

HEINRICH-HEINE-UNIVERSITÄT DÜSSELDORF
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK

KURSMATERIAL

BEGLEITEND ZUM TUTORIUM

Miniskript zur Analysis II

Inhaltsverzeichnis

1	Differential- und Integralrechnung im \mathbb{R}^n	1
1.1	Grundlagen	1
1.2	Totale Differenzierbarkeit	3
1.3	Satz von Taylor	4
1.4	Lokale Extrema	4
1.5	Satz über implizite Funktionen	5
1.6	Minimierung unter Nebenbedingungen	5
1.7	Parameterabhängige Integrale	6

von Montag, 12. September 2022
bis Freitag, 16. September 2022

Kursleitung:
Jonathan Kaspar BUSSE

Das vorliegende Miniskript entsteht im Rahmen des Tutoriums zur Analysis II, zum Ende des Sommersemesters 2021/2022 an der Heinrich Heine Universität Düsseldorf. Inhaltlich ist es an [2] orientiert, viele Schreibweisen kommen von Wikipedia und sind mit monospace verlinkt.

1 Differential- und Integralrechnung im \mathbb{R}^n

1.1 Grundlagen

Definition 1.1.1 (Metrik). Eine Abbildung $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Metrik auf einer Menge X wenn für alle $x, y, z \in X$ gilt:

- i) $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$ (Definitheit).
- ii) $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie).
- iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreieckungleichung)

Das Paar (X, d) heißt metrischer Raum.

Auf jeder Menge X ist eine triviale „gleichmäßig diskrete“ Metrik gegeben durch:

$$d(x, y) := \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (1)$$

Definition 1.1.2 (Norm). Eine Abbildung $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ heißt Norm auf einem Vektorraum V über den Körper \mathbb{K} , wenn für alle $x, y \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

- i) $\|x\| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$, (Definitheit).
- ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, (absolute Homogenität).
- iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, (Dreieckungleichung).

Das Paar $(V, \|\cdot\|)$ heißt Vektorraum.

Sei $p \geq 1$, $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ und f stetig von I nach \mathbb{R} (oder \mathbb{C}), dann ist

$$f \mapsto \|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

eine Norm.

Eine Norm induziert durch die Festlegung $d(x, y) := \|x - y\|$ eine Metrik auf $V \times V$.

Bemerkung 1.1.3 (Skalarprodukt). Eine positiv definite symmetrische Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}_+$, auf einem reellen Vektorraum V heißt Skalarprodukt. Das bedeutet für alle $x, y, w, z \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

- i) $\langle x, x \rangle = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ (Definiethet).
- ii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ (Symmetrie).
- iii) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ sowie $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$ (linear in beiden Argumenten).

Der Zusammenhang zwischen Skalarprodukt, Norm und Metrik ist:

$$\text{Skalarprodukt} \quad \xrightarrow{\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}} \quad \text{Norm} \quad \xrightarrow{d(x, y) := \|x - y\|} \quad \text{Metrik.}$$

Andersherum induziert eine Metrik im Allgemeinen keine Norm und eine Norm im Allgemeinen kein Skalarprodukt.

Definition und Satz 1.1.4. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Dann heißt f stetig auf X genau dann, wenn alle offenen $V \subseteq Y$ ein offenes Urbild $f^{-1}(V)$ in X besitzen. Dies ist äquivalent zum Folgenkriterium: Für alle $a \in X$ gilt $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, was bedeutet

$$\forall \epsilon \exists \delta \forall x \in X : d_X(x, a) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

Ferner heißt f gleichmäßig stetig genau dann, wenn

$$\forall \epsilon \exists \delta \forall a, x \in X : d_X(x, a) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

Zuletzt heißt f Lipschitz stetig, wenn eine Konstante L existiert, sodass

$$\forall a, x \in X : d_X(f(x), f(a)) \leq L \cdot d_Y(x, y)$$

Lemma 1.1.5. Seien X, Y und Z metrische Räume und $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ sowie $h: Y \rightarrow X$ stetige Funktionen.

