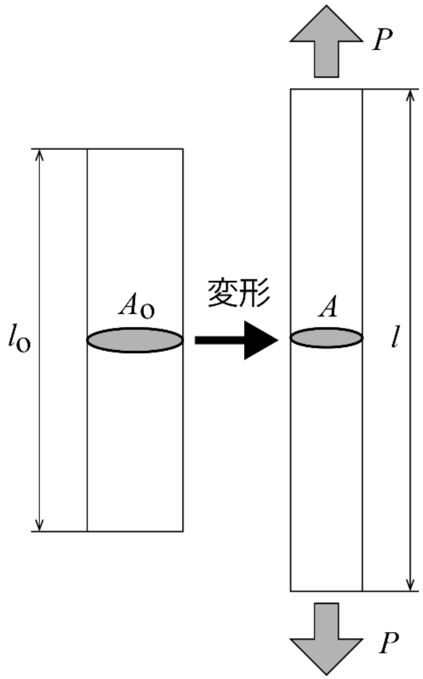
弾塑性問題の有限変形問題への拡張(1)

微小変形問題（今まで主に取り扱ってきた）の枠組み

- 変形前と変形後の物体形状の違いを考慮しない
  - ✓ 応力：公称応力（Nominal Stress)、真応力（True Stress）の区別をしない
  - ✓ コーシー応力テンソル（Cauchy Stress）Tensorを使う、他の応力は考えない
- 変形は小さいと仮定する
  - ✓ ひずみ：公称ひずみを使う
  - ✓ ひずみ：微小変形のひずみテンソル（Infinitesimally small strain tensor）を使う
- 弾塑性変形
  - ✓ 弾性と塑性ひずみの和分解が成立　(Additive decomposition)



応力：　$\sigma = \frac{P}{A_o}$

コーシー応力テンソル（Cauchy Stress）Tensor：$\boldsymbol{\sigma}$

ひずみ：公称ひずみ　$\varepsilon = \frac{l - l_o}{l_o}$　だけを使う

微小変形のひずみテンソル：$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$

弾性ひずみと塑性ひずみの和分解：　$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$

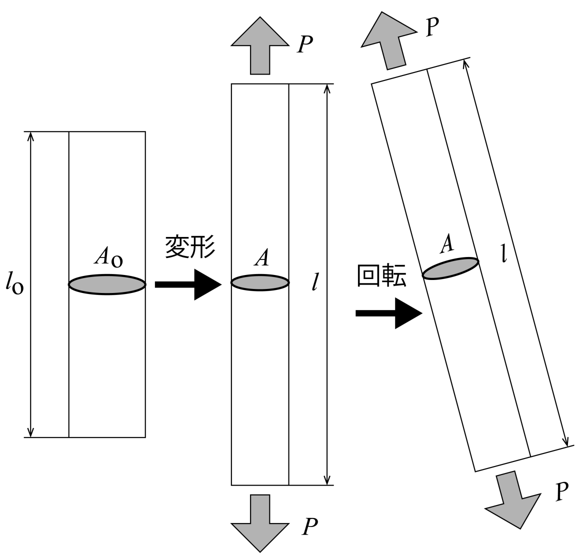
弾性ひずみテンソルと塑性ひずみテンソルの和分解：

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p$$

弾塑性問題の有限変形問題への拡張(2)

有限変形問題の枠組み

- 変形前と変形後の物体形状の違いを考慮する
  - ✓ 応力：公称応力（Nominal Stress)、真応力（True Stress）を区別する
  - ✓ 変形後の物体形状に基づき定義されたコーシー応力テンソル（Cauchy Stress Tensor）の他に、変形前の物体形状で定義された第一パイオラキルヒホッフ応力テンソル（1st Piola-Kirchhoff Stress Tensor）や第二パイオラキルヒホッフ応テンソル力（2nd Piola-Kirchhoff Stress Tensor ）を使う。
  - ✓ 物体の回転も考慮する必要あり
- 変形は小さいと仮定しない
  - ✓ ひずみ：公称ひずみの他、対数ひずみを使う
  - ✓ ひずみ：微小変形のひずみテンソル（Infinitesimally small strain tensor）は定義できないので、Green-Lagrangeひずみテンソルなどを
- 弾塑性変形
  - ✓ 弾性と塑性ひずみの和分解が成立しない。乗算分解を使う（Multiplicative decomposition)



応力：　$\sigma = \frac{P}{A}$　（真応力）、$\sigma_n = \frac{P}{A_o}$　（公称応力）

コーシー応力テンソル：$\boldsymbol{\sigma}$

第一、第二パイオラーキルヒホッフ応力：$\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{S}$

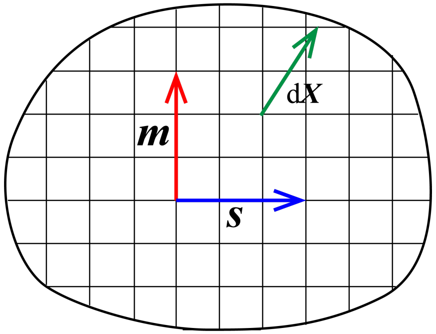
ひずみ：公称ひずみ　$\varepsilon_n = \frac{l-l_o}{l_o}$、　対数ひずみ $\varepsilon = ln\frac{l}{l_o}$

Green—Lagrange ひずみテンソル：$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)$

弾性変形の変形こう配テンソルと塑性変形の変形こう配テンソルの乗算分解：$F_{ij} = F_{ik}^{e}F_{kj}^{p}$

弾塑性問題の有限変形問題への拡張(3)

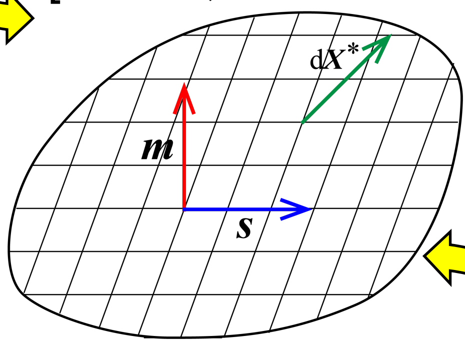
結晶塑性を例にして考える



変形前：

- すべり面の単位法線ベクトル とすべり方向（Unit Normal Vector on the slip plane and unit vector along the slip direction）: $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{s}$
- 基準配置の微小線素ベクトル (initial infinitesimal line vector): $d\boldsymbol{X}$

