

# 固体の力学／理論

FOUNDATIONS OF SOLID MECHANICS

Y.C.ファン著

名古屋大学教授工博 名古屋大学助教授工博 三重大学助教授工博

大橋義夫

村上澄男

神谷紀生

共訳



培風館

$x^2 = \theta$ ) について計算せよ。

答  $\Gamma_{12}^1 = -x^1$ ,  $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 1/x^1$ , その他の成分はすべて 0 である。

2.26  $\Gamma_{mn}^r$  は  $m$  と  $n$  について対称, すなわち,  $\Gamma_{mn}^r = \Gamma_{nm}^r$  であることを示せ。

2.27 与えられた曲線座標系が直交であるための必要十分条件は,  $i \neq j$  に対し領域全体で  $g_{ij} = 0$  であることを示せ。

2.28  $\mathbf{g}_r \times \mathbf{g}_s = \epsilon_{rst} \mathbf{g}^t$ ,  $\mathbf{g}^r \times \mathbf{g}^s = \epsilon^{rst} \mathbf{g}_t$  を証明せよ。ここに,  $\epsilon_{rst}$ ,  $\epsilon^{rst}$  は 2.6 節の置換テンソルである。したがって, ベクトル  $\mathbf{g}_1$  と  $\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3$  のスカラー積を  $[\mathbf{g}_1 \mathbf{g}_2 \mathbf{g}_3]$  あるいは,  $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3)$  と書けば, つぎの式を得る。

$$[\mathbf{g}_1 \mathbf{g}_2 \mathbf{g}_3] = (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3) = \sqrt{g}, \quad [\mathbf{g}^1 \mathbf{g}^2 \mathbf{g}^3] = (\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2 \times \mathbf{g}^3) = 1/\sqrt{g}.$$

2.29 隣接する二つの辺  $d\mathbf{s}_2 = \mathbf{g}_2 d\theta^2$  および  $d\mathbf{s}_3 = \mathbf{g}_3 d\theta^3$  をもつ平行四辺形の面積要素は

$$dS_1 = |d\mathbf{s}_2 \times d\mathbf{s}_3| = |\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3| d\theta^2 d\theta^3$$

である。  $dS_1 = \sqrt{(g^{11})} d\theta^2 d\theta^3$  であることを示せ。一般に,  $\theta_i$  面上の線素  $\mathbf{g}_j d\theta^j$  と  $\mathbf{g}_k d\theta^k$  によって作られた平行四辺形の面積要素は  $dS_i = \sqrt{(g^{ii})} d\theta^j d\theta^k$  ( $i$  について総和をとらない。  $i \neq j \neq k$ ) である。

2.30 問題 2.28 を参照し, 体積要素はつぎのようになることを示せ。

$$dV = d\mathbf{s}_1 \cdot d\mathbf{s}_2 \times d\mathbf{s}_3 = [\mathbf{g}_1 \mathbf{g}_2 \mathbf{g}_3] d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 = \sqrt{g} d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3.$$

2.31 空間が非 Euclid 的であれば, 計量テンソル  $g_{ij}$  が空間のいたるところで一定の値をもつ座標系をみつけないことはできない (Euclid 空間には, このような座標系, すなわち, 直角座標系が存在する)。この場合, 共変微分法則に従って高階の導関数  $\xi^i_{|st}$  および,  $\xi^i_{|st}$  を計算しなければならぬ。

$$\xi^i_{|st} - \xi^i_{|ts} = R^i_{pst} \xi^p$$

であることを示せ。ここに

$$R^i_{pst} = \frac{\partial \Gamma^i_{pt}}{\partial x^s} - \frac{\partial \Gamma^i_{st}}{\partial x^p} + \Gamma^r_{ps} \Gamma^i_{rt} - \Gamma^r_{st} \Gamma^i_{pr}$$

である。  $R^i_{pst}$  は 4 階のテンソルであることを示せ。これは有名な Riemann-Christoffel の曲率テンソル (Riemann-Christoffel curvature tensor) であり, 一般の Riemann 空間において 0 ではない。したがって, 一般に Riemann 空間においては

$$\xi^i_{|st} \neq \xi^i_{|ts}$$

である。

注記: 上に得られた結果はすべて指標の範囲を 1 および 2 に制限すれば, 2 次元空間においても成り立つ。殻の表面だけで距離をはかり, 殻の表面から離れて 3 次元的見方のできない場合には, 3 次元 Euclid 空間にある曲面殻は 2 次元の非 Euclid 空間のようにみえる。球殻において 2 次元 Riemann-Christoffel 曲率テンソルの 0 にならない成分はすべて定数であり, 1 と書くことができる。平板に対しこれはすべて 0 になる。双曲面について, この曲率の 0 にならない成分は -1 の値をとることができる。薄い弾性殻の理論における考え方は, 殻のすべての特性をその中央面についての微分方程式に関連させるものであるから, 工学者は, むしろ, しばしば非 Euclid 幾何学を扱うことになる。

### 3

## 応力テンソル

この章では, 応力ベクトルと応力成分の定義を与え, さらに平衡方程式を導く。座標系が一つの直角座標系から別の直角座標系に変わるときの応力成分の変化の仕方を示し, またこの方法により物理的観点から応力成分はテンソルの変換法則に従うことを証明する。このとき, 応力テンソルの対称性を検討し, それを証明する。そのあと, 主応力, Mohr, Lamé および Cauchy の幾何学的表示, 偏差応力, 八面体応力および, 最後に一般の曲線座標系における応力テンソルについて述べる。

3.14 およびそのつぎの節を除き, 座標系としては, 座標軸  $x_1, x_2, x_3$  が直線で互いに直交する直角座標系だけを用い, とくにことわらないかぎり, すべての成分に対し下指標を用いる。

### 3.1 応力

ある時間に物体の占める図形を考える (図 3.1:1)。  $B$  の内部に閉じた曲面  $S$  を仮想的に考え, この面の外側の材料と内側の材料との相互作用

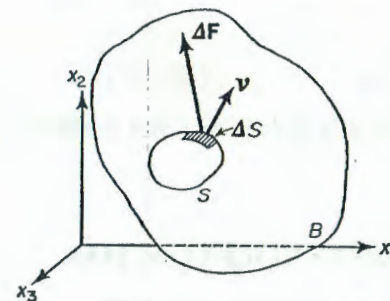


図 3.1:1 記号



を知りたいわけである。このように考えると、連続体の力学の明確な基本概念、すなわち、つぎに述べるような Euler および Cauchy の応力の原理 (stress principle) が生ずる。

