*Liebe angehende Studierende, ich hoffe ihr könnt mit dem Merkblatt etwas anfangen!*
*viel Glück in der Vorlesung ☺*

**Notation 1** (Mengen)**.** Seien $A, B$ zwei Mengen, $a, b$ Elemente aus $A$ respektive $B$ und $\mathfrak{A}(a)$ eine Aussage die für $a$ gilt, dann schreiben wir [1-9]

| | | | |
|---|---|---|---|
| (i) $A \subseteq B$ : | $A$ ist eine Teilmenge von $B$ | (vi) $A \cup B$ : | Vereinigung von $A$ und $B$ |
| (ii) $A \supseteq B$ : | $A$ ist eine Obermenge von $B$ | (vii) $A \cap B$ : | Durchschnitt von $A$ und $B$ |
| (iii) $A = B$ : | $A$ ist gleich $B$ | (viii) $A \setminus B$ : | Differenz von $A$ und $B$ (das heißt $A$ „ohne" $B$) |
| (iv) $A := B$ : | $A$ ist definiert als $B$ | | |
| (v) $a \in A$ : | $a$ ist ein Element von $A$ | (ix) $A \times B$ : | Kartesisches Produkt von $A$ und $B$. |

Wir schreiben $B := \{a \in A : \mathfrak{A}(a)\}$ für die Menge aller $a$ für die $\mathfrak{A}(a)$ (gilt) und erhalten das karthesische Produkt mit $A \times B := \{(a, b) : a \in A,\ b \in B\}$.

AUFGEPASST! *die leere Menge $\emptyset := \{\}$ kann selbst ein Element einer Menge sein, also ist $\emptyset \neq \{\emptyset\}$.*

**Bemerkung 2** (Zahlenmengen)**.** [1] [34-44]

$\{1, 2, 3, 42\} \subseteq \mathbb{N}$ $\quad \{-1, -2, -42, 27\} \subseteq \mathbb{Z}$ $\quad \{-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{42}{27}\} \subseteq \mathbb{Q}$ $\quad \{\pi, -\sqrt{2}, \sqrt[3]{9}\} \subseteq \mathbb{R}$ $\quad e \times 2 \cdot i \in \mathbb{C}$

Wir schreiben $\mathbb{N}_0$ für $\mathbb{N} \cup \{0\}$ und $\mathbb{R}_+$ für die positiven reellen Zahlen.

**Notation 3** (Quantoren und Junktoren)**.** Seien $\mathfrak{A}(a)$, $\mathfrak{A}(b)$ Aussagen die für $a$ respektive $b$ gelten, dann benutzen wir die Quantoren [Vorlesung]

(i) $\exists a\ \mathfrak{A}(a)$ : es existiert (mindestens) ein $a$ sodas $\mathfrak{A}(a)$ *(iii)* $\forall a\ \mathfrak{A}(a)$ : für alle $a$ (gilt) $\mathfrak{A}(a)$

(ii) $\exists! a\ \mathfrak{A}(a)$ : es existiert genau ein $a$ sodas $\mathfrak{A}(a)$

und die Junktoren

| | | | |
|---|---|---|---|
| (i) $\mathfrak{A}(a) \wedge \mathfrak{A}(b)$ : | $\mathfrak{A}(a)$ und $\mathfrak{A}(b)$ | (iv) $\mathfrak{A}(a) \Rightarrow \mathfrak{A}(b)$ : | aus $\mathfrak{A}(a)$ folgt $\mathfrak{A}(b)$ |
| (ii) $\mathfrak{A}(a) \vee \mathfrak{A}(b)$ : | $\mathfrak{A}(a)$ oder $\mathfrak{A}(b)$ | (v) $\mathfrak{A}(a) \Leftarrow \mathfrak{A}(b)$ : | $\mathfrak{A}(a)$ folgt aus $\mathfrak{A}(b)$ |
| (iii) $\neg \mathfrak{A}(a)$ : | nicht $\mathfrak{A}(a)$ | (vi) $\mathfrak{A}(a) \Leftrightarrow \mathfrak{A}(b)$ : | $\mathfrak{A}(a)$ genau dann, wenn $\mathfrak{A}(b)$. |

AUFGEPASST! *bei „$\vee$" handelt es sich um ein einschließendes oder, das heißt, $\mathfrak{A}(a) \wedge \mathfrak{A}(b) \Rightarrow \mathfrak{A}(a) \vee \mathfrak{A}(b)$.*

**Rechenregel 4** (Brüche und Potenzen)**.** Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dann gilt [14,15] [17-19] [21,22] usw.

(i) $\frac{-a}{c} = -\frac{a}{c} = \frac{a}{-c}$ (iii) $a^{-\frac{b}{c}} = \frac{1}{\sqrt[c]{a^b}}$ (v) $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{c \cdot d}$ (vii) $\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{a \cdot b}{c \cdot d}$

(ii) $\frac{a \cdot b}{c \cdot b} = \frac{a}{c}$ (iv) $\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$ (vi) $\frac{a}{c} - \frac{b}{d} = \frac{a \cdot d - c \cdot b}{c \cdot d}$ (viii) $\frac{a}{c} : \frac{b}{d} = \frac{a \cdot d}{c \cdot b}$.

