

# Hólfalíkön í faraldsfræði

Jóhannes Reykdal Einarsson

12. nóvember 2025

## Útdráttur

Í þessari greinargerð eru hólfalíkön í faraldsfræði skoðuð og sett fram stærðfræðilega. Kermack-Mckendrick líkanið er kynnt og helstu niðurstöður þess leiddar út, þar á meðal tilvist og ótvíraðni lausnar og nákvæm stikalausn. Grunnfjölgunartalan  $\mathcal{R}_0$  er skilgreind og reiknuð fyrir Kermack-McKendrick líkanið. Þá eru útvíkkanir á SIR líkaninu skoðaðar og almennt hólfalíkan sett fram. Næstu kynslóðar aðferðin er sett fram til þess að skilgreina grunnfjölgunartöluna  $\mathcal{R}_0$  fyrir almennt smitsjúkdómalíkan. Að lokum er sannað að ef  $\mathcal{R}_0 < 1$  þá er smitlausa jafnvægið staðbundið aðfellustöðugt, en óstöðugt ef  $\mathcal{R}_0 > 1$ .

## 1 Inngangur

Eftirfarandi skilgreiningu má finna í faraldsfræðibók Last (1995):

*Með faraldsfræði er er átt við rannsóknir á dreifingu og áhrifaþáttum ástands eða fyrirbæra er varða heilbrigði í tilteknum þýðum. Jafnframt fæst hún við hagnýtingu rannsóknanna til að hafa stjórn á heilbrigðisvandamálum.*

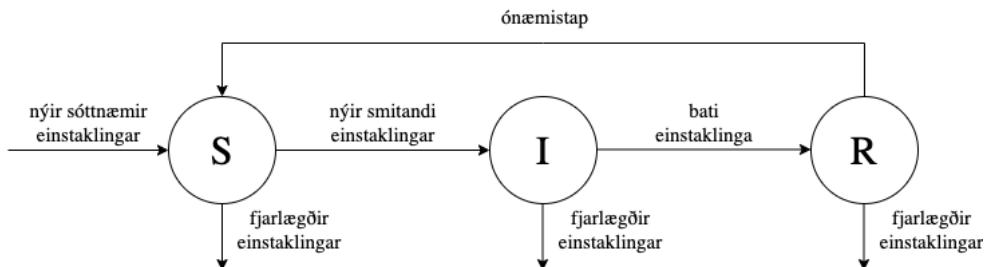
Faraldsfræðingar fást því við rannsóknir á útbreiðslu og orsökum sjúkdóma. Ein helsta aðferðin í þessum fræðum er að smíða stærðfræðilegt líkan til þess að herma eftir útbreiðslu sjúkdómsins, reyna að spá fyrir um hvernig hann þróast og hvernig má koma í veg fyrir útbreiðslu hans. Talið er að fyrsti stærðfræðingurinn til þess að reyna að spá fyrir um dreifingu sjúkdóma hafi verið Daniel Bernoulli (1700-1782). Hans vinna við stærðfræðilega faraldsfræði var lykilskref að örverukenningunni sem segir að örverur geti valdið sjúkdómum. Það var þó ekki fyrr en á þriðja áratugi 20. aldar sem hið svokallaða hólfalíkan, til þess að greina smitsjúkdóma, var sett fram af skosku vísindamönnum Anderson Gray McKendrick (1876-1943) og William Ogilvy Kermack (1898-1970). Hólfalíkön byggja á því að skipta þýði í hólf og reyna að lýsa hreyfingum milli hólfanna stærðfræðilega. Hólfalíkön eru nú undirstaðan fyrir helstu stærðfræðilegu smitsjúkdómalíkön nútímans sem og megin viðfangsefni þessarar ritgerðar.

## 2 SIR líkanið

Algengasta tegundin af hólfalíkaninu og meginundirstaðan fyrir öll önnur er svokallaða SIR-líkanið. Líkanið byggir á því að einstaklingum úr þýði er skipt niður í þrjú hólf. Þau eru

- S:** Allir sóttnæmir (e. susceptible) einstaklingar, þ.e.a.s. einstaklingar sem eru móttækilegir fyrir smiti eða sýkingu.
- I:** Allir smitandi (e. infectious) einstaklingar þ.e.a.s. þeir einstaklingar sem geta borið smit eða sýkingu til annars einstaklings.
- R:** Allir batnaðir (e. recovered) einstaklingar þ.e.a.s. þeir einstaklingar sem að hafa náð sér af sjúkdómnum og geta hvorki smitast né smitað.

Hér sést hvaðan líkanið dregur nafnið sitt. Við getum svo lýst hreyfingu milli þessari hólfa með eftirfarandi færsluriti (e. transfer diagram).



Mynd 1: Færslurit SIR líkans

Pessar hreyfingar eru dregnar af því sem almennt þekkist um smitsjúkdóma. Sóttnæmur einstaklingur getur smitast og náð sér aftur og ef líkaminn býr ekki til langvarandi ónæmi getur hann orðið sóttnæmur aftur. Á hverjum tímapunkti getur einstaklingurinn einnig yfirgefíð þýðið sem við erum að skoða hvort sem það er með dauða eða á annan máta.

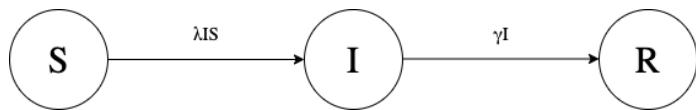
Markmið líkanagerðarinnar er að meta fjölda einstaklinga í hverju hólfí á sérhverjum tímapunkti. Þess vegna skilgreinum við föll  $S, I, R : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  sem fjöldi einstaklinga í samsvarandi hólfí  $S$ ,  $I$  eða  $R$  við tíma  $t$ . Ef við þekkjum tíðni hreyfinga milli hólfa þá er vitað hversu hratt fjöldinn í hverju hólfí breytist, þ.e.a.s. afleiðurnar af föllunum okkar með tilliti til  $t$ . Því er hægt að setja upp kerfi diffurjafna sem má greina og leysa.

## 2.1 Kermack-McKendrick Líkanið

Eitt einfaldasta SIR líkanið er það sem sett var fram af McKendrick og Kermack 1927, til þess að lýsa hraðri aukningu og fækkun í fjölda smita sem höfðu verið mæld í faröldrum, eins og svartadauða. Þeir gerðu eftirfarandi tilgátu um hvernig smitsjúkdómur dreifist:

1. Smit eiga sér stað "lárétt" með beinni snertingu milli hýsla.
2. Blöndun hýsla er einsleit og því gildir lögmál massaverkunnar, þ.e.a.s. fjöldi snertinga milli einstaklinga úr mismunandi hólfum er einungis háð fjöldi einstaklinga í þeim hólfum. Má þá sérstaklega tákna nýgengið, fjöldi nýrra smita á hverjum tímapunkti, sem  $\lambda I(t)S(t)$ , þar sem  $\lambda$  er fasti og kallaður smitunarfastinn.
3. Tíðni færslu úr hólfí er í réttu hlutfalli við fjölda einstaklinga í því hólfí. Því má tákna tíðni færslu frá  $I$  til  $R$ , bötnunartíðnina, sem  $\gamma I$ , fyrir einhvern fasta  $\gamma$ .
4. Sýktir einstaklingar verða smitandi strax við sýkingu án biðtíma.
5. Ónæmi tapast ekki og endursýking er ómöguleg. Þetta þýðir að færslutíðni frá  $R$  aftur í  $S$  er núll.
6. Það koma engir nýir sóttnæmir einstaklingar inn í kerfið og engir einstaklingar eru fjarlægðir.

Þessi tilgáta gæti virkað mjög takmarkandi en getur þó reynst afar sennileg, til dæmis fyrir sjúkdóm sem dreifist milli nemenda á háskólasvæði eða í sögulegu samhengi þegar samfélög voru töluvert afmarkaðri. Við þessar skorður verður færsluritið í (1) að



Mynd 2: Færslurit Kermack-McKendrick líkansins

Við fáum því kerfi afleiðujafna sem lýsir breytingu falla,  $S$ ,  $I$  og  $T$  sem föll af

tíma  $t$ :

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\lambda IS \quad (1)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \lambda IS - \gamma I \quad (2)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I \quad (3)$$

með upphafsskilyrði  $S_0 := S(0) \geq 0$ ,  $I_0 := I(0) \geq 0$  og  $R_0 := R(0) = 0$ . Ef við látum  $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$  tákna heildarfjölda þá fæst að  $N'(t) = 0$ , þar sem ' tákna afleiðu með tillit til  $t$ , svo fall  $N$  er fasti. Enn fremur fæst af upphafsskilyrðunum okkar að  $N_0 := N(0) = S_0 + I_0$ . Þar sem að fjöldinn er fastur munum við hér með hugsa um  $S$ ,  $I$  og  $R$  sem hlutföll af upphaflega fjöldanum.