仮想的に考えた曲面  $S$  上に微小な面積要素をとる。 $S$  の内側から外側に向かい  $\Delta S$  に垂直な単位ベクトル  $\nu$  をひくと、 $\nu$  の方向によって  $\Delta S$  の二つの側を区別できる。法線の正の側にある材料の部分を考える。この部分は法線の負の側にある部分に力  $\Delta F$  を作用する。力  $\Delta F$  は曲面の面積と向き関数である。“ $\Delta S$  が 0 に近づくとき、比  $\Delta F/\Delta S$  が一定の極限值  $dF/dS$  になり、極限において曲面  $\Delta S$  に働く力の面内の任意の点のまわりのモーメントは 0 になる”と仮定する。極限のベクトルはつぎのように書かれる。

$$(1) \quad \vec{T} = \frac{dF}{dS} \nu$$

ここに、上指標  $\nu$  は曲面  $\Delta S$  の法線  $\nu$  の方向を表わすために導入した。極限のベクトル  $\vec{T}$  を応力ベクトル (stress vector あるいは traction) とよび、曲面に作用する単位面積当りの力を表わす。

連続体の内部に仮想的に考えた閉曲面  $S$  上で応力ベクトルを定義し、 $S$  の内部の空間を占める材料へのその作用が、外部の材料の面に対する作用に等しいと考えることが Euler および Cauchy の応力の原理である。

ここで、特別な場合として、面  $\Delta S_k$  が座標面の一つに平行である場合を考える。 $\Delta S_k$  の法線を  $x_k$  軸の正の方向とする。 $\Delta S_k$  に作用する応力ベクトルを  $\vec{T}^k$  とし、座標軸  $x_1, x_2, x_3$  の方向の三つの成分を、それぞれ、 $T_1^k, T_2^k, T_3^k$  とする。ここに、 $T_i^k$  の指標  $i$  は力の成分を表わし、 $k$  は力の作用する面を表わす。この特別な場合の応力成分に対し、新しい記号を導入する。

$$(2) \quad T_1^k = \tau_{k1}, \quad T_2^k = \tau_{k2}, \quad T_3^k = \tau_{k3}.$$

面  $k=1, k=2, k=3$  に作用する表面力の成分を正方行列の形にならべるとつぎのようになる。

	応力成分		
	1	2	3
$x_1$ に垂直な面	$\tau_{11}$	$\tau_{12}$	$\tau_{13}$
$x_2$ に垂直な面	$\tau_{21}$	$\tau_{22}$	$\tau_{23}$
$x_3$ に垂直な面	$\tau_{31}$	$\tau_{32}$	$\tau_{33}$

これを図 3.1:2 に示す。成分  $\tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{33}$  を垂直応力 (normal stress)、残りの

成分をせん断応力 (shearing stress) とよぶ。これらの各成分は単位面積当りの力の次元、すなわち、 $M/LT^2$  をもつ。

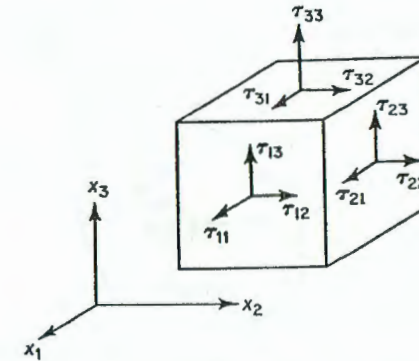


図 3.1:2  
応力成分の記号

文献における応力成分の記号は非常に種類が多い。アメリカの文献で最も広く用いられているものは、直角座標系について

$$(3) \quad \begin{matrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{matrix}$$

である。Love は  $\sigma_x$  および  $\tau_{xy}$  を  $X_x, Y_x$  と書き、Todhunter および Pearson は  $\overline{xx}, \overline{xy}$  を用いた。“本書では、 $\tau_{ij}$  および  $\sigma_{ij}$  の両方を用いるものとし、 $\tau_{ij}$  は一般に応力テンソルを表わすために、また  $\sigma_{ij}$  は曲線座標系における応力テンソルの物理成分を表わすために用いる (p.86 参照)。直角座標系においてはテンソル成分と物理成分は一致するから、直角座標系における応力テンソルについては  $\sigma_{ij}$  を用いる”。統一がなく見苦しいようにみえるかもしれないが、混乱はほとんど生じないし、違った記号を用いるためにかえってはっきりする場合も多い。

つねに、応力を単位面積当りの力として理解し、面素の正の側にある部分 (外向き法線の正の側) が負の側にある部分に作用するものであることを再度強調する必要がある。したがって、面素の外向き法線が  $x_1$  軸の正の方向を向いており  $\tau_{11}$  が正ならば、面素に作用する垂直応力の成分を表わすベクトルは  $x_1$  軸の正の方向を向いている。しかし、外向き法線が  $x_1$  軸の負の方向を向いており  $\tau_{11}$  が正ならば、要素に働く応力ベクトルもまた  $x_1$  軸の負の方向を向いている (図 3.1:3 参照)。

同様に、図 3.1:3 に示すように、外向き法線が  $x_1$  軸の向きと一致してい

れば,  $\tau_{12}, \tau_{13}$  の正の値は  $x_2, x_3$  軸の正の方向を向くせん断応力ベクトルを示し, これに対し, 外向き法線が  $x_1$  軸の向きと反対であれば,  $\tau_{12}, \tau_{13}$  の正の値

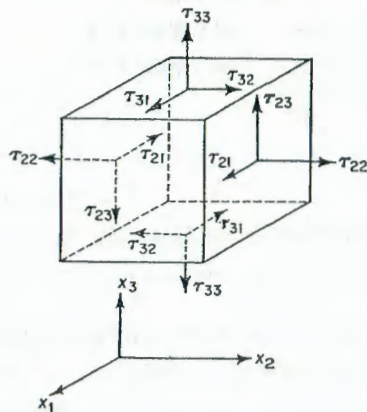


図 3.1:3 正の応力の向き

は  $x_2, x_3$  軸の負の方向を向く。図を注意深く調べるのがたいせつである。当然, これらの規則は通常の引張り, 圧縮およびせん断の概念と一致する。

### 3.2 運動の法則

すべての種類の物体の力学における基本法則は, 質点に関する Newton の運動法則を拡張した Euler の方程式である。座標系  $x_1, x_2, x_3$  を慣性系とする。時間  $t$  において物体の占める空間を  $B(t)$  で表わす。 $\mathbf{r}$  を座標系の原点に関する要素の位置ベクトル,  $\mathbf{V}$  を点  $x_1, x_2, x_3$  における要素の速度ベクトルとする。

