

Tölulegt verkefni

Jafnvægishitadreifing í kæliplötu sem tengd er við
varmauppsprettu



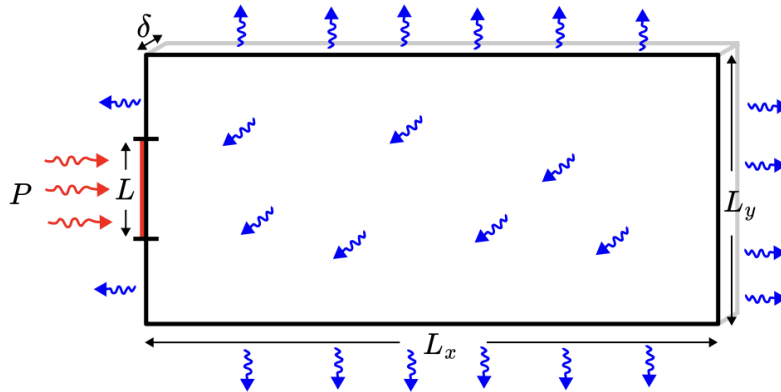
**HÁSKÓLI
ÍSLANDS**

Ingvar Andri Ingvarsson
Jóhannes Reykdal Einarsson

Stærðfræðigreining IV | STÆ401G
Sigurður Örn Stefánsson
11. apríl 2025

1 Inngangur

Allur tækjabúnaður sem umbreytir orku missir alltaf einhvern hluta af henni í varma. Allt frá sprengihreyfilsbílvel í tölvuúhlut. Hægt er að sjá hvernig sá varmi dreifist með tölulegum aðferðum og það er markmið þessa verkefnis. Tölulegu aðferðirnar eru annars vegar mismunaaðferðin (e. difference method) og hins vegar bútaaðferðin (e. finite element method). Í þessu verkefni skoðum við jafnvægishitadreifingu í kæliplötu sem tengd er við varmamyndandi fyrirbæri eins og til dæmis örgjörva. Markmið verkefnisins er að reikna tölulega jafnvægishitadreifingu í kæliplötunni fyrir mismunandi efniseiginleika, svo hægt sé að skoða það myndrænt. Í öðrum hluta verkefnisins verður ýmsum slembnum göllum bætt við í kæliplötuna, eins og oft er raunin í raunheimnum, til að sjá áhrif þeirra á niðurstöðuna.



Mynd 1: Mynd af verkefnisuppsetningu. Kæliplatan hefur hliðarlengdir L_x og L_y , og þykkt δ . Tengd við kæliplötuna er varmamyndandi hlutur, með afl P , með snertiflöt við kæliplötuna af lengd L . Gert er ráð fyrir því að varminn flæði út um alla fleti. (Mynd tekin úr verkefnalýsingu frá kennara.)

2 Fræði

Táknum plötuna okkar sem tvívíða svæðið $D \subseteq \mathbb{R}^2$ með jaðar ∂D . Látum enn fremur ∂D_K tákna kælingarjaðarinn og ∂D_H hitajaðarinn en þá má rita $\partial D = \partial D_K \cup \partial D_H$. Með því að nota táknmál úr 5.3 í Edbook-nótum, [1], fæst eftirfarandi upphafsgildisverkefni

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = -\nabla \cdot (\nabla u) + qu = 0 & \text{á } D \\ -Fu + \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{á } \partial D_K \\ \frac{\partial u}{\partial n} = E & \text{á } \partial D_H \end{cases} \quad (1)$$

þar sem $q = \frac{2H}{\delta K}$, $E = \frac{P}{(L\delta)K}$ og $F = \frac{H}{K}$. Við setjum verkefni samanborið við verkefnalýsingu. Þá er neðra vinstra hornið í $(0, 0)$, lárétta hliðin á bilinu $[0, L_x]$ og sú lóðrétta bilinu $[0, L_y]$. Enn fremur er $\partial D_H = \{0\} \times [L_y/2 - L/2, L_y/2 + L/2]$. Við skilgreinum punkta, $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = L_x$ með jafnri billengd $h_x = L_x/N$ og $0 = y_0 < y_1 < \dots < y_M = L_y$ með jafnri billengd $h_y = L_y/M$. Þá höfum við net með hornpunktum $(\hat{x}_i, \hat{y}_i) = (x_j, y_k)$, $i = j + kn$ þar sem $m := M + 1$ og $n := N + 1$.

Markmið mismunaraðferðarinnar er að ákvarða nálgunarlausn í sérhverjum punkti (\hat{x}_i, \hat{y}_i) en ef við heildum upphafsgildisverkefnið yfir svæðið Ω_i sem inniheldur (\hat{x}_i, \hat{y}_i) höfum við [1]

$$-\int_{\partial\Omega_i} \frac{\partial u}{\partial n} ds + \iint_{\Omega_i} qu \, dxdy = 0 \quad (2)$$

og enn fremur

$$-\sum_{t=1}^4 \int_{S_t} \frac{\partial u}{\partial n} ds + \iint_{\Omega_i} qu \, dxdy = 0 \quad (3)$$

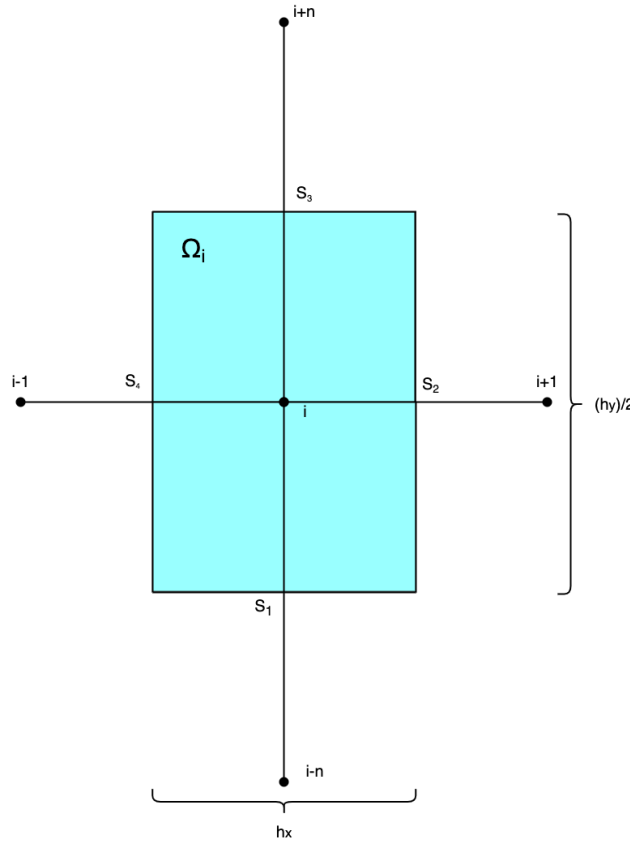
þar sem að $S_t, t \in \{1, 2, 3, 4\}$ eru hliðar svæðisins Ω_i . Skrifum nú niður fylki A af stærð $nm \times nm$ og vigur b af lengd nm þannig að nálgunarlausnin c uppfylli jöfnuna $Ac = b$. Hér er c_i nálgunargildi $u(\hat{x}_i, \hat{y}_i) := u_i$. Byrjum á að setja öll stök A og b jöfn núll en tilgreinum síðan hvaða stök eru frábrugðin núlli.

