

Liebe angehende Studierende, ich hoffe ihr könnt mit dem Merkblatt etwas anfangen!  
viel Glück in der Vorlesung ☺

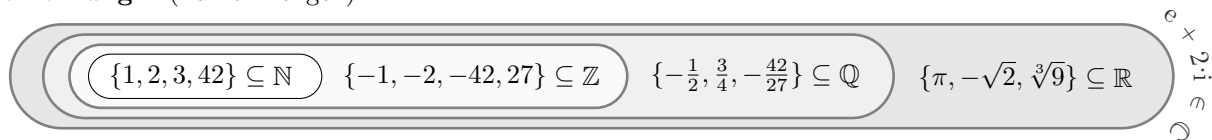
**Notation 1** (Mengen). Seien  $A, B$  zwei Mengen,  $a, b$  Elemente aus  $A$  respektive  $B$  und  $\mathfrak{A}(a)$  eine Aussage [1-9]  
die für  $a$  gilt, dann schreiben wir

- |   |   |
|---|---|
| (i) $A \subseteq B$ : $A$ ist eine Teilmenge von $B$  | (vi) $A \cup B$ : Vereinigung von $A$ und $B$                                     |
| (ii) $A \supseteq B$ : $A$ ist eine Obermenge von $B$ | (vii) $A \cap B$ : Durchschnitt von $A$ und $B$                                   |
| (iii) $A = B$ : $A$ ist gleich $B$                    | (viii) $A \setminus B$ : Differenz von $A$ und $B$<br>(das heißt $A$ „ohne“ $B$ ) |
| (iv) $A := B$ : $A$ ist definiert als $B$             |   |
| (v) $a \in A$ : $a$ ist ein Element von $A$           | (ix) $A \times B$ : Kartesisches Produkt von $A$ und $B$ .                        |

Wir schreiben  $B := \{a \in A : \mathfrak{A}(a)\}$  für die Menge aller  $a$  für die  $\mathfrak{A}(a)$  (gilt) und erhalten das karthesische Produkt mit  $A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ .

**AUFGEPASST!** die leere Menge  $\emptyset := \{\}$  kann selbst ein Element einer Menge sein, also ist  $\emptyset \neq \{\emptyset\}$ .

**Bemerkung 2** (Zahlenmengen).



**AUFGEPASST!** wir schreiben  $\mathbb{N}_0$  für  $\mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $\mathbb{Z}_{\geq m}$  für  $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq m\}$  wobei  $m \in \mathbb{Z}$  und  $\mathbb{R}_+$  für die positiven reellen Zahlen.

**Notation 3** (Quantoren und Junktoren). Seien  $\mathfrak{A}(a)$ ,  $\mathfrak{A}(b)$  Aussagen die für  $a$  respektive  $b$  gelten, dann [Vorlesung]  
benutzen wir die Quantoren

- |   |   |
|---|---|
| (i) $\exists a \mathfrak{A}(a)$ : es existiert (mindestens) ein $a$ sodas $\mathfrak{A}(a)$ | (iii) $\forall a \mathfrak{A}(a)$ : für alle $a$ (gilt) $\mathfrak{A}(a)$ |
| (ii) $\exists! a \mathfrak{A}(a)$ : es existiert genau ein $a$ sodas $\mathfrak{A}(a)$      |   |

und die Junktoren

- |  |   |
|--|---|
| (i) $\mathfrak{A}(a) \wedge \mathfrak{A}(b)$ : $\mathfrak{A}(a)$ und $\mathfrak{A}(b)$ | (iv) $\mathfrak{A}(a) \Rightarrow \mathfrak{A}(b)$ : aus $\mathfrak{A}(a)$ folgt $\mathfrak{A}(b)$              |
| (ii) $\mathfrak{A}(a) \vee \mathfrak{A}(b)$ : $\mathfrak{A}(a)$ oder $\mathfrak{A}(b)$ | (v) $\mathfrak{A}(a) \Leftarrow \mathfrak{A}(b)$ : $\mathfrak{A}(a)$ folgt aus $\mathfrak{A}(b)$                |
| (iii) $\neg \mathfrak{A}(a)$ : nicht $\mathfrak{A}(a)$                                 | (vi) $\mathfrak{A}(a) \Leftrightarrow \mathfrak{A}(b)$ : $\mathfrak{A}(a)$ genau dann, wenn $\mathfrak{A}(b)$ . |

**AUFGEPASST!** bei „ $\vee$ “ handelt es sich um ein einschließendes oder, das heißt,  $\mathfrak{A}(a) \wedge \mathfrak{A}(b) \Rightarrow \mathfrak{A}(a) \vee \mathfrak{A}(b)$ .

