Das vorliegende Miniskript entsteht im Rahmen des Tutoriums zur Analysis II, zum Ende des Wintersemesters 2020/2021 an der Heinrich Heine Universität Düsseldorf. Inhaltlich ist es an [2] orientiert, viele Schreibweisen kommen von `Wikipedia` und sind mit monospace verlinkt.

1 Differential- und Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$

1.1 Grundlagen

Definition 1.1.1 (Metrik)**.** Eine Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ heißt Metrik auf einer Menge X wenn für alle $x, y, z \in X$ gilt:

i) $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$ (Definitheit).

ii) $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie).

iii) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (Dreieckungleichung)

Das Paar (X, d) heißt metrischer Raum.

Auf jeder Menge X ist eine triviale „gleichmäßig diskrete" Metrik gegeben durch:

$$d(x,y) \coloneqq \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}. \tag{1}$$

Definition 1.1.2 (Norm)**.** Eine Abbildung $|| \; ||\colon V \to \mathbb{R}_0^+$ heißt Norm auf einem Vektorraum V über den Körper $\mathbb{K}$, wenn für alle $x, y \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

i) $\|x\| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$, (Definitheit).

ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, (absolute Homogenität).

iii) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$, (Dreieckungleichung).

Das Paar $(V, \| \; \|)$ heißt Vektorraum.

Eine Norm induziert durch die Festlegung $d(x, y) \coloneqq ||x - y||$ eine Metrik auf $V \times V$.

Bemerkung 1.1.3 (Skalarprodukt)**.** Eine positiv definite symmetrische Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}_+$, auf einem reellen Vektorraum V heißt Skalarprodukt. Das bedeutet für alle $x, y, w, z \in V$ und $\lambda \in K$ gilt:

i) $\langle x, x \rangle = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ (Definietheit).

ii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ (Symmetrie).

iii) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ sowie $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$ (linear in beiden Argumenten).

Der Zusammenhang zwischen Skalarprodukt, Norm und Metrik ist:

$$\text{Skalarprodukt} \xrightarrow{||x|| := \sqrt{\langle x,x \rangle}} \text{Norm} \xrightarrow{d(x,y) := ||x-y||} \text{Metrik.}$$

Andersherum induziert eine Metrik im Allgemeinen keine Norm und eine Norm im Allgemeinen kein Skalarprodukt.

Definition und Satz 1.1.4. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Dann heißt f stetig auf X, wenn für alle $a \in X$ gilt $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Das bedeutet

$$\forall a \, \forall \epsilon \, \exists \delta \quad \forall x \in X : \qquad d_X(x, a) < \delta \; \Rightarrow \; d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

Dies ist äquivalent zu: Für allen offenen Mengen $V \subseteq Y$ ist $f^{-1}(V)$ offen in X. Ferner heißt f gleichmäßig stetig genau dann, wenn

$$\forall \epsilon \, \exists \delta \, \forall a, x \in X : \qquad d_X(x, a) < \delta \; \Rightarrow \; d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

Zuletzt heißt f Lipschitz stetig, wenn eine Konstante L existiert, sodass

$$\forall a, x \in X : \qquad d_X(f(x), f(a)) \leq L \cdot d_Y(x, y)$$

Lemma 1.1.5. Seien X, Y und Z metrische Räume und $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ sowie $h\colon Y \to X$ stetige Funktionen.

i) Dann sind $f + g$ und $f \cdot g$ stetig.

ii) Sei ferner $g(x) = 0$ für $x \in X$, dann ist f/g stetig.

iii) Die Verkettung $f \circ h\colon Y \to \mathbb{R}$ ist stetig.

iv) Gleichmäßig stetige Funktionen sind stetig.

v) Lipschitz stetige Funktionen sind stetig[1].

Definition und Satz 1.1.6. Definition. Eine Teilmenge K eines metrischen Raumes X heißt kompakt, wenn jede offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von K eine endliche Teilüberdeckung besitzt, d.h. es existieren $i_1, \ldots, i_k \in I$, so dass

$$K \subset U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \ldots \cup U_{i_k}.$$

Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$, dann ist K genau dann kompakt wenn eine der folgenden Eigenschaften gelten:

i) K ist beschränkt und abgeschlossen.

ii) Jeder Folge $(a_n)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $a_i \in K$ für $n \in \mathbb{N}$ besitzt eine in K konvergente Teilfolge.

Sei $f\colon K \to X$ stetig, dann gilt:

i) f ist gleichmäßig stetig.

ii) $f(K)$ ist kompakt.

iii) f nimmt auf K Maximum und Minimum an.

Definition und Satz 1.1.7 (Kurve)**.** Sei I ein Intervall, dann heißt $\varphi\colon I \to \mathbb{R}^n$ Weg[2] stetig differenzierbar, falls für $1 \leq i \leq n$ die reelle Funktion $I \ni x \mapsto \varphi_i(x)$ stetig[3] differenzierbar ist. In diesem Fall ist die Weglänge gegeben durch

$$\int_I ||f'(x)||\,\mathrm{d}x.$$

Definition 1.1.8 (partiell differenzierbar)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, dann heißt $f\colon U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar, wenn für alle $x \in U$ und der Grenzwert

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} := \lim_{h\to 0} \frac{f(x + he_i) - f(x)}{h}, \quad (1 \leq i \leq n)$$

existiert, wobei $e_i \in \mathbb{R}^n$ den i-ten Einheitsvektor bezeichnet. Wir sagen, f ist *stetig* partiell Differenzierbar, falls alle partiellen Ableitungen stetig sind.

Zu partiell differenzierbaren f ist der Gradient ∇f von f gegeben durch:

$$\nabla f(x) := \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Für ein partiell differenzierbares Vektorfeld $v\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ setzen wir die Divergenz „$\operatorname{div} v$“ von v:

$$\operatorname{div} v := \langle \nabla, v\rangle := \sum_{k=i}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} v_i.$$

Sei f zudem zwei Mal stetig differenzierbar, dann ist das Laplace Operator „Δf“ von f gegeben durch:

$$\Delta f := \langle \nabla, \nabla\rangle f = \operatorname{div} \nabla f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f.$$

[1] Lineare stetige Funktionen sind Lipschitz stetig.
[2] Das Bild $\varphi(I)$ heißt Kurve.
[3] Und nur differenzierbar, wenn die Ableitung nicht stetig ist.

Satz 1.1.9 (von Schwarz)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}$ k-Mal stetig partiell differenzierbar, dann gilt für alle $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ und Permutationen π von $1, \dots, k$:

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} f(x) = \frac{\partial}{\partial x_{i_{\pi(1)}}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_{\pi(k)}}} f(x).$$

1.2 Totale Differenzierbarkeit

Definition 1.2.1. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, dann heißt $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ in $x \in U$ *(total) differenzierbar*, wenn eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ existiert, sodass für ζ in einer Umgebung der Null

$$f(x + \zeta) = f(x) + A\zeta + ||\zeta|| \cdot \varphi(\zeta),$$

und $\varphi(\zeta)$ für $\zeta \to 0$ stetig gegen Null konvergiert[4].

Definition 1.2.2. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, dann ist die Richtunsableitung von $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ im Punkt $x \in U$ in Richtung $v \in S^{n-1}$ (bei Existenz) gegeben durch

$$\mathrm{D}_v f(x) \coloneqq \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x + tv)\Big|_{t=0}$$

Bezüglich des Zusammenhang zwischen den Differenzierbarkeitsbegriffen gelten die Implikationen

stetig part. diff'bar $\Rightarrow$ total diff'bar $\Rightarrow$ Richtungsabl. existieren $\Rightarrow$ part. diff'bar.

Die Richtungsableitung von f im Punkt x in Richtung des kanonischen i-ten Einheitsvektors e_i entspricht der partiellen Ableitung

$$\mathrm{D}_{e_i} f(x) \coloneqq \mathrm{D}_i f(x) \coloneqq \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

Zusammen rechtfertigt dies die identifizierung von A aus Definition 1.2.1 mit der Funktionalmatrix $\mathrm{D}f$, auch „Jakobi-Matrix“ J_f oder auch einfach Ableitung f' im Punkt x,

$$\mathrm{D}f(x) \coloneqq J_f(x) \coloneqq \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}},$$

welche sich aus den partiellen Ableitungen zusammensetzt. Auch für die mehrdimensionale Ableitung gilt die Kettenregel:

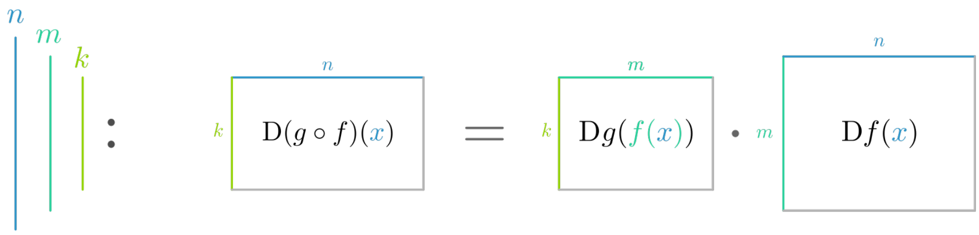

Abbildung 1: Größe der Matrizen in der mehrdimensionalen Kettenregel.

