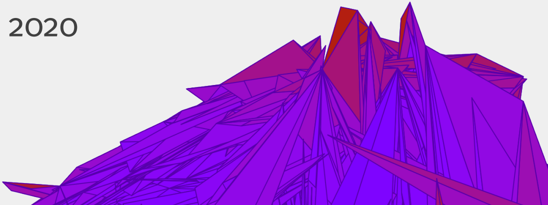
Vorkurs Einführung in die Hochschulmathematik:

Vektorräume

Jonathan Busse

Universität Duisburg Essen
github.com/JoKaBus/VEH2020

Sitzung vom 20. Oktober 2020



Organisatorisches

Organisatorisches

Zeitplanung

Zeitplanung

10:00 Begrüßung

10:05 Break-Out-Session

Übung 7.2-2

10:50 Kaffepause

11:00 Vorrechnen

11:20 Zusammenfassung und Schluss

Begrüssung

Liebe Studierende,

Begrüßung

Liebe Studierende,

mein Semester hat diese Woche begonnen, deshalb muss ich Sie heute schon wieder alleine lassen.

Begrüssung

Liebe Studierende,

mein Semester hat diese Woche begonnen, deshalb muss ich Sie heute schon wieder alleine lassen.Morgen bin ich um mit einer kleinen Verspätung um kurz nach 10:00 wieder dabei.

Begrüssung

Liebe Studierende,

mein Semester hat diese Woche begonnen, deshalb muss ich Sie heute schon wieder alleine lassen.Morgen bin ich um mit einer kleinen Verspätung um kurz nach 10:00 wieder dabei.

Ich hoffe, Sie können die Zeit trotzdem zum arbeiten nutzen und sich dabei auch weiter kennen lernen.

Begrüssung

Liebe Studierende,

mein Semester hat diese Woche begonnen, deshalb muss ich Sie heute schon wieder alleine lassen.Morgen bin ich um mit einer kleinen Verspätung um kurz nach 10:00 wieder dabei.

Ich hoffe, Sie können die Zeit trotzdem zum arbeiten nutzen und sich dabei auch weiter kennen lernen.

Falls Sie lieber mit Tutor arbeiten möchtenn, können Sie zum Kurs "Tannengrün" wechseln. Dieser läuft von 10:00 - 11:30 läuft und es ist noch Platz für interessierte Teilnehmer*innen. Richten Sie Kevin ihm einfach liebe Grüße von mit aus.

Übungsaufgabe

Übungsaufgabe

Vorgehen

Aufgabe 2:
Zeige für die Menge

$$\mathbb{R}[X]_2 := \left\{ ax^2 + bx + c \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

d.h. die Menge aller Polynome vom Grad $\leqslant 2$:

(a) $\mathbb{R}[X]_2$ ist ein reeller Vektorraum.

(b) Die Menge der Vektoren $\{1 + x + x^2, 1 + x, 1 + x^2\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}[X]_2$.

(c) Welche Dimension hat $\mathbb{R}[X]_2$?

a) Vektorraumaxiome prüfen

Aufgabe 2:
Zeige für die Menge

$$\mathbb{R}[X]_2 := \left\{ ax^2 + bx + c \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

d.h. die Menge aller Polynome vom Grad $\leqslant 2$:

(a) $\mathbb{R}[X]_2$ ist ein reeller Vektorraum.

(b) Die Menge der Vektoren $\{ 1 + x + x^2, 1 + x, 1 + x^2 \}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}[X]_2$.