**Rechenregel 4** (Brüche und Potenzen). Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , dann gilt

- |  |  |  |   |
|--|--|--|---|
| (i) $\frac{-a}{c} = -\frac{a}{c} = \frac{a}{-c}$                   | (iii) $a^{-\frac{b}{c}} = \frac{1}{\sqrt[c]{a^b}}$ | (v) $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{c \cdot d}$  | (vii) $\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{a \cdot b}{c \cdot d}$ |
| (ii) $\frac{a \cdot b}{c \cdot d} = \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d}$ | (iv) $\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$                   | (vi) $\frac{a}{c} - \frac{b}{d} = \frac{a \cdot d - c \cdot b}{c \cdot d}$ | (viii) $\frac{a}{c} : \frac{b}{d} = \frac{a \cdot d}{c \cdot b}$    |

[14,15]  
[17-19]  
[21,22]  
usw.

Weiterhin gelten für  $a, b, c \in \mathbb{R}$  die Potenzgesetze

- |                                |                                     |                                |   |
|--------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------|---|
| (ix) $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$ | (x) $a^c \cdot b^c = (a \cdot b)^c$ | (xi) $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$ | (xii) $\frac{a^b}{a^c} = (a^{\frac{b}{c}})^b$ |
|--------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------|---|

**AUFGEPASST!** es gilt  $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$  aber  $\frac{a}{b+c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$  (wobei  $c \neq 0$  und  $b \neq -c$ ).

**Rechenregel 5** (Quadratische Gleichungen). Wir betrachten die Unbekannte  $x$  und die Koeffizienten  $a, b, c$  [20]  
auf den reellen Zahlen, dann gilt

- |  |
|--|
| (i) $a = 1$ : $a \cdot x^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} \wedge \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c \geq 0$ |
| (ii) $a \neq 0$ : $a \cdot x^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \wedge b^2 - 4 \cdot a \cdot c \geq 0$   |

[34] **Definition 6** (Folge). Eine unendliche Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} := (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$  auf den reellen Zahlen ist eine  
 [38] Abbildung, die jeder natürlichen Zahl  $n$  inklusive der Null eine reelle Zahl  $a_n$  zuordnet. Eine Folge

[43]  
 [45]

- (i) ist positiv (nicht negativ), wenn alle  $a_n$  positiv (nicht negativ) sind,
- (ii) ist [streng] monoton fallend (steigend), wenn für alle  $n \in \mathbb{N}$ :  $a_n \stackrel{[>]}{\geq} a_{n+1}$  ( $a_n \stackrel{[<]}{\leq} a_{n+1}$ )
- (iii) ist beschränkt, wenn es ein  $m \in \mathbb{N}$  gibt, sodass für alle  $n \in \mathbb{N}$ :  $-m \leq a_n \leq m$
- (iv) konvergiert gegen  $a$ , wenn für alle  $\epsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  existiert, sodass für alle  $n \geq N$ :  $|a_n - a| < \epsilon$ .

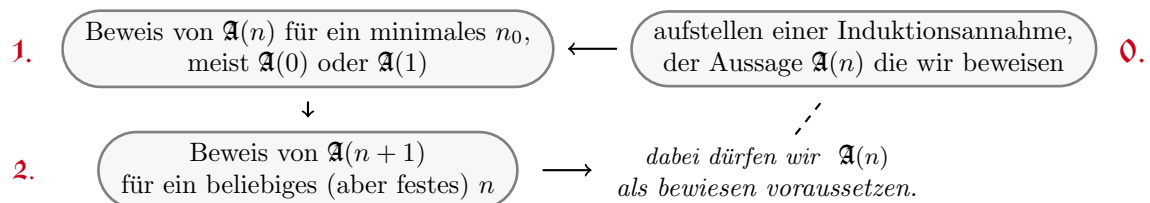
Wir nennen  $a$  den Grenzwert von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und schreiben  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$  oder  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .

