

非線形有限要素法の基礎と応用

久田俊明 著
野口裕久

丸善株式会社

$$a \otimes b = \begin{cases} a^i b^j g_i \otimes g_j \\ a^i b_j g_i \otimes g^j \\ a_i b^j g^i \otimes g_j \\ a_i b_j g^i \otimes g^j \end{cases} \quad (1.1.130)$$

これにならってテンソル A も一般に

$$A = A^i g_i \otimes g_j = A^i_j g_i \otimes g^j = A^j_i g^i \otimes g_j = A_{ij} g^i \otimes g^j \quad (1.1.131)$$

のように独立な9個の成分をもつディアドックとして表示される。そして A^i_j をテンソル A の反変成分, A^i_j および A^j_i を A の混合成分 (mixed component), A_{ij} を A の共変成分と呼ぶ。ただし, 一般には $g_i \neq g^i$ だから $A^i_j \neq A^j_i$ である。またテンソル積の順は可換ではないから $A^i_j \neq A^j_i$ であり, したがって A^j_i という表示は適当でない。なお, A^i_j, A^j_i と A^i_j, A_{ij} は実際, 座標変換によって次式のように反変的, 混合的, 共変的な変換を受けることが容易に示される。

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}^i_j &= \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^l} A^{kl} \\ \bar{A}^i_j &= \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^l} A^{kl} \\ \bar{A}^j_i &= \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^l} A^{kl} \\ \bar{A}_{ij} &= \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} A_{kl} \end{aligned} \right\} \quad (1.1.132)$$

なお, 以上の議論は高階のテンソルへも拡張される。

最後にベクトル場, テンソル場の一般座標系における微分について付言すると, 基底ベクトル g_i および g^i は座標に依存し変化するので直交デカルト座標系におけるような容易な関係, 例えば

$$\frac{\partial b}{\partial x_j} = \frac{\partial b_i}{\partial x_j} e_i \quad (1.1.133)$$

はもはや成立せず, 代りに

$$\frac{\partial b}{\partial x^j} = \frac{\partial (b^i g_i)}{\partial x^j} = \frac{\partial b^i}{\partial x^j} g_i + b^i \frac{\partial g_i}{\partial x^j} \quad (1.1.134)$$

のように $\partial g_i / \partial x^j$ による項が派生してしまう。そこで定式化を直交デカルト座標系を含め統一かつ円滑に行うために共変導関数 (covariant derivative) と呼ばれる導関数を新たに導入する必要がある (例えば文献 [14] 参照)。

1.2 変形

1.2.1 連続体の運動の記述

連続体力学では物体は物質点 (material point) の連続的な集合としてとらえる。物質点は3次元 Euclid 空間における座標と一対一に対応づけられるものとする。物質点とはこのように体積が無限小の点であるにもかかわらず, 分子・原子のレベルに至ることなくその点の近傍の平均的な諸量を有すると見なす架空の便宜的な概念である。このような物質点の空間における集合状態を物体の配置 (configuration) と呼ぶ。

物質点の運動を記述するために, ある基準時刻 t_0 における物体の配置を基準配置 (reference configuration) とし[†], 各物質点の位置ベクトル X をその物質点の“名前”として与えることにする^{††}。物質点 X の現時刻 t における位置ベクトルを x と置くと, t を変数とする関数関係

$$x = x(X, t) \quad (1.2.1)$$

は物質点 X の運動を表す。物質点の時刻 t_0 から t までの変位ベクトル u は

$$u = x - X \quad (1.2.2)$$

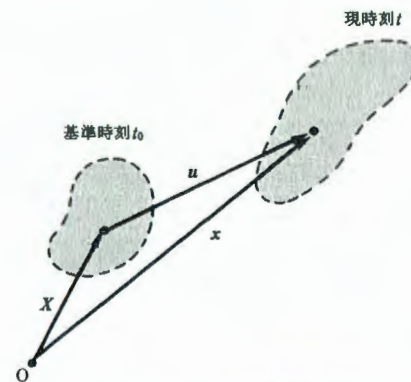


図 1.2.1 物質点の運動と変位

[†] 現在の時刻は t とし, その配置を現配置 (current configuration) と呼ぶ。
^{††} X は物質点の (物質点に貼られた) “ラベル (label)” と呼ばれる。

によって定義される。以上の概念を図 1.2.1 に示す。なお、視覚化を容易にするため、説明図の多くは今後あえて 2 次元的に表示する。

式 (1.2.1) の逆関係

$$X = X(x, t) \quad (1.2.3)$$

を考えると、これは現時刻 t で空間内の位置 x を通過する物質点の“名前”，すなわち基準時刻 t_0 での位置を与える。一般に連続体における任意のスカラー、ベクトル、テンソルの場合やその時間的変化を (X, t) の関数として表すこともできるし (x, t) の関数として与えることもできる。前者は物質表示 (material description) または Lagrange 表示、後者は空間表示 (spatial description) または Euler 表示と呼ばれる。

固体力学では通常、Lagrange 表示により理論を構成するが、実際の解析においては現時刻 t までの配置を知ったとして有限な時間 Δt 経過後、つまり時刻 $t + \Delta t$ での配置を求める増分解析を逐次進めて行くことが多い。その際の基準配置として、 $t_0 = 0$ の配置 (変形開始前の自然状態における配置) を用いる場合と、 $t_0 = t$ の現配置を用いる場合の 2 種類が考えられる。前者は total Lagrange 法、後者は updated Lagrange 法と呼ばれる。

1.2.2 物質時間導関数と空間時間導関数

スカラー ϕ 、ベクトル b 、テンソル A などの場を表す任意の量 \mathcal{A} の Lagrange 表示を $\mathcal{A}(X, t)$ 、Euler 表示を $\mathcal{A}(x, t)$ と便宜的に書くことにすると[†]、次の 2 種類の時間導関数を考えることができる。

$$\frac{\partial \mathcal{A}(X, t)}{\partial t} \quad (1.2.4)$$

$$\frac{\partial \mathcal{A}(x, t)}{\partial t} \quad (1.2.5)$$

ただし、ここでは $\partial \mathcal{A}(\cdot, t)/\partial t$ の操作は、() 内の残るパラメータ X または x を固定して行うものと定める。式 (1.2.4) は物質時間導関数 (material time derivative) と呼ばれ、物質点 X の \mathcal{A} 値が時間とともに変化する速度を表す。また式 (1.2.5) は空間時間導関数 (spatial time derivative) と呼ばれ、空間に固定されたある点 x に

[†] 物質点 X の時刻 t における空間位置が x だから当然、値としては $\mathcal{A}(X, t) = \mathcal{A}(x, t)$ である。このことを強調するために両表示に対して同一の関数形 \mathcal{A} を用いることにする。

における \mathcal{A} 値の変化速度を表す。物質時間導関数は次のように表すことができる。

$$\frac{\partial \mathcal{A}(X, t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{A}(x, t)}{\partial t} + v_i \frac{\partial \mathcal{A}(x, t)}{\partial x_i} \quad (1.2.6)$$

ただし、右辺第 1 項は空間時間導関数である。また第 2 項は移流項または対流項 (convective term) と呼ばれ、 v_i は物質点の速度 v の成分、すなわち

$$v_i = \frac{\partial x_i(X, t)}{\partial t} \quad (X \text{ は固定}) \quad (1.2.7)$$

を表す。なお、より一般的には、物質点の速度 v とは異なる任意の速度をもつ χ_i 座標系を設定して、これに基づく \mathcal{A} の速度 $\partial \mathcal{A}(x, t)/\partial t$ (x は固定) を考えることもできる。 $\partial \mathcal{A}(x, t)/\partial t$ と物質時間導関数 $\partial \mathcal{A}(X, t)/\partial t$ との関係は単に式 (1.2.6)、(1.2.7) にならって次のように表せる。

$$\frac{\partial \mathcal{A}(X, t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{A}(x, t)}{\partial t} + w_i \frac{\partial \mathcal{A}(x, t)}{\partial \chi_i} \quad (1.2.8)$$

ただし

$$w_i = \frac{\partial \chi_i(X, t)}{\partial t} \quad (X \text{ は固定}) \quad (1.2.9)$$

は物質点 X の χ_i 座標系における速度成分である。上式をさらに変形すると結局次式が導かれる。

$$\frac{\partial \mathcal{A}(X, t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{A}(x, t)}{\partial t} + (v_i - \bar{v}_i) \frac{\partial \mathcal{A}(x, t)}{\partial x_i} \quad (1.2.10)$$

ここで

$$\bar{v}_i = \frac{\partial x_i(x, t)}{\partial t} \quad (x \text{ は固定}) \quad (1.2.11)$$