$$(1) \quad \mathcal{P} = \int_{B(t)} \mathbf{V} \rho dv$$

を空間  $B(t)$  にある物体の運動量(linear momentum)といい,

$$(2) \quad \mathcal{H} = \int_{B(t)} \mathbf{r} \times \mathbf{V} \rho dv$$

を角運動量(angular momentum)という。これらの式において  $\rho$  は材料の密度であり, 積分は体積  $B(t)$  にわたって行なう。“連続体に対して Euler が述べた Newton の法則は, 運動量の変化率が物体に作用する合力  $\mathcal{F}$  に等しく, すなわち

$$(3) \quad \dot{\mathcal{P}} = \mathcal{F}$$

であり, 角運動量の変化率が作用した合トルク  $\mathcal{L}$  に等しい, すなわち

$$(4) \quad \dot{\mathcal{H}} = \mathcal{L}$$

であることを表わすものである”。トルク  $\mathcal{L}$  は位置ベクトル  $\mathbf{r}$  の原点に関してとる。式 (3) が成り立つときに, ある原点の選び方において式 (4) が成り立てば, これは原点のいかなる選び方に対しても成り立つことが容易にわかる†。

ここでは, 力およびトルクはある座標系においてあらかじめわかっている量であると仮定した。

連続体の力学において考える物体には二つの種類の外力が作用する。すなわち,

1. 物体の体積要素に働く物体力,
2. 表面要素に働く表面力, すなわち, 応力。

物体力の例としては重力および電磁気力がある。表面力としては物体に働く空気力学的圧力および二つの物体の機械的接触による圧力がある。

物体力を定めるために, 任意の曲面  $S$  で囲まれた体積を考える(図 3.2:1)。物体力による合力ベクトルは, 体積積分

$$\int_B \mathbf{X} dv$$

の形で表わすことができるものと仮定する。すべて単位体積当りの力の次元  $M(LT)^{-1}$  をもつ  $\mathbf{X}$  の三つの成分,  $X_1, X_2, X_3$  を単位体積当りの物体力とよぶ。たとえば, 重力場においては,

$$\mathbf{X} = \rho \mathbf{g}$$

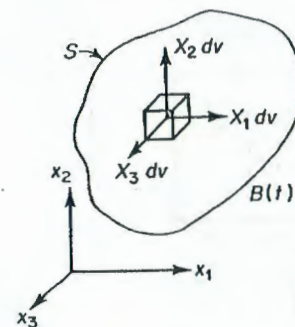


図 3.2:1 物体力

†  $\dot{\mathcal{P}}$  および  $\dot{\mathcal{H}}$  は物質導関数(material derivative) である。すなわち, 要素の一定の集合に関する  $\mathcal{P}$  および  $\mathcal{H}$  の時間的変化の割合である (5.2 および 5.3 節参照)。



であり、ここに、 $g_i$ は重力加速度場の成分、 $\rho$ は与えられた点における物体の密度である（単位体積当りの質量）。

物体の内部に仮想的に考えた曲面に働く表面力は、Euler および Cauchy の応力の原理において考えた応力ベクトルである。この考え方に従って、閉曲面  $S$  の内部の領域  $B$  を占める材料に働く合力は

$$(5) \quad \mathcal{F} = \oint_S \vec{T} dS + \int_B \mathbf{X} dv$$

となる。ここに、 $\vec{T}$  は外向き法線が  $\nu$  である面  $dS$  に働く応力ベクトルである。同様に、原点のまわりのトルクは表示

$$(6) \quad \mathcal{L} = \oint_S \mathbf{r} \times \vec{T} dS + \int_B \mathbf{r} \times \mathbf{X} dv$$

により与えられる。

応力テンソルの基礎的な性質を知るために、以下の節でこれらの方程式を簡単な場合に应用する。

### 3.3 Cauchy の公式

運動方程式を用いて、最初につぎの簡単な結果を導く。すなわち、“ある面素の外側にある材料が内側の材料になす作用を表わす応力ベクトル  $\mathbf{T}^{(+)}$  は、同一の面素の内側にある材料が外側の材料になす作用を表わす応力ベクトル  $\mathbf{T}^{(-)}$  と大きさが等しく向きが逆である”。

$$(1) \quad \blacktriangle \quad \mathbf{T}^{(-)} = -\mathbf{T}^{(+)}$$

これを証明するために、図 3.3:1 に示すように面積  $\Delta S$  の二つの平行な面をもち、厚さ  $\delta$  の‘微小体積’を考える。 $\delta$  が 0 に収縮するとき、 $\Delta S$  は微小ではあるが有限の値をもつとすれば、微小体積の側面に働く表面力からの寄与と同じように、体積力、運動量およびその時間変化率は 0 となる。したがって、運動方程式 (3.2:3) は微小な  $\Delta S$  について

$$\mathbf{T}^{(+)} \Delta S + \mathbf{T}^{(-)} \Delta S = 0$$

となる。この結果、式 (1) が導かれた。

この結果を得る別の方法は、応力ベクトルが表面の法線ベクトルの関数であることを用いるものである。すなわち、法線ベクトルの向きが逆になれば応力ベクトルの向きも逆になる。

ここで、“成分  $\tau_{ij}$  を知れば、成分  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$  の単位外向き法線ベクトル  $\nu$  をもつ任意の面に作用する応力ベクトルをただちに求めることができる”ことを

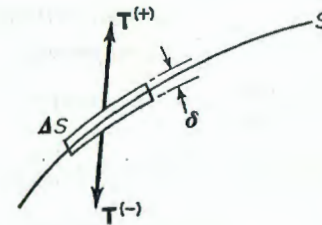


図 3.3:1 曲面  $S$  の表面に考えた‘微小体積’の平衡

示す。“この応力ベクトル  $\vec{T}$  は成分  $\vec{T}_1, \vec{T}_2, \vec{T}_3$  が Cauchy の公式

$$(2) \quad \blacktriangle \quad \vec{T}_i = \nu_j \tau_{ji}$$

で与えられる。”これを種々な方法で導くことができる。最初に初等的な方法で導く。

座標面に平行な三つの面と単位ベクトル  $\nu$  に垂直な面からなる無限小四面体を考える（図 3.3:2 参照）。 $\nu$  に垂直な面の面積を  $dS$  とすると、他の三つの面の面積は、それぞれつぎのようになる。