**AUFGEPASST!** die Abbildungsvorschrift darf auch rekursiv angegeben werden, das heißt, dass sich ein Folgenglied aus den vorhergehenden Gliedern berechnen lässt.

[33] **Definition 7** (Binominalkoeffizient). Seien  $n, k \in \mathbb{N}_0$  wobei  $k \leq n$ , dann definieren wir den Binominalkoeffizienten  $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$ , wobei  $n! := n \cdot (n-1)!$  und  $0! := 1$ .  
 [40,41]

**AUFGEPASST!** aus  $n! = n \cdot (n-1)!$  folgt z. B., dass  $(n - (k-1))! = ((n+1) - k) \cdot (n-k)!$ .

[34-43] **Beweisverfahren 8** (vollständige Induktion). Ausdrücke die von natürlichen Zahlen abhängen, können mit vollständiger Induktion beweisen:



[34-43] **Beispiel 9** (Vollständige Induktion). Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $n!$  (Fakultät) wie in Definition 7, dann erhalten wir

- 0. die Induktionsannahme:  $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$
- 1. den Induktionsanfang:  $1! = 1 \cdot 0! = 1 \cdot 1 = 1$
- 2. den Induktionsschritt:  $(n+1)! \stackrel{\text{Def}}{=} (n+1) \cdot n! \stackrel{\text{IA}}{=} (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$

womit wir die Aussage mit Beweisverfahren 8 gezeigt haben.

[36-42] **Definition 10** (Partialsommen). Sei  $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$  eine Folge wie in Definition 6, dann definieren wir die Partialsommen der ersten  $n+1$  Glieder mit  $s_n := \sum_{k=0}^n a_k$ . Einige wichtige Partialsommen sind

$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$	$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$
die (ersten) ungeraden Zahlen	die (ersten) Quadratzahlen	Gaußsche Summenformel
$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad (q \neq 0)$	$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad (0^0 := 1)$	
geometrische Reihe	Binomischer Lehrsatz	

**AUFGEPASST!** die meisten Partialsommenformeln lassen sich mit Beweisverfahren 8 zeigen.

**Definition 11** (Funktion). Eine Abbildung  $f$ , die jedem  $x$  aus dem Definitionsbereich  $D_f \subseteq \mathbb{R}$  ein  $f(x)$  aus dem Wertebereich  $W_f \subseteq \mathbb{R}$  zuweist, nennen wir Funktion auf den reellen Zahlen und schreiben  $f : D_f \rightarrow W_f, x \mapsto f(x)$ . Wir nennen die Funktion [21] [54-56]

- (i) injektiv, wenn für alle  $x, y \in D_f$  mit  $f(x) = f(y)$  folgt, dass  $x = y$
- (ii) surjektiv, wenn  $W_f = \{f(x) : x \in D_f\}$
- (iii) bijektiv, wenn  $f$  injektiv und surjektiv ist.

Ferner sagen  $f$  ist stetig im Punkt  $x_0 \in D_f$ , wenn

- (iv) für alle  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf  $D_f$  mit  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a : \lim_{a_n \rightarrow a} f(a_n) = f(a)$
- (v) für alle  $\epsilon > 0$  existiert  $\beta > 0$ , sodass für alle  $x \in D_f$  mit  $|x - x_0| < \beta : |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ .

Wir nennen eine Funktion stetig, wenn sie in allen  $x_0 \in D_f$  stetig ist.