Við viljum gera þetta fyrir sérhvern punkt (\hat{x}_i, \hat{y}_i) en fyrir það höfum við þrjú tilvik.

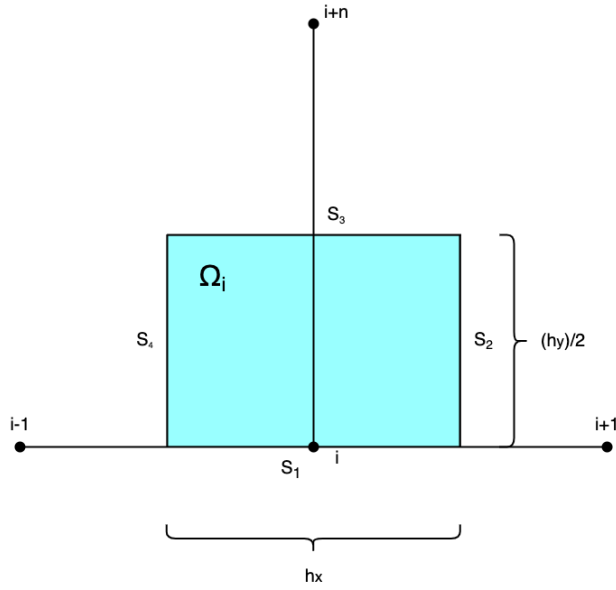
Innri punktur

Gerum ráð fyrir $(\hat{x}_i, \hat{y}_i), i = j + kn$, sé innri punktur netsins, þ.e.a.s. $j = 1, \dots, n-2$ og $k = 1, \dots, m-2$ sjá mynd (2). Þá var sýnt fram á í verkefnalýsingu að

$$A_{i,i} = 2h_x^{-2} + 2h_y^{-2} + q, \quad A_{i,i-1} = A_{i,i+1} = -h_x^{-2}, \quad A_{i,i-n} = A_{i,i+n} = -h_y^{-2}.$$



Mynd 2: Mynd af neti og svæði Ω_i fyrir innri hnút i netsins



Mynd 3: Mynd af neti og svæði Ω_i fyrir hnút i á botn jaðrinum

Hliðar

Við skoðum næst punkt á jaðrinum ekki í horninum. Fyrir þá höfum við fjögur tilvik.

Vinstri jaðar

Skoðum vinstri jaðar, ekki í horni, þ.e.a.s. punkta (\hat{x}_i, \hat{y}_i) , $i = j + kn$, þar sem $j = 0$ og $k = 1, \dots, m - 2$. Sýnt var fram á í verkefnalýsingu að

$$A_{i,i} = 2h_x^{-2} + 2h_y^{-2} + q + 2h_x^{-1}\alpha_i, \quad A_{i,i+1} = -2h_x^{-2}, \quad A_{i,i-n} = A_{i,i+n} = -h_y^{-2}, \quad b_i = 2h_x^{-1}\gamma_i$$

þar sem að $\alpha_i = 0$ og $\gamma_i = E$ ef (\hat{x}_i, \hat{y}_i) á hitunarjaðri en $\alpha_i = -F$ og $\gamma_i = 0$ annars.

Botn jaðar

Gerum ráð fyrir að (\hat{x}_i, \hat{y}_i) , $i = j + kn$, sé á botn jaðrinum og ekki horn þ.e.a.s. $j = 1, \dots, n - 2$ og $k = 0$, mynd (3). Nú athugum við að gildir að $p = 1$, $\alpha_i = -F$ og $\gamma_i = 0$. Þá fæst með nálgunum gefnum í (5.3) í Edbook:

$$\int_{S_1} \frac{\partial u}{\partial n} ds \approx \frac{\gamma_i - \alpha_i u_i}{\beta_i} h_x = F u_i h_x$$

og

$$\int_{S_3} \frac{\partial u}{\partial n} ds \approx \frac{u_{i+n} - u_i}{h_y} h_x, \quad \int_{S_4} \frac{\partial u}{\partial n} ds \approx \frac{u_{i-1} - u_i}{h_x} \cdot \frac{h_y}{2}, \quad \int_{S_2} \frac{\partial u}{\partial n} ds \approx \frac{u_{i+1} - u_i}{h_x} \cdot \frac{h_y}{2}$$

og

$$\iint_{\Omega_i} q u dx dy \approx q u_i \frac{h_x h_y}{2}$$

Stingum inn í 3 og höfum þá að:

$$-Fc_i h_x - \frac{c_{i+n} - c_i}{h_y} h_x - \frac{c_{i-1} - c_i}{h_x} \cdot \frac{h_y}{2} - \frac{c_{i+1} - c_i}{h_x} \cdot \frac{h_y}{2} + q c_i \frac{h_x h_y}{2} = 0$$

sem að einfaldast í

$$c_i(-2Fh_y^{-1} + 2h_y^{-2} + 2h_x^{-2} + q) - 2h_y^{-2}c_{i+n} - h_x^{-2}c_{j-1} - h_x^{-2}c_{j+1} = 0$$

sem að lokum gefur okkur gildin á fylkinu A :

$$A_{i,i} = -2Fh_y^{-1} + 2h_y^{-2} + 2h_x^{-2} + q, A_{i,i+n} = -2h_y^{-2}, A_{i,i-1} = A_{i,i+1} = -h_x^{-2}, b_i = 0.$$

