Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Fakultät für Mathematik

Kursmaterial

begleitend zum Tutorium

Miniskript zur Analysis II

Inhaltsverzeichnis

1 Differential- und Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$ 1
1.1 Grundlagen . . . 1
1.2 Totale Differenzierbarkeit . . . 3
1.3 Satz von Taylor . . . 4
1.4 Lokale Extrema . . . 4
1.5 Satz über implizite Funktionen . . . 5
1.6 Minimierung unter Nebenbedingungen . . . 5
1.7 Parameterabhängige Integrale . . . 6
1.8 Übungsaufgaben . . . 7
1.9 Musterlösungen . . . 11

von Montag, 12. September 2022
bis Freitag, 16. September 2022

Kursleitung:
Jonathan Kaspar Busse

Das vorliegende Miniskript entsteht im Rahmen des Tutoriums zur Analysis II, zum Ende des Sommersemesters 2021/2022 an der Heinrich Heine Universität Düsseldorf. Inhaltlich ist es an [?] orientiert, viele Schreibweisen kommen von `Wikipedia` und sind mit monospace verlinkt.

1 Differential- und Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$

1.1 Grundlagen

Definition 1.1.1 (Metrik)**.** Eine Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ heißt Metrik auf einer Menge X wenn für alle $x, y, z \in X$ gilt:

i) $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$ (Definitheit).

ii) $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie).

iii) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (Dreieckungleichung)

Das Paar (X, d) heißt metrischer Raum.

Auf jeder Menge X ist eine triviale „gleichmäßig diskrete“ Metrik gegeben durch:

$$d(x,y) \coloneqq \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}. \tag{1}$$

Definition 1.1.2 (Norm)**.** Eine Abbildung $\| \, \|\colon V \to \mathbb{R}_0^+$ heißt Norm auf einem Vektorraum V über den Körper $\mathbb{K}$, wenn für alle $x, y \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

i) $\|x\| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$, (Definitheit).

ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, (absolute Homogenität).

iii) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$, (Dreieckungleichung).

Das Paar $(V, \| \, \|)$ heißt Vektorraum.

Sei $p \geq 1$, $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ und f stetig von I nach $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$), dann ist

$$f \mapsto \|f\|_p \coloneqq \left(\int_a^b |f(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}$$

eine Norm.

Eine Norm induziert durch die Festlegung $d(x, y) \coloneqq \|x - y||$ eine Metrik auf $V \times V$.

Bemerkung 1.1.3 (Skalarprodukt)**.** Eine positiv definite symmetrische Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}_+$, auf einem reellen Vektorraum V heißt Skalarprodukt. Das bedeutet für alle $x, y, w, z \in V$ und $\lambda \in K$ gilt:

i) $\langle x, x \rangle = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ (Definietheit).

ii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ (Symmetrie).

iii) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ sowie $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$ (linear in beiden Argumenten).

Um Stetigkeit definieren zu können, müssen wir wissen, was eine offene Menge ist (bezüglich einer Grundmenge) ist.

Definition 1.1.4 (Topologie, Topologischer Raum)**.** Eine Menge von Teilmengen $\mathcal{T}$ einer Grundmenge X heißt Topologie, heißt *Topologie auf* X, falls für alle $T_1, \ldots, T_n \in \mathcal{T}$ und Untermengen $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{T}$ gilt

i) $\emptyset \in \mathcal{T}$ und $X \in \mathcal{T}$ ii) $\left(\bigcap_{i=1}^n T_i\right) \in \mathcal{T}$ iii) $\left(\bigcup_{T \in \mathcal{W}} T\right) \in \mathcal{T}$

Die Elemente $T_1, T_2 \ldots$ von $\mathcal{T}$ heißen *offene Mengen* und $(X, \mathcal{T})$ heißt *Topologischer Raum*. Eine Menge $T \subseteq X$ heißt abgeschlossen, falls ihr Komplement $X \setminus T$ eine offene Menge ist.

Der Zusammenhang zwischen Skalarprodukt, Norm, Metrik und Topologie ist:

$$\text{Skalarprodukt} \xrightarrow{\|x\|:=\sqrt{\langle x,x\rangle}} \text{Norm} \xrightarrow{d(x,y):=\|x-y\|} \text{Metrik} \xrightarrow{\text{Aufgabe 1.8.3}} \text{Topologie.}$$

Andersherum ist nicht jede Topologie aus einer Metrik, nicht jede Metrik aus einer Norm und nicht jede Norm aus einem Skalarprodukt abgeleitet.

Definition und Satz 1.1.5. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Dann heißt f stetig auf X genau dann, wenn alle offenen $V \subseteq Y$ ein offenes Urbild $f^{-1}(V)$ in X besitzen. Dies ist äquivalent zum Folgenkriterium: Für alle $a \in X$ gilt $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, was bedeutet

$$\forall a\ \forall \epsilon\ \exists \delta \quad \forall x \in X: \qquad d_X(x,a) < \delta \ \Rightarrow\ d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

Ferner heißt f gleichmäßig stetig genau dann, wenn

$$\forall \epsilon\ \exists \delta\ \forall a, x \in X: \qquad d_X(x,a) < \delta \ \Rightarrow\ d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

Zuletzt heißt f Lipschitz stetig, wenn eine Konstante L existiert, sodass

$$\forall a, x \in X: \qquad d_X(f(x), f(a)) \leq L \cdot d_Y(x,y)$$

Lemma 1.1.6. Seien X, Y und Z metrische Räume und $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ sowie $h\colon Y \to X$ stetige Funktionen.

i) Dann sind $f + g$ und $f \cdot g$ stetig.

ii) Sei ferner $g(x) \neq 0$ für $x \in X$, dann ist f/g stetig.

iii) Die Verkettung $f \circ h\colon Y \to \mathbb{R}$ ist stetig.

iv) Gleichmäßig stetige Funktionen sind stetig.

v) Lipschitz stetige Funktionen sind stetig[1].

