

Das vorliegende Miniskript entsteht im Rahmen des Tutoriums zur Analysis II, zum Ende des Wintersemesters 2020/2021 an der Heinrich Heine Universität Düsseldorf. Inhaltlich ist es an [2] orientiert, viele Schreibweisen kommen von Wikipedia und sind mit monospace verlinkt.

# 1 Differential- und Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$

## 1.1 Grundlagen

**Definition 1.1.1** (Metrik). Eine Abbildung  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Metrik auf einer Menge  $X$  wenn für alle  $x, y, z \in X$  gilt:

- i)  $d(x, y) = 0$  genau dann, wenn  $x = y$  (Definitheit).
- ii)  $d(x, y) = d(y, x)$  (Symmetrie).
- iii)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  (Dreieckungleichung)

Das Paar  $(X, d)$  heißt metrischer Raum.

Auf jeder Menge  $X$  ist eine triviale „gleichmäßig diskrete“ Metrik gegeben durch:

$$d(x, y) := \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (1)$$

**Definition 1.1.2** (Norm). Eine Abbildung  $\| \cdot \|: V \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  heißt Norm auf einem Vektorraum  $V$  über den Körper  $\mathbb{K}$ , wenn für alle  $x, y \in V$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$  gilt:

- i)  $\|x\| = 0$  genau dann, wenn  $x = 0$ , (Definitheit).
- ii)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ , (absolute Homogenität).
- iii)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ , (Dreieckungleichung).

Das Paar  $(V, \| \cdot \|)$  heißt Vektorraum.

Eine Norm induziert durch die Festlegung  $d(x, y) := \|x - y\|$  eine Metrik auf  $V \times V$ .

**Bemerkung 1.1.3** (Skalarprodukt). Eine positiv definite symmetrische Bilinearform  $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}_+$ , auf einem reellen Vektorraum  $V$  heißt Skalarprodukt. Das bedeutet für alle  $x, y, w, z \in V$  und  $\lambda \in K$  gilt:

- i)  $\langle x, x \rangle = 0$  genau dann, wenn  $x = 0$  (Definitheit).
- ii)  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$  (Symmetrie).
- iii)  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$  sowie  $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$  (linear in beiden Argumenten).

Der Zusammenhang zwischen Skalarprodukt, Norm und Metrik ist:

$$\text{Skalarprodukt} \xrightarrow{\|x\|:=\sqrt{\langle x, x \rangle}} \text{Norm} \xrightarrow{d(x,y):=\|x-y\|} \text{Metrik.}$$

Andersherum induziert eine Metrik im Allgemeinen keine Norm und eine Norm im Allgemeinen kein Skalarprodukt.

**Definition und Satz 1.1.4.** Seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  metrische Räume. Dann heißt  $f$  stetig auf  $X$ , wenn für alle  $a \in X$  gilt  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . Das bedeutet

$$\forall a \forall \epsilon \exists \delta \quad \forall x \in X : \quad d_X(x, a) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

Dies ist äquivalent zu: Für allen offenen Mengen  $V \subseteq Y$  ist  $f^{-1}(V)$  offen in  $X$ . Ferner heißt  $f$  gleichmäßig stetig genau dann, wenn

$$\forall \epsilon \exists \delta \forall a, x \in X : \quad d_X(x, a) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

Zuletzt heißt  $f$  Lipschitz stetig, wenn eine Konstante  $L$  existiert, sodass

$$\forall a, x \in X : d_X(f(x), f(a)) \leq L \cdot d_Y(x, y)$$

**Lemma 1.1.5.** Seien  $X, Y$  und  $Z$  metrische Räume und  $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$  sowie  $h: Y \rightarrow X$  stetige Funktionen.

- i) Dann sind  $f + g$  und  $f \cdot g$  stetig.
- ii) Sei ferner  $g(x) \neq 0$  für  $x \in X$ , dann ist  $f/g$  stetig.
- iii) Die Verkettung  $f \circ h: Y \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig.
- iv) Gleichmäßig stetige Funktionen sind stetig.
- v) Lipschitz stetige Funktionen sind stetig<sup>1</sup>.

**Definition und Satz 1.1.6.** Definition. Eine Teilmenge  $K$  eines metrischen Raumes  $X$  heißt kompakt, wenn jede offene Überdeckung  $(U_i)_{i \in I}$  von  $K$  eine endliche Teilüberdeckung besitzt, d.h. es existieren  $i_1, \dots, i_k \in I$ , so dass

$$K \subset U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \dots \cup U_{i_k}.$$

Sei  $K \subseteq \mathbb{R}^n$ , dann ist  $K$  genau dann kompakt wenn eine der folgenden Eigenschaften gelten:

- i)  $K$  ist beschränkt und abgeschlossen.
- ii) Jeder Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n \in K$  für  $n \in \mathbb{N}$  besitzt eine in  $K$  konvergente Teilfolge.

Sei  $f: K \rightarrow X$  stetig, dann gilt:

- i)  $f$  ist gleichmäßig stetig.
- ii)  $f(K)$  ist kompakt.
- iii)  $f$  nimmt auf  $K$  Maximum und Minimum an.

**Definition und Satz 1.1.7** (Kurve). Sei  $I$  ein Intervall, dann heißt  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  Weg<sup>2</sup> stetig differenzierbar, falls für  $1 \leq i \leq n$  die reelle Funktion  $I \ni x \mapsto \varphi_i(x)$  stetig<sup>3</sup> differenzierbar ist. In diesem Fall ist die Weglänge gegeben durch

$$\int_I \|f'(x)\| dx.$$

**Definition 1.1.8** (partiell differenzierbar). Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, dann heißt  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  partiell differenzierbar, wenn für alle  $x \in U$  und der Grenzwert

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + he_i) - f(x)}{h}, \quad (1 \leq i \leq n)$$

existiert, wobei  $e_i \in \mathbb{R}^n$  den  $i$ -ten Einheitsvektor bezeichnet. Wir sagen,  $f$  ist *stetig* partiell Differenzierbar, falls alle partiellen Ableitungen stetig sind.

Zu partiell differenzierbaren  $f$  ist der Gradient  $\nabla f$  von  $f$  gegeben durch:

$$\nabla f(x) := \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Für ein partiell differenzierbares Vektorfeld  $v: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  setzen wir die Divergenz „div  $v$ “ von  $v$ :

$$\operatorname{div} v := \langle \nabla, v \rangle := \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} v_i.$$

Sei  $f$  zudem zwei Mal stetig differenzierbar, dann ist das Laplace Operator „ $\Delta f$ “ von  $f$  gegeben durch:

$$\Delta f := \langle \nabla, \nabla \rangle f = \operatorname{div} \nabla f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f.$$

<sup>1</sup>Lineare stetige Funktionen sind Lipschitz stetig.

<sup>2</sup>Das Bild  $\varphi(I)$  heißt Kurve.

<sup>3</sup>Und nur differenzierbar, wenn die Ableitung nicht stetig ist.

**Satz 1.1.9** (von Schwarz). Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$   $k$ -Mal stetig partiell differenzierbar, dann gilt für alle  $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$  und Permutationen  $\pi$  von  $1, \dots, k$ :

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} f(x) = \frac{\partial}{\partial x_{i_{\pi(1)}}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_{\pi(k)}}} f(x).$$

## 1.2 Totale Differenzierbarkeit

**Definition 1.2.1.** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, dann heißt  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  in  $x \in U$  (*total*) differenzierbar, wenn eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  existiert, sodass für  $\zeta$  in einer Umgebung der Null

$$f(x + \zeta) = f(x) + A\zeta + \|\zeta\| \cdot \varphi(\zeta),$$

und  $\varphi(\zeta)$  für  $\zeta \rightarrow 0$  stetig gegen Null konvergiert<sup>4</sup>.

**Definition 1.2.2.** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, dann ist die Richtungsableitung von  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  im Punkt  $x \in U$  in Richtung  $v \in S^{n-1}$  (bei Existenz) gegeben durch

$$D_v f(x) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} = \frac{d}{dt} f(x + tv) \Big|_{t=0}$$

Bezüglich des Zusammenhang zwischen den Differenzierbarkeitsbegriffen gelten die Implikationen

$$\text{stetig part. diff'bar} \Rightarrow \text{total diff'bar} \Rightarrow \text{Richtungsabl. existieren} \Rightarrow \text{part. diff'bar}.$$

Die Richtungsableitung von  $f$  im Punkt  $x$  in Richtung des kanonischen  $i$ -ten Einheitsvektors  $e_i$  entspricht der partiellen Ableitung

$$D_{e_i} f(x) := D_i f(x) := \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

Zusammen rechtfertigt dies die Identifizierung von  $A$  aus Definition 1.2.1 mit der Funktionalmatrix  $Df$ , auch „Jakobi-Matrix“  $J_f$  oder auch einfach Ableitung  $f'$  im Punkt  $x$ ,

$$Df(x) := J_f(x) := \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}},$$

welche sich aus den partiellen Ableitungen zusammensetzt. Auch für die mehrdimensionale Ableitung gilt die Kettenregel:

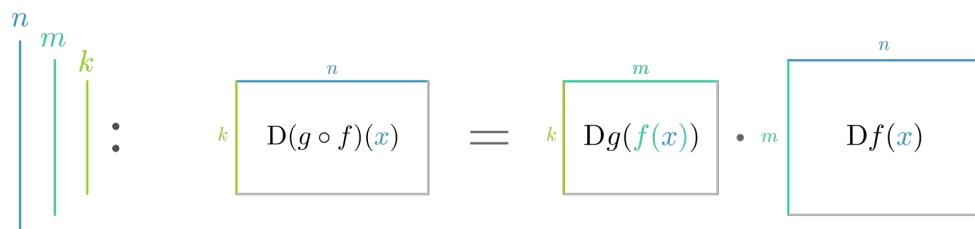


Abbildung 1: Größe der Matrizen in der mehrdimensionalen Kettenregel.

**Satz 1.2.3** (Kettenregel). Seien  $U \in \mathbb{R}^n$ ,  $V \in \mathbb{R}^m$  offene Mengen mit wohldefinierter Komposition

$$(g: V \rightarrow \mathbb{R}^k) \circ (f: U \rightarrow V): U \rightarrow \mathbb{R}^k$$

differenzierbarer Abbildungen  $f, g$ . Dann ist  $g \circ f$  differenzierbar und für das Differential<sup>5</sup> gilt

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \cdot Df(x).$$

<sup>4</sup>Das bedeutet  $r(\zeta) := \|\zeta\| \cdot \varphi(\zeta)$  ist eine Fehlerfunktion, welche welche **asymptotisch** gegenüber  $\|\zeta\|$  vernachlässigbar ist, auch „ $r(\zeta) = o(\|\zeta\|)$ “.

<sup>5</sup>Klarer wird die Kettenregel Möglicherweise mit der Jakobi-Matrix:  $J_{g \circ f}(x) = J_g(f(x)) \cdot J_f(x)$ .

### 1.3 Satz von Taylor

**Definition 1.3.1** (Multiindex). Für ein Tupel  $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  und  $x \in \mathbb{R}^n$  sei

$$|\alpha| := \sum_{k=1}^n \alpha_k, \quad \alpha! := \prod_{k=1}^n \alpha_k!, \quad x^\alpha := \prod_{k=1}^n x_k^{\alpha_k}.$$

Für eine  $|\alpha|$ -mal stetig differenzierbare Funktion  $f$  und Differentialoperator  $D$  sei

$$D^\alpha := D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \dots D_n^{\alpha_n} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \text{wobei} \quad D_k^{\alpha_k} := \underbrace{D_k \circ D_k \circ \dots \circ D_k}_{\alpha_k\text{-Mal}}.$$

**Satz 1.3.2** (Taylorsche Formel). Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $x, \zeta \in \mathbb{R}^n$  sodass  $\{x + t\zeta : 0 \leq t \leq q\} \subset U$ . Dann existiert für alle  $n+1$ -mal stetig differenzierbaren  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  ein  $t \in [0, 1]$  sodass

$$f(x + \zeta) = \underbrace{\sum_{|\alpha| \leq n} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} \zeta^\alpha}_{:= T_n f(\zeta; x)} + \underbrace{\sum_{|\alpha|=n+1} \frac{D^\alpha f(x + t\zeta)}{\alpha!} \zeta^\alpha}_{:= R_n f(\zeta; x)}.$$

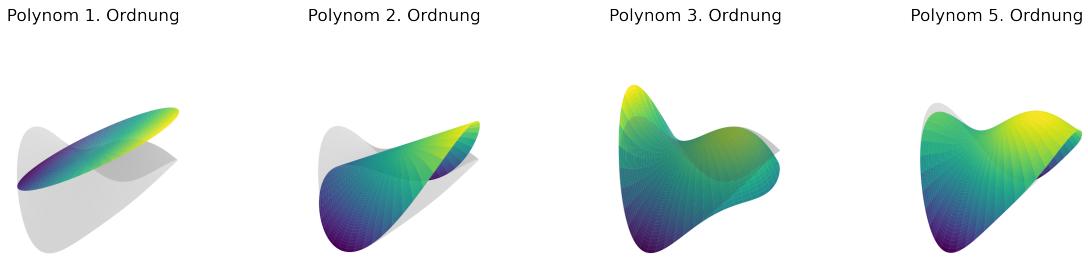


Abbildung 2: Taylorpolynome von  $(x, y)^T \mapsto \sin(x) - y^2/2$  (in grau hinterlegt) auf der Einheitskreisscheibe [Animation].

### 1.4 Lokale Extrema

**Definition 1.4.1** (Definitheit, Hessematrix). Eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heißt

$$\begin{array}{lll} \text{positiv [negativ] definit} & \text{also } A \succ 0 [A \prec 0] & \text{wenn } x^T A x > 0 [x^T A x < 0] \\ \text{positiv [negativ] semidefinit} & \text{also } A \succeq 0 [A \preceq 0] & \text{wenn } x^T A x \geq 0 [x^T A x \leq 0] \end{array}$$

für alle  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  und indefinit sonst. Betrachte hierzu die **Eigenwerten** oder **Hauptminoren** von  $A$ .

Bei der Bestimmung von Extrema spielt die Definitheit der Hessematrix

$$H_f(x) := \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

von zweimal stetig differenzierbaren  $f$  auf offenem  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  im Punkt  $x \in U$  eine entscheidende Rolle.