は χ_i 座標系の速度である。

なお特別な場合として、 χ_i 座標系の速度 \bar{v} が物質点の速度 v と一致すれば、 $\partial \mathcal{A}(x, t)/\partial t$ は物質時間導関数となり、また $\bar{v} = 0$ であれば $\partial \mathcal{A}(x, t)/\partial t$ は空間時間導関数に帰着する。以上のような座標系に基づく解析法は ALE 法 (arbitrary Lagrangian Eulerian method) と呼ばれ、自由表面をもつ流体や固体・流体の連成する問題などに用いられている (9 章参照)。本書では今後、物質時間導関数を主として用いることになるので、それを単に $\partial \mathcal{A}/\partial t$ 、 $\partial \phi/\partial t$ 、 $\partial b/\partial t$ 、 $\partial A/\partial t$ あるいは $\dot{\mathcal{A}}$ 、 $\dot{\phi}$ 、 \dot{b} 、 \dot{A} のように表すことにする[†]。

1.2.3 変形勾配テンソル

時刻 $t_0=0$ の基準配置における物質点 X およびその近傍の点 $X+dX$ は現時刻 t において $x(X, t)$ および $x(X+dX, t)$ の位置を占める。 dX が微小であれば

$$dx = x(X+dX, t) - x(X, t) \quad (1.2.12)$$

は dX に対して線形の関係にあると考えられるから、線形変換

$$dx = F \cdot dX \quad (1.2.13)$$

を定義することができる[†]。そして F を変形勾配テンソル (deformation gradient tensor) と呼ぶ^{††}。図 1.2.2 にその概念を模式的に示す。 F はある物質点近傍の相対的な変形を表し、絶対的な変位置に関する情報を含まないことに注意しよう。また、 F をディアディック表示すれば、

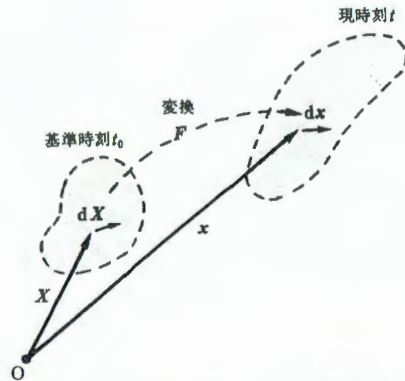


図 1.2.2 変形勾配テンソル F の概念

$$F = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} e_i \otimes e_j \equiv F_{ij} e_i \otimes e_j \quad (1.2.14)$$

となる。ただし、変形勾配 F は式 (1.2.13) に示されるとおり dX から dx への線形

† 逆に空間時間導関数は $\partial/\partial t$ で表し、物質時間導関数を D/Dt として区別している書物も（特に流体力学の分野で）多い。

†† 本書では今後原則として変形前の自然状態を基準配置にとり、 $t_0=0$ として種々のベクトルやテンソルを定めていく。 $t_0 \neq 0$ とする場合はそのつど明記する (1.2.6 項参照)。

††† 以下では“テンソル”を略して単に“変形勾配”と呼ぶことにする。他の名称のテンソルについても、同様の略称を適宜用いる。

変換 (写像) によって定義されるテンソルである。基準配置内にベクトル場 x があって、その勾配 (grad) をとって作られるテンソルであると誤解してはいけない^[21]。

なお、変形勾配 F は一般には対称ではない。また特異 ($\det F=0$) であってはならず、必ず式 (1.2.13) の逆の関係

$$dX = F^{-1} \cdot dx \quad (1.2.15)$$

が存在するような変形のみを対象とする。これは dx と dX が一対一対応すること、すなわち物質点の変形の前後で一対一対応することに相当する。 $\det F$ の意味については 1.2.5 項で述べる。

1.2.4 変形勾配の極分解

R を直交テンソル、 U を正値対称テンソルとしたとき、変形勾配 F は

$$F = R \cdot U \quad (1.2.16)$$

の形に分解される。これを変形勾配テンソルの右極分解 (right polar decomposition) と呼ぶ。後で述べる左極分解を含め、極分解は特異でないテンソル一般に対して可能である。上式の証明の大略は次のとおりである。

まず変形勾配 F を用いて次のテンソルを定義する。

$$C \equiv F^T \cdot F \quad (1.2.17)$$

C は右 Cauchy-Green 変形テンソル (right Cauchy-Green deformation tensor) と呼ばれるが、これは正定値対称であることが容易に示される。さらに C が正定値対称テンソルであれば、実テンソル $C^{1/2}$ 、 $C^{-1/2}$ が存在し、それらも正定値対称となる[†]。よって

$$U \equiv C^{1/2} \quad (C = U^2) \quad (1.2.18)$$

$$R \equiv F \cdot U^{-1} \quad (1.2.19)$$

と置くと

$$\begin{aligned} R \cdot R^T &= F \cdot U^{-1} \cdot U^{-T} \cdot F^T \\ &= F \cdot C^{-1} \cdot F^T \\ &= I \end{aligned} \quad (1.2.20)$$

となるので R は直交テンソルであることが分る。よって式 (1.2.16)、すなわち右極

† $C^{1/2}$ 、 $C^{-1/2}$ の定義は $C^{1/2} \cdot C^{1/2} = C$ 、 $C^{-1/2} \cdot C^{-1/2} = C^{-1}$ であると考えてよい。

分解定理が証明された。

変形勾配 F の右極分解の解釈は図 1.2.3 を参照して次のようになる。微小ベクトル dX は、まず U により C の主軸方向に $\sqrt{\lambda_i}$ 倍に伸縮する[†]。 λ_i は C の固有値（主値）である。そして次に伸縮することなく剛体回転 R を受け dx となる。

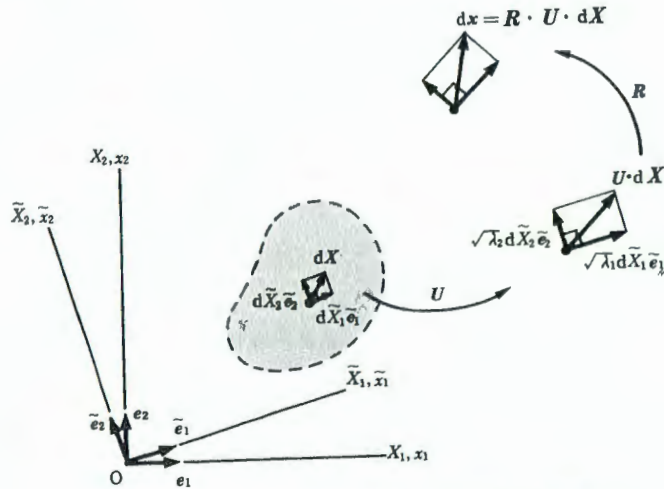


図 1.2.3 変形勾配 F の右極分解の主軸系での解釈

U は右ストレッチテンソル (right stretch tensor), $\sqrt{\lambda_i}$ は主ストレッチ (principal stretch) と呼ばれる。このストレッチ→回転の運動を主軸系以外の成分によって表した場合には、ストレッチの段階で dX を分解した 3 つのベクトルの間に角度変化を生じる。なお既述のとおり、変形勾配 F は、物質点 X とその近傍の点 $X+dX$ の相対的な変形を表すものなので、図における物質点の位置に意味はない。

以上は右極分解に関する説明であるが、特異でない任意のテンソルに対しては、左極分解 (left polar decomposition) も同様に成り立つ。すなわち、変形勾配 F について示すと、 V を正値対称テンソル、 R を右極分解の場合と同一の直交テンソルとして

$$F = V \cdot R \quad (1.2.21)$$

の形の分解が常に可能である。 V は左ストレッチテンソル (left stretch tensor) と呼

[†] $C\phi = \lambda\phi$ に $C = U \cdot U$ を代入し、左から ϕ を乗じると U の対称性を考慮して $(U \cdot \phi) \cdot (U \cdot \phi) = \sqrt{\lambda} \phi \cdot \sqrt{\lambda} \phi$ によって $U \cdot \phi = \sqrt{\lambda} \phi$ を得る。