Að lokum er vert að nefna að skv. tilgátu að ofan er smitunarfastinn  $\lambda > 0$  því annars fengist  $S'(0) \geq 0$  í mótsögn við að engir nýir sótt næmir komi inn í kerfið. Eins fæst með því að skoða  $R'$  að  $\gamma > 0$ .

Við höfum nú sett fram Kermack-McKendrick líkanið og getum því hafist handa við greiningu þess.

## 2.2 Tilvist og ótvíraðni

Þegar kerfi diffurjafna eru skoðuð reynist oft fyrsta verkefnið að sýna fram á tilvist og ótvíraðni lausnar kerfisins. Þetta á sérstaklega við hér þar sem líkan sem hefur margar eða jafnvel enga lausn reynist ekki gagnlegt í notkun. Ef við getum sýnt fram á tilvist og ótvíraðni getum við haldið áfram og ákvarðað föllin til þess að spá fyrir um fjölda sótt næmra, smitaðra og fjarlægðra.

Ein öflugasta setningin í þessum fræðum er tilvistarsetning Picard.

**Setning 2.1.** *Tilvistarsetning Picard.* Gerum ráð fyrir að fall  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  sé samfellt á  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  og  $(t_0, y_0) \in D$ . Ef til er rétthyrningur  $R = \{(t, y) \mid |t - t_0| < a, \|y - y_0\| < b\} \subset D$  og  $K > 0$  þannig að  $\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq K\|y_1 - y_2\|$  fyrir öll  $(t, y_1)$  og  $(t, y_2)$  í  $D$  þá er til  $h > 0$  þannig að upphafsgildisverkefnið  $y' = f(t, y)$ ,  $y(t_0) = y_0$ , hefur ótvírað ákvarða lausn á  $[t_0 - h, t_0 + h]$ .

Við setjum  $W = (S, I, R)$  og  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $(t, W) \mapsto (f_1, f_2, f_3)(t, W) = (-\lambda I(t)S(t), \lambda I(t)S(t) - \gamma I(t), \gamma I(t))$  þar sem  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$  en SIR líkanið er þá jafngilt upphafsgildisverkefninu,

$$W' = f(t, W), \quad W(0) = (S_0, I_0, R_0). \quad (4)$$

Ef fall  $f$  uppfyllir  $\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq K|y_1 - y_2|$  fyrir eitthvert  $K > 0$  er það sagt Lipschitz stöðugt. Þekkt niðurstaða [13] er að ef fall  $f$  er samfellt á mengi  $D$  og sérhver hlutafleiða  $\partial_i f_j$  er til og samfelld á  $D$  þá er  $f$  Lipschitz stöðugt á sérhverju  $S \subset\subset D$  (sjá viðauka).

Þar sem að sérhvert fall  $f_i$  er fyrsta stigs margliða með tilliti til  $S$ ,  $I$  eða  $R$  fáum við að samkvæmt ofangreindri niðurstöðu og tilvistarsætningu Picard er til ótvírað samfellt deildanleg lausn  $W(t) = (S(t), I(t), R(t))$  á einhverju bili  $[0, \bar{t}] \subset \mathbb{R}_0^+$  þar sem  $\bar{t} > 0$ . Við viljum nú sýna fram á lausnin sé til og sé ótvírað víðfemt á  $\mathbb{R}_0^+$ . Til þess höfum við setningu.

**Hjálparsetning 2.2.** *Ef  $W(t) = (S(t), I(t), R(t))$  er samfellt deildanleg lausn á upphafsgildisverkefninu (4) á einhverju bili  $J \subset \mathbb{R}_0^+$  þá er*

$$\forall t \in J : S(t) \geq 0, I(t) \geq 0, R(t) \geq 0 \quad (5)$$

Enn fremur ef  $S_0 > 0, I_0 > 0$ , þá er

$$\forall t \in J \setminus \{0\} : S(t) > 0, I(t) > 0, R(t) > 0 \quad (6)$$

Áhugasamir lesendur geta skoðað sönnunina á þessari setningu hér [7] en hún byggir á því að skoða lausnirnar á  $I$  og  $S$  ásunum.

Af þessari setningu höfum við auðveldlega niðurstöðuna,  $\|W(t)\| = |S(t)| + |I(t)| + |R(t)| = S(t) + I(t) + R(t) = 1$ . Með þessar þrjár niðurstöður og [8, Kafli 3] höfum við loksins að verkefnið hafi ótvíraða lausn víðfemt á  $\mathbb{R}_0^+$ . Við höfum setningu:

**Setning 2.3.** *Ótvírað samfellt deildanleg lausn  $W(t) = (S(t), I(t), R(t))$  er til á (4) á hverjum tíma  $t \in \mathbb{R}_0^+$  og er þannig að*

$$\forall t \in \mathbb{R}_0^+ : W(t) \in D_+, \|W(t)\| = 1 \quad (7)$$

og ef  $S_0 > 0, I_0 > 0$ , þá  $\forall t > 0 : W(t) \in D_+^*$  þar sem

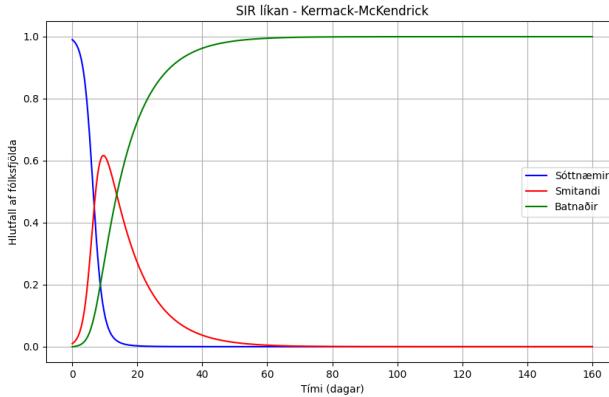
$$D_+ = \{(w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3 \mid w_1 \geq 0, w_2 \geq 0, w_3 \geq 0\}$$

og

$$D_+^* = \{(w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3 \mid w_1 > 0, w_2 > 0, w_3 > 0\}$$

Enn fremur höfum við að  $(0, 0, 0) \leq (S(t), I(t), R(t)) \leq (S(t) + I(t) + R(t), S(t) + I(t) + R(t), S(t) + I(t) + R(t)) = (1, 1, 1)$  fyrir öll  $t > 0$ .

Við höfum þar með sýnt að fyrir gefin gildi  $S_0, I_0, R_0, \lambda$  og  $\gamma$  hefur SIR líkanið ótvíraett ákværðaða lausn fyrir allan jákvæðan tíma. Ef við getum þá leyst verkefnið höfum við nákvæma lausn á þróun  $S, I$  og  $R$ .



Mynd 3: Töluleg lausn á Kermack-McKendrick líkaninu með  $(S_0, I_0, R_0) = (0.98, 0.02, 0)$ ,  $\lambda = 0.8$  og  $\gamma = 0.1$ .

### 2.3 Stikalausn

Við höfum nú sýnt fram á að lausn á verkefninu sé til og ótvíráett ákvörðuð en hvernig er þessi lausn fundin. Til eru ýmis reiknirit til þess að finna tölulega lausn en nú verður leidd út nákvæm stikalausn á verkefninu. Ef við einangrum  $I$  úr jöfnu (1) og stingum inn fyrir  $I$  í jöfnu (2) fæst,  $I = -S'(\lambda S)^{-1}$  og  $I' = -S' + (\gamma S')(\lambda S)^{-1}$ . Þá ef við deildum jöfnu (1) með tilliti til  $t$  og stingum inn fyrir  $I$  og  $I'$  fæst:

$$\begin{aligned} S'' &= \frac{d}{dt}(-\lambda IS) = -\lambda(I'S + IS') \\ &= -\lambda((-S' + (\gamma S')(\lambda S)^{-1})S - S'(\lambda S)^{-1}S') \\ &= \lambda S' S - \gamma S' + (S')^2 S^{-1} \end{aligned}$$

sem má endurskrifa sem

$$\frac{S''}{S} - \lambda S' + \gamma \frac{S'}{S} - \left(\frac{S'}{S}\right)^2 = 0. \quad (8)$$

Við stingum inn fyrir  $I$  í jöfnu (3) og fáum:

$$R' = -\frac{\gamma}{\lambda} \left(\frac{S'}{S}\right). \quad (9)$$

Með því að heilda báðum megin við jafnaðarmerki með tilliti til  $t$  og nýta sér að  $\frac{d}{dt} \ln(S) = S'(S)^{-1}$  fæst með smá útreikningum að

$$S = C_0 e^{-\frac{\lambda}{\gamma} R} \quad (10)$$

þar sem  $C_0 \in \mathbb{R}$  er einhver fasti. Við sjáum þó að  $S_0 = C_0 e^{-\frac{\lambda}{\gamma} R_0} = C_0$ . Ef við deildum jöfnur (10) og (9) með tilliti til tíma  $t$  fæst:

$$S' = -\frac{S_0 \lambda}{\gamma} R' e^{-\frac{\lambda}{\gamma} R} \quad (11)$$

og

$$R'' = -\frac{\gamma}{\lambda} \left( \frac{S''}{S} - \left( \frac{S'}{S} \right)^2 \right). \quad (12)$$

Þá með því að stinga inn jöfnum (9), (11) og (12) inn í jöfnu (8) höfum við loks jöfnu:

$$R'' = S_0 \lambda R' e^{-\frac{\lambda}{\gamma} R} - \gamma R' \quad (13)$$

sem er annars stigs afleiðujafna af  $R$  og jafngild verkefninu (1)-(3).