(c) Welche Dimension hat $\mathbb{R}[X]_2$?

a) Vektorraumaxiome prüfen

Definition [Bearbeiten | Quelltext bearbeiten]

Es seien V eine Menge, $(K, +, \cdot)$ ein Körper, $\oplus\colon V \times V \to V$ eine innere zweistellige Verknüpfung, genannt Vektoraddition, und $\odot\colon K \times V \to V$ eine äußere zweistellige Verknüpfung, genannt Skalarmultiplikation. Man nennt dann $(V, \oplus, \odot)$ einen *Vektorraum über dem Körper K* oder kurz *K-Vektorraum*, wenn für alle $u, v, w \in V$ und $\alpha, \beta \in K$ die folgenden Eigenschaften gelten:

Vektoraddition:

- V1: $u \oplus (v \oplus w) = (u \oplus v) \oplus w$ (Assoziativgesetz)
- V2: Existenz eines neutralen Elements $0_V \in V$ mit $v \oplus 0_V = 0_V \oplus v = v$
- V3: Existenz eines zu $v \in V$ inversen Elements $-v \in V$ mit $v \oplus (-v) = (-v) \oplus v = 0_V$
- V4: $v \oplus u = u \oplus v$ (Kommutativgesetz)

Skalarmultiplikation:

- S1: $\alpha \odot (u \oplus v) = (\alpha \odot u) \oplus (\alpha \odot v)$(Distributivgesetz)
- S2: $(\alpha + \beta) \odot v = (\alpha \odot v) \oplus (\beta \odot v)$
- S3: $(\alpha \cdot \beta) \odot v = \alpha \odot (\beta \odot v)$
- S4: Neutralität des Einselements $1 \in K$, also $1 \odot v = v$

Aufgabe 2:
Zeige für die Menge

$$\mathbb{R}[X]_2 := \left\{ ax^2 + bx + c \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

d.h. die Menge aller Polynome vom Grad $\leqslant 2$:

(*a*) $\mathbb{R}[X]_2$ ist ein reeller Vektorraum.

(*b*) Die Menge der Vektoren $\{1 + x + x^2, 1 + x, 1 + x^2\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}[X]_2$.

(*c*) Welche Dimension hat $\mathbb{R}[X]_2$?

a) Vektorraumaxiome prüfen

Definition [Bearbeiten | Quelltext bearbeiten]

Es seien V eine Menge, $(K, +, \cdot)$ ein Körper, $\oplus\colon V \times V \to V$ eine innere zweistellige Verknüpfung, genannt Vektoraddition, und $\odot\colon K \times V \to V$ eine äußere zweistellige Verknüpfung, genannt Skalarmultiplikation. Man nennt dann $(V, \oplus, \odot)$ einen *Vektorraum über dem Körper K* oder kurz *K-Vektorraum*, wenn für alle $u, v, w \in V$ und $\alpha, \beta \in K$ die folgenden Eigenschaften gelten:

Vektoraddition:

- V1: $u \oplus (v \oplus w) = (u \oplus v) \oplus w$ (Assoziativgesetz)
- V2: Existenz eines neutralen Elements $0_V \in V$ mit $v \oplus 0_V = 0_V \oplus v = v$
- V3: Existenz eines zu $v \in V$ inversen Elements $-v \in V$ mit $v \oplus (-v) = (-v) \oplus v = 0_V$
- V4: $v \oplus u = u \oplus v$ (Kommutativgesetz)

Skalarmultiplikation:

- S1: $\alpha \odot (u \oplus v) = (\alpha \odot u) \oplus (\alpha \odot v)$(Distributivgesetz)
- S2: $(\alpha + \beta) \odot v = (\alpha \odot v) \oplus (\beta \odot v)$
- S3: $(\alpha \cdot \beta) \odot v = \alpha \odot (\beta \odot v)$
- S4: Neutralität des Einselements $1 \in K$, also $1 \odot v = v$

(mir ist nicht klar, was Sie als gegeben vorraussetzen dürfen, beißen Sie sich nicht an diesem Aufgabenteil fest)

Übung 7.2 Aufgabe 2

Aufgabe 2:

Zeige für die Menge

$$\mathbb{R}[X]_2 := \left\{ ax^2 + bx + c \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

d.h. die Menge aller Polynome vom Grad $\leqslant 2$:

(a) $\mathbb{R}[X]_2$ ist ein reeller Vektorraum.

(b) Die Menge der Vektoren $\{\, 1 + x + x^2, 1 + x, 1 + x^2 \,\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}[X]_2$.