$$dS_1 = dS \cos(\nu, x_1) = \nu_1 dS = x_2 x_3 \text{ 面に平行な面の面積,}$$

$$dS_2 = \nu_2 dS = x_3 x_1 \text{ 面に平行な面の面積,}$$

$$dS_3 = \nu_3 dS = x_1 x_2 \text{ 面に平行な面の面積.}$$

また、四面体の体積は

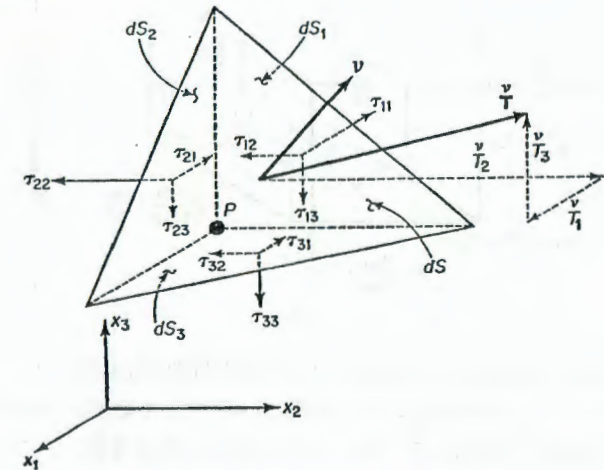


図 3.3:2 四面体に働く表面力

$$dv = \frac{1}{3}hdS$$

となる。ここに、 $h$ は底面  $dS$  から頂点  $P$  までの高さである。三つの座標面に働く  $x_1$  の正の向きの力は

$$(-\tau_{11} + \epsilon_1)dS_1, \quad (-\tau_{21} + \epsilon_2)dS_2, \quad (-\tau_{31} + \epsilon_3)dS_3$$

と書くことができる。ここに、 $\tau_{11}, \tau_{21}, \tau_{31}$  は点  $P$  における応力であり、負号は三つの面の外向き法線が座標軸に関し逆向きだからであり、また  $P$  からわずかに離れた点に表面力が働くから  $\epsilon$  がつけられている。応力場が連続と仮定すれば、 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  は微小量である。他方、 $\nu$  に垂直な三角形に作用する力は、 $x_1$  軸方向に成分  $(\dot{T}_1 + \epsilon)dS$ 、物体力の  $x_1$  成分  $(X_1 + \epsilon')dv$ 、運動量の変化率の成分  $\rho \dot{V}_1 dv$  である。ここに、 $\dot{T}_1$  および  $X_1$  は点  $P$  について考えたもので、 $\epsilon, \epsilon'$  は微小量である。したがって、運動方程式の一つは、

$$(-\tau_{11} + \epsilon_1)\nu_1 dS + (-\tau_{21} + \epsilon_2)\nu_2 dS + (-\tau_{31} + \epsilon_3)\nu_3 dS \\ + (\dot{T}_1 + \epsilon)dS + (X_1 + \epsilon')\frac{1}{3}hdS = \rho \dot{V}_1 \frac{1}{3}hdS$$

となる。 $dS$  で割り、 $h \rightarrow 0$  の極限に移行すれば

$$(3) \quad \dot{T}_1 = \tau_{11}\nu_1 + \tau_{21}\nu_2 + \tau_{31}\nu_3$$

を得る。これは式(2)の第1式であり、他の式も同様にして導くことができる。

“Cauchy の公式は、物体の任意の表面要素に働く表面力を定義するためには、9個の応力成分で必要十分であることを保証している。したがって、物体の応力状態は量  $\tau_{ij}$  で完全に定められる。 $\dot{T}_i$  はベクトルであり、式(2)が任意のベクトル  $\nu_j$  について成り立つから、商法則(2.10節)により、 $\tau_{ij}$  はテンソルである”。今後、 $\tau_{ij}$  を応力テンソル(stress tensor)とよぶ。

ここまでの理論においては、第1に応力を物体内のいたるところで定義することができ、第2に応力は連続であると仮定したことを再び注意する。あとで同じ仮定をひずみに関しても行なう。これは連続体力学の特徴を表わす仮定であり、この仮定なしでは、たしかに、いかなる取扱いもできない。しかしながら、さらに理論を展開するとき、ある種の数学的な不連続を許す場合がある——これは、ときとしては非常に有効な手段となる——しかし、応力とひずみの連続性の一般的、基本的仮定に対し、これらの不連続性につねに細心の注意をはらわなければならない。

### 3.4 平衡方程式

ここで、運動方程式(3.2:3)、(3.2:4)を微分方程式に変換する。これは Gauss の定理と Cauchy の公式によって巧妙に行なうことができる。しかし、ここでは物理的意味を明らかにするため、初等的な方法を用いることにする。

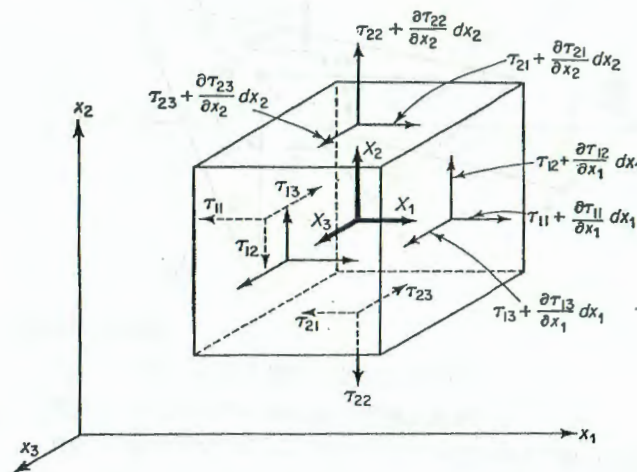


図 3.4:1 微小平行六面体に作用する平衡応力成分

座標面に平行な面をもつ微小な平行六面体の静的平衡状態を考える。各面に働く応力は図 3.4:1 に示されている。たとえば、力  $\tau_{11}dx_2dx_3$  は左側面に、力  $(\tau_{11} + \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1}dx_1)dx_2dx_3$  は右側面に働く。これらの表示は応力の連続性の仮定にもとづいている。物体力は  $X_1dx_1dx_2dx_3$  である。