**Satz 1.4.2** (Notwendige Bedingung für Extremum). Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  partiell Differenzierbar. Besitzt  $f$  in  $x \in U$  ein lokales Extremum, dann gilt

$$\nabla f(x) = 0$$

**Satz 1.4.3** (Hinreichende Bedingung für Extremum). Zweimal stetig differenzierbares  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  hat für offenes  $U$  in  $x \in U$  ein striktes lokales Maximum [respektive Minimum], wenn

$$\nabla f(x) = 0 \quad \text{sowie} \quad H_f(x) \prec 0, \quad [\text{respektive } H_f(x) \succ 0].$$

## 1.5 Satz über implizite Funktionen

**Satz 1.5.1** (Banachscher Fixpunktsatz). Auf der abgeschlossenen, nicht leeren Teilmenge  $A$  eines vollständig normierter Raumes  $(X, \|\cdot\|)$  besitzt eine „Kontraktion“  $\Phi : A \rightarrow A$ ,

$$\|\Phi(y) - \Phi(z)\| < \|y - z\|, \quad (y, z \in A)$$

genau einen Fixpunkt. Das bedeutet für einen beliebigen Startwert  $x_0 \in A$  konvergiert die Folge  $x_{i+1} := \Phi(x_i)$  gegen einen Fixpunkt  $x$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x = \Phi(x).$$

**Satz 1.5.2** (über implizite Funktionen). Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^m$ ,  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $F : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar mit Jakobi-Matrix

$$DF(x, y) := \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m} & \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix}.$$

Sei  $F(x_0, y_0) = 0$  und  $\frac{\partial}{\partial y} F(x_0, y_0)$  invertierbar. Dann existieren offene Umgebungen  $U_0 \subseteq U$  von  $x_0$  und  $V_0 \subseteq V$  von  $y_0$  sowie stetig differenzierbares  $f : U_0 \rightarrow V_0$  sodass  $f(x_0) = y_0$  und für alle  $(x, y) \in (U_0 \times V_0)$ :

$$F(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = f(x).$$

Insbesondere können wir  $f$  „implizit differenzieren“, also die Jakobi-Matrix angeben

$$Df(x) = - \left( \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) \quad (2)$$

auch ohne die Abbildungsvorschrift  $x \mapsto f(x)$  zu kennen.

## 1.6 Minimierung unter Nebenbedingungen

**Definition 1.6.1.** (Untermannigfaltigkeit) Eine Teilmenge  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ , wenn für alle  $a \in M$  eine offene Umgebung  $U$  von  $a$  existiert sodass eine folgenden Eigenschaften erfüllt ist:

	$\exists$ offene Mengen	$\exists C^p$ -Abbildung	Rang	
i)	$U \subseteq \mathbb{R}^n$ , $V = \mathbb{R}^{n-k}$	$f : U \rightarrow V$ ,	$n - k$	$U \cap M = \{x \in U \mid f(x) = 0\}$
ii)	$U \subseteq \mathbb{R}^n$ , $V \subset \mathbb{R}^n$	$h : U \rightarrow V$ diffeomorph	$n$	$h(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{n-k}}\})$
iii)	$U \subseteq M$ , $V \subset \mathbb{R}^k$	$\varphi^{-1} : V \rightarrow U$ homöomorph <sup>6</sup>	$k$	

Wir nennen (das implizit gegebene)  $\varphi$  Karte und  $\varphi^{-1}$  lokale Parametrisierung.

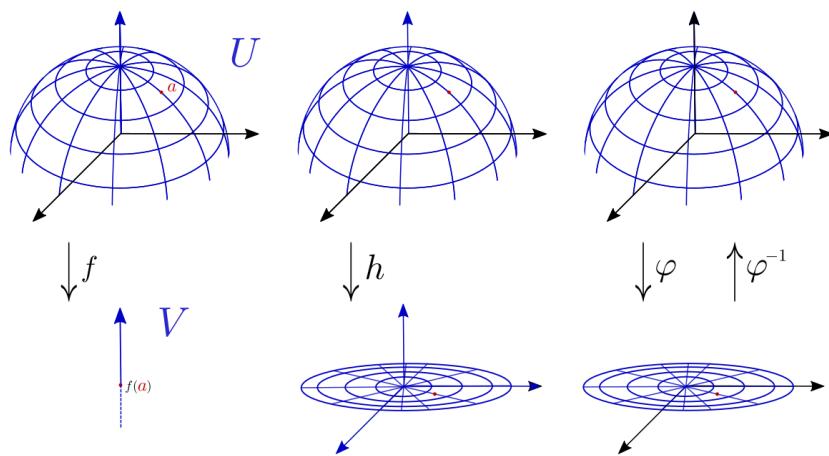
**Satz 1.6.2** (Lagrange Multiplikatoren). Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und induziert  $f = (f_1, \dots, f_{n-k}) : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit

$$M = \{x \in U \mid f(x) = 0\}$$

dann existieren für differenzierbares  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit lokalem Extremum  $a$  von  $F|_M$  „lagrangsche Multiplikatoren“  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-k} \in \mathbb{R}$ , so dass

$$\nabla F(a) + \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i \nabla f_i(a) = 0.$$

<sup>6</sup>Praktisches Kriterium: Wenn  $\varphi$  auf offenem  $V \subseteq \mathbb{R}^k$  stetig differenzierbar und der Rang  $D\varphi$  in jedem Punkt gleich  $k$ , existiert für jedes  $t \in V$  eine offene Umgebung  $V_t$ , sodass  $\varphi|_{V_t} \rightarrow \varphi(V_t)$  homöomorph.



**Abbildung 3:** Urbild und Bild der  $C^p$ -Abbildungen von Untermannigfaltigkeiten.

## 1.7 Parameterabhängige Integrale

**Satz 1.7.1** (Differentiation unterm Integral). Seien  $I, J$  kompakt und  $f: I \times J \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und in  $y \in J$  stetig differenzierbar, dann ist  $y \mapsto \int_I f(x, y) dx$  stetig differenzierbar und

$$\frac{d}{dy} \int_I f(x, y) dx = \int_I \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx.$$

## 1.8 Übungsaufgaben

**Aufgabe 1.8.0.** Recherchieren Sie jeh ein Ihnen unbekanntest Beispiel und Gegenbeispiel für eine Metrik und eine Norm. Stellen Sie ihren Gruppenmitgliedern davon ein Beispiel mit Begründung vor.

**Aufgabe 1.8.1.** Zeigen Sie, dass eine Norm eine Metrik induziert, die Umkehrung im Allgemeinen aber nicht gilt. Zeigen Sie insbesondere, dass durch  $d$  wie in (1) eine Metrik gegeben ist, die keine Norm induziert.

**HINWEIS!** Norm induziert Metrik per Definition.

Zeilige, dass durch  $(0, x)p =: \|x\|_p$  keine Norm gegeben ist.

**Aufgabe 1.8.2.** Zeigen Sie mit der offenen Überdeckungseigenschaft und dem Folgenkriterium, dass die offene Einheitskreisscheibe  $B_1(0) := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 < 1\}$  nicht kompakt ist.

**Aufgabe 1.8.3.** Sei

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{cases} 0 & x = y = 0 \\ \frac{\sqrt{|x|}y^3}{x^2+y^2} & \text{sonst} \end{cases}$$

- i) Zeigen Sie, dass  $f$  stetig ist.
- ii) Zeigen Sie mit dem  $\epsilon$ - $\delta$ -Kriterium, die Stetigkeit von  $f$  in  $(0, 0)^T$ .
- iii) Zeigen Sie, dass  $U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) < c\}$  für alle  $c \in \mathbb{R}$  offen ist.
- iv) Zeigen Sie, dass  $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = c\}$  für alle  $c \in \mathbb{R}$  abgeschlossen ist.

**HINWEIS!** Identifizieren Sie  $(x, y)$  mit den Polarkoordinaten  $(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ .

Wie entstehen  $U$  und  $B$  aus  $f$ ?

**Aufgabe 1.8.4.** Zeigen Sie, dass

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{cases} 0 & x = y = 0 \\ \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{sonst} \end{cases}$$

nicht stetig ist, aber in jedem Argument stetig ist<sup>7</sup>.

**HINWEIS!** Konstruieren Sie eine Folge  $(x_n, y_n)$ , sodass  $f(x_n, y_n) \leftarrow (0, 0)$  nicht gegen 0 konvergiert.

**Aufgabe 1.8.5.** Zeigen Sie, dass alle Richtungsableitungen von

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \sqrt[3]{x^2y}$$

existieren, nicht jedoch das totale Differential.

**HINWEIS!** Wie verhält sich  $f$  im Ursprung?  
Leiten Sie in Richtung  $(\cos \varphi, \sin \varphi)$  ab.

**Aufgabe 1.8.6.** Sei  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $p \geq 2$  und  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Stellen Sie Gradient und Hessematrix zu folgenden Funktionen auf:

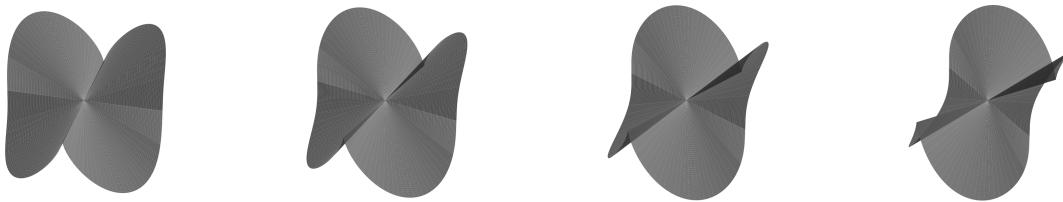
- |   |  |
|---|--|
| i) $x \mapsto \text{spur}(ax^T)$                  | iii) $(x, y)^T \mapsto \exp(-\ x - y\ _2^2)$ |
| ii) $x \mapsto \frac{1}{2} \exp(x^T Q x - a^T x)$ | iv) $(x, y)^T \mapsto (1 + x^T y)^p$         |

**Aufgabe 1.8.7.** Bestimmen Sie die Ableitung von

$$h: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^x$$

sowohl mit Analysis I Methoden, als auch mit der Mehrdimensionalen Kettenregel.

<sup>7</sup>Das bedeutet, für  $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$  sind  $x \mapsto f(x, y_0)$  und  $y \mapsto f(x_0, y)$  stetig.



**Abbildung 4:** Eine im Ursprung nicht differenzierbare Funktion mit partiellen Ableitungen die übereinstimmen.

**HINWEIS!** Betrachte die partiellen Ableitungen von  $g(u, v) := u^v$  und  $f(x) := (x, x)^T$   
Berechne die rechte Seite von Satz 1.2.8.

**Aufgabe 1.8.8.** Beweisen Sie mit der Kettenregel Satz 1.2.3, dass sich die Jakobi-Matrix von  $f$  wie in Satz 1.5.2 nach (2) auflösen lässt.

**Aufgabe 1.8.9.** Zeige, dass die Einheitsphäre

$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|_2 = 1\}$$

eine  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^{n+1}$  ist. Geben Sie insbesondere für jedes  $x \in S^n$  eine Karte an.

**HINWEIS!** Die Fußnote in Definition 1.6.1 erleichtert den Nachweis der Homöomorphie.  
Eine einfache Karte ist in [3] gegeben.

**Aufgabe 1.8.10.** Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $(x, y)^T \mapsto \sin(x) - y^2/2$ .

- i) Bestimme die Taylorentwicklung fünfter Ordnung  $T_5 f(\zeta; 0)$  von  $f$  im Punkt  $(0, 0)^T$ .
- ii) Bestimme die strikten Maxima von  $f$  und  $T_5 f(\zeta; 0)$ .

**Aufgabe 1.8.11** (Peanosche Fläche). Widerlegen Sie die Behauptung, dass eine Funktion die in einem Punkt nur Abstiegsrichtungen<sup>8</sup> hat, in diesem ein lokales Maximum besitzt. Nehmen sie hierzu die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto (2x^2 - y)(y - x^2)$$

zu Hilfe [Abbildung 5]. Warum können wir Satz 1.4.3 nicht anwenden?

**HINWEIS!** Untersuchen Sie die Vorzeichen der Faktoren zwischen Ihren Nullstellen.  
Geraden durch den Nullpunkt sind durch  $r \cos \phi, r \sin \phi$  gegeben.

**Aufgabe 1.8.12.** Zeigen Sie, dass

$$f : [0, \infty[ \rightarrow [0, \infty[, \quad x \mapsto \frac{x + \frac{1}{16}}{x + 1}$$

strikt kontraktiv ist und geben Sie den Fixpunkt an.

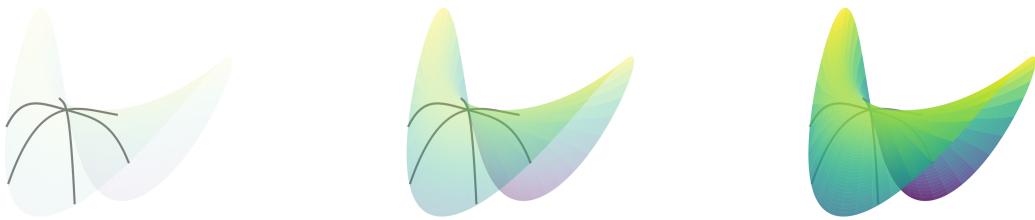
**Aufgabe 1.8.13.** Sei  $(x_0, y_0) := (3, 3)^T$  und

$$F(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto x^3 + y^3 - 6xy$$

gegeben. Zeigen Sie, dass in einer Umgebung von  $(x_0, y_0)^T$  eine Funktion  $f$  existiert, sodass

$$F(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = f(x)$$

<sup>8</sup>Gemeint ist, dass die Einschränkung der Funktion auf eine Gerade durch den Punkt, in ebenselbem ein lokales Maximum hat.



**Abbildung 5:** Schnittpunkt der Geraden im „Peano-Sattel“.

und geben Sie die Ableitung von  $f$  im Punkt  $(x_0, y_0)^T$  konkret an.

**HINWEIS!** Benutzen Sie Satz 1.6.2 und (g)

**Abbildung 6:** Animation des Plot von  $(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2, x_3)$  (links) sowie  $(x_1, x_2) \mapsto \frac{1}{1+e^{-f(x_1, x_2, x_3)}}$  (rechts) für laufendes  $0 \leq x_3 \leq 0.5$ .

**Aufgabe 1.8.14.** Betrachte das Minimierungsproblem  $\min\{F(x) \mid x \in \overline{B_1(0)}\}$  wobei

$$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto e^{1+x_1+x_2+x_3} - x_2 - x_3$$

und  $\overline{B_1(0)} := \partial B_1(0) \cup B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2^2 \leq 1\}$ . Suchen Sie Mithilfe von Satz 1.6.2 einen Kandidaten  $\bar{x}$  für ein lokales Minimum. Stellen Sie Vermutungen an, wie Sie die Minimalität nachweisen könnten.

**HINWEIS!** Zum Nachweis der Minimalität kann die Abschätzung  $e^{1+z} \geq 1 + (1 + z)$  hilfreich sein  
Wähle Lagrange Multiplikator 1/2.

## 1.9 Musterlösungen

**Lösung 1.9.1** (Aufgabe 1.8.1). „Norm induziert Metrik“. Wir zeigen, dass für einen Vektorraum  $(V, \|\cdot\|)$  durch  $d(x, y) := \|x - y\|$  eine Metrik gegeben ist. Definitheit: Sei  $x, y \in V$  und  $z := x - y$ . Dann  $z = 0$  genau dann, wenn  $x = y$ , also mit der Definitheit der Norm  $0 = \|z\| \stackrel{\text{def.}}{=} \|x - y\| \stackrel{\text{def.}}{=} d(x, y)$  genau dann wenn  $x = y$ . Symmetrie: Wir benutzen die absolute Homogenität der Norm. Für alle  $x, y \in V$  gilt.