Satz 1.2.3 (Kettenregel)**.** Seien $U \in \mathbb{R}^n$, $V \in \mathbb{R}^m$ offene Mengen mit wohldefinierter Komposition

$$(g\colon V \to \mathbb{R}^k) \circ (f\colon U \to V)\colon U \to \mathbb{R}^k$$

differenzierbarer Abbildungen f, g. Dann ist $g \circ f$ differenzierbar und für das Differential[5] gilt

$$\mathrm{D}(g \circ f)(x) = \mathrm{D}g(f(x)) \cdot \mathrm{D}f(x).$$

[4] Das bedeutet $r(\zeta) \coloneqq ||\zeta|| \cdot \varphi(\zeta)$ ist eine Fehlerfunktion, welche welche `asymptotisch` gegenüber $||\zeta||$ vernachlässigbar ist, auch „$r(\zeta) = o(||\zeta||)$“.

[5] Klarer wird die Kettenregel Möglicherweise mit der Jakobi-Matrix: $J_{g \circ f}(x) = J_g(f(x)) \cdot J_f(x)$.

1.3 Satz von Taylor

Definition 1.3.1 (Multiinidex)**.** Für ein Tupel $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ und $x \in \mathbb{R}^n$ sei

$$|\alpha| := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k, \qquad \alpha! := \prod_{k=1}^{n} \alpha_k!, \qquad x^\alpha := \prod_{k=1}^{n} x_k^{\alpha_k}.$$

Für eine $|\alpha|$-mal stetig differenzierbare Funktion f und Differentialoperator D sei

$$\mathrm{D}^\alpha := \mathrm{D}_1^{\alpha_1}\mathrm{D}_2^{\alpha_2}\dots\mathrm{D}_n^{\alpha_n} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}, \qquad \text{wobei} \qquad \mathrm{D}_k^{\alpha_k} := \underbrace{\mathrm{D}_k \circ \mathrm{D}_k \circ \dots \circ \mathrm{D}_k}_{\alpha_k\text{-Mal}}.$$

Satz 1.3.2 (Taylorsche Formel)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $x, \zeta \in \mathbb{R}^n$ sodass $\{x + t\zeta : 0 \leq t \leq q\} \subset U$. Dann existiert für alle $n+1$-mal stetig differenzierbaren $f : U \to \mathbb{R}$ ein $t \in [0,1]$ sodass

$$f(x+\zeta) = \underbrace{\sum_{|\alpha| \leq n} \frac{\mathrm{D}^\alpha f(x)}{\alpha!}\zeta^\alpha}_{:= T_n f(\zeta; x)} + \underbrace{\sum_{|\alpha| = n+1} \frac{\mathrm{D}^\alpha f(x + t\zeta)}{\alpha!}\zeta^\alpha}_{:= R_n f(\zeta; x)}.$$

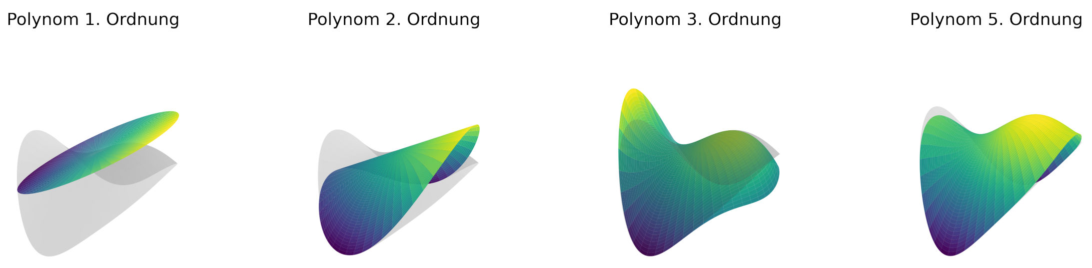

Abbildung 2: Taylorpolynome von $(x,y)^T \mapsto \sin(x) - y^2/2$ (in grau hinterlegt) auf der Einheitskreisscheibe [`Animation`].

1.4 Lokale Extrema

Definition 1.4.1 (Definitheit, Hessematrix)**.** Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt

positiv [negativ] definit	also $A \succ 0$ $[A \prec 0]$	wenn $x^T A x > 0$ $[x^T A x < 0]$
positiv [negativ] semidefinit	also $A \succeq 0$ $[A \preceq 0]$	wenn $x^T A x \geq 0$ $[x^T A x \leq 0]$

für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und indefinit sonst. Betrachte hierzu die `Eigenwerten` oder `Hauptminoren` von A.

Bei der Bestimmung von Extrema spielt die Definitheit der Hessematrix

$$H_f(x) := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

von zweimal stetig differenzierbaren f auf offenem $U \subseteq \mathbb{R}^n$ im Punkt $x \in U$ eine entscheidende Rolle.

Satz 1.4.2 (Notwendige Bedingung für Extremum)**.** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \colon U \to \mathbb{R}$ partiell Differenzierbar. Besitzt f in $x \in U$ ein lokales Extremum, dann gilt

$$\nabla f(x) = 0$$

Satz 1.4.3 (Hinreichende Bedingung für Extremum)**.** Zweimal stetig differenzierbares $f \colon U \to \mathbb{R}^n$ hat für offenes U in $x \in U$ ein striktes lokales Maximum [respektive Minimum], wenn

$$\nabla f(x) = 0 \qquad \text{sowie} \qquad H_f(x) \prec 0, \quad [\text{respektive } H_f(x) \succ 0].$$

1.5 Satz über implizite Funktionen

Satz 1.5.1 (Banachscher Fixpunktsatz). Auf der abgeschlossenen, nicht leeren Teilmenge A eines `vollständig normierter` Raumes $(X, ||\cdot||)$ besitzt eine „Kontraktion" $\Phi : A \to A$,

$$||\Phi(y) - \Phi(z)|| < ||y - z||, \quad (y, z \in A)$$

genau einen Fixpunkt. Das bedeutet für einen beliebigen Startwert $x_0 \in A$ konvergiert die Folge $x_{i+1} \coloneqq \Phi(x_i)$ gegen einen Fixpunkt x

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x = \Phi(x).$$

Satz 1.5.2 (über implizite Funktionen). Seien $U \subseteq \mathbb{R}^m$, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F\colon U \times V \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit Jakobi-Matrix

$$\mathrm{D}F(x,y) \coloneqq \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m} & \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix}.$$

Sei $F(x_0, y_0) = 0$ und $\frac{\partial}{\partial y} F(x_0, y_0)$ invertierbar. Dann existieren offene Umgebungen $U_0 \subseteq U$ von x_0 und $V_0 \subseteq V$ von y_0 sowie stetig differenzierbares $f\colon U_0 \to V_0$ sodass $f(x_0) = y_0$ und für alle $(x,y) \in (U_0 \times V_0)$:

$$F(x,y) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = f(x).$$

Insbesondere können wir f „implizit differenzieren„, also die Jakobi-Matrix angeben

$$\mathrm{D}f(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))\right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) \tag{2}$$

auch ohne die Abbildungsvorschrift $x \mapsto f(x)$ zu kennen.

1.6 Minimierung unter Nebenbedingungen

Definition 1.6.1. (Untermannigfaltigkeit) Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, wenn für alle $a \in M$ eine offene Umgebung U von a existiert sodass eine folgenden Eigenschaften erfüllt ist:

	$\exists$ offene Mengen	$\exists$ C^p-Abbildung	Rang	
i)	$U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V = \mathbb{R}^{n-k}$	$f : U \to V$,	$n-k$	$U \cap M = \{x \in U \mid f(x) = 0\}$
ii)	$U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^n$	$h : U \to V$ `diffeomorph`	n	$h(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{n-k}}\})$
iii)	$U \subseteq M$, $V \subset \mathbb{R}^k$	$\varphi^{-1} : V \to U$ `homöomorph`[6]	k	

Wir nennen (das implizit gegebene) φ Karte und φ^{-1} lokale Parametrisierung.

Satz 1.6.2 (Lagrange Multiplikatoren). Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und induziert $f = (f_1, \ldots, f_{n-k})\colon U \to \mathbb{R}^{n-k}$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit

$$M = \{x \in U \mid f(x) = 0\}$$

dann existieren für differenzierbares $F : U \to \mathbb{R}$ mit lokalem Extremum a von $F|_M$ „lagrangsche Multiplikatoren" $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-k} \in \mathbb{R}$, so dass

$$\nabla F(a) + \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i \nabla f_i(a) = 0.$$

[6] Praktisches Kriterium: Wenn φ auf offenem $V \subseteq \mathbb{R}^k$ stetig differenzierbar und der Rang $\mathrm{D}\varphi$ in jedem Punkt gleich k, existiert für jedes $t \in V$ eine offene Umgebung V_t, sodass $\varphi|_{V_t} \to \varphi(V_t)$ homöomorph.