(c) Welche Dimension hat $\mathbb{R}[X]_2$?

Übung 7.2 Aufgabe 2

Aufgabe 2:
Zeige für die Menge

$$\mathbb{R}[X]_2 := \left\{ ax^2 + bx + c \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

d.h. die Menge aller Polynome vom Grad $\leqslant 2$:

(a) $\mathbb{R}[X]_2$ ist ein reeller Vektorraum.

(b) Die Menge der Vektoren $\{ 1 + x + x^2, 1 + x, 1 + x^2 \}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}[X]_2$.

(c) Welche Dimension hat $\mathbb{R}[X]_2$?

a) Vektorraumaxiome prüfen
b) Basis auf lineare Unabhängigkeit überprüfen

Aufgabe 2:

Zeige für die Menge

$$\mathbb{R}[X]_2 := \left\{ ax^2 + bx + c \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

d.h. die Menge aller Polynome vom Grad $\leqslant 2$:

(a) $\mathbb{R}[X]_2$ ist ein reeller Vektorraum.

(b) Die Menge der Vektoren $\{1 + x + x^2, 1 + x, 1 + x^2\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}[X]_2$.

(c) Welche Dimension hat $\mathbb{R}[X]_2$?

a) Vektorraumaxiome prüfen

b) Basis auf lineare Unabhängigkeit überprüfen

Basis

Übersetzen sie hierzu die Basismenge in eine Matrix und bestimmen Sie deren Rang nach folgendem Prinzip:

Aufgabe 2:
Zeige für die Menge

$$\mathbb{R}[X]_2 := \left\{ ax^2 + bx + c \;\middle|\; a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$$

d.h. die Menge aller Polynome vom Grad $\leqslant 2$:

(a) $\mathbb{R}[X]_2$ ist ein reeller Vektorraum.

(b) Die Menge der Vektoren $\{1 + x + x^2, 1 + x, 1 + x^2\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}[X]_2$.

(c) Welche Dimension hat $\mathbb{R}[X]_2$?

a) Vektorraumaxiome prüfen
b) Basis auf lineare Unabhängigkeit überprüfen

Basis

Übersetzen sie hierzu die Basismenge in eine Matrix und bestimmen Sie deren Rang nach folgendem Prinzip:

$$B = \{7z^2, 3z + 1, 2\}$$

Übung 7.2 Aufgabe 2

Aufgabe 2:
Zeige für die Menge

$$\mathbb{R}[X]_2 := \left\{ ax^2 + bx + c \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

d.h. die Menge aller Polynome vom Grad $\leqslant 2$:

(a) $\mathbb{R}[X]_2$ ist ein reeller Vektorraum.

(b) Die Menge der Vektoren $\{ 1 + x + x^2, 1 + x, 1 + x^2 \}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}[X]_2$.

(c) Welche Dimension hat $\mathbb{R}[X]_2$?

a) Vektorraumaxiome prüfen
b) Basis auf lineare Unabhängigkeit überprüfen

Basis

Übersetzen sie hierzu die Basismenge in eine Matrix und bestimmen Sie deren Rang nach folgendem Prinzip:

$$B = \{7z^2, 3z + 1, 2\} \sim \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 2:
Zeige für die Menge

$$\mathbb{R}[X]_2 := \left\{ ax^2 + bx + c \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

d.h. die Menge aller Polynome vom Grad $\leqslant 2$:

(*a*) $\mathbb{R}[X]_2$ ist ein reeller Vektorraum.

(*b*) Die Menge der Vektoren $\{1 + x + x^2, 1 + x, 1 + x^2\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}[X]_2$.

(*c*) Welche Dimension hat $\mathbb{R}[X]_2$?

a) Vektorraumaxiome prüfen
b) Basis auf lineare Unabhängigkeit überprüfen

Basis

Übersetzen sie hierzu die Basismenge in eine Matrix und bestimmen Sie deren Rang nach folgendem Prinzip:

$$B = \{7z^2, 3z + 1, 2\} \sim \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 2:
Zeige für die Menge

$$\mathbb{R}[X]_2 := \left\{ ax^2 + bx + c \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

d.h. die Menge aller Polynome vom Grad $\leqslant 2$:

(a) $\mathbb{R}[X]_2$ ist ein reeller Vektorraum.

