Liebe angehende Studierende, ich hoffe ihr könnt mit dem Merkblatt etwas anfangen!
viel Glück in der Vorlesung ☺

Notation 1 (Mengen)**.** Seien A, B zwei Mengen, a, b Elemente aus A respektive B und $\mathfrak{A}(a)$ eine Aussage die für a gilt, dann schreiben wir [1-9]

(i) $A \subseteq B$: A ist eine Teilmenge von B

(ii) $A \supseteq B$: A ist eine Obermenge von B

(iii) $A = B$: A ist gleich B

(iv) $A := B$: A ist definiert als B

(v) $a \in A$: a ist ein Element von A

(vi) $A \cup B$: Vereinigung von A und B

(vii) $A \cap B$: Durchschnitt von A und B

(viii) $A \setminus B$: Differenz von A und B (das heißt A „ohne“ B)

(ix) $A \times B$: Kartesisches Produkt von A und B.

Wir schreiben $B := \{a \in A : \mathfrak{A}(a)\}$ für die Menge aller a für die $\mathfrak{A}(a)$ (gilt) und erhalten das karthesische Produkt mit $A \times B := \{(a, b) : a \in A,\ b \in B\}$.

Aufgepasst! *die leere Menge $\emptyset := \{\}$ kann selbst ein Element einer Menge sein, also ist $\emptyset \neq \{\emptyset\}$.*

Bemerkung 2 (Zahlenmengen)**.** [1] [34-44]

$\{1, 2, 3, 42\} \subseteq \mathbb{N}$ $\quad \{-1, -2, -42, 27\} \subseteq \mathbb{Z}$ $\quad \{-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{42}{27}\} \subseteq \mathbb{Q}$ $\quad \{\pi, -\sqrt{2}, \sqrt[3]{9}\} \subseteq \mathbb{R}$ $\quad e \times 2 \cdot i \in \mathbb{C}$

Wir schreiben $\mathbb{N}_0$ für $\mathbb{N} \cup \{0\}$ und $\mathbb{R}_+$ für die positiven reellen Zahlen.

Notation 3 (Quantoren und Junktoren)**.** Seien $\mathfrak{A}(a)$, $\mathfrak{A}(b)$ Aussagen die für a respektive b gelten, dann benutzen wir die Quantoren [Vorlesung]

(i) $\exists a\ \mathfrak{A}(a)$: es existiert (mindestens) ein a sodas $\mathfrak{A}(a)$

(ii) $\exists! a\ \mathfrak{A}(a)$: es existiert genau ein a sodas $\mathfrak{A}(a)$

(iii) $\forall a\ \mathfrak{A}(a)$: für alle a (gilt) $\mathfrak{A}(a)$

und die Junktoren

(i) $\mathfrak{A}(a) \wedge \mathfrak{A}(b)$: $\mathfrak{A}(a)$ und $\mathfrak{A}(b)$

(ii) $\mathfrak{A}(a) \vee \mathfrak{A}(b)$: $\mathfrak{A}(a)$ oder $\mathfrak{A}(b)$

(iii) $\neg\mathfrak{A}(a)$: nicht $\mathfrak{A}(a)$

(iv) $\mathfrak{A}(a) \Rightarrow \mathfrak{A}(b)$: aus $\mathfrak{A}(a)$ folgt $\mathfrak{A}(b)$

(v) $\mathfrak{A}(a) \Leftarrow \mathfrak{A}(b)$: $\mathfrak{A}(a)$ folgt aus $\mathfrak{A}(b)$

(vi) $\mathfrak{A}(a) \Leftrightarrow \mathfrak{A}(b)$: $\mathfrak{A}(a)$ genau dann, wenn $\mathfrak{A}(b)$.

Aufgepasst! *bei „$\vee$“ handelt es sich um ein einschließendes oder, das heißt, $\mathfrak{A}(a) \wedge \mathfrak{A}(b) \Rightarrow \mathfrak{A}(a) \vee \mathfrak{A}(b)$.*

Rechenregel 4 (Brüche und Potenzen)**.** Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dann gilt [14,15] [17-19] [21,22] usw.

(i) $\frac{-a}{c} = -\frac{a}{c} = \frac{a}{-c}$

(ii) $\frac{a \cdot b}{c \cdot b} = \frac{a}{c}$

(iii) $a^{-\frac{b}{c}} = \frac{1}{\sqrt[c]{a^b}}$

(iv) $\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$

(v) $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{c \cdot d}$

(vi) $\frac{a}{c} - \frac{b}{d} = \frac{a \cdot d - c \cdot b}{c \cdot d}$

(vii) $\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{a \cdot b}{c \cdot d}$

(viii) $\frac{a}{c} : \frac{b}{d} = \frac{a \cdot d}{c \cdot b}$.