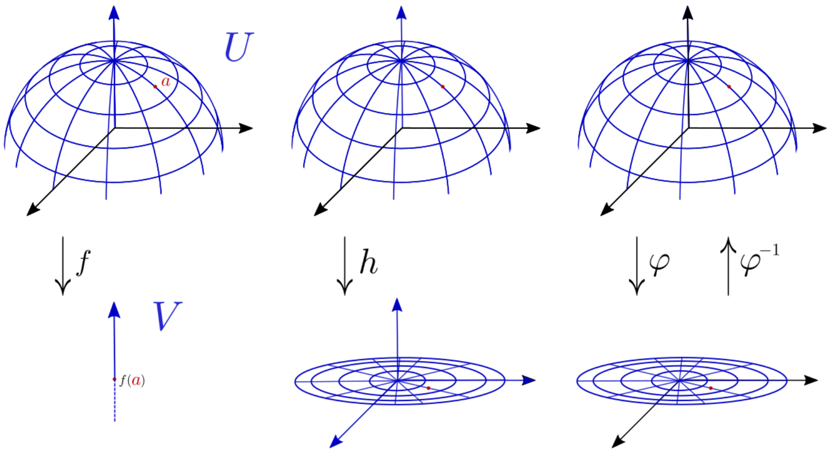

Abbildung 3: Urbild und Bild der C^p-Abbildungen von Untermannigfaltigkeiten.

1.7 Parameterabhängige Integrale

Satz 1.7.1 (Differentation unterm Integral)**.** Seien I, J kompakt und $f\colon I \times J \to \mathbb{R}$ stetig und in $y \in J$ stetig differenzierbar, dann ist $y \mapsto \int_I f(x,y)\,\mathrm{d}x$ stetig differenzierbar und

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \int_I f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_I \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,\mathrm{d}x.$$

1.8 Übungsaufgaben

Aufgabe 1.8.0. Recherchieren Sie jeh ein Ihnen unbekanntest Beispiel und Gegenbeispiel für eine Metrik und eine Norm. Stellen Sie ihren Gruppenmitgliedern davon ein Beispiel mit Begründung vor.

Aufgabe 1.8.1. Zeigen Sie, dass eine Norm eine Metrik induziert, die Umkehrung im Allgemeinen aber nicht gilt. Zeigen Sie insbesondere, dass durch d wie in (1) eine Metrik gegeben ist, die keine Norm induziert.

Hinweis! Norm induziert Metrik per Definition.
Zeige, dass durch $||x|| := d(x, 0)$ keine Norm gegeben ist.

Aufgabe 1.8.2. Zeigen Sie mit der offenen Überdeckungseigenschaft und dem Folgenkriterium, dass die offene Einheitskreisscheibe $B_1(0) := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid ||x||_2 < 1\}$ nicht kompakt ist.

Aufgabe 1.8.3. Sei

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{cases} 0 & x = y = 0 \\ \frac{\sqrt{|x|}y^3}{x^2+y^2} & \text{sonst} \end{cases}$$

i) Zeigen Sie, dass f stetig ist.
ii) Zeigen Sie mit dem ϵ-δ-Kriterium, die Stetigkeit von f in $(0,0)^T$.
iii) Zeigen Sie, dass $U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) < c\}$ für alle $c \in \mathbb{R}$ offen ist.
iv) Zeigen Sie, dass $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = c\}$ für alle $c \in \mathbb{R}$ abgeschlossen ist.

Hinweis! Identifizieren Sie (x, y) mit den Polarkoordinaten $(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$.
Wie entstehen U und B aus f?

Aufgabe 1.8.4. Zeigen Sie, dass

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{cases} 0 & x = y = 0 \\ \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{sonst} \end{cases}$$

nicht stetig ist, aber in jedem Argument stetig ist[7].

Hinweis! *Konstruieren Sie eine Folge $(x_n, y_n) \to (0,0)$, sodass $f(x_n, y_n)$ nicht gegen 0 konvergiert.*

Aufgabe 1.8.5. Zeigen Sie, dass alle Richtungsableitungen von

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \sqrt[3]{x^2 y}$$

existieren, nicht jedoch das totale Differential.

Hinweis! Wie verhält sich f im Ursprung?
Leiten Sie in Richtung $(\cos\varphi, \sin\varphi)^T$ ab.

Aufgabe 1.8.6. Sei $a \in \mathbb{R}^n$, $p \geq 2$ und $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Stellen Sie Gradient und Hessematrix zu folgenden Funktionen auf:

i) $x \mapsto \operatorname{spur}(ax^T)$
ii) $x \mapsto \frac{1}{2}\exp(x^T Q x - a^T x)$
iii) $(x,y)^T \mapsto \exp(-||x-y||_2^2)$
iv) $(x,y)^T \mapsto (1 + x^T y)^p$

Aufgabe 1.8.7. Bestimmen Sie die Ableitung von

$$h\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^x$$

sowohl mit Analysis I Methoden, als auch mit der Mehrdimensionalen Kettenregel.

[7] Das bedeutet, für $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ sind $x \mapsto f(x, y_0)$ und $y \mapsto f(x_0, y)$ stetig.

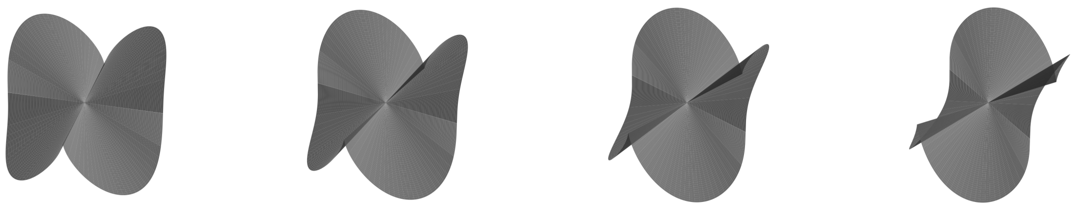

Abbildung 4: Eine im Ursprung nicht differenzierbare Funktion mit partiellen Ableitungen die übereinstimmen.

Hinweis! Betrachte die partiellen Ableitungen von $g(u,v) := u^v$ und $f(x) := (x,x)^T$

Berechne die rechte Seite von Satz 1.2.3 .

Aufgabe 1.8.8. Beweisen Sie mit der Kettenregel Satz 1.2.3, dass sich die Jakobi-Matrix von f wie in Satz 1.5.2 nach (2) auflösen lässt.

Aufgabe 1.8.9. Zeige, dass die Einheitsphäre

$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid ||x||_2 = 1\}$$

eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$ ist. Geben Sie insbesondere für jedes $x \in S^n$ eine Karte an.

Hinweis! Die Fußnote in Definition 1.6.1 erleichtert den Nachweis der Homöomorphie.

Eine einfache Karte ist in [Abbildung 3] gegeben.

Aufgabe 1.8.10. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $(x,y)^T \mapsto \sin(x) - y^2/2$.

i) Bestimme die Taylorentwicklung fünfter Ordnung $T_5 f(\zeta; 0)$ von f im Punkt $(0,0)^T$.

ii) Bestimme die strikten Maxima von f und $T_5 f(\zeta; 0)$.

Aufgabe 1.8.11 (Peanosche Fläche)**.** Widerlegen Sie die Behauptung, dass eine Funktion die in einem Punkt nur Abstiegsrichtungen[8] hat, in diesem ein lokales Maximum besitzt. Nehmen sie hierzu die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto (2x^2 - y)(y - x^2)$$

zu Hilfe [Abbildung 5]. Warum können wir Satz 1.4.3 nicht anwenden?

Hinweis! Untersuchen Sie die Vorzeichen der Faktoren zwischen Ihren Nullstellen.

Geraden durch den Nullpunkte sind durch $r \mapsto r(\cos\varphi, \sin\varphi)^T$ gegeben.

Aufgabe 1.8.12. Zeigen Sie, dass

$$f\colon [0,\infty[\to [0,\infty[, \quad x \mapsto \frac{x + \frac{1}{16}}{x+1}$$

strikt kontraktiv ist und geben Sie den Fixpunkt an.

Aufgabe 1.8.13. Sei $(x_0, y_0) := (3,3)^T$ und

$$F(x,y)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto x^3 + y^3 - 6xy$$

gegeben. Zeigen Sie, dass in einer Umgebung von $(x_0, y_0)^T$ eine Funktion f existiert, sodass

$$F(x,y) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = f(x)$$

[8] Gemeint ist, dass die Einschränkung der Funktion auf eine Gerade durch den Punkt, in ebenselbem ein lokales Maximum hat.

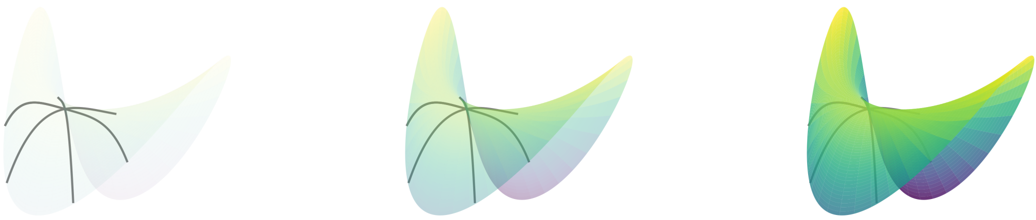

Abbildung 5: Schnittpunkt der Geraden im „`Peano-Sattel`“.

und geben Sie die Ableitung von f im Punkt $(x_0, y_0)^T$ konkret an.