Definition und Satz 1.1.7. Definition. Eine Teilmenge K eines metrischen Raumes X heißt kompakt, wenn jede offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von K eine endliche Teilüberdeckung besitzt, d.h. es existieren $i_1, \ldots, i_k \in I$, so dass

$$K \subset U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \ldots \cup U_{i_k}.$$

Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$, dann ist K genau dann kompakt wenn eine der folgenden Eigenschaften gelten:

i) K ist beschränkt und abgeschlossen.

ii) Jeder Folge $(a_n)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $a_i \in K$ für $n \in \mathbb{N}$ besitzt eine in K konvergente Teilfolge.

Sei $f\colon K \to X$ stetig, dann gilt:

i) f ist gleichmäßig stetig.

ii) $f(K)$ ist kompakt.

iii) f nimmt auf K Maximum und Minimum an.

Definition und Satz 1.1.8 (Kurve)**.** Sei I ein Intervall, dann heißt $\varphi\colon I \to \mathbb{R}^n$ Weg[2] stetig differenzierbar, falls für $1 \leq i \leq n$ die reelle Funktion $I \ni x \mapsto \varphi_i(x)$ stetig[3] differenzierbar ist. In diesem Fall ist die Weglänge gegeben durch

$$\int_I \|f'(x)\|\,\mathrm{d}x.$$

[1]Lineare stetige Funktionen sind Lipschitz stetig.
[2]Das Bild $\varphi(I)$ heißt Kurve.
[3]Und nur differenzierbar, wenn die Ableitung nicht stetig ist.

Definition 1.1.9 (partiell differenzierbar)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, dann heißt $f\colon U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar, wenn für alle $x \in U$ und der Grenzwert

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} := \lim_{h\to 0} \frac{f(x+he_i) - f(x)}{h}, \quad (1 \leq i \leq n)$$

existiert, wobei $e_i \in \mathbb{R}^n$ den i-ten Einheitsvektor bezeichnet. Wir sagen, f ist *stetig* partiell Differenzierbar, falls alle partiellen Ableitungen stetig sind.

Zu partiell differenzierbaren f ist der Gradient ∇f von f gegeben durch:

$$\nabla f(x) := \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Für ein partiell differenzierbares Vektorfeld $v\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ setzen wir die Divergenz „$\operatorname{div} v$“ von v:

$$\operatorname{div} v := \langle \nabla, v\rangle := \sum_{k=i}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} v_i.$$

Sei f zudem zwei Mal stetig differenzierbar, dann ist das Laplace Operator „Δf“ von f gegeben durch:

$$\Delta f := \langle \nabla, \nabla\rangle f = \operatorname{div} \nabla f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f.$$

Satz 1.1.10 (von Schwarz)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}$ k-Mal stetig partiell differenzierbar, dann gilt für alle $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ und Permutationen π von $1, \dots, k$:

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} f(x) = \frac{\partial}{\partial x_{i_{\pi(1)}}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_{\pi(k)}}} f(x).$$

1.2 Totale Differenzierbarkeit

Definition 1.2.1. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, dann heißt $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ in $x \in U$ *(total) differenzierbar*, wenn eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ existiert, sodass für ζ in einer Umgebung der Null

$$f(x+\zeta) = f(x) + A\zeta + \|\zeta\| \cdot \varphi(\zeta),$$

und $\varphi(\zeta)$ für $\zeta \to 0$ stetig gegen Null konvergiert[4].

Definition 1.2.2. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, dann ist die Richtunsableitung von $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ im Punkt $x \in U$ in Richtung $v \in S^{n-1}$ (bei Existenz) gegeben durch

$$\mathrm{D}_v f(x) := \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x+tv)\Big|_{t=0}$$

Bezüglich des Zusammenhang zwischen den Differenzierbarkeitsbegriffen gelten die Implikationen

stetig part. diff'bar $\Rightarrow$ total diff'bar $\Rightarrow$ Richtungsabl. existieren $\Rightarrow$ part. diff'bar.

Die Richtungsableitung von f im Punkt x in Richtung des kanonischen i-ten Einheitsvektors e_i entspricht der partiellen Ableitung

$$\mathrm{D}_{e_i} f(x) := \mathrm{D}_i f(x) := \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

Zusammen rechtfertigt dies die identifizierung von A aus Definition 1.2.1 mit der Funktionalmatrix $\mathrm{D}f$, auch „Jakobi-Matrix“ J_f oder auch einfach Ableitung f' im Punkt x,

$$\mathrm{D}f(x) := J_f(x) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}},$$

welche sich aus den partiellen Ableitungen zusammensetzt. Auch für die mehrdimensionale Ableitung gilt die Kettenregel:

[4]Das bedeutet $r(\zeta) := \|\zeta\| \cdot \varphi(\zeta)$ ist eine Fehlerfunktion, welche welche `asymptotisch` gegenüber $\|\zeta\|$ vernachlässigbar ist, auch „$r(\zeta) = o(\|\zeta)\|$“.

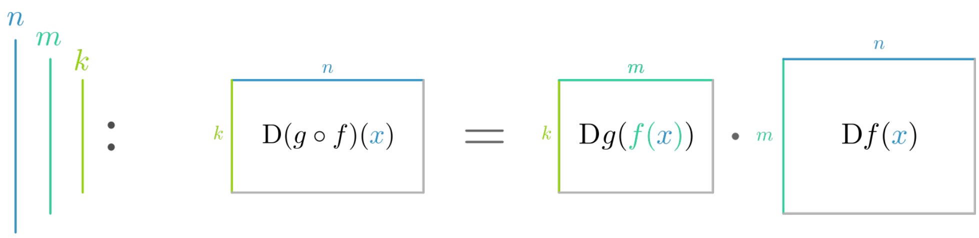

Abbildung 1: Größe der Matrizen in der mehrdimensionalen Kettenregel.