Weiterhin gelten für $a, b, c \in \mathbb{R}$ die Potenzgesetze

(ix) $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$ (x) $a^c \cdot b^c = (a \cdot b)^c$ (xi) $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$ (xii) $\frac{a^b}{d^b} = (\frac{a}{d})^b$.

AUFGEPASST! *es gilt $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ aber $\frac{a}{b+c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$ (wobei $c \neq 0$ und $b \neq -c$).*

**Rechenregel 5** (Quadratische Gleichungen)**.** Wir betrachten die Unbekannte $x$ und die Koeffizienten $a, b, c$ auf den reellen Zahlen, dann gilt [20]

(i) $a = 1$ : $\quad a \cdot x^2 + bx + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{(\frac{b}{2})^2 - c} \quad \wedge \quad (\frac{b}{2})^2 - c) \geq 0$

(ii) $a \neq 0$ : $\quad a \cdot x^2 + bx + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \quad \wedge \quad b^2 - 4 \cdot a \cdot c \geq 0$

[34] [38] [43] [45] **Definition 6** (Folge)**.** Eine unendliche Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (a_0, a_1, ..., a_n, ...)$ auf den reellen Zahlen ist eine Abbildung, die jeder natürlichen Zahl $n$ inklusive der Null eine reelle Zahl $a_n$ zuordnet. Eine Folge

(i) ist positiv, wenn alle $a_n$ positiv sind,

(ii) ist [streng] monoton fallend (steigend), wenn für alle $n \in \mathbb{N}$: $a_n \overset{[>]}{\geq} a_{n+1}$ $(a_n \overset{[<]}{\leq} a_{n-1})$

(iii) ist beschränkt, wenn es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, sodas für alle $n \in \mathbb{N}$: $-m < a_n < m$

(iv) konvergiert gegen $a$, wenn für alle $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ exitiert, sodas für alle $n \geq N$: $|a_n - a| < \epsilon$.

Wir nennen $a$ den Grenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und schreiben $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$ oder $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

AUFGEPASST! *die Abbildungsvorschrift darf auch rekursiv angegeben werden, das heißt, dass sich ein Folgeglied aus den vorhergehenden Gliedern berechnen lässt.*

[33] [40,41] **Definition 7** (Binominalkoeffizient)**.** Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$ wobei $k \leq n$, dann definieren wir den Binominalkoeffizienten $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$, wobei $n! := n \cdot (n-1)!$ und $0! := 1$.

AUFGEPASST! *aus* $n! = n \cdot (n-1)!$ *folgt z. B., dass* $(n-(k-1))! = ((n+1)-k)\cdot(n-k)!$.

[34-43] **Beweisverfahren 8** (vollständige Induktion)**.** Ausdrücke die von natürlichen Zahlen abhängen, können mit vollständiger Induktion beweisen:

**0.** aufstellen einer Induktionsannahme, der Aussage $\mathfrak{A}(n)$ die wir beweisen $\longrightarrow$ **1.** Beweis von $\mathfrak{A}(n)$ für ein minimales $n_0$, meist $\mathfrak{A}(0)$ oder $\mathfrak{A}(1)$

$\downarrow$

**2.** Beweis von $\mathfrak{A}(n+1)$ für ein beliebiges (aber festes) $n$ $\longrightarrow$ *dabei dürfen wir* $\mathfrak{A}(n)$ *als bewiesen voraussetzen.*

[34-43] **Beispiel 9** (Vollständige Induktion)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$ und $n!$ (Fakultät) wie in Definition 7, dann erhalten wir

**0.** die Induktionsannahme: $n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot ... \cdot 2\cdot 1$

**1.** den Induktionsanfang: $1! = 1\cdot 0! = 1\cdot 1 = 1$

**2.** den Induktionsschritt: $(n+1)! \overset{\text{Def 7}}{=} (n+1)\cdot n! \overset{\text{IA}}{=} (n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot ... \cdot 2\cdot 1$

womit wir die Aussage mit Beweisverfahren 8 gezeigt haben.

[36-42] **Definition 10** (Partialsummen)**.** Sei $(a_0, a_1, ..., a_n, ...)$ eine Folge wie in Definition 6, dann definieren wir die Partialsummen der ersten $n+1$ Glieder mit $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$. Einige wichtige Partialsummen sind

$\sum_k^n (2k-1) = n^2$ — die (ersten) ungeraden Zahlen

$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ — die (ersten) Quadratzahlen

$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ — Gaußsche Summenformel

$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad (q \neq 0)$ — geometrische Reihe

$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad (0^0 := 1)$ — Binomischer Lehrsatz

AUFGEPASST! *die meisten Partialsummenformeln lassen sich mit Beweisverfahren 8 zeigen.*