Við höfum því náð að setja SIR verkefnið fram sem verkefni í einni breytu og getum farið að leysa það.

Við byrjum á því að kynna til leiks fallið  $u(t)$  skilgreint sem  $u = e^{-\frac{\lambda}{\gamma} R}$  og því  $u(0) = 1$ . Þá er  $R = -\frac{\gamma}{\lambda} \ln(u)$  svo ef við stingum inn fyrir  $R$  í jöfnu (13) fæst :

$$u \frac{d^2 u}{dt^2} - \left( \frac{du}{dt} \right)^2 + (\gamma - S_0 \lambda u) u \frac{du}{dt} = 0. \quad (14)$$

Við skilgreinum þá annað fall  $\phi = \frac{dt}{du}$  en við getum þá endurskrifað jöfnu 14 sem

$$\frac{d\phi}{du} + \frac{1}{u} \phi = (\gamma - S_0 \lambda u) \phi^2. \quad (15)$$

Jafnan sem fæst er á svokölluðu Bernoulli formi en fyrir fall  $y(x)$  er diffurjafna á Bernoulli formi ef rita má hana sem

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \quad (16)$$

þar sem  $n$  er náttúruleg tala og  $P$  og  $Q$  einhver föll. Lausnaraðferðir fyrir Bernoulli diffurjöfnur eru þekktar [1] og með því að nýta okkur þær fæst almenn lausn:

$$\phi = \frac{1}{u(K_1 - \gamma \ln(u) + S_0 \lambda u)} \quad (17)$$

þar sem  $K_1$  er einhver fasti. Með því að bera saman báðar framsetningarnar á  $\phi$  getum við næst leitt út formúlu sem gefur samband  $u$  og  $t$

$$t - t_0 = \int_1^u \frac{d\zeta}{\zeta(K_1 - \gamma \ln(\zeta) + S_0 \lambda \zeta)}. \quad (18)$$

þar sem  $t_0$  er heildunarfastinn og getur því verið valinn sem 0 án skerðingar á vífaldum. Þá erum við komin með nákvæma stikalausn á líkaninu gefna sem

$$\begin{aligned} S &= S_0 u \\ I &= \frac{\gamma}{\lambda} \ln(u) - S_0 u - \frac{K_1}{\lambda} \\ R &= -\frac{\gamma}{\lambda} \ln(u). \end{aligned}$$

En nú er vitað að  $1 = S + I + R = -\frac{K_1}{\lambda}$  svo  $K_1 = -\lambda N$ . Við höfum nú fundið nákvæma stikalausn líkansins sem má nota til þess að spá fyrir um fjölda smitaðra. Það er þó sjaldnast mjög gagnlegt að skoða nákvæmar stikalausnir hólfalíkana því þegar líkönin verða stærri verður enn erfiðara og jafnvel ómögulegt að leiða út lausnina. Í flestum tilvikum er því fundin töluleg lausn á diffurjöfnuhneppinu. Reiknirit til þess að nálga diffurjöfnuhneppi eru ótal mörg, en dæmi um eitt sem er samleitið er Runge-Kutta-Fehlberg [10]. Á mynd (3) má sjá lausn verkefnisins (1)-(3) með upphafsskilyrði  $(S_0, I_0, R_0) = (0.98, 0.02, 0)$ ,  $\lambda = 0.8$  og  $\gamma = 0.1$  fundna tölulega með Runge-Kutta-Fehlberg aðferðinni.

## 2.4 Grunnfjölgunartala

Mikilvægasta breytan í líkanagerð í faraldsfræði er án efa grunnfjölgunartalan (e. basic reproduction number), táknuð með  $\mathcal{R}_0$ . Hún mælir meðalfjölda smita sem verða vegna eins smitandi einstaklings í sóttnæmu þýði á meðal smittímabili. Nú er  $\lambda$  meðalfjöldi smitsnertinga af einum smitandi hýsli,  $S_0$  er upphafsfjöldi sóttnæmra og  $\frac{1}{\gamma}$  er meðal smittímabilið. Við fáum því:

$$\mathcal{R}_0 = \lambda \cdot S_0 \cdot \frac{1}{\gamma}. \quad (19)$$

Gildi þessa fasta getur sagt til um það hvernig sjúkdómurinn hegðar sér og þá helst hvort faraldur muni eiga sér stað.

Við byrjum á því að athuga að ef  $(S, I, R)$  er lausn á (1) - (3) þá er  $S'(t) = -\lambda IS < 0$  svo  $S$  er minnkandi fall og þar að leiðandi er  $S_0 \geq S(t) \geq 0$  fyrir öll  $t \in \mathbb{R}_0^+$ . Við tökum einnig eftir því að ef  $I(\bar{t}) = 0$  á einhverjum tíma  $\bar{t}$ , þá höfum við að  $I'(\bar{t}) = 0$ , svo fyrir öll  $t \in [\bar{t}, \infty)$  verður  $I(t) = 0$ . Skilgreinum

bil  $J = [0, \bar{t})$  ef  $\bar{t}$  er fyrsti punkturinn þar sem  $I(t) = 0$  en  $J = [0, \infty)$ , ef sá punktur er ekki til. Ef við erum á þessu bili gildir að  $I(t) > 0$  og við höfum þá tvö tilvik.

- i) Gerum ráð fyrir að  $S_0 < \frac{\gamma}{\lambda}$ . Þá er  $I' = (\lambda S(t) - \gamma)I \leq (\lambda S_0 - \gamma)I < (\lambda \frac{\gamma}{\lambda} - \gamma)I = 0$ , sem gefur að  $I$  er strangt minnkandi á  $J$ .
- ii) Gerum ráð fyrir að  $S_0 > \frac{\gamma}{\lambda}$  þá er til  $t^* > 0$  þannig að  $S(t) > \frac{\gamma}{\lambda}$  fyrir  $t \in [0, t^*)$ . Þá er  $I' > 0$  og því  $I$  strangt vaxandi á þessu bili.

Ef  $I$  er strangt minnkandi þá verður fjöldi smitaðra aldrei meiri en upphafsfjöldinn svo faraldur mun ekki eiga sér stað. Hins vegar ef  $I$  er strangt vaxandi á  $[0, t^*)$  þá verður faraldur þar sem fjöldi smitaðra mun hækka fram að tíma  $t^*$  og svo minnka. Af þessu höfum við niðurstöðu:

**Setning 2.4.** Látum  $\mathcal{R}_0$  vera skilgreint eins og að framan.

1. Ef  $\mathcal{R}_0 < 1$  mun ekki verða faraldur.
2. Ef  $\mathcal{R}_0 > 1$  mun verða faraldur.

Þessi niðurstaða lýsir vel mikilvægi þessarar breytu. Hún er einnig í samræmi við faraldsfræðilegu skilgreininguna á  $\mathcal{R}_0$ . Ef meðalfjöldi smita sem hver smitandi einstaklingur veldur er minni en 1, þá ætti fjöldi smitaðra að fara minnkandi. Þar sem að  $\mathcal{R}_0$  er margfeldi af  $\lambda$ , þá getum við minnkað fastann með því að takmarka beinar snertingar smitandi hýsils. Sóttvarnaraðgerðir fela því í sér að reyna að minnka  $\mathcal{R}_0$  undir 1 til þess að koma í veg fyrir faraldur.