Satz 1.2.3 (Kettenregel)**.** Seien $U \in \mathbb{R}^n$, $V \in \mathbb{R}^m$ offene Mengen mit wohldefinierter Komposition

$$(g\colon V \to \mathbb{R}^k) \circ (f\colon U \to V)\colon U \to \mathbb{R}^k$$

differenzierbarer Abbildungen f, g. Dann ist $g \circ f$ differenzierbar und für das Differential[5] gilt

$$\mathrm{D}(g \circ f)(x) = \mathrm{D}g(f(x)) \cdot \mathrm{D}f(x).$$

1.3 Satz von Taylor

Definition 1.3.1 (Multiinidex)**.** Für ein Tupel $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ und $x \in \mathbb{R}^n$ sei

$$|\alpha| := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k, \qquad \alpha! := \prod_{k=1}^{n} \alpha_k!, \qquad x^\alpha := \prod_{k=1}^{n} x_k^{\alpha_k}.$$

Für eine $|\alpha|$-mal stetig differenzierbare Funktion f und Differentialoperator D sei

$$\mathrm{D}^\alpha := \mathrm{D}_1^{\alpha_1}\mathrm{D}_2^{\alpha_2}\dots\mathrm{D}_n^{\alpha_n} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}, \qquad \text{wobei} \qquad \mathrm{D}_k^{\alpha_k} := \underbrace{\mathrm{D}_k \circ \mathrm{D}_k \circ \dots \circ \mathrm{D}_k}_{\alpha_k\text{-Mal}}.$$

Satz 1.3.2 (Taylorsche Formel)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $x, \zeta \in \mathbb{R}^n$ sodass $\{x + t\zeta : 0 \le t \le q\} \subset U$. Dann existiert für alle $n+1$-mal stetig differenzierbaren $f : U \to \mathbb{R}$ ein $t \in [0,1]$ sodass

$$f(x+\zeta) = \underbrace{\sum_{|\alpha|\le n} \frac{\mathrm{D}^\alpha f(x)}{\alpha!}\zeta^\alpha}_{:=T_n f(\zeta;x)} + \underbrace{\sum_{|\alpha|=n+1} \frac{\mathrm{D}^\alpha f(x+t\zeta)}{\alpha!}\zeta^\alpha}_{:=R_n f(\zeta;x)}.$$

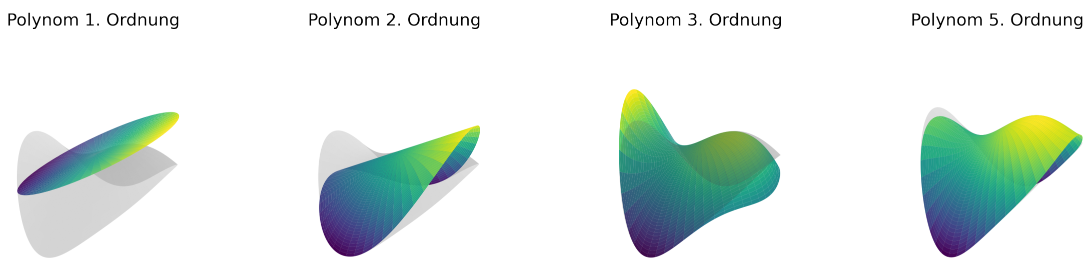

Abbildung 2: Taylorpolynome von $(x,y)^T \mapsto \sin(x) - y^2/2$ (in grau hinterlegt) auf der Einheitskreisscheibe [`Animation`].

1.4 Lokale Extrema

Definition 1.4.1 (Definitheit, Hessematrix)**.** Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt

positiv [negativ] definit	also $A \succ 0$ $[A \prec 0]$	wenn $x^T Ax > 0$ $[x^T Ax < 0]$
positiv [negativ] semidefinit	also $A \succeq 0$ $[A \preceq 0]$	wenn $x^T Ax \ge 0$ $[x^T Ax \le 0]$

für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und indefinit sonst. Betrachte hierzu die `Eigenwerten` oder `Hauptminoren` von A.

[5] Klarer wird die Kettenregel Möglicherweise mit der Jakobi-Matrix: $J_{g\circ f}(x) = J_g(f(x)) \cdot J_f(x)$.

Bei der Bestimmung von Extrema spielt die Definitheit der Hessematrix

$$H_f(x) := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$$

von zweimal stetig differenzierbaren f auf offenem $U \subseteq \mathbb{R}^n$ im Punkt $x \in U$ eine entscheidende Rolle.

Satz 1.4.2 (Notwendige Bedingung für Extremum)**.** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}$ partiell Differenzierbar. Besitzt f in $x \in U$ ein lokales Extremum, dann gilt

$$\nabla f(x) = 0$$

Satz 1.4.3 (Hinreichende Bedingung für Extremum)**.** Zweimal stetig differenzierbares $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ hat für offenes U in $x \in U$ ein striktes lokales Maximum [respektive Minimum], wenn

$$\nabla f(x) = 0 \qquad \text{sowie} \qquad H_f(x) \prec 0, \quad [\text{respektive } H_f(x) \succ 0].$$

1.5 Satz über implizite Funktionen

Satz 1.5.1 (Banachscher Fixpunktsatz)**.** Auf der abgeschlossenen, nicht leeren Teilmenge A eines `vollständig normierter` Raumes $(X, \|\cdot\|)$ besitzt eine „Kontraktion" $\Phi : A \to A$,

$$\|\Phi(y) - \Phi(z)\| < \|y - z\|, \quad (y, z \in A)$$

genau einen Fixpunkt. Das bedeutet für einen beliebigen Startwert $x_0 \in A$ konvergiert die Folge $x_{i+1} := \Phi(x_i)$ gegen einen Fixpunkt x

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x = \Phi(x).$$

Satz 1.5.2 (über implizite Funktionen)**.** Seien $U \subseteq \mathbb{R}^m$, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F\colon U \times V \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit Jakobi-Matrix

$$\mathrm{D}F(x,y) := \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m} & \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix}.$$

Sei $F(x_0, y_0) = 0$ und $\frac{\partial}{\partial y} F(x_0, y_0)$ invertierbar. Dann existieren offene Umgebungen $U_0 \subseteq U$ von x_0 und $V_0 \subseteq V$ von y_0 sowie stetig differenzierbares $f\colon U_0 \to V_0$ sodass $f(x_0) = y_0$ und für alle $(x, y) \in (U_0 \times V_0)$:

$$F(x,y) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = f(x).$$

Insbesondere können wir f „implizit differenzieren„, also die Jakobi-Matrix angeben

$$\mathrm{D}f(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))\right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) \tag{2}$$

auch ohne die Abbildungsvorschrift $x \mapsto f(x)$ zu kennen.

