigenwert $\lambda_j := \lambda$. Mit (3) erhalten wir zur Anfangsbedingung $\Phi(0) = I_l$ die Fundamentalmatrix des Jordanblocks

$$\Phi(x) = e^{\lambda x} \begin{bmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} & \cdots & \frac{x^{l-2}}{(l-2)!} & \frac{x^{l-1}}{(l-1)!} \\ 0 & 1 & x & \cdots & \frac{x^{l-3}}{(l-3)!} & \frac{x^{l-2}}{(l-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Nach Rücktransformation trägt der Jordanblock $s_j = l$ jeweils Hauptvektorlösungen der Form

$$y_i = e^{\lambda x} \sum_{k=1}^i \frac{x^{i-k}}{(i-k)!} v_k, \quad (i = 1, \dots, l) \quad (8)$$

zum Fundamentalsystem von A bei.

¹⁰Das bedeutet, Spalten von Q sind die Eigenvektoren mit den dazugehörigen Hauptvektoren in der Reihenfolge der dazugehörigen **Jordanblöcke**.

2.3 Lösungsansätze

Satz 2.3.1. (Hauptsatz) Die Lösung des Anfangswertproblems $y' = f(x)$, $y(x_0) = y^0$ ist

$$y(x) = y^0 + \int_{x_0}^x f(t) dt. \quad (9)$$

Satz 2.3.2. (Picard-Lindelöfsches Iterationsverfahren) Betrachte die zum Anfangswertproblem $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y^0$ rekursiv definierte Folge

$$y_k(x) := y^0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{k-1}(t)) dt, \quad y_0(x) := y^0, \quad (k \geq 1). \quad (10)$$

Ist f stetig im ersten und Lipschitzstetig im zweiten Argument, konvergiert $y_k(x)$ gleichmäßig gegen die Lösung $y(x)$ in einer Umgebung von x_0 .

Satz 2.3.3. (Getrennte Variablen) Die Lösung des Anfangswertproblems $y' = f(x)g(y)$, $y(x_0) = y^0$ ist

$$y(x) = G^{-1}(F(x)), \quad (11)$$

wobei $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$, $G(y) = \int_{y_0}^y \frac{dt}{g(t)}$ und G^{-1} das Inverse von G in einer Umgebung von y_0 .

Satz 2.3.4 (Substitution). $y(x)$ löst die Differentialgleichung $y' = f(\frac{y}{x})$ zum Anfangswert $y(x_0) = y_0$ genau dann, wenn $z(x) := \frac{y(x)}{x}$ die Lösung ist von

$$z' = \frac{1}{x}(f(z) - z). \quad (12)$$

Satz 2.3.5. (Variation der Konstanten) Die Lösung der homogenen Gleichung $y' = a(x)y$, $y(x_0) = y^0$ ist

$$y(x) := y^0 \exp\left(\int_{x_0}^x a(t) dt\right). \quad (13)$$

Zur inhomogenen Gleichung $y' = a(x)y + b(x)$, $y(x_0) = y^0$ erhalten wir für $A(x) := \int_{x_0}^x a(t) dt$ durch Variation der Konstanten die Lösung

$$y(x) = e^{A(x)} \left(y^0 + \int_{x_0}^x e^{-A(t)} b(t) dt \right). \quad (14)$$

Analog erhalten wir für ein System $y' = A(x)y + b(x)$ gewöhnlicher Differentialgleichungen mit Fundamentalmatrix $\Phi(x) = [y_1(x) | \cdots | y_k(x)]$ mit der Cramerschen Regel die Lösung

$$y(x) = \Phi(x) \left(\int_{x_0}^x \Phi^{-1}(t) b(t) dt \right) = \sum_{k=1}^n \left[\int_{x_0}^x \frac{\det \Phi_k(t)}{\det \Phi(t)} dt \right] y_k(x) \quad (15)$$

wobei in $\Phi_k(t)$ die k -te Spalte von $\Phi(t)$ durch $b(t)$ ersetzt ist.