Hægri jaðar

Gerum ráð fyrir að $(\hat{x}_i, \hat{y}_i), i = j + kn$, sé á hægri jaðrinum og ekki horn þ.e.a.s. $j = n - 1$ og $k = 1, \dots, m - 2$. Þá höfum við með sambærilegum reikningum og að framan að

$$A_{i,i} = -2Fh_x^{-1} + 2h_x^{-2} + 2h_y^{-2} + q, A_{i,i-1} = -2h_x^{-2}, A_{i,i+n} = A_{i,i-n} = -h_y^{-2}, b_i = 0.$$

Efri jaðar

Gerum ráð fyrir að $(\hat{x}_i, \hat{y}_i), i = j + kn$, sé á efri jaðrinum og ekki horn þ.e.a.s. $j = 1, \dots, n - 2$ og $k = m - 1$. Þá höfum við með sambærilegum reikningum og að framan að

$$A_{i,i} = -2Fh_y^{-1} + 2h_y^{-2} + 2h_x^{-2} + q, A_{i,i-n} = -2h_y^{-2}, A_{i,i-1} = A_{i,i+1} = -h_x^{-2}, b_i = 0.$$

Horn

Síðasta tilvikið fæst ef að (\hat{x}_i, \hat{y}_i) er hornpunktur netsins. Þeir eru fjórir talsins svo við höfum.

Vinstra niðri

Skoðum hornið niðri í vinstra horninu þ.e.a.s. punkt $(\hat{x}_i, \hat{y}_i), i = j + kn$, þar sem $j = k = 0$. Þá var sýnt fram á í dæmalýsingu að

$$A_{i,i} = 2h_x^{-2} + 2h_y^{-2} + q - 2F(h_x^{-1}\mathbb{1}\{L < L_y\} + h_y^{-1}), A_{i,i+1} = -2h_x^{-2}, A_{i,i+n} = -2h_y^{-2}$$

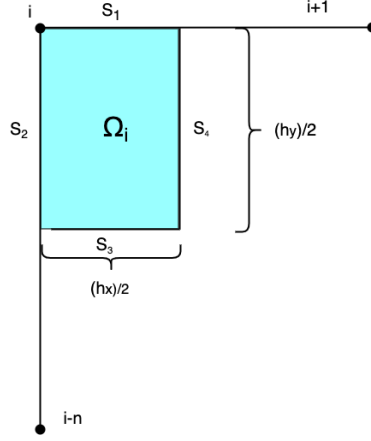
$$b_i = 2h_x^{-1}E\mathbb{1}\{L = L_y\}$$

þar sem að

$$\mathbb{1}\{P\} = \begin{cases} 1 & \text{ef } P \text{ satt} \\ 0 & \text{ef } P \text{ ósatt} \end{cases}$$

Vinstri uppi

Skoðum hornið uppi í vinstra horninu þ.e.a.s. punkt (\hat{x}_i, \hat{y}_i) , $i = j + kn$, þar sem að $j = 0$ og $k = m - 1$. Við höfum



Mynd 4: Mynd af neti og svæði Ω_i fyrir hnút i á botn jaðrinum

Nú gildir að

$$\int_{S_1} \frac{\partial u}{\partial n} ds \approx \frac{\partial u}{\partial n}(0^+, L_y) \frac{1}{2} h_x, \quad \int_{S_2} \frac{\partial u}{\partial n} ds \approx \frac{\partial u}{\partial n}(0, L_y^-) \frac{1}{2} h_y.$$

En nú er samkvæmt jaðarskilyrðum $\frac{\partial u}{\partial n}(0^+, L_y) = F u_i$, $\frac{\partial u}{\partial n}(0, L_y^-) = F u_i$ ef $L < L_y$ og $\frac{\partial u}{\partial n}(0, L_y^-) = E$ ef $L = L_y$. Fyrir hinar hliðarnar fæst svo

$$\int_{S_3} \frac{\partial u}{\partial n} \approx \frac{u_{i-n} - u_i}{h_y} \frac{h_x}{2}, \quad \int_{S_4} \frac{\partial u}{\partial n} \approx \frac{u_{i+1} - u_i}{h_x} \frac{h_y}{2}, \quad \iint_{\Omega_i} q u dx dy = q u_i \frac{1}{4} h_x h_y.$$

Við stingum þessu öllu inni 3 og fáum:

$$- F c_i \frac{1}{2} h_x - \frac{1}{2} h_y (\mathbb{1}\{L < L_y\} F c_i + \mathbb{1}\{L = L_y\} E) - \frac{c_{i-n} - c_i}{h_y} \frac{h_x}{2} - \frac{c_{i+1} - c_i}{h_x} \frac{h_y}{2} + q c_i \frac{1}{4} h_x h_y = 0$$

svo

$$c_i \left(-\frac{1}{2} h_x F - \frac{1}{2} h_y \mathbb{1}\{L < L_y\} F + \frac{h_x}{2 h_y} + \frac{h_y}{2 h_x} + q \frac{1}{4} h_y h_x \right) - \frac{h_x}{2 h_y} c_{i-n} - \frac{h_y}{2 h_x} c_{i+1} = \frac{1}{2} h_y \mathbb{1}\{L_y = L\} E$$

og

$$c_i (-2 h_y^{-1} F - 2 h_x^{-1} \mathbb{1}\{L < L_y\} F + 2 h_y^{-2} + 2 h_x^{-2} + q) - 2 h_y^{-2} c_{i-n} - 2 h_x^{-2} c_{i+1} = 2 h_x^{-1} \mathbb{1}\{L_y = L\} E.$$

Þetta gefur að lokum

$$A_{i,i} = 2 h_x^{-2} + 2 h_y^{-2} + q - 2 F (h_x^{-1} \mathbb{1}\{L < L_y\} + h_y^{-1}), \quad A_{i,i-n} = -2 h_y^{-2}, \quad A_{i,i+1} = -2 h_x^{-2} \\ b_i = 2 h_x^{-1} E \mathbb{1}\{L = L_y\}$$

Hægri uppi

Skoðum hornið uppi í hægra horninu þ.e.a.s. punkt (\hat{x}_i, \hat{y}_i) , $i = j + kn$, þar sem að $j = n - 1$ og $k = m - 1$. Við höfum með sambærilegum reikningum og að framan,

$$A_{i,i} = 2h_x^{-2} + 2h_y^{-2} + q - 2F(h_x^{-1} + h_y^{-1}), \quad A_{i,i-1} = -2h_x^{-2}, \quad A_{i,i-n} = -2h_y^{-2} \\ b_i = 0$$

Hægri niðri

Skoðum hornið niðri í hægra horninu þ.e.a.s. punkt (\hat{x}_i, \hat{y}_i) , $i = j + kn$, þar sem að $j = n - 1$ og $k = 0$. Við höfum með sambærilegum reikningum og að framan,

$$A_{i,i} = 2h_x^{-2} + 2h_y^{-2} + q - 2F(h_x^{-1} + h_y^{-1}), \quad A_{i,i-1} = -2h_x^{-2}, \quad A_{i,i+n} = -2h_y^{-2} \\ b_i = 0$$

Við höfum nú ákvarðað nálgunarformúlu fyrir sérhvern hnút í netinu og getum því hafist handa við lausn verkefnins.