## 2.5 Áframhaldandi greining

Það má ýmislegt skoða við líkanið sem getur gefið til kynna hvernig sjúkdómur hegðar sér. Við byrjum á því að athuga að  $(S_\infty, I_\infty, R_\infty) := \lim_{t \rightarrow \infty} (S(t), I(t), R(t))$  er til. Eins og sýnt var að framan er  $S$  minnkandi og takmarkað að neðan af 0 svo  $S_\infty$  er til. Eins er  $R'(t) = \gamma I \geq 0$  svo það er vaxandi.  $R$  er takmarkað að ofan af fólksfjöldanum 1 svo  $R_\infty$  er einnig til. Þá fæst að lokum að  $I(t) = 1 - S(t) - R(t)$  sem gefur að  $I_\infty$  er einnig til. Nú getum við þá skoðað hvaða gildi föllin taka í óendanleikanum.

Við skulum gera ráð fyrir því að  $I_0 > 0$  og  $S_0 > 0$ . Ef  $I_0 = 0$  þá er  $I$  núllfallið og ef  $S_0 = 0$  þá er  $I_0 = 1$ , en hvorugt tilvik er nógu áhugavert til þess að skoða frekar. Nú er

$$S'_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} S'(t) = -\lambda I_\infty S_\infty \leq 0 \tag{20}$$

Þá athugum við að ef við deilum jöfnum (1) og (3), þá fæst diffurjafna í  $R$ :

$$\frac{dS}{dR} = -\frac{\lambda}{\gamma}S.$$

Pessi jafna er auðleyst fyrir  $S$  en lausn hennar er

$$S(R) = S_0 e^{-\frac{\lambda}{\gamma}R} \geq S_0 e^{-\frac{\lambda}{\gamma}} > 0 \quad (21)$$

þar sem  $R \leq 1$  og  $S_0 > 0$ . Gerum ráð fyrir að  $S'_\infty = \alpha < 0$ . Þá er til  $T$  þannig að  $S'(t) < \alpha/2$  fyrir  $t \geq T$  og þar með

$$S(t) < S(T) + \frac{\alpha}{2}(t - T) < 0 \quad \text{fyrir } t > T - \frac{2S(T)}{\alpha}$$

í mótsögn við að  $S(t) \geq 0$ . Því verður  $S'_\infty = 0$  og þar með  $I_\infty = 0$ . Þetta þýðir að sjúkdómurinn deyi á endanum út, sem endurspeglar smitsjúkdóma í raunveruleikanum.

Skilgreinum þar sem  $\rho := \frac{\gamma}{\lambda}$ . Þá má einnig sýna [2] að hæsta gildi sem  $I$  tekur,  $I_{\max}$ , sé gefið með formúlunni

$$I_{\max} = -\rho + \rho \ln(\rho) + 1 - \rho \ln(S_0).$$

Ef grunnfjölgunartalan er þekkt má meta  $\rho = \frac{S_0}{R_0}$  og þar með  $I_{\max}$ .

Við höfum nú sýnt að jafnvel þótt lausn sé ekki fundin má greina ýmislegt um hegðun sjúkdómsins út frá líkaninu.

## 2.6 Pröskuldssetningin

Að lokum í greiningu SIR líkansins skulum við skoða fræga setningu sett fram af Kermack og McKendrick sjálfum til þess að meta fjölda sótnæmra einstaklinga að faraldi loknum. Til þess að sanna setninguna þurfum við fyrst að að skoða samband  $I$  og  $S$ . Við deilum jöfnu (2) með (1) og fáum

$$\frac{dI}{dS} = \frac{\lambda IS - \gamma I}{-\lambda IS} = -1 + \frac{\gamma}{\lambda S}.$$

Við heildum svo beggja vegna og fáum

$$I(S) = I_0 + S_0 - S + \rho \ln \left( \frac{S}{S_0} \right). \quad (22)$$

Þá getum við haldið áfram með þröskuldssetninguna.

**Setning 2.5.** *Pröskuldssetningin (e. Threshold theorem).*

1. Faraldur á sér stað ef og aðeins ef  $S_0$  fer yfir þröskuldinn  $\rho$ .
2. Ef  $S_0 = \rho + \nu, \nu > 0$ ,  $\nu/\rho$  er mjög lítið í samanburði við 1, og  $I_0$  sé mjög lítið, þá verður fjöldi sóttnæmra búinn að lækka um um það bil  $2\nu$  þ.e.a.s.  $S_\infty \approx S_0 - 2\nu = \rho - \nu$ .

*Sönnun:*

1. Þetta leiðir beint af setningu 2.4.
2. Ef  $t$  er látið stefna á óendanlegt fæst af 22 að

$$I(S_\infty) = I_0 + S_0 - S_\infty + \rho \ln \left( \frac{S_\infty}{S_0} \right),$$

Nú athugum við að  $I(S_\infty) = 0$  [2, Kafli 2] og þar sem  $I_0$  er mjög lítið miðað við  $S_0$  höfum við

$$\begin{aligned} 0 &\approx S_0 - S_\infty + \rho \ln \left( \frac{S_\infty}{S_0} \right) \\ &= S_0 - S_\infty + \rho \ln \left( \frac{S_0 - (S_0 - S_\infty)}{S_0} \right) \\ &= S_0 - S_\infty + \rho \ln \left( 1 - \frac{S_0 - S_\infty}{S_0} \right). \end{aligned}$$

Við gerðum ráð fyrir því að  $\nu/\rho$  væri mjög lítið í samanburði við 1 svo  $S_0 - \rho = \nu$  er lítið miðað við  $\rho$  og þar af leiðandi er  $S_0 - S_\infty$  lítið miðað við  $S_0$ . Með því að nota Taylor liðunina fyrir  $\ln(1 - x)$  getum við þá gert nálgunina:

$$\begin{aligned} \ln \left( 1 - \frac{S_0 - S_\infty}{S_0} \right) &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{S_0 - S_\infty}{S_0} \right)^n \\ &\approx - \left( \frac{S_0 - S_\infty}{S_0} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{S_0 - S_\infty}{S_0} \right)^2, \end{aligned}$$

þar sem við tókum fyrstu two liðina. Ef við stingum inn fyrir náttúrulega logrann fæst með örlitlum útreikningum:

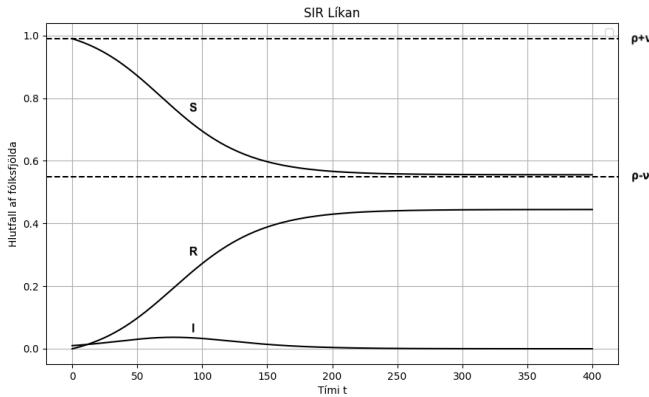
$$0 \approx (S_0 - S_\infty) \left( 1 - \frac{\rho}{S_0} - \frac{\rho}{2S_0^2} (S_0 - S_\infty) \right).$$

Ef við einangrum  $S_0 - S_\infty$  og nýtum okkur að  $\nu/\rho \approx 0$  fæst að lokum að:

$$\begin{aligned} S_0 - S_\infty &\approx 2S_0 \left( \frac{S_0}{\rho} - 1 \right) = 2(\rho + \nu) \left( \frac{\rho + \nu}{\rho} - 1 \right) \\ &= 2(\rho + \nu) \frac{\nu}{\rho} = 2\rho \left( 1 + \frac{\nu}{\rho} \right) \frac{\nu}{\rho} \\ &\approx 2\rho (1 + 0) \frac{\nu}{\rho} = 2\nu \end{aligned}$$

□

Við getum séð þessa niðurstöðu myndrænt.



Mynd 4: Töluleg lausn á SIR líkaninu með  $S_0 = 0.99$ ,  $I_0 = 0.01$ ,  $R_0 = 0$ ,  $\lambda = 0.13$  og  $\gamma = 0.1$ .

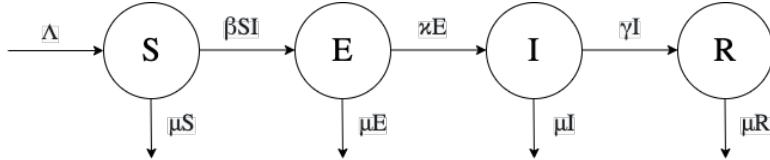
### 3 Útvíkkanir

Nú höfum við einungis verið að vinna með einföldustu myndina af SIR líkaninu en það má útvíkka á ýmsa vegu. Til að mynda mætti taka með allar hreyfingarnar settar fram í 1. Þá fengist líkan sem myndi betur lýsa flóknum ferum smitsjúkdómsins, en auk þess verða flóknara til þess að leysa og greina. Önnur leið til þess að fanga þau flóknu mynstur sem smitsjúkdómar ku fylgja er að bæta við fleiri hólfum umfram S, I og R.