ばれる。左極分解の証明は次式で定義される左 Cauchy-Green 変形テンソル (left Cauchy-Green deformation tensor) を用いて、右極分解の場合に準じて行うことができる。

$$B \equiv F \cdot F^T \quad (1.2.22)$$

ただし、 B と C の間には

$$B = R \cdot C \cdot R^T \quad (1.2.23)$$

の関係がある。

変形勾配 F の左極分解の幾何学的解釈は図 1.2.4 を参照しておおよそ次のとおりである。

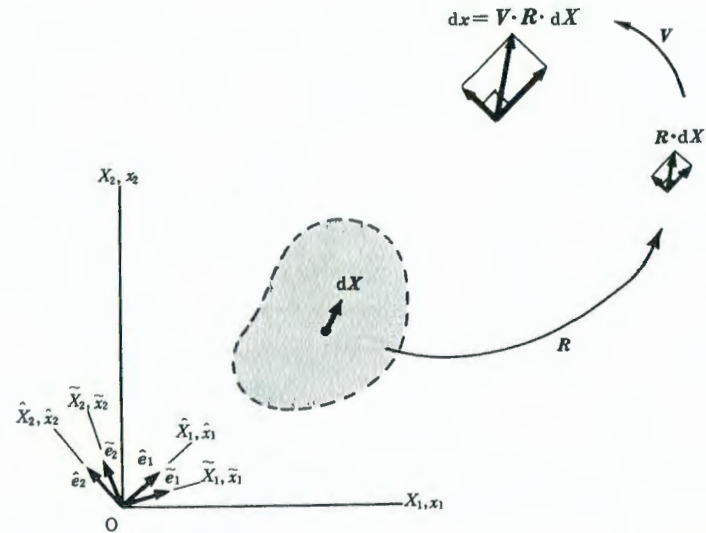


図 1.2.4 変形勾配 F の左極分解の主軸系での解釈

微小ベクトル dX は、まず R によって右極分解と同量の剛体回転を受ける。次に、この回転後の $R \cdot dX$ は V の主軸方向 (e_i) に $\sqrt{\lambda_i}$ 倍に引き伸ばされ dx となる。ただし、 V の主軸は B のそれと同一であり、 U の主軸 (C のそれと同一) を R だけ回転させたものに等しい。

なお、以上のような極分解には唯一性があることが容易に示される。

1.2.5 面積要素と体積要素の変化

物体内の任意の面積要素は変形とともに形、大きさ、方向を変える。変形勾配 F によりそれを表した Nanson の公式 (Nanson's formula)

$$\mathbf{n} ds = (\det F) F^{-T} \cdot \mathbf{N} dS \quad (1.2.24-a)$$

または

$$F^T \cdot \mathbf{n} ds = (\det F) \mathbf{N} dS \quad (1.2.24-b)$$

は有用である。図 1.2.5 に示すように dS , \mathbf{N} および ds , \mathbf{n} は変形の前後の微小四辺形の面積および単位法線ベクトルである。証明は次のとおりである。

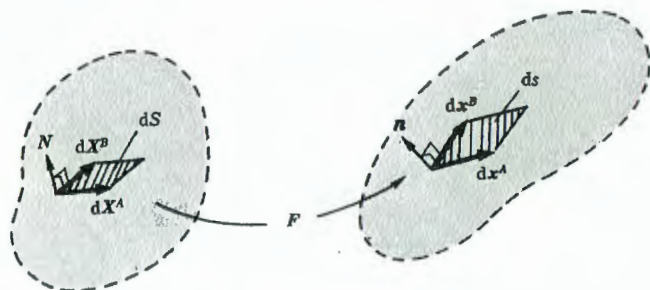


図 1.2.5 面積要素の変化

\mathbf{c} を任意のベクトルとして次式が導かれる。

$$\begin{aligned} \mathbf{n} ds \cdot \mathbf{c} &= (dx^a \times dx^b) \cdot \mathbf{c} = \{(F \cdot dX^A) \times (F \cdot dX^B)\} \cdot \mathbf{c} \\ &= [F \cdot dX^A \ F \cdot dX^B \ F \cdot F^{-1} \cdot \mathbf{c}] \\ &= (\det F) [dX^A \ dX^B \ F^{-1} \cdot \mathbf{c}] \\ &= (\det F) (dX^A \times dX^B) \cdot F^{-1} \cdot \mathbf{c} \\ &= (\det F) dS \mathbf{N} \cdot F^{-1} \cdot \mathbf{c} \\ &= ((\det F) dS F^{-T} \cdot \mathbf{N}) \cdot \mathbf{c} \end{aligned}$$

ただし、式 (1.1.56) を用いた。よって \mathbf{c} が任意であることから式 (1.2.24-a) を得る。なお dX^A , dX^B も任意ベクトルだから、ある特異でないテンソルを \mathbf{Y} 、任意ベクトルを \mathbf{a} , \mathbf{b} として、一般に次の公式^[7] が成立することが分る。

$$(\mathbf{Y} \cdot \mathbf{a}) \times (\mathbf{Y} \cdot \mathbf{b}) = (\det \mathbf{Y}) \mathbf{Y}^{-T} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (1.2.25)$$

次に体積変化について考えてみる。図 1.2.6 に示ような dX_1, dX_2, dX_3 を 3 辺とす

る体積 dV の微小平行六面体は変形後には dx_1, dx_2, dx_3 を 3 辺とする体積 dv の微小平行六面体になると考えることができる。 dV と dv の間には、変形勾配 F を用いて

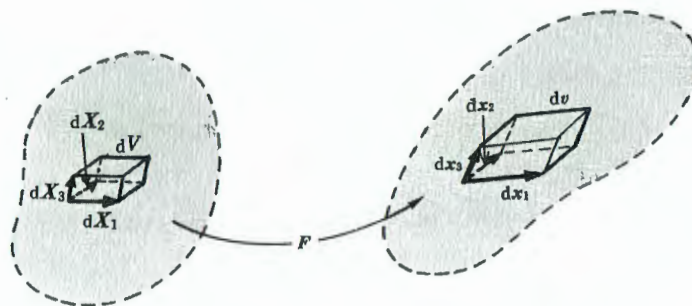


図 1.2.6 体積要素の変化

$$dv = (\det F) dV \quad (1.2.26)$$

の関係が成立する。すなわち、 $J \equiv \det F$ は体積変化率を表す。なお証明は、再び式 (1.1.56) を用いて

$$\begin{aligned} dv &= [dx_1 \ dx_2 \ dx_3] = [F \cdot dX_1 \ F \cdot dX_2 \ F \cdot dX_3] \\ &= (\det F) [dX_1 \ dX_2 \ dX_3] \\ &= (\det F) dV \end{aligned} \quad (1.2.27)$$

のように簡単になされる。

1.2.6 相対変形勾配テンソル

これまで時刻 $t_0=0$ での配置を基準配置とし、時刻 t での現配置に関する変形勾配 F を定義し論じてきた。しかし同様の議論は t_0 と t を任意の 2 時刻に置き替えても行い得るはずである。すなわち、区別のため F をあえて $F_0(t)$ と表示するなら、 $F_{t_0}(t)$ (ある時刻 t_0 を基準とする現時刻 t での変形勾配)、 $F_t(\tau)$ (現時刻 t を基準とする時刻 τ での変形勾配)、……などを自由に想定することができる。このような変形勾配一般を本書では相対変形勾配と呼ぶことにする[†]。

いま任意時刻を τ とし $F_0(t), F_0(\tau), F_t(\tau)$ の関係を調べてみる。なお、ここでは

[†] 本書では、今後必要に応じて他のテンソルについても同様の相対表示を行う。

物質点 X の時刻 t, τ での位置ベクトルを $x(t), x(\tau)$ と区別して表す。

直交デカルト座標系では式 (1.2.14) を参照して

$$F_0(t) = \frac{\partial x(t)_i}{\partial X_j} e_i \otimes e_j, \quad F_0(\tau) = \frac{\partial x(\tau)_a}{\partial X_j} e_a \otimes e_j, \quad F_t(\tau) = \frac{\partial x(\tau)_a}{\partial x(t)_j} e_a \otimes e_j \quad (1.2.28)$$

であるから微分の連鎖則より

$$\begin{aligned} F_0(\tau) &= \frac{\partial x(\tau)_a}{\partial x(t)_h} \frac{\partial x(t)_h}{\partial X_j} e_a \otimes e_j \\ &= \left(\frac{\partial x(\tau)_a}{\partial x(t)_h} e_a \otimes e_h \right) \cdot \left(\frac{\partial x(t)_h}{\partial X_j} e_h \otimes e_j \right) \\ &= F_t(\tau) \cdot F_0(t) \end{aligned} \quad (1.2.29)$$

を得る。

なお、式 (1.2.29) において $\tau=0$ と置くと $F_0(0)=I$ は明らかだから

$$I = F_t(0) \cdot F_0(t) \quad (1.2.30)$$

を得る。つまり $F_0(t)$ が通常の F に相当するので

$$F^{-1} = F_t(0) = \frac{\partial X_i}{\partial x(t)_j} e_i \otimes e_j \quad (1.2.31)$$

となることが分る。

次に相対変形勾配の速度について考える。 $F_t(\tau)$ の時刻 τ に関する物質時間導関数 $\partial F_t(\tau)/\partial \tau$ を時刻 t で評価したものを本書では

$$\dot{F}_t(t) \equiv \frac{\partial F_t(\tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t} \quad (1.2.32)$$