3 Forrit

Verkefnið er forritað í Python forritunartungumálinu. Byrjað er á að fylgja leiðbeiningum kennarans, og skrifað fallið `varmadreifing` sem tekur inn eftirfarandi stika L_x , L_y , N , M , L , δ , P , K , H , u_b , fgalla og gallabil. Fallið stillir upp þunnskipaða fylkinu A og vigrinum b samkvæmt formúlum gefnum að ofan með `scipy` og `numpy` pökkunum. Ef inntök, fgalla og gallabil eru gefin festir það einnig hitastig í slembnum punktum með `numpy.random` pakkanum. Að lokum er fylkjaafna $Ax = b$ leyst með `scipy.sparse.linalg.spsolve` og fallið skilar þremur fylkjum, X_{net} , Y_{net} og w , þar sem í fylki w er stak (j, k) sem er nálgunarlausnin c_i og stak (j, k) í X_{net} er x_k , og y_j fyrir Y_{net} . Einnig er skilgreint hjálparfall `change` sem tekur inn stika j , k , n og yfirfærir tvívíðu tölusetninguna í einvíða. Allar myndir eru svo gerðar með `matplotlib` pakkanum. Að lokum er helmingunarleit útfærð en fjallað er nánar um hana í prófunarhlutanum að neðan.

Forritið í heild sinni má nálgast á Github.

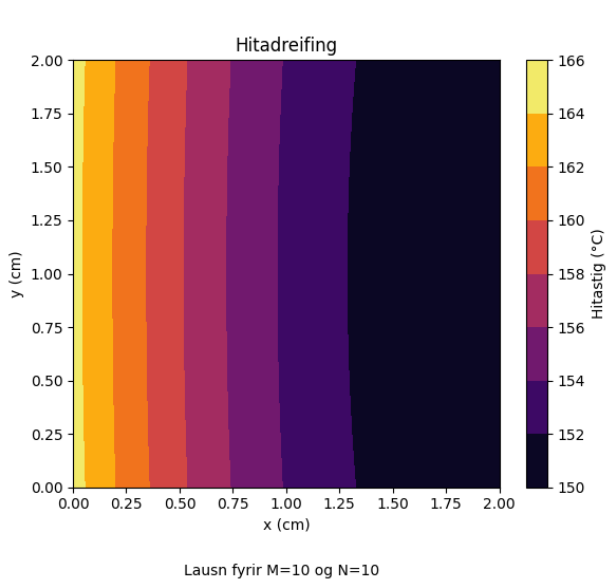
4 Prófun forrita

4.1 Verkefni 1

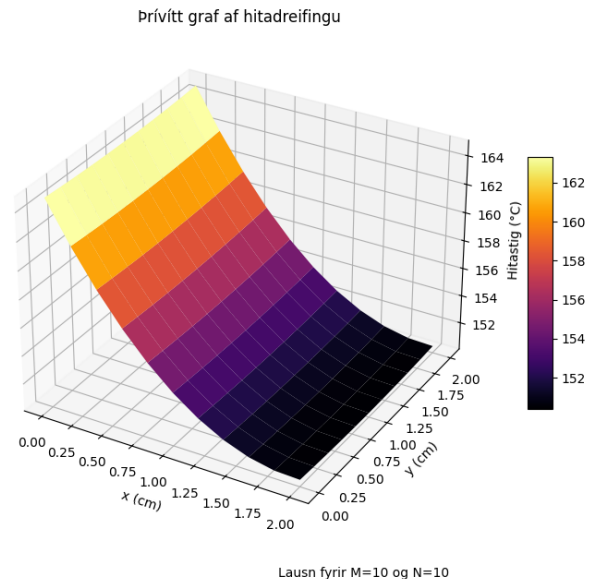
Prófanir í verkefni 1 eru framkvæmdar samkvæmt leiðbeiningum kennara en þar er eftirfarandi skilyrðum lýst. Gera skal ráð fyrir því að kæliplatan sé úr áli sem hefur varmaleiðni $K = 1.68 \text{ W/(cm}^\circ\text{C)}$. Utan um kæliplötuna er gert ráð fyrir einfaldri loftkælingu sem hefur varmaflutningsstuðul $H = 0.005 \text{ W/(cm}^\circ\text{C)}$ og síðan að umhverfishitastigið sé $u_b = 20^\circ\text{C}$.

4.1.1 Prófun 1

Fyrsta prófun felur í sér að stærð kæliplötunnar er $2 \times 2 \text{ cm}$ á breidd og lengd, og þykkt hennar 1 mm . Varmaaflið er $P = 5 \text{ W}$ sem er leitt inn um vinstri brún um svæði af lengd $L = 2 \text{ cm}$, (sjá mynd (1)). Nálgunarlausn er síðan fundin þar sem eru $N = M = 10$ skref í x og y stefnur.



(a) Grafið sýnir hitastigsdreifingu með jafnhæðarlínunum í kæliplötunni fyrir skrefin $N = M = 10$ og hliðarlengdir 2×2 cm.



(b) Grafið sýnir þrívíðarútfærslu á mynd (5a).

Mynd 5: Fyrsta prófun.