(b) Die Menge der Vektoren $\{\, 1 + x + x^2, 1 + x, 1 + x^2 \,\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}[X]_2$.

(c) Welche Dimension hat $\mathbb{R}[X]_2$?

a) Vektorraumaxiome prüfen
b) Basis auf lineare Unabhängigkeit überprüfen

Basis

Übersetzen sie hierzu die Basismenge in eine Matrix und bestimmen Sie deren Rang nach folgendem Prinzip:

$$B = \{7z^2, 3z + 1, 2\} \sim \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Rang}(3)$$

Übung 7.2 Aufgabe 2

Aufgabe 2:
Zeige für die Menge

$$\mathbb{R}[X]_2 := \left\{ ax^2 + bx + c \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

d.h. die Menge aller Polynome vom Grad $\leqslant 2$:

(*a*) $\mathbb{R}[X]_2$ ist ein reeller Vektorraum.

(*b*) Die Menge der Vektoren $\{1 + x + x^2, 1 + x, 1 + x^2\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}[X]_2$.

(*c*) Welche Dimension hat $\mathbb{R}[X]_2$?

a) Vektorraumaxiome prüfen
b) Basis auf lineare Unabhängigkeit überprüfen
c) Die Dimension eines Vektorraums entspricht der Anzahl der Elemente einer Basis.

Übungsaufgabe

Vorrechnen

Aufgabe 2:
Zeige für die Menge

$$\mathbb{R}[X]_2 := \left\{ ax^2 + bx + c \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

d.h. die Menge aller Polynome vom Grad $\leqslant 2$:

(*a*) $\mathbb{R}[X]_2$ ist ein reeller Vektorraum.

(*b*) Die Menge der Vektoren $\{ 1 + x + x^2, 1 + x, 1 + x^2 \}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}[X]_2$.

(*c*) Welche Dimension hat $\mathbb{R}[X]_2$?

a)

Übung 7.2 Aufgabe 2

Aufgabe 2:
Zeige für die Menge

$$\mathbb{R}[X]_2 := \left\{ ax^2 + bx + c \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

d.h. die Menge aller Polynome vom Grad $\leqslant 2$:

(*a*) $\mathbb{R}[X]_2$ ist ein reeller Vektorraum.

(*b*) Die Menge der Vektoren $\{ 1 + x + x^2, 1 + x, 1 + x^2 \}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}[X]_2$.

(*c*) Welche Dimension hat $\mathbb{R}[X]_2$?

Aufgabe 2:
Zeige für die Menge

$$\mathbb{R}[X]_2 := \left\{ ax^2 + bx + c \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

d.h. die Menge aller Polynome vom Grad $\leqslant 2$:

(a) $\mathbb{R}[X]_2$ ist ein reeller Vektorraum.

(b) Die Menge der Vektoren $\{1 + x + x^2, 1 + x, 1 + x^2\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}[X]_2$.

(c) Welche Dimension hat $\mathbb{R}[X]_2$?

b)

Übung 7.2 Aufgabe 2

Aufgabe 2:

Zeige für die Menge

$$\mathbb{R}[X]_2 := \left\{ ax^2 + bx + c \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

d.h. die Menge aller Polynome vom Grad $\leqslant 2$:

(*a*) $\mathbb{R}[X]_2$ ist ein reeller Vektorraum.

(*b*) Die Menge der Vektoren $\{1 + x + x^2, 1 + x, 1 + x^2\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}[X]_2$.

(*c*) Welche Dimension hat $\mathbb{R}[X]_2$?

Aufgabe 2:
Zeige für die Menge

$$\mathbb{R}[X]_2 := \left\{ ax^2 + bx + c \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

d.h. die Menge aller Polynome vom Grad $\leqslant 2$:

(*a*) $\mathbb{R}[X]_2$ ist ein reeller Vektorraum.