**AUFGEPASST!** um Stetigkeit zu zeigen, können wir uns eines der Kriterien (iv) oder (v) aussuchen.

**Definition 12** (Ableitung). Existiert für  $f : D_f := (a, \dots, b) \rightarrow W_f : x \mapsto f(x)$  und  $x_0 \in D_f$  der Grenzwert  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$  sagen wir  $f$  ist differenzierbar in  $x_0$ . Ist  $f$  differenzierbar in allen  $x_0 \in D_f$  sagen wir  $f$  ist differenzierbar auf dem offenen Intervall  $(a, \dots, b)$ . Wir bezeichnen  $f' : D_f \rightarrow W_{f'}, x \mapsto f'(x)$  als die erste und (falls existent)  $f^{(n)}$  als die  $n$ -te Ableitung von  $f$ . Wir sagen  $f$  ist ( $n$ -mal) stetig differenzierbar, wenn  $f'$  (respektive  $f^{(n)}$ ) stetig ist. [81,82] [90]

**AUFGEPASST!** differenzierbare Funktionen sind stetig, stetige Funktionen nicht immer differenzierbar.

**Rechenregel 13** (Ableitungsregeln). Seien  $f, g$  und  $g \circ f : D_f \rightarrow W_f \subseteq D_g \rightarrow W_g, x \mapsto (g \circ f)(x) := g(f(x))$  differenzierbare Funktionen und  $a, b \in \mathbb{R}$  Konstanten, dann gilt [79-83]

$(af + g)' = af' + g'$	$(e^{ax+b})' = ae^{ax+b}$	$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$	$(x^n)' = nx^{n-1}$
Summen- und Faktorregel	e-Funktion	Logarithmische Ableitung	Potenzregel
$(fg)' = f'g + fg'$	$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$	$(g \circ f)'(x) = (g(f(x)))' f'(x)$	
Produktregel	Leibnizsche Regel	Kettenregel	

**Satz 14** (Hauptsatz der Differential und Integralrechnung). Sei  $f$  auf dem abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  an (höchstens) endlich vielen Punkten nicht stetig, dann ist die Stammfunktion  $F : D_f \rightarrow W_F, x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt = F(x) - F(x_0)$  differenzierbar und es gilt  $F' = f$ . [92] [96]

**AUFGEPASST!** wir differenzieren auf offenen und integrieren auf abgeschlossenen Intervallen.

**Rechenregel 15** (Integrationsregeln). Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  in (höchstens) endlich vielen Punkte nicht stetig,  $a, b, n \in \mathbb{R}$  Konstanten und  $f(x)|_a^b := f(b) - f(a)$ , dann gilt [95-99]

$\int_a^b af + g dx = a \int_a^b f dx + \int_a^b g dx$	$\int_a^b x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \Big _a^b \quad (n \neq -1)$
Linearität des Integrals	Potenzregel
$\int_a^b e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} \Big _a^b$	$\int_a^b \ln(x) dx = \frac{1}{x} \Big _a^b \quad (x > 0)$
e-Funktion	natürlicher Logarithmus

Sind ferner  $F, g$  und  $\phi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  stetig differenzierbar, erhalten wir

$\int_\alpha^\beta f(\phi(t)) \phi'(t) dt = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x) dx$	$\int_a^b f(x) h(x) dx = F(x) h(x) \Big _a^b - \int_a^b F(x) h'(x) dx$
Integration durch Substitution	Partielle Integration

**AUFGEPASST!** Integration durch Substitution können wir in beide Richtungen anwenden.

**Definition 16** (Gruppe). Eine Menge  $G$  mit einer inneren Verknüpfung  $G \times G \rightarrow G$ ,  $(a, b) \rightarrow a \circ b$ , heißt eine [kommutative] Gruppe, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- (i)  $(a \circ b) \circ c = c \circ (b \circ c)$  für alle  $a, b, c \in G$ . (Assoziativität)
- (ii) Es existiert ein  $e \in G$  sodass  $e \circ a = a$  für alle  $a \in G$ . (neutrales Element)
- (iii) Zu jedem  $a \in G$  gibt es ein  $b \in G$  sodass  $a \circ b = e$ . (inverses Element)
- (iv)  $a \circ b = b \circ a$  für alle  $a, b \in G$ . [Kommutativität]

Für eine natürliche Zahl  $n$  und  $g \in G$  schreiben wir  $g^n$  oder  $n \cdot g$  für  $\overbrace{g \circ g \circ \dots \circ g}^{n \text{ mal}}$ . Wir schreiben  $1_G$  für das neutrale Element in  $(G, \circ)$  und  $g^{-1}$  für das inverse Element von  $g \in G$ .