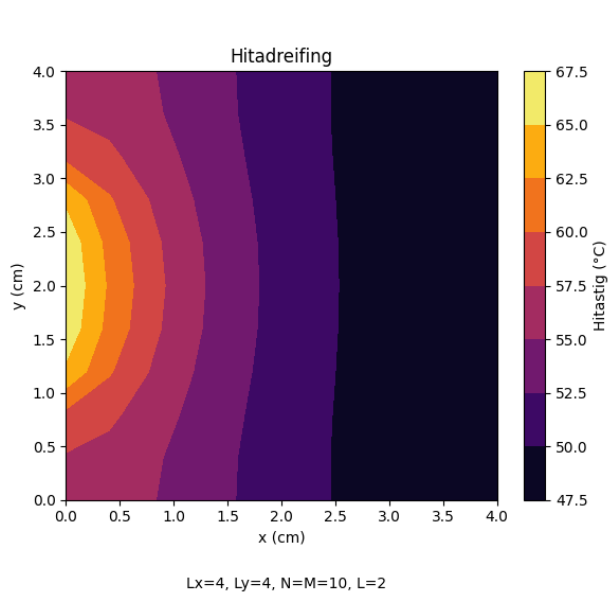
Eins og sjá má á mynd (5a) þá spannar snertisvæði varmaaflsins og kæliplötunnar alla vinstri hliðina. Vegna þess, þá eru jafnhæðarlínurnar frekar línulegar en hitinn virðist dreifast innar meðfram endunum. Alveg upp við snertisvæðið, fyrstu ~ 0.07 cm á x-ás, er hitastigið 166°C , en um miðpunkt x-ásarins í 1 cm er hitastigið komið í 154°C , sem lækkar fljótt í lægsta hitastigið 150°C . Þetta er því hitastigsmunur upp á 16°C . Á mynd (6b) sést vel hitastigsstigulinn sem er nokkuð brattur og línulegur þar til í endann í lægra hitastiginu þar sem brattinn jafnast út og kúrvan verður flatari eða láréttari, þ.e. hitastigið verður nokkuð stöðugt sem bendir til þess að það nálgast jafnvægi í hægri endanum á kæliplötunni.

4.1.2 Prófun 2

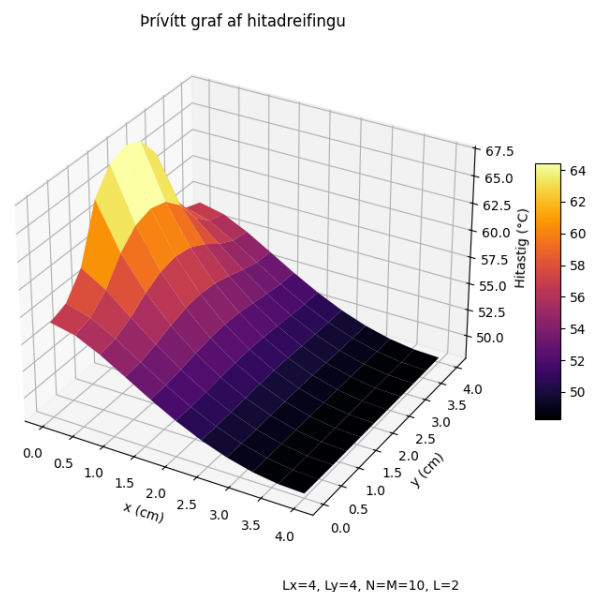
Nú er kæliplatan stækkuð í hliðarlengdir 4×4 cm en öllu öðru haldið óbreyttu.

Eins og mátti búast við, þá sést, á mynd (6), að hitastigsdreifing við snertiflötinn er nær parabólu en áður, en það er af því að nú spannar snertiflöturinn einungis helminginn af vinstri hliðinni. Því nær sem komið er að hægri hliðinni því meira verða jafnhæðarlínurnar línulegar. Það virðist nást jafnvægi í 2.5 cm á x-ás við 47.5°C , en það er tvöfalt lengra inn í plötuna heldur en í fyrstu prófun við hliðarlengdir 2×2 cm. Hæsta hitastigið er 67.27°C í punkti $(x, y) = (0.0, 2.0)$ sem er í miðjunni á snertifleti varmaaflsins. Næst er prufað að auka fjölda bila í $N = M = 20$ skref og við það reiknast hæsta hitastig sem 71.16°C í sama punkti. Við fjölgun bila ætti nálgunarlausnin að verða nákvæmari og því skoðum við næst hæsta hitastigið sem fall af $N = M$ svo við fáum að sjá þróunina á því.

Á mynd(7) sést að gildi hæsta hitastigs lækkar með veldishegðun og nálgast láfelluna, táknuð með rauðri brotalínu, sem talið er að hitastigið stefnir á. Athugunarvert er að sjá að hæsta hitastigið fellur reglulega niður í láfelluna eða áætlað rétt gildi, sem er líklegast skýringin á því hvers vegna við fengum lægra eða réttara hitastig fyrir $N = M = 10$ bil en fyrir $N = M = 20$

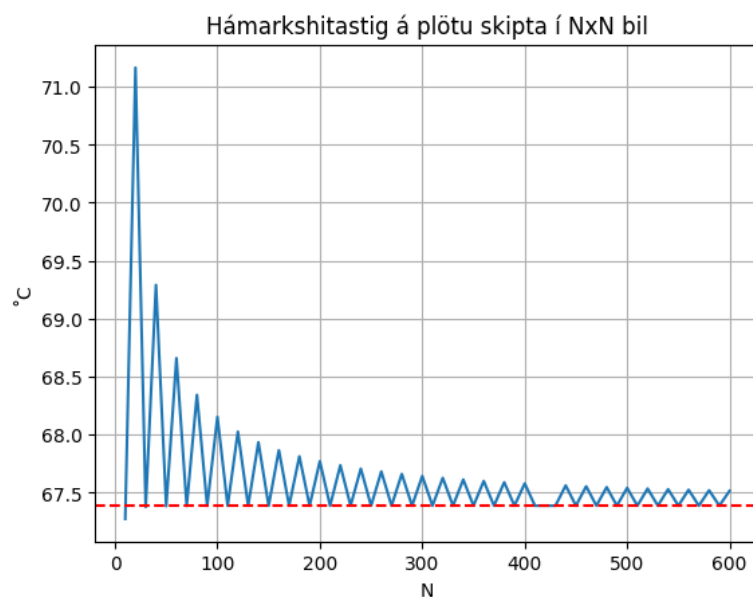


(a) Grafið sýnir hitastigsdreifingu með jafnhæðarlínunum í kæliplötunni fyrir skrefin $N = M = 10$ og hliðarlengdir 4×4 cm.



(b) Grafið sýnir þrívíðarútfærslu á mynd (6a).

Mynd 6: Önnur prófun.