と表すことにする[†]。これを成分表示すれば、式 (1.2.28)₃ から

$$\dot{F}_t(t) = \frac{\partial v(t)_i}{\partial x(t)_j} e_i \otimes e_j \quad (1.2.33)$$

となることは明らかである。一方、 $F_{t_0}(t)$ の t に関する物質時間導関数は

$$\frac{\partial F_{t_0}(t)}{\partial t} = \frac{\partial v(t)_i}{\partial x(t_0)_j} e_i \otimes e_j \quad (1.2.34)$$

であり、ここで基準時刻を $t_0 \rightarrow t$ とすると上式は

$$\frac{\partial v(t)_i}{\partial x(t_0)_j} e_i \otimes e_j \rightarrow \frac{\partial v(t)_i}{\partial x(t)_j} e_i \otimes e_j \quad (1.2.35)$$

[†] 他の諸量についても同様の表示を行う。

となり $\dot{F}_t(t)$ に一致する。よって $\dot{F}_t(t)$ を評価する場合、式 (1.2.32) の代りに、まず $t_0=0$ の基準配置による F を用いて $\partial F/\partial t$ を求め、次に $t_0 \rightarrow t$ としてもよいことが分る。

1.3 歪, 歪速度

1.3.1 Green-Lagrange 歪テンソルおよび Almansi 歪テンソル

図 1.3.1 に示すように、ある物質点を起点とする任意の微小ベクトル dX および dX^* が変形後に dx および dx^* になったとする。これらの微小ベクトルの変形前後での内積の差は、1.2.4 項で定義した右 Cauchy-Green 変形テンソル $C \equiv F^T \cdot F$ または左 Cauchy-Green 変形テンソル $B \equiv F \cdot F^T$ を用いて、次のように表すことができる。ただし F は変形勾配である。

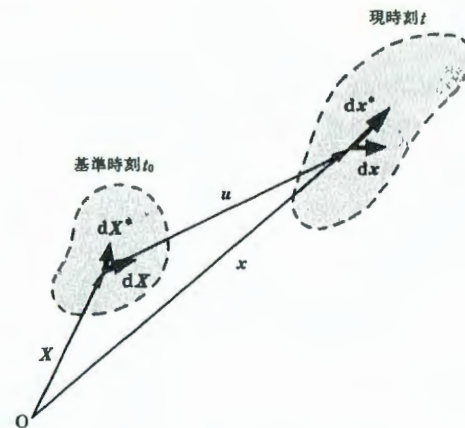


図 1.3.1 微小ベクトルの変形

$$\begin{aligned} dx \cdot dx^* - dX \cdot dX^* &= (F \cdot dX) \cdot (F \cdot dX^*) - dX \cdot dX^* \\ &= dX \cdot F^T \cdot F \cdot dX^* - dX \cdot dX^* \\ &= dX \cdot (C - I) \cdot dX^* \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

または

$$\begin{aligned} dx \cdot dx^* - dX \cdot dX^* &= dx \cdot dx^* - (F^{-1} \cdot dx) \cdot (F^{-1} \cdot dx^*) \\ &= dx \cdot dx^* - dx \cdot F^{-T} \cdot F^{-1} \cdot dx^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= dx \cdot dx^* - dx \cdot (F \cdot F^T)^{-1} \cdot dx^* \\
 &= dx \cdot (I - B^{-1}) \cdot dx^* \quad (1.3.2)
 \end{aligned}$$

もし $dX = dX^*$ なら, 変形前後の微小ベクトル長を dS, ds として, 上式左辺は $ds^2 - dS^2$ を表すことになる。物体の至る所で上式が 0 となるなら, 物体の運動は剛体運動 (rigid-body motion) となる。

Green-Lagrange 歪テンソル E および Almansi 歪テンソル A は次式で定義される[†]。

$$E \equiv \frac{1}{2}(C - I) \quad (1.3.3)$$

$$A \equiv \frac{1}{2}(I - B^{-1}) \quad (1.3.4)$$

E と A の間には

$$E = F^T \cdot A \cdot F \quad (1.3.5)$$

の関係のあることは明らかである。ここで $C = F^T \cdot F$ に F を右極分解した式 (1.2.16) を代入すると

$$C = U \cdot R^T \cdot R \cdot U = U^2 \quad (1.3.6)$$

と表されることから, 式 (1.3.3) のように定義される E は, 変形に含まれる剛体回転の影響を受けないことが分る。一方, 式 (1.3.4) に基づく A については, B が式 (1.2.23) のように与えられることから, 剛体回転量に依存した歪テンソルとなる。なお, F の左極分解式 (1.2.21) を用いると, B は次のようにも表される。

$$B = V \cdot R \cdot R^T \cdot V = V^2 \quad (1.3.7)$$

以下に E と A が変位 u を用いてどのように表されるかを調べてみる。

次式で定義されるテンソル

$$Z \equiv u \otimes \nabla_x \quad (1.3.8)$$

ただし

$$\nabla_x \equiv \frac{\partial}{\partial X_j} e_j \quad (1.3.9)^{**}$$

を変位勾配テンソル (displacement gradient tensor) と呼ぶ。ディアディック表示す

[†] E は単に Green あるいは Lagrange の歪テンソル, また A は Euler の歪テンソルと呼ばれることもある。

^{**} 後の式 (1.3.16) と区別するために, 単に ∇ ではなく ∇_x と表す。

れば

$$Z = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} e_i \otimes e_j \quad (1.3.10)$$

となる。ここで

$$Z \cdot dX = \left(\frac{\partial u}{\partial X_j} \otimes e_j \right) \cdot dX_i e_i = \frac{\partial u}{\partial X_i} dX_i = du \quad (1.3.11)$$

より

$$(I + Z) \cdot dX = dX + du = d(X + u) = dx \quad (1.3.12)$$

よって式 (1.2.13) を参照して,

$$F = I + Z \quad (1.3.13)$$

を得る。式 (1.3.13), (1.3.8), (1.2.17) を式 (1.3.3) に用いると次式を得る。

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{2} \{ u \otimes \nabla_x + (u \otimes \nabla_x)^T + (u \otimes \nabla_x)^T \cdot (u \otimes \nabla_x) \} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) e_i \otimes e_j \quad (1.3.14)
 \end{aligned}$$

一方

$$Y \equiv u \otimes \nabla_x \quad (1.3.15)$$

ただし

$$\nabla_x \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} e_i \quad (1.3.16)$$

と置くと

$$F^{-1} \cdot dx = dX = dx - du = (I - Y) \cdot dx \quad (1.3.17)$$

より

$$F^{-1} = I - Y = I - u \otimes \nabla_x \quad (1.3.18)$$

となるから, これを式 (1.2.22) とともに式 (1.3.4) に代入すると次式を得る。

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} \{ u \otimes \nabla_x + (u \otimes \nabla_x)^T - (u \otimes \nabla_x)^T \cdot (u \otimes \nabla_x) \} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) e_i \otimes e_j \quad (1.3.19)
 \end{aligned}$$

$$Y \cdot dx = du \quad (1.3.20)$$

なお微小変形, すなわち

$$\left| \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right| \ll 1 \quad (1.3.21)$$

を仮定するなら, $\partial u_i / \partial X_j$ の 2 次項は無視でき, また

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial X_1} &= \frac{\partial x_i}{\partial X_1} \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial(X_1+u_1)}{\partial X_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial(X_2+u_2)}{\partial X_1} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial(X_3+u_3)}{\partial X_1} \frac{\partial}{\partial x_3} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \frac{\partial}{\partial x_3} \\ &\simeq \frac{\partial}{\partial x_1}\end{aligned}\quad (1.3.22)$$

などとなるので, X_i と x_i に関する微分の区別もなくなる. よって

$$\mathbf{E} \simeq \mathbf{A} \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (1.3.23)$$

となり, \mathbf{E} と \mathbf{A} は線形理論における周知の歪, すなわち, 微小歪テンソル (infinitesimal strain tensor) に帰着する.