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|-1 \cdot (y - x)\| = |-1| \cdot \|y - x\| = d(y, x).$$

Dreieckungleichung: Wir benutzen die Dreieckungleichung der Norm. Für all  $x, y, z \in V$  gilt

$$d(x, z) = \|x - z\| = \|x - z + (y - y)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z).$$

Wir zeigen, dass  $d$  wie in (1) eine Metrik ist. *i)* gilt per Definition. *ii)* sehen wir mit Fallunterscheidung. Für  $x = z$  gilt die Ungleichung in *iii)*. Sei  $x \neq z$ , dann entweder  $x \neq y$  oder  $y \neq z$  für alle  $y \in X$ , denn sonst  $x = z$ .

Insbesondere induziert die  $d$  Metrik keine Norm, falls die Menge  $X$  kein Vektorraum ist. Sei nun  $X = V$ . Angenommen  $d$  induziert eine Norm, dann muss  $\|x\| := d(x, 0)$  um die Definitheit sicherzustellen. Jedoch gilt für  $0 \neq x$ :

$$1 = d(x, 0) = \|x\| = 2 \cdot \left\| \frac{1}{2}x \cdot 1 \right\| = d\left(\frac{1}{2}x, 0\right) + d\left(\frac{1}{2}x, 0\right) = 2, \quad \notin.$$

**Lösung 1.9.2** (Aufgabe 1.8.2). „Offene Überdeckungseigenschaft“: Wir zeigen, dass eine offene Überdeckung existiert, sodass jede endliche Teilüberdeckung Elemente der offenen Einheitskreisscheibe verfehlt. Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge die für  $n \rightarrow \infty$  gegen 1 konvergiert, mit  $a_n \in [0, 1]$ . Dann existiert für alle  $x \in B_1(0)$  ein  $a_n > \|x\|$  sodass  $x \in B_{a_n}(0)$ . Das bedeutet  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{a_n}(0)$  ist eine offene Überdeckung von  $B_1(0)$ . Jedoch existiert keine Endliche Teiliüberdeckung, da für alle  $I := \{i_1, \dots, i_m\} \subset \mathbb{N}$  und  $C := \max\{a_i \mid i \in I\}$  gilt  $\bar{x} := ((1+C)/2, 0) \in B_1(0)$  aber  $\bar{x} \notin B_{i_1}(0) \cup \dots \cup B_{i_m}(0)$ .

„Cauchyfolgenkriterium“: Wir zeigen, dass es eine Cauchyfolge gibt, die keine in  $B_1(0)$  konvergente Teilfolge besitzt. Das bedeutet Dann ist  $x_n$  eine Cauchyfolge in  $B_1(0)$  die für  $n \rightarrow \infty$  gegen  $(1, 0)$  konvergiert. Sei  $x_n := (1 - 1/n, 0)$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Sei  $\hat{x} \in B_1(0)$  beliebig und  $(x_{i_n})_{n \in \mathbb{N}}$  eine Teilfolge von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Wir wollen zeigen:

$$\exists \epsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n_i \geq N : \|x_{n_i} - \hat{x}\| > \epsilon.$$

Sei  $\epsilon = (1 - \|\hat{x}\|)/2 > 0$  und  $\forall N \in \mathbb{N}$ . Wähle  $n > \lceil 2/(1 - \|\hat{x}\|) \rceil$  und  $n > N$ , dann gilt

$$\|x_{i_n} - \hat{x}\| \geq \left\| 1 - \frac{1}{i_n} \right\| - \|\hat{x}\| > 1 - \frac{1 - \|\hat{x}\|}{2} - \|\hat{x}\| = \frac{1 - \|\hat{x}\|}{2} = \epsilon.$$

**Lösung 1.9.3** (Aufgabe 1.8.3). „i“: Identifizieren wie  $(x, y)$  mit den Polarkoordinaten  $(r \cdot \cos \varphi, r \cdot \sin \varphi)$  für  $\varphi \in [-\pi, \pi]$  und  $r \geq 0$ . Da  $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$  und  $r \geq 0$

$$f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \frac{|r|^{\frac{1}{2}} r^3 \cdot \sqrt{|\cos \varphi|} \sin^3 \varphi}{r^2 \cdot 1} = r \cdot |r|^{\frac{1}{2}} \sqrt{|\cos \varphi|} \sin^3 \varphi.$$

$f$  ist stetig, da  $f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$  Produkt stetiger Funktionen ist. Insbesondere  $(x, y) \rightarrow 0$  genau dann, wenn  $r \rightarrow 0$ , also ist  $f$  stetig in der Null.

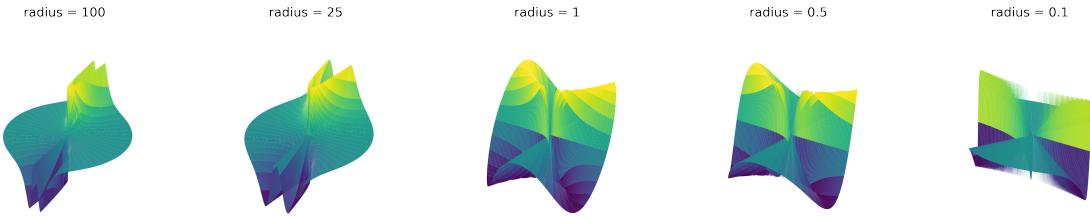
„ii“: Dies können wir auch mit den  $\epsilon$ - $\delta$ -Kriterium zeigen: Sei  $\epsilon > 0$  und  $\delta = \epsilon^{\frac{2}{3}}$ , dann gilt für  $|(x, y)^T| < \delta$ , also  $|r| < \delta$ :

$$|f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) - f(0, 0)| = |r|^{\frac{3}{2}} \cdot |\sqrt{|\cos \varphi|} \sin^3 \varphi| \leq |r|^{\frac{3}{2}} < \delta^{\frac{3}{2}} = \epsilon.$$

„iii“:  $U$  ist gerade das Urbild  $f^{-1}(-\infty, c])$  einer offenen Menge unter einer stetigen Funktion, also mit Definition und Satz 1.1.4 offen.

„iv“:  $B = f^{-1}(\{c\})$  ist das Komplement einer offenen Menge  $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{c\})$  und damit abgeschlossen.

**Lösung 1.9.4** (Aufgabe 1.8.4). Beachte, dass  $f(x, 0) = 0 = f(0, y)$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}^2$ . Für eine Konstante  $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  sind  $x \mapsto x \cdot y_0$  und  $x \mapsto x^2 + y_0^2$  stetige Polynome. Da  $x^2 + y^2 \neq 0$  ist gilt mit Lemma 1.1.5.ii) dass  $f$  im ersten Argument stetig und analog im zweiten Argument stetig ist.



**Abbildung 7:** Plot von  $B_r(0) \setminus \{(0,0)^T\} \ni (x,y)^T \mapsto \frac{x^2y}{x^4+y^2}$  mit variierendem Radius.

Sei  $x_n := 1/n$  und  $y_n := 1/n^2$  für  $n \in \mathbb{N}$ , dann  $(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0,0)$ , aber

$$f(x_n, y_n) = \frac{(1/k^2) \cdot (1/k^2)}{1/k^4 + 1/k^4} = \frac{1}{k^4} \cdot \frac{k^4}{2} = \frac{1}{2}.$$

□

**Lösung 1.9.5** (Aufgabe 1.8.5). Die Richtungsableitung von  $f$  in Richtung  $v_\varphi := (\cos \varphi, \sin \varphi)^T$  ist im Ursprung wohldefiniert:

$$D_{v_\varphi} f(0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi}}{h} = \sqrt[3]{\cos^2 \varphi \sin \varphi}$$

Insbesondere stimmen die partiellen Ableitungen  $D_{v_0} f(0) = 0 = D_{v_{\pi/2}} f(0)$  im Ursprung überein. Jedoch  $D_{v_\varphi} f(0) \neq 0$  für  $\varphi \in ]0, \pi/2[$ , also ist das Differential im Ursprung nicht wohldefiniert.

**Lösung 1.9.6** (Aufgabe 1.8.6). Die Herausforderung besteht dabei, nicht den Überblick zu verlieren! Hilfsfunktionen die große Terme zusammenfassen erweisen sich als hilfreich.

Funktionsvorschrift	Gradient	Hessematrix
$x \mapsto \text{spur}(ax^T)$	$a$	$0_{n \times n}$
$x \mapsto \frac{1}{2} \underbrace{\exp(x^T Q x - a^T x)}_{:= \hat{e}(x)}$	$\frac{1}{2} \underbrace{((Q + Q^T)x - a)\tilde{e}(x)}_{\hat{Q}}$	$\frac{1}{2}(\tilde{Q}x - a)(\tilde{Q}x - a)^T \tilde{e}(x) + \frac{1}{2}\tilde{Q}\tilde{e}(x)$
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \underbrace{\exp(-\ x - y\ _2^2)}_{:= \hat{e}(x,y)}$	$2 \begin{bmatrix} y - x \\ x - y \end{bmatrix} \hat{e}(x,y)$	$2 \left( \begin{bmatrix} -I & I \\ I & -I \end{bmatrix} + \hat{z}\hat{z}^T \right) \hat{e}(x,y)$
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \underbrace{(1 + x^T y)^p}_{:= \phi(x,y)}$	$\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} \underbrace{p\phi(x,y)^{p-1}}_{:= z'}$	$\left( \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \phi(x,y) + z'z'^T(p-1) \right) p\phi(x,y)^{p-2}$

□

**Lösung 1.9.7** (Aufgabe 1.8.7). Betrachte die Funktionen

$$g: \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \mapsto u^v, \quad f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}.$$

Dann liegt das Bild von  $f$  im Definitionsbereich  $f(\mathbb{R}_+^*) \subseteq \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$  von  $g$  und die partiellen Ableitungen von  $f$  sind stetig. Mit der eindimensionalen Produkt und Kettenregel sowie  $x^x = e^{x \ln x}$  rechnen wir

$$h'(x) = \left( \left( \frac{d}{dx} x \right) \ln x + \left( \frac{d}{dx} \ln x \right) x \right) e^{x \ln x} = \ln(x)x^x + x^x.$$

Damit sind auch die partiellen Ableitungen von  $g$  stetig, und die Funktionalmatrizen

$$Dg(u, v) = \begin{bmatrix} \ln(u) \cdot u^v & v \cdot u^{v-1} \end{bmatrix}, \quad Df(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sind wohldefiniert. Wegen  $h = g \circ f$  folgt die Aussage mit der Kettenregel nach Ausmultiplikation von

$$Dg(f(x))Df(x) = Dg(u, v) = [\ln(x) \cdot x^x \quad x \cdot x^{x-1}] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \ln(x) \cdot x^x + x^x. \quad \square$$

**Lösung 1.9.8** (Aufgabe 1.8.8). Seien die Voraussetzungen von Satz 1.5.2 erfüllt mit ebenselben Bezeichnungen. Für die Hilfsfunktion

$$H: U_0 \rightarrow U_0 \times V_0, \quad x \mapsto \begin{bmatrix} x \\ f(x) \end{bmatrix}$$

ist die Komposition  $F \circ H = 0$  wohldefiniert und die Voraussetzungen für Satz 1.2.3 erfüllt. Wir differenzieren beide Seiten der Gleichung und erhalten

$$0 = D(F \circ H)(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) & \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{m \times m} \\ Df(x) \end{bmatrix} = \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \circ Df(x).$$

Nach Voraussetzung ist  $\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))$  invertierbar und wir können nach  $Df(x)$  auflösen:

$$Df(x) = - \left( \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)). \quad \square$$

**Lösung 1.9.9** (Aufgabe 1.8.9). Mit Definition 1.6.1.i) ist  $S^n$  offensichtlich eine  $n$ -dimensionale  $C^\infty$  Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^{n+1}$ : Das Polynom  $f(x) = (\sum_{k=1}^{n+1} x_i^2) - 1$  ist eine  $C^\infty$  Abbildung und

$$\mathbb{R}^{n+1} \cap S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid f(x) = 0\}.$$

Als Karte  $\varphi$  mit lokaler Parametrisierung  $\varphi^{-1}$  kommen verschiedene Funktionen in Frage. Betrachte Beispielsweise im  $\mathbb{R}^2$  die Stereographische Projektion

$$\varphi: S^1 \setminus \{(0, 1)^T\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \frac{x}{1-y}$$

oder die Polarkoordinaten

$$\varphi: S^1 \setminus \{(-1, 0)^T\} \rightarrow ]-\pi, \pi[, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \arg(x + iy)$$

wobei  $\arg(z)$  das Argument einer komplexen Zahl  $z$  bezeichnet. Wir konstruieren im Folgenden die Karte aus [Abbildung 3].

Sei  $x := (x_1, \dots, x_{n+1})^T \in S^n$  beliebig. Für eine Karte benötigen wir eine (bezüglich der Relativtopologie) offene Umgebung  $U_x$  von  $x$ . Betrachte für  $i = 1, \dots, n+1$  den Schnitt der Sphäre  $S^n$  mit dem Halbraum

$$\mathbb{R}_{i,\pm}^{n+1} := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \pm x_i > 0\}.$$

Nach Definition ist  $\|x\|_2 = 1$ , also existiert ein  $\pm x_i > 0$  und  $x$  liegt in mindestens einer (relativ) offenen Umgebung  $U_x := S^n \cap \mathbb{R}_{i,\pm}^{n+1}$ . Sei  $V$  die offene Einheitskugel des  $\mathbb{R}^{n-1}$ , dann wähle  $\varphi_x$  respektive  $\varphi_x^{-1}$  wie in [Abbildung 3], also

$$\varphi_x: U_x \rightarrow V, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{i-1} \\ x_i \\ x_{i+1} \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{i-1} \\ x_{i+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \varphi_x^{-1}: V \rightarrow U_x, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \sqrt{1-x_1^2-\dots-x_n^2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Da  $x_1^2 + \dots + x_{i-1}^2 + x_{i+1}^2 + \dots + x_{n+1}^2 = \|x\|_2^2 - x_i^2 < 1$  ist das Funktional

$$D\varphi^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \frac{2x_1}{\sqrt{1-x_1^2-\dots-x_n^2}} & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \frac{2x_2}{\sqrt{1-x_1^2-\dots-x_n^2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{2x_n}{\sqrt{1-x_1^2-\dots-x_n^2}} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

wohldefiniert und wird durch Streichung der  $i$ -ten Zeile zur Einheitsmatrix, also ist  $\varphi^{-1}$  ein Homöomorphismus.

**Lösung 1.9.10** (Aufgabe 1.8.10). „i“: Wir erhalten  $\frac{d^2}{dy^2} \left( -\frac{y^2}{2} \right) = -\frac{d}{dy} y = -1$  sowie induktiv

$$\sin^{(n)}(x)|_{x=0} = \begin{cases} 1, & n \equiv 1 \pmod{4} \\ -1, & n \equiv 3 \pmod{4} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und damit das Taylorpolynom 5. Ordnung im Punkt  $x = 0$

$$T_5 f(\zeta; 0) = \zeta_1 - \frac{\zeta_2^2}{2} - \frac{\zeta_1^3}{6} + \frac{\zeta_1^5}{120}.$$

„ii“: Da  $1 \geq \sin(x) \geq \sin(x) - y^2/2$  für  $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$  hat  $f$  für  $z \in \mathbb{Z}$  seine globalen Maxima in  $(4 \cdot z\pi + \pi, 0)^T$ .