塑性変形（Plastic deformation）
[不可逆, Irreversible]



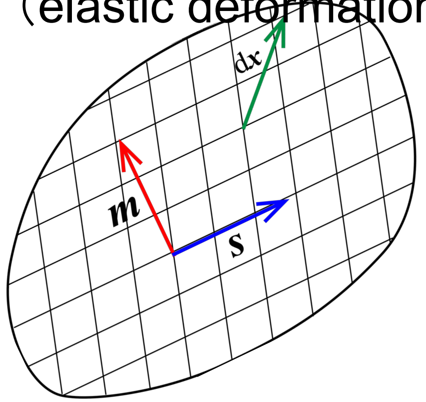
結晶のすべり変形

- $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{s}$ ：不変　(no change)
- すべり変形によるせん断（ひずみ）：γ^p
- 微小線素ベクトル (infinitesimal line vector): $d\boldsymbol{X}^*$

$$d\boldsymbol{X}^* = (\boldsymbol{I} + \gamma^p \boldsymbol{s} \otimes \boldsymbol{m}) \cdot d\boldsymbol{X} = \boldsymbol{F}^p \cdot d\boldsymbol{X}$$

[可逆, Reversible]

弾性変形
（elastic deformation）



弾性変形と回転

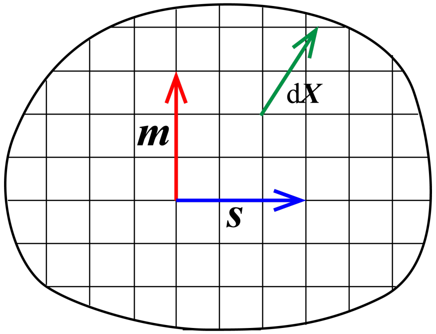
- 微小線素ベクトル (infinitesimal line vector): $d\boldsymbol{x}$

$$d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}^e \cdot d\boldsymbol{X}^* = (\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{U}^e) \cdot d\boldsymbol{X}^* = (\boldsymbol{V}^e \cdot \boldsymbol{R}) \cdot d\boldsymbol{X}^*$$

極分解定理： $\boldsymbol{R}$ （回転, Rotation）、$\boldsymbol{U}^e$ と $\boldsymbol{V}^e$ は弾性の右ストレッチ（Right stretch）と左ストレッチ（Left Stretch）テンソル（tensor）

弾塑性問題の有限変形問題への拡張(4)

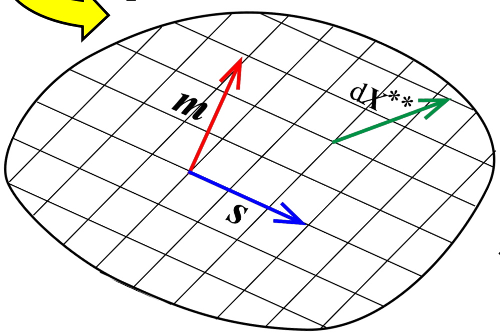
結晶塑性を例にして考える



変形前：

- □ すべり面の単位法線ベクトル とすべり方向（Unit Normal Vector on the slip plane and unit vector along the slip direction）: $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{s}$
- □ 基準配置の微小線素ベクトル (initial infinitesimal line vector): $d\boldsymbol{X}$

塑性変形（Plastic deformation）
[不可逆, Irreversible]



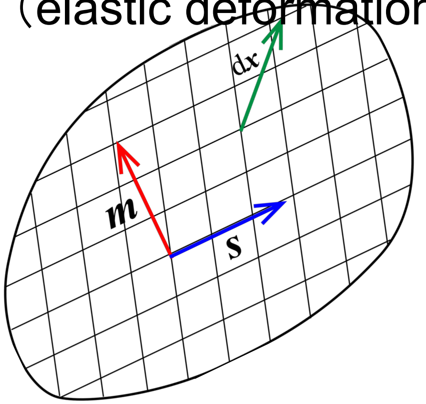
結晶のすべり変形と回転

- □ $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{s}$: 回転 (with a rotation)
- □ すべり変形によるせん断（ひずみ）: γ^p
- □ 微小線素ベクトル (infinitesimal line vector): $d\boldsymbol{X}^*$

$$d\boldsymbol{X}^{**} = \boldsymbol{R}^p \cdot (\boldsymbol{I} + \gamma^p \boldsymbol{s} \otimes \boldsymbol{m}) \cdot d\boldsymbol{X} = \boldsymbol{F}^{p*} \cdot d\boldsymbol{X}$$

[可逆, Reversible]

弾性変形
（elastic deformation）



弾性変形と回転

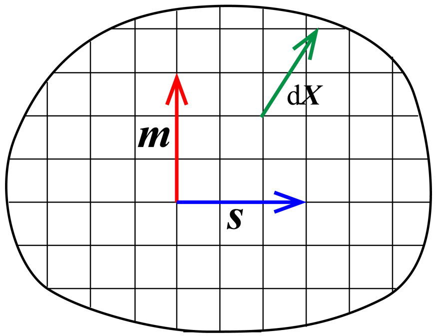
- □ 微小線素ベクトル (infinitesimal line vector): $d\boldsymbol{x}$

$$d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}^{e*} \cdot d\boldsymbol{X}^{**} = (\boldsymbol{R}^* \cdot \boldsymbol{U}^{e*}) \cdot d\boldsymbol{X}^{**} = (\boldsymbol{V}^e \cdot \boldsymbol{R}^*) \cdot d\boldsymbol{X}^{**}$$

極分解定理: $\boldsymbol{R}$ （回転, Rotation）、$\boldsymbol{U}^{e*}$ と $\boldsymbol{V}^e$ は弾性の右ストレッチ（Right stretch）と左ストレッチ（Left Stretch）テンソル（tensor）