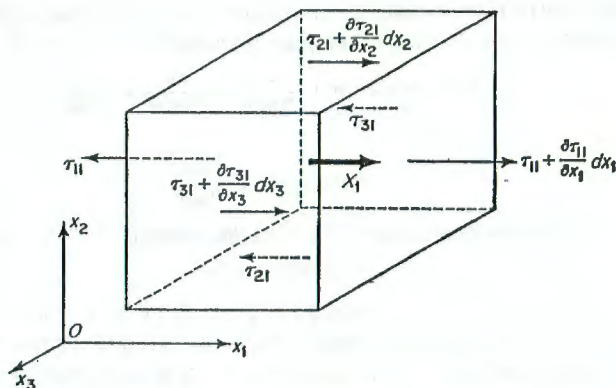
物体が平衡であるためには合力が 0 になることが必要である。 $x_1$  方向の力を考えると、図 3.4:2 に示すように六つの表面力と物体力の一つの成分がある。その合計はつぎのようになる。

$$\left(\tau_{11} + \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1}dx_1\right)dx_2dx_3 - \tau_{11}dx_2dx_3 + \left(\tau_{21} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2}dx_2\right)dx_3dx_1 \\ - \tau_{21}dx_3dx_1 + \left(\tau_{31} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3}dx_3\right)dx_1dx_2 - \tau_{31}dx_1dx_2 \\ + X_1dx_1dx_2dx_3 = 0.$$

これを  $dx_1dx_2dx_3$  で割って

$$(1) \quad \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} + X_1 = 0$$



図 3.4.2  $x_1$  方向の表面力の成分

を得る。指標の巡回置換により,  $x_2, x_3$  方向の力について類似の方程式を導くことができる。これらの全体を簡潔に

$$(2) \quad \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + X_i = 0$$

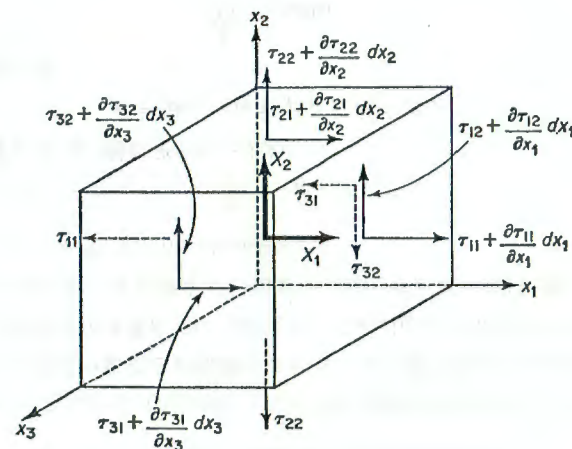
と書くことができる。これは重要な結果であり, より簡単な誘導をあとで5.5節に与える。

要素が平衡であるためには, また, 合モーメントが0になる必要がある。体積に比例する外からのモーメントが存在しなければ, モーメントの釣り合いを考えることにより, “応力テンソルが対称”

$$(3) \quad \tau_{ij} = \tau_{ji}$$

であるという重要な結論を導く。これはつぎのように証明される。図3.4.3を参照し, すべての力の  $Ox_3$  軸のまわりのモーメントを考えれば,  $Ox_3$  に平行あるいは  $Ox_3$  を含む平面にある力の成分はモーメントを生じないことがわかる。 $Ox_3$  軸のまわりのモーメントを生じさせる成分は図3.4.3に示されている。したがって, モーメントの腕を適当に注意して, つぎの式を得る。

$$\begin{aligned} & -\left(\tau_{11} + \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} dx_1\right) dx_2 dx_3 \cdot \frac{dx_2}{2} + \tau_{11} dx_2 dx_3 \cdot \frac{dx_2}{2} \\ & + \left(\tau_{12} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} dx_1\right) dx_2 dx_3 \cdot dx_1 - \left(\tau_{21} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} dx_2\right) dx_1 dx_3 \cdot dx_2 \\ & + \left(\tau_{22} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2} dx_2\right) dx_1 dx_3 \cdot \frac{dx_1}{2} - \tau_{22} dx_1 dx_3 \cdot \frac{dx_1}{2} \\ & + \left(\tau_{32} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_3} dx_3\right) dx_1 dx_2 \cdot \frac{dx_1}{2} - \tau_{32} dx_1 dx_2 \cdot \frac{dx_1}{2} \end{aligned}$$

図 3.4.3  $Ox_3$  軸のまわりのモーメントを生じさせる表面力および物体力の成分

$$\begin{aligned} & -\left(\tau_{31} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} dx_3\right) dx_1 dx_2 \cdot \frac{dx_2}{2} + \tau_{31} dx_1 dx_2 \cdot \frac{dx_2}{2} \\ & - X_1 dx_1 dx_2 dx_3 \cdot \frac{dx_2}{2} + X_2 dx_1 dx_2 dx_3 \cdot \frac{dx_1}{2} = 0. \end{aligned}$$

$dx_1 dx_2 dx_3$  で割り,  $dx_1 \rightarrow 0, dx_2 \rightarrow 0, dx_3 \rightarrow 0$  の極限に移行すれば

$$(4) \quad \tau_{12} = \tau_{21}$$

を得る。 $Ox_2, Ox_3$  軸のまわりの合モーメントについて同様な考察を行なって, 式(3)に与えられた一般の結論を導く。また, より簡単な誘導を5.6節に与える。

体積に比例する外部からのモーメントが存在すれば, 対称条件は成り立たないことに注意しなければならない。たとえば,  $Ox_3$  軸まわりのモーメント  $c_3 dx_1 dx_2 dx_3$  があれば, 式(4)の代わりにつぎのようになる。

$$(5) \quad \tau_{12} - \tau_{21} + c_3 = 0$$

磁場の中にある磁石, 電場の中にあつて異なった分極面をもつ誘電材料には, 0でない体積モーメントが作用することを Maxwell が指摘した。電磁場が強く, 応力が低くて,  $\tau_{12}$  と  $c_3$  が同程度の大きさとなるならば, 式(5)に従い  $\tau_{12}$  は  $\tau_{21}$  に等しくならない。この場合, 応力テンソルが非対称であることを認めなければならない。 $c_3$  が  $\tau_{12}$  に比べ非常に小さければ, 式(5)において  $c_3$  を無視し, 近似的に式(4)が成り立つと考えることができる。

物理的な理論を展開するとき, とくに工学的な意味で最も重要な目的の一つ

は、必要な精度で最も簡単な式を得ることである。応力テンソルを対称として扱うことができるかどうかは、理論を適用する目的に依存する。電磁場は宇宙全体に広がっているから、応力テンソルは一般には対称ではない。しかし、強さ、安全性、こわさを定めるために構造物あるいは機械の応力分布を研究する、構造工学者あるいは機械工学者の目的のために理論を形式化するときには、応力は材料の降伏応力の程度るとき重要になる。元来、安定性にもとづいて設計した構造物、たとえば、柱、アーチあるいは薄肉殻に対してさえ、臨界条件において降伏応力の程度の臨界応力を生ずるものが優秀な設計である。さもないければ、材料を経済的に用いることができないからである。 $\tau_{ij}$  が降伏応力と同程度の大きさのとき（鋼に対し 10,000~100,000 lb/sq in. (7~70 kg/mm<sup>2</sup>), コンクリートに対し 50~5,000 lb/sq in. (0.035~3.5 kg/mm<sup>2</sup>) の程度), 応力テンソルの非対称性を問題とする場合はほとんどない。