(*b*) Die Menge der Vektoren $\{ 1 + x + x^2, 1 + x, 1 + x^2 \}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}[X]_2$.

(*c*) Welche Dimension hat $\mathbb{R}[X]_2$?

c)

Übung 7.2 Aufgabe 2

Aufgabe 2:
Zeige für die Menge

$$\mathbb{R}[X]_2 := \left\{ ax^2 + bx + c \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

d.h. die Menge aller Polynome vom Grad $\leqslant 2$:

(a) $\mathbb{R}[X]_2$ ist ein reeller Vektorraum.

(b) Die Menge der Vektoren $\{\, 1 + x + x^2, 1 + x, 1 + x^2 \,\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}[X]_2$.

(c) Welche Dimension hat $\mathbb{R}[X]_2$?

Übungsaufgabe

Musterlösung

Übung 7.2 Aufgabe 2

Aufgabe 2:
Zeige für die Menge

$$\mathbb{R}[X]_2 := \left\{ ax^2 + bx + c \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

d.h. die Menge aller Polynome vom Grad $\leqslant 2$:

(*a*) $\mathbb{R}[X]_2$ ist ein reeller Vektorraum.

(*b*) Die Menge der Vektoren $\{ 1 + x + x^2, 1 + x, 1 + x^2 \}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}[X]_2$.

(*c*) Welche Dimension hat $\mathbb{R}[X]_2$?

a) Vektorraumaxiome prüfen

Übung 7.2 Aufgabe 2

Aufgabe 2:
Zeige für die Menge

$$\mathbb{R}[X]_2 := \left\{ ax^2 + bx + c \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

d.h. die Menge aller Polynome vom Grad $\leqslant 2$:

(a) $\mathbb{R}[X]_2$ ist ein reeller Vektorraum.

(b) Die Menge der Vektoren $\{ 1 + x + x^2, 1 + x, 1 + x^2 \}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}[X]_2$.

(c) Welche Dimension hat $\mathbb{R}[X]_2$?

a) Vektorraumaxiome prüfen

Diesen Aufgabenteil lösen sie durch nachrechnen. Alle Axiome gelten aufgrund der Rechenregeln mit reellen Zahlen.

Aufgabe 2:
Zeige für die Menge

$$\mathbb{R}[X]_2 := \left\{ ax^2 + bx + c \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

d.h. die Menge aller Polynome vom Grad $\leqslant 2$:

(*a*) $\mathbb{R}[X]_2$ ist ein reeller Vektorraum.

(*b*) Die Menge der Vektoren $\{1 + x + x^2, 1 + x, 1 + x^2\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}[X]_2$.

(*c*) Welche Dimension hat $\mathbb{R}[X]_2$?

a) Vektorraumaxiome prüfen

Diesen Aufgabenteil lösen sie durch nachrechnen. Alle Axiome gelten aufgrund der Rechenregeln mit reellen Zahlen.

Beispiel S2:
$(\alpha + \beta)(ax^2 + bx + c) = \alpha(ax^2 + bx + c) + \beta(ax^2 + bx + c)$

Aufgabe 2:
Zeige für die Menge

$$\mathbb{R}[X]_2 := \left\{ ax^2 + bx + c \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

d.h. die Menge aller Polynome vom Grad $\leqslant 2$:

(a) $\mathbb{R}[X]_2$ ist ein reeller Vektorraum.

(b) Die Menge der Vektoren $\{ 1 + x + x^2, 1 + x, 1 + x^2 \}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}[X]_2$.

(c) Welche Dimension hat $\mathbb{R}[X]_2$?

a) Vektorraumaxiome prüfen

Diesen Aufgabenteil lösen sie durch nachrechnen. Alle Axiome gelten aufgrund der Rechenregeln mit reellen Zahlen.