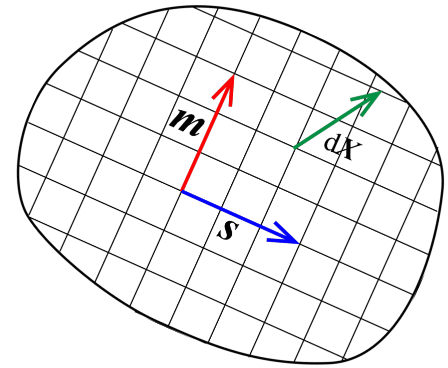
弾塑性問題の有限変形問題への拡張(5)

結晶塑性を例にして考える

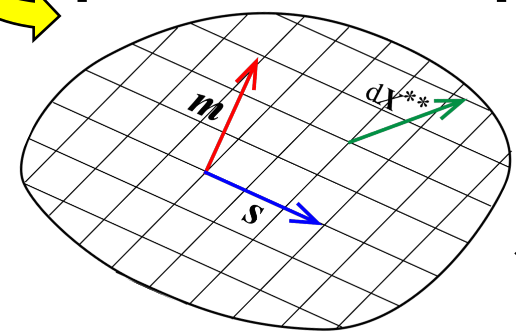


回転($\boldsymbol{R}^*$)

$$\boldsymbol{m}^* = \boldsymbol{R}^* \cdot \boldsymbol{m}$$
$$\boldsymbol{s}^* = \boldsymbol{R}^* \cdot \boldsymbol{s}$$
$$d\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{R}^* \cdot d\boldsymbol{x}$$

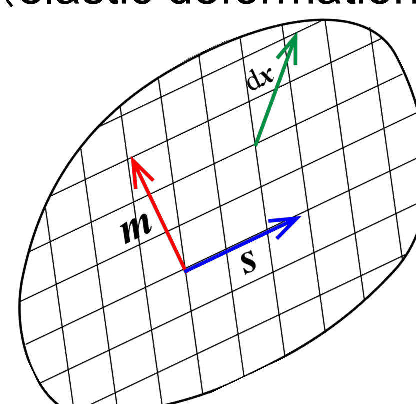


塑性変形(Plastic deformation)
[不可逆, Irreversible]



[可逆, Reversible]

弾性変形
(elastic deformation)



結晶のすべり変形

- $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{s}$: 回転 (with a rotation)
- すべり変形によるせん断(ひずみ) : γ^p
- 微小線素ベクトル (infinitesimal line vector): $d\boldsymbol{X}^{**}$

$$d\boldsymbol{X}^{**} = (\boldsymbol{I} + \gamma^p \boldsymbol{s}^* \otimes \boldsymbol{m}^*) \cdot d\boldsymbol{X}^* = \boldsymbol{F}^{p*} \cdot d\boldsymbol{X}^*$$

弾性変形と回転

- 微小線素ベクトル (infinitesimal line vector): $d\boldsymbol{x}$

$$d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}^{e*} \cdot d\boldsymbol{X}^{**} = (\boldsymbol{R}^* \cdot \boldsymbol{U}^{e*}) \cdot d\boldsymbol{X}^{**} = (\boldsymbol{V}^{e} \cdot \boldsymbol{R}^*) \cdot d\boldsymbol{X}^{**}$$

極分解定理: $\boldsymbol{R}$ (回転, Rotation)、$\boldsymbol{U}^{e*}$ と $\boldsymbol{V}^{e}$ は弾性の右ストレッチ(Right stretch)と左ストレッチ(Left Stretch)テンソル(tensor)

弾塑性問題の有限変形問題への拡張(6)