しかしながら、弾性波の伝ばあるいは材料の高周波現象への強い電磁場の影響を研究しようとするとき、応力の程度が非常に低く体積モーメントが重要となる。このような問題では、応力テンソルは対称と仮定できない。

本書の以下の部分では、応力テンソルはとくにことわらないかぎり対称と仮定する。

#### 偶応力に関する注記

Voigt によれば、固体の中の任意の微小面素を通り、この面の内側の物体に働く外側の物体の作用が力と“偶力”に等価であるならば（3.1 節の仮定と対比して）、面上に働く表面力  $\vec{T}$  のほかに偶応力(couple stress)ベクトル  $\vec{M}$  を付け加えなければならない。これら二つのベクトル  $\vec{T}$  および  $\vec{M}$  はともに外側の要素から内側の要素への作用に等価である。同様に、Maxwell が指摘したように、物体偶力、すなわち、成分を  $c_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) とする単位質量当りの偶力  $c$  をとらねばならない。この可能性を認めれば、応力テンソル  $\tau_{ij}$  のほかに偶応力テンソル  $\mathcal{M}_{ij}$  を定義しなければならない。テンソル  $\mathcal{M}_{ij}$  は偶応力ベクトルと式 (3.3:2) のような 1 次変換

$$\vec{M}_i = \mathcal{M}_{ij} \nu_j$$

によって関連している。角運動量の解析により、つぎの方程式が導かれる。

$$\frac{\partial \mathcal{M}_{ij}}{\partial x_j} + \rho c_i = \epsilon_{ijk} \tau_{jk}$$

すなわち

$$\frac{\partial \mathcal{M}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{M}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{M}_{xz}}{\partial z} + \rho c_x = \tau_{yx} - \tau_{xy}, \dots$$

したがって、応力テンソルの反対称部分が物体偶力と偶応力テンソルの発散によって決定される。両種の偶力がないとき、応力テンソルは対称にならなければならない。

偶応力と物体偶力は、分子が内部構造をもつ材料および金属の転位論を扱う際に役立つ概念である。

### 3.5 座標変換

前節では、応力成分を直角座標系  $x_1, x_2, x_3$  について定義した。ここでは、原点は同じであるが方位の異なった第 2 の直角座標系  $x'_1, x'_2, x'_3$  をとり、新しい座標系における応力成分を考える（図 3.5:1）。これらの座標系は 1 次関係

$$(1) \quad x'_k = \beta_{ki} x_i, \quad k = 1, 2, 3$$

によって結合されているものとする。ここに、 $\beta_{ki}$  は  $x'_k$  軸の  $x_i$  軸に関する方向余弦である。

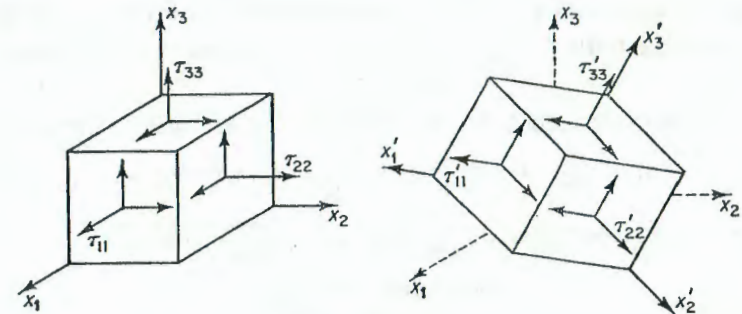


図 3.5:1 座標系の回転に関する応力成分の変換

$\tau_{ij}$  はテンソルであるから (3.3 節)、ただちに変換法則を書くことができる。しかしながら、結果の重要さを強調するため、3.3 節で導いた Cauchy の公式にもとづいた初等的な誘導について述べる。Cauchy の公式はつぎのようになる。成分  $\nu_i$  の単位外向き法線をもつ面積を  $dS$  とすれば、 $dS$  に働く単位面積当りの力はベクトル  $\vec{T}$  であり、その成分は

$$\vec{T}_i = \tau_{ij} \nu_j$$

である。法線  $\nu$  を  $x'_k$  軸に平行にとれば

$$\nu_1 = \beta_{k1}, \quad \nu_2 = \beta_{k2}, \quad \nu_3 = \beta_{k3}$$

であり、このとき

$$(2) \quad T'_i = \tau_{j1} \beta_{kj}$$



となる。ベクトルの成分  $T_i^k$  の  $x_m'$  軸方向の成分は  $T_i^k$  と  $\beta_{mi}$  の積で与えられるから、応力成分は

$$\begin{aligned}\tau_{km}' &= \sum_i (T_i^k \text{ の } x_m' \text{ への投影}) \\ &= T_1^k \beta_{m1} + T_2^k \beta_{m2} + T_3^k \beta_{m3} \\ &= \tau_{11} \beta_{m1} \beta_{k1} + \tau_{21} \beta_{m1} \beta_{k2} + \dots,\end{aligned}$$

すなわち

$$(3) \quad \blacktriangle \quad \tau_{km}' = \tau_{ji} \beta_{kj} \beta_{mi}$$

となる。

式(3)と式(2.5:2)を比較すれば、応力成分は直角座標系における2階のテンソルのように変換することがわかる。したがって、 $\tau_{ij}$  で表わす応力の物理的な概念は、Euclid空間における2階のテンソルの数学的な定義に一致する。

### 3.6 平面応力状態

$$(1) \quad \tau_{33} = \tau_{31} = \tau_{32} = 0$$

が成り立つような応力状態を、 $x_1 x_2$  平面における平面応力状態(plane state of stress)とよぶ。この場合、二つの直角座標系の間の方向余弦は図3.6:1に示すように、ただ一つの角  $\theta$  によって表わすことができる。 $x_1, x_2$  および