2.4 Übungsaufgaben

Aufgabe 2.4.1. Gegeben seien die homogenen linearen Differentialgleichungen

$$u' = \frac{u}{x}, \quad v' = -\frac{x}{v}, \quad w' = \frac{x}{w}, \quad z' = -\frac{z}{x}$$

in $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ mit (wohldefiniertem) Anfangswert c_0 in x_0 . Bestimmen Sie die Lösung auf möglichst unterschiedliche Weise. Skizzieren Sie insbesondere die Phasenräume.

HINWEIS! Beginnen Sie mit der Skizze der Phasenräume.

Verwenden bei spielsweise nacheinander (12), Graphisches ablesen, (11) und (13).

Aufgabe 2.4.2. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = 2xy \quad \text{in,} \quad y(0) = \frac{1}{e} \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

mit dem Picard-Lindelöfschen Iterationsverfahren.

Aufgabe 2.4.3. Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für das System

$$y' = Ay, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

HINWEIS! Bestimme Eigenwerte, Eigen- und Hauptvektoren ([3], [4] oder [5]), berechne (7), bestimme (8).
Das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda)$ hat genau eine reelle Nullstelle.

Aufgabe 2.4.4. Stelle ein reelles Fundamentalsystem zu

$$y^{(4)} - y = 0$$

sowie eine Fundamentalmatrix zum korrespondierenden System 1. Ordnung auf.

HINWEIS! System 1. Ordnung mit (4), Fundamentalsystem mit (5), Fundamentalmatrix mit (6).
Wir erhalten $(\lambda - i)(\lambda + i)(\lambda - 1)(\lambda + 1) = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 1)$.

Aufgabe 2.4.5. Seien

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

gegeben. Bestimme Sie die Fundamentalmatrix von A und löse dann mit (15) das inhomogene Problem $y' = Ay + bx$.

HINWEIS! Fundamentalmatrix mit Definition der Exponentialfunktion (3), besser aber mit Jordan-Normalform und (15)
Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A(\lambda)$ sind $i, -i$.

Aufgabe 2.4.6. Ordnen sie die Phasenräume von $y' = f(y)$ mit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ wie in i) bis viii) den Graphiken A bis K in [Abbildung 13] zu.

i) $\begin{bmatrix} y_1^2 \\ y_2^2/2 \end{bmatrix}$	iii) $\begin{bmatrix} -2y_1^2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}$	v) $\begin{bmatrix} -y_1 \\ -y_2 \end{bmatrix}$	vii) $\begin{bmatrix} y_1 + y_2 + 1 \\ y_2 \end{bmatrix}$
ii) $\begin{bmatrix} 0.3y_1 + y_2 \\ -y_1 + 0.3y_2 \end{bmatrix}$	iv) $\begin{bmatrix} -y_1 - y_2 \\ -y_1 - y_2 \end{bmatrix}$	vi) $\begin{bmatrix} y_1 + y_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}$	viii) $\begin{bmatrix} -2y_2 \\ 2y_1 \end{bmatrix}$