Hinweis! *Benutzen Sie Satz 1.5.2 und (2)*

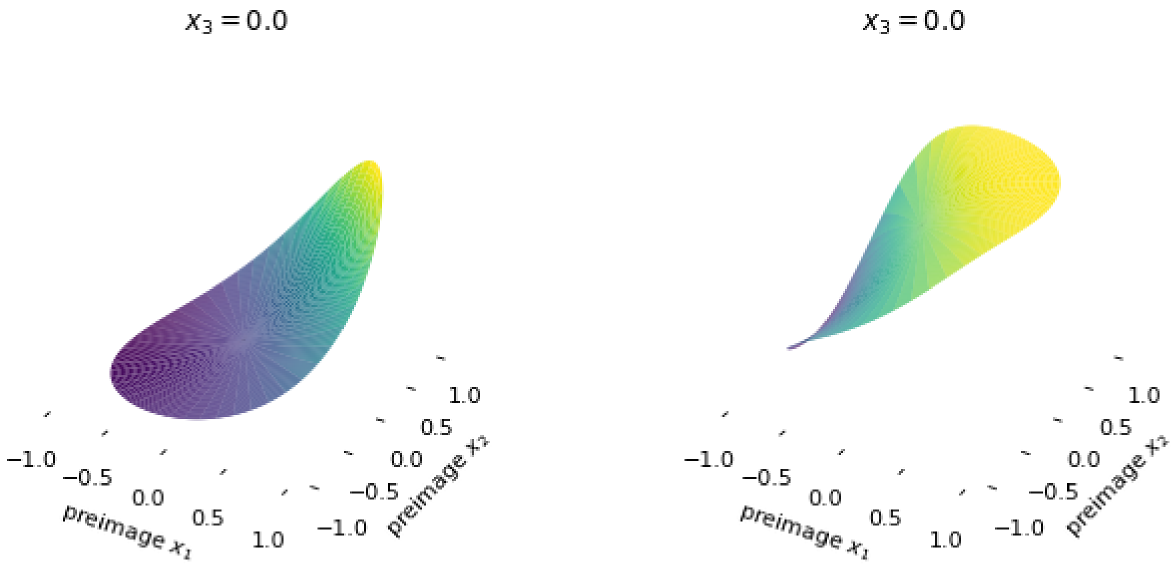

Abbildung 6: Animation des Plot von $(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2, x_3)$ (links) sowie $(x_1, x_2) \mapsto \frac{1}{1+e^{-f(x_1,x_2,x_3)}}$ (rechts) für laufendes $0 \leq x_3 \leq 0.5$.

Aufgabe 1.8.14. Betrachte das Minimierungsproblem $\min\{F(x) \mid x \in \overline{B_1(0)}\}$ wobei

$$F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto e^{1+x_1+x_2+x_3} - x_2 - x_3$$

und $\overline{B_1(0)} \coloneqq \partial B_1(0) \cup B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid ||x||_2^2 \leq 1\}$. Suchen Sie Mithilfe von Satz 1.6.2 einen Kandidaten $\overline{x}$ für ein lokales Minimum. Stellen Sie Vermutungen an, wie Sie die Minimalität nachweisen könnten.

Hinweis! Zum Nachweis der Minimalität kann die Abschätzung $e^{1+z} \geq 1 + (1 + z)$ hilfreich sein
Wähle Lagrange Multiplikator 1/2.

Aufgabe 1.8.15. Bestimmen Sie

$$\int_0^a x^2 \cos x \,\mathrm{d}x$$

sowohl mithilfe partieller Integration, als auch mit Satz 1.7.1 durch zweifaches differenzieren von

$$F(y) = \int_0^a \cos(xy)\,\mathrm{d}x.$$

1.9 Musterlösungen

Lösung 1.9.1 (Aufgabe 1.8.1)**.** „Norm induziert Metrik". Wir zeigen, dass für einen Vektorraum $(V, ||\ ||)$ durch $d(x,y) := ||x-y||$ eine Metrik gegeben ist. Definitheit: Sei $x, y \in V$ und $z := x - y$. Dann $z = 0$ genau dann, wenn $x = y$, also mit der Definitheit der Norm $0 = ||z|| \overset{\text{def.}}{=} ||x-y|| \overset{\text{def.}}{=} d(x,y)$ genau dann wenn $x = y$. Symmetrie: Wir benutzen die absolute Homogenität der Norm. Für alle $x, y \in V$ gilt.

$$d(x,y) = ||x-y|| = ||-1 \cdot (y-x)|| = |-1| \cdot ||y-x|| = d(y,x).$$

Dreieckungleichung: Wir benutzen die Dreieckungleichung der Norm. Für all $x, y, z \in V$ gilt

$$d(x,z) = ||x-z|| = ||x-z+(y-y)|| \leq ||x-y|| + ||y-z|| = d(x,y) + d(y,z).$$

Wir zeigen, dass d wie in (1) eine Metrik ist. $i)$ gilt per Definition. $ii)$ sehen wir mit Fallunterscheidung. Für $x = z$ gilt die Ungleichung in $iii)$. Sei $x \neq z$, dann entweder $x \neq y$ oder $y \neq z$ für alle $y \in X$, denn sonst $x = z$.

Insbesondere induziert die d Metrik keine Norm, falls die Menge X kein Vektorraum ist. Sei nun $X = V$. Angenommen d induziert eine Norm, dann muss $||x|| := d(x,0)$ um die Definitheit sicherzustellen. Jedoch gilt für $0 \neq x$:

$$1 = d(x,0) = ||x|| = 2 \cdot ||\frac{1}{2}x \cdot 1|| = d(\frac{1}{2}x, 0) + d(\frac{1}{2}x, 0) = 2, \quad ↯.$$

Lösung 1.9.2 (Aufgabe 1.8.2)**.** „Offene Überdeckungseigenschaft": Wir zeigen, dass eine offene Überdeckung existiert, sodass jede endliche Teilüberdeckung Elemente der offenen Einheitskreisscheibe verfehlt. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge die für $n \to \infty$ gegen 1 konvergiert, mit $a_n \in [0,1[$. Dann existiert für alle $x \in B_1(0)$ ein $a_n > ||x||$ sodass $x \in B_{a_n}(0)$. Das bedeutet $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_{a_n}(0)$ ist eine offene Überdeckung von $B_1(0)$. Jedoch existiert keine Endliche Teilüberdeckung, da für alle $I := \{i_1, \ldots, i_m\} \subset \mathbb{N}$ und $C := \max\{a_i \mid i \in I\}$ gilt $\overline{x} := ((1+C)/2, 0) \in B_1(0)$ aber $\overline{x} \notin B_{i_1}(0) \cup \ldots \cup B_{i_m}(0)$.

„Cauchyfolgenkriterium": Wir zeigen, dass es eine Cauchyfolge gibt, die keine in $B_1(0)$ konvergente Teilfolge besitzt. Das bedeutet Dann ist x_n eine Cauchyfolge in $B_1(0)$ die für $n \to \infty$ gegen $(1,0)$ konvergiert. Sei $x_n := (1 - 1/n, 0)$ für $n \in \mathbb{N}$. Sei $\hat{x} \in B_1(0)$ beliebig und $(x_{i_n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir wollen zeigen:

$$\exists \epsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n_i \geq N : \quad \|x_{n_i} - \hat{x}\| > \epsilon.$$

Sei $\epsilon = (1 - \|\hat{x}\|)/2 > 0$ und $\forall N \in \mathbb{N}$. Wähle $n > \lceil 2/(1 - ||\hat{x}||) \rceil$ und $n > N$, dann gilt

$$\|x_{i_n} - \hat{x}\| \geq \|1 - \frac{1}{i_n}\| - \|\hat{x}\| > 1 - \frac{1 - ||\hat{x}||}{2} - \|\hat{x}\| = \frac{1 - ||\hat{x}||}{2} = \epsilon.$$

Lösung 1.9.3 (Aufgabe 1.8.3)**.** „i)": Identifizieren wie (x,y) mit den Polarkoordinaten $(r \cdot \cos\varphi, r \cdot \sin\varphi)$ für $\varphi \in [-\pi, \pi[$ und $r \geq 0$. Da $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ und $r \geq 0$

$$f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \frac{|r|^{\frac{1}{2}} r^3 \cdot \sqrt{|\cos\varphi|}\sin^3\varphi}{r^2 \cdot 1} = r \cdot |r|^{\frac{1}{2}} \sqrt{|\cos\varphi|}\sin^3\varphi.$$

f ist stetig, da $f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ Produkt stetiger Funktionen ist. Insbesondere $(x,y) \to 0$ genau dann, wenn $r \to 0$, also ist f stetig in der Null.