結晶塑性を例にして考える

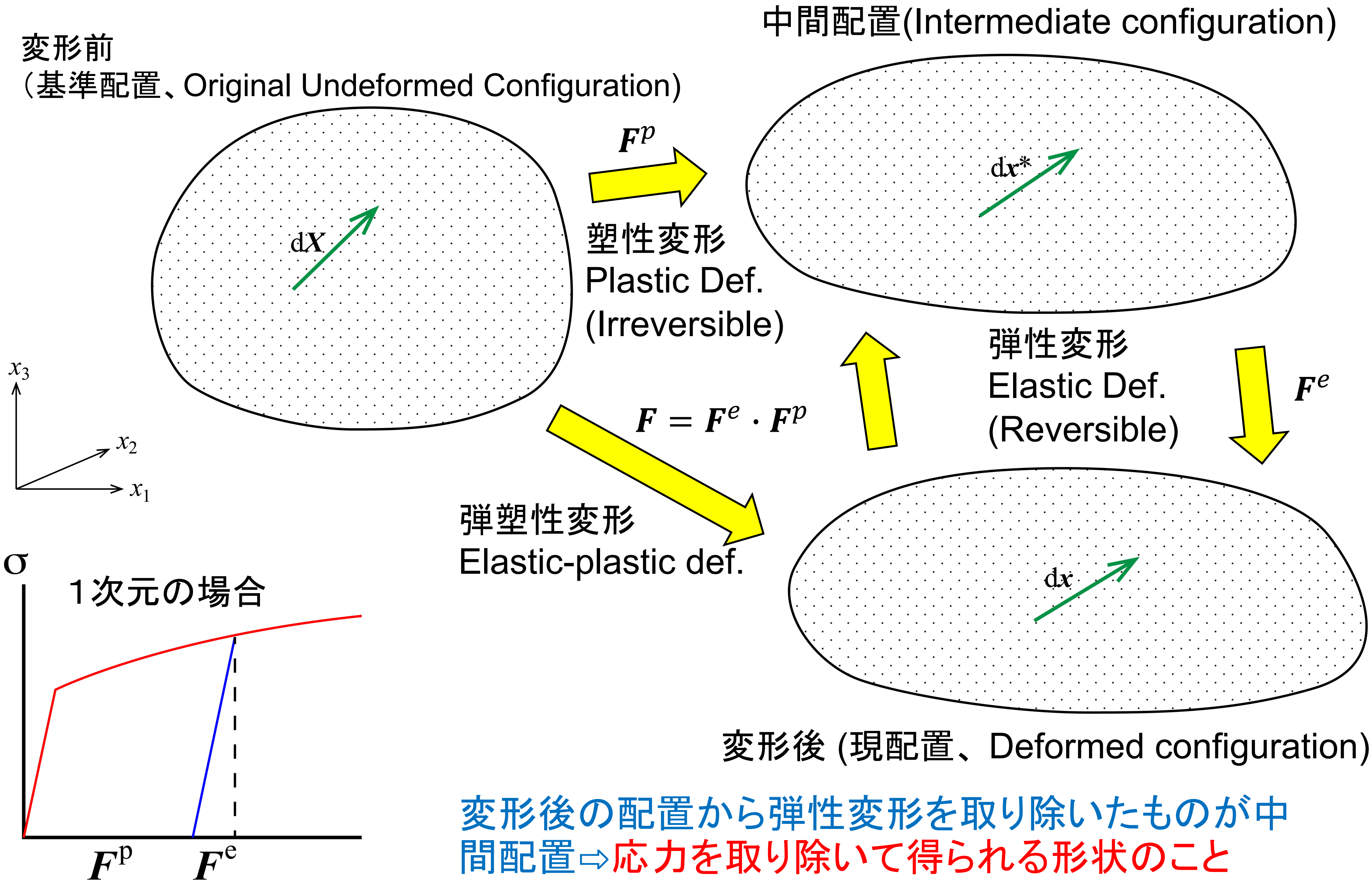
結果：

- 回転の表現には任意性がある
- 微小線素ベクトル（Infinitesimal line element vector)の写像（mapping）から、塑性変形と弾性変形への乗算分解をすることができる
- 有限変形問題の弾塑性分解は乗算分解が適切

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^e \cdot \boldsymbol{F}^p$$

弾塑性問題の有限変形問題への拡張(7)

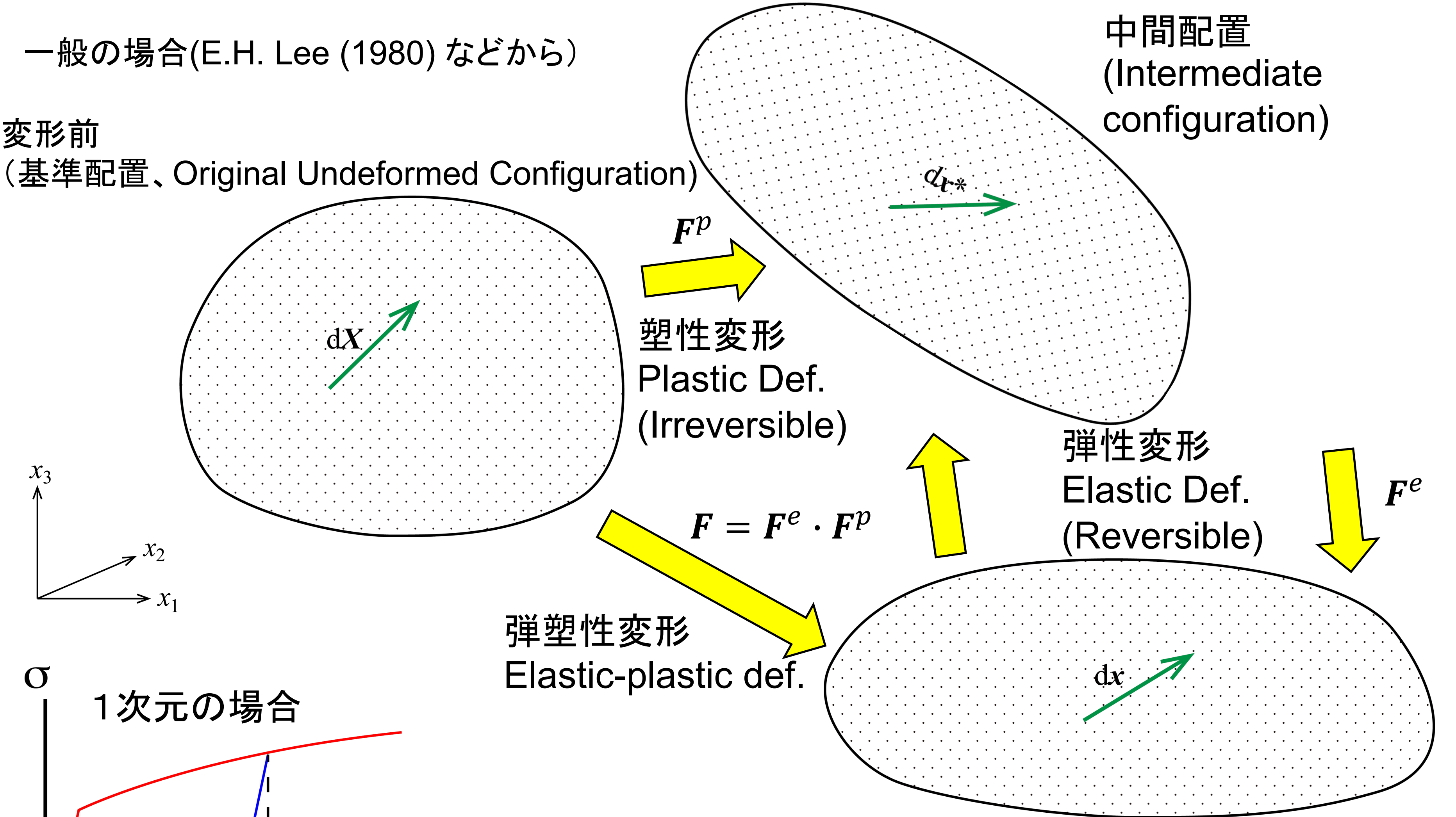
一般の場合(E.H. Lee (1980) などから）

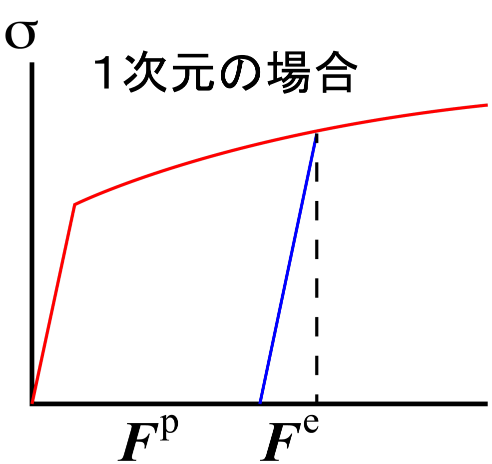


変形後の配置から弾性変形を取り除いたものが中間配置⇨応力を取り除いて得られる形状のこと

弾塑性問題の有限変形問題への拡張(8)