#### 3.1 SEIR líkanið

Fyrir mikið af sjúkdómum líður tími frá því að einstaklingur smitast þangað til hann verður smitandi. Til þess að takast á þessu bætum við hólf E til þess að

tákna þá einstaklinga. Við skulum skoða algengustu útgáfuna af þessu líkani. Við höfum færsluritið



Mynd 5: Færslurit SEIR líkans

og kerfi diffurjafna,

$$S' = \Lambda - \mu S - \beta SI \quad (23)$$

$$E' = \beta SI - (\mu + \kappa)E \quad (24)$$

$$I' = \kappa E - (\mu + \gamma)I \quad (25)$$

$$R' = \gamma I - \mu R \quad (26)$$

Við sjáum að ofan á Kermack-McKendrick líkanið (2) höfum við ekki einungis bætt við hólfni  $E$  heldur einnig flóknari hreyfingum fyrir þau hólf sem við höfðum fyrir. Petta líkan leyfir nýja sóttnæma einstaklinga, sem og að fjarlægja einstaklinga úr hólfunum.

Eins og minnst var á að ofan er grunnfjölgunartalan eitt mikilvægasta hugtakið í faraldsfræði og viljum við því meta hana fyrir SEIR-líkanið. Það er þó ekki hægt að reikna það beint eins og fyrir einfalda SIR líkanið heldur þurfum við að kynna nýtt hugtak til sögunnar.

### 3.2 Næstu kynslóðar aðferðin

Áður en við byrjum að skoða aðferðina þurfum við að gera grein fyrir tvennu.

**Skilgreining 3.1.** Mengi allra raungildra  $n \times m$  fylkja er táknað  $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ . Ef  $n = m$  þá er oft ritað  $\mathcal{M}_n$  í stað  $\mathcal{M}_{n,n}$ .

**Skilgreining 3.2.** Rófgeisli fylkis  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , táknaður  $\rho(A)$ , er skilgreindur sem lengsta lengdin af eicingildi  $A$  þ.e.a.s.  $\rho(A) = \max\{\|\lambda_i\|_2 : \lambda_i \in \mathbb{C} \text{ er eicingildi } A\}$ .

Með þessar skilgreiningar getum við hafist handa. Næstu kynslóðar aðferðin (e. next generation method) er aðferð til þess að leiða út grunnfjölgunartöluna úr hólfasmitsjúkdómalíkani. Þar sem að grunnfjölgunartalan  $\mathcal{R}_0$  er

skilgreind faraldsfræðilega sem meðalfjöldi smita sem verða vegna eins smitandi einstaklings í sóttnæmu þýði á meðal smittímabili, flækjast málín þegar við höfum meira en eina tegund af smituðum einstaklingum. Það getur bæði átt við mismunandi stig sjúkdómsins eins og í SEIR líkaninu hér að ofan eða að sjúkdómur hefur mismunandi áhrif á mismunandi einstaklinga. Ef svo er er ekki hægt að lesa  $\mathcal{R}_0$  úr líkaninu beint.

Prófessorinn Odo Diekeman [9] lagði því fram skilgreiningu á grunnfjölgunartölunni fyrir kerfi með strjánum fjölda af hólfum fyrir smitaða einstaklinga. Hann skilgreindi  $\mathcal{R}_0$  sem rófgeislann af svokallaða næstu kynslóðar fylkinu (e. next generation matrix)  $K$ . Við fórum nú yfir hvernig má meta þetta fylki  $K$  og þar að leiðandi  $\mathcal{R}_0$ .

Gerum ráð fyrir kerfi með  $n > 1$  tegundum af smituðum einstaklingum. Við getum lýst því sem fjölskyldu af fyrsta stigs diffurjöfnum. Enn fremur skoðum við einungis þær jöfnur sem lýsa breytingu í smituðu hólfunum og gerum ráð fyrir að þær séu gerðar línulegar um fastalausn sem inniheldur enga smitaða einstaklinga. Við skulum tákna hólfin í líkaninu okkar með  $V_1, \dots, V_{n+r}$ ,  $r > 0$  og látum  $V_1, \dots, V_n$  vera smituðu hólfin okkar. Ef  $V'_i = g_i(V_1, \dots, V_{n+r})$  þá höfum við að Jacobi fylkið (sjá viðauka) af smitaða hlutkerfinu, þ.e.a.s. þeim jöfnum sem lýsa fjölda smitaðra, er

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial V_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial V_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial V_1} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial V_n} \end{bmatrix}.$$

Þá má rita  $J = T + \Sigma$ , þar sem að  $T$  inniheldur þær færslur sem samsvara smiti, þ.e.a.s. faraldsfræðilegri fæðingu, og  $\Sigma$  allar aðrar færslur. Þá skilgreinum við næstu kynslóðar fylkið sem  $K = -T\Sigma^{-1}$ . Túlka má stak  $ij$  í  $-\Sigma^{-1}$  sem væntigildi tíma sem einstaklingur með smit af stigi  $j$  eyðir í stigi  $i$ . Einnig má túlka stak  $ij$  í  $T$  sem tíðnin sem að smitaður einstaklingur af stigi  $j$  býr til smitaðan einstakling af stigi  $i$ . Þá verður stak  $ij$  í  $K$  væntigildi fjölda sýktra afkomenda sem eru á stigi  $i$  við smit og verða til á smitandi æviskeiði einstaklings sem er nú á smitstigi  $j$ . Vert er að nefna að til eru þrjár gerðir af næstu kynslóðar fylkinu,  $K$ , það venjulega, með stóru óðali og með litlu óðali. Aðferðin að ofan finnur fylkið með stóru óðali og er sú framsetning oftast notuð, þar sem hún er einföldust. Venjulega næstu kynslóðar fylkið og það með litlu óðali eru flóknari en reynast oft betri í tölulegum reikningum, þar sem víddir dálkrúma þeirra eru minni eða jafnar þess með stóra óðalsins. Það má þó sýna að öll fylkin hafi sama rófgeisla [9] svo skilgreiningar þeirra í samhengi við grunnfjölgunartöluna eru jafngildar.

Í kafla 4 verður nánar farið út í þessa skilgreiningu og afleiðingar hennar.

### 3.3 Grunnfjölgunartala SEIR

Skoðum aftur SEIR líkanið sem sett var fram í 3.1. Það hefur fastalausn með engum smituðum  $(S, E, I, R) = (\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0)$ . Þá fæst að smitaða hlutkerfið, línulegt um fastlausnina, verður

$$E' = \beta \frac{\Lambda}{\mu} I - (\mu + \kappa) E \quad (27)$$

$$I' = \kappa E - (\mu + \gamma) I \quad (28)$$

svo Jacobi fylkið verður

$$\begin{aligned} J &= \begin{bmatrix} -(\mu + \kappa) & \beta \frac{\Lambda}{\mu} \\ \kappa & -(\mu + \gamma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \beta \frac{\Lambda}{\mu} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(\mu + \kappa) & 0 \\ \kappa & -(\mu + \gamma) \end{bmatrix} \\ &= T + \Sigma \end{aligned}$$

Nú er fylkið  $\Sigma$   $2 \times 2$  fylki svo við getum auðveldlega reiknað andhverfu þess og fáum því næstu kynslóðar fylkið  $K$ ,

$$\begin{aligned} K &= -T\Sigma^{-1} = - \begin{bmatrix} 0 & \beta \frac{\Lambda}{\mu} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \left( \frac{1}{(\mu + \kappa)(\mu + \gamma)} \begin{bmatrix} -(\mu + \gamma) & 0 \\ -\kappa & -(\mu + \kappa) \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{(\mu + \kappa)(\mu + \gamma)} \begin{bmatrix} \frac{\kappa\beta\Lambda}{\mu} & (\mu + \kappa)\frac{\beta\Lambda}{\mu} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Nú gildir að egingildi efra þríhyrningsfylkis eru einfaldlega stökin á hornalínumni svo það er auðséð að

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\kappa\beta\Lambda}{\mu(\mu + \kappa)(\mu + \gamma)} \quad (29)$$

### 3.4 Aðrað útvíkkanir

Það er búið smíða og rannsaka gríðarlegan fjölda af hólfalíkönunum. Við höfum SIRV, með hólfí fyrir bólusetta, SIRD, með hólfí fyrir dána, og mörg fleiri. Það er þó ekkert "besta" líkan sem hentar fyrir alla sjúkdóma. Sjúkdómar geta verið svo ólíkur og hreyfingarnar í þýðinu sem við erum að skoða sömuleiðis. Líkan sem gæti virkað vel fyrir einn sjúkdóm gæti reynst mjög lélegt fyrir annan. Það er því undir þeim komið sem rannsaka sjúkdóminn að velja eða smíða líkan fyrir sitt tilvik, út frá hegðun og eiginleikum sjúkdómsins sem eru mæld eða þekkt.