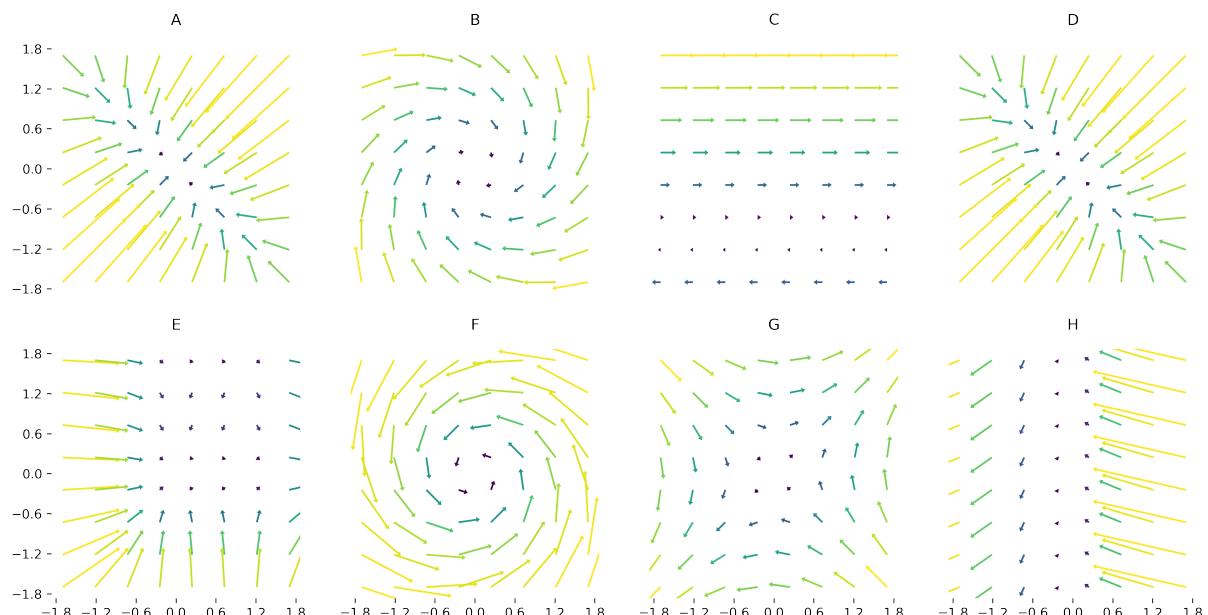


Abbildung 13: Phasenräume der Vektorfelder in Aufgabe 2.4.6.

2.5 Musterlösungen

Abbildung 14: Animation des Phasenräume gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Lösung 2.5.1 (Aufgabe 2.4.1). „ $u' = u/x$ “: Sei $f(\frac{u}{x}) = \frac{u}{x}$ wie in (12), dann ist die Lösung von $u' = \frac{u}{x}$ äquivalent zur Lösung von

$$z' = \frac{1}{x}(f(z) - z) = \frac{1}{x}(z - z) = 0.$$

Dann ist z konstant und einsetzen liefert $u(x) = x \cdot z(x) = cx$ für $c = c_0$.

„ $v' = -x/v$ “: Wie in [Abbildung 14] ist der Phasenraum die Halbkreise mit Radius $c = c_0$, also

$$v(x) = \sqrt{c - x^2}.$$

„ $w' = x/w$ “: Mit Notation wie in (11) gilt für $f(x) = x$ und $g(y) = \frac{1}{y}$

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2}(x^2 - x_0^2), & G(y) &= \frac{1}{2}(y^2 - c_0^2), & G^{-1}(y) &= \sqrt{2y + c_0^2}, \\ \Rightarrow w(x) &= \sqrt{2 \cdot \frac{1}{2}(x^2 - x_0^2) + c_0^2} = \sqrt{x^2 + c}, & \text{für } c &:= c_0^2 - x_0^2. \end{aligned}$$

„ $z' = -z/x$ “: Mit Notation wie in (13) gilt für $a(x) = -\frac{1}{x}$

$$\begin{aligned} A(x) &= \int_{x_0}^x \frac{-1}{t} dt = -\log(x) + \log(x_0) \\ \Rightarrow z(x) &= c_0 e^{\log(x_0) - \log(x)} = \frac{c}{x}, & \text{für } c &:= c_0 e^{\log(x_0)}. \end{aligned}$$

Zuletzt lassen sich die Differentialgleichung auch mit einem Computeralgebrabrasystem lösen [Abbildung 15].

□

```
In [1]: ┏ ┏ from sympy import *

Löse die Differentialgleichungen:    u' =  $\frac{u}{x}$ ,    v' =  $-\frac{x}{v}$ ,    w' =  $\frac{x}{w}$ ,    z' =  $-\frac{z}{x}$ 

In [2]: ┏ ┏ u = Function('u'); v = Function('v'); w = Function('w'); z = Function('z'); # functions
         x = symbols('x', real = True) # variables
         dgl_u = Eq(u(x).diff(x)-u(x)/x,0); dgl_v = Eq(v(x).diff(x)+x/v(x),0); # differential equations
         dgl_w = Eq(w(x).diff(x)-w(x),0); dgl_z = Eq(z(x).diff(x)+z(x)/x,0); # differential equations
         sol_u = dsolve(dgl_u,u(x)); sol_v = dsolve(dgl_v,v(x)); sol_w = dsolve(dgl_w,w(x)); sol_z = dsolve(dgl_z,z(x)); # solutions

In [3]: ┏ ┏ for solution in [sol_u, sol_v[1], sol_w[1], sol_z]: # display solutions
         display(solution)
```

$$\begin{aligned} u(x) &= C_1 x \\ v(x) &= \sqrt{C_1 - x^2} \\ w(x) &= \sqrt{C_1 + x^2} \\ z(x) &= \frac{C_1}{x} \end{aligned}$$

Abbildung 15: Lösung der Differentialgleichung aus Aufgabe 2.4.1 in Python.