Setzen wir den Gradienten von  $T_5 f(\zeta; 0)$  gleich Null

$$T_5 f(\zeta; 0) = \begin{bmatrix} 1 - \zeta_1^2/2 + \zeta_4/24 \\ -\zeta_2 \end{bmatrix}$$

und erhalten<sup>9</sup> für

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{6 - 2\sqrt{3}}, \quad x_{2,3} = \pm \sqrt{6 + 2\sqrt{3}}$$

die Maximakandidaten  $(x_i, 0)^T$  für  $i = 1, \dots, 4$ . Damit die Hessematrix

$$H_f(x) = \begin{bmatrix} -\zeta_1 + \zeta_1^3/6 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

negativ definit wird, muss ihr erster Diagonaleintrag negativ sein. Die reelle Funktion  $a(\zeta_1) := -\zeta_1 + \zeta_1^3/6$  ist negativ auf  $]-\infty, -\sqrt{6}]$  und  $]\sqrt{6}, \infty[$ . Damit erhalten wir das strikte Maximum von  $T_5 f(\zeta; 0)$  in  $(\sqrt{6} - 2\sqrt{3}, 0)^T$ .  $\square$

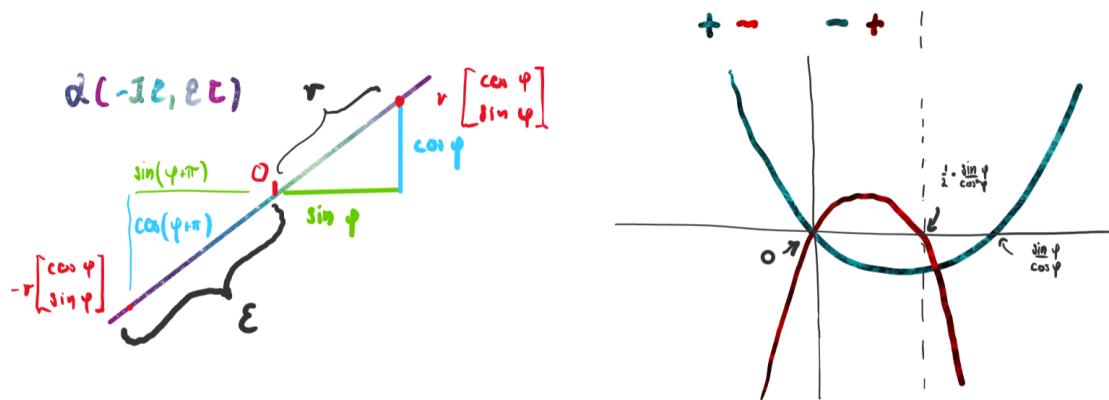
**Lösung 1.9.11** (Aufgabe 1.8.11). Zwar verschwindet der Gradient von  $f$

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 4x(y - x^2) - 2x(2x^2 - y) \\ -(y - x^2) + (2x^2 - y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6xy - 8x^3 \\ -2y + 3x^2 \end{bmatrix}$$

im Nullpunkt, jedoch ist die Hessematrix

$$H_f(x) = \begin{bmatrix} 6y - 24x^2 & 6x \\ 6x & -2 \end{bmatrix} \underset{x=0}{=} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

nur semidefinit, deshalb können wir Satz 1.4.3 nicht anwenden.



**Abbildung 8:** Gerade durch den Ursprung  $\alpha_\varphi(r)$  links, sowie Parabeln  $\beta$  und  $\gamma$  rechts.

<sup>9</sup>Für die Nullstellen in der ersten Komponente substituiere  $\zeta_1^2 = w$ , löse mit pq-Formel und resupstituiere  $\zeta_1 = \pm\sqrt{w}$ .

Betrachten wir nun die Einschränkung des Bildes von  $f$  auf eine Gerade durch den Ursprung in einer kleinen Umgebung des Ursprungs. Diese sind für hinreichend kleines  $\epsilon > 0$  und  $0 < \varphi \leq 2\pi$  durch

$$\alpha_\varphi : ]-\epsilon, \epsilon[ \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad r \mapsto r \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix}$$

gegeben. Aus symmetriegründen gilt  $\alpha_\varphi(r) = \alpha_{\varphi+\pi \bmod [2\pi]}(-r)$ , also können wir uns auf  $0 < \varphi < \pi$  beschränken. Ferner sehen wir durch Einsetzen, dass 0 ein globales Maximum von  $\alpha_0$  sowie  $\alpha_{\pi/2}$  ist. Wir zeigen, dass für hinreichend kleines  $\epsilon > 0$  sowie  $\varphi \in ]0, \pi[ \setminus \{\pi/2\}$  das Produkt

$$f(\alpha_\varphi(r)) = \underbrace{(2r^2 \cos^2(\varphi) - r \sin(\varphi))}_{:=\beta(r)} \cdot \underbrace{(r \sin(\varphi) - r^2 \cos^2(\varphi))}_{:=\gamma(x)}$$

negativ wird. Sei  $c := \sin \varphi / (2 \cos^2 \varphi) > 0$ , dann sind  $\beta(r)$  und  $\gamma(r)$  nach oben, respektive unten geöffnete Parabeln mit Nullstellen 0 sowie  $c$  respektive  $2c$ . Damit ist das Produkt für  $\epsilon = c$  negativ und  $f \circ \alpha_\varphi$  hat in 0 ein globales Maximum [Abbildung 8]. Hingegen ist  $f(x, 2x/3) > 0$  für alle  $x > 0$ , was die Behauptung widerlegt.  $\square$

**Lösung 1.9.12** (Aufgabe 1.8.12). Sei  $x, y \in [0, \infty[$ , wobei  $x \geq y$  o.B.d.A. Dann gilt

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{(x + \frac{1}{16})(y + 1) - (y + \frac{1}{16})(x + 1)}{(x + 1)(y + 1)} \right| = \frac{15}{16} \left| \frac{x - y}{(x + 1)(y + 1)} \right| \leq \frac{15}{16} |x - y|$$

also ist  $f$  eine Kontraktion. Der Fixpunkt ist  $1/4$ , da  $f(x) = x$  genau dann, wenn

$$0 = x(x + 1) - (x + \frac{1}{16}) = x^2 - \frac{1}{16}. \quad \square$$

**Lösung 1.9.13** (Aufgabe 1.8.13). Wir untersuchen die Tangente an das kartesische Blatt im Punkt  $(3, 3)^T$ . Wir weisen die Voraussetzung in Satz 1.5.2 nach. Die Teilmatrizen von

$$DF(x, y) = \begin{bmatrix} 3x^2 - 6y & 3y^2 - 6x \end{bmatrix}$$

sind Parabeln, also für jedes offene  $U \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0, 0\}$  invertierbar. Da  $F(3, 3) = 0$  existiert die gesuchte implizite Funktion  $f$ .

$$f'(x) = - (3f(x)^2 - 6x)^{-1} (3x^2 - 6y) = \frac{x^2 - 2f(x)}{2x - f(x)^2} \stackrel{x=3}{=} -1. \quad \square$$

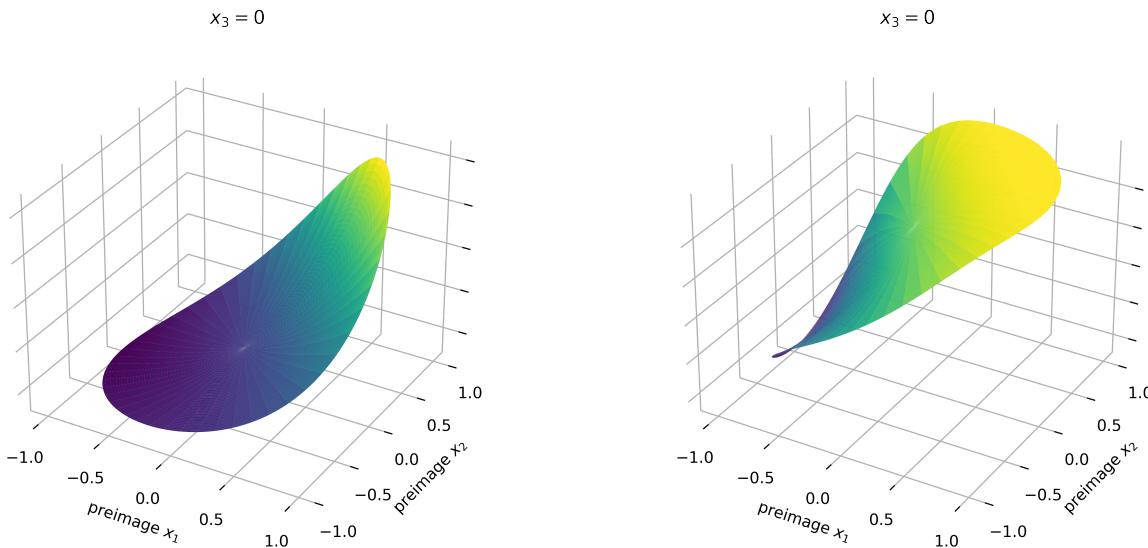


Abbildung 9: Plot von  $(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2, 0)$  (links) sowie  $(x_1, x_2) \mapsto \frac{1}{1+e^{-f(x_1, x_2, 0)}}$  (rechts).

**Lösung 1.9.14** (Aufgabe 1.8.14). Wegen Satz 1.4.2 existiert kein lokales Extremum von  $F$  in  $\mathbb{R}^3$ , da

$$\nabla F(x) = e^{1+x_1+x_2+x_3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq 0, \quad (x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}).$$

Da  $U$  kompakt ist, nimmt  $F$  sein Minimum auf  $U$  an. Sei  $f(x) := \|x\|_2^2 - 1$ , dann ist der Rand von  $U = \partial B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = 0\}$  eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$ . Also existiert mit Satz 1.6.2 ein Lagrange Multiplikator  $\lambda \in \mathbb{R}$  sodass

$$\nabla F(x) + \lambda \cdot \nabla f(x) = e^{1+x_1+x_2+x_3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0.$$

Beachte, dass die Gleichheit für  $\bar{x} = (-1, 0, 0)^T$  und  $y = 1/2$  erfüllt ist. Insbesondere  $f(\bar{x}) = 1$ .

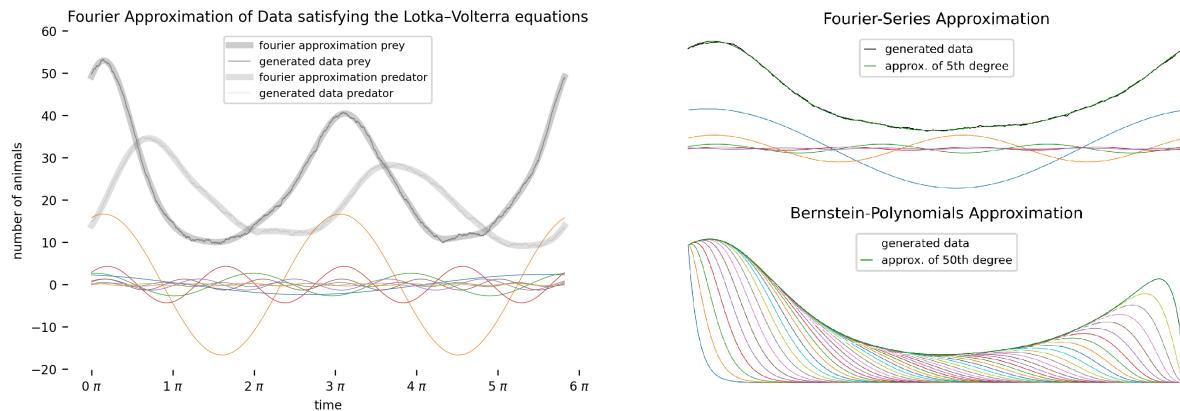
Für kleines  $\epsilon > 0$  wähle  $|\mu|, |\beta| \leq \epsilon$ , also  $x_\epsilon := (\epsilon, \mu, \beta)^T \in B_\epsilon((-1, 0, 0)^T) \cap \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \geq -1\}$ . Wir zeigen, dass  $f(x) \geq f(\bar{x})$ . Wir möchten im Folgenden die Exponentialfunktion abschätzen. Beachte, dass für kleins  $z \in \mathbb{R}$  gilt

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ gerade}}}^{\infty} \frac{z^n}{n!} + \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ gerade}}}^{\infty} z^n \frac{n+1+z}{(n+1)!} \geq z^n \frac{n+1+z}{(n+1)!}.$$

Weiterhin gilt wegen Stetigkeit  $f(x_\epsilon) > 0$  für kleines  $\epsilon$ . Daraus erhalten wir die Abschätzung

$$f(\epsilon, \mu, \beta) = e^{1+(-1+\epsilon)+\mu+\beta} - (\mu, \beta) \geq (1 + (\epsilon + \mu + \beta)) - (\mu + \beta) = 1 + \epsilon > 1.$$

Also ist  $\bar{x}$  tatsächlich ein lokales Minimum. □



**Abbildung 10:** Fourier Reihe einer linearen Approximation der Lotka-Volterra Differentialgleichungen mit Störfaktor für feste Anfangswerte (links). Vergleich der schnellen Konvergenz der Fourier Reihe mit der langsamen Konvergenz von Bernstein Polynomen.

## 2 Gewöhnliche Differentialgleichungen

**Definition 2.0.1.** Gewöhnliche Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung, auch Differentialgleichungssysteme bei  $m > 1$  Gleichungen sind von der Form

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

für  $\Omega \times (\mathbb{R}^m)^{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  und stetiges  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  sowie Lösungen  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Wie sprechen von

- i) Anfangswertproblem, falls  $y^{(i)}(x_0) = y^i$  für ein  $x_0 \in \Omega$ ,  $y^0, \dots, y^{n-1} \in \mathbb{R}^m$  gefordert ist
- ii) explizit, wenn in die Form  $y^{(n)} = f(x, y', \dots, y^{(n-1)})$  aufgelöst wurde, was nicht immer möglich ist.

Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung lassen sich auf ein System von gewöhnlichen Differentialgleichung zurückführen:

$$(y_1, \dots, y_{n-1}, y_n)' = (y_2, \dots, y_n, f(x, y_1, \dots, y_n)).$$

**Satz 2.0.2.** (Existenzsatz von Peano) Sei  $f$  stetig auf  $[a, b] \times \overline{B}_R(y_0)$ , dann besitzt das Anfangswertproblem  $y' = f(x, y)$ ,  $y(x_0) = y^0$  für ein  $\epsilon > 0$  eine Lösung  $y \in C^1([x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon])$ .

**Satz 2.0.3.** (Existenzsatz von Picard-Lindelöf, lokale Version) Ist  $f$  zusätzlich lokal Lipschitz stetig in der zweiten Komponente, ist  $y$  eindeutig.