- i) Dann sind $f + g$ und $f \cdot g$ stetig.
- ii) Sei ferner $g(x) \neq 0$ für $x \in X$, dann ist f/g stetig.
- iii) Die Verkettung $f \circ h: Y \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig.
- iv) Gleichmäßig stetige Funktionen sind stetig.
- v) Lipschitz stetige Funktionen sind stetig¹.

Definition und Satz 1.1.6. Definition. Eine Teilmenge K eines metrischen Raumes X heißt kompakt, wenn jede offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von K eine endliche Teilüberdeckung besitzt, d.h. es existieren $i_1, \dots, i_k \in I$, so dass

$$K \subset U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \dots \cup U_{i_k}.$$

Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$, dann ist K genau dann kompakt wenn eine der folgenden Eigenschaften gelten:

- i) K ist beschränkt und abgeschlossen.
- ii) Jeder Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_i \in K$ für $n \in \mathbb{N}$ besitzt eine in K konvergente Teilfolge.

Sei $f: K \rightarrow X$ stetig, dann gilt:

- i) f ist gleichmäßig stetig.
- ii) $f(K)$ ist kompakt.
- iii) f nimmt auf K Maximum und Minimum an.

Definition und Satz 1.1.7 (Kurve). Sei I ein Intervall, dann heißt $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ Weg² stetig differenzierbar, falls für $1 \leq i \leq n$ die reelle Funktion $I \ni x \mapsto \varphi_i(x)$ stetig³ differenzierbar ist. In diesem Fall ist die Weglänge gegeben durch

$$\int_I ||f'(x)|| dx.$$

Definition 1.1.8 (partiell differenzierbar). Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, dann heißt $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar, wenn für alle $x \in U$ und der Grenzwert

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + he_i) - f(x)}{h}, \quad (1 \leq i \leq n)$$

existiert, wobei $e_i \in \mathbb{R}^n$ den i -ten Einheitsvektor bezeichnet. Wir sagen, f ist *stetig* partiell Differenzierbar, falls alle partiellen Ableitungen stetig sind.

Zu partiell differenzierbaren f ist der Gradient ∇f von f gegeben durch:

$$\nabla f(x) := \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

¹Lineare stetige Funktionen sind Lipschitz stetig.

²Das Bild $\varphi(I)$ heißt Kurve.

³Und nur differenzierbar, wenn die Ableitung nicht stetig ist.

Für ein partiell differenzierbares Vektorfeld $v: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ setzen wir die Divergenz „div v “ von v :

$$\operatorname{div} v := \langle \nabla, v \rangle := \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} v_i.$$

Sei f zudem zwei Mal stetig differenzierbar, dann ist das Laplace Operator „ Δf “ von f gegeben durch:

$$\Delta f := \langle \nabla, \nabla \rangle f = \operatorname{div} \nabla f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f.$$

Satz 1.1.9 (von Schwarz). Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ k -Mal stetig partiell differenzierbar, dann gilt für alle $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ und Permutationen π von $1, \dots, k$:

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} f(x) = \frac{\partial}{\partial x_{i_{\pi(1)}}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_{\pi(k)}}} f(x).$$

1.2 Totale Differenzierbarkeit

Definition 1.2.1. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, dann heißt $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ in $x \in U$ (*total*) *differenzierbar*, wenn eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ existiert, sodass für ζ in einer Umgebung der Null

$$f(x + \zeta) = f(x) + A\zeta + \|\zeta\| \cdot \varphi(\zeta),$$

und $\varphi(\zeta)$ für $\zeta \rightarrow 0$ stetig gegen Null konvergiert⁴.

Definition 1.2.2. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, dann ist die Richtungsableitung von $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ im Punkt $x \in U$ in Richtung $v \in S^{n-1}$ (bei Existenz) gegeben durch

$$D_v f(x) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} = \left. \frac{d}{dt} f(x + tv) \right|_{t=0}$$

Bezüglich des Zusammenhang zwischen den Differenzierbarkeitsbegriffen gelten die Implikationen

$$\text{stetig part. diff'bar} \Rightarrow \text{total diff'bar} \Rightarrow \text{Richtungsabl. existieren} \Rightarrow \text{part. diff'bar}.$$