Lösung 2.5.2 (Aufgabe 2.4.2). Für festes x respektive y ist $f(x, \cdot)$, respektive $f(\cdot, y)$ linear und damit Lipschitzstetig. Wir zeigen induktiv

$$y_k(x) = y^0 + 2y^0 \int_0^x t \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j}}{j!} dt = y^0 \sum_{j=0}^k \frac{x^{2j}}{j!}$$

und mit Satz 2.3.2 sowie der Definition der e -Funktion konvergiert $y_k(x)$ gleichmäßig gegen $\frac{1}{e} e^{x^2}$ in einer Umgebung um 0 [Abbildung 16]. \square

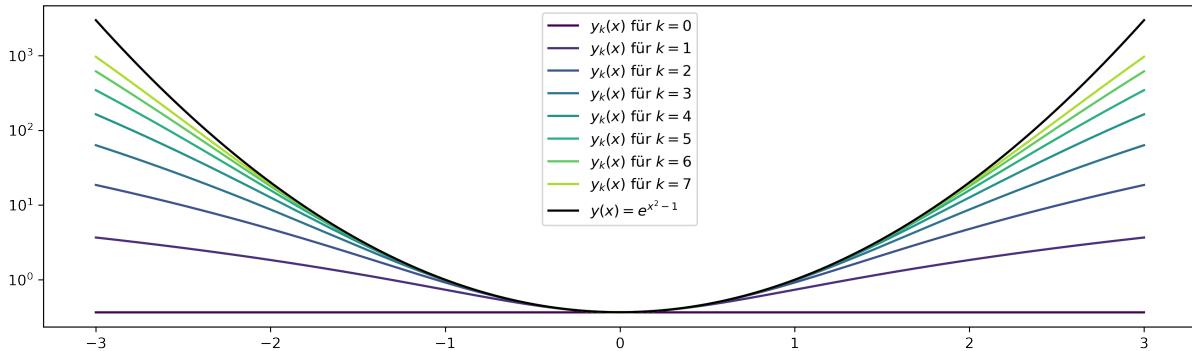


Abbildung 16: Picard-Lindelöfsche Iterationen an die Lösung von $y' = 2xy$.

Lösung 2.5.3 (Aufgabe 2.4.3). Zur Berechnung der Jordan-Normalform siehe die praktische Liste in [3], das Kochrezept [5] oder knapp und übersichtlich [4]. Wir bestimmen die Eigenwerte, Eigen- und Hauptvektoren. Aus dem charakteristischen Polynom

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & -2 & 1 \\ 0 & -1 - \lambda & -1 \\ 0 & 4 & 3 - \lambda \end{bmatrix} = (\lambda - 1)^3$$

erhalten wir den Eigenwert $\lambda_1 = 1$ mit dreifacher algebraischer Vielfachheit. Zum Kern [1] von

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[-1]{\left[\begin{smallmatrix} \square & + & \cdot \frac{1}{2} \\ \square & + & \end{smallmatrix} \right]} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix} \square & + & -\frac{1}{2} \\ \square & + & \end{smallmatrix} \right]} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

erhalten wir für $b_1 = (1, 0, 0)^T$ die Basis $\{b_1\}$ des Eigenraums mit geometrischer Vielfachheit 1 zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$. Da die geometrische Vielfachheit „1“ kleiner ist, also die algebraische Vielfachheit „3“, bestimmen wir noch weiter den Kern von

$$(A - I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 4+4 & 2+2 \\ 0 & 4-4 & 2-2 \\ 0 & -4+4 & -4+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix} \square & + & \cdot \frac{1}{8} \\ \square & + & \end{smallmatrix} \right]} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

und erhalten für $b_2 = (0, -1, 2)^T$ eine Basis $\{b_1, b_2\}$ des Hauptaumrs zweiter Stufe. Da $(I - A)^3 = 0$ wähle v_3 linear unabhängig von $\{b_1, b_2\}$, z.B. $v_3 = (0, 0, 1)^T$ und bestimme die Hauptvektorkette

$$(A - I) \cdot v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} =: v_2, \quad (A - I)^2 \cdot v_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =: v_1.$$