Beispiel S2:
$(\alpha + \beta)(ax^2 + bx + c) = \alpha(ax^2 + bx + c) + \beta(ax^2 + bx + c)$

Beispiel V3: Betrachte $z = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}[X]_2$, dann wähle $-z = -ax^2 - bx - c$, dann gilt
$z + (-z) = (a - a)x^2 + (b - b)x + (c - c) = 0_{\mathbb{R}} = 0_{\mathbb{R}[X]_2}$.

Übung 7.2 Aufgabe 2

a) Vektorraumaxiome prüfen (sind erfüllt)

Übung 7.2 Aufgabe 2

a) Vektorraumaxiome prüfen (sind erfüllt)
b) Basis auf lineare Unabhängigkeit überprüfen

Übung 7.2 Aufgabe 2

a) Vektorraumaxiome prüfen (sind erfüllt)
b) Basis auf lineare Unabhängigkeit überprüfen
erlaubte Opterationen sind: Zeilen aufeinander addieren, Zeilen mit Faktor multiplizieren, Zeilen vertauschen

Übung 7.2 Aufgabe 2

a) Vektorraumaxiome prüfen (sind erfüllt)
b) Basis auf lineare Unabhängigkeit überprüfen
erlaubte Opterationen sind: Zeilen aufeinander addieren, Zeilen mit Faktor multiplizieren, Zeilen vertauschen

$\{1 + x + x^2, 1 + x, 1 + x^2\}$

a) Vektorraumaxiome prüfen (sind erfüllt)
b) Basis auf lineare Unabhängigkeit überprüfen
erlaubte Opterationen sind: Zeilen aufeinander addieren, Zeilen mit Faktor multiplizieren, Zeilen vertauschen

$\{1 + x + x^2, 1 + x, 1 + x^2\}$

$$\sim \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Übung 7.2 Aufgabe 2

a) Vektorraumaxiome prüfen (sind erfüllt)
b) Basis auf lineare Unabhängigkeit überprüfen
erlaubte Opterationen sind: Zeilen aufeinander addieren, Zeilen mit Faktor multiplizieren, Zeilen vertauschen

$\{1 + x + x^2, 1 + x, 1 + x^2\}$

$$\sim \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \sim \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Vektorraumaxiome prüfen (sind erfüllt)
b) Basis auf lineare Unabhängigkeit überprüfen
erlaubte Opterationen sind: Zeilen aufeinander addieren, Zeilen mit Faktor multiplizieren, Zeilen vertauschen

$\{1 + x + x^2, 1 + x, 1 + x^2\}$

$$\sim \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \sim \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sim \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Übung 7.2 Aufgabe 2

a) Vektorraumaxiome prüfen (sind erfüllt)
b) Basis auf lineare Unabhängigkeit überprüfen
erlaubte Opterationen sind: Zeilen aufeinander addieren, Zeilen mit Faktor multiplizieren, Zeilen vertauschen

$\{1 + x + x^2, 1 + x, 1 + x^2\}$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Übung 7.2 Aufgabe 2

a) Vektorraumaxiome prüfen (sind erfüllt)
b) Basis auf lineare Unabhängigkeit überprüfen
erlaubte Opterationen sind: Zeilen aufeinander addieren, Zeilen mit Faktor multiplizieren, Zeilen vertauschen

$\{1 + x + x^2, 1 + x, 1 + x^2\}$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Übung 7.2 Aufgabe 2

a) Vektorraumaxiome prüfen (sind erfüllt)
b) Basis auf lineare Unabhängigkeit überprüfen
erlaubte Opterationen sind: Zeilen aufeinander addieren, Zeilen mit Faktor multiplizieren, Zeilen vertauschen

$\{1 + x + x^2, 1 + x, 1 + x^2\}$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ die Basismenge ist linear unabhängig und die Matrix hat (vollen) Rang 3

Übung 7.2 Aufgabe 2

a) Vektorraumaxiome prüfen (sind erfüllt)
b) Basis auf lineare Unabhängigkeit überprüfen (erfüllt)
c) Der Vektorraum ist dreidimensional.

Viel Erfolg für den **Studienstart**!