Að lokum má nefna að öll líkönin sem við höfum skoðað hingað til eru lög-geng (e. deterministic). Einnig má þó leiða út slembnar (e. stochastic) gerðir

af líkönunum til þess að taka tillit til óútreiknamlegar og slembinnar hegðunar sumra sjúkdóma. Sú fræði er einstaklega áhugaverð [3] og eru forvitnir lesendur hvattir til þess að kynna sér betur þau líkön, en þau verða ekki skoðuð nánar í þessari greinargerð.

## 4 Greiningar á stöðugleika

Pegar rannsaka á hólfalíkön í faraldsfræði er annað hugtak sem kemur oft upp, svokallað stöðugleiki jafnvægja. Við skulum skoða hvað er átt með þessu og hvaða tól við höfum til lausnar verkefna í þessum fræðum.

Byrjum á því að skoða hneppi  $x' = f(x)$ , þar sem  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Látum þá  $x(t, x_0)$  tákna lausn á upphafsgildisverkefninu  $x' = f(x)$ ,  $x(0) = x_0$ . Lausn  $x(t)$  er sögð vera jafnvægi (e. equilibrium) ef hún er föst fyrir öll  $t$  þ.e.a.s.  $x(t) = \bar{x}$  fyrir einhvern fasta  $\bar{x}$ . Fyrir jafnvægi höfum við skilgreiningu.

**Skilgreining 4.1.** Jafnvegi  $\bar{x}$  á  $x' = f(x)$  er

1. *stöðugt*, ef fyrir sérhverja  $\varepsilon$ -grennd  $N(\bar{x}, \varepsilon)$  um  $\bar{x}$  þá er til  $\delta$ -grennd  $N(\bar{x}, \delta)$  um  $\bar{x}$  þannig að ef  $x_0 \in N(\bar{x}, \delta)$  þá er  $x(t, x_0) \in N(\bar{x}, \varepsilon)$  fyrir öll  $t \geq 0$
2. *staðbundið aðfellustöðugt*, ef  $\bar{x}$  er stöðugt og ef það er til  $b$ -grennd  $N(\bar{x}, b)$  þannig að ef  $x_0 \in N(\bar{x}, b)$  þá fæst að  $x(t, x_0) \rightarrow \bar{x}$  þegar  $t \rightarrow \infty$

Í öðrum orðum getum við sagt að jafnvægi sé stöðugt, ef sérhver lausn sem byrjar nálægt jafnvæginu helst nálægt jafnvæginu.

Pegar við skoðum jafnvæispunkta í hólfalíkönnum, skoðum við fyrst og fremst tvær tegundir jafnvægja, annars vegar smitlaus jafnvægi (e. disease free equilibrium) og hins vegar landlæg jafnvægi (e. endemic equilibrium). Smitlausa jafnvægið er jafnvægi þar sem fjöldi einstaklinga í sérhverju smituðu hólfu er 0 og því getur reynst gagnlegt að sýna fram á stöðu- eða óstöðugleika þessa jafnvægis.

Látum verkefnið  $x' = f(x)$  vera gefið og gerum ráð að  $\bar{x}$  sé jafnvægi. Nú er  $0 = \bar{x}' = f(\bar{x})$ . Við notum Taylor liðun í hverri jöfnu í hneppinu um punktinn  $\bar{x}$  og fáum

$$\begin{aligned} x' &= f(\bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\bar{x}} (x - \bar{x}) + \dots \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\bar{x}} (x - \bar{x}) + \dots \end{aligned}$$

en  $\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\bar{x}}$  er einfaldlega Jacobi fylkið (sjá viðauka) um jafnvægið  $\bar{x}$ . Við skilgreinum  $\delta x = x - \bar{x}$  og athugum að  $\delta x' = x'$ . Við viljum skoða hvernig lausnir

haga sér nálægt jafnvæginu svo ef  $\delta x$  er lítið getum við hent burt liðum af stigi hærra en 1 í Taylor liðuninni, þar sem þeir eru veldi af  $\delta x$  og framlag þeirra því ekki mikið. Við fáum þar með  $\delta x = Df(\bar{x})\delta x$ . Nú er  $Df(\bar{x})$  fastafylki svo það er þekkt niðurstaða [14] að lausnina márita sem samantekt liða á forminu  $e^{\lambda_j t}$  þar sem  $\{\lambda_j\}$  er mengi egingilda Jacobi fylkisins. Enn fremur er þá

$$e^{\lambda_j t} = e^{\operatorname{Re}(\lambda_j)t} e^{i\operatorname{Im}(\lambda_j)t}.$$

Þverhlutinn stuðlar einungis að sveiflu í liðnum svo við sjáum að ef raunhlutinn er jákvæður þá verður  $e^{\operatorname{Re}(\lambda_j)t}$  vaxandi með stækandi  $t$  og mun þar með fjarlægjast jafnvægið. Þetta leiðir okkur að eftirfarandi niðurstöðu.

**Setning 4.2.** *Jafnvægis  $\bar{x}$  af diffurjöfnu  $x' = f(x)$  er staðbundið aðfellustöðugt ef sérhvert egingildi  $Df(\bar{x})$  hefur neikvæðan raunhluta. Jafnvægið er óstöðugt ef að minnsta kosti eitt egingildi hefur jákvæðan raunhluta.*

## 4.1 Almennt smitsjúkdómalíkan

Við viljum skoða jafnvægi almennt fyrir hólfalíkön svo við byrjum á því að skilgreina almennt hólfalíkan.

Gerum ráð fyrir að hægt sé að skipta þýði í  $n$  einsleit hólf og látum  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ ,  $x_i \geq 0$  fyrir öll  $i$  tákna fjöldann í sérhverju hólf. Enn frekar gerum við ráð fyrir því að fyrstu  $m$  hólfin tákni einhverskonar smit-aða einstaklinga. Skilgreinum  $X_s$  sem mengi allra smitlausra staða þ.e.a.s.  $X_s = \{x \geq 0 | x_i = 0, i = 1, \dots, m\}$ . Við látum  $\mathcal{F}_i(x)$  vera tíðni nýrra smita í hólf  $i$ ,  $\mathcal{V}_i^+(x)$  vera tíðni færsla inn í hólf  $i$  á allan annan máta og  $\mathcal{V}_i^-(x)$  vera tíðni færsla út úr hólf  $i$ . Við gerum ráð fyrir að sérhvert fallanna sé tvísvar sinnum samfellt deildanlegt, en þá skilgreinum við hólfalíkanið með kerfi diffurjafna:

$$x'_i = f_i(x) = \mathcal{F}_i(x) - \mathcal{V}_i(x), \quad i = 1, \dots, n, \tag{30}$$

þar sem  $\mathcal{V}_i = \mathcal{V}_i^- - \mathcal{V}_i^+$ , auk þess sem föllin uppfulla eftirfarandi skilyrði (i)-(v). Þessi föll skilgreina öll færslur einstaklinga svo

(i) ef  $x \geq 0$  þá eru  $\mathcal{F}_i, \mathcal{V}_i^+, \mathcal{V}_i^- \geq 0$  fyrir öll  $i = 1, \dots, n$ .

Ef hólf er tómt getur ekki verið nein færsla út úr hólfinu svo

(ii) ef  $x_i = 0$  þá er  $\mathcal{V}_i^- = 0$ .

Næsta skilyrði fæst af því að nýgengi smitaðra í ósmituðum hólfum er 0, þ.e.a.s.

(iii)  $\mathcal{F}_i = 0$  ef  $i > m$ .

Við gerum ráð fyrir að ef sjúkdómurinn deyr út þá helst kerfið sjúkdómslaust, þ.e.a.s.

(iv) ef  $x \in X_s$  þá er  $\mathcal{F}_i(x) = 0$  og  $\mathcal{V}_i^+(x) = 0$  fyrir  $i = 1, \dots, m$ .