Die Richtungsableitung von f im Punkt x in Richtung des kanonischen i -ten Einheitsvektors e_i entspricht der partiellen Ableitung

$$D_{e_i} f(x) := D_i f(x) := \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

Zusammen rechtfertigt dies die Identifizierung von A aus Definition 1.2.1 mit der Funktionalmatrix Df , auch „Jakobi-Matrix“ J_f oder auch einfach Ableitung f' im Punkt x ,

$$Df(x) := J_f(x) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}},$$

welche sich aus den partiellen Ableitungen zusammensetzt. Auch für die mehrdimensionale Ableitung gilt die Kettenregel:

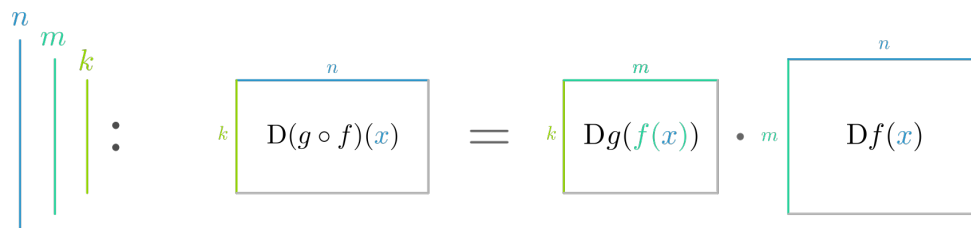


Abbildung 1: Größe der Matrizen in der mehrdimensionalen Kettenregel.

⁴Das bedeutet $r(\zeta) := \|\zeta\| \cdot \varphi(\zeta)$ ist eine Fehlerfunktion, welche **asymptotisch** gegenüber $\|\zeta\|$ vernachlässigbar ist, auch „ $r(\zeta) = o(\|\zeta\|)$ “.

Satz 1.2.3 (Kettenregel). Seien $U \in \mathbb{R}^n$, $V \in \mathbb{R}^m$ offene Mengen mit wohldefinierter Komposition

$$(g: V \rightarrow \mathbb{R}^k) \circ (f: U \rightarrow V): U \rightarrow \mathbb{R}^k$$

differenzierbarer Abbildungen f, g . Dann ist $g \circ f$ differenzierbar und für das Differential⁵ gilt

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \cdot Df(x).$$

1.3 Satz von Taylor

Definition 1.3.1 (Multiindex). Für ein Tupel $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ und $x \in \mathbb{R}^n$ sei

$$|\alpha| := \sum_{k=1}^n \alpha_k, \quad \alpha! := \prod_{k=1}^n \alpha_k!, \quad x^\alpha := \prod_{k=1}^n x_k^{\alpha_k}.$$

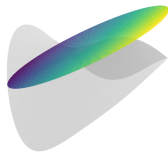
Für eine $|\alpha|$ -mal stetig differenzierbare Funktion f und Differentialoperator D sei

$$D^\alpha := D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \dots D_n^{\alpha_n} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \text{wobei} \quad D_k^{\alpha_k} := \underbrace{D_k \circ D_k \circ \dots \circ D_k}_{\alpha_k\text{-Mal}}.$$

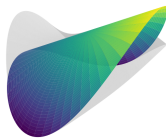
Satz 1.3.2 (Taylorsche Formel). Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $x, \zeta \in \mathbb{R}^n$ sodass $\{x + t\zeta : 0 \leq t \leq 1\} \subset U$. Dann existiert für alle $n+1$ -mal stetig differenzierbaren $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ ein $t \in [0, 1]$ sodass

$$f(x + \zeta) = \underbrace{\sum_{|\alpha| \leq n} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} \zeta^\alpha}_{:= T_n f(\zeta; x)} + \underbrace{\sum_{|\alpha| = n+1} \frac{D^\alpha f(x + t\zeta)}{\alpha!} \zeta^\alpha}_{:= R_n f(\zeta; x)}.$$

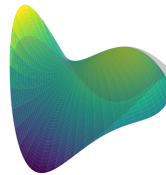
Polynom 1. Ordnung



Polynom 2. Ordnung



Polynom 3. Ordnung



Polynom 5. Ordnung

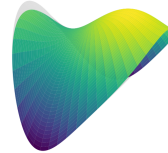


Abbildung 2: Taylorpolynome von $(x, y)^T \mapsto \sin(x) - y^2/2$ (in grau hinterlegt) auf der Einheitskreisscheibe [Animation].