1.6 Minimierung unter Nebenbedingungen

Definition 1.6.1. (Untermannigfaltigkeit) Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, wenn für alle $a \in M$ eine offene Umgebung U von a existiert sodass eine folgenden Eigenschaften erfüllt ist:

	$\exists$ offene Mengen	$\exists$ C^p-Abbildung	Rang	
i)	$U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V = \mathbb{R}^{n-k}$	$f : U \to V$,	$n-k$	$U \cap M = \{x \in U \mid f(x) = 0\}$
ii)	$U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^n$	$h : U \to V$ `diffeomorph`	n	$h(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{n-k}}\})$
iii)	$U \subseteq M$, $V \subset \mathbb{R}^k$	$\varphi^{-1} : V \to U$ `homöomorph`[6]	k	

Wir nennen (das implizit gegebene) φ Karte und φ^{-1} lokale Parametrisierung.

[6] Praktisches Kriterium: Wenn φ auf offenem $V \subseteq \mathbb{R}^k$ stetig differenzierbar und der Rang $\mathrm{D}\varphi$ in jedem Punkt gleich k, existiert für jedes $t \in V$ eine offene Umgebung V_t, sodass $\varphi|_{V_t} \to \varphi(V_t)$ homöomorph.

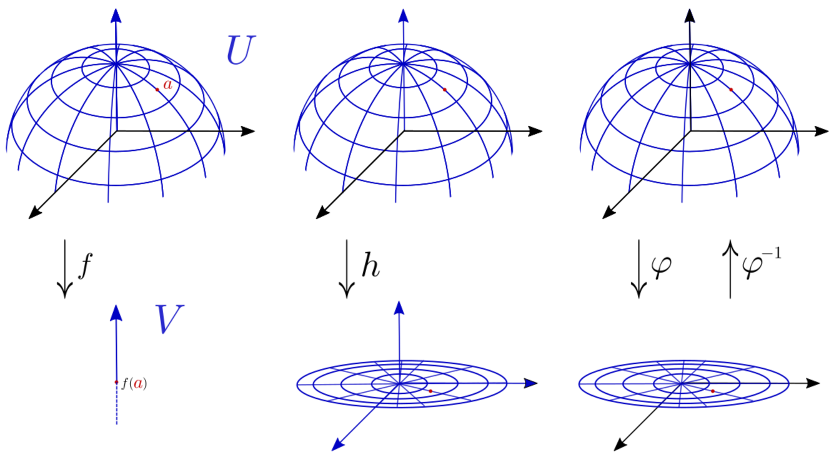

Abbildung 3: Urbild und Bild der C^p-Abbildungen von Untermannigfaltigkeiten.

Satz 1.6.2 (Lagrange Multiplikatoren)**.** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und induziert $f = (f_1, \ldots, f_{n-k})\colon U \to \mathbb{R}^{n-k}$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit

$$M = \{x \in U \mid f(x) = 0\}$$

dann existieren für differenzierbares $F : U \to \mathbb{R}$ mit lokalem Extremum a von $F|_M$ „lagrangsche Multiplikatoren“ $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-k} \in \mathbb{R}$, so dass

$$\nabla F(a) + \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i \nabla f_i(a) = 0.$$

1.7 Parameterabhängige Integrale

Satz 1.7.1 (Differentation unterm Integral)**.** Seien I, J kompakt und $f\colon I \times J \to \mathbb{R}$ stetig und in der y Variablen stetig differenzierbar, dann ist $y \mapsto \int_I f(x,y)\,\mathrm{d}x$ stetig differenzierbar und

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \int_I f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_I \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,\mathrm{d}x.$$

1.8 Übungsaufgaben

Die Aufgaben sind mit einer „Aufwandsampel" von hell nach dunkel versehen: Einige lassen sich in wenigen Zeilen lösen (●), manche erfordern etwas Rechenaufwand (●) und an Andern (●) kann geknobelt werden.

Aufgabe 1.8.0. Recherchieren Sie jeh ein Ihnen unbekanntest Beispiel und Gegenbeispiel für eine Metrik und eine Norm. Stellen Sie ihren Gruppenmitgliedern davon ein Beispiel mit Begründung vor.

Aufgabe 1.8.1. Zeigen Sie, dass eine Norm eine Metrik induziert, die Umkehrung im Allgemeinen aber nicht gilt. Zeigen Sie insbesondere, dass durch d wie in (1) eine Metrik gegeben ist, die keine Norm induziert.

Hinweis! Norm induziert Metrik per Definition.
Zeige, dass durch $||x|| := d(x, 0)$ keine Norm gegeben ist.

Aufgabe 1.8.2. i) Zeigen Sie, dass für x in $\mathbb{R}$ eine Norm gegeben ist durch

$$|x| := \max(x, -x).$$

ii) Zeigen Sie, dass $\sqrt[p]{x+y} \leq \sqrt[p]{x} + \sqrt[p]{y}$ für $p \geq 1$ und nicht-negative x, y in $\mathbb{R}$.

Hinweis! Zu ii): Zeigen Sie getrennt, dass $(2x+\epsilon)^{1/p} \leq x^{1/p} + (x+\epsilon)^{1/p}$ für $x \geq \epsilon$ und $0 \leq x \leq \epsilon$.
$0 \leq x \leq \epsilon$ mit Widerspruchsbeweis und: Stetigkeit, Zwischenwertsatz, Satz von Rolle.

Aufgabe 1.8.3. Zeigen Sie, dass ein metrischer Raum einen topologischen Raum induziert, in dem Sie wie folgt vorgehen: Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei

$$\mathcal{T} := \{T \subseteq X : \forall t \in T\ \exists \epsilon > 0 \text{ sodass } \underbrace{\{x \in X : d(x,t) < \epsilon\}}_{\epsilon-\text{Umgebung von } t} \subseteq T\}.$$

Dann ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Wir haben gezeigt: $T \subseteq X$ ist offen, falls für jedes Element von T eine ϵ-Umgebungen existiert, die in T liegt.

Aufgabe 1.8.4. Zeigen Sie mit der offenen Überdeckungseigenschaft und dem Folgenkriterium, dass die offene Einheitskreisscheibe $B_1(0) := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid ||x||_2 < 1\}$ nicht kompakt ist.

