

*Liebe angehende Studierende, ich hoffe ihr könnt mit dem Merkblatt etwas anfangen!
viel Glück in der Vorlesung ☺*

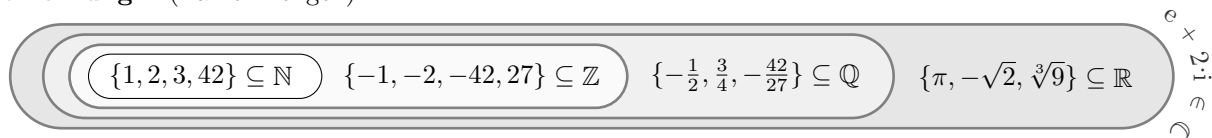
Notation 1 (Mengen). Seien A, B zwei Mengen, a, b Elemente aus A respektive B und $\mathfrak{A}(a)$ eine Aussage [1-9]
die für a gilt, dann schreiben wir

- | | |
|---|---|
| (i) $A \subseteq B$: A ist eine Teilmenge von B | (vi) $A \cup B$: Vereinigung von A und B |
| (ii) $A \supseteq B$: A ist eine Obermenge von B | (vii) $A \cap B$: Durchschnitt von A und B |
| (iii) $A = B$: A ist gleich B | (viii) $A \setminus B$: Differenz von A und B
(das heißt A „ohne“ B) |
| (iv) $A := B$: A ist definiert als B | |
| (v) $a \in A$: a ist ein Element von A | (ix) $A \times B$: Kartesisches Produkt von A und B . |

Wir schreiben $B := \{a \in A : \mathfrak{A}(a)\}$ für die Menge aller a für die $\mathfrak{A}(a)$ (gilt) und erhalten das karthesische Produkt mit $A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$.

AUFGEPASST! die leere Menge $\emptyset := \{\}$ kann selbst ein Element einer Menge sein, also ist $\emptyset \neq \{\emptyset\}$.

Bemerkung 2 (Zahlenmengen).



AUFGEPASST! wir schreiben \mathbb{N}_0 für $\mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}_{\geq m}$ für $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq m\}$ wobei $m \in \mathbb{Z}$ und \mathbb{R}_+ für die positiven reellen Zahlen.

Notation 3 (Quantoren und Junktoren). Seien $\mathfrak{A}(a)$, $\mathfrak{A}(b)$ Aussagen die für a respektive b gelten, dann [Vorlesung]
benutzen wir die Quantoren

- | | |
|---|---|
| (i) $\exists a \mathfrak{A}(a)$: es existiert (mindestens) ein a sodas $\mathfrak{A}(a)$ | (iii) $\forall a \mathfrak{A}(a)$: für alle a (gilt) $\mathfrak{A}(a)$ |
| (ii) $\exists! a \mathfrak{A}(a)$: es existiert genau ein a sodas $\mathfrak{A}(a)$ | |

und die Junktoren

- | | |
|--|---|
| (i) $\mathfrak{A}(a) \wedge \mathfrak{A}(b)$: $\mathfrak{A}(a)$ und $\mathfrak{A}(b)$ | (iv) $\mathfrak{A}(a) \Rightarrow \mathfrak{A}(b)$: aus $\mathfrak{A}(a)$ folgt $\mathfrak{A}(b)$ |
| (ii) $\mathfrak{A}(a) \vee \mathfrak{A}(b)$: $\mathfrak{A}(a)$ oder $\mathfrak{A}(b)$ | (v) $\mathfrak{A}(a) \Leftarrow \mathfrak{A}(b)$: $\mathfrak{A}(a)$ folgt aus $\mathfrak{A}(b)$ |
| (iii) $\neg \mathfrak{A}(a)$: nicht $\mathfrak{A}(a)$ | (vi) $\mathfrak{A}(a) \Leftrightarrow \mathfrak{A}(b)$: $\mathfrak{A}(a)$ genau dann, wenn $\mathfrak{A}(b)$. |

AUFGEPASST! bei „ \vee “ handelt es sich um ein einschließendes oder, das heißt, $\mathfrak{A}(a) \wedge \mathfrak{A}(b) \Rightarrow \mathfrak{A}(a) \vee \mathfrak{A}(b)$.