Wir setzen in Gleichung (8) ein und erhalten Fundamentalmatrix $e^x \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \end{bmatrix}$ für

$$y_1(x) = v_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y_2(x) = xv_1 + v_2 = \begin{bmatrix} 4x+1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad y_3(x) = \frac{x^2}{2}v_1 + xv_2 + v_3 = \begin{bmatrix} 2x^2+x \\ -x \\ 2x+1 \end{bmatrix}.$$

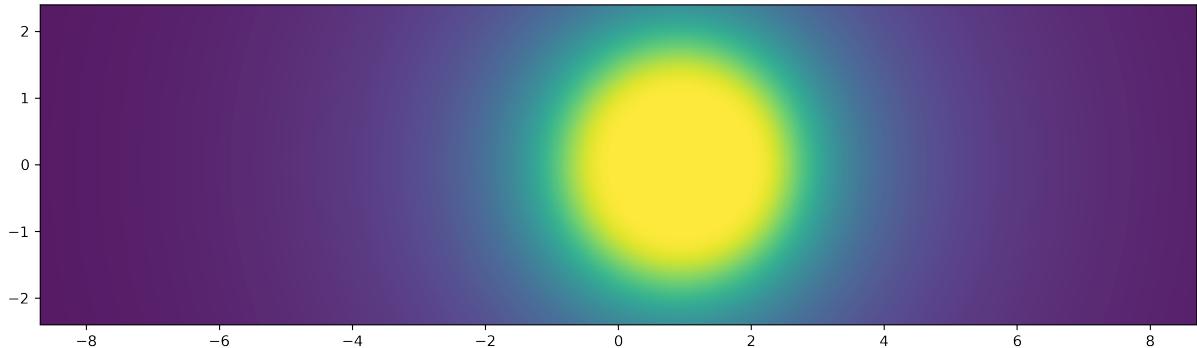


Abbildung 17: Plot von $\mathbb{C} \ni z \mapsto \|(z \cdot I - A)^{-1}\|$ für A aus Aufgabe 2.4.3. Die Sonne markiert den Eigenwert bei $\lambda_1 = 1$.

Lösung 2.5.4 (Aufgabe 2.4.4). Wir bestimmen das korrespondierende System erster Ordnung $Y'(x) = A \cdot Y(x)$ für

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

wie in (4). Mit Entwicklung nach der ersten Spalte und der dritten binomischen Formel folgt für das charakteristische Polynom

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -\lambda \cdot \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \end{bmatrix} = -\lambda(-\lambda)^3 - 1$$

und mit der dritten binomischen Formel

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^4 - 1 = (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 - 1) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - i)(\lambda + i).$$