一般の場合(E.H. Lee (1980) などから）



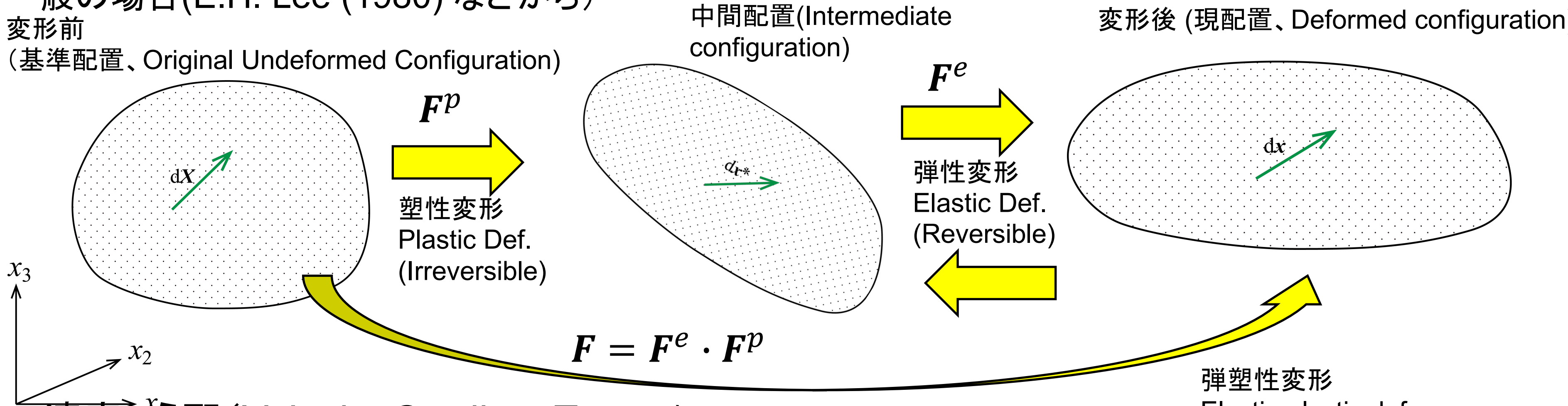


変形後の配置から弾性変形を取り除いたものが中間配置⇨応力を取り除いて得られる形状のこと

回転により中間配置に任意性があることに注意！

弾塑性問題の有限変形問題への拡張(9)

一般の場合(E.H. Lee (1980) などから)



速度こう配(Velocity Gradient Tensor)

$$L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_i}{\partial X_k}\frac{\partial X_k}{\partial x_j} = \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial X_k}\frac{\partial X_k}{\partial x_j} = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial X_k}\frac{\partial X_k}{\partial x_j} = \dot{F}_{ij}F_{kj}^{-1}$$

注意:

- 変形前のある点Pの座標: $\boldsymbol{X}, X_i$,　変形後は: $\boldsymbol{x}, x_i$, 変位: $\boldsymbol{u},\ u_i$
  $(\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{u},\ x_i = X_i + u_i)$

- 現配置での点Pの速度: $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{u}} = \dot{\boldsymbol{x}},\ v_i = \dot{u}_i = \dot{x}_i$

- 変形こう配テンソル(Deformation gradient tensor): $\boldsymbol{F} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{X}},\ F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$

- 速度こう配テンソル (Velocity gradient tensor):

$$\boldsymbol{L} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x}} = \dot{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{F}^{-1},\ L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_i}{\partial X_k}\frac{\partial X_k}{\partial x_j} = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial X_k}\frac{\partial X_k}{\partial x_j} = \dot{F}_{ij}F_{kj}^{-1}$$

弾塑性問題の有限変形問題への拡張(10)

一般の場合(E.H. Lee (1980) などから）

- 速度こう配テンソル (Velocity gradient tensor):

$$\boldsymbol{L} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x}} = \dot{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{F}^{-1},\ L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_i}{\partial X_k}\frac{\partial X_k}{\partial x_j} = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial X_k}\frac{\partial X_k}{\partial x_j} = \dot{F}_{ij} F_{kj}^{-1}$$

- 乗算分解による弾塑性分解を当てはめる (Apply the multiplicative elastic-plastic decomposition):

$$\boldsymbol{L} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x}} = \dot{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{F}^{-1} = (\boldsymbol{F}^e \dot{\cdot} \boldsymbol{F}^p) \cdot (\boldsymbol{F}^e \cdot \boldsymbol{F}^p)^{-1} = \left(\dot{\boldsymbol{F}}^e \cdot \boldsymbol{F}^p + \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{e}} \cdot \dot{\boldsymbol{F}}^p\right) \cdot \{(\boldsymbol{F}^p)^{-1} \cdot (\boldsymbol{F}^e)^{-1}\}$$

$$= \dot{\boldsymbol{F}}^e \cdot \boldsymbol{F}^p \cdot (\boldsymbol{F}^p)^{-1} \cdot (\boldsymbol{F}^e)^{-1} + \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{e}} \cdot \dot{\boldsymbol{F}}^p \cdot (\boldsymbol{F}^p)^{-1} \cdot (\boldsymbol{F}^e)^{-1}$$

$$= \dot{\boldsymbol{F}}^e \cdot (\boldsymbol{F}^e)^{-1} + \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{e}} \cdot \dot{\boldsymbol{F}}^p \cdot (\boldsymbol{F}^p)^{-1} \cdot (\boldsymbol{F}^e)^{-1} = \boldsymbol{L}^e + \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{e}} \cdot \boldsymbol{L}^p \cdot (\boldsymbol{F}^e)^{-1}$$