Rechenregel 4 (Brüche und Potenzen). Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dann gilt

- | | | | |
|--|--|--|---|
| (i) $\frac{-a}{c} = -\frac{a}{c} = \frac{a}{-c}$ | (iii) $a^{-\frac{b}{c}} = \frac{1}{\sqrt[c]{a^b}}$ | (v) $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{c \cdot d}$ | (vii) $\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{a \cdot b}{c \cdot d}$ |
| (ii) $\frac{a \cdot b}{c \cdot d} = \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d}$ | (iv) $\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$ | (vi) $\frac{a}{c} - \frac{b}{d} = \frac{a \cdot d - c \cdot b}{c \cdot d}$ | (viii) $\frac{a}{c} : \frac{b}{d} = \frac{a \cdot d}{c \cdot b}$ |

[14,15]
[17-19]
[21,22]
usw.

Weiterhin gelten für $a, b, c \in \mathbb{R}$ die Potenzgesetze

- | | | | |
|--------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------|--|
| (ix) $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$ | (x) $a^c \cdot b^c = (a \cdot b)^c$ | (xi) $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$ | (xii) $\frac{a^b}{d^b} = \left(\frac{a}{d}\right)^b$ |
|--------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------|--|

AUFGEPASST! es gilt $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ aber $\frac{a}{b+c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$ (wobei $c \neq 0$ und $b \neq -c$).

Rechenregel 5 (Quadratische Gleichungen). Wir betrachten die Unbekannte x und die Koeffizienten a, b, c [20]
auf den reellen Zahlen, dann gilt

- | |
|--|
| (i) $a = 1$: $a \cdot x^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} \wedge \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c \geq 0$ |
| (ii) $a \neq 0$: $a \cdot x^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \wedge b^2 - 4 \cdot a \cdot c \geq 0$ |

[34] **Definition 6** (Folge). Eine unendliche Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} := (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ auf den reellen Zahlen ist eine
 [38] Abbildung, die jeder natürlichen Zahl n inklusive der Null eine reelle Zahl a_n zuordnet. Eine Folge

[43]
 [45]

- (i) ist positiv (nicht negativ), wenn alle a_n positiv (nicht negativ) sind,
- (ii) ist [streng] monoton fallend (steigend), wenn für alle $n \in \mathbb{N}$: $a_n \stackrel{[>]}{\geq} a_{n+1}$ ($a_n \stackrel{[<]}{\leq} a_{n+1}$)
- (iii) ist beschränkt, wenn es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$: $-m \leq a_n \leq m$
- (iv) konvergiert gegen a , wenn für alle $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n \geq N$: $|a_n - a| < \epsilon$.

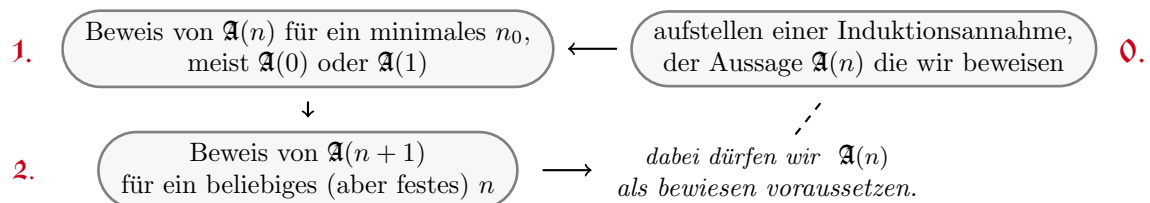
Wir nennen a den Grenzwert von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und schreiben $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ oder $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

AUFGEPASST! die Abbildungsvorschrift darf auch rekursiv angegeben werden, das heißt, dass sich ein Folgenglied aus den vorhergehenden Gliedern berechnen lässt.

[33] **Definition 7** (Binominalkoeffizient). Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$ wobei $k \leq n$, dann definieren wir den Binominalkoeffizienten $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$, wobei $n! := n \cdot (n-1)!$ und $0! := 1$.
 [40,41]

AUFGEPASST! aus $n! = n \cdot (n-1)!$ folgt z. B., dass $(n - (k-1))! = ((n+1) - k) \cdot (n-k)!$.

[34-43] **Beweisverfahren 8** (vollständige Induktion). Ausdrücke die von natürlichen Zahlen abhängen, können mit vollständiger Induktion beweisen:



[34-43] **Beispiel 9** (Vollständige Induktion). Sei $n \in \mathbb{N}$ und $n!$ (Fakultät) wie in Definition 7, dann erhalten wir

- 0. die Induktionsannahme: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$
- 1. den Induktionsanfang: $1! = 1 \cdot 0! = 1 \cdot 1 = 1$
- 2. den Induktionsschritt: $(n+1)! \stackrel{\text{Def}}{=} (n+1) \cdot n! \stackrel{\text{IA}}{=} (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$

womit wir die Aussage mit Beweisverfahren 8 gezeigt haben.