Látum  $f = (f_1, \dots, f_n)$ . Ef  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$  er sett 0, þ.e.a.s. ef það eru ekkert nýgengi smita, viljum við að lausnir sem byrja nálægt smitlausu jafnvægi haldist þar. Með því að nota setningu 4.2 setjum við því,

(v) ef  $\mathcal{F}$  er sett 0 og  $x_0$  er smitlaust jafnvægi þá hefur sérhvert eicingildi  $Df(x_0)$  neikvæðan raunhluta.

Við höfum sem sagt að smitlausa jafnvægið er stöðugt ef það eru engin smit í líkaninu.

Fyrir líkanið (30) sem uppfyllir skorður (i)-(v) höfum við þá setningu:

**Hjálparsetning 4.3.** *Ef að  $x_0$  er smitlaust jafnvægi af (30) og  $f_i(x)$  uppfyllir (i)-(v) þá gildir:*

$$D\mathcal{F}(x_0) = \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D\mathcal{V}(x_0) = \begin{bmatrix} -\Sigma & 0 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix},$$

þar sem

$$T = \left[ \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial x_j}(x_0) \right] \text{ og } \Sigma = - \left[ \frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial x_j}(x_0) \right] \text{ þar sem } 1 \leq i, j \leq m$$

Enn fremur gildir að  $T$  sé frekar jákvætt,  $-\Sigma$  er ósérstætt  $M$ -fylki og öll eicingildi  $J_4$  hafa jákvæðan raunhluta.

*Sönnun:* Látum  $x_0 \in X_S$  vera smitlaust jafnvægi. Nú samkvæmt (iii) og (iv) gildir að  $(\partial \mathcal{F}_i / \partial x_j)(x_0) = 0$  ef annað hvort  $i > m$  eða  $j > m$ . Eins samkvæmt (ii) og (iv) gildir að ef  $x \in X_s$  þá er  $\mathcal{V}_i(x) = 0$  fyrir  $i \leq m$ . Þá er  $(\partial \mathcal{V}_i / \partial x_j)(x_0) = 0$  fyrir  $i \leq m$  og  $j > m$ . Við höfum þar með sýnt að rita megi  $D\mathcal{F}(x_0)$  og  $D\mathcal{V}(x_0)$  eins og sett var fram að ofan.

Að  $T$  sé frekar jákvætt fylgir beint af (i) og (iv).

Látum  $\{e_j\}_{1 \leq j \leq n}$  vera venjulegu einingarvigranna í  $\mathbb{R}^n$ . Þá fæst samkvæmt skilgreiningunni á afleiðu fyrir  $j = 1, \dots, m$ ,

$$\left( \frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial x_j} \right) (x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left( \frac{\mathcal{V}_i(x_0 + he_j) - \mathcal{V}_i(x_0)}{h} \right)$$

Nú því  $x_0$  er smitlaust jafnvægi er  $\mathcal{V}_i(x_0) = 0$  fyrir  $i = 1, \dots, m$  og ef  $i \neq j$  þá er  $i$ -ta stakið af  $x_0 + he_j = 0$  og þar með  $\mathcal{V}_i(x_0 + he_j) \leq 0$  samkvæmt (i) og (ii). Þá höfum við að  $(\partial \mathcal{V}_i / \partial x_j)(x_0) \leq 0$  fyrir  $i \leq m$  og  $j \neq i$  en  $-\Sigma$  er þá  $Z$  fylki (sjá viðauka). Skilyrði (v) gefur einnig að öll eicingildi  $-\Sigma$  hafi jákvæðan raunhluta. Þá getum við sagt að  $-\Sigma$  sé ósérstætt  $M$ -fylki [4. p 135 ( $G_{20}$ )].

Að lokum gefur (v) einnig að raunhluti allra eicingilda  $J_4$  verða að vera jákvæð.  $\square$

## 4.2 Stöðugleiki jafnvægis

Nú eru einmitt fylkin  $T$  og  $\Sigma$  þau sömu og skilgreind voru í kafla 3 í næstu kynslóðar aðferðinni. Við höfum sýnt fram á fyrir sérhvert almennt líkan af gerðinni (30) sem uppfyllir (i)-(v), að skilgreina megi  $T$  og  $\Sigma$ . Við getum því skilgreint grunnfjölgunartöluna  $\mathcal{R}_0$  sem  $\rho(-T\Sigma^{-1})$ .

Við höfum nú samkvæmt setningu 4.2 að smitlaust jafnvægi af kerfinu er staðbundið aðfellustöðugt ef sérhvert eicingildi  $Df(x_0)$  hefur neikvæðan raunhluta en óstöðugt ef það hefur að minnsta kosti eitt með jákvæðan raunhluta. Af hjálparsetningu 4.3 má nú skipta eicingildum  $Df(x_0)$  í tvennt samsvarandi smituðu og ósmituðu hólfunum. Það gildir að

$$Df(x_0) = D\mathcal{F}(x_0) - D\mathcal{V}(x_0) = \begin{bmatrix} T + \Sigma & 0 \\ -J_3 & -J_4 \end{bmatrix}$$

svo við höfum annars vegar eicingildi  $T + \Sigma$  og hins vegar eicingildi  $-J_4$ . Setningin sagði einnig að öll eicingildi  $J_4$  hefðu jákvæðan raunhluta svo sérhvert eicingildi  $-J_4$  hefur neikvæðan raunhluta. Stöðugleiki jafnvægisins er því einungis háður eicingildum  $T + \Sigma$ . Við höfum skilgreiningu:

**Skilgreining 4.4.** Rófláhnit (e. spectral abscissa) fylkis  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , táknað  $s(A)$ , er skilgreint sem stærsti raunhluti eicingilda  $A$  þ.e.a.s.  $s(A) = \max\{\operatorname{Re}(\lambda_i) : \lambda_i \in \mathbb{C} \text{ er eicingildi } A\}$ .

Ef sýna má að  $s(T + \Sigma) < 0$  getum við þar með sagt að jafnvægið sé stöðugt.

**Setning 4.5.** Ef  $x_0$  er smitlaust jafnvægi af líkaninu (30) sem uppfyllir (i)-(v) þá er  $x_0$  staðbundið aðfellustöðugt ef að  $\mathcal{R}_0 < 1$  en óstöðugt ef  $\mathcal{R}_0 > 1$  þar sem að  $\mathcal{R}_0$  er skilgreint með næstu kynslóðaraðferðinni.

*Sönnun:* Látum  $J_1 = T + \Sigma$ . Þar sem að  $-\Sigma$  er ósérstætt  $M$ -fylki og  $T$  er frekar jákvætt samkvæmt (4.3) þá er  $-J_1 = -\Sigma - T$ ,  $Z$ -fylki (sjá viðauka). Þar með fæst

$$s(J_1) < 0 \iff -J_1 \text{ er ósérstætt M-fylki}$$

þar sem  $s(J_1)$  merkir rófláhnit fylkis  $J_1$ . Við athugum einnig að þar sem  $T$  er sem  $T$  er frekar jákvætt,  $-\Sigma$  er ósérstætt  $M$ -fylki og  $-\Sigma^{-1}$  því frekar jákvætt [4, bls. 137 ( $N_{38}$ )] þá er augljóslega  $-T\Sigma^{-1}$  frekar jákvætt. Nú er  $J_1\Sigma^{-1} = I - (-T\Sigma^{-1})$  því  $Z$ -fylki svo ef við notum hjálparsetningu A.6 úr viðauka með  $H = -\Sigma$  og  $B = -J_1 = -\Sigma - T$  fæst

$$-J_1 \text{ er ósérstætt } M\text{-fylki} \iff I - (-T\Sigma^{-1}) \text{ er ósérstætt } M\text{-fylki}$$

Að lokum fyrst  $-T\Sigma^{-1}$  er frekar jákvætt þá er sérhvert eicingildi minna eða jafnt  $\rho(-T\Sigma^{-1})$  [11]. Við höfum þar með

$$I - (-T\Sigma^{-1}) \text{ er ósérstætt } M\text{-fylki} \iff \rho(-T\Sigma^{-1}) < 1$$

Svo við höfum sýnt að að  $s(J_1) < 0$  ef og aðeins ef  $\mathcal{R}_0 < 1$ .