- ストレッチングテンソルとスピンテンソル（Stretching and spin tensor）

$$\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}^T) = \frac{1}{2}\{\boldsymbol{L}^e + \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{e}} \cdot \boldsymbol{L}^p \cdot (\boldsymbol{F}^e)^{-1} + (\boldsymbol{L}^e + \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{e}} \cdot \boldsymbol{L}^p \cdot (\boldsymbol{F}^e)^{-1})^T\}$$

$$= \frac{1}{2}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}^T) = \frac{1}{2}\{\boldsymbol{L}^e + (\boldsymbol{L}^e)^T\} + \frac{1}{2}\{\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{e}} \cdot \boldsymbol{L}^p \cdot (\boldsymbol{F}^e)^{-1} + (\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{e}} \cdot \boldsymbol{L}^p \cdot (\boldsymbol{F}^e)^{-1})^T\}$$

$$= \frac{1}{2}\{\boldsymbol{L}^e + (\boldsymbol{L}^e)^T\} + \frac{1}{2}\{\boldsymbol{F}^e \cdot \boldsymbol{L}^p \cdot (\boldsymbol{F}^e)^{-1} + (\boldsymbol{F}^e)^{-\boldsymbol{T}} \cdot (\boldsymbol{L}^p)^T \cdot (\boldsymbol{F}^e)^T\}$$

$$= \boldsymbol{D}^e + \boldsymbol{D}^p (???\ \text{Is this correct?})$$

弾塑性問題の有限変形問題への拡張(11)

一般の場合(E.H. Lee (1980) などから)

■ 速度こう配テンソル (Velocity gradient tensor):

$$\boldsymbol{L}=\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x}}=\dot{\boldsymbol{F}}\cdot\boldsymbol{F}^{-1},\ L_{ij}=\frac{\partial v_i}{\partial x_j}=\frac{\partial v_i}{\partial X_k}\frac{\partial X_k}{\partial x_j}=\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial X_k}\frac{\partial X_k}{\partial x_j}=\dot{F}_{ij}F_{kj}^{-1}$$

■ 乗算分解による弾塑性分解を当てはめる (Apply the multiplicative elastic-plastic decomposition):

$$\boldsymbol{L}=\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x}}=\dot{\boldsymbol{F}}\cdot\boldsymbol{F}^{-1}=(\boldsymbol{F}^{e}\dot{\cdot}\boldsymbol{F}^{p})\cdot(\boldsymbol{F}^{e}\cdot\boldsymbol{F}^{p})^{-1}=\left(\dot{\boldsymbol{F}}^{e}\cdot\boldsymbol{F}^{p}+\boldsymbol{F}^{e}\cdot\dot{\boldsymbol{F}}^{p}\right)\cdot\{(\boldsymbol{F}^{p})^{-1}\cdot(\boldsymbol{F}^{e})^{-1}\}$$
$$=\dot{\boldsymbol{F}}^{e}\cdot\boldsymbol{F}^{p}\cdot(\boldsymbol{F}^{p})^{-1}\cdot(\boldsymbol{F}^{e})^{-1}+\boldsymbol{F}^{e}\cdot\dot{\boldsymbol{F}}^{p}\cdot(\boldsymbol{F}^{p})^{-1}\cdot(\boldsymbol{F}^{e})^{-1}$$
$$=\dot{\boldsymbol{F}}^{e}\cdot(\boldsymbol{F}^{e})^{-1}+\boldsymbol{F}^{e}\cdot\dot{\boldsymbol{F}}^{p}\cdot(\boldsymbol{F}^{p})^{-1}\cdot(\boldsymbol{F}^{e})^{-1}=\boldsymbol{L}^{e}+\boldsymbol{F}^{e}\cdot\boldsymbol{L}^{p}\cdot(\boldsymbol{F}^{e})^{-1}$$

■ ストレッチングテンソルとスピンテンソル（Stretching and spin tensor）

$$\boldsymbol{W}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{L}^{T})=\frac{1}{2}\{\boldsymbol{L}^{e}+\boldsymbol{F}^{e}\cdot\boldsymbol{L}^{p}\cdot(\boldsymbol{F}^{e})^{-1}-(\boldsymbol{L}^{e}+\boldsymbol{F}^{e}\cdot\boldsymbol{L}^{p}\cdot(\boldsymbol{F}^{e})^{-1})^{T}\}$$
$$=\frac{1}{2}(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{L}^{T})=\frac{1}{2}\{\boldsymbol{L}^{e}-(\boldsymbol{L}^{e})^{T}\}+\frac{1}{2}\{\boldsymbol{F}^{e}\cdot\boldsymbol{L}^{p}\cdot(\boldsymbol{F}^{e})^{-1}-(\boldsymbol{F}^{e}\cdot\boldsymbol{L}^{p}\cdot(\boldsymbol{F}^{e})^{-1})^{T}\}$$
$$=\frac{1}{2}\{\boldsymbol{L}^{e}-(\boldsymbol{L}^{e})^{T}\}+\frac{1}{2}\{\boldsymbol{F}^{e}\cdot\boldsymbol{L}^{p}\cdot(\boldsymbol{F}^{e})^{-1}-(\boldsymbol{F}^{e})^{-\boldsymbol{T}}\cdot(\boldsymbol{L}^{p})^{T}\cdot(\boldsymbol{F}^{e})^{T}\}$$
$$=\boldsymbol{W}^{e}+\boldsymbol{W}^{p}(???\mathrm{Is\ \ this\ correct?})$$

弾塑性問題の有限変形問題への拡張(12)

一般の場合(E.H. Lee (1980) などから)

■ 速度こう配テンソル (Velocity gradient tensor):

$$\boldsymbol{L} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x}} = \dot{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{F}^{-1},\ L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_i}{\partial X_k}\frac{\partial X_k}{\partial x_j} = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial X_k}\frac{\partial X_k}{\partial x_j} = \dot{F}_{ij}F_{kj}^{-1}$$

■ 乗算分解による弾塑性分解を当てはめる (Apply the multiplicative elastic-plastic decomposition):

$$\boldsymbol{L} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x}} = \dot{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{F}^{-1} = \dot{\boldsymbol{F}}^e \cdot (\boldsymbol{F}^e)^{-1} + \boldsymbol{F}^e \cdot \dot{\boldsymbol{F}}^p \cdot (\boldsymbol{F}^p)^{-1} \cdot (\boldsymbol{F}^e)^{-1} = \boldsymbol{L}^e + \boldsymbol{F}^e \cdot \boldsymbol{L}^p \cdot (\boldsymbol{F}^e)^{-1}$$