[36-42] **Definition 10** (Partiellsummen). Sei $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ eine Folge wie in Definition 6, dann definieren wir die Partiellsummen der ersten $n+1$ Glieder mit $s_n := \sum_{k=0}^n a_k$. Einige wichtige Partiellsummen sind

$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$	$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$
die (ersten) ungeraden Zahlen	die (ersten) Quadratzahlen	Gaußsche Summenformel
$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad (q \neq 0)$	$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad (0^0 := 1)$	
geometrische Reihe	Binomischer Lehrsatz	

AUFGEPASST! die meisten Partiellsummenformeln lassen sich mit Beweisverfahren 8 zeigen.

Definition 11 (Funktion). Eine Abbildung f , die jedem x aus dem Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}$ ein $f(x)$ aus dem Wertebereich $W_f \subseteq \mathbb{R}$ zuweist, nennen wir Funktion auf den reellen Zahlen und schreiben $f : D_f \rightarrow W_f$, $x \mapsto f(x)$. Wir nennen die Funktion [21] [54-56]

- (i) injektiv, wenn für alle $x, y \in D_f$ mit $f(x) = f(y)$ folgt, dass $x = y$
- (ii) surjektiv, wenn $W_f = \{f(x) : x \in D_f\}$
- (iii) bijektiv, wenn f injektiv und surjektiv ist.

Ferner sagen f ist stetig im Punkt $x_0 \in D_f$, wenn

- (iv) für alle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf D_f mit $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a : \lim_{a_n \rightarrow a} f(a_n) = f(a)$
- (v) für alle $\epsilon > 0$ existiert $\beta > 0$, sodass für alle $x \in D_f$ mit $|x - x_0| < \beta : |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

Wir nennen eine Funktion stetig, wenn sie in allen $x_0 \in D_f$ stetig ist.

AUFGEPASST! um Stetigkeit zu zeigen, können wir uns eines der Kriterien (iv) oder (v) aussuchen.

Definition 12 (Ableitung). Existiert für $f : D_f := (a, \dots, b) \rightarrow W_f : x \mapsto f(x)$ und $x_0 \in D_f$ der Grenzwert $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$ sagen wir f ist differenzierbar in x_0 . Ist f differenzierbar in allen $x_0 \in D_f$ sagen wir f ist differenzierbar auf dem offenen Intervall (a, \dots, b) . Wir bezeichnen $f' : D_f \rightarrow W_{f'}$, $x \mapsto f'(x)$ als die erste und (falls existent) $f^{(n)}$ als die n -te Ableitung von f . Wir sagen f ist (n -mal) stetig differenzierbar, wenn f' ($f^{(n)}$) stetig ist. [81,82] [90]

AUFGEPASST! differenzierbare Funktionen sind stetig, stetige Funktionen nicht immer differenzierbar.

Rechenregel 13 (Ableitungsregeln). Seien f, g und $g \circ f : D_f \rightarrow W_f \subseteq D_g \rightarrow W_g$, $x \mapsto (g \circ f)(x) := g(f(x))$ differenzierbare Funktionen und $a, b \in \mathbb{R}$ Konstanten, dann gilt [79-83]

$(af + g)' = af' + g'$	$(e^{ax+b})' = ae^{ax+b}$	$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$	$(x^n)' = nx^{n-1}$
Summen- und Faktorregel	e-Funktion	Logarithmische Ableitung	Potenzregel
$(fg)' = f'g + fg'$	$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$	$(g \circ f)'(x) = (g(f(x)))' f'(x)$	
Produktregel	Leibnizsche Regel	Kettenregel	

Satz 14 (Hauptsatz der Differential und Integralrechnung). Sei f auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ an (höchstens) endlich vielen Punkten nicht stetig, dann ist die Stammfunktion $F : D_f \rightarrow W_F$, $x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt = F(x) - F(x_0)$ differenzierbar und es gilt $F' = f$. [92] [96]

AUFGEPASST! wir differenzieren auf offenen und integrieren auf abgeschlossenen Intervallen.