„ii)": Dies können wir auch mit den ϵ-δ-Kriterium zeigen: Sei $\epsilon > 0$ und $\delta = \epsilon^{\frac{2}{3}}$, dann gilt für $|(x,y)^T| < \delta$, also $|r| < \delta$:

$$|f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) - f(0,0)| = |r|^{\frac{3}{2}} \cdot |\sqrt{|\cos\varphi|}\sin^3\varphi| \leq |r|^{\frac{3}{2}} < \delta^{\frac{3}{2}} = \epsilon.$$

„iii": U ist gerade das Urbild $f^{-1}(-]-\infty, c[)$ einer offenen Menge unter einer stetigen Funktion, also mit Definition und Satz 1.1.4 offen.

„iv": $B = f^{-1}(\{c\})$ ist das Komplement einer offenen Menge $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{c\})$ und damit abgeschlossen.

Lösung 1.9.4 (Aufgabe 1.8.4)**.** Beachte, dass $f(x,0) = 0 = f(0,y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$. Für eine Konstante $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sind $x \mapsto x \cdot y_0$ und $x \mapsto x^2 + y_0^2$ stetige Polynome. Da $x^2 + y^2 \neq 0$ ist gilt mit Lemma 1.1.5.ii) dass f im ersten Arguement stetig und analog im zweiten Argument stetig ist.

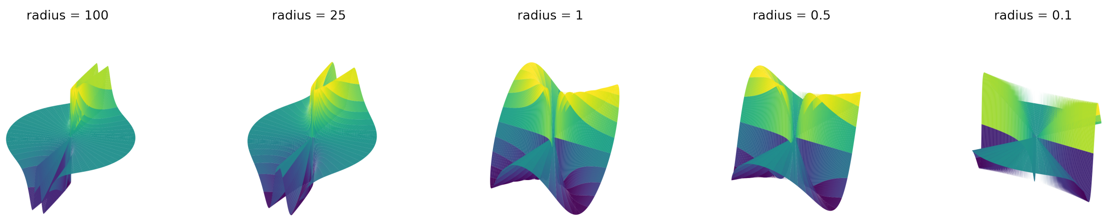

Abbildung 7: Plot von $B_r(0) \setminus \{(0,0)^T\} \ni (x,y)^T \mapsto \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ mit variierendem Radius.

Sei $x_n := 1/n$ und $y_n := 1/n^2$ für $n \in \mathbb{N}$, dann $(x_n, y_n) \xrightarrow{n\to\infty} (0,0)$, aber

$$f(x_n, y_n) = \frac{(1/k^2)\cdot(1/k^2)}{1/k^4 + 1/k^4} = \frac{1}{k^4}\cdot\frac{k^4}{2} = \frac{1}{2}.$$

Lösung 1.9.5 (Aufgabe 1.8.5)**.** Die Richtungsableitung von f in Richtung $v_\varphi := (\cos\varphi, \sin\varphi)^T$ ist im Ursprung wohldefiniert:

$$\mathrm{D}_{v_\varphi} f(0) := \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h^3\cos^2\varphi\sin\varphi}}{h} = \sqrt[3]{\cos^2\varphi\sin\varphi}$$

Insbesondere stimmen die partiellen Ableitungen $\mathrm{D}_{v_0} f(0) = 0 = \mathrm{D}_{v_{\pi/2}} f(0)$ im Ursprung überein. Jedoch $\mathrm{D}_{v_\varphi} f(0) \neq 0$ für $\varphi \in]0, \pi/2[$, also ist das Differential im Ursprung nicht wohldefiniert.

Lösung 1.9.8 (Aufgabe 1.8.6)**.** Die Herausforderung besteht dabei, nicht den Überblick zu verlieren! Hilsfunktionen die große Terme zusammenfassen erweisen sich als hilfreich.

Funktionsvorschrift	**Gradient**	**Hessematrix**
$x \mapsto \operatorname{spur}(ax^T)$	a	$0_{n\times n}$
$x \mapsto \frac{1}{2}\underbrace{\exp(x^TQx - a^Tx)}_{:=\tilde{e}(x)}$	$\frac{1}{2}(\underbrace{(Q+Q^T)}_{\tilde{Q}}x - a)\tilde{e}(x)$	$\frac{1}{2}(\tilde{Q}x - a)(\tilde{Q}x-a)^T\tilde{e}(x) + \frac{1}{2}\tilde{Q}\tilde{e}(x)$
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \underbrace{\exp(-\lvert\lvert x-y\rvert\rvert_2^2)}_{:=\hat{e}(x,y)}$	$2\underbrace{\begin{bmatrix} y-x \\ x-y \end{bmatrix}}_{:=\hat{z}}\hat{e}(x,y)$	$2\left(\begin{bmatrix} -I & I \\ I & -I \end{bmatrix} + \hat{z}\hat{z}^T\right)\hat{e}(x,y)$
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \underbrace{(1+x^Ty)^p}_{:=\phi(x,y)}$	$\underbrace{\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}}_{:=z'} p\phi(x,y)^{p-1}$	$\left(\begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}\phi(x,y) + z'z'^T(p-1)\right)p\phi(x,y)^{p-2}$

□

Lösung 1.9.9 (Aufgabe 1.8.7)**.** Betrachte die Funktionen

$$g\colon \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, \quad \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \mapsto u^v, \qquad f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}.$$

Dann liegt das Bild von f im Definitionsbereich $f(\mathbb{R}_+^*) \subseteq \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ von g und die partiellen Ableitungen von f sind stetig. Mit der eindimensionalen Produkt und Kettenregel sowie $x^x = e^{x\ln x}$ rechnen wir

$$h'(x) = \left((\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x)\ln x + (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x)x\right)e^{x\ln x} = \ln(x)x^x + x^x.$$

Damit sind auch die partiellen Ableitungen von g stetig, und die Funktionalmatrizen

$$\mathrm{D}g(u,v) = \begin{bmatrix}\ln(u)\cdot u^v & v\cdot u^{v-1}\end{bmatrix}, \qquad \mathrm{D}f(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sind wohldefiniert. Wegen $h = g \circ f$ folgt die Aussage mit der Kettenregel nach Ausmultiplikation von

$$\mathrm{D}g(f(x))\mathrm{D}f(x) = \mathrm{D}g(u,v) = \begin{bmatrix}\ln(x)\cdot x^x & x\cdot x^{x-1}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \ln(x)\cdot x^x + x^x. \qquad \square$$

Lösung 1.9.10 (Aufgabe 1.8.10)**.** „i)“: Wir erhalten $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}\left(-\frac{y^2}{2}\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}y = -1$ sowie induktiv

$$\sin^{(n)}(x)|_{x=0} = \begin{cases} 1, & n \equiv 1 \pmod 4\\ -1, & n\equiv 3 \pmod 4\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}$$

und damit das Taylorpolynom 5. Ordnung im Punkt $x = 0$

$$T_5 f(\zeta; 0) = \zeta_1 - \frac{\zeta_2^2}{2} - \frac{\zeta_1^3}{6} + \frac{\zeta_1^5}{120}.$$

„ii)“: Da $1 \geq \sin(x) \geq \sin(x) - y^2/2$ für $(x,y)^T \in \mathbb{R}^2$ hat f für $z \in \mathbb{Z}$ seine globalen Maxima in $(4\cdot z\pi + \pi, 0)^T$.

Setzen wir den Gradienten von $T_5 f(\zeta;0)$ gleich Null

$$T_5 f(\zeta; 0) = \begin{bmatrix}1 - \zeta_1^2/2 + \zeta_4/24\\ -\zeta_2\end{bmatrix}$$

und erhalten[9] für

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{6 - 2\sqrt{3}}, \qquad x_{2,3} = \pm\sqrt{6 + 2\sqrt{3}}$$

die Maximakandidaten $(x_i, 0)^T$ für $i = 1, \dots 4$. Damit die Hessematrix

$$\mathrm{H}_f(x) = \begin{bmatrix}-\zeta_1 + \zeta_1^3/6 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

negativ definit wird, muss ihr erster Diagonaleintrag negativ sein. Die reelle Funktion $a(\zeta_1) \coloneqq -\zeta_1 + \zeta_1^3/6$ ist negativ auf $]-\infty, -\sqrt{6}]$ und $]0, \sqrt{6}[$. Damit erhalten wir das strikte Maximum von $T_5 f(\zeta; 0)$ in $(\sqrt{6 - 2\sqrt{3}}, 0)^T$. $\square$

Lösung 1.9.11 (Aufgabe 1.8.11)**.** Zwar verschwindet der Gradient von f

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix}4x(y - x^2) - 2x(2x^2 - y)\\ -(y - x^2) + (2x^2 - y)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6xy - 8x^3\\ -2y + 3x^2\end{bmatrix}$$

im Nullpunkt, jedoch ist die Hessematrix

$$\mathrm{H}_f(x) = \begin{bmatrix}6y - 24x^2 & 6x\\ 6x & -2\end{bmatrix} \overset{x=0}{\equiv} \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}$$

nur semidefinit, deshalb können wir Satz 1.4.3 nicht anwenden.

