1 Probeklausur

1.1 Aufgaben

Aufgabe 1.1.1 (2 + 4 Punkte)**.** Sei $a, b, x, y \in \mathbb{R}^n$ und $' \in \mathbb{N}$ mit $p \geq 2$. Stellen Sie Gradient und Hessematrix zu folgenden Funktionen auf:

i) $x \mapsto \frac{1}{2}(b - a^T x)^2$

ii) $(x, y)^T \mapsto ||x - y||_p^p$

Aufgabe 1.1.2 (6 Punkte)**.** Seien

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad y^0 := \begin{bmatrix} 0 \\ \pi \end{bmatrix}, \qquad x_0 := -1$$

gegeben. Bestimme Sie ein Fundamentalsystem zum skalaren linearen Differentialgleichungssystem $y' = Ay$ und lösen Sie dann das Anfangswertproblem $y(x_0) = y^0$.

Aufgabe 1.1.3 (3 Punkte)**.** Geben Sie den Satz über implizite Funktionen genau an. Bestimmen Sie auch die Jakobi-Matrix der impliziten Funktion.

Aufgabe 1.1.4 (5 + 1 Punkte)**.** Sei

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + \frac{y^2}{2} \leq 0\}.$$

gegeben. Bestimme die Extrema von $F(x, y) := y - x$ unter der Nebenbedingung $(x, y) \in M$ und skizzieren Sie die Situation.

Aufgabe 1.1.5 (Jeweils 1 Punkt)**.** Ordnen sie die Phasenräume von $y' = f(y)$ mit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wie in *i)* bis *viii)* den Graphiken A bis K in [Abbildung 1] zu.

i) $\begin{bmatrix} y_1^2/2 \\ y_2^2 \end{bmatrix}$

ii) $\begin{bmatrix} y_1 - y_2 \\ -y_1 + y_2 \end{bmatrix}$

iii) $\begin{bmatrix} y_2 + y_2^2/3 + 0.4 \\ y_1^2/2 + y_2 + 1 \end{bmatrix}$

iv) $\begin{bmatrix} 2y_1 + 1/y_2 \\ 0.2y_1 + 0.3y_2 \end{bmatrix}$

v) $\begin{bmatrix} -1.2y_2 \\ 0 \end{bmatrix}$

vi) $\begin{bmatrix} y_1 \\ -1.5y_2 \end{bmatrix}$

vii) $\begin{bmatrix} -0.1y_2 \\ -0.9y_1 \end{bmatrix}$

viii) $\begin{bmatrix} -1.2y_2 \\ 1.2y_1 \end{bmatrix}$

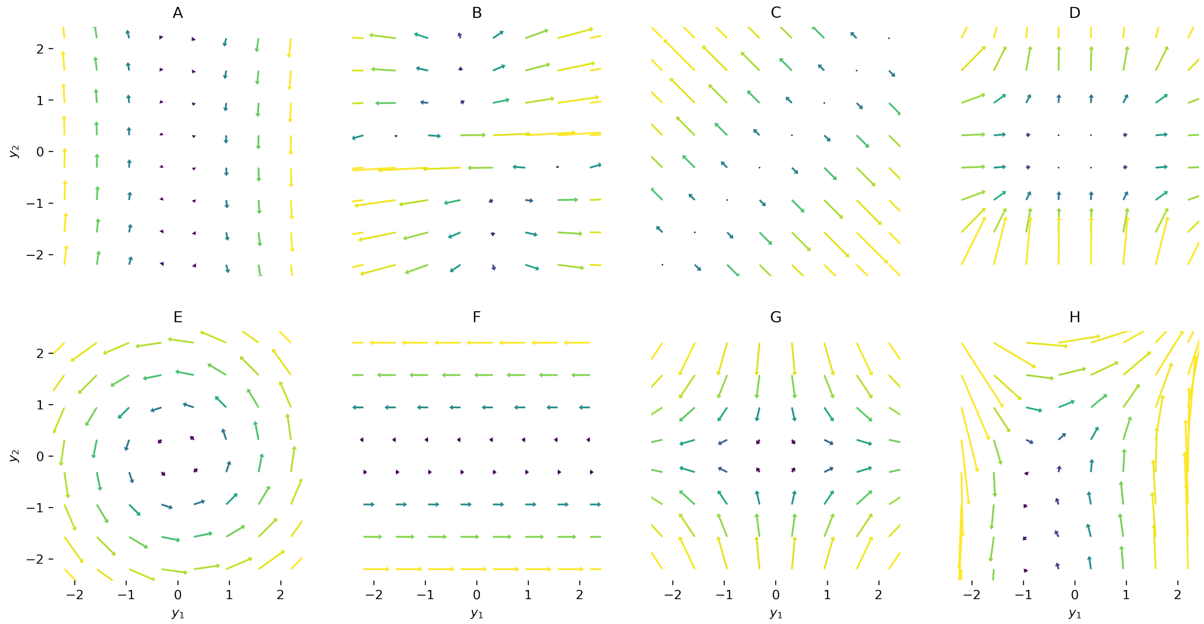

Abbildung 1: Phasenräume der Vektorfelder in Aufgabe 1.1.5.

Aufgabe 1.1.6 (4 + 2 Punkte)**.** Bestimmen Sie das Integral

$$\int_0^a x^2 \cos x \, \mathrm{d}x.$$

Beachten Sie hierzu die Hilfsfunktion

$$F(y) = -\int_0^2 \cos(xy) \, \mathrm{d}x.$$

Zeigen Sie insbesondere, dass $F''(1) = \int_0^a x^2 \cos x \, \mathrm{d}x$.