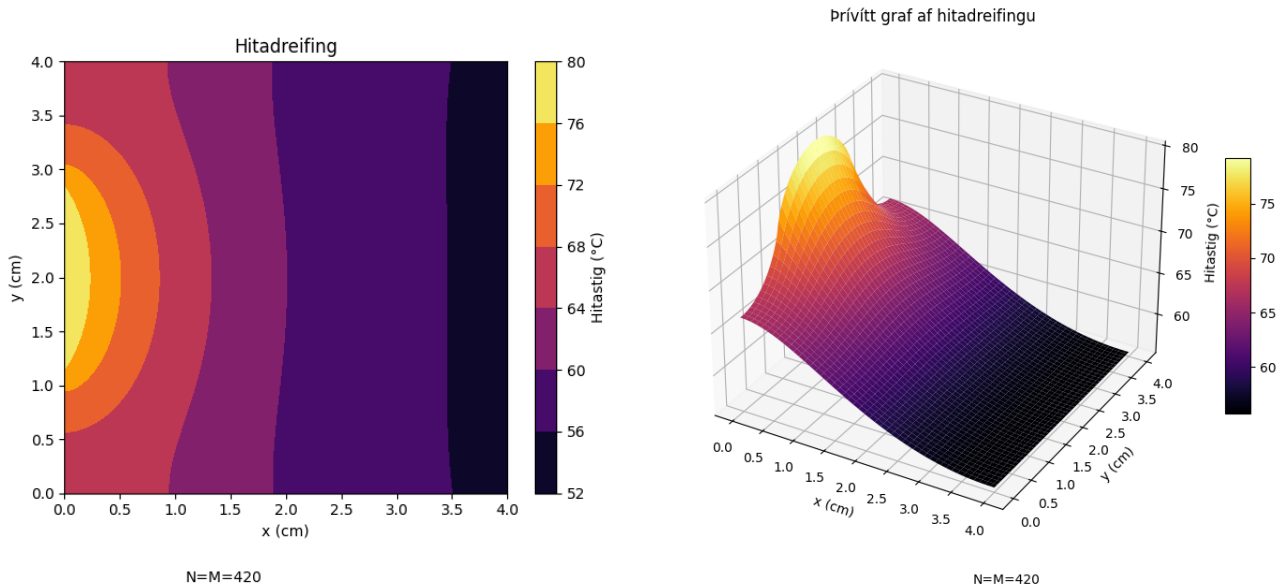


Mynd 7: Graf sem sýnir hæsta hitastigið sem fall af NxN ($N=M$)

bil. Þannig að markgildið sem hámarkshitastigið stefnir á er um 67.27°C eins og fékkst við $N = M = 10$.

4.1.3 Prófun 3

Nú skal finna hámarksafl sem hægt er að dreifa með 4×4 cm kæliplötu þannig að hámarks-hitastigið haldist undir 80°C . Valið er $N = M = 420$ þar sem hámarkshitastigið er þá komið ansi nálægt markgildinu auk þess að skiptingin er ekki orðin nógu smá að útreikningar verði of hægir. Til þess að finna hámarksafl er framkvæmd helmingunarleit. Hún virkar þannig að við reiknun er gert ráð fyrir að aflið sé á bilinu $[a, b]$ og reiknað hámarkshitastig fyrir aflið í $m = (b + a)/2$. Ef hitastigið er meira en 80°C er skoðað bilið $[a, m]$ en annars bilið $[m, b]$. Síðan er farið aftur í fyrsta skref nema fyrir þetta bil og endurtekið þar til að hámarkshitastigið er innan einhverra marka frá 80°C . Hæsta afl P sem fæst undir 80°C er $P = 6.330$ W. Á eftirfarandi mynd (8) má sjá hvernig hitastigsdreifingin lítur út miðað við þetta afl og þessi bil.

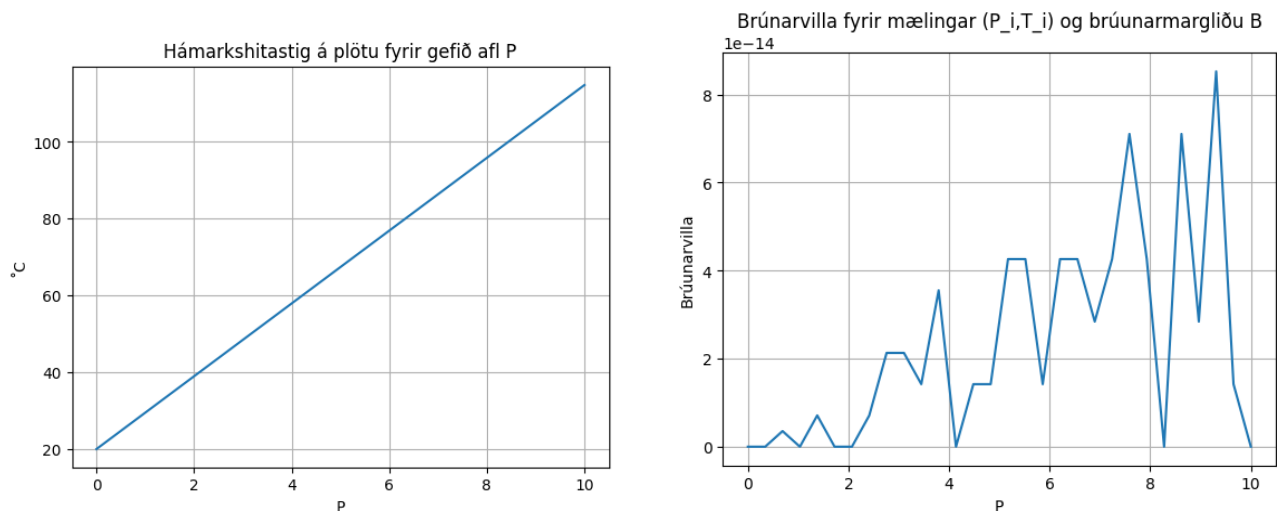


(a) Grafið sýnir hitastigsdreifingu með jafnhæðarlínunum í kæliplötunni fyrir skrefin $N = M = 420$ og hliðarlengdir 4×4 cm.

(b) Grafið sýnir þrívíðarútfærslu á mynd (8a).

Mynd 8: Þriðja prófun.

Miðað við þessar aðstæður er reiknað hámarkshitastig 79.99°C í punkti $(x, y) = (0.0, 1.99047619)$. Sem lýsir því ágætlega hvað gerist þegar aflið er aukið um aðeins 1.33 W eða rúm 25%. Að lokum er athugað hvort megi lesa úr þessum niðurstöðum eitthvert samband milli hæsta hitastigs plötunnar og aflsins P . Fyrir 30 jafndreifð gildi á aflinu P frá 0 W til 10 W er reiknað hæsta hitastig plötunnar og fást mælingar $(P_i, T_i), i \in \{1, \dots, 30\}$. Af þessum mælingum fékkst lína $B(P) = 9.477P + 20$ sem brúar fyrstu og síðustu mælinguna. Þegar brúunarmargliðan $[3]$ er svo skoðuð milli B og hinna mælinganna fæst hámarksbrúunarmargliðan $\max |T_i - B(P_i)| \approx 8.5 \cdot 10^{-14}$. Þetta sýnir að brúunarmargliðan brúar mælingarnar nánast fullkomlega og gefur enn fremur til kynna að samband afls og hæsta hitastigs plötunnar sé línulegt. Einnig er hægt að sjá að þegar engu afli er dælt í plötuna er hitastig hennar 20°C , einfaldlega umhverfishitastigið. Sambandið má sjá á mynd (9).