1.4 Lokale Extrema

Definition 1.4.1 (Definitheit, Hessematrix). Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt

positiv [negativ] definit also $A \succ 0$ [$A \prec 0$] wenn $x^T A x > 0$ [$x^T A x < 0$]
 positiv [negativ] semidefinit also $A \succeq 0$ [$A \preceq 0$] wenn $x^T A x \geq 0$ [$x^T A x \leq 0$]

für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und indefinit sonst. Betrachte hierzu die **Eigenwerten** oder **Hauptminoren** von A .

Bei der Bestimmung von Extrema spielt die Definitheit der Hessematrix

$$H_f(x) := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

von zweimal stetig differenzierbaren f auf offenem $U \subseteq \mathbb{R}^n$ im Punkt $x \in U$ eine entscheidende Rolle.

⁵Klarer wird die Kettenregel Möglicherweise mit der Jakobi-Matrix: $J_{g \circ f}(x) = J_g(f(x)) \cdot J_f(x)$.

Satz 1.4.2 (Notwendige Bedingung für Extremum). Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ partiell Differenzierbar. Besitzt f in $x \in U$ ein lokales Extremum, dann gilt

$$\nabla f(x) = 0$$

Satz 1.4.3 (Hinreichende Bedingung für Extremum). Zweimal stetig differenzierbares $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ hat für offenes U in $x \in U$ ein striktes lokales Maximum [respektive Minimum], wenn

$$\nabla f(x) = 0 \quad \text{sowie} \quad H_f(x) \prec 0, \quad [\text{respektive } H_f(x) \succ 0].$$

1.5 Satz über implizite Funktionen

Satz 1.5.1 (Banachscher Fixpunktsatz). Auf der abgeschlossenen, nicht leeren Teilmenge A eines vollständig normierter Raumes $(X, \|\cdot\|)$ besitzt eine „Kontraktion“ $\Phi: A \rightarrow A$,

$$\|\Phi(y) - \Phi(z)\| < \|y - z\|, \quad (y, z \in A)$$

genau einen Fixpunkt. Das bedeutet für einen beliebigen Startwert $x_0 \in A$ konvergiert die Folge $x_{i+1} := \Phi(x_i)$ gegen einen Fixpunkt x

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x = \Phi(x).$$

Satz 1.5.2 (über implizite Funktionen). Seien $U \subseteq \mathbb{R}^m$, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F: U \times V \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit Jakobi-Matrix

$$DF(x, y) := \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m} & \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix}.$$

Sei $F(x_0, y_0) = 0$ und $\frac{\partial}{\partial y} F(x_0, y_0)$ invertierbar. Dann existieren offene Umgebungen $U_0 \subseteq U$ von x_0 und $V_0 \subseteq V$ von y_0 sowie stetig differenzierbares $f: U_0 \rightarrow V_0$ sodass $f(x_0) = y_0$ und für alle $(x, y) \in (U_0 \times V_0)$:

$$F(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = f(x).$$

Insbesondere können wir f „implizit differenzieren“, also die Jakobi-Matrix angeben

$$Df(x) = - \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) \quad (2)$$

auch ohne die Abbildungsvorschrift $x \mapsto f(x)$ zu kennen.

1.6 Minimierung unter Nebenbedingungen

Definition 1.6.1. (Untermannigfaltigkeit) Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt k -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n , wenn für alle $a \in M$ eine offene Umgebung U von a existiert sodass eine folgenden Eigenschaften erfüllt ist:

	\exists offene Mengen	$\exists C^p$ -Abbildung	Rang	
i)	$U \subseteq \mathbb{R}^n, V = \mathbb{R}^{n-k}$	$f: U \rightarrow V,$	$n - k$	$U \cap M = \{x \in U \mid f(x) = 0\}$
ii)	$U \subseteq \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^n$	$h: U \rightarrow V$ diffeomorph	n	$h(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{n-k}}\})$
iii)	$U \subseteq M, V \subset \mathbb{R}^k$	$\varphi^{-1}: V \rightarrow U$ homöomorph ⁶	k	

Wir nennen (das implizit gegebene) φ Karte und φ^{-1} lokale Parametrisierung.