Aufgabe 1.8.5. Sei

$$f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{cases} 0 & x = y = 0 \\ \frac{\sqrt{|x|}y^3}{x^2+y^2} & \text{sonst} \end{cases}$$

i) Zeigen Sie mit dem ϵ-δ-Kriterium, die Stetigkeit von f in $(0,0)^T$.

ii) Zeigen Sie, dass f stetig ist.

iii) Zeigen Sie, dass $U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) < c\}$ für alle $c \in \mathbb{R}$ offen ist.

iv) Zeigen Sie, dass $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = c\}$ für alle $c \in \mathbb{R}$ abgeschlossen ist.

Hinweis! Identifizieren Sie (x, y) mit den Polarkoordinaten $(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$.
Wie entstehen U und B aus f?

Aufgabe 1.8.6. Zeigen Sie, dass

$$f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{cases} 0 & x = y = 0 \\ \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{sonst} \end{cases}$$

nicht stetig ist, aber in jedem Argument stetig ist[7].

Hinweis! *Konstruieren Sie eine Folge $(x_n, y_n) \to (0,0)$, sodass $f(x_n, y_n)$ nicht gegen 0 konvergiert.*

[7] Das bedeutet, für $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ sind $x \mapsto f(x, y_0)$ und $y \mapsto f(x_0, y)$ stetig.

Aufgabe 1.8.7. Zeigen Sie, dass alle Richtungsableitungen von

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \sqrt[3]{x^2 y}$$

existieren, nicht jedoch das totale Differential.

Hinweis! Wie verhält sich f im Ursprung?
Leiten Sie in Richtung $(\cos\varphi, \sin\varphi)^T$ ab.

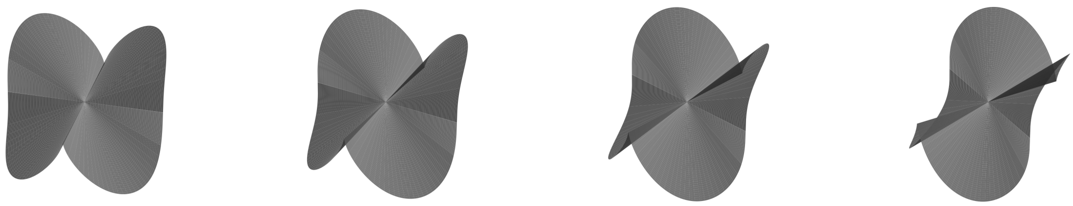

Abbildung 4: Eine im Ursprung nicht differenzierbare Funktion mit partiellen Ableitungen die übereinstimmen.

Aufgabe 1.8.8. Sei $a \in \mathbb{R}^n$, $p \geq 2$ und $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Stellen Sie Gradient und Hessematrix zu folgenden Funktionen auf:

i) $x \mapsto \operatorname{spur}(ax^T)$

ii) $x \mapsto \frac{1}{2}\exp(x^TQx - a^Tx)$

iii) $(x, y)^T \mapsto \exp(-||x-y||_2^2)$

iv) $(x, y)^T \mapsto (1 + x^Ty)^p$

Aufgabe 1.8.9. Bestimmen Sie die Ableitung von

$$h\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^x$$

sowohl mit Analysis I Methoden, als auch mit der Mehrdimensionalen Kettenregel.

Hinweis! Betrachte die partiellen Ableitungen von $g(u, v) := u^v$ und $f(x) := (x, x)^T$
Berechne die rechte Seite von Satz 1.2.3 .

Aufgabe 1.8.10. Beweisen Sie mit der Kettenregel Satz 1.2.3, dass sich die Jakobi-Matrix von f wie in Satz 1.5.2 nach (2) auflösen lässt.

Aufgabe 1.8.11. Zeige, dass die Einheitsphäre

$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid ||x||_2 = 1\}$$

eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$ ist. Geben Sie insbesondere für jedes $x \in S^n$ eine Karte an.

Hinweis! Die Fußnote in Definition 1.6.1 erleichtert den Nachweis der Homöomorphie.
Eine einfache Karte ist in [Abbildung 3] gegeben.

Aufgabe 1.8.12. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $(x, y)^T \mapsto \sin(x) - y^2/2$.

i) Bestimmedie Taylorentwicklung fünfter Ordnung $T_5 f(\zeta; 0)$ von f im Punkt $(0, 0)^T$.

ii) Bestimme die strikten Maxima von f und $T_5 f(\zeta; 0)$.

Aufgabe 1.8.13 (Peanosche Fläche)**.** Widerlegen Sie die Behauptung, dass eine Funktion die in einem Punkt nur Abstiegsrichtungen[8] hat, in diesem ein lokales Maximum besitzt. Nehmen sie hierzu die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto (2x^2 - y)(y - x^2)$$

[8] Gemeint ist, dass die Einschränkung der Funktion auf eine Gerade durch den Punkt, in ebenselbem ein lokales Maximum hat.

zu Hilfe [Abbildung 5]. Warum können wir Satz 1.4.3 nicht anwenden?

Hinweis! Untersuchen Sie die Vorzeichen der Faktoren zwischen Ihren Nullstellen.
Geraden durch den Nullpunkte sind durch $r \mapsto r(\cos\varphi, \sin\varphi)^T$ gegeben.

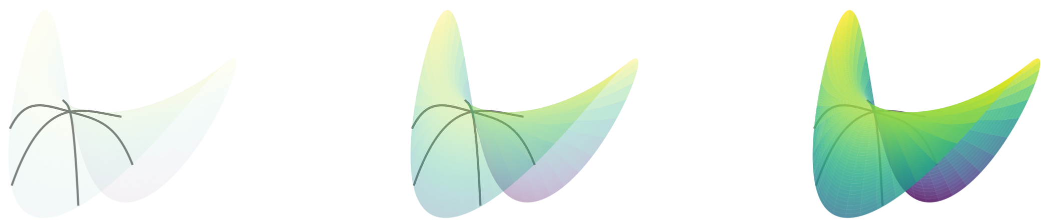

Abbildung 5: Schnittpunkt der Geraden im „`Peano-Sattel`“.

Aufgabe 1.8.14. Zeigen Sie, dass

$$f\colon [0,\infty[\to [0,\infty[, \quad x \mapsto \frac{x+\frac{1}{16}}{x+1}$$

strikt kontraktiv ist und geben Sie den Fixpunkt an.