Rechenregel 15 (Integrationsregeln). Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ in (höchstens) endlich vielen Punkte nicht stetig, $a, b, n \in \mathbb{R}$ Konstanten und $f(x)|_a^b := f(b) - f(a)$, dann gilt [95-99]

$\int_a^b af + g dx = a \int_a^b f dx + \int_a^b g dx$	$\int_a^b x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \Big _a^b \quad (n \neq -1)$
Linearität des Integrals	Potenzregel
$\int_a^b e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} \Big _a^b$	$\int_a^b \ln(x) dx = \frac{1}{x} \Big _a^b \quad (x > 0)$
e-Funktion	natürlicher Logarithmus

Sind ferner F, g und $\phi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ stetig differenzierbar, erhalten wir

$\int_\alpha^\beta f(\phi(t)) \phi'(t) dt = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x) dx$	$\int_a^b f(x) h(x) dx = F(x) h(x) \Big _a^b - \int_a^b F(x) h'(x) dx$
Integration durch Substitution	Partielle Integration

AUFGEPASST! Integration durch Substitution können wir in beide Richtungen anwenden.

Definition 16 (Gruppe). Eine Menge G mit einer inneren Verknüpfung $G \times G \rightarrow G$, $(a, b) \rightarrow a \circ b$, heißt eine [kommutative] Gruppe, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- (i) $(a \circ b) \circ c = c \circ (b \circ c)$ für alle $a, b, c \in G$. (Assoziativität)
- (ii) Es existiert ein $e \in G$ sodass $e \circ a = a$ für alle $a \in G$. (neutrales Element)
- (iii) Zu jedem $a \in G$ gibt es ein $b \in G$ sodass $a \circ b = e$. (inverses Element)
- (iv) $a \circ b = b \circ a$ für alle $a, b \in G$. [Kommutativität]

Für eine natürliche Zahl n und $g \in G$ schreiben wir g^n oder $n \cdot g$ für $\overbrace{g \circ g \circ \dots \circ g}^{n \text{ mal}}$. Wir schreiben 1_G für das neutrale Element in (G, \circ) und g^{-1} für das inverse Element von $g \in G$.

1 Lemma 17. Ist (G, \circ) eine Gruppe mit neutralem Element 1_G dann bezeichnen wir das inverse Element von $a \in G$ mit a^{-1} und es gilt

- (i) 1_G ist eindeutig und kommutativ
- (ii) a^{-1} ist eindeutig und kommutativ
- (iii) das Inverse des Inversen von a ist a
- (iv) das Inverse von $a \circ b$ ist $b^{-1} \circ a^{-1}$

Definition 18 (Untergruppe). Sei (G, \circ) eine Gruppe und U eine nichtleere Teilmenge von G . Ist (U, \circ) selbst eine Gruppe sagen wir U ist eine Untergruppe von G und schreiben $U \leq G$.

2 Lemma 19. Eine nichtleere Teilmenge U von G ist eine Untergruppe (U, \circ) von (G, \circ) genau dann, wenn für alle $a, b \in U$ auch $a \circ b^{-1} \in U$.

3 Definition 20 (Mächtigkeit). Zwei Mengen $A, B \neq \emptyset$ nennen wir gleichmächtig, wenn eine bijektive Abbildung $f : A \rightarrow B$ existiert. Wir schreiben $A \cong B$.

6 Lemma 21. Seien (G, \circ) und $(H, *)$ Gruppen, $K := G \times H$ und $\bullet : K \times K \rightarrow K$, $(g, h) \times (g', h') \mapsto (g \circ g', h * h')$. Dann ist (K, \bullet) eine Gruppe und kommutativ genau dann, wenn (G, \circ) und $(H, *)$ kommutativ sind.

5 Definition 22 (Gruppenhomomorphismus). Seien (G, \circ) und $(H, *)$ Gruppen und $U \leq H$ eine Untergruppe von H . Wir nennen die Abbildung $\alpha : G \rightarrow H$ Gruppenhomomorphismus, wenn für alle $g, h \in G$ gilt $\alpha(g \circ h) = \alpha(g) * \alpha(h)$. Wir nennen

- (i) $\text{Im}(\alpha) := \{\alpha(g)\}$ das Bild von α
- (ii) $\alpha^{-1}(U) := \{g \in G : \alpha(g) \in U\}$ das Urbild von U unter α
- (iii) $\text{Ker}(\alpha) := \{g \in G : \alpha(g) = 1_H\}$ den Kern von α .

4 Lemma 23. Ist $\alpha : (G, \circ) \rightarrow (H, *)$ ein Gruppenhomomorphismus und $g \in G$, dann gilt $\alpha(g^{-1}) = \alpha(g)^{-1}$ und $\alpha(1_G) = 1_H$.

6 Lemma 24. Ist $\alpha : (G, \circ) \rightarrow (H, *)$ ein Gruppenhomomorphismus, dann ist α injektiv genau dann, wenn $\text{Ker}(\alpha) = \{1_G\}$. Gilt ferner $G \cong H$ dann sind folgende Aussagen äquivalent

- (i) α ist injektiv
- (ii) α ist surjektiv
- (iii) α ist bijektiv.