1.3.2 変形速度テンソル, スピンテンソル

一般に近接する 2 つの物質点 \mathbf{X} および $\mathbf{X} + d\mathbf{X}$ は時刻 t において \mathbf{x} および $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ に位置し, 速度 $\dot{\mathbf{x}}$ および $\dot{\mathbf{x}} + d\dot{\mathbf{x}}$ をもつと考えられる. $\dot{\mathbf{x}}$ を \mathbf{v} , $d\dot{\mathbf{x}}$ を $d\mathbf{v}$ と表すことにする. 速度勾配テンソル (velocity gradient tensor) \mathbf{L} とは, 2 つの物質点の相対速度 $d\mathbf{v}$ への $d\mathbf{x}$ の線形変換,

$$d\mathbf{v} = \mathbf{L} \cdot d\mathbf{x} \quad (1.3.24)$$

によって定義される. \mathbf{L} は, その名の示すとおり, 時刻 t の現配置におけるベクトル場 \mathbf{v} の勾配 $\text{grad } \mathbf{v}$ にほかならない. すなわち

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= \mathbf{v} \otimes \nabla_{\mathbf{x}} \\ &= \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \equiv L_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\end{aligned}\quad (1.3.25)$$

一方, 相対変形勾配を用いて \mathbf{L} を表すと次のようになる. まず式 (1.2.28) の $\mathbf{F}_t(\tau)$ は次の関係を満たす. ただし $d\mathbf{x} = d\mathbf{x}(t)$ である.

$$d\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{F}_t(\tau) \cdot d\mathbf{x} \quad (1.3.26)$$

これより式 (1.2.32) を参照して

$$d\mathbf{v} = \frac{\partial d\mathbf{x}(\tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t} = \frac{\partial \mathbf{F}_t(\tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t} \cdot d\mathbf{x} = \dot{\mathbf{F}}_t(t) \cdot d\mathbf{x} \quad (1.3.27)$$

よって

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}_t(t) \quad (1.3.28)$$

さらに, 式 (1.2.29) を用いると

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= \frac{\partial \mathbf{F}_t(\tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t} = \frac{\partial (\mathbf{F}_0(\tau) \cdot \mathbf{F}_0(t)^{-1})}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t} \\ &= \dot{\mathbf{F}}_0(t) \cdot \mathbf{F}_0(t)^{-1} \\ &= \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}\end{aligned}\quad (1.3.29)$$

のように, あえて変形勾配を用いて表すこともできる.

また, $\det \mathbf{F} \equiv J$ と置くと

$$\dot{J} / J = \text{tr } \mathbf{L} \quad (1.3.30)$$

が成立する. 式 (1.2.26) で示したように, J は体積変化率を意味し, \dot{J} はその速度である. この証明は, 式 (1.2.27) に基づき次のようになされる. すなわち

$$\begin{aligned}d\dot{\mathbf{v}} &= [\dot{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{X}_1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_3] + [\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_1 \dot{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{X}_2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_3] \\ &\quad + [\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_2 \dot{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{X}_3] \\ &= [\mathbf{L} \cdot \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_3] + [\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_1 \mathbf{L} \cdot \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_3] \\ &\quad + [\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_2 \mathbf{L} \cdot \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_3] \\ &= \text{tr } \mathbf{L} [\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_3] \\ &= \text{tr } \mathbf{L} d\mathbf{v}\end{aligned}\quad (1.3.31)^\dagger$$

ただし, 式 (1.3.29), (1.1.43) を用いた. これと式 (1.2.26) の (物質) 時間微分[†]

$$d\dot{\mathbf{v}} = \dot{J} dV \quad (1.3.32)^\dagger$$

を比べると式 (1.3.30) を得る.

さて, 速度勾配テンソル \mathbf{L} を次のように対称成分と反対称成分に加算分解する (式 (1.1.34) 参照).

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad (1.3.33)$$

$$\mathbf{D} = (\mathbf{L})_s, \quad \mathbf{W} = (\mathbf{L})_a \quad (1.3.34)$$

上式によって定義される \mathbf{D} を変形速度テンソル (deformation rate tensor), \mathbf{W} をスピンテンソル (spin tensor) と呼ぶ. \mathbf{D} は別名ストレッチングテンソル (stretching tensor) と呼ばれる. 式 (1.3.24) を考慮して相対速度 $d\mathbf{v}$ も次のように加算分解される.

† これらの式における $d\mathbf{v}$, $d\dot{\mathbf{v}}$ は微小体積とその時間に対する変化率を表す. 物質点の相対速度の記号 $d\mathbf{v}$ と混同しないよう注意しよう.

†† 今後は, 特に空間時間微分との区別が必要となる場合を除き, 物質時間微分を単に時間微分と呼ぶことにする.

$$\begin{aligned} dv &= D \cdot dx + W \cdot dx \\ &\equiv dv^D + dv^W \end{aligned} \quad (1.3.35)$$

いま相対変形勾配テンソルの極分解

$$\begin{aligned} F_t(\tau) &= R_t(\tau) \cdot U_t(\tau) \\ &= V_t(\tau) \cdot R_t(\tau) \end{aligned} \quad (1.3.36)$$

および、式 (1.3.28) から次式を得る。

$$\begin{aligned} L &= \left. \frac{\partial F_t(\tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=t} \\ &= (R_t(\tau) \cdot \dot{U}_t(\tau) + \dot{R}_t(\tau) \cdot U_t(\tau))|_{\tau=t} \\ &= \dot{U}_t(t) + \dot{R}_t(t) \end{aligned} \quad (1.3.37)$$

同様に

$$L = \dot{V}_t(t) + \dot{R}_t(t) \quad (1.3.38)$$

これらを式 (1.3.33) と等置すると、 $U_t(\tau)$ と $V_t(\tau)$ ひいては $\dot{U}_t(t)$ と $\dot{V}_t(t)$ が対称、また $\dot{R}_t(t)$ が反対称となることを考慮して、次式を得る。

$$D = \dot{U}_t(t) = \dot{V}_t(t) \quad (1.3.39)$$

$$W = \dot{R}_t(t) \quad (1.3.40)$$

D および W の直交デカルト座標系における成分表示は、式 (1.3.25), (1.3.34) により

$$D = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) e_i \otimes e_j \quad (1.3.41)$$

$$W = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) e_i \otimes e_j \quad (1.3.42)$$

となることは明らかである。 D の成分 D_{ij} は、刻々の現配置を基準とする微小歪成分の変位を速度で置き換えた形になっている。なお Green-Lagrange 歪の速度 \dot{E} と D の間には

$$\dot{E} = F^T \cdot D \cdot F \quad (1.3.43)$$

の関係があることが示される^[14]。またこの式で基準配置を現配置にとる ($t_0=t$ とする) と、次式が得られる。

$$\dot{E}_t(t) = D \quad (1.3.44)$$

最後に、 D および W は元来、時刻 t の現配置のみにおいて定義されたテンソルであるが、これらは変形勾配 F を右極分解して得られる右ストレッチテンソル U と回

転テンソル R を用いて次のように表すことができる。

$$D = \frac{1}{2} R \cdot (\dot{U} \cdot U^{-1} + U^{-1} \cdot \dot{U}) \cdot R^T \quad (1.3.45)$$

$$W = \dot{R} \cdot R^T + \frac{1}{2} R \cdot (\dot{U} \cdot U^{-1} - U^{-1} \cdot \dot{U}) \cdot R^T \quad (1.3.46)$$

上式は式 (1.3.29) に $F=R \cdot U$ を代入して得られる

$$\begin{aligned} L &= (\dot{R} \cdot U + R \cdot \dot{U}) \cdot U^{-1} \cdot R^T \\ &= \dot{R} \cdot R^T + R \cdot \dot{U} \cdot U^{-1} \cdot R^T \end{aligned} \quad (1.3.47)$$

を式 (1.3.34) に用いることにより導かれる。なお、式 (1.3.44) 右辺第1項に相当する

$$\Omega \equiv \dot{R} \cdot R^T \quad (1.3.48)$$

は剛体スピンと呼ばれることがあり、 $t_0=0$ の基準配置からの剛体回転 R による現時刻 t での物質点のスピンを表している。物質点に変形せず剛体的に運動する場合に対しては、 $U=I$, $\dot{U}=0$ だから、 $D=0$ および $W=\Omega$ となる。スピン W や Ω は次節で応力テンソルの客観速度を導く際に用いられる。

1.4 応力、応力速度

1.4.1 質量保存の原理

物体の質量 m は質量密度を ρ 、物体の占める領域を v として

$$m = \int_v \rho dv \quad (1.4.1)$$

により与えられる。質量保存の原理 (principle of conservation of mass) とは m が時間に依存せず (変形後も) 一定、すなわち

$$\dot{m} = 0 \quad (1.4.2)$$

が成立することを述べている。 \dot{m} の $\dot{}$ は (領域 v の変化も含んだ) 物質時間導関数である。式 (1.2.26) より、 $dv/dV = \det F \equiv J$ であることを考慮し、式 (1.4.1) を

$$m = \int_V \rho J dV \quad (1.4.3)$$

と書換え時間微分をとると次式を導くことができる。

$$\int_v (\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} v) dv = 0 \quad (1.4.4)$$