⁶Praktisches Kriterium: Wenn φ auf offenem $V \subseteq \mathbb{R}^k$ stetig differenzierbar und der Rang $D\varphi$ in jedem Punkt gleich k , existiert für jedes $t \in V$ eine offene Umgebung V_t , sodass $\varphi|_{V_t} \rightarrow \varphi(V_t)$ homöomorph.

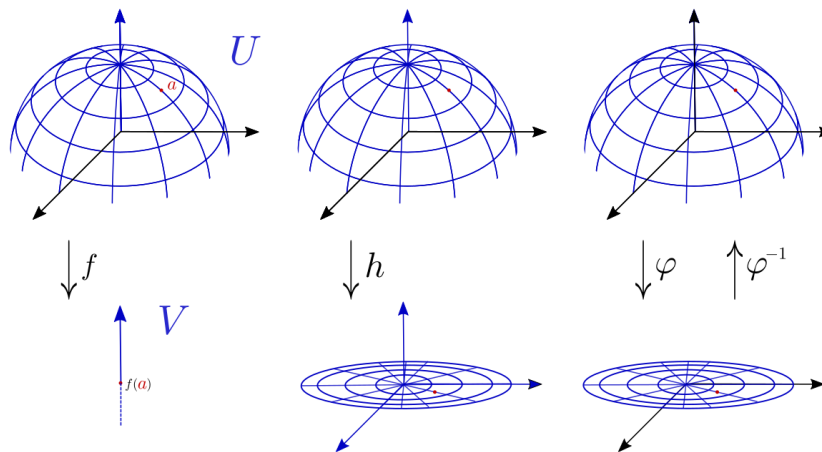


Abbildung 3: Urbild und Bild der C^p -Abbildungen von Untermannigfaltigkeiten.

Satz 1.6.2 (Lagrange Multiplikatoren). Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und induziert $f = (f_1, \dots, f_{n-k}): U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit

$$M = \{x \in U \mid f(x) = 0\}$$

dann existieren für differenzierbares $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ mit lokalem Extremum a von $F|_M$ „lagrangsche Multiplikatoren“ $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-k} \in \mathbb{R}$, so dass

$$\nabla F(a) + \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i \nabla f_i(a) = 0.$$

1.7 Parameterabhängige Integrale

Satz 1.7.1 (Differentiation unterm Integral). Seien I, J kompakt und $f: I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in der y Variablen stetig differenzierbar, dann ist $y \mapsto \int_I f(x, y) dx$ stetig differenzierbar und

$$\frac{d}{dy} \int_I f(x, y) dx = \int_I \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx.$$

Literatur

- [1] Ern , Marcel (2008). *Lineare Gleichungssysteme*. Kapitel 4.3 in *Mathematik I für Bauingenieure*. http://www2.iazd.uni-hannover.de/ rne/Mathematik1/dateien/maple/MB_4_3.html (05.02.2021).
- [2] Forster, Otto (2017). *Differentialrechnung im R^n , gewöhnliche Differentialgleichungen*. 11. erweiterte Auflage. Springer Fachmedien Wiesbaden.

Lineare Gleichungssysteme. Kapitel 4.3 in *Mathematik I für Bauingenieure*. http://www2.iazd.uni-hannover.de/ rne/Mathematik1/dateien/maple/MB_4_3.html (05.02.2021).
- [3] Furlan, Peter (1995): *Eigenwerte und Eigenvektoren*. In: *Das gelbe Rechenbuch*, S 101 - 112. <http://www.das-gelbe-rechenbuch.de/download/Eigenwerte.pdf> (04.02.2021).
- [4] Potpara, Tibor Djurica (2013): *How to calculate Jordan's normal form (the hard way)*. <https://ojdip.net/2013/06/how-to-calculate-jordans-normal-form-the-hard-way/> (05.02.2021).
- [5] Winkler, David (2011): *Kochen mit Jordan*. <https://www.danielwinkler.de/la/jnfkochrezept.pdf> (04.02.2021).