### 2.1 Lineare Differentialgleichung(ssysteme)

**Definition 2.1.1.** (Vektorwertige) Lineare gewöhnliche Differentialgleichung(ssysteme)  $n$ -ter Ordnung

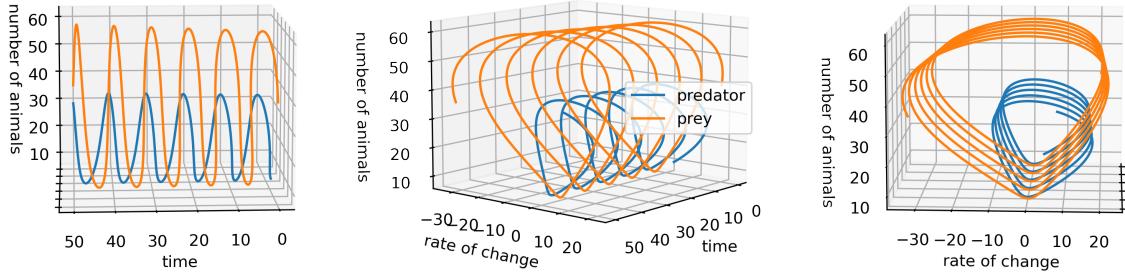
$$y^{(n)} = \sum_{k=1}^{n-1} A_k(x) y^{(k)} + g(x)$$

für auf einem Intervall  $I$  gesuchtes  $y : I \rightarrow \mathbb{C}^m$  und stetige  $g : I \rightarrow \mathbb{C}^m$ ,  $A_k : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$  heißen

- i) *homogen*, wenn  $g$  die Nullfunktion ist und *inhomogen* sonst,
- ii) *Anfangswertproblem*, falls zusätzlich  $y^{(k)}(x_0) = y^k$  für ein  $x_0 \in I$  und  $y^1, \dots, y^{n-1} \in \mathbb{C}^m$  gefordert,
- iii) *skalares* lineares Differentialgleichungssystem (also mit konstantem Koeffizienten), falls  $A_k \in \mathbb{C}^{m \times m}$  nicht von  $x$  abhängen.

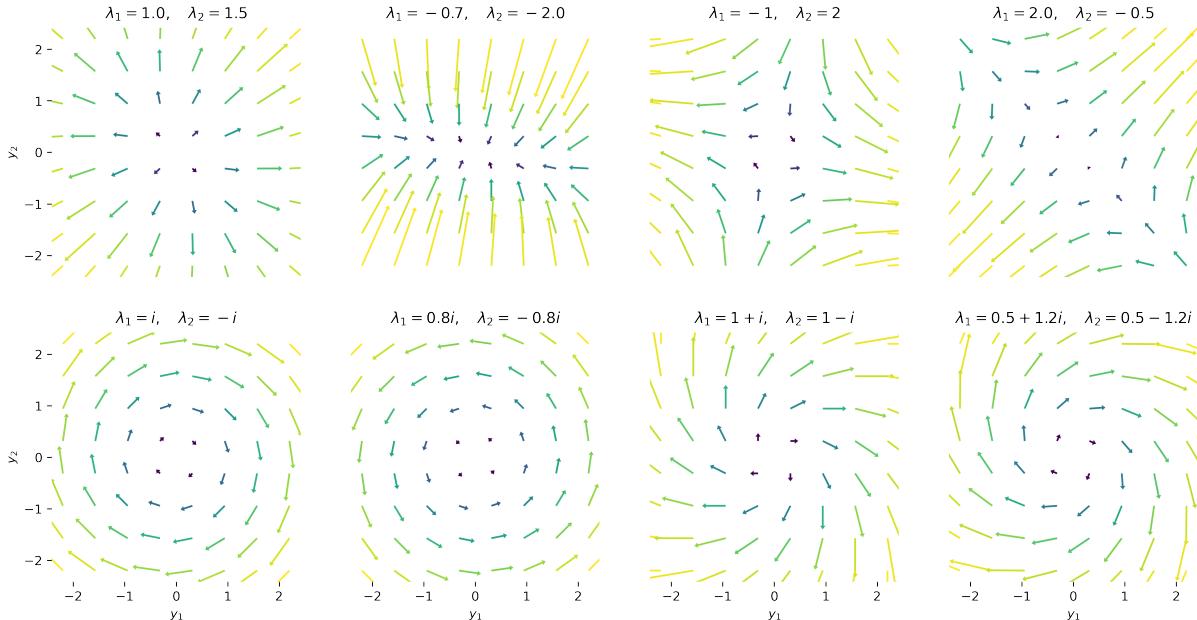
**Beispiel 2.1.2** (Phasenraum). Insbesondere zum zweidimensionalen skalaren linearen homogenen Differentialgleichungssysteme

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$



**Abbildung 11:** Übergang zum Phasenraum einer linearen Approximation der Lotka-Volterra Differentialgleichungen für feste Anfangswerte.

erster Ordnung können wir das durch  $A := (a_{ij})_{i,j \leq 2}$  gegebene Vektorfeld skizzieren. Dafür skizzieren wir für einige Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$  den Verbindungspfeil zu  $Av \in \mathbb{R}^2$ . Der Übersichtlichkeit halber sind die Vektoren in [Abbildung 12] normalisiert und ihre Länge entsprechend eingefärbt.



**Abbildung 12:** Die Phasenräume einiger zufallsgenerierter Matrizen mit Eigenwerten  $\lambda_1, \lambda_2$ .

**Satz 2.1.3.** Sei  $\mathcal{L}_H$  die Menge der Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung und  $\mathcal{L}_I$  die der inhomogenen, dann ist

- i)  $\mathcal{L}_H$  ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum
- ii)  $\mathcal{L}_I = \varphi + \mathcal{L}_H$  für beliebiges  $\varphi \in \mathcal{L}_I$ .

## 2.2 Fundamentalsystem

**Definition 2.2.1.** Ein Fundamentalsystem  $\{y_1, \dots, y_n\}$  ist eine Basis des Vektorraums

$$\mathcal{L} := \{y \in C^1(I; \mathbb{C}^n) \mid y = \sum_{k=1}^n a_k y_k, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}\}$$

der Lösungen eines homogenen linearen Differentialgleichungssystems. Das lineare homogene Differentialgleichungssystem erster Ordnung hat die Fundamentalmatrix

$$\Phi(x) := [y_1(x) \mid \dots \mid y_n(x)].$$

**Beispiel 2.2.2.** Das *skalare* lineare homogene Anfangswertproblem  $y' = Ay$ ,  $y(x_0) = y^0$  erster Ordnung löst die Exponentialfunktion  $y(x) = e^{xA}y^0$  mit Fundamentalmatrix

$$e^{xA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} A^k. \quad (3)$$

Gegeben sei eine *skalare* lineare homogene Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung. Dabei löst  $y(x)$  die skalare Gleichung  $y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} A_k y^{(k)}$  genau dann, falls  $Y'(x) = A(x)Y(x)$  für

$$Y(x) = \begin{bmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{n-1}(x) \end{bmatrix}, \quad A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ A_0 & A_1 & \cdots & A_{n-1} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  die (paarweise verschiedenen) Nullstellen des charakteristischen Polynoms  $\chi_A(\lambda)$  mit Vielfachheiten  $\mu_1, \dots, \mu_k$ . Dann trägt die Nullstelle  $\lambda_i$  zum (komplexen) Fundamentalsystem die  $\mu_i$  linear unabhängigen Lösungen

$$y_{i,1}(x) = e^{\lambda_i x}, \quad y_{i,2}(x) = xe^{\lambda_i x}, \quad \dots \quad y_{i,\mu_i}(x) = x^{\mu_i-1}e^{\lambda_i x} \quad (5)$$

bei. Ersetze die paarweise auftretenden komplexwertigen  $\{e^{\lambda x}v, e^{\bar{\lambda}x}\bar{v}\}$  durch  $\{\Re(e^{\lambda x}v), \Im(e^{\lambda x}v)\}$  um ein reellwertiges Fundamentalsystem zu erhalten. Aus dem Fundamentalsystem  $\{y_1, \dots, y_n\}$  erhalten wir die Fundamentalmatrix zum korrespondierenden System erster Ordnung

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ y'_1(x) & \cdots & y'_n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}. \quad (6)$$

**Beispiel 2.2.3.** (Fundamentalmatrix berechnen) Sei zu einer skalaren linearen Differentialgleichung erster Ordnung  $y'(x) = A \cdot y(x)$  die Jordan-Normalform  $Q^{-1}AQ = J$ ,

$$Q = [v_{1,1} \mid \cdots \mid v_{k,s_1} \mid \cdots \mid v_{k,s_k}]$$

gegeben<sup>10</sup>. Dann ist  $v_{j,1}, \dots, v_{j,s_j} := v_1, \dots, v_l$  die vollständige Hauptvektorkette

$$(A - \lambda I)v_{i+1} = v_i, \quad (i = 1, \dots, l-1)$$

zum Eigenwert  $\lambda_j := \lambda$ . Mit (3) erhalten wir zur Anfangsbedingung  $\Phi(0) = I_l$  die Fundamentalmatrix des Jordanblocks

$$\Phi(x) = e^{\lambda x} \begin{bmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} & \cdots & \frac{x^{l-2}}{(l-2)!} & \frac{x^{l-1}}{(l-1)!} \\ 0 & 1 & x & \cdots & \frac{x^{l-3}}{(l-3)!} & \frac{x^{l-2}}{(l-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Nach Rücktransformation trägt der Jordanblock  $s_j = l$  jeweils Hauptvektorlösungen der Form

$$y_i = e^{\lambda x} \sum_{k=1}^i \frac{x^{i-k}}{(i-k)!} v_k, \quad (i = 1, \dots, l) \quad (8)$$

zum Fundamentalsystem von  $A$  bei.

<sup>10</sup>Das bedeutet, Spalten von  $Q$  sind die Eigenvektoren mit den dazugehörigen Hauptvektoren in der Reihenfolge der dazugehörigen **Jordanblöcke**.

### 2.3 Lösungsansätze

**Satz 2.3.1.** (Hauptsatz) Die Lösung des Anfangswertproblems  $y' = f(x)$ ,  $y(x_0) = y^0$  ist

$$y(x) = y^0 + \int_{x_0}^x f(t) dt. \quad (9)$$

**Satz 2.3.2.** (Picard-Lindelöfsches Iterationsverfahren) Betrachte die zum Anfangswertproblem  $y' = f(x, y)$ ,  $y(x_0) = y^0$  rekursiv definierte Folge

$$y_k(x) := y^0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{k-1}(t)) dt, \quad y_0(x) := y^0, \quad (k \geq 1). \quad (10)$$

Ist  $f$  stetig im ersten und Lipschitzstetig im zweiten Argument, konvergiert  $y_k(x)$  gleichmäßig gegen die Lösung  $y(x)$  in einer Umgebung von  $x_0$ .

**Satz 2.3.3.** (Getrennte Variablen) Die Lösung des Anfangswertproblems  $y' = f(x)g(y)$ ,  $y(x_0) = y^0$  ist

$$y(x) = G^{-1}(F(x)), \quad (11)$$

wobei  $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$ ,  $G(y) = \int_{y_0}^y \frac{dt}{g(t)}$  und  $G^{-1}$  das Inverse von  $G$  in einer Umgebung von  $y_0$ .

**Satz 2.3.4** (Substitution).  $y(x)$  löst die Differentialgleichung  $y' = f(\frac{y}{x})$  zum Anfangswert  $y(x_0) = y_0$  genau dann, wenn  $z(x) := \frac{y(x)}{x}$  die Lösung ist von

$$z' = \frac{1}{x}(f(z) - z). \quad (12)$$

**Satz 2.3.5.** (Variation der Konstanten) Die Lösung der homogenen Gleichung  $y' = a(x)y$ ,  $y(x_0) = y^0$  ist

$$y(x) := y^0 \exp\left(\int_{x_0}^x a(t) dt\right). \quad (13)$$

Zur inhomogenen Gleichung  $y' = a(x)y + b(x)$ ,  $y(x_0) = y^0$  erhalten wir für  $A(x) := \int_{x_0}^x a(t) dt$  durch Variation der Konstanten die Lösung

$$y(x) = e^{A(x)} \left( y^0 + \int_{x_0}^x e^{-A(t)} b(t) dt \right). \quad (14)$$

Analog erhalten wir für ein System  $y' = A(x)y + b(x)$  gewöhnlicher Differentialgleichungen mit Fundamentalmatrix  $\Phi(x) = [y_1(x) | \cdots | y_k(x)]$  mit der Cramerschen Regel die Lösung

$$y(x) = \Phi(x) \left( \int_{x_0}^x \Phi^{-1}(t) b(t) dt \right) = \sum_{k=1}^n \left[ \int_{x_0}^x \frac{\det \Phi_k(t)}{\det \Phi(t)} dt \right] y_k(x) \quad (15)$$

wobei in  $\Phi_k(t)$  die  $k$ -te Spalte von  $\Phi(t)$  durch  $b(t)$  ersetzt ist.

## 2.4 Übungsaufgaben

**Aufgabe 2.4.1.** Gegeben seien die homogenen linearen Differentialgleichungen

$$u' = \frac{u}{x}, \quad v' = -\frac{x}{v}, \quad w' = \frac{x}{w}, \quad z' = -\frac{z}{x}$$

in  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$  mit (wohldefiniertem) Anfangswert  $c_0$  in  $x_0$ . Bestimmen Sie die Lösung auf möglichst unterschiedliche Weise. Skizzieren Sie insbesondere die Phasenräume.

**HINWEIS!** Beginnen Sie mit der Skizze der Phasenräume.

*Verwenden bei spielsweise nacheinander (12), Graphisches ablesen, (11) und (13).*

**Aufgabe 2.4.2.** Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = 2xy \quad \text{in,} \quad y(0) = \frac{1}{e} \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

mit dem Picard-Lindelöfschen Iterationsverfahren.

**Aufgabe 2.4.3.** Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für das System

$$y' = Ay, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

**HINWEIS!** Bestimme Eigenwerte, Eigen- und Hauptvektoren ([3], [4] oder [5]), berechne (7), bestimme (8).

*Das charakteristische Polynom  $\chi_A(\lambda)$  hat genau eine reelle Nullstelle.*

**Aufgabe 2.4.4.** Stelle ein reelles Fundamentalsystem zu

$$y^{(4)} - y = 0$$

sowie eine Fundamentalmatrix zum korrespondierenden System 1. Ordnung auf.

**HINWEIS!** System 1. Ordnung mit (4), Fundamentalsystem mit (5), Fundamentalmatrix mit (6).

*Wir erhalten  $\chi(\lambda) = (\lambda)^4 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)^3$ .*

**Aufgabe 2.4.5.** Seien

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

gegeben. Bestimme Sie die Fundamentalmatrix von  $A$  und löse dann mit (15) das inhomogene Problem  $y' = Ay + bx$ .