Aufgabe 1.8.15. Sei $(x_0, y_0) \coloneqq (3,3)^T$ und

$$F(x,y)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto x^3 + y^3 - 6xy$$

gegeben. Zeigen Sie, dass in einer Umgebung von $(x_0, y_0)^T$ eine Funktion f existiert, sodass

$$F(x,y) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = f(x)$$

und geben Sie die Ableitung von f im Punkt $(x_0, y_0)^T$ konkret an.

Hinweis! *Benutzen Sie Satz 1.5.2 und (2)*

Aufgabe 1.8.16. Betrachte das Minimierungsproblem $\min\{F(x) \mid x \in \overline{B_1(0)}\}$ wobei

$$F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto e^{1+x_1+x_2+x_3} - x_2 - x_3$$

und $\overline{B_1(0)} \coloneqq \partial B_1(0) \cup B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid ||x||_2^2 \leq 1\}$. Suchen Sie Mithilfe von Satz 1.6.2 einen Kandidaten $\overline{x}$ für ein lokales Minimum. Stellen Sie Vermutungen an, wie Sie die Minimalität nachweisen könnten.

Hinweis! Zum Nachweis der Minimalität kann die Abschätzung $e^{1+z} \geq 1 + (1+z)$ hilfreich sein
Wähle Lagrange Multiplikator 1/2.

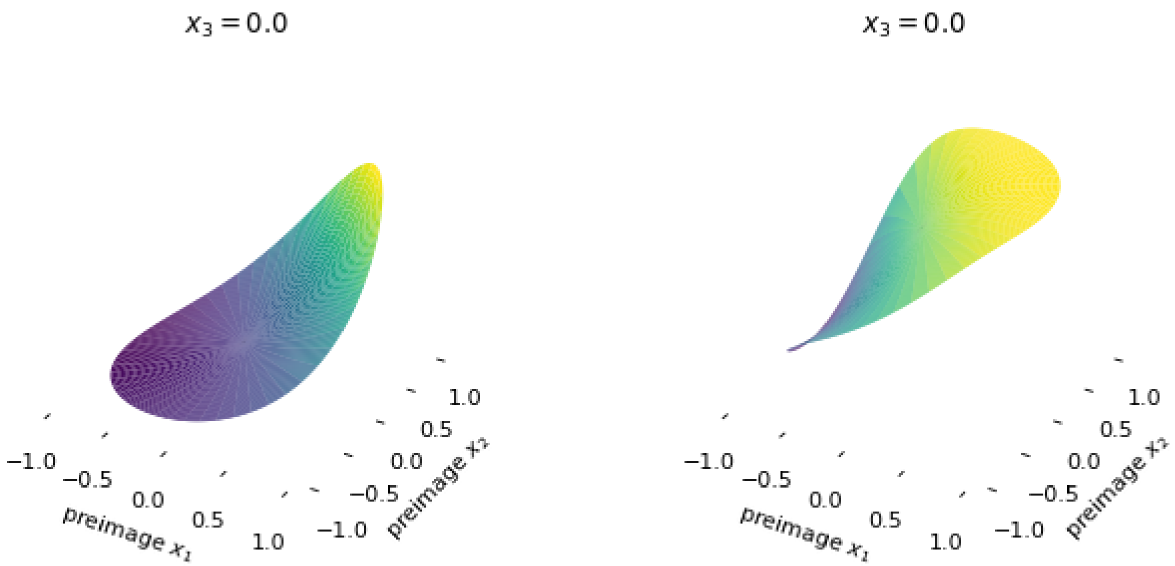

Abbildung 6: Animation des Plot von $(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2, x_3)$ (links) sowie $(x_1, x_2) \mapsto \frac{1}{1+e^{-f(x_1,x_2,x_3)}}$ (rechts) für laufendes $0 \leq x_3 \leq 0.5$.

1.9 Musterlösungen

Lösung 1.9.1 (Aufgabe 1.8.1)**.** „Norm induziert Metrik". Wir zeigen, dass für einen Vektorraum $(V, ||\ ||)$ durch $d(x,y) := ||x-y||$ eine Metrik gegeben ist. Definitheit: Sei $x, y \in V$ und $z := x - y$. Dann $z = 0$ genau dann, wenn $x = y$, also mit der Definitheit der Norm $0 = ||z|| \overset{\text{def.}}{=} ||x-y|| \overset{\text{def.}}{=} d(x,y)$ genau dann wenn $x = y$. Symmetrie: Wir benutzen die absolute Homogenität der Norm. Für alle $x, y \in V$ gilt.

$$d(x,y) = ||x-y|| = ||-1 \cdot (y-x)|| = |-1| \cdot ||y-x|| = d(y,x).$$

Dreieckungleichung: Wir benutzen die Dreieckungleichung der Norm. Für all $x, y, z \in V$ gilt

$$d(x,z) = ||x-z|| = ||x-z+(y-y)|| \leq ||x-y|| + ||y-z|| = d(x,y) + d(y,z).$$

Wir zeigen, dass d wie in (1) eine Metrik ist. $i)$ gilt per Definition. $ii)$ sehen wir mit Fallunterscheidung. Für $x = z$ gilt die Ungleichung in $iii)$. Sei $x \neq z$, dann entweder $x \neq y$ oder $y \neq z$ für alle $y \in X$, denn sonst $x = z$.

Insbesondere induziert die d Metrik keine Norm, falls die Menge X kein Vektorraum ist. Sei nun $X = V$. Angenommen d induziert eine Norm, dann muss $||x|| := d(x,0)$ um die Definitheit sicherzustellen. Jedoch gilt für $0 \neq x$:

$$1 = d(x,0) = ||x|| = 2 \cdot ||\frac{1}{2}x \cdot 1|| = d(\frac{1}{2}x, 0) + d(\frac{1}{2}x, 0) = 2, \quad \lightning.$$

Lösung 1.9.2 (Aufgabe 1.8.2)**.** Wir weißen Definitheit und absolute Homogenität mit Fallunterscheidungen nach. Ebenso gilt die Dreiecksungleichung, wegen

$$\begin{aligned} |x+y| &:= \max(x+y, -x-y) \\ &\leq \max(x+y, -x+y, x-y, -x-y) = \max(x,-x) + \max(y,-y) = |x| + |y| \end{aligned}$$

für $x, y \in \mathbb{R}$.