ただし、式 (1.3.30) に基づく関係式

$$\frac{d}{dt} = \text{tr } L = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \text{div } v \quad (1.4.5)$$

を使った。

また、上式は物体の任意の一部分についても成り立つので

$$\dot{\rho} + \rho \text{div } v = 0 \quad (1.4.6)$$

を得る。ただし、 v は物質点の速度ベクトルを表す。さらに、 ρ の空間時間導関数を $\partial \rho(x, t) / \partial t$ と表すことにすると、式 (1.2.6) を参照して、上式は次のように書き改めることができる。

$$\partial \rho(x, t) / \partial t + \text{div}(\rho v) = 0 \quad (1.4.7)$$

式 (1.4.6), (1.4.7) は連続の式 (equation of continuity) と呼ばれる。

なお、基準配置における ρ を ρ_0 と置くと次式が成立する。これは式 (1.2.26) と質量保存則から明らかである。

$$J = \rho_0 / \rho \quad (1.4.8)$$

以上を参考にして、一般の関数 \mathcal{A} についても、領域 v における体積積分の (物質) 時間導関数は次のように表すことができる。ただし、 $\partial \mathcal{A}(x, t) / \partial t$ は \mathcal{A} の空間時間導関数、 s は領域表面を意味する。

$$\begin{aligned} \left(\int_v \mathcal{A} dv \right)' &= \int_v (\dot{\mathcal{A}} + \mathcal{A} \text{div } v) dv \\ &= \int_v \left\{ \frac{\partial \mathcal{A}(x, t)}{\partial t} + \text{div}(\mathcal{A} v) \right\} dv \\ &= \int_v \frac{\partial \mathcal{A}(x, t)}{\partial t} dv + \int_s \mathcal{A} v \cdot n ds \end{aligned} \quad (1.4.9)$$

上式は Reynolds の輸送定理 (Reynolds' transport theorem) と呼ばれる。 \mathcal{A} はスカラー場に限らず、ベクトル場あるいはテンソル場 (の成分) であってもよい。

同様に次の公式を得ることができる。

$$\begin{aligned} \left(\int_v \rho \mathcal{A} dv \right)' &= \left(\int_v \rho \dot{\mathcal{A}} J dV \right)' = \int_v (\dot{\rho} \mathcal{A} J + \rho \dot{\mathcal{A}} J + \rho \mathcal{A} \text{div } v J) dV \\ &= \int_v \rho \dot{\mathcal{A}} J dV = \int_v \rho \dot{\mathcal{A}} dv \end{aligned} \quad (1.4.10)$$

1.4.2 運動量保存の原理

物体に作用する力には物体力 (body force) ベクトル ρg と表面力 (surface force) ベクトル t がある。ただし、 ρg は単位体積当りの力、 t は単位面積当りの力である。物体全体におけるこれらの和と運動量 (momentum) $\int_v \rho v dv$ の速度は次式のように等置される。

$$\left(\int_v \rho v dv \right)' = \int_v \rho g dv + \int_s t ds \quad (1.4.11)$$

これが Euler の第1運動法則 (Euler's first law of motion) である。ここで式 (1.4.10) を用いると、上式は次のように表すことができる。ただし、 $\dot{v} \equiv a$ は物質点の加速度ベクトルである。

$$\int_v \rho(a - g) dv = \int_s t ds \quad (1.4.12)$$

一方、角運動量 (angular momentum) の保存に関しては次の原理が成立する。すなわち、座標の原点に関して物体力および表面力のモーメントと運動量モーメント (moment of momentum) の速度が次のように等置される。

$$\left(\int_v x \times \rho v dv \right)' = \int_v x \times \rho g dv + \int_s x \times t ds \quad (1.4.13)$$

これは Euler の第2運動法則 (Euler's second law of motion) と呼ばれる。左辺で式 (1.4.10) および $\dot{x} \times v = v \times v = 0$ を考慮すると次式を得る。

$$\int_v x \times \rho a dv = \int_v x \times \rho g dv + \int_s x \times t ds \quad (1.4.14)$$

1.4.3 Cauchy 応力テンソルと平衡条件

図 1.4.1 に示すような物体内の任意の仮想表面上にとった微小な面素 ds に作用する力が df_n であるとする。ただし、物体の配置は時刻 t の現配置つまり変形後の配置に基づき考える。応力ベクトル t_n とは次式により定義される。

$$t_n = df_n / ds \quad (1.4.15)$$

df_n, t_n は当然、仮想表面の方向、すなわち外向単位法線ベクトル n に依存して定まるので、これらには添字 n を付けている。ここで面内において直交する2つの単位ベクトル l, m を与えると、応力ベクトル t_n は一般に次のように分解される。

$$\mathbf{t}_n = T_{nn}\mathbf{n} + T_{ni}\mathbf{l} + T_{nm}\mathbf{m} \quad (1.4.16)$$

右辺の係数 T の第1の添字は断面の方向を, 第2の添字は分解した応力の方向を表すものとする。

なお, 応力ベクトルに関しては Newton の作用・反作用の法則が成立する。すなわち図 1.4.1 の面素の裏側 (外向単位法線ベクトル $-\mathbf{n}$) には $-\mathbf{t}_n$ の応力ベクトルが作用する。このことを形式的に表せば

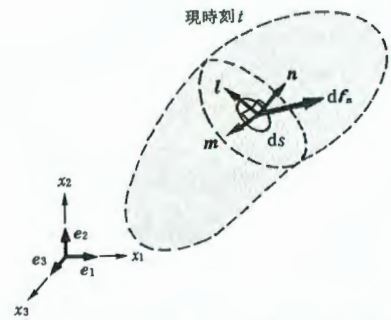


図 1.4.1 物体内の仮想表面に作用する力

$$\mathbf{t}_{-n} = -\mathbf{t}_n \quad (1.4.17)$$

となる。

いま $(\mathbf{n}, \mathbf{l}, \mathbf{m})$ の特殊な場合として, これらを直交デカルト座標系の基底ベクトルに一致させてみる。すなわち順に $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1)$, $(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ と置いてみると, 式 (1.4.16) にならって次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{t}_1 &= T_{11}\mathbf{e}_1 + T_{12}\mathbf{e}_2 + T_{13}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{t}_2 &= T_{21}\mathbf{e}_1 + T_{22}\mathbf{e}_2 + T_{23}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{t}_3 &= T_{31}\mathbf{e}_1 + T_{32}\mathbf{e}_2 + T_{33}\mathbf{e}_3 \end{aligned} \right\} \quad (1.4.18-a)$$

あるいは

$$\mathbf{t}_i = T_{ij}\mathbf{e}_j \quad (1.4.18-b)$$

この状況を図 1.4.2 に示す。 T_{ii} (i について和をとらない) を垂直応力 (normal stress), T_{ij} ($i \neq j$) をせん断応力 (shear stress) と呼ぶ。

Cauchy 応力テンソル \mathbf{T} はこれらの成分 T_{ij} を用い

$$\mathbf{T} = T_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (1.4.19)$$

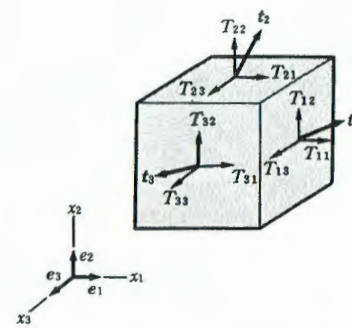


図 1.4.2 応力ベクトルの分解

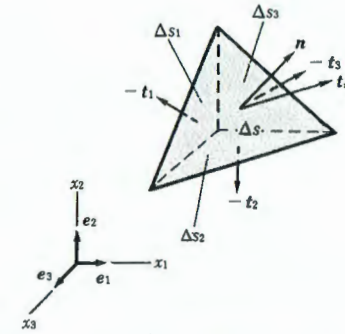


図 1.4.3 Cauchy の四面体に作用する応力ベクトル

によって与えられる。 \mathbf{T} はまた真応力 (true stress) と呼ばれる。

次に図 1.4.3 に示すような微小四面体, すなわち Cauchy の四面体を想定する。直交する三面および斜面の面積を $\Delta S_1, \Delta S_2, \Delta S_3, \Delta S$, これらに作用する応力ベクトルを $-\mathbf{t}_1, -\mathbf{t}_2, -\mathbf{t}_3, \mathbf{t}_n$ とする。Euler の第1運動法則の式 (1.4.12) は, 四面体の体積を Δv として, 次のように表せる。

$$\rho(\mathbf{a} - \mathbf{g})\Delta v \simeq \mathbf{t}_n\Delta S - \mathbf{t}_1\Delta S_1 - \mathbf{t}_2\Delta S_2 - \mathbf{t}_3\Delta S_3 \quad (1.4.20)$$