■ ストレッチングテンソルとスピンテンソル（Stretching and spin tensor）

$$\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}\{\boldsymbol{L}^e + (\boldsymbol{L}^e)^T\} + \frac{1}{2}\{\boldsymbol{F}^e \cdot \boldsymbol{L}^p \cdot (\boldsymbol{F}^e)^{-1} + (\boldsymbol{F}^e)^{-\boldsymbol{T}} \cdot (\boldsymbol{L}^p)^T \cdot (\boldsymbol{F}^e)^T\}$$
$$= \boldsymbol{D}^e + \boldsymbol{D}^p (???\ \text{Is this correct?})$$

$$\boldsymbol{W} = \frac{1}{2}\{\boldsymbol{L}^e - (\boldsymbol{L}^e)^T\} + \frac{1}{2}\{\boldsymbol{F}^e \cdot \boldsymbol{L}^p \cdot (\boldsymbol{F}^e)^{-1} - (\boldsymbol{F}^e)^{-\boldsymbol{T}} \cdot (\boldsymbol{L}^p)^T \cdot (\boldsymbol{F}^e)^T\}$$
$$= \boldsymbol{W}^e + \boldsymbol{W}^p (???\ \text{Is this correct?})$$

■ $\boldsymbol{F}^e \approx \boldsymbol{I}$ と仮定できるとき、

$$\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}\{\boldsymbol{L}^e + (\boldsymbol{L}^e)^T\} + \frac{1}{2}\{\boldsymbol{F}^e \cdot \boldsymbol{L}^p \cdot (\boldsymbol{F}^e)^{-1} + (\boldsymbol{F}^e)^{-\boldsymbol{T}} \cdot (\boldsymbol{L}^p)^T \cdot (\boldsymbol{F}^e)^T\}$$
$$\approx \boldsymbol{D}^e + \boldsymbol{D}^p$$

$$\boldsymbol{W} = \frac{1}{2}\{\boldsymbol{L}^e - (\boldsymbol{L}^e)^T\} + \frac{1}{2}\{\boldsymbol{F}^e \cdot \boldsymbol{L}^p \cdot (\boldsymbol{F}^e)^{-1} - (\boldsymbol{F}^e)^{-\boldsymbol{T}} \cdot (\boldsymbol{L}^p)^T \cdot (\boldsymbol{F}^e)^T\}$$
$$\approx \boldsymbol{W}^e + \boldsymbol{W}^p$$

弾塑性問題の有限変形問題への拡張(13)

一般の場合(E.H. Lee (1980) などから)

■ $\boldsymbol{F}^e \approx \boldsymbol{I}$ と仮定できるとき、

$$\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}\{\boldsymbol{L}^e + (\boldsymbol{L}^e)^T\} + \frac{1}{2}\{\boldsymbol{F}^e \cdot \boldsymbol{L}^p \cdot (\boldsymbol{F}^e)^{-1} + (\boldsymbol{F}^e)^{-\boldsymbol{T}} \cdot (\boldsymbol{L}^p)^T \cdot (\boldsymbol{F}^e)^T\}$$
$$\approx \boldsymbol{D}^e + \boldsymbol{D}^p$$
$$\boldsymbol{W} = \frac{1}{2}\{\boldsymbol{L}^e - (\boldsymbol{L}^e)^T\} + \frac{1}{2}\{\boldsymbol{F}^e \cdot \boldsymbol{L}^p \cdot (\boldsymbol{F}^e)^{-1} - (\boldsymbol{F}^e)^{-\boldsymbol{T}} \cdot (\boldsymbol{L}^p)^T \cdot (\boldsymbol{F}^e)^T\}$$
$$\approx \boldsymbol{W}^e + \boldsymbol{W}^p$$

■ 応力の表現 （Stresses)

✓ 亜弾性（Hypoelastic constitutive law): 微小変形の速度形弾塑性構成方程式の拡張（Extension of rate form constitutive law)

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^* = \boldsymbol{E}: \boldsymbol{D}^e = \boldsymbol{C}^e: (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{D}^p)$$

応力速度 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^*$ の定義に注意！（後で述べる）, $\boldsymbol{E}$: 一般化されたHookの法則（4階テンソル）

✓ 超弾性（Hyperelastic constitutive law):

$$\boldsymbol{S} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{C}^e}$$

$\boldsymbol{S}$: 第二パイオラキルヒホッフ応力 (2nd Piola-Kirchhoff stress)

$\boldsymbol{C}^e$: 弾性変形の変形こう配 $\boldsymbol{F}^e$ で定義された右コーシーグリーン変形テンソル（Right Cauchy-Green Deformation tensor)

$$\boldsymbol{C}^e = (\boldsymbol{F}^e)^T \cdot \boldsymbol{F}^e$$

Kirchhoff stress: $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{F}^e \cdot \boldsymbol{S} \cdot (\boldsymbol{F}^e)^T$, $\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma}$ ($\boldsymbol{\sigma}$: Cauchy stress)

弾塑性問題の有限変形問題への拡張(14)

久田・野口(p. 55~)などから

■ 応力の表現 （Stresses)