Betrachten wir nun die Einschränkung des Bildes von f auf eine Gerade durch den Ursprung in einer kleinen Umgebung des Ursprung. Diese sind für hinreichend kleines $\epsilon > 0$ und $0 < \varphi \leq 2\pi$ durch

$$\alpha_\varphi :]-\epsilon, \epsilon[\to \mathbb{R}^2, \quad r \mapsto r\begin{bmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{bmatrix}$$

gegeben. Aus symmetriegründen gilt $\alpha_\varphi(r) = \alpha_{\varphi+\pi \mod [2\pi]}(-r)$, also können wir uns auf $0\lambda\varphi < \pi$ beschränken. Ferner sehen wir durch Einsetzen, dass 0 ein globales Maximum von α_0 sowie $\alpha_{\pi/2}$ ist. Wir zeigen, dass für hinreichend kleines $\epsilon > 0$ sowie $\varphi \in]0, \pi[\setminus \{\pi/2\}$. das Produkt

$$f(\alpha_\varphi(r)) = \underbrace{(2r^2\cos^2(\varphi) - r\sin(\varphi))}_{\coloneqq\beta(r)} \cdot \underbrace{(r\sin(\varphi) - r^2\cos^2(\varphi))}_{\coloneqq\gamma(x)}$$

negativ wird. Sei $c \coloneqq \sin\varphi/(2\cos^2\varphi) > 0$, dann sind $\beta(r)$ und $\gamma(r)$ nach oben, respektive unten geöffnete Parabeln mit Nullstellen 0 sowie c respektive $2c$. Damit ist das Produkt für $\epsilon = c$ negativ und $f \circ \alpha_\varphi$ hat in 0 ein globales Maximum [Abbildung 8]. Hingegen ist $f(x, 2x/3) > 0$ für alle $x > 0$, was die Behauptung widerlegt. $\square$

[9] Für die Nullstellen in der ersten Komponente substituiere $\zeta_1^2 = w$, löse mit pq-Formel und resupstituiere $\zeta_1 = \pm\sqrt{w}$.

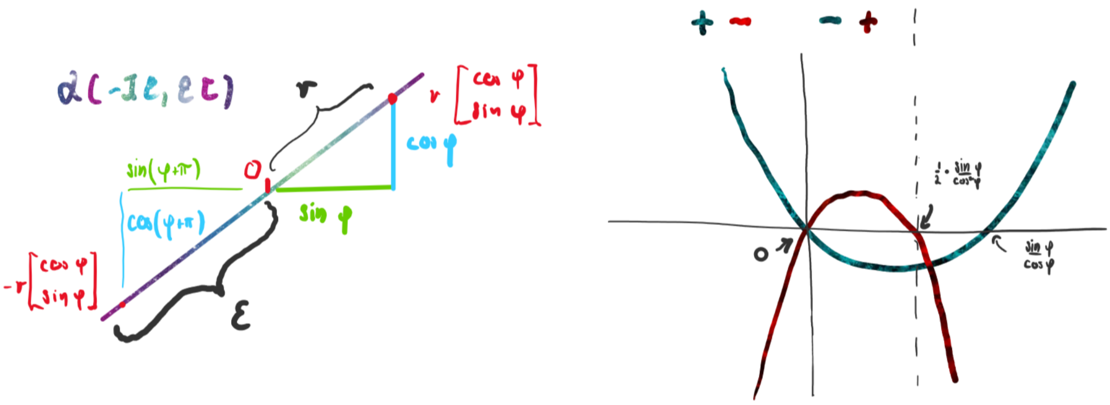

Abbildung 8: Gerade durch den Ursprung $\alpha_\varphi(r)$ links, sowie Parabeln β und γ rechts.

Lösung 1.9.12 (Aufgabe 1.8.12)**.** Sei $x, y \in [0, \infty[$, wobei $x \geq y$ o.B.d.A. Dann gilt

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{\left(x + \frac{1}{16}\right)(y+1) - \left(y + \frac{1}{16}\right)(x+1)}{(x+1)(y+1)}\right| = \frac{15}{16}\left|\frac{x-y}{(x+1)(y+1)}\right| \leq \frac{15}{16}|x-y|$$

also ist f eine Kontraktion. Der Fixpunkt ist $1/4$, da $f(x) = x$ genau dann, wenn

$$0 = x(x+1) - (x + \frac{1}{16}) = x^2 - \frac{1}{16}. \qquad \square$$

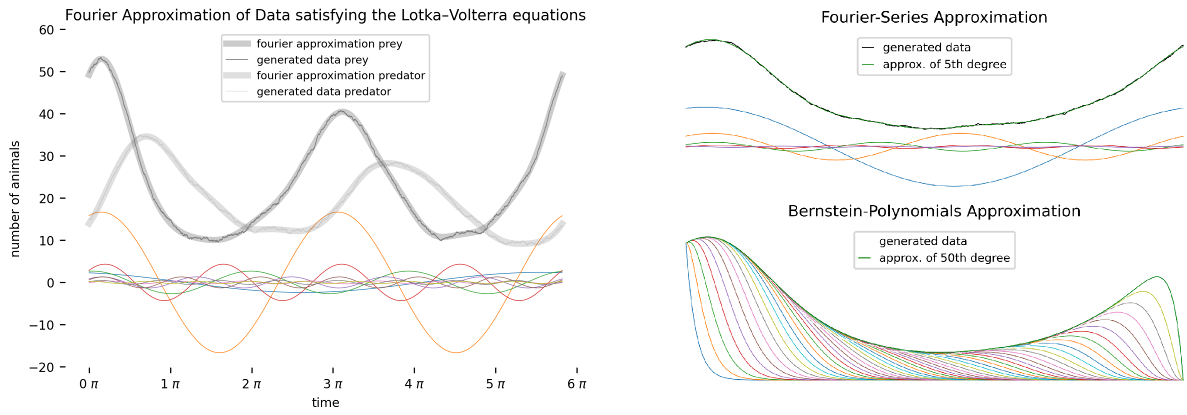

Abbildung 9: Fourier Reihe einer linearen Approximation der Lotka-Volterra Differentialgleichungen mit Störfaktor für feste Anfangswerte (links). Vergleich der schnellen Konvergenz der Fourier Reihe mit der langsamen Konvergenz von `Bernstein Polynomen`.

2 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Definition 2.0.1. Gewöhnliche Differentialgleichungen n-ter Ordnung, auch Differentialgleichungs*systeme* bei $m > 1$ Gleichungen sind von der Form

$$f\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0$$

für $\Omega \times (\mathbb{R}^m)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ und stetiges $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ sowie Lösungen $y : I \to \mathbb{R}^m$. Wie sprechen von

i) Anfangswertproblem, falls $y^{(i)}(x_0) = y^i$ für ein $x_0 \in \Omega$, $y^0, .., y^{n-1} \in \mathbb{R}^m$ gefordert ist

ii) explizit, wenn in die Form $y^{(n)} = f\left(x, y', ..., y^{(n-1)}\right)$ aufgelöst wurde, was nicht immer möglich ist.

Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung lassen sich auf ein System von gewöhnlichen Differentialgleichung zurückführen:

$$(y_1, ..., y_{n-1}, y_n)' = (y_2, ..., y_n, f(x, y_1, ..., y_n)).$$

Satz 2.0.2. (Existenssatz von Peano) Sei f stetig auf $[a, b] \times \overline{B}_R(y_0)$, dann besitzt das Anfangswertproblem $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y^0$ für ein $\epsilon > 0$ eine Lösung $y \in C^1([x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon])$.

Satz 2.0.3. (Existenzsatz von Picard-Lindelöf, lokale Version) Ist f zusätzlich lokal Lipschitz stetig in der zweiten Komponente, ist y eindeutig.

2.1 Lineare Differentialgleichung(ssysteme)

Definition 2.1.1. (Vektorwertige) Lineare gewöhnliche Differentialgleichung(ssysteme) n-ter Ordnung

$$y^{(n)} = \sum_{k=1}^{n-1} A_k(x) y^{(k)} + g(x)$$

für auf einem Intervall I gesuchtes $y : I \to \mathbb{C}^m$ und stetige $g : I \to \mathbb{C}^m$, $A_k : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ heißen

i) *homogen*, wenn g die Nullfunktion ist und inhomogen sonst,

ii) *Anfangswertproblem*, falls zusätzlich $y^{(k)}(x_0) = y^k$ für ein $x_0 \in I$ und $y^1, ..., y^{n-1} \in \mathbb{C}^m$ gefordert,

iii) *skalares* lineares Differentialgleichungssystem (also mit konstantem Koeffizienten), falls $A_k \in \mathbb{C}^{m \times m}$ nicht von x abhängen.