**HINWEIS!** Fundamentalmatrix mit Definition der Exponentialfunktion (3), besser aber mit Jordan-Normalform und (15)

*Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms  $\chi_A(\lambda)$  sind  $i, -i$ .*

**Aufgabe 2.4.6.** Ordnen sie die Phasenräume von  $y' = f(y)$  mit  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  wie in i) bis viii) den Graphiken A bis K in [Abbildung 21] zu.

$$\text{i)} \begin{bmatrix} y_1^2 \\ y_2^2/2 \end{bmatrix}$$

$$\text{iii)} \begin{bmatrix} -2y_1^2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{v)} \begin{bmatrix} -y_1 \\ -y_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{vii)} \begin{bmatrix} y_1 + y_2 + 1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{ii)} \begin{bmatrix} 0.3y_1 + y_2 \\ -y_1 + 0.3y_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{iv)} \begin{bmatrix} -y_1 - y_2 \\ -y_1 - y_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{vi)} \begin{bmatrix} y_1 + y_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{viii)} \begin{bmatrix} -2y_2 \\ 2y_1 \end{bmatrix}$$

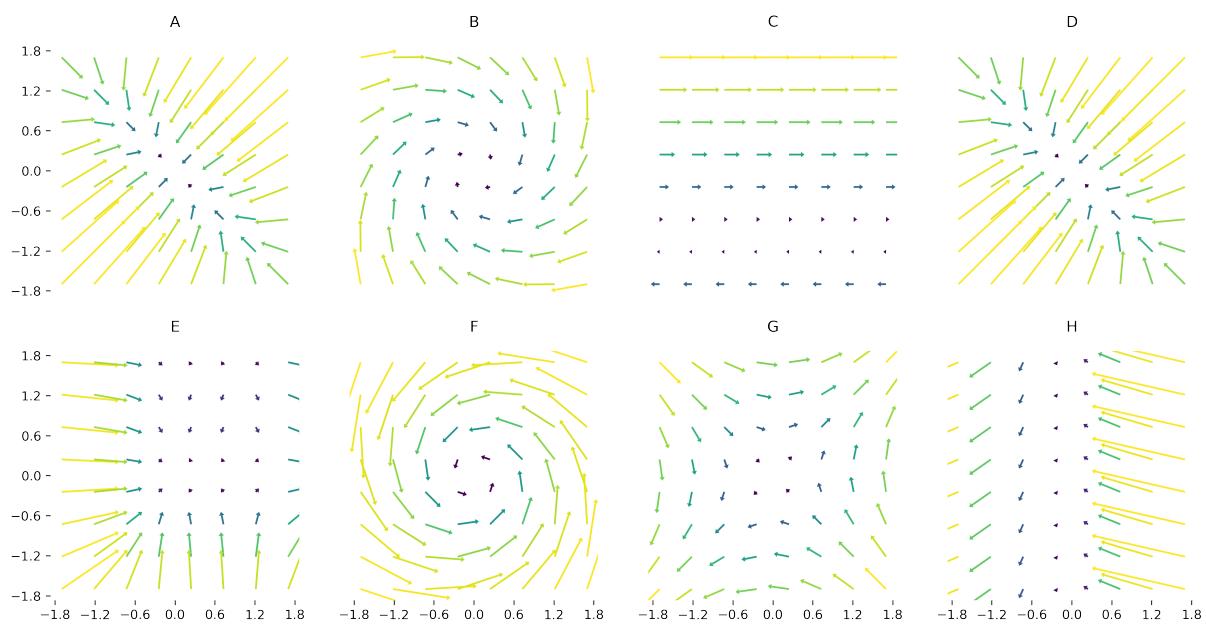


Abbildung 13: Phasenräume der Vektorfelder in Aufgabe 2.4.6.

## 2.5 Musterlösungen

**Abbildung 14:** Animation des Phasenräume gewöhnlicher Differentialgleichungen.

**Lösung 2.5.1** (Aufgabe 2.4.1). „ $u' = u/x$ “: Sei  $f(\frac{u}{x}) = \frac{u}{x}$  wie in (12), dann ist die Lösung von  $u' = \frac{u}{x}$  äquivalent zur Lösung von

$$z' = \frac{1}{x}(f(z) - z) = \frac{1}{x}(z - z) = 0.$$

Dann ist  $z$  konstant und einsetzen liefert  $u(x) = x \cdot z(x) = cx$  für  $c = c_0$ .

„ $v' = -x/v$ “: Wie in [Abbildung 14] ist der Phasenraum die Halbkreise mit Radius  $c = c_0$ , also

$$v(x) = \sqrt{c - x^2}.$$

„ $w' = x/w$ “: Mit Notation wie in (11) gilt für  $f(x) = x$  und  $g(y) = \frac{1}{y}$

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2}(x^2 - x_0^2), & G(y) &= \frac{1}{2}(y^2 - c_0^2), & G^{-1}(y) &= \sqrt{2y + c_0^2}, \\ \Rightarrow w(x) &= \sqrt{2 \cdot \frac{1}{2}(x^2 - x_0^2) + c_0^2} = \sqrt{x^2 + c}, & \text{für } c &:= c_0^2 - x_0^2. \end{aligned}$$

„ $z' = -z/x$ “: Mit Notation wie in (13) gilt für  $a(x) = -\frac{1}{x}$

$$\begin{aligned} A(x) &= \int_{x_0}^x \frac{-1}{t} dt = -\log(x) + \log(x_0) \\ \Rightarrow z(x) &= c_0 e^{\log(x_0) - \log(x)} = \frac{c}{x}, & \text{für } c &:= c_0 e^{\log(x_0)}. \end{aligned}$$

Zuletzt lassen sich die Differentialgleichung auch mit einem Computeralgebrabrasystem lösen [Abbildung 15].

□

```
In [1]: ┏ ┏ from sympy import *

Löse die Differentialgleichungen:    u' =  $\frac{u}{x}$ ,    v' =  $-\frac{x}{v}$ ,    w' =  $\frac{x}{w}$ ,    z' =  $-\frac{z}{x}$ 

In [2]: ┏ ┏ u = Function('u'); v = Function('v'); w = Function('w'); z = Function('z'); # functions
         x = symbols('x', real = True) # variables
         dgl_u = Eq(u(x).diff(x)-u(x)/x,0); dgl_v = Eq(v(x).diff(x)+x/v(x),0); # differential equations
         dgl_w = Eq(w(x).diff(x)-w(x),0); dgl_z = Eq(z(x).diff(x)+z(x)/x,0); # differential equations
         sol_u = dsolve(dgl_u,u(x)); sol_v = dsolve(dgl_v,v(x)); sol_w = dsolve(dgl_w,w(x)); sol_z = dsolve(dgl_z,z(x)); # solutions

In [3]: ┏ ┏ for solution in [sol_u, sol_v[1], sol_w[1], sol_z]: # display solutions
         display(solution)
```

$$\begin{aligned} u(x) &= C_1 x \\ v(x) &= \sqrt{C_1 - x^2} \\ w(x) &= \sqrt{C_1 + x^2} \\ z(x) &= \frac{C_1}{x} \end{aligned}$$

**Abbildung 15:** Lösung der Differentialgleichung aus Aufgabe 2.4.1 in Python.

**Lösung 2.5.2** (Aufgabe 2.4.2). Für festes  $x$  respektive  $y$  ist  $f(x, \cdot)$ , respektive  $f(\cdot, y)$  linear und damit Lipschitzstetig. Wir zeigen induktiv

$$y_k(x) = y^0 + 2y^0 \int_0^x t \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j}}{j!} dt = y^0 \sum_{j=0}^k \frac{x^{2j}}{j!}$$

und mit Satz 2.3.2 sowie der Definition der  $e$ -Funktion konvergiert  $y_k(x)$  gleichmäßig gegen  $\frac{1}{e} e^{x^2}$  in einer Umgebung um 0 [Abbildung 16].  $\square$

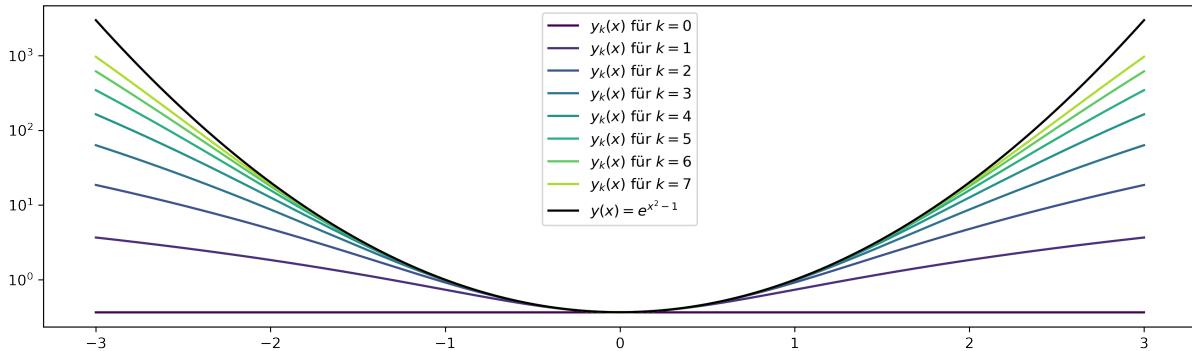


Abbildung 16: Picard-Lindelöfsche Iterationen an die Lösung von  $y' = 2xy$ .

**Lösung 2.5.3** (Aufgabe 2.4.3). Zur Berechnung der Jordan-Normalform siehe die praktische Liste in [3], das Kochrezept [5] oder knapp und übersichtlich [4]. Wir bestimmen die Eigenwerte, Eigen- und Hauptvektoren. Aus dem charakteristischen Polynom

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & -2 & 1 \\ 0 & -1 - \lambda & -1 \\ 0 & 4 & 3 - \lambda \end{bmatrix} = (\lambda - 1)^3$$

erhalten wir den Eigenwert  $\lambda_1 = 1$  mit dreifacher algebraischer Vielfachheit. Zum Kern [1] von

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[-1]{\left[ \begin{smallmatrix} \square & + & \cdot \frac{1}{2} \\ \square & + & \end{smallmatrix} \right]} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\left[ \begin{smallmatrix} \square & + & -\frac{1}{2} \\ \square & + & \end{smallmatrix} \right]} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

erhalten wir für  $b_1 = (1, 0, 0)^T$  die Basis  $\{b_1\}$  des Eigenraums mit geometrischer Vielfachheit 1 zum Eigenwert  $\lambda_1 = 1$ . Da die geometrische Vielfachheit „1“ kleiner ist, also die algebraische Vielfachheit „3“, bestimmen wir noch weiter den Kern von

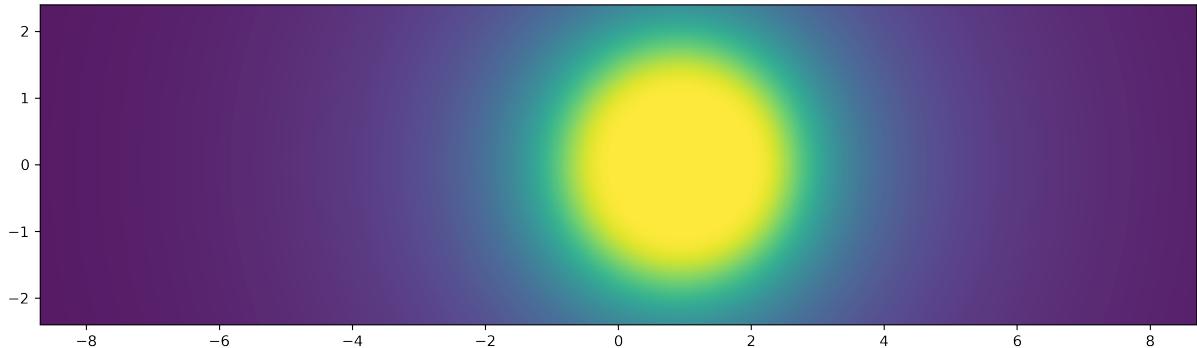
$$(A - I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 4+4 & 2+2 \\ 0 & 4-4 & 2-2 \\ 0 & -4+4 & -4+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\left[ \begin{smallmatrix} \square & + & \cdot \frac{1}{8} \\ \square & + & \end{smallmatrix} \right]} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

und erhalten für  $b_2 = (0, -1, 2)^T$  eine Basis  $\{b_1, b_2\}$  des Hauptaumrs zweiter Stufe. Da  $(I - A)^3 = 0$  wähle  $v_3$  linear unabhängig von  $\{b_1, b_2\}$ , z.B.  $v_3 = (0, 0, 1)^T$  und bestimme die Hauptvektorkette

$$(A - I) \cdot v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} =: v_2, \quad (A - I)^2 \cdot v_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =: v_1.$$

Wir setzen in Gleichung (8) ein und erhalten Fundamentalmatrix  $e^x \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \end{bmatrix}$  für

$$y_1(x) = v_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y_2(x) = xv_1 + v_2 = \begin{bmatrix} 4x+1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad y_3(x) = \frac{x^2}{2}v_1 + xv_2 + v_3 = \begin{bmatrix} 2x^2+x \\ -x \\ 2x+1 \end{bmatrix}.$$



**Abbildung 17:** Plot von  $\mathbb{C} \ni z \mapsto \|(z \cdot I - A)^{-1}\|$  für  $A$  aus Aufgabe 2.4.3. Die Sonne markiert den Eigenwert bei  $\lambda_1 = 1$ .

**Lösung 2.5.4** (Aufgabe 2.4.4). Wir bestimmen das korrespondierende System erster Ordnung  $Y'(x) = A \cdot Y(x)$  für

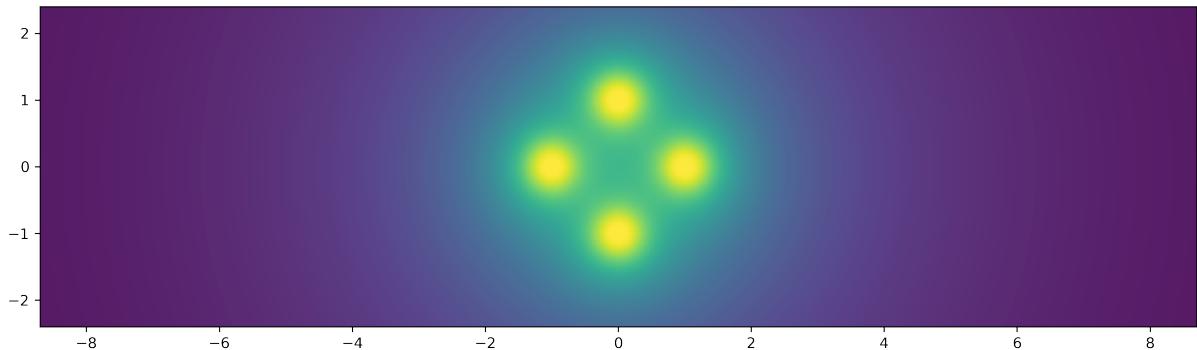
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

wie in (4). Mit Entwicklung nach der ersten Spalte und der dritten binomischen Formel folgt für das charakteristische Polynom

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -\lambda \cdot \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \end{bmatrix} = -\lambda(-\lambda)^3 - 1$$

und mit der dritten binomischen Formel

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^4 - 1 = (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 - 1) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - i)(\lambda + i).$$



**Abbildung 18:** Plot von  $\mathbb{C} \ni z \mapsto \|(z \cdot I - A)^{-1}\|$  für  $A$  aus Aufgabe 2.4.4. Die Sonnen markieren die Eigenwerte in den vierten Einheitswurzeln  $e^{i \frac{k}{2\pi}}$  für  $k = 1, \dots, 4$ .