上式が近似式となっているのは, $\mathbf{a} - \mathbf{g}$, \mathbf{t}_n , \mathbf{t}_i が有限な体積, 面積内で変化するためである。四面体を無限小に縮小させると \simeq は $=$ で置き換えることができ, また $\Delta v/\Delta S \rightarrow 0$ となる。よって

$$\left. \begin{aligned} \Delta S_i/\Delta S &= n_i \\ \mathbf{n} &= n_i\mathbf{e}_i \end{aligned} \right\} \quad (1.4.21)$$

を考慮して

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{t}_i n_i \quad (1.4.22)$$

を得る。これに式 (1.4.18-b) を代入すると

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_n &= T_{ij}\mathbf{e}_j n_i \\ &= T_{ij}(\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{n}_k \mathbf{e}_k \\ &= \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{n} \end{aligned} \quad (1.4.23)$$

が導かれる。上式は Cauchy の公式 (Cauchy's formula) と呼ばれる。これは \mathbf{T}^T が任意面の単位法線ベクトル \mathbf{n} を, その面に作用する応力ベクトル \mathbf{t}_n に線形変換する

テンソルであることを意味する[†]。よって \mathbf{T} が分っていれば任意面の応力ベクトルを求めることができる。すでに 1.1.1 項で述べたように、上式を Cauchy 応力テンソルの定義式であると見なすこともできる。

物体表面でも Cauchy の公式は成立せねばならないから、Euler の第 1 運動法則に基づく式 (1.4.12) の \mathbf{t} に式 (1.4.23) の \mathbf{t}_n を代入し、発散定理 [式 (1.1.106)] を適用すると

$$\int_V \rho(\mathbf{a} - \mathbf{g}) dv = \int_V \operatorname{div} \mathbf{T} dv \quad (1.4.24)$$

ただし

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = \nabla_x \cdot \mathbf{T} \quad (1.4.25)$$

となり、これが物体の任意の一部分について成立することから

$$\rho \mathbf{a} = \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{g} \quad (1.4.26-a)$$

あるいは

$$\rho a_j = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} + \rho g_j \quad (1.4.26-b)$$

を得る。これは Cauchy の第 1 運動法則 (Cauchy's first law of motion) または平衡方程式 (equilibrium equation) と呼ばれる。

次に、角運動量保存を表す Euler の第 2 運動法則に基づく式 (1.4.14) の右辺第 2 項の \mathbf{t} に式 (1.4.23) の \mathbf{t}_n を代入し Gauss の定理 [式 (1.1.100)] を用いると次式を導くことができる。

$$\int_V \mathbf{x} \times \rho \mathbf{a} dv = \int_V \{ \mathbf{x} \times (\rho \mathbf{g} + \operatorname{div} \mathbf{T}) + e_{ijk} T_{ij} \mathbf{e}_k \} dv \quad (1.4.27)$$

上式に Cauchy の第 1 運動法則の式 (1.4.26-a) を用いると

$$\begin{aligned} \int_V e_{ijk} T_{ij} \mathbf{e}_k dv &= 0 \\ \therefore e_{ijk} T_{ij} &= 0 \end{aligned} \quad (1.4.28)$$

を得る。上式が成立するためには

$$T_{ij} = T_{ji} \quad (1.4.29-a)$$

すなわち

[†] 式 (1.4.16), (1.4.18) で \mathbf{T} の添字の順を逆に定義しても何ら差し支えない。その場合 Cauchy の公式は $\mathbf{t}_n = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$ の形となる。このように Cauchy 応力テンソル \mathbf{T} を与えている書物もある。

$$\mathbf{T}^T = \mathbf{T} \quad (1.4.29-b)$$

でなければならない。よって Cauchy 応力は対称であり、独立な成分の数は 6 個となる。式 (1.4.29) は Cauchy の第 2 運動法則 (Cauchy's second law of motion) と呼ばれる。

なお、1.1 節で述べたとおり \mathbf{T} はその対称性から実数の主値と主軸をもつ。前者は主応力 (principal stress), 後者は主方向 (principal direction) とも呼ばれる。また \mathbf{T} には 3 つの主不変量 I_T, II_T, III_T を定められるが、特に次式で定義される偏差応力テンソル (deviatoric stress tensor)

$$\mathbf{T}' \equiv \mathbf{T} - \frac{1}{3}(\operatorname{tr} \mathbf{T}) \mathbf{I} \quad (1.4.30)$$

についてみると、 $\operatorname{tr} \mathbf{T}' = 0$ であるから、その第 1, 第 2 不変量は

$$I_{T'} = 0, \quad II_{T'} = -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(\mathbf{T}'^2) \quad (1.4.31)$$

と簡単になる。

1.4.4 Kirchhoff 応力テンソル, 第 1・第 2 Piola-Kirchhoff 応力テンソル, Biot 応力テンソル

Cauchy 応力は時刻 t の現配置, すなわち変形後の配置において定義される応力であり、このため真応力とも呼ばれることは前節で述べたとおりである。しかし有限変形問題においては、未知な配置で定義される応力より、既知の配置に基づく何らかの応力テンソルを用いて変分原理を記述すると都合よく解析を行うことができる。

Kirchhoff 応力テンソル $\hat{\mathbf{T}}$ とは時刻 $t_0=0$ の基準配置から時刻 t の現配置に至る体積変化率 $dv/dV = \det \mathbf{F} = J$ を用いて、

$$\hat{\mathbf{T}} \equiv J \mathbf{T} \quad (1.4.32)$$

と定義される。すなわち、 $\hat{\mathbf{T}}$ は単に Cauchy 応力 \mathbf{T} の J 倍であり、したがって対称テンソルである。

次に第 1 Piola-Kirchhoff 応力テンソル (first Piola-Kirchhoff stress tensor) \mathbf{II} は別名、公称応力 (nominal stress) と呼ばれ、これは現配置での面素 (外向単位法線ベクトル \mathbf{n} , 面積 ds) に作用する力 $d\mathbf{f}_n$ を基準配置でのそれ (\mathbf{N}, dS) に単に平行移動して作用させたときの応力ベクトル

$$\tilde{\mathbf{t}} \equiv \frac{d\mathbf{f}_n}{dS} \quad (1.4.33)$$

を用いて

$$\tilde{\mathbf{t}} \equiv \mathbf{\Pi}^T \cdot \mathbf{N} \quad (1.4.34)$$

によって定義される。概念を図 1.4.4 に示す。

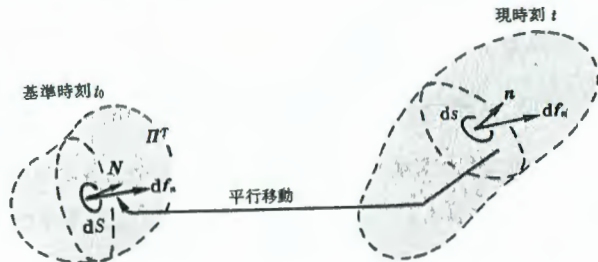


図 1.4.4 第1 Piola-Kirchhoff 応力テンソル $\mathbf{\Pi}$ の概念

Nanson の公式 (1.2.24) と式 (1.4.33), (1.4.34) から

$$d\mathbf{f}_n = \mathbf{\Pi}^T \cdot \mathbf{N} dS = \frac{1}{J} \mathbf{\Pi}^T \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{n} ds \quad (1.4.35)$$

となるので, Cauchy の公式 (1.4.23) と比較して

$$\mathbf{T} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \mathbf{\Pi} \quad (1.4.36)$$

を得る。これが \mathbf{T} と $\mathbf{\Pi}$ との関係であり, 明らかに $\mathbf{\Pi}$ は対称でないことが分る。

第2 Piola-Kirchhoff 応力テンソル (second Piola-Kirchhoff stress tensor) \mathbf{S} は, $d\mathbf{f}_n$ を $\mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{f}_n$ と変換して基準配置での面素に作用させたときの応力ベクトル

$$\tilde{\mathbf{t}} \equiv \frac{\mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{f}_n}{dS} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{t}} \quad (1.4.37)$$

を用いて

$$\tilde{\mathbf{t}} \equiv \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{N} \quad (1.4.38)$$

によって定義される。概念を図 1.4.5 に示す。

Nanson の公式 (1.2.24) と式 (1.4.37), (1.4.38) から

$$d\mathbf{f}_n = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{N} dS = \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{n} ds \quad (1.4.39)$$