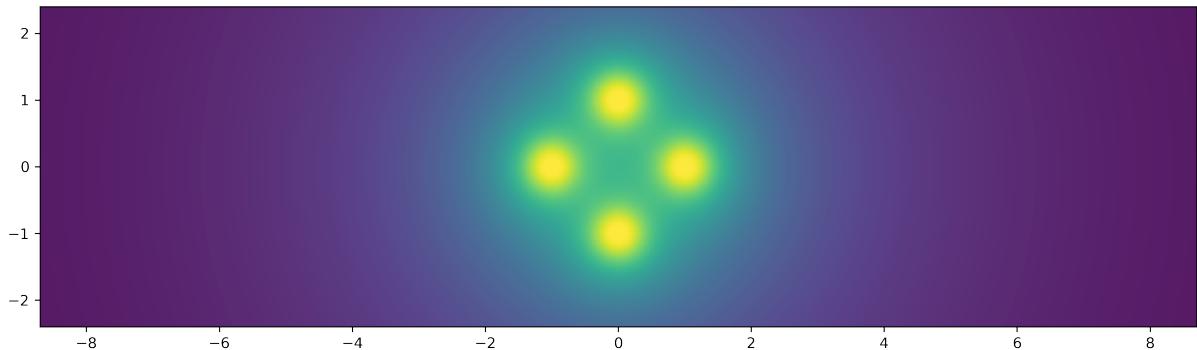


Abbildung 18: Plot von $\mathbb{C} \ni z \mapsto \|(z \cdot I - A)^{-1}\|$ für A aus Aufgabe 2.4.4. Die Sonnen markieren die Eigenwerte in den vierten Einheitswurzeln $e^{i\frac{k}{2\pi}}$ für $k = 1, \dots, 4$.

Rechnen wir die Fundamentalsmatrix zum System erster Ordnung „zu Fuß“ aus. Dazu bestimmen wir nacheinander den Kern $\text{Kern}(A - \lambda)$ zu den Eigenwerten $\lambda = 1, -1, i, -i$ mit dem Gauss-Jordan Verfahren wie in [1]. Dabei wählen wir (wenn möglich) Lösungsvektoren mit erster Komponente 1 um später leicht

in (6) einsetzen zu können.

$$\begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{cccc} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{\quad} \left[\begin{array}{cccc} & & & + \\ & & & + \\ & & & + \\ & & & + \end{array} \right] \xrightarrow{\cdot(-1)} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{\cdot(-1)} b_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\quad} \left[\begin{array}{cccc} & & & + \\ & & & + \\ & & & - \\ & & & - \end{array} \right] \xrightarrow{\cdot(-1)} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{\quad} b_2 := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\
 \left[\begin{array}{cccc} -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -i \end{array} \right] \xrightarrow{-i} \left[\begin{array}{cccc} & & & + \\ & & & + \\ & & & -i \\ & & & -i \end{array} \right] \xrightarrow{\cdot(i)} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{\cdot(i)} b_3 := \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{bmatrix} \\
 \left[\begin{array}{cccc} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 \\ 1 & 0 & 0 & i \end{array} \right] \xrightarrow{i} \left[\begin{array}{cccc} & & & + \\ & & & + \\ & & & -i \\ & & & i \end{array} \right] \xrightarrow{\cdot(-i)} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{\cdot(-i)} b_4 := \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Damit erhalten wir für $y_i(x) := e^{\lambda_i x} b_i$ die Fundamentalmatrix $[y_1(x) \ \cdots \ y_4(x)]$. Mit (5) erhalten wir ein komplexes Fundamentalsystem von $y^{(4)} - y = 0$ schon direkt aus den Einheitsvektoren

$$y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = e^{-x}, \quad y_3(x) = e^{ix}, \quad y_4(x) = e^{-ix}.$$

$z \mapsto \operatorname{Re}(e^{iz})$

$z \mapsto \operatorname{Im}(e^{iz})$

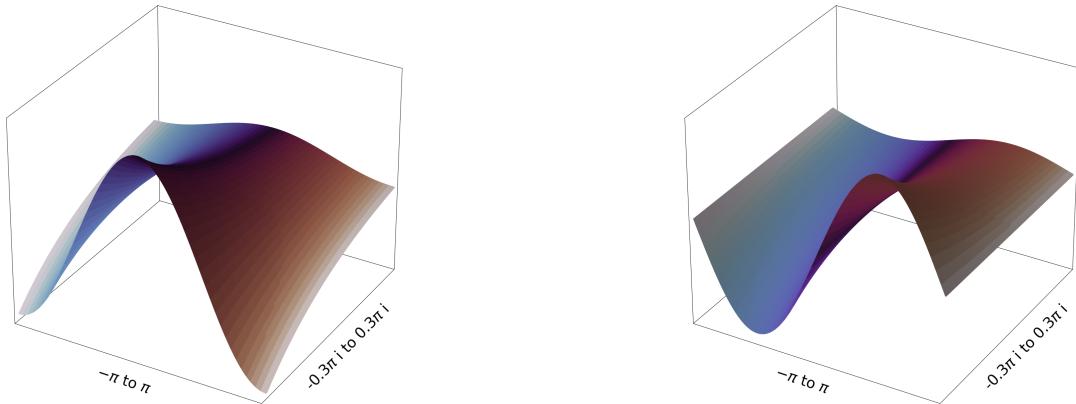


Abbildung 19: Plot von $z \mapsto e^{iz}$. Wir erkennen den Kosinus im Realteil und den Sinus im Imaginärteil. Die Farbe entspricht dem Winkel $\arg(z)$.