Rechnen wir die Fundamentalsmatrix zum System erster Ordnung „zu Fuß“ aus. Dazu bestimmen wir nacheinander den Kern  $\text{Kern}(A - \lambda)$  zu den Eigenwerten  $\lambda = 1, -1, i, -i$  mit dem Gauss-Jordan Verfahren wie in [1]. Dabei wählen wir (wenn möglich) Lösungsvektoren mit erster Komponente 1 um später leicht

in (6) einsetzen zu können.

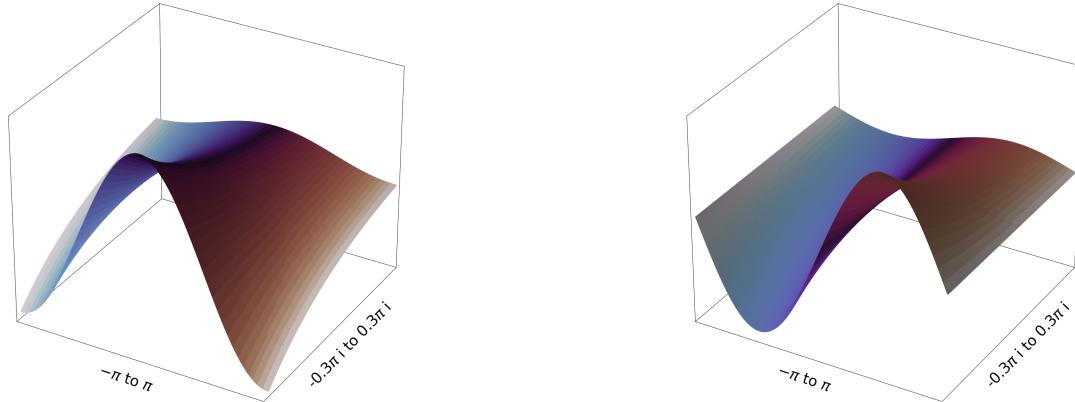
$$\begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{cccc} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{\quad} \left[ \begin{array}{cccc} & & & + \\ & & & + \\ & & & + \\ & & & + \end{array} \right] \xrightarrow{\cdot(-1)} \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{\cdot(-1)} b_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\quad} \left[ \begin{array}{cccc} & & & + \\ & & & + \\ & & & - \\ & & & - \end{array} \right] \xrightarrow{\cdot(-1)} \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{\quad} b_2 := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\
 \left[ \begin{array}{cccc} -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -i \end{array} \right] \xrightarrow{-i} \left[ \begin{array}{cccc} & & & + \\ & & & + \\ & & & -i \\ & & & -i \end{array} \right] \xrightarrow{\cdot(i)} \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{\cdot(i)} b_3 := \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{bmatrix} \\
 \left[ \begin{array}{cccc} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 \\ 1 & 0 & 0 & i \end{array} \right] \xrightarrow{i} \left[ \begin{array}{cccc} & & & + \\ & & & + \\ & & & -i \\ & & & i \end{array} \right] \xrightarrow{\cdot(-i)} \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{\cdot(-i)} b_4 := \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Damit erhalten wir für  $y_i(x) := e^{\lambda_i x} b_i$  die Fundamentalmatrix  $[y_1(x) \ \dots \ y_4(x)]$ . Mit (5) erhalten wir ein komplexes Fundamentalsystem von  $y^{(4)} - y = 0$  schon direkt aus den Einheitsvektoren

$$y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = e^{-x}, \quad y_3(x) = e^{ix}, \quad y_4(x) = e^{-ix}.$$

$z \mapsto \operatorname{Re}(e^{iz})$

$z \mapsto \operatorname{Im}(e^{iz})$



**Abbildung 19:** Plot von  $z \mapsto e^{iz}$ . Wir erkennen den Kosinus im Realteil und den Sinus im Imaginärteil. Die Farbe entspricht dem Winkel  $\arg(z)$ .

Wir rechnen leicht nach, dass wie in (6) behauptet

$$\begin{bmatrix} y_1(x) \\ y'_1(x) \\ y''_1(x) \\ y'''_1(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^x \\ e^x \\ e^x \\ e^x \end{bmatrix} = e^{\lambda_1 x} \cdot b_1, \quad \dots \quad \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y'_1(x) \\ y''_1(x) \\ y'''_1(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-ix} \\ -ie^{-ix} \\ -e^{-ix} \\ ie^{-ix} \end{bmatrix} = e^{\lambda_4 x} \cdot b_4,$$

womit die Behauptung in (6) mit (8) übereinstimmt. Zuletzt erhalten wir ein reelles Fundamentalsystem von  $y^{(4)} - y = 0$ , indem wir das Paar  $e^{ix}, e^{-ix}$  durch

$$\operatorname{Re}(e^{ix}) = \operatorname{Re}(\cos(x) + i \sin(x)) = \cos(x), \quad \text{sowie} \quad \operatorname{Im}(e^{ix}) = \sin(x)$$

ersetzen [Abbildung 19]. Zusammen erhalten wir das reelle Fundamentalsystem  $\{e^x, e^{-x}, \cos(x), \sin(x)\}$ .

**Abbildung 20:** Bild des Gitters unter der Transformation der Drehmatrix.

**Lösung 2.5.5** (Aufgabe 2.4.5). In der Regel bestimmen wir die Reihe  $e^{xA}$  nicht „zu Fuß“ über die Definition in (3), eine Ausnahme sind nilpotente oder periodische Matrizen. Wegen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gilt  $A^5 = A$  und für  $A^n := (a_{ij,n})_{i,j=1,2}$  und  $n \in \mathbb{N}$  erhalten wir induktiv

$$a_{11,n} = a_{22,n} = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} & n \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad a_{21} = -a_{12} = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} & n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Wir erinnern uns an die Reihendarstellung

$$\cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

von Sinus und Kosinus und Einsetzen liefert die Fundamentalsmatrix

$$e^{xA} = \begin{bmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{bmatrix} =: \Phi(x).$$

Alternativ berechnen ein komplexes Fundamentalsystem über das Standartverfahren, also die Jordan-Normalform und (15). Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms  $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$  liefern die Eigenwerte  $i, -i$ . Da wir an einem reellen Fundamentalsystem interessiert sind, berechnen nur eine Basis eines Eigenraums, z.B. zum Eigenvektor  $\lambda_1 := i$

$$A - iI = \begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} \xrightarrow[\leftarrow \cdot i]{+} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\cdot(-i)} b_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}.$$

Die gesuchte reelle Basis des Fundamentalsystems lesen wir aus Real- und Imaginärteil

$$e^{\lambda_1 x} b_1 = \begin{bmatrix} \cos(x) + i \sin(x) \\ i \cos(x) + i^2 \sin(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x) \\ -\sin(x) \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} \sin(x) \\ \cos(x) \end{bmatrix}$$

ab. Damit stimmt unsere Fundamentalsmatrix aus der Definition in Gleichung (3) mit der aus Gleichung (7) wie erwartet überein (jed nach Wahl von  $b_1$  erst nach Vertauschung und Multiplikation der Spalten mit  $1, 1, i, -i$ ).

Für „Variation der Konstanten“ raten wir wegen  $\sin^2(x) + \cos^2(x)$  die Inverse

$$\Phi^{-1}(x) = \begin{bmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{bmatrix}$$

oder wir rechnen die Inverse direkt aus. Für festes  $x$  und  $c := \cos(x)$ ,  $s := \sin(x)$  nehmen wir an, dass<sup>11</sup>  $c, s \neq 0$ , dann gilt wegen  $c^2 + s^2 = 1$  insbesondere  $c^2 = 1 - s^2$  und

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cc|cc} c & s & 1 & 0 \\ -s & c & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[\cdot s]{\square_{-1}} \rightsquigarrow \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & c & -s \\ -s^2 & cs & 0 & s \end{array} \right] \xrightarrow{\square_{+} \square_{+}^{-c^2}} \\ & \rightsquigarrow \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & c & -s \\ 0 & cs & c(1-c^2) & sc^2 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & c & -s \\ 0 & cs & cs^2 & sc^2 \end{array} \right] \xrightarrow[\cdot \frac{1}{cs}]{\square_{+}} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & c & -s \\ 0 & 1 & s & c \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Mit der rechten Seite von (15) könnten wir auch ganz auf das Inverse  $\Phi^{-1}(x)$  verzichten, da

$$\frac{\det \Phi_1(x)}{\det \Phi(x)} = x \cos(x), \quad \frac{\det \Phi_2(x)}{\det \Phi(x)} = x \sin(x).$$

Der Zusammenhang ist, dass wir in der Mitte von (15), für einen komfortablen Anfangswert  $x_0 := 0$  das Integral

$$\int_0^x \Phi^{-1}(t)b(t) dt = \int_0^x \begin{bmatrix} t \cos(t) \\ t \sin(t) \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} t \sin(t) \\ -t \cos(t) \end{bmatrix} \Big|_0^x = \begin{bmatrix} x \sin(x) + \cos(x) - 1 \\ \sin(x) - x \cos(x) \end{bmatrix}.$$

ausrechnen, womit wir die spezielle Lösung

$$y_{sp}(x) = \begin{bmatrix} x \sin(x) \cos(x) + \cos^2(x) - \cos(x) + \sin^2(x) - x \cos(x) \sin(x) \\ -x \sin^2(x) - \cos(x) \sin(x) + \sin(x) + \sin(x) \cos(x) - x \cos^2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos(x) \\ -\sin(x) \end{bmatrix}.$$

erhalten. Der Lösungsraum setzt sich aus der Summe einer speziellen Lösung mit dem Lösungsraum der homogenen Differentialgleichung zusammen. Da  $(\cos(x), -\sin(x))^T$  bereits in der homogenen Lösung steckt, ist der Lösungsraum  $\mathcal{L}_I$  des inhomogenen Problems mit Satz 2.1.3.ii) gegeben durch:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -x \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} \cos(x) \\ -\sin(x) \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} \sin(x) \\ \cos(x) \end{bmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}. \quad \square$$

---

<sup>11</sup>Der Fall  $s = 0$  ist trivial und  $c = 0$  ist eine einfache Übungsaufgabe.

**Lösung 2.5.6** (Aufgabe 2.4.6). Betrachte die Zuordnung der Graphiken A bis H zu den Vektorfeldern  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  der gewöhnlichen autonomen Differentialgleichung  $y' = f(y)$ , wobei  $f(y)$  wie folgt gegeben ist:

$$E: \begin{bmatrix} y_1^2 \\ y_2^2/2 \end{bmatrix}$$

$$H: \begin{bmatrix} -2y_1^2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}$$

$$D: \begin{bmatrix} -y_1 \\ -y_2 \end{bmatrix}$$

$$C: \begin{bmatrix} y_1 + y_2 + 1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$B: \begin{bmatrix} 0.3y_1 + y_2 \\ -y_1 + 0.3y_2 \end{bmatrix}$$

$$A: \begin{bmatrix} -y_1 - y_2 \\ -y_1 - y_2 \end{bmatrix}$$

$$G: \begin{bmatrix} y_1 + y_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}$$

$$F: \begin{bmatrix} -2y_2 \\ 2y_1 \end{bmatrix}$$

Die Regel zur Konstruktion der Graphik ist wie folgt:

**FALSCH:** Zeichne einen Pfeil von  $y \in \mathbb{R}^2$  nach  $\lambda_y Ay \in \mathbb{R}^2$  [Abbildung 21]

**RICHTIG:** Zeichne einen Pfeil von  $y \in \mathbb{R}^2$  nach  $y + \lambda_y Ay \in \mathbb{R}^2$  [Abbildung 22].

Dabei hängt der Skalar  $\lambda_y \in \mathbb{R}_+$  monoton von der Länge von  $y \in \mathbb{R}^2$  ab, z.B.  $\lambda_y := \arctan \|y\|_2$ .

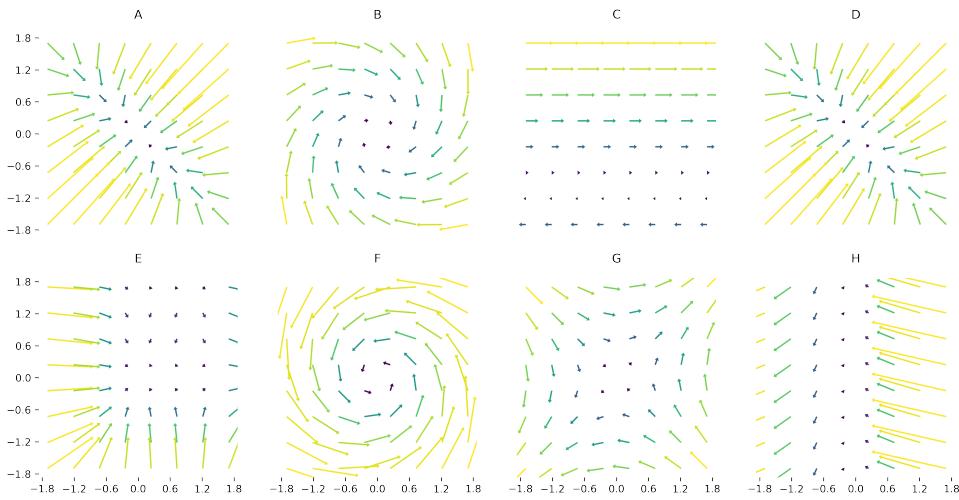


Abbildung 21: **FALSCH:** Pfeil von  $y \xrightarrow{\text{nach}} \lambda_y Ay$ .

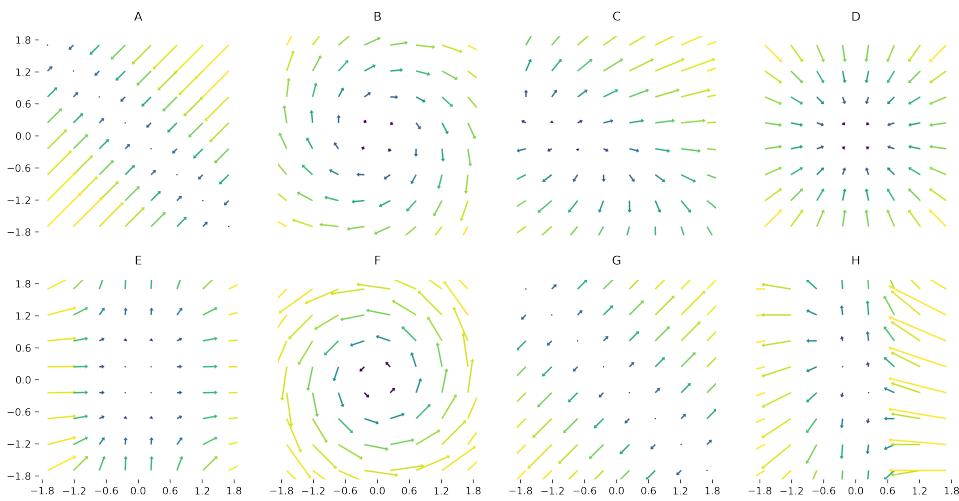


Abbildung 22: **KORREKT:** Pfeil von  $y \xrightarrow{\text{nach}} y + \lambda_y Ay$ .