Aufgabe 1 (Gruppeneigenschaften). Sei (G, \circ) eine Gruppe. Zeige, dass für alle $a, a', b, b' \in (G, \circ)$ gilt [17]

- (i).1 $a \circ 1_G = a = 1_G \circ a$ (ii).1 ist $b \circ a = 1_G$ folgt $a \circ b = 1_G$ (iii) $(a^{-1})^{-1} = a$
 (i).2 wenn $a \circ a' = a$ folgt $a' = 1_G$ (ii).2 wenn $a \circ b' = 1_G$ folgt $b = b'$ (iii) $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$

Zeige ferner, dass (G, \circ) kommutativ ist, wenn für alle $a, b \in G$ gilt

- (iv) $a = a^{-1}$ (v) $(a \circ b)^2 = a^2 \circ b^2$.

Aufgabe 2. Zeige, dass eine nichtleere Teilmenge U der Gruppe (G, \circ) wobei [18]

- (i) $\circ : U \times U \rightarrow U$ (ii) für $g \in U$ auch $g^{-1} \in U$ [19]

eine Untergruppe von G ist. Benutze (i) und (ii) um Lemma 19 zu beweisen.

LÖSUNGSHINWEIS zeige für Lemma 19 die Hinrichtung „ \Rightarrow “ und die Rückrichtung „ \Leftarrow “ nacheinander.

Aufgabe 3 (Mächtigkeit). Prüfe die Gleichmächtigkeit der Mengen [2]

- (i) \mathbb{N} und $\mathbb{Z}_{\geq m}$ (ii) \mathbb{N} und \mathbb{Z} (iii) \mathbb{N} und \mathbb{Q} (iv) \mathbb{N} und \mathbb{R} [20]

Aufgabe 4. Sei $\alpha : (G, \circ) \rightarrow (H, *)$ ein Gruppenhomomorphismus und $g \in G$. Untersuche $\alpha(g^{-1}) * \alpha(g)$ [23]
 und beweise dann Lemma 23.

Aufgabe 5. Sei $\alpha : (G, \circ) \rightarrow (H, *)$ ein Gruppenhomomorphismus und $g \in G$. Zeige, [22]

- (i) $\text{Ker}(\alpha) \leq G$ (ii) $\text{Im}(\alpha) \leq H$ (iii) $\alpha^{-1}(\alpha(g)) = \{g \circ h : h \in \text{Ker}(\alpha)\}$.

Aufgabe 6 (Zwölfeck). Betrachten wir ein regelmäßiges Zwölfeck, welches sich durch Drehungen um Vielfache von 45 Grad wieder in sich selbst überführen lässt. Für ein $k \in (0, 1, \dots, 7)$ schreiben wir d_k für eine Drehung um $k \cdot 45^\circ$. Da eine Drehung um 360 Grad der Identität entspricht gilt für ein $m \in \mathbb{N}_0 : d_m = d_k$ wobei k der Rest von m bei Teilung durch 8 ist.

- (i) Zeige mit Definition 16, dass die Drehungen zusammen mit der Hintereinanderausführung \circ als Verknüpfung eine Gruppe $\bigcirc = \{k_0, k_1, \dots, k_7\}$ bilden. [16]

- (ii) Zeige mit Lemma 19, dass $\bigcirc := \{k_0, k_2, k_4, k_6\}$ eine Untergruppe von \bigcirc ist [19]

LÖSUNGSHINWEIS was ist das Inverse der Drehung k_m ?

Betrachten wir die Abbildung $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow \bigcirc, k \mapsto \text{Drehung um } k \cdot 30^\circ$. Bestimme die Mengen [24]

- (iii) $\{k \in \mathbb{Z} : \phi(k) = k_0\}$ und zeige dann (vi) ϕ ist surjektiv
 (iv) $\phi^{-1}(\bigcirc)$ in \mathbb{Z} (v) ϕ ist ein Homomorphismus (vii) ϕ ist nicht bijektiv.

Bestimme eine weitere Untergruppe $\bigcirc \leq \bigcirc$, sodass $\bigcirc \times \bigcirc \cong \bigcirc$. Gebe dazu die bijektiven [21]
 Abbildungen $f, \alpha, \beta : \bigcirc \times \bigcirc \rightarrow \bigcirc$ an, sodass gilt [22]

- (viii) f ist nicht homomorph (ix) α ist homomorph (x) $\beta \neq \alpha$ ist homomorph.