Á svipaðan máta má fá,

$$\begin{aligned} S(J_1) = 0 &\iff -J_1 \text{ er sérstætt } M\text{-fylki} \\ &\iff I - (-T\Sigma^{-1}) \text{ er sérstætt } M\text{-fylki} \\ &\iff \rho(-T\Sigma^{-1}) = 1. \end{aligned}$$

Önnur tvileiðingin fæst af hjálparsetningu A.7 í viðauka með  $H = -\Sigma$  og  $K = T$  og hinar með sama hætti og að ofan. Par með er  $s(J_1) = 0$  ef og aðeins ef  $\mathcal{R}_0 = 1$ . Af þessum tveimur niðurstöðum fylgir þá að  $S(J_1) > 0$  ef og aðeins ef  $\mathcal{R}_0 > 1$ .  $\square$

Þessi niðurstaða sýnir að  $\mathcal{R}_0$  er þróskuldsbreyta fyrir stöðugleika. Hún passar einnig mjög vel við það sem var sýnt fram á í setningu 2.4. Ef  $\mathcal{R}_0 < 1$  þá munu lausnir sem byrja nálægt smitlausu jafnvægi haldast nálægt smitlausa jafnvæginu, en ef  $\mathcal{R}_0 > 1$  er það óstöðugt og lausnin fjarlægist þessa smitlausu stöðu. Þetta má túlka sem tilfellin sem faraldur á sér ekki stað og þegar faraldur á sér stað.

## 5 Umræða

Niðurstöður þessarar greinargerðar sýna hvernig hólfalíkön, sérstaklega SIR og útvíkkanir þess, má nota til að greina hegðun faraldra. Með því að skilgreina og reikna grunnfjölgunartöluna  $\mathcal{R}_0$  má ákvarða hvort faraldur muni breiðast út eða ekki. Sér í lagi var sýnt fram á að smitlaust jafnvægi er stöðugt ef  $\mathcal{R}_0 < 1$  en óstöðugt ef  $\mathcal{R}_0 > 1$ , sem samræmist faraldsfræðilegri innsýn.

Greiningin byggir þó á ákveðnum einföldunum. Líkanið gerir ráð fyrir fullkominni blöndun einstaklinga og stöðugu þýði, sem ekki endurspeglar flókin

félagsleg tengsl eða lýðfræðilegar breytingar. Einnig er litið framhjá tilviljana-kenndum sveiflum sem geta haft áhrif, sérstaklega í litlum þýðum.

Styrkur líkansins liggur þó í einfaldleika þess og þeirri innsýn sem það veitir í grunnferla smitsjúkdóma. Útreikningur á  $\mathcal{R}_0$  og greining á jafnvægi gefa skýrar forsendur fyrir ákvarðanatöku í lýðheilsu, t.d. um bólusetningar.

Í framtíðarrannsónum væri áhugavert að skoða slembnar útgáfur líkansins, sem og að bæta við þáttum eins og aldri, staðsetningu eða árstíðabundinni hegðun. Slík líkön gætu betur endurspeglad raunveruleika faraldra og stutt við stefnumótun í heilbrigðismálum.

## A Viðauki

Greinargerðin nýtir örlitla fræði sem er utan efnis greinargerðarinnar og því verður að gera grein fyrir nokkrum hugtökum og niðurstöðum í línulegri algebru og stærðfræðigreiningu.

**Skilgreining A.1.** Fylki  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  er sagt frekar jákvætt ef  $a_{ij} \geq 0$  fyrir öll  $1 \leq i, j \leq n$ .

**Skilgreining A.2.** Fylki  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  er sagt  $Z$ -fylki ef sérhvert stak ekki á hornalínunni er neikvætt þ.e.a.s.  $a_{ij} \leq 0$  ef  $i \neq j$ .

**Skilgreining A.3.** Gerum ráð fyrir því að fylki  $Fylki A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  sé  $Z$ -fylki.  $A$  er sagt  $M$ -fylki ef rita má það sem  $A = sI - B$  þar sem  $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $b_{ij} \geq 0$  fyrir öll  $1 \leq i, j \leq n$ ,  $s \geq \rho(B)$  og  $I \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  er einingarfylkið.

**Skilgreining A.4.** Fylki  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  er sagt sérstætt eða óandhverfanlegt ef ákveða þess er 0.

Það má sýna að  $M$ -fylki  $A = sI - B$ ,  $B$  er frekar jákvætt, er ósérstætt ef  $s > \rho(B)$  og sérstætt ef  $s = \rho(B)$ .

**Hjálparsetning A.5.** Gerum ráð fyrir því að  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  sé  $Z$ -fylki. Ef  $s(A) > 0$  þá er  $A$  ósérstætt  $M$ -fylki.

**Hjálparsetning A.6.** Látum  $H$  vera ósérstætt  $M$ -fylki og gerum ráð fyrir því að  $B$  og  $BH^{-1}$  séu  $Z$ -fylki. Þá er  $B$  ósérstætt  $M$ -fylki ef og aðeins ef  $BH^{-1}$  er ósérstætt  $M$ -fylki.

**Hjálparsetning A.7.** Látum  $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  vera ósérstætt  $M$ -fylki og gerum ráð fyrir því að  $K = (k_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $k_{ij} \geq 0$ . Þá gildir,

1.  $(H - K)$  er ósérstætt  $M$ -fylki ef og aðeins ef  $(H - K)H^{-1}$  er ósérstætt  $M$ -fylki.
2.  $(H - K)$  er sérstætt  $M$ -fylki ef og aðeins ef  $(H - K)H^{-1}$  er sérstætt  $M$ -fylki.

**Skilgreining A.8.** Gerun ráð fyrir því að  $f = (f_1, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  sé fall og sérhver hlutafleiða  $\partial_j f_i$  sé skilgreind. Fylkið  $J_f \in \mathcal{M}_{n,m}$  kallast Jacobi fylki falls  $f$  og er skilgreint sem

$$J_f = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1 & \cdots & \partial_n f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m & \cdots & \partial_n f_m \end{bmatrix}$$

**Skilgreining A.9.** Mengi  $A$  er sagt tiltölulega þjappað í mengi  $B$  ef  $A$  er innihaldið í  $B$ , lokunin  $\overline{A}$  er þjöppuð og innihaldin í  $B$ . Þetta er táknað  $A \subset\subset B$ .

## Heimildir

- [1] *Solving ordinary differential equations. 1: Nonstiff problems*, no. 8 in Springer series in computational mathematics, Springer, Berlin Heidelberg, 2., rev. ed., 1. softcover printing ed., 2009.
- [2] *An introduction to mathematical modeling of infectious diseases*, Springer Berlin Heidelberg, New York, NY, 2018.
- [3] L. J. ALLEN AND A. M. BURGIN, *Comparison of deterministic and stochastic SIS and SIR models in discrete time*, Mathematical Biosciences, 163 (2000), pp. 1–33.
- [4] A. BERMAN AND R. J. PLEMMONS, *Nonnegative matrices in the mathematical sciences*, Computer science and applied mathematics, Academic Press, New York, 1979.
- [5] F. BRAUER AND C. CASTILLO-CHAVEZ, *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*, vol. 40 of Texts in Applied Mathematics, Springer New York, New York, NY, 2012.
- [6] M. BRAUN, *Differential Equations and Their Applications: An Introduction to Applied Mathematics*, vol. 11 of Texts in Applied Mathematics, Springer New York, New York, NY, 1993.

- [7] V. CAPASSO AND G. SERIO, *A generalization of the Kermack-McKendrick deterministic epidemic model*, Mathematical Biosciences, 42 (1978), pp. 43–61.
- [8] C. CORDUNEANU, *Principles of differential and integral equations*, Chelsea Pub. Co, Bronx, N.Y, 2d ed ed., 1977.
- [9] O. DIEKMANN, J. A. P. HEESTERBEEK, AND M. G. ROBERTS, *The construction of next-generation matrices for compartmental epidemic models*, Journal of The Royal Society Interface, 7 (2010), pp. 873–885.
- [10] E. FEHLBERG, *Some old and new Runge-Kutta formulas with stepsize control and their error coefficients*, Computing, 34 (1985), pp. 265–270.
- [11] G. FROBENIUS, *Ueber matrizen aus nicht negativen elementen*, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, (1912), pp. 456–477.
- [12] T. HARKO, F. S. LOBO, AND M. MAK, *Exact analytical solutions of the Susceptible-Infected-Recovered (SIR) epidemic model and of the SIR model with equal death and birth rates*, Applied Mathematics and Computation, 236 (2014), pp. 184–194.
- [13] R. MAGNUS, *Essential ordinary differential equations*, Springer undergraduate mathematics series, Springer, Cham, Switzerland, 2023.
- [14] M. R. ROUSSEL, *Nonlinear Dynamics: A Hands-On Introductory Survey*, IOP Concise Physics Ser, Morgan & Claypool Publishers, San Rafael, 2019.
- [15] L. TRYGGVADÓTTIR, *Hvað er faraldsfræði?* <https://www.visindavefur.is/svar.php?id=2769>, 2002. Vísindavefurinn, University of Iceland.
- [16] P. VAN DEN DRIESSCHE AND J. WATMOUGH, *Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission*, Mathematical Biosciences, 180 (2002), pp. 29–48.