„ii)": Die Aussage ist klar für $p = 1$ oder $x = y$. Sei also $p > 1$ und $y > x$ o.B.d.A, das heißt $y = x + \epsilon$ und $0 < q < 1$ für $q := 1/p$ und ein $\epsilon > 0$. Das Problem reduziert sich damit zur Ungleichung

$$l(x) := (2x+\epsilon)^q \leq x^q + (x+\epsilon)^q =: r(x).$$

1. Schritt: Wir zeigen, dass $l(x) < r(x)$ in einem Punkt und dass l langsamer wächst als r. Einsetzen liefert $l(\epsilon) < r(\epsilon)$ genau dann, wenn $3^q < 1 + 2^q$. Dies gilt, da die Funktion

$$\varphi(q) := 3^q - 1 - 2^q$$

auf dem Intervall $]0,1[$ streng monoton wächst und im Grenzwert 1 gilt $\varphi(1) = 0$. Wir leiten beide Seiten der Ungleichung $l(x) < r(x)$ ab und erhalten

$$2q\frac{1}{(2x+\epsilon)^{1-q}} < q\left(\frac{1}{x^{1-q}} + \frac{1}{(x+\epsilon)^{1-q}}\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad \Bigg(\underbrace{\frac{x+\epsilon}{2x+\epsilon}}_{<1}\Bigg)^{1-q} < \frac{1}{2}\Bigg(\underbrace{\frac{x+\epsilon}{x}}_{>1}\Bigg)^{1-q} + \frac{1}{2}. \tag{3}$$

2. Schritt: Ungleichung bis in die Null hinein. Leider können wir die Ableitung der Funktionen im Nullpunkt nicht vergleichen, da r in der Null nicht differenzierbar ist. Möglicherweise lässt sich r gegen eine im Nullpunkt differenzierbare Majorante von l abschätzen, wir finden jedoch ein einfacheres Argument: Wir zeigen, dass die Funktion $\gamma(x) := r(x) - l(x)$ auch auf $[0,\epsilon]$ nicht-negativ ist. Wir wissen bereits, dass $\gamma(x) > 0$ für $x \geq \epsilon$ und in der Null $\gamma(0) = 0$. Angenommen, es existiert ein $x_0 \in]0,\epsilon[$ welches die Ungleichung verletzt, also $\gamma(x_0) < 0$. Wegen Stetigkeit existiert dann mit dem Mittelwertsatz auch ein $x_1 \in]x_0,\epsilon[$, sodass $\gamma(x_1) = 0$. Dann mit dem Satz von Rolle auch ein $x_2 \in]0,x_1[$ mit $r'(x) = 0$, was im Widerspruch steht zu (3). □

Lösung 1.9.3 (Aufgabe 1.8.3)**.** Wir zeigen die drei Bedingungen in Definition 1.1.4.

„i": Wir zeigen $\emptyset \in \mathcal{T}$ und $X \in \mathcal{T}$. Es gilt $\emptyset \in \mathcal{T}$, da $\emptyset$ keine Elemente hat und deshalb die Bedingung an die (nicht existierenden) Elemente trivial erfüllt ist. Ferner gilt für alle $t \in X$ und $\epsilon > 0$

$$\{x \in X : d(x,t) < \epsilon\} \subseteq \{x \in X\} = X.$$

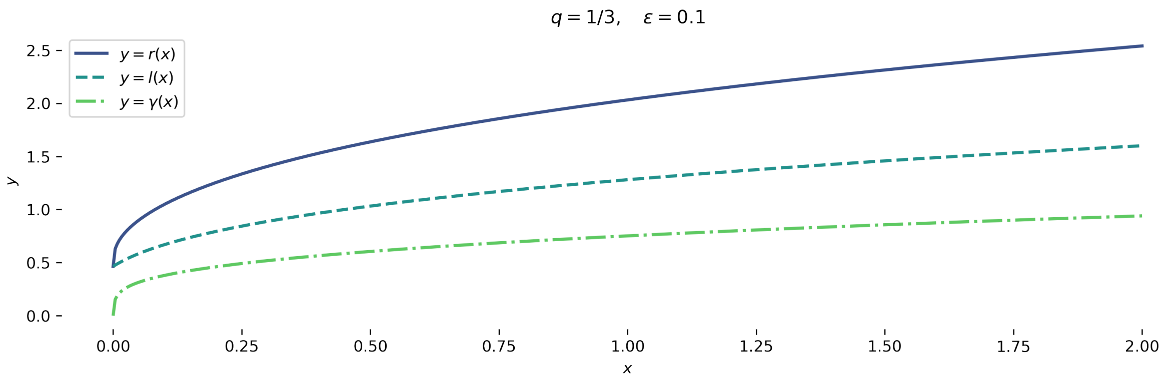

Abbildung 7: Plot von $r(x)$, $l(x)$ und der nicht-negativen Differenz $\gamma(x)$ wie in Lösung 1.9.2 für feste p, ϵ.

„ii“: Seien $T_1, \ldots, T_n \in \mathcal{T}$. Wir zeigen, dass für alle $t \in \bigcap_{i=1}^n T_i$ ein $\epsilon > 0$ existiert, sodass $\{x \in X : d(x,t) < \epsilon\} \subseteq \bigcap_{i=1}^n T_i$. Nach Voraussetzung existiert für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ und alle $t \in T_i$ ein $\epsilon_i > 0$, sodass

$$\{x \in X : d(x,t) < \epsilon_i\} \subseteq T_i.$$

Wähle $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$, dann gilt

$$\{x \in X : d(x,t) < \epsilon\} \subseteq \{x \in X : d(x,t) < \epsilon_i\} \subseteq T_i, \qquad (i \in \{1, \ldots, n\})$$

also auch $\{x \in X : d(x,t) < \epsilon\} \subseteq \bigcap_{i=1}^n T_i$. „iii“: Sei $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{T}$ und und $t \in \bigcup_{T \in \mathcal{W}} T$. Wir zeigen, dass ein $\epsilon > 0$ existiert mit $\{x \in X : d(x,t) < \epsilon\} \subseteq \bigcup_{T \in \mathcal{W}} T$. Wegen $t \in \bigcup_{T \in \mathcal{W}} T$ existiert ein $T \in \mathcal{W}$ mit $t \in T$ und (für dieses gewählte T) ein $\epsilon > 0$ mit $\{x \in X : d(x,t) < \epsilon\} \subseteq T$, also insbesondere

$$\{x \in X : d(x,t) < \epsilon\} \subseteq \bigcup_{T \in \mathcal{W}} T$$

was zu zeigen war.