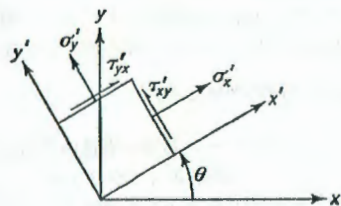


図 3.6:1  
平面応力状態における座標変換

$x_1', x_2'$  の代わりに  $x, y$  および  $x', y'$ ,  $\tau_{11}$  の代わりに  $\sigma_x$ ,  $\tau_{12}$  の代わりに  $\tau_{xy}$  などと書けばつぎの式を得る。

$$\begin{aligned}(2) \quad \sigma_x' &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta, \\ \sigma_y' &= \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta, \\ \tau_{xy}' &= (-\sigma_x + \sigma_y) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta).\end{aligned}$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta), \quad \cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$$

### 3.6 平面応力状態

であるから、上式はまたつぎのように書くことができる。

$$\begin{aligned}(3) \quad \sigma_x' &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta, \\ \sigma_y' &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta, \\ \tau_{xy}' &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta.\end{aligned}$$

ここで、つぎの関係に注意する。

$$(4) \quad \sigma_x' + \sigma_y' = \sigma_x + \sigma_y$$

$$(5) \quad \frac{\partial \sigma_x'}{\partial \theta} = 2\tau_{xy}'$$

$$(6) \quad \tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \text{ のとき, } \tau_{xy}' = 0$$

式(6)のような  $\theta$  の特定の値で定められる方向を主方向(principal direction)とよび、対応する垂直応力を主応力(principal stress)とよぶ(3.7節参照)。式(5)および(6)により、主応力は垂直応力の極値である。

$$(7) \quad \left. \begin{aligned} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{aligned} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}.$$

$\tau_{xy}'$  を  $\theta$  で微分し、導関数を0とおけば、 $\tau_{xy}'$  が極値をとる角  $\theta$  を求めることができる。この角は式(6)で与えられる主方向から  $\pm 45^\circ$  をなすこと、および  $\tau_{xy}'$  の最大値は

$$(8) \quad \tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \sqrt{\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

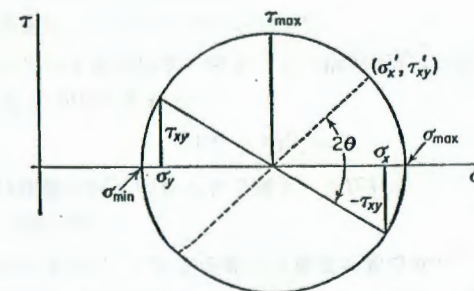


図 3.6:2 平面応力状態における Mohr の円

となることが容易にわかる。図3.6:2は上の関係を幾何学的に表わしたもの

であり、よく知られた **Mohr の円**(Mohr's circle) である。

### [問題]

#### 3.1 2次元直角座標系についての慣性モーメントおよび相乗モーメント

$$I_{xx} = \int y^2 dA, \quad I_{yy} = \int x^2 dA, \quad I_{xy} = \int xy dA$$

の変換法則を、座標原点に関する座標軸の回転に対して求めよ。Mohr の円は1887年に、慣性テンソルの変換について考えられたものである。

3.2  $v_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) を連続体の速度ベクトルとし、 $\overline{v_i v_j}$  をある時間間隔における積  $v_i v_j$  の平均値とする。簡約しない記号で成分  $\overline{u^2}$ ,  $\overline{uv}$ ,  $\overline{uw}$ ,  $\overline{v^2}$ , ... をもつ相関関数  $\overline{v_i v_j}$  は2階の対称テンソルであることを示せ。

#### 3.3 質点の集合の質量の慣性モーメント

$$I_{ij} = e_{ipq} e_{jqk} \int x_p x_k dm, \quad i, j = 1, 2, 3$$

はテンソルであることを示せ。ここに、 $dm$  は質量要素であり、積分は質点の集合全体におよぶ。慣性テンソル  $I_{ij}$  の行列を書け。 $I_{ii}$  ( $i$  について総和をとらない) は  $x_i$  軸のまわりの慣性モーメントであり、 $I_{ij}$  ( $i \neq j$ ) は軸  $x_i$  および  $x_j$  のまわりの相乗モーメントに“負号”をつけたものに等しいことを示せ。角速度  $\omega_j$  で回転する剛体に対し、物体の角運動量ベクトルは  $I_{ij} \omega_j$  であることを示せ。

### 3.7 主 応 力

平面応力状態の場合に前節で得られた結果をここで一般化する。

一般の応力状態において、外向き法線  $\nu$  をもつ面上に働く応力ベクトルは  $\nu$  の方向に依存する。いかなる方向において応力ベクトルが面に垂直になり、せん断応力が0になるかを求める。このような面を主面(principal plane), その法線を主軸(principal axis), 主面にはたらく垂直応力の値を主応力(principal stress)とよぶ。

$\nu$  を主軸とし、 $\sigma$  を対応する主応力とする。このとき、 $\nu$  に垂直な面に作用する応力ベクトルの成分は  $\sigma \nu_i$  となる。他方、この同じベクトルは表示  $\tau_{ji} \nu_j$  で与えられる。したがって、 $\nu_i = \delta_{ji} \nu_j$  と書き、これら二つの表示を等しくおき、同じ辺に移項すれば、つぎのようになる。

$$(1) \quad (\tau_{ji} - \sigma \delta_{ji}) \nu_j = 0.$$

$i=1, 2, 3$  に対する三つの方程式は  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$  について解かれる。 $\nu$  は単位ベクトルであるから、 $\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1$  に対し、意味のある解を求めなければならない。したがって、式(1)は固有値問題の形となる。 $\tau_{ji}$  は実対称行列であるから、すなわち、“三つの実数の主応力と1組の直交する主軸が存在する”

### 3.7 主 応 力

から、行列の理論における結果を適用しさえすればよい。“主応力がすべて正であるか、すべて負であるか、あるいは正負が混ったものであるかは、2次形式  $\tau_{ij} x_i x_j$  が、それぞれ、正值形式であるか、負値形式であるか、あるいは不定符号であるかによる”。これらの結果は重要であるから、その方法については以下で詳しく述べる。

方程式(1)は係数行列が0である場合、すなわち

$$(2) \quad |\tau_{ij} - \sigma \delta_{ij}| = 0$$

に限り0でない解  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$  をもつ。

方程式(2)は  $\sigma$  の3次方程式であり、その根が主応力である。主応力の各値に対し、単位法線ベクトル  $\nu$  が定められる。

方程式(2)を展開して、つぎの式を得る。

$$(3) \quad |\tau_{ij} - \sigma \delta_{ij}| = \begin{vmatrix} \tau_{11} - \sigma & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} - \sigma & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} - \sigma \end{vmatrix} = -\sigma^3 + I_1 \sigma^2 - I_2 \sigma + I_3 = 0$$