Beispiel 2.1.2 (Phasenraum)**.** Insbesondere zum zweidimensionalen skalaren lineare homogenen Differentialgleichungssysteme

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

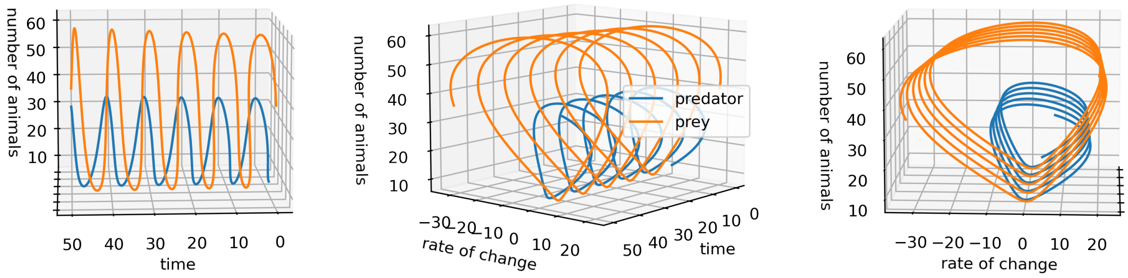

Abbildung 10: Übergang zum Phasenraum einer linearen Approximation der Lotka-Volterra Differentialgleichungen für feste Anfangswerte.

erster Ordnung können wir das durch $A := (a_{ij})_{i,j\leq 2}$ gegebene Vektorfeld skizzieren. Dafür skizzieren wir für einige Vektoren $v \in \mathbb{R}^2$ den Verbindungspfeil zu $Av \in \mathbb{R}^2$. Der Übersichtlichkeit halber sind die Vektoren in [Abbildung 11] normalisiert und ihre Länge entsprechend eingefärbt.

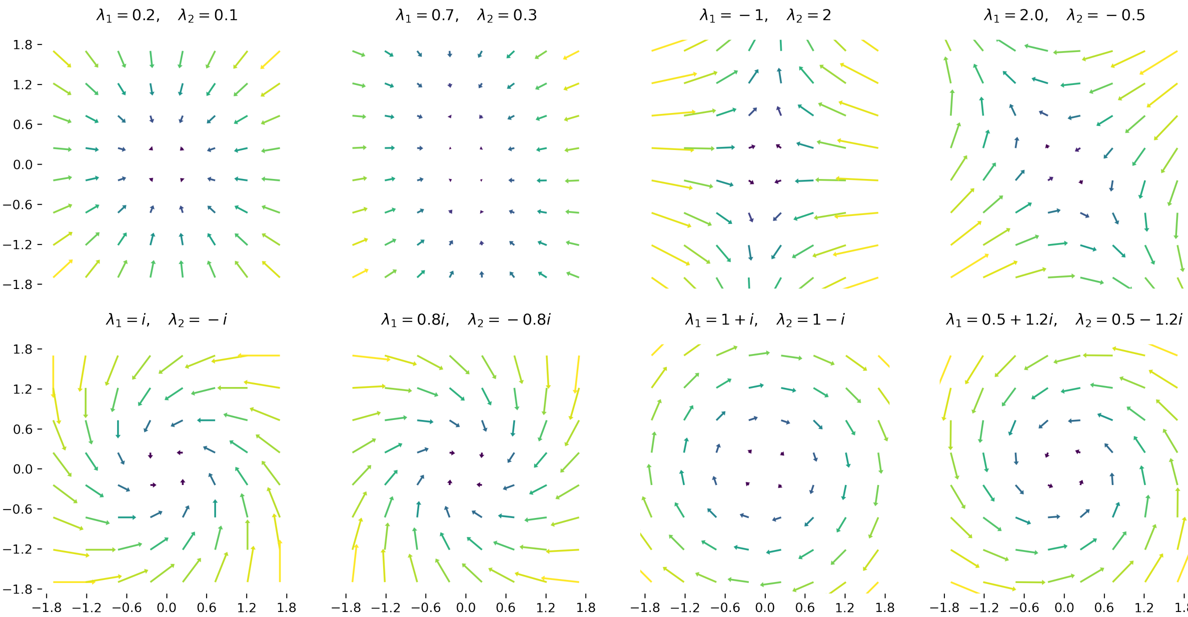

Abbildung 11: Die Phasenräume einiger zufallsgenerierter Matritzen mit eigenwerten λ_1, λ_2.

Satz 2.1.3. Sei $\mathcal{L}_H$ die Menge der Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung und $\mathcal{L}_I$ die der inhomogenen, dann ist

i) $\mathcal{L}_H$ ein n-dimensionaler Vektorraum

ii) $\mathcal{L}_I = \varphi + \mathcal{L}_H$ für beliebiges $\varphi \in \mathcal{L}_I$.

2.2 Fundamentalsystem

Definition 2.2.1. Ein Fundamentalsystem $\{y_1, \dots, y_n\}$ ist eine Basis des Vektorraums

$$\mathcal{L} := \{y \in C^1(I; \mathbb{C}^n) \mid y = \sum_{k=1}^{n} a_k y_k,\ a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}\}$$

der Lösungen eines homogenen linearen Differentialgleichungssystems. Das lineare homogene Differentialgleichungssystem erster Ordnung hat die Fundamentalmatrix

$$\Phi(x) := \left[y_1(x) \mid \cdots \mid y_n(x)\right].$$

Beispiel 2.2.2. Das *skalare* lineare homogene Anfangswertproblem $y' = Ay$, $y(x_0) = y^0$ erster Ordnung löst die Exponentialfunktion $y(x) = e^{xA}y^0$ mit Fundamentalmatrix

$$e^{xA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} A^k. \tag{3}$$

Gegeben sei eine *skalare* lineare homogene Differentialgleichung n-ter Ordnung. Dabei löst $y(x)$ die skalare Gleichung $y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} A_k y^{(k)}$ genau dann, falls $Y'(x) = A(x)Y(x)$ für

$$Y(x) = \begin{bmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{n\;\;1}(x) \end{bmatrix}, \qquad A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ A_0 & A_1 & \cdots & A_{n\;\;1} \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die (paarweise verschiedenen) Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A(\lambda)$ mit Vielfachheiten $\mu_1, \ldots, \mu_k$. Dann trägt die Nullstelle λ_i zum (komplexen) Fundamentalsystem die μ_i linear unabhängigen Lösungen

$$y_{i,1}(x) = e^{\lambda_i x}, \quad y_{i,2}(x) = xe^{\lambda_i x}, \quad \ldots \quad y_{i,\mu_i}(x) = x^{\mu_i - 1}e^{\lambda_i x} \tag{5}$$

bei. Ersetze die paarweise auftretenden komplexwertigen $\{e^{\lambda x}v,\, e^{\overline{\lambda}x}\overline{v}\}$ durch $\{\Re(e^{\lambda x}v),\, \Im(e^{\lambda x}v)\}$ um ein reellwertiges Fundamentalsystem zu erhalten. Aus dem Fundamentalsystem $\{y_1, \ldots, y_n\}$ erhalten wir die Fundamentalmatrix zum korrespondierenden System erster Ordnung

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n\;\;1)}(x) & \cdots & y_n^{(n\;\;1)}(x) \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Beispiel 2.2.3. (Fundamentalmatrix berechnen) Sei zu einer skalaren linearen Differentialgleichung erster Ordnung $y'(x) = A \cdot y(x)$ die Jordan-Normalform $Q^{-1}AQ = J$,

$$Q = \left[v_{1,1} \mid \cdots \mid v_{k,s_1} \mid \cdots \mid v_{k,s_k} \right]$$

gegeben[10]. Dann ist $v_{j,1}, ..., v_{j,s_j} := v_1, ..., v_l$ die vollständige Hauptvektorkette

$$(A - \lambda I)v_{i+1} = v_i, \qquad (i = 1, ..., l-1)$$

zum Eigenwert $\lambda_j := \lambda$. Mit (3) erhalten wir zur Anfangsbedingung $\Phi(0) = I_l$ die Fundamentalmatrix des Jordanblocks

$$\Phi(x) = e^{\lambda x} \begin{bmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} & \cdots & \frac{x^{l\;\;2}}{(l-2)!} & \frac{x^{l\;\;1}}{(l-1)!} \\ 0 & 1 & x & \cdots & \frac{x^{l\;\;3}}{(l-3)!} & \frac{x^{l\;\;2}}{(l-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Nach Rücktransformation trägt der Jordanblock $s_j = l$ jeweils Hauptvektorlösungen der Form

$$y_i = e^{\lambda x} \sum_{k=1}^{i} \frac{x^{i-k}}{(i-k)!} v_k, \qquad (i = 1, \ldots, l) \tag{8}$$

zum Fundamentalsystem von A bei.

[10] Das bedeutet, Spalten von Q sind die Eigenvektoren mit den dazugehörigen Hauptvektoren in der Reihenfolge der dazugehörigen `Jordanbloecke`.

2.3 Lösungsansätze

Satz 2.3.1. (Hauptsatz) Die Lösung des Anfangswertproblems $y' = f(x)$, $y(x_0) = y^0$ ist

$$y(x) = y^0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{9}$$

Satz 2.3.2. (Picard-Lindelöfsches Iterationsverfahren) Betrachte die zum Anfangswertproblem $y\prime = f(x, y)$, $y(x_0) = y^0$ rekursiv definierte Folge

$$y_k(x) \coloneqq y^0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{k-1}(t))\,\mathrm{d}t, \quad y_0(x) \coloneqq y^0, \qquad (k \geq 1). \tag{10}$$

Ist f stetig im ersten und Lipschitzstetig im zweiten Argument, konvergiert $y_k(x)$ gleichmäßig gegen die Lösung $y(x)$ in einer Umgebung von x_0.