**1 Lemma 17.** Ist  $(G, \circ)$  eine Gruppe mit neutralem Element  $1_G$  dann bezeichnen wir das inverse Element von  $a \in G$  mit  $a^{-1}$  und es gilt

- (i)  $1_G$  ist eindeutig und kommutativ
- (iii) das Inverse des Inversen von  $a$  ist  $a$
- (ii)  $a^{-1}$  ist eindeutig und kommutativ
- (iv) das Inverse von  $a \circ b$  ist  $b^{-1} \circ a^{-1}$

**Definition 18** (Untergruppe). Sei  $(G, \circ)$  eine Gruppe und  $U$  eine nichtleere Teilmenge von  $G$ . Ist  $(U, \circ)$  selbst eine Gruppe sagen wir  $U$  ist eine Untergruppe von  $G$  und schreiben  $U \leq G$ .

**2 Lemma 19.** Eine nichtleere Teilmenge  $U$  von  $G$  ist eine Untergruppe  $(U, \circ)$  von  $(G, \circ)$  genau dann, wenn für alle  $a, b \in U$  auch  $a \circ b^{-1} \in U$ .

**3 Definition 20** (Mächtigkeit). Zwei Mengen  $A, B \neq \emptyset$  nennen wir gleichmächtig, wenn eine bijektive Abbildung  $f : A \rightarrow B$  existiert. Wir schreiben  $A \cong B$ .

**6 Lemma 21.** Seien  $(G, \circ)$  und  $(H, *)$  Gruppen,  $K := G \times H$  und  $\bullet : K \times K \rightarrow K$ ,  $(g, h) \times (g', h') \mapsto (g \circ g', h * h')$ . Dann ist  $(K, \bullet)$  eine Gruppe und kommutativ genau dann, wenn  $(G, \circ)$  und  $(H, *)$  kommutativ sind.

**5 Definition 22** (Gruppenhomomorphismus). Seien  $(G, \circ)$  und  $(H, *)$  Gruppen und  $U \leq H$  eine Untergruppe von  $H$ . Wir nennen die Abbildung  $\alpha : G \rightarrow H$  Gruppenhomomorphismus, wenn für alle  $g, h \in G$  gilt  $\alpha(g \circ h) = \alpha(g) * \alpha(h)$ . Wir nennen

- (i)  $\text{Im}(\alpha) := \{\alpha(g)\}$  das Bild von  $\alpha$
- (ii)  $\alpha^{-1}(U) := \{g \in G : \alpha(g) \in U\}$  das Urbild von  $U$  unter  $\alpha$
- (iii)  $\text{Ker}(\alpha) := \{g \in G : \alpha(g) = 1_H\}$  den Kern von  $\alpha$ .

**4 Lemma 23.** Ist  $\alpha : (G, \circ) \rightarrow (H, *)$  ein Gruppenhomomorphismus und  $g \in G$ , dann gilt  $\alpha(g^{-1}) = \alpha(g)^{-1}$  und  $\alpha(1_G) = 1_H$ .

**6 Lemma 24.** Ist  $\alpha : (G, \circ) \rightarrow (H, *)$  ein Gruppenhomomorphismus, dann ist  $\alpha$  injektiv genau dann, wenn  $\text{Ker}(\alpha) = \{1_G\}$ . Gilt ferner  $G \cong H$  dann sind folgende Aussagen äquivalent

- (i)  $\alpha$  ist injektiv
- (ii)  $\alpha$  ist surjektiv
- (iii)  $\alpha$  ist bijektiv.

**Aufgabe 1** (Gruppeneigenschaften). Sei  $(G, \circ)$  eine Gruppe. Zeige, dass für alle  $a, a', b, b' \in (G, \circ)$  gilt [17]

- (i).1  $a \circ 1_G = a = 1_G \circ a$  (ii).1 ist  $b \circ a = 1_G$  folgt  $a \circ b = 1_G$  (iii)  $(a^{-1})^{-1} = a$   
 (i).2 wenn  $a \circ a' = a$  folgt  $a' = 1_G$  (ii).2 wenn  $a \circ b' = 1_G$  folgt  $b = b'$  (iii)  $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$

Zeige ferner, dass  $(G, \circ)$  kommutativ ist, wenn für alle  $a, b \in G$  gilt

- (iv)  $a = a^{-1}$  (v)  $(a \circ b)^2 = a^2 \circ b^2$ .