Wir rechnen leicht nach, dass wie in (6) behauptet

$$\begin{bmatrix} y_1(x) \\ y'_1(x) \\ y''_1(x) \\ y'''_1(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^x \\ e^x \\ e^x \\ e^x \end{bmatrix} = e^{\lambda_1 x} \cdot b_1, \quad \dots \quad \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y'_1(x) \\ y''_1(x) \\ y'''_1(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-ix} \\ -ie^{-ix} \\ -e^{-ix} \\ ie^{-ix} \end{bmatrix} = e^{\lambda_4 x} \cdot b_4,$$

womit die Behauptung in (6) mit (8) übereinstimmt. Zuletzt erhalten wir ein reelles Fundamentalsystem von $y^{(4)} - y = 0$, indem wir das Paar e^{ix}, e^{-ix} durch

$$\operatorname{Re}(e^{ix}) = \operatorname{Re}(\cos(x) + i \sin(x)) = \cos(x), \quad \text{sowie} \quad \operatorname{Im}(e^{ix}) = \sin(x)$$

ersetzen [Abbildung 19]. Zusammen erhalten wir das reelle Fundamentalsystem $\{e^x, e^{-x}, \cos(x), \sin(x)\}$.

Abbildung 20: Bild des Gitters unter der Transformation der Drehmatrix.

Lösung 2.5.5 (Aufgabe 2.4.5). In der Regel bestimmen wir die Reihe e^{xA} nicht „zu Fuß“ über die Definition in (3), eine Ausnahme sind nilpotente oder periodische Matrizen. Wegen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gilt $A^5 = A$ und für $A^n := (a_{ij,n})_{i,j=1,2}$ und $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir induktiv

$$a_{11,n} = a_{22,n} = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} & n \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad a_{21} = -a_{12} = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} & n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Wir erinnern uns an die Reihendarstellung

$$\cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

von Sinus und Kosinus und Einsetzen liefert die Fundamentalsmatrix

$$e^{xA} = \begin{bmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{bmatrix} =: \Phi(x).$$

Alternativ berechnen ein komplexes Fundamentalsystem über das Standartverfahren, also die Jordan-Normalform und (15). Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$ liefern die Eigenwerte $i, -i$. Da wir an einem reellen Fundamentalsystem interessiert sind, berechnen nur eine Basis eines Eigenraums, z.B. zum Eigenvektor $\lambda_1 := i$

$$A - iI = \begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} \xrightarrow[\leftarrow \cdot i]{+} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\cdot(-i)} b_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}.$$

Die gesuchte reelle Basis des Fundamentalsystems lesen wir aus Real- und Imaginärteil

$$e^{\lambda_1 x} b_1 = \begin{bmatrix} \cos(x) + i \sin(x) \\ i \cos(x) + i^2 \sin(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x) \\ -\sin(x) \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} \sin(x) \\ \cos(x) \end{bmatrix}$$

ab. Damit stimmt unsere Fundamentalsmatrix aus der Definition in Gleichung (3) mit der aus Gleichung (7) wie erwartet überein (jed nach Wahl von b_1 erst nach Vertauschung und Multiplikation der Spalten mit $1, 1, i, -i$).

Für „Variation der Konstanten“ raten wir wegen $\sin^2(x) + \cos^2(x)$ die Inverse

$$\Phi^{-1}(x) = \begin{bmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{bmatrix}$$

oder wir rechnen die Inverse direkt aus. Für festes x und $c := \cos(x)$, $s := \sin(x)$ nehmen wir an, dass¹¹ $c, s \neq 0$, dann gilt wegen $c^2 + s^2 = 1$ insbesondere $c^2 = 1 - s^2$ und