Satz 2.3.3. (Getrennte Variablen) Die Lösung des Anfangswertproblems $y' = f(x)g(y)$, $y(x_0) = y^0$ ist

$$y(x) = G^{-1}(F(x)), \tag{11}$$

wobei $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$, $G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}t}{g(t)}$ und G^{-1} das Inverse von G in einer Umgebung von y_0.

Satz 2.3.4 (Substitution)**.** $y(x)$ löst die Differentialgleichung $y' = f(\frac{y}{x})$ zum Anfangswert $y(x_0) = y_0$ genau dann, wenn $z(x) := \frac{y(x)}{x}$ die Lösung ist von

$$z' = \frac{1}{x}(f(z) - z). \tag{12}$$

Satz 2.3.5. (Variation der Konstanten) Die Lösung der homogene Gleichung $y' = a(x)y$, $y(x_0) = y^0$ ist

$$y(x) := y^0 \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t\right). \tag{13}$$

Zur inhomogenen Gleichung $y' = a(x)y + b(x)$, $y(x_0) = y^0$ erhalten wir für $A(x) := \int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t$ durch Variation der Konstanten die Lösung

$$y(x) = e^{A(x)}\left(y^0 + \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)} b(t)\,\mathrm{d}t\right). \tag{14}$$

Analog erhalten wir für ein System $y' = A(x)y + b(x)$ gewöhnlicher Differentialgleichungen mit Fundamentalmatrix $\Phi(x) = \big[y_1(x) \mid \cdots \mid y_k(x)\big]$ mit der Cramerschen Regel die Lösung

$$y(x) = \Phi(x)\left(\int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(t)b(t)\,\mathrm{d}t\right) = \sum_{k=1}^{n}\left[\int_{x_0}^{x} \frac{\det \Phi_k(t)}{\det \Phi(t)}\,\mathrm{d}t\right] y_k(x) \tag{15}$$

wobei in $\Phi_k(t)$ die k-te Spalte von $\Phi(t)$ durch $b(t)$ ersetzt ist.

2.4 Übungsaufgaben

Aufgabe 2.4.1. Gegeben seien die homogenen linearen Differentialgleichungen

$$u' = \frac{u}{x}, \qquad v' = -\frac{x}{v}, \qquad w' = \frac{x}{w}, \qquad z' = -\frac{z}{x}$$

in $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ mit (wohldefiniertem) Anfangswert c_0 in x_0. Bestimmen Sie die Lösung auf möglichst unterschiedliche Weise. Skizzieren Sie insbesondere die Phasenräume.

Hinweis! Beginnen Sie mit der Skizze der Phasenräume.
Verwenden beispielsweise nacheinander (12), Grafisches ablesen, (11) und (13).

Aufgabe 2.4.2. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y\prime = 2xy \quad \text{in,} \quad y(0) = \frac{1}{e} \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

mit dem Picard-Lindelöfschen Iterationsverfahren.

Aufgabe 2.4.3. Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für das System

$$y' = Ay, \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Hinweis! Bestimme Eigenwerte, Eigen- und Hauptvektoren ([3], [4] oder [5]), berechne (7), bestimme (8).
Das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda)$ hat genau eine reelle Nullstelle.

Aufgabe 2.4.4. Stelle ein reelles Fundamentalsystem zu

$$y^{(4)} - y = 0$$

sowie eine Fundamentalmatrix zum korrespondierenden System 1. Ordnung auf.

Hinweis! System 1. Ordnung mit (4), Fundamentalsystem mit (5), Fundamentalmatrix mit (6).
Wir erhalten $\chi_A(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda+i)(\lambda-i)$.

Aufgabe 2.4.5. Seien

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

gegeben. Bestimme Sie die Fundamentalmatrix von A und löse dann mit (15) das inhomogene Problem $y' = Ay + bx$.

Hinweis! Fundamentalmatrix mit Definition der Exponentialfunktion (3), besser aber mit Jordan-Normalform und (15)
Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A(\lambda)$ sind $i, -i$.

Aufgabe 2.4.6. Ordnen sie die Phasenräume von $y' = f(y)$ mit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wie in $i)$ bis $viii)$ den Graphiken A bis K in [Abbildung 12] zu.

i) $\begin{bmatrix} y_1^2 \\ y_2^2/2 \end{bmatrix}$ iii) $\begin{bmatrix} -2y_1^2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}$ v) $\begin{bmatrix} -y_1 \\ -y_2 \end{bmatrix}$ vii) $\begin{bmatrix} y_1 + y_2 + 1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

ii) $\begin{bmatrix} 0.3y_1 + y_2 \\ -y_1 + 0.3y_2 \end{bmatrix}$ iv) $\begin{bmatrix} -y_1 - y_2 \\ -y_1 - y_2 \end{bmatrix}$ vi) $\begin{bmatrix} y_1 + y_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}$ viii) $\begin{bmatrix} -2y_2 \\ 2y_1 \end{bmatrix}$

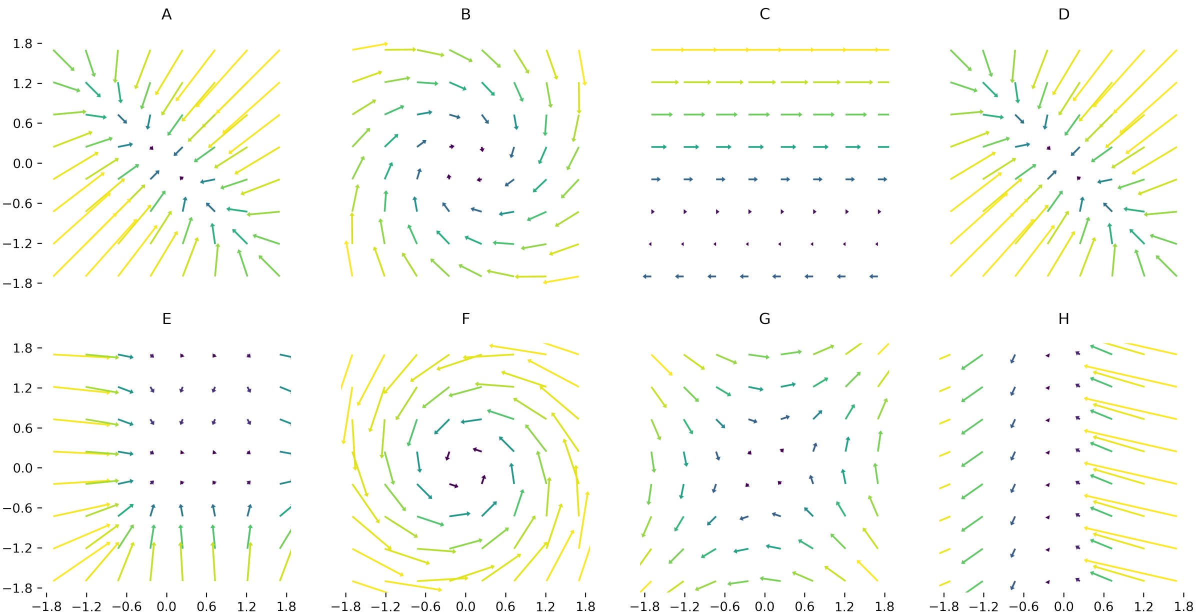

Abbildung 12: Phasenräume der Vektorfelder in Aufgabe 2.4.6.

Literatur

[1] Erné, Marcel (2008). *Lineare Gleichungssysteme.* Kapitel 4.3 in *Mathematik I für Bauingenieure.* http://www2.iazd.uni-hannover.de/ẽrne/Mathematik1/dateien/maple/MB_4_3.html (05.02.2021).

[2] Forster, Otto (2017). *Differentialrechnung im Rn, gewöhnliche Differentialgleichungen.* 11. erweiterte Auflage. Springer Fachmedien Wiesbaden.

Lineare Gleichungssysteme. Kapitel 4.3 in *Mathematik I für Bauingenieure.* http://www2.iazd.uni-hannover.de/ẽrne/Mathematik1/dateien/maple/MB_4_3.html (05.02.2021).

[3] Furlan, Peter (1995): *Eigenwerte und Eigenvektoren.* In: *Das gelbe Rechenbuch*, S 101 - 112. http://www.das-gelbe-rechenbuch.de/download/Eigenwerte.pdf (04.02.2021).

[4] Potpara, Tibor Djurica (2013): *How to calculate Jordan's normal form (the hard way).* https://ojdip.net/2013/06/how-to-calculate-jordans-normal-form-the-hard-way/ (05.02.2021).

[5] Winkler, David (2011): *Kochen mit Jordan.* https://www.danielwinkler.de/la/jnfkochrezept.pdf (04.02.2021).