よって Cauchy の公式 (1.4.23) と比較して

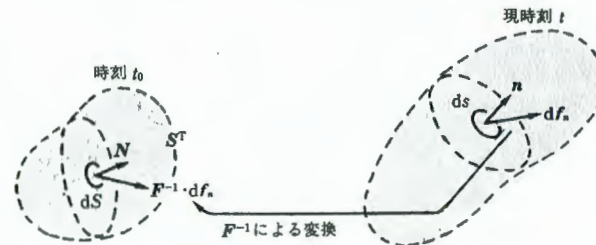


図 1.4.5 第2 Piola-Kirchhoff 応力テンソル \mathbf{S} の概念

$$\mathbf{T} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T \quad (1.4.40)$$

を得る。これが \mathbf{T} と \mathbf{S} の関係であり, \mathbf{S} は対称であることが分る。

ここで, 時刻 t での配置から物体がさらに $\mathbf{F}_t(\tau) = \mathbf{R}_t(\tau)$ だけ回転し時刻 τ に至ったとする。 $\mathbf{F}_t(\tau)$ は相対変形勾配 (1.2.6 項参照) を表す。すると時刻 t での Cauchy 応力 $\mathbf{T}(t)$ は時刻 τ で $\mathbf{T}(\tau) = \mathbf{R}_t(\tau) \cdot \mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{R}_t(\tau)^T$ となることを考慮して,

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\tau) &= J \mathbf{F}_0(\tau)^{-1} \cdot \mathbf{T}(\tau) \cdot \mathbf{F}_0(\tau)^{-T} \\ &= J \mathbf{F}_0(t)^{-1} \cdot \mathbf{R}_t(\tau)^{-1} \cdot \mathbf{R}_t(\tau) \cdot \mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{R}_t(\tau)^T \cdot \mathbf{R}_t(\tau) \cdot \mathbf{F}_0(t)^{-T} \\ &= J \mathbf{F}_0(t)^{-1} \cdot \mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{F}_0(t)^{-T} = \mathbf{S}(t) \end{aligned} \quad (1.4.41)$$

よって第2 Piola-Kirchhoff 応力 \mathbf{S} は剛体回転のもとで不変であることが分る。

最後に Biot 応力テンソル (Biot stress tensor) $\mathbf{\Sigma}$ は, 第1 Piola-Kirchhoff 応力 $\mathbf{\Pi}$ と剛体回転テンソル \mathbf{R} を用いて,

$$\begin{aligned} \mathbf{\Sigma} &\equiv (\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{R})_s \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{R} + \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{\Pi}^T) \end{aligned} \quad (1.4.42)$$

により定義される。また, これに式 (1.4.36), (1.4.32) を適用すれば

$$\begin{aligned} \mathbf{\Sigma} &= (\mathbf{F}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{R})_s \\ &= (\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \hat{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{R})_s \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \hat{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{R} + \mathbf{R}^T \cdot \hat{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}^{-1}) \end{aligned} \quad (1.4.43)$$

と変形できる。さらに, 式 (1.4.36), (1.4.40) から分る

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T \quad (1.4.44)$$

なる関係を考慮すると, 式 (1.4.42) は次のように表すこともできる。

$$\begin{aligned}
 \Sigma &= (S \cdot F^T \cdot R)_s \\
 &= (S \cdot U)_s \\
 &= \frac{1}{2} (S \cdot U + U \cdot S)
 \end{aligned} \quad (1.4.45)$$

ここで式 (1.4.34) に左から R^T を乗じると

$$R^T \cdot \tilde{f} = (\Pi \cdot R)^T \cdot N \quad (1.4.46)$$

を得るから、図 1.4.4, 1.4.5 にならって、テンソル $\Pi \cdot R$ の幾何学的意味は図 1.4.6 のように与えられ、その対称成分をとったものが Biot 応力 Σ であることが分る。 S , U は剛体回転の影響を受けないから、式 (1.4.45) から明らかなように、Biot 応力 Σ も剛体回転のもとで不変である。

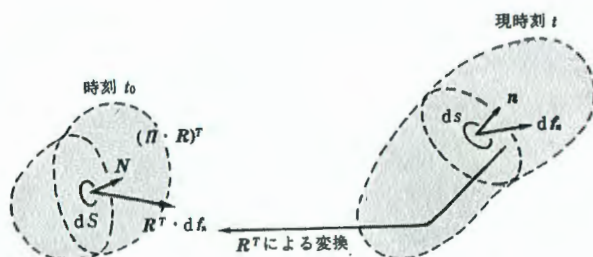


図 1.4.6 テンソル $\Pi \cdot R$ の概念

1.4.5 各種応力速度

空間に固定したある一人の観測者が、ある物質点に関する時刻 t_0, t, τ での Cauchy 応力テンソルを $T(t_0), T \equiv T(t), T(\tau)$ と観測するものとする。一方、時刻 t においてこの観測者と一致し、それ以後時刻 τ までの間、物質点の剛体回転 $R_i(\tau)$ と同量だけ回転するもう一人の観測者を想定する。すると後者の観測する時刻 τ での Cauchy 応力は、相対的に物質点が $R_i(\tau)^T$ 回転したものと見なして、次式のように与えられるはずである。

$$R_i(\tau)^T \cdot T(\tau) \cdot R_i(\tau) \quad (1.4.47)$$

したがって、その速度は

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \{R_i(\tau)^T \cdot T(\tau) \cdot R_i(\tau)\} = \{R_i(\tau)^T \cdot \dot{T}(\tau) \cdot R_i(\tau)\} \quad (1.4.48)$$

となる。式 (1.4.48) で $\tau \rightarrow t$ としたものを Cauchy 応力の Jaumann 速度と呼び[†], 本書では $\dot{T}_{(J)}$ と表す。すなわち、 $R_i(t) = I$ に注意して

$$\begin{aligned}
 \dot{T}_{(J)} &= \{R_i(\tau)^T \cdot \dot{T}(\tau) \cdot R_i(\tau)\}^*|_{\tau=t} \\
 &= \dot{R}_i(t)^T \cdot \dot{T} \cdot R_i(t) + R_i(t)^T \cdot \dot{T} \cdot R_i(t) + R_i(t)^T \cdot T \cdot \dot{R}_i(t) \\
 &= \dot{T} - W \cdot T + T \cdot W
 \end{aligned} \quad (1.4.49)$$

を得る。ここに W はスピントテンソルであり、その反対称性を用いた。

1.1.1 項で触れたように、観測者が異なるとテンソルやその速度も異なって観測され、このため 1.5 節で述べるように構成式との関係でテンソルの客観性 (objectivity) の検討が必要となる。本書では客観性のあるテンソルの速度を \cdot で表すことにする。

さて以上の $\dot{T}_{(J)}$ を含めた各種の応力速度は次のような解釈に基づき統一的な取扱いができる^[16]。時刻 t で一致している 3 種類の基底ベクトル $e_i, \bar{g}_i, \bar{g}_i$ を想定する。 e_i は単に空間に固定された正規直交基底ベクトルである。一方、時刻 t で e_i に等しかった \bar{g}_i は、その後物質点の剛体回転と同量だけ回転するものとする。すなわち、時刻 t から τ までの回転を $R_i(\tau)$ と表して次式を置く。

$$\bar{g}_i(\tau) = R_i(\tau) \cdot \bar{g}_i \quad (1.4.50)$$

また、やはり時刻 t で e_i に等しかった \bar{g}_i は、その後物体に埋め込まれ物質点とともに変形するものとする。つまり相対変形勾配テンソル $F_i(\tau)$ によって \bar{g}_i は

$$\bar{g}_i(\tau) = F_i(\tau) \cdot \bar{g}_i \quad (1.4.51)$$

の変換を受けるものとする。さらに $\bar{g}_i(\tau)$ に対する反変基底ベクトル $\bar{g}^i(\tau)$ を考えることもできる。これらの関係を図 1.4.7 に模式的に示す。なお、 $\bar{g}_i, \bar{g}_i, \bar{g}^i$ に (τ) を付けない場合、それは時刻 t でのものを意味することにする。

式 (1.4.50), (1.4.51) を τ で微分すると次式を得る。

$$\dot{\bar{g}}_i(\tau) = \dot{R}_i(\tau) \cdot \bar{g}_i \quad (1.4.52)$$

$$\dot{\bar{g}}_i(\tau) = \dot{F}_i(\tau) \cdot \bar{g}_i \quad (1.4.53)$$

もし $\tau \rightarrow t$ とするならば式 (1.3.40), (1.3.28) により上式は

$$\dot{\bar{g}}_i = W \cdot \bar{g}_i \quad (1.4.54)$$

$$\dot{\bar{g}}_i = L \cdot \bar{g}_i \quad (1.4.55)$$

となる。 W はスピントテンソル、 L は速度勾配テンソルである。

[†] Zaremba-Jaumann 速度と呼ぶこともある。