Weiterhin gelten für $a, b, c \in \mathbb{R}$ die Potenzgesetze

(ix) $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$

(x) $a^c \cdot b^c = (a \cdot b)^c$

(xi) $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$

(xii) $\frac{a^b}{d^b} = (\frac{a}{d})^b$.

Aufgepasst! *es gilt $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ aber $\frac{a}{b+c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$ (wobei $c \neq 0$ und $b \neq -c$).*

Rechenregel 5 (Quadratische Gleichungen)**.** Wir betrachten die Unbekannte x und die Koeffizienten a, b, c auf den reellen Zahlen, dann gilt [20]

(i) $a = 1$: $\quad a \cdot x^2 + bx + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{(\frac{b}{2})^2 - c} \quad \wedge \quad (\frac{b}{2})^2 - c) \geq 0$

(ii) $a \neq 0$: $\quad a \cdot x^2 + bx + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \quad \wedge \quad b^2 - 4 \cdot a \cdot c \geq 0$

[34] [38] [43] [45] **Definition 6** (Folge)**.** Eine unendliche Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (a_0, a_1, ..., a_n, ...)$ auf den reellen Zahlen ist eine Abbildung, die jeder natürlichen Zahl n inklusive der Null eine reelle Zahl a_n zuordnet. Eine Folge

(i) ist positiv, wenn alle a_n positiv sind,

(ii) ist [streng] monoton fallend (steigend), wenn für alle $n \in \mathbb{N}$: $a_n \overset{[>]}{\geq} a_{n+1}$ $(a_n \overset{[<]}{\leq} a_{n-1})$

(iii) ist beschränkt, wenn es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, sodas für alle $n \in \mathbb{N}$: $-m < a_n < m$

(iv) konvergiert gegen a, wenn für alle $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ exitiert, sodas für alle $n \geq N$: $|a_n - a| < \epsilon$.

Wir nennen a den Grenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und schreiben $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$ oder $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

AUFGEPASST! *die Abbildungsvorschrift darf auch rekursiv angegeben werden, das heißt, dass sich ein Folgeglied aus den vorhergehenden Gliedern berechnen lässt.*

[33] [40,41] **Definition 7** (Binominalkoeffizient)**.** Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$ wobei $k \leq n$, dann definieren wir den Binominalkoeffizienten $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$, wobei $n! := n \cdot (n-1)!$ und $0! := 1$.

AUFGEPASST! *aus $n! = n \cdot (n-1)!$ folgt z. B., dass $(n-(k-1))! = ((n+1)-k) \cdot (n-k)!$.*

[34-43] **Beweisverfahren 8** (vollständige Induktion)**.** Ausdrücke die von natürlichen Zahlen abhängen, können mit vollständiger Induktion beweisen:

0. aufstellen einer Induktionsannahme, der Aussage $\mathfrak{A}(n)$ die wir beweisen $\longrightarrow$

1. Beweis von $\mathfrak{A}(n)$ für ein minimales n_0, meist $\mathfrak{A}(0)$ oder $\mathfrak{A}(1)$ $\downarrow$

2. Beweis von $\mathfrak{A}(n+1)$ für ein beliebiges (aber festes) n $\longrightarrow$ *dabei dürfen wir $\mathfrak{A}(n)$ als bewiesen voraussetzen.*

[34-43] **Beispiel 9** (Vollständige Induktion)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$ und $n!$ (Fakultät) wie in Definition 7, dann erhalten wir

0. die Induktionsannahme: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$

1. den Induktionsanfang: $1! = 1 \cdot 0! = 1 \cdot 1 = 1$

2. den Induktionsschritt: $(n+1)! \overset{\text{Def 7}}{=} (n+1) \cdot n! \overset{\text{IA}}{=} (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$

womit wir die Aussage mit Beweisverfahren 8 gezeigt haben.