Lösung 1.9.4 (Aufgabe 1.8.4)**.** „Offene Überdeckungseigenschaft“: Wir zeigen, dass eine offene Überdeckung existiert, sodass jede endliche Teilüberdeckung Elemente der offenen Einheitskreisscheibe verfehlt. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge die für $n \to \infty$ gegen 1 konvergiert, mit $a_n \in [0, 1[$. Dann existiert für alle $x \in B_1(0)$ ein $a_n > ||x||$ sodass $x \in B_{a_n}(0)$. Das bedeutet $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{a_n}(0)$ ist eine offene Überdeckung von $B_1(0)$. Jedoch existiert keine Endliche Teilüberdeckung, da für alle $I := \{i_1, \ldots, i_m\} \subset \mathbb{N}$ und $C := \max\{a_i \mid i \in I\}$ gilt $\overline{x} := ((1 + C)/2, 0) \in B_1(0)$ aber $\overline{x} \notin B_{i_1}(0) \cup \ldots \cup B_{i_m}(0)$.

„Cauchyfolgenkriterium“: Wir zeigen, dass es eine Cauchyfolge gibt, die keine in $B_1(0)$ konvergente Teilfolge besitzt. Das bedeutet Dann ist x_n eine Cauchyfolge in $B_1(0)$ die für $n \to \infty$ gegen $(1, 0)$ konvergiert. Sei $x_n := (1 - 1/n, 0)$ für $n \in \mathbb{N}$. Sei $\hat{x} \in B_1(0)$ beliebig und $(x_{i_n})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Wir wollen zeigen:

$$\exists \epsilon > 0 \; \forall N \in \mathbb{N} \; \exists n_i \geq N : \quad \|x_{n_i} - \hat{x}\| > \epsilon.$$

Sei $\epsilon = (1 - \|\hat{x}\|)/2 > 0$ und $\forall N \in \mathbb{N}$. Wähle $n > \lceil 2/(1 - ||\hat{x}||) \rceil$ und $n > N$, dann gilt

$$\|x_{i_n} - \hat{x}\| \geq \|1 - \frac{1}{i_n}\| - \|\hat{x}\| > 1 - \frac{1 - ||\hat{x}||}{2} - \|\hat{x}\| = \frac{1 - ||\hat{x}||}{2} = \epsilon.$$

Lösung 1.9.5 (Aufgabe 1.8.5)**.** „ii)“: Identifizieren wie (x, y) mit den Polarkoordinaten $(r \cdot \cos\varphi, r \cdot \sin\varphi)$ für $\varphi \in [-\pi, \pi[$ und $r \geq 0$. Da $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ und $r \geq 0$

$$f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \frac{|r|^{\frac{1}{2}} r^3 \cdot \sqrt{|\cos\varphi|}\sin^3\varphi}{r^2 \cdot 1} = r \cdot |r|^{\frac{1}{2}} \sqrt{|\cos\varphi|}\sin^3\varphi.$$

f ist stetig, da $f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ Produkt stetiger Funktionen ist. Insbesondere $(x, y) \to 0$ genau dann, wenn $r \to 0$, also ist f stetig in der Null.

„i)“: Dies können wir auch mit den ϵ-δ-Kriterium zeigen: Sei $\epsilon > 0$ und $\delta = \epsilon^{\frac{2}{3}}$, dann gilt für $|(x, y)^T| < \delta$, also $|r| < \delta$:

$$|f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) - f(0,0)| = |r|^{\frac{3}{2}} \cdot |\sqrt{|\cos\varphi|}\sin^3\varphi| \leq |r|^{\frac{3}{2}} < \delta^{\frac{3}{2}} = \epsilon.$$

„iii“: U ist gerade das Urbild $f^{-1}(-]-\infty, c[)$ einer offenen Menge unter einer stetigen Funktion, also mit Definition und Satz 1.1.5 offen.

„iv“: $B = f^{-1}(\{c\})$ ist das Komplement einer offenen Menge $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{c\})$ und damit abgeschlossen.

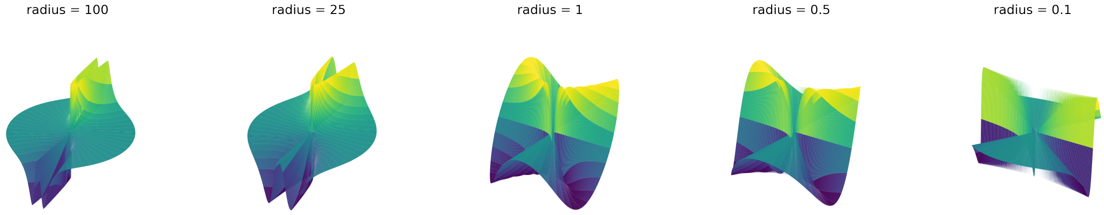

Abbildung 8: Plot von $B_r(0) \setminus \{(0,0)^T\} \ni (x,y)^T \mapsto \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$ mit variierendem Radius.

Lösung 1.9.6 (Aufgabe 1.8.6)**.** Beachte, dass $f(x,0) = 0 = f(0,y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$. Für eine Konstante $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sind $x \mapsto x \cdot y_0$ und $x \mapsto x^2 + y_0^2$ stetige Polynome. Da $x^2 + y^2 \neq 0$ ist gilt mit Lemma 1.1.6.ii) dass f im ersten Arguement stetig und analog im zweiten Argument stetig ist.

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $y_n := x_n^2$, dann $(x_n, y_n) \xrightarrow{n\to\infty} (0,0)$, aber

$$f(x_n, y_n) = \frac{x_n^2 \cdot y_n^2}{x_n^4 + y_n^4} = \frac{x_n^4}{x_n^4}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$