## 3 Probeklausur

### 3.1 Aufgaben

**Aufgabe 3.1.1** (2 + 4 Punkte). Sei  $a, x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}$  und  $p \in \mathbb{N}$  mit  $p \geq 2$ . Stellen Sie Gradient und Hessematrix zu folgenden Funktionen auf:

i)  $x \mapsto \frac{1}{2}(b - a^T x)^2$

ii)  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \|x - y\|_p^p$

**Aufgabe 3.1.2** (6 Punkte). Seien

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad y^0 := \begin{bmatrix} 0 \\ \pi \end{bmatrix}, \quad x_0 := -1$$

gegeben. Bestimme Sie ein Fundamentalsystem zum skalaren linearen Differentialgleichungssystem  $y' = Ay$  und lösen Sie dann das Anfangswertproblem  $y(x_0) = y^0$ .

**Aufgabe 3.1.3** (3 Punkte). Geben Sie den Satz über implizite Funktionen genau an. Bestimmen Sie auch die Jakobi-Matrix der impliziten Funktion.

**Aufgabe 3.1.4** (5 + 1 Punkte). Sei

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + \frac{y^2}{2} \leq 0\}.$$

gegeben. Bestimme die Extrema von  $F(x, y) := y - x$  unter der Nebenbedingung  $(x, y) \in M$  und skizzieren Sie die Situation.

**Aufgabe 3.1.5** (Jeweils 1 Punkt). Ordnen sie die Phasenräume von  $y' = f(y)$  mit  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  wie in i) bis viii) den Graphiken A bis K in [Abbildung 23] zu.

i)  $\begin{bmatrix} y_1^2/2 \\ y_2^2 \end{bmatrix}$

iii)  $\begin{bmatrix} y_2 + y_2^2/3 + 0.4 \\ y_1^2/2 + y_2 + 1 \end{bmatrix}$

v)  $\begin{bmatrix} -1.2y_2 \\ 0 \end{bmatrix}$

vii)  $\begin{bmatrix} -0.1y_2 \\ -0.9y_1 \end{bmatrix}$

ii)  $\begin{bmatrix} y_1 - y_2 \\ -y_1 + y_2 \end{bmatrix}$

iv)  $\begin{bmatrix} 2y_1 + 1/y_2 \\ 0.2y_1 + 0.3y_2 \end{bmatrix}$

vi)  $\begin{bmatrix} y_1 \\ -1.5y_2 \end{bmatrix}$

viii)  $\begin{bmatrix} -1.2y_2 \\ 1.2y_1 \end{bmatrix}$

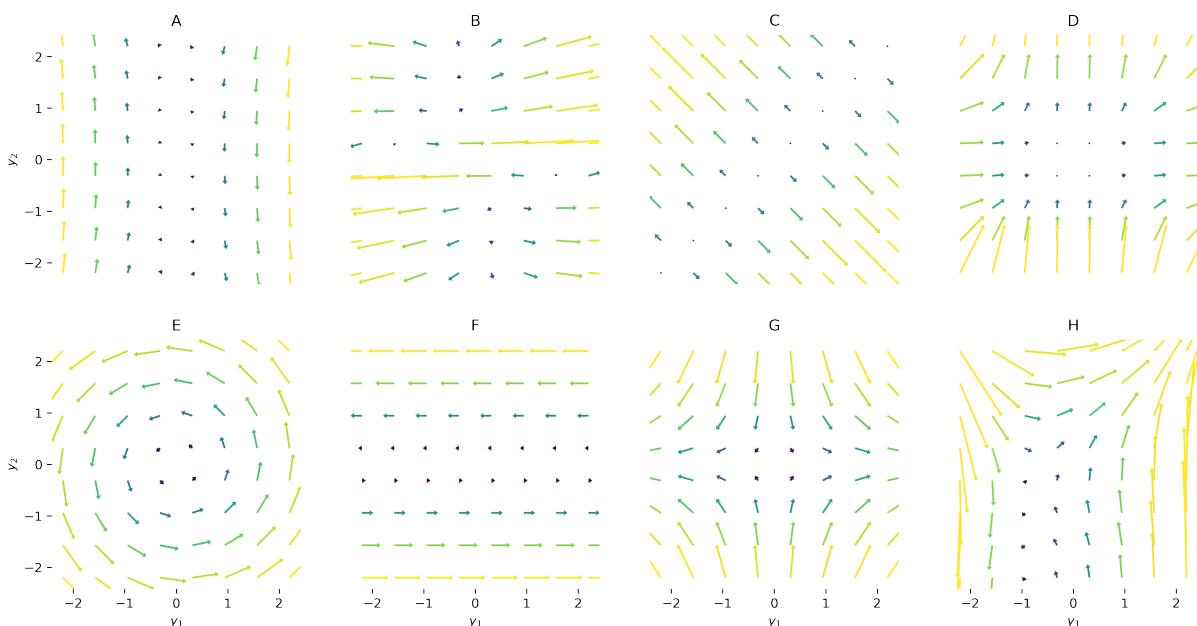


Abbildung 23: Phasenräume der Vektorfelder in Aufgabe 3.1.5.

**Aufgabe 3.1.6** (4 + 2 Punkte). Bestimmen Sie das Integral

$$\int_0^a x^2 \cos x \, dx.$$

Beachten Sie hierzu die Hilfsfunktion

$$F(y) = - \int_0^2 \cos(xy) \, dx.$$

Zeigen Sie insbesondere, dass  $F''(1) = \int_0^a x^2 \cos x \, dx$ .

### 3.2 Lösungsansätze

**Lösung 3.2.1** (Aufgabe 3.1.1).

**Funktionsvorschrift   Gradient      Hessematrix**

$$x \mapsto \frac{1}{2}(b - a^T x)^2 \quad -(b - a^T x)a \quad aa^T$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \|x - y\|_p^p \quad p \begin{bmatrix} (x_1 - y_1)^{p-1} \\ (x_2 - y_2)^{p-1} \\ \vdots \\ -(x_1 - y_1)^{p-1} \\ -(x_2 - y_2)^{p-1} \\ \vdots \\ -(x_n - y_n)^{p-1} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} Z_{x,y,p} & -Z_{x,y,p} \\ -Z_{x,y,p} & Z_{x,y,p} \end{bmatrix}$$

Wobei

$$Z_{x,y,p} := p(p-1) \cdot \begin{bmatrix} (x_1 - y_1)^{p-2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (x_2 - y_2)^{p-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (x_n - y_n)^{p-2} \end{bmatrix},$$

sowie nach Definition

$$aa^T = \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & \dots & a_1 a_n \\ a_2 a_1 & a_2^2 & \dots & a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n a_1 & a_n a_2 & \dots & a_n^2 \end{bmatrix}. \quad \square$$

**Lösung 3.2.2** (Aufgabe 3.1.2). Aus den Nullstellen des charakteristischen Polynoms  $\chi_A(\lambda) = 1 - \lambda^2$  bei  $\pm 1$  mit zugehörigen (geratenen) Eigenvektoren  $(1, 1)^T$  und  $(1, -1)^T$  lesen wir das Fundamentalsystem

$$\mathcal{L} = \left\{ \lambda e^x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu e^{-x} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

ab. Für  $\lambda := (\pi e)/2$  und  $\mu := \pi/(2e)$  ist die Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch:

$$y(x) := \frac{\pi}{2} \left( e^{x+1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - e^{-(x+1)} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right). \quad \square$$

**Lösung 3.2.3** (Aufgabe 3.1.3). Vergleiche Satz 1.5.2.

**Lösung 3.2.4** (Aufgabe 3.1.4). Die Voraussetzungen für Satz 1.6.2 sind erfüllt und es existiert  $\lambda \in \mathbb{R}$  sodass

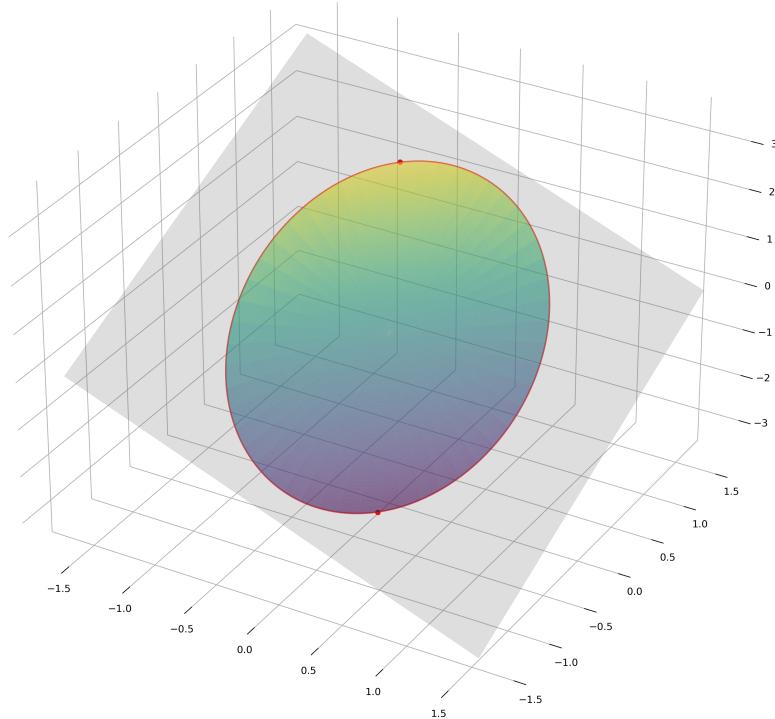
$$\nabla F(x, y) + \lambda \cdot \nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 2x \\ y \end{bmatrix} = 0.$$

Sei  $x, y \neq 0$ , dann gilt  $-2x = y$  und aus den Nebenbedingungen erhalten wir die Extremalkandidaten  $x_{1,2} = \pm 1/\sqrt{3}$ ,  $y_{1,2} = \mp 2/\sqrt{3}$ . Für diese erhalten wir mit Einsetzen in  $F$  die Funktionswerte

$$F(x_{1,2}, y_{1,2}) = \mp \frac{2}{\sqrt{3}} \mp \frac{1}{\sqrt{3}} = \mp 3\sqrt{3}.$$

Für  $x_{3,4} = 0$  erhalten wir aus den Nebenbedingungen den Extremalkandidaten  $y_{3,4} = \pm\sqrt{2}$  und für  $y_{5,6} = 0$  dann  $x_{5,6} = \pm 1$ . Einsetzen in  $F$  zeigt, dass es sich dabei um keine Extrema handelt.

Ferner liegen die Extrema auf dem Rand, da  $\nabla F(x, y) \neq 0$  für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Damit sind liegen Minimum und Maximum bei  $\mp 3\sqrt{3}$  für  $(x, y) = (\pm 1/\sqrt{3}, \mp 2/\sqrt{3})$ .  $\square$



**Abbildung 24:** Bild des Quaders mit Seitenlänge  $\sqrt{2} + 0.2$  unter der Abbildung  $\|y - x\|_2$  in Grau, sowie unter der Einschränkung auf  $x^2 + y^2/2 \leq 1$  in Farbe mit roter Randbedingung. Die beiden Extremwerte sind mit einem roten Punkt markiert.

**Lösung 3.2.5** (Aufgabe 3.1.5). Die Zuordnung zwischen Graphik und Vektorfeld ist wie folgt:

$$\begin{array}{llll} \text{D: } \begin{bmatrix} y_1^2/2 \\ y_2^2 \end{bmatrix} & \text{H: } \begin{bmatrix} y_2 + y_2^2/3 + 0.4 \\ y_1^2/2 + y_2 + 1 \end{bmatrix} & \text{F: } \begin{bmatrix} -1.2y_2 \\ 0 \end{bmatrix} & \text{A: } \begin{bmatrix} -0.1y_2 \\ -0.9y_1 \end{bmatrix} \\ \text{C: } \begin{bmatrix} y_1 - y_2 \\ -y_1 + y_2 \end{bmatrix} & \text{B: } \begin{bmatrix} 2y_1 + 1/y_2 \\ 0.2y_1 + 0.3y_2 \end{bmatrix} & \text{G: } \begin{bmatrix} y_1 \\ -1.5y_2 \end{bmatrix} & \text{E: } \begin{bmatrix} -1.2y_2 \\ 1.2y_1 \end{bmatrix} \end{array}$$

**Lösung 3.2.6** (Aufgabe 3.1.6). Nach zweifacher partieller Integration können wir nach dem Integral auflösen. Untersuchen wir statt dessen die Integration mit Hilfe von

$$F(y) := - \int_0^a \cos(xy) dx.$$

Mit Satz 1.7.1 dürfen wir zweifach unterm Integral nach  $y$  differenzieren und erhalten mit der Kettenregel

$$\frac{d^2}{dy^2} F(y) = - \int_0^a \frac{d^2}{dy^2} \cos(xy) dx = \int_0^a x^2 \cos(xy) dx \quad \Rightarrow \quad \int_0^a x^2 \cos(x) dx = F''(1).$$

Andererseits gilt mit Integration  $F(y) = -\sin(ay)/y$  und nach zweifachem differenzieren

$$\frac{d^2}{dy^2} \frac{-\sin(ay)}{y} = \frac{d}{dy} \left( -\frac{a \cos(ay)}{y} + \frac{\sin(ay)}{y^2} \right) = \frac{a^2 \sin(ay)}{y} + 2 \cdot \frac{a \cos(ay)}{y^2} - 2 \frac{\sin(ay)}{y^3}$$

also  $F''(1) = (a^2 - 2) \sin(a) + 2a \cos(a)$ .  $\square$

## Literatur

- [1] Erné, Marcel (2008). *Lineare Gleichungssysteme*. Kapitel 4.3 in *Mathematik I für Bauingenieure*. [http://www2.iazd.uni-hannover.de/erne/Mathematik1/dateien/maple/MB\\_4\\_3.html](http://www2.iazd.uni-hannover.de/erne/Mathematik1/dateien/maple/MB_4_3.html) (05.02.2021).
- [2] Forster, Otto (2017). *Differentialrechnung im R<sup>n</sup>, gewöhnliche Differentialgleichungen*. 11. erweiterte Auflage. Springer Fachmedien Wiesbaden.  
*Lineare Gleichungssysteme*. Kapitel 4.3 in *Mathematik I für Bauingenieure*. [http://www2.iazd.uni-hannover.de/erne/Mathematik1/dateien/maple/MB\\_4\\_3.html](http://www2.iazd.uni-hannover.de/erne/Mathematik1/dateien/maple/MB_4_3.html) (05.02.2021).
- [3] Furlan, Peter (1995): *Eigenwerte und Eigenvektoren*. In: *Das gelbe Rechenbuch*, S 101 - 112. <http://www.das-gelbe-rechenbuch.de/download/Eigenwerte.pdf> (04.02.2021).
- [4] Potpara, Tibor Djurica (2013): *How to calculate Jordan's normal form (the hard way)*. <https://ojdip.net/2013/06/how-to-calculate-jordans-normal-form-the-hard-way/> (05.02.2021).
- [5] Winkler, David (2011): *Kochen mit Jordan*. <https://www.danielwinkler.de/la/jnfkochrezept.pdf> (04.02.2021).