ここに、つぎのようにおいた。

$$(4) \quad \begin{aligned} I_1 &= \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}, \\ I_2 &= \begin{vmatrix} \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{32} & \tau_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \tau_{11} & \tau_{13} \\ \tau_{31} & \tau_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{vmatrix}, \\ I_3 &= \begin{vmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

他方、 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  を方程式(3)の根として、方程式を

$$(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) = 0$$

と書けば、根と係数の間にはつぎの関係のあることがわかる。

$$(5) \quad \begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ I_2 &= \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1, \\ I_3 &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3. \end{aligned}$$

主応力はある点における物理的な応力状態を定めるものであるから、座標系に無関係である。したがって、式(3)および係数  $I_1, I_2, I_3$  は座標変換に関して不変である。すなわち、 $I_1, I_2, I_3$  は応力テンソルの不変量(invariant)である。不変量の重要さは物理法則を形式化するとき明らかに(たとえば、



6章を参照)。

ここで、対称な応力テンソルに対し、三つの主応力はすべて実数であり、三つの主面は互いに直交することを示す。このたいせつな性質は、応力テンソルが対称

$$(6) \quad \tau_{ij} = \tau_{ji}$$

であるときに得られるものである。証明はつぎのようになる。 $\nu^1, \nu^2, \nu^3$ を主軸方向の単位ベクトル、その成分を $\nu_i^1, \nu_i^2, \nu_i^3$  ( $i=1, 2, 3$ ) とする。これは、それぞれ、根  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  に対応する方程式 (1) の解である。

$$(7) \quad \begin{aligned} (\tau_{ij} - \sigma_1 \delta_{ij}) \nu_j^1 &= 0, \\ (\tau_{ij} - \sigma_2 \delta_{ij}) \nu_j^2 &= 0, \\ (\tau_{ij} - \sigma_3 \delta_{ij}) \nu_j^3 &= 0. \end{aligned}$$

第1式に $\nu_i^2$ 、第2式に $\nu_i^1$ を掛け、 $i$ について加え、得られた式を辺々相引き

$$(8) \quad (\sigma_2 - \sigma_1) \nu_1^1 \nu_1^2 = 0$$

を得る。この場合、対称条件 (6) を考慮して、式

$$(9) \quad \tau_{ij} \nu_j^1 \nu_i^2 = \tau_{ji} \nu_j^2 \nu_i^1 = \tau_{ij} \nu_j^2 \nu_i^1$$

を用いた。式 (9) の最後の関係は、擬標  $i$  と  $j$  を交換して得られる。

ここで、かりに方程式 (3) が複素根をもつとすれば、方程式 (3) の係数は実数であるから、共役複素根も存在し、三つの根は

$$\sigma_1 = \alpha + i\beta, \quad \sigma_2 = \alpha - i\beta, \quad \sigma_3$$

と書かれる。ここに、 $\alpha, \beta, \sigma_3$  は実数、 $i$  は虚数単位  $\sqrt{-1}$  を表わす。この場合、方程式 (7) は $\nu_j^1$  と  $\nu_j^2$  とが互いに複素共役で、

$$\nu_j^1 \equiv a_j + ib_j, \quad \nu_j^2 \equiv a_j - ib_j$$

と書かれることを示している。したがって、

$$\begin{aligned} \nu_j^1 \nu_j^2 &= (a_j + ib_j)(a_j - ib_j) \\ &= a_j^2 + a_j^2 + a_j^2 + b_j^2 + b_j^2 + b_j^2 \neq 0. \end{aligned}$$

式 (8) から、 $\sigma_1 - \sigma_2 = 2i\beta = 0$ 、すなわち、 $\beta = 0$  となる。これは根が複素数と考えたものと仮定に矛盾する。したがって、複素根が存在するという仮定は成り立たず、根  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  はすべて実数となる。

$\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$  のとき、式 (8) は

$$(10) \quad \nu_i^1 \nu_i^2 = 0, \quad \nu_i^2 \nu_i^3 = 0, \quad \nu_i^3 \nu_i^1 = 0$$

となる。すなわち、主ベクトルは互いに直交する。 $\sigma_1 = \sigma_2 \neq \sigma_3$  のとき、ベクトル  $\nu_i^1$  と  $\nu_i^2$  の無限個の組を定めることができ、また、 $\nu_i^3$  を  $\nu_i^1$  と  $\nu_i^2$  に直交するベクトルとして定めることができる。 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  ならば、いかなる直交軸も主軸としてとることができる。

座標軸  $x_1, x_2, x_3$  を主軸に一致させて選べば、応力成分の行列はつぎのようになる。

$$(11) \quad [\tau_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

### 3.8 Lamé の応力だ円体

外向き単位法線ベクトル  $\nu, [\nu_i]$  をもつ任意の面素の上に、成分

$$\check{T}_i = \tau_{ij} \nu_j$$

をもつ表面力のベクトル  $\check{T}, [\check{T}_i]$  が作用するものとする。座標軸  $x_1, x_2, x_3$  を応力テンソルの主軸に選び、主応力を  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  と書く。すると

$$i \neq j \text{ ならば, } \tau_{ij} = 0$$

および

$$\check{T}_1 = \sigma_1 \nu_1, \quad \check{T}_2 = \sigma_2 \nu_2, \quad \check{T}_3 = \sigma_3 \nu_3$$

となる。 $\nu_i$  は単位ベクトルであるから

$$(\nu_1)^2 + (\nu_2)^2 + (\nu_3)^2 = 1$$

である。したがって、 $\check{T}_i$  の成分は

$$(1) \quad \frac{(\check{T}_1)^2}{(\sigma_1)^2} + \frac{(\check{T}_2)^2}{(\sigma_2)^2} + \frac{(\check{T}_3)^2}{(\sigma_3)^2} = 1$$

を満足する。これは軸を  $\check{T}_1, \check{T}_2, \check{T}_3$  とした直角座標系におけるだ円体の方程式である。このだ円体は共通の中心から出るベクトル  $\check{T}$  の端の点の軌跡である (図 3.8: 1)。このだ円体の存在は弾性論の確立される時期 (1820~1830) に Cauchy と Lamé によって注目された。Lamé の応力だ円体の主半径  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  が負の値をとることができるとすれば、式 (3.7: 4) および (3.7: 5) における応力の三つの不変量  $I_1, I_2, I_3$  はつぎのような幾何学的意味をもつ。すなわち、 $I_1$  はだ円体の三つの主半径の和であり、 $I_2$  は三つの主面で切っただ円体