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cc|cc} c & s & 1 & 0 \\ -s & c & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[\cdot s]{\square_{-1}} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & c & -s \\ -s^2 & cs & 0 & s \end{array} \right] \xrightarrow{\square_{+} \square_{+}^{-c^2}} \\ & \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & c & -s \\ 0 & cs & c(1-c^2) & sc^2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & c & -s \\ 0 & cs & cs^2 & sc^2 \end{array} \right] \xrightarrow[\cdot \frac{1}{cs}]{\square_{+}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & c & -s \\ 0 & 1 & s & c \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Mit der rechten Seite von (15) könnten wir auch ganz auf das Inverse $\Phi^{-1}(x)$ verzichten, da

$$\frac{\det \Phi_1(x)}{\det \Phi(x)} = x \cos(x), \quad \frac{\det \Phi_2(x)}{\det \Phi(x)} = x \sin(x).$$

Der Zusammenhang ist, dass wir in der Mitte von (15), für einen komfortablen Anfangswert $x_0 := 0$ das Integral

$$\int_0^x \Phi^{-1}(t)b(t) dt = \int_0^x \begin{bmatrix} t \cos(t) \\ t \sin(t) \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} t \sin(t) \\ -t \cos(t) \end{bmatrix} \Big|_0^x = \begin{bmatrix} x \sin(x) + \cos(x) - 1 \\ \sin(x) - x \cos(x) \end{bmatrix}.$$

ausrechnen, womit wir die spezielle Lösung

$$y_{sp}(x) = \begin{bmatrix} x \sin(x) \cos(x) + \cos^2(x) - \cos(x) + \sin^2(x) - x \cos(x) \sin(x) \\ -x \sin^2(x) - \cos(x) \sin(x) + \sin(x) + \sin(x) \cos(x) - x \cos^2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos(x) \\ -\sin(x) \end{bmatrix}.$$

erhalten. Der Lösungsraum setzt sich aus der Summe einer speziellen Lösung mit dem Lösungsraum der homogenen Differentialgleichung zusammen. Da $(\cos(x), -\sin(x))^T$ bereits in der homogenen Lösung steckt, ist der Lösungsraum \mathcal{L}_I des inhomogenen Problems mit Satz 2.1.3.ii) gegeben durch:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -x \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} \cos(x) \\ -\sin(x) \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} \sin(x) \\ \cos(x) \end{bmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}. \quad \square$$

Lösung 2.5.6 (Aufgabe 2.4.6). Die Zuordnung zwischen Graphik und Vektorfeld ist wie folgt:

- | | | | | | | | | |
|------------|-----|-----|------|----|----|-------|-----|------|
| Graphik | A | B | C | D | E | F | G | H |
| Vektorfeld | iv) | ii) | vii) | v) | i) | viii) | vi) | iii) |

¹¹Der Fall $s = 0$ ist trivial und $c = 0$ ist eine einfache Übungsaufgabe.

Literatur

- [1] Erné, Marcel (2008). *Lineare Gleichungssysteme*. Kapitel 4.3 in *Mathematik I für Bauingenieure*. http://www2.iazd.uni-hannover.de/erne/Mathematik1/dateien/maple/MB_4_3.html (05.02.2021).
- [2] Forster, Otto (2017). *Differentialrechnung im Rⁿ, gewöhnliche Differentialgleichungen*. 11. erweiterte Auflage. Springer Fachmedien Wiesbaden.
Lineare Gleichungssysteme. Kapitel 4.3 in *Mathematik I für Bauingenieure*. http://www2.iazd.uni-hannover.de/erne/Mathematik1/dateien/maple/MB_4_3.html (05.02.2021).
- [3] Furlan, Peter (1995): *Eigenwerte und Eigenvektoren*. In: *Das gelbe Rechenbuch*, S 101 - 112. <http://www.das-gelbe-rechenbuch.de/download/Eigenwerte.pdf> (04.02.2021).
- [4] Potpara, Tibor Djurica (2013): *How to calculate Jordan's normal form (the hard way)*. <https://ojdip.net/2013/06/how-to-calculate-jordans-normal-form-the-hard-way/> (05.02.2021).
- [5] Winkler, David (2011): *Kochen mit Jordan*. <https://www.danielwinkler.de/la/jnfkochrezept.pdf> (04.02.2021).