**Aufgabe 2.** Zeige, dass eine nichtleere Teilmenge  $U$  der Gruppe  $(G, \circ)$  wobei [18]  
 [19]

- (i)  $\circ : U \times U \rightarrow U$  (ii) für  $g \in U$  auch  $g^{-1} \in U$

eine Untergruppe von  $G$  ist. Benutze (i) und (ii) um Lemma 19 zu beweisen.

**Aufgabe 3** (Mächtigkeit). Prüfe die Gleichmächtigkeit der Mengen [2]  
 [20]

- (i)  $\mathbb{N}$  und  $\mathbb{Z}_{\geq m}$  (ii)  $\mathbb{N}$  und  $\mathbb{Z}$  (iii)  $\mathbb{N}$  und  $\mathbb{Q}$  (iv)  $\mathbb{N}$  und  $\mathbb{R}$

**Aufgabe 4.** Sei  $\alpha : (G, \circ) \rightarrow (H, *)$  ein Gruppenhomomorphismus und  $g \in G$ . Untersuche  $\alpha(g^{-1}) * \alpha(g)$  [23]  
 und beweise dann Lemma 23.

**Aufgabe 5.** Sei  $\alpha : (G, \circ) \rightarrow (H, *)$  ein Gruppenhomomorphismus und  $g \in G$ . Zeige, [22]

- (i)  $\text{Ker}(\alpha) \leq G$  (ii)  $\text{Im}(\alpha) \leq H$  (iii)  $\alpha^{-1}(\alpha(g)) = \{g \circ h : h \in \text{Ker}(\alpha)\}$ .

**Aufgabe 6** (Zwölfeck). Betrachten wir ein regelmäßiges Zwölfeck, welches sich durch Drehungen um Vielfache von 45 Grad wieder in sich selbst überführen lässt. Für ein  $k \in (0, 1, \dots, 7)$  schreiben wir  $d_k$  für eine Drehung um  $k \cdot 45^\circ$ . Da eine Drehung um 360 Grad der Identität entspricht gilt für ein  $m \in \mathbb{N}_0 : d_m = d_k$  wobei  $k$  der Rest von  $m$  bei Teilung durch 8 ist.

- (i) Zeige mit Definition 16, dass die Drehungen zusammen mit der Hintereinanderausführung  $\circ$  als Verknüpfung eine Gruppe  $\bigcirc = \{k_0, k_1, \dots, k_7\}$  bilden. [16]

- (ii) Zeige mit Lemma 19, dass  $\bigcirc := \{k_0, k_2, k_4, k_6\}$  eine Untergruppe von  $\bigcirc$  ist [19]

Betrachten wir die Abbildung  $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow \bigcirc, k \mapsto \text{Drehung um } k \cdot 30^\circ$ . Bestimme die Mengen [24]

- (iii)  $\{k \in \mathbb{Z} : \phi(k) = k_0\}$  und zeige dann (vi)  $\phi$  ist surjektiv  
 (iv)  $\phi^{-1}(\bigcirc)$  in  $\mathbb{Z}$  (v)  $\phi$  ist ein Homomorphismus (vii)  $\phi$  ist nicht bijektiv.

Betrachten wir nun die Untergruppen  $\bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc$  von  $\bigcirc$ .

(viii) Stelle eine vollständige Liste aller Untergruppen auf

- (ix) bestimme  $\bigcirc, \bigcirc \leq \bigcirc$ , sodass  $\bigcirc \times \bigcirc \cong \bigcirc$ . [21]  
 [22]

Gebe weiterhin drei bijektiven Abbildungen  $f, \alpha, \beta : \bigcirc \times \bigcirc \rightarrow \bigcirc$  an, sodass gilt

- (x)  $f$  ist nicht homomorph (xi)  $\alpha$  ist homomorph (xii)  $\beta \neq \alpha$  ist homomorph.