[36-42] **Definition 10** (Partialsummen)**.** Sei $(a_0, a_1, ..., a_n, ...)$ eine Folge wie in Definition 6, dann definieren wir die Partialsummen der ersten $n+1$ Glieder mit $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$. Einige wichtige Partialsummen sind

$\sum_k^n (2k-1) = n^2$
die (ersten) ungeraden Zahlen

$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
die (ersten) Quadratzahlen

$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$
Gaußsche Summenformel

$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad (q \neq 0)$
geometrische Reihe

$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad (0^0 := 1)$
Binomischer Lehrsatz

AUFGEPASST! *die meisten Partialsummenformeln lassen sich mit Beweisverfahren 8 zeigen.*

Definition 11 (Funktion)**.** Eine Abildung f, die jedem x aus dem Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}$ ein $f(x)$ aus dem Wertebereich $W_f \subseteq \mathbb{R}$ zuweist, nennen wir Funktion auf den reellen Zahlen und schreiben $f : D_f \to W_f$, $x \mapsto f(x)$. Wir nennen die Funktion

(i) injektiv, wenn für alle $x, y \in D_f$ mit $f(x) = f(y)$ folgt, dass $x = y$

(ii) surjektiv, wenn $W = \{f(x) : x \in D_f\}$

(iii) bijektiv, wenn f injektiv und surjektiv ist.

Ferner sagen f ist stetig im Punkt $x_0 \in D_f$, wenn

(iv) für alle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf D_f mit $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a : \lim_{a_n\to a} f(a_n) = f(a)$

(v) für alle $\epsilon > 0$ existiert $\beta > 0$, sodas für alle $x \in D_f$ mit $|x - x_0| < \beta : |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

Wir nennen eine Funktion stetig, wenn sie in allen $x_0 \in D_f$ stetig ist.

AUFGEPASST! *um Stetigkeit zu zeigen, können wir uns eines der Kriterien (iv) oder (v) aussuchen.*

Definition 12 (Ableitung)**.** Existiert für $f : D_f := (a, ..., b) \to W_f : x \mapsto f(x)$ und $x_0 \in D_f$ der Grenzwert $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x_0)$ sagen wir f ist differenzierbar in x_0. Ist f differenzierbar in allen $x_0 \in D_f$ sagen wir f ist differenzierbar auf dem offenen Intervall $(a, ..., b)$. Wir bezeichnen $f' : D_f \to W_{f'}$, $x \mapsto f'(x)$ als die erste und (falls existent) $f^{(n)}$ als die n-te Ableitung von f. Wir sagen f ist (n-mal) stetig differenzierbar, wenn f' ($f^{(n)}$) stetig ist.

AUFGEPASST! *differenzierbare Funktionen sind stetig, stetige Funktionen nicht immer differenzierbar.*

Rechenregel 13 (Ableitungsregeln)**.** Seien f, g und $g \circ f : D_f \to W_f \subseteq D_g \to W_g$, $x \mapsto (g \circ f)(x) := g(f(x))$ differenzierbare Funktionen und $a, b \in \mathbb{R}$ Konstanten, dann gilt

$$(af + g)' = af' + g'$$
Summen- und Faktorregel

$$(\mathrm{e}^{ax+b})' = a\mathrm{e}^{ax+b}$$
e-Funktion

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$$
Logarithmische Ableitung

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$
Potenzregel

$$(fg)' = f'g + fg' \quad \Leftarrow$$
Produktregel

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$
Leibnizsche Regel

$$(g \circ f)'(x) = (g(f(x))'f(x)'$$
Kettenregel

Satz 14 (Hauptsatz der Differential und Integralrechnung)**.** Sei f auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ an (höchstens) endlich vielen Punkten nicht stetig, dann ist $F : D_f \to W_F$, $x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(x_0)$ differenzierbar und es gilt $F' = f$.

AUFGEPASST! *wir differenzieren auf offenen und integrieren auf abgeschlossenen Intervallen.*

Rechenregel 15 (Integrationsregeln)**.** Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ in (höchstens) endlich vielen Punkte nicht stetig, $a, b, n \in \mathbb{R}$ Konstanten und $f(x)\Big|_a^b := f(b) - f(a)$, dann gilt

$$\int_a^b af + g\,\mathrm{d}x = a\int_a^b f\,\mathrm{d}x + \int_a^b g\,\mathrm{d}x$$
Linearität des Integrals

$$\int_a^b x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1}\Big|_a^b \quad (n \neq 1)$$
Potenzregel

$$\int_a^b \mathrm{e}^{ax+b}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax+b}\Big|_a^b$$
e-Funktion

$$\int_a^b \ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{x}\Big|_a^b \quad (x > 0)$$
natürlicher Logarithmus

Sind ferner F wie in Satz 14, g und $\phi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ stetig differenzierbar, erhalten wir

$$\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'\,\mathrm{d}t = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x$$
Integration durch Substitution

$$\int_a^b f(x)h(x)\,\mathrm{d}x = F(x)h(x)\Big|_a^b - \int_a^b = F(x)h'(x)\,\mathrm{d}x$$
Partielle Integration

AUFGEPASST! *Integration durch Substitution können wir in beide Richtungen anwenden.*