(a) Grafið sýnir mælt hámarkshitastig T fyrir gefið afl P á 4×4 cm plötu með 420×420 skiptingu.

(b) Grafið sýnir brúunarvillu fyrir mælingar (P_i, T_i) og brúunarmargliðu B á 4×4 cm plötu með 420×420 skiptingu.

Mynd 9: Samband afls og hæsta hitastigs.

4.1.4 Prófun 4

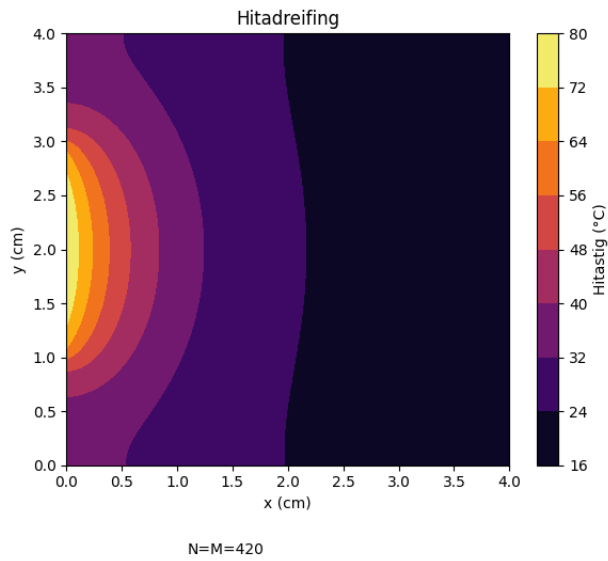
Nú er álinu skipt út fyrir kopar sem hefur varmaleiðni $K = 3.85 \text{ W}/(\text{cm}^\circ\text{C})$ og prófun 3 endurtekin. Þá fæst hámarksafl fyrir hámarkshitastig rétt undir 80°C sem $P = 7.644 \text{ W}$. Sem lýsir því að kopar er töluvert betri leiðari og getur því losað sig við meiri varma hraðar heldur en álið. Því koparkæliplata getur tekið meira varmaafli og samt haldið sér undir 80°C .

4.1.5 Prófun 5

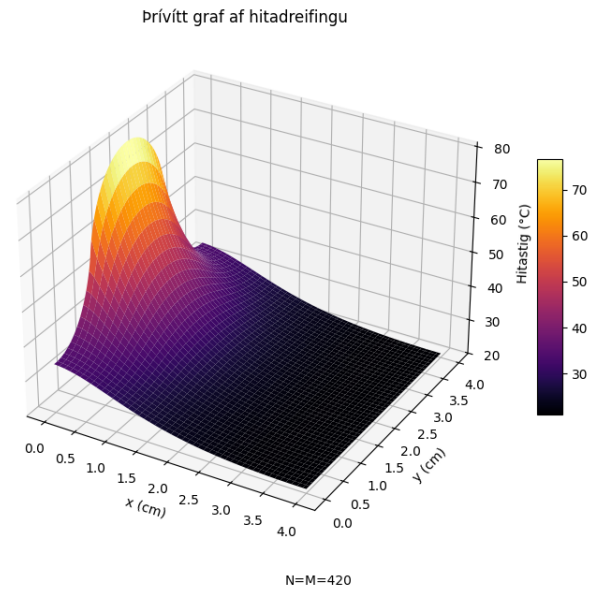
Nú er gert ráð fyrir því að kæliplatan sé vatnskæld frekar en loftkæld, þar sem vatnið hefur útpenslustuðul burðarvarma $H = 0.1 \text{ W}/(\text{cm}^\circ\text{C})$ og umhverfishitastig vatnsins er 20°C . Prófanir 3 og 4 eru endurteknar fyrir þessar ráðstafanir. Byrjað er á því að finna hámarksafl, fyrir hámarkshitastig undir 80°C , fyrir kæliplötuna miðað við vatnskælingu og að hún sé úr áli og það fæst sem $P = 26.453 \text{ W}$. Nú er stóruaukning í magni afls sem kæliplatan getur tekið en þekkt er að vatn hefur mikla varmarýmd og töluvert meiri en loft, og því getur það tekið miklu meiri varma í sig frá kæliplötunni á meðan hún heldur sér undir 80°C , og þar af leiðandi þolir kæliplatan töluvert meira afl. Á eftirfarandi mynd má sjá hitastigsdreifingu miðað við nýju skilyrðin.

Hér sést að svæðið með lægri hitastigunum er mikið stærra en í hitastigsdreifingunum þar sem er loftkæling. Eins og áður var nefnt er það vegna þess að vatn hefur meiri varmarýmd og tekur því meiri varma í sig, en hámarkshitastiginu er ennþá haldið eins og því minnkar svæðið með háu hitastigi. Einnig er skoðað fyrir kæliplötu úr kopar og fæst eftirfarandi.

Fyrir kopar kæliplötuna sést að flötur kaldara svæðisins er miklu stærri sem er vegna þess að kopar leiðir varma betur og missir hann því hraðar út í umhverfið.

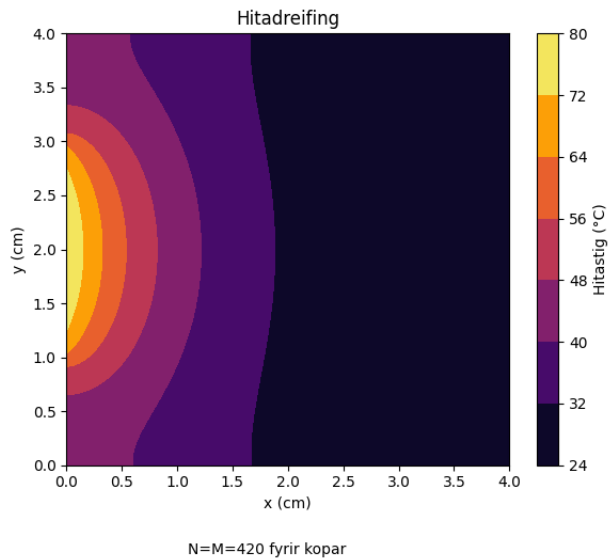


(a) Grafið sýnir hitastigsdreifingu með jafnhæðarlínum í kæliplötunni fyrir skrefin $N = M = 420$ og hliðarlengdir 4×4 cm.

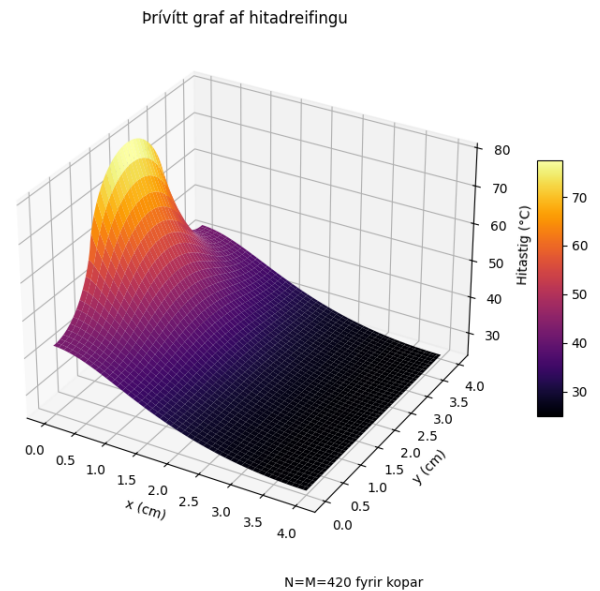


(b) Grafið sýnir þrívíðarútfærslu á mynd (10a).

Mynd 10: Fimmta prófun fyrir ál kæliplötu.



(a) Grafið sýnir hitastigsdreifingu með jafnhæðarlínum í kæliplötunni fyrir skrefin $N = M = 420$ og hliðarlengdir 4×4 cm.

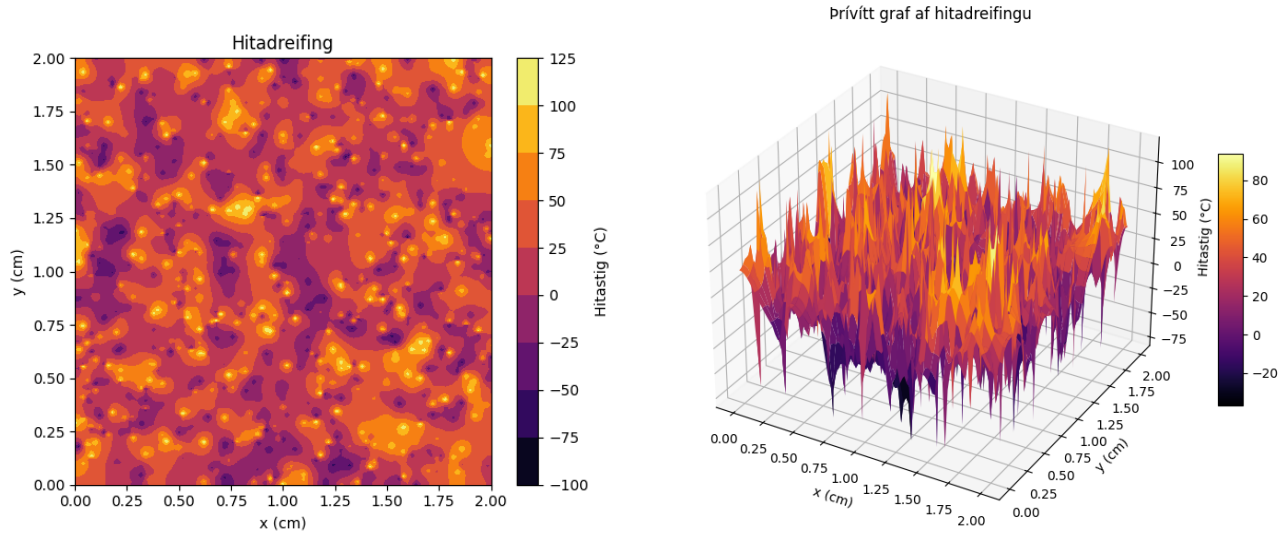


(b) Grafið sýnir þrívíðarútfærslu á mynd (11a).

Mynd 11: Fimmta prófun fyrir kopar kæliplötu.

4.2 Verkefni 2

Fyrir verkefni 2 eru allir stikar stilltir aftur á upprunalegu gildi í prófun 1 í verkefni 1. Nema nú er breytt N , M , L , fjölda gallapunkta og hitastigsbilið sem þeir lenda á. Valið er $N = 100$, $M = 400$, $L = 1.1$, fjöldi galla sem 1000 og gallabil sem $[-100, 100]$. Þá fást eftirfarandi myndir.



(a) Grafið sýnir hitastigsdreifingu fyrir kæliplötu með aukinn fjölda af göllum (b) Grafið sýnir þrívíðarútfærslu af mynd (12a).

Mynd 12: Prófun á verkefni 2

Á myndunum (12) er hitastigið mjög fjölbreytt þar sem það er frá -100 °C upp í 125 °C og þá mjög dreift og slembið um kæliplötuna.

5 Niðurstöður og samantekt

Varmaflutningsverkefni var leyst tölulega með mismunaaðferðinni og skoðað hvernig ólík efni, stærð og lögun kæliplötunnar hafa áhrif á kælingareiginleika hennar. Niðurstöður voru að mjög miklu leyti í samræmi við eðlisfræðilegt innsæi þar sem það að breyta efnunum til dæmis lofti í vatn og áli í kopar stórkjók kælinguna í kæliplötunni. Við breytingu á bilafjölda N og M , var mest áberandi munurinn á hámarkshitastigi þó að reglulega hafi það verið í nákvæmlega réttu gildi eins og sjá má á mynd (7).

Heimildir

- [1] Sigurður Örn Stefánsson, Valentina Giangreco M Puletti. (2019). *Edbook* [Rafrænar glósur]. <https://edbook.hi.is/stae401g/>
- [2] Ragnar Sigurðsson. (2017). *Tvinfallagreining, afleiðujöfnur, Fourier-greining og hlutafleiðujöfnur* [Rafræn bók]. (Kennslufni í stærðfræðigreiningu IV í Háskóla Íslands)
- [3] Sauer, Timothy. (2014). *Numerical Analysis* (2nd ed.). Pearson Education.