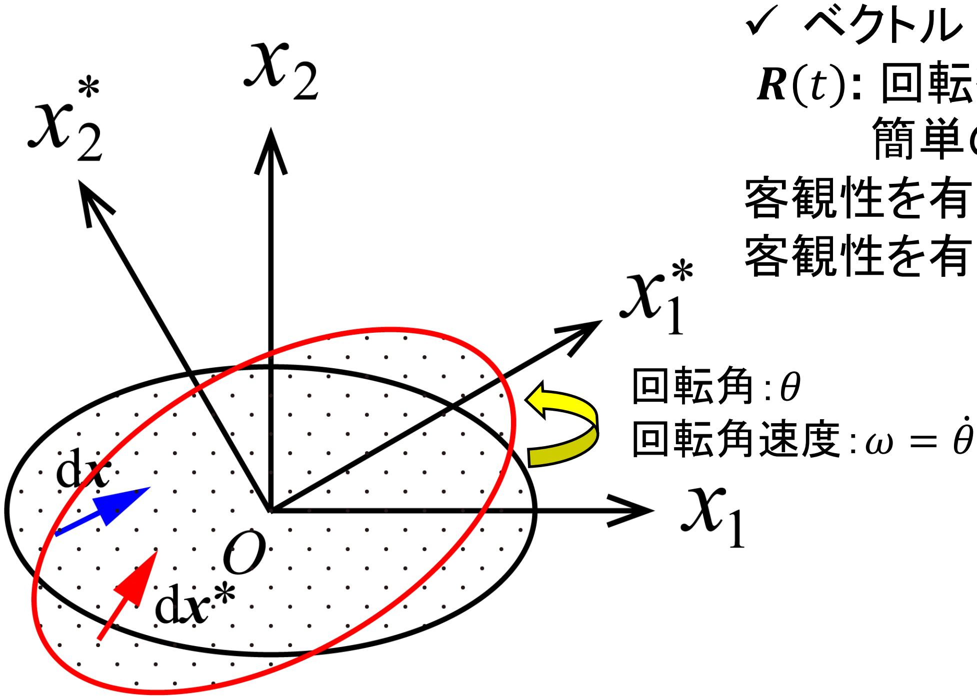
✓ 亜弾性(Hypoelastic constitutive law): 微小変形の速度形弾塑性構成方程式の拡張（Extension of rate form constitutive law)

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^* = \boldsymbol{E}:\boldsymbol{D}^e = \boldsymbol{E}:(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{D}^p)$$

応力速度 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^*$ の定義に注意！材料(物体は回転している)

■ 客観応力速度(Objective stress rate)

客観性(Objectivity)



座標系と物体が回転する

✓ ベクトル $d\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{R}(t)\cdot d\boldsymbol{x}$

$\boldsymbol{R}(t)$: 回転を表す2階テンソル

簡単のため $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{R}(t=0)$ とする

客観性を有するベクトル： $\boldsymbol{v}^* = \boldsymbol{R}(t)\cdot\boldsymbol{v}$

客観性を有する2階テンソル： $\boldsymbol{T}^* = \boldsymbol{R}(t)\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{R}^T(t)$

応力速度も2階のテンソルであると考えると、応力速度を $\dot{\boldsymbol{T}}$ とすると次式が満足される必要がある

$$\dot{\boldsymbol{T}}^* = \boldsymbol{R}(t)\cdot\dot{\boldsymbol{T}}\cdot\boldsymbol{R}^T(t)$$

弾塑性問題の有限変形問題への拡張(15)

久田・野口(p. 55~)などから

- ■ 応力の表現 （Stresses)
- ✓ 亜弾性（Hypoelastic constitutive law): 微小変形の速度形弾塑性構成方程式の拡張（Extension of rate form constitutive law)

  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{*} = \boldsymbol{E}:\boldsymbol{D}^{e} = \boldsymbol{C}^{e}:(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{D}^{p})$ 応力速度 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{*}$ の定義に注意！材料（物体は回転している）

- ■ 回転している座標系（物体）で表現した応力速度（Corotational Stress Rate)

$$\boldsymbol{T}^{*} = \boldsymbol{R}(t)\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{R}^{T}(t) \quad \text{より} \quad \boldsymbol{T} = \boldsymbol{R}^{T}(t)\cdot\boldsymbol{T}^{*}\cdot\boldsymbol{R}(t)$$

両辺時間微分をとる（左辺は回転していない座標系の下の微係数）

$$\dot{\boldsymbol{T}} = \dot{\boldsymbol{R}}^{T}(t)\cdot\boldsymbol{T}^{*}\cdot\boldsymbol{R}(t) + \boldsymbol{R}^{T}(t)\cdot\dot{\boldsymbol{T}}^{*}\cdot\boldsymbol{R}(t) + \boldsymbol{R}^{T}(t)\cdot\boldsymbol{T}^{*}\cdot\dot{\boldsymbol{R}}(t)$$

極分解定理 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{U}$ とストレッチング、スピンテンソル（$\boldsymbol{D},\boldsymbol{W}$）

はじめに、速度こう配： $\boldsymbol{L} = \dot{\boldsymbol{F}}\cdot\boldsymbol{F}^{-1}$ と ストレッチングテンソル

$$\boldsymbol{L} = (\boldsymbol{R}\dot{\cdot}\boldsymbol{U})\cdot(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{U})^{-1} = \left(\dot{\boldsymbol{R}}\cdot\boldsymbol{U}+\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{U}}\right)\cdot\boldsymbol{U}^{-1}\cdot\boldsymbol{R}^{-1} = \dot{\boldsymbol{R}}\cdot\boldsymbol{R}^{T}+\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{U}}\cdot\boldsymbol{U}^{-1}\cdot\boldsymbol{R}^{T}$$

$$\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{L}^{T}) = \frac{1}{2}\left\{\left(\dot{\boldsymbol{R}}\cdot\boldsymbol{R}^{T}+\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{U}}\cdot\boldsymbol{U}^{-1}\cdot\boldsymbol{R}^{T}\right)+\left(\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{R}}^{T}+\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{U}^{-T}\cdot\dot{\boldsymbol{U}}^{T}\cdot\boldsymbol{R}^{T}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\dot{\boldsymbol{R}}\cdot\boldsymbol{R}^{T}+\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{U}}\cdot\boldsymbol{U}^{-1}\cdot\boldsymbol{R}^{T}\right)+\left(\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{R}}^{T}+\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{U}^{-1}\cdot\dot{\boldsymbol{U}}\cdot\boldsymbol{R}^{T}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\dot{\boldsymbol{R}}\cdot\boldsymbol{R}^{T}+\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{R}}^{T}\right)+\boldsymbol{R}\cdot\left(\dot{\boldsymbol{U}}\cdot\boldsymbol{U}^{-1}+\boldsymbol{U}^{-1}\cdot\dot{\boldsymbol{U}}\right)\cdot\boldsymbol{R}^{T}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{(\boldsymbol{R}\dot{\cdot}\boldsymbol{R}^{T})+\boldsymbol{R}\cdot\left(\dot{\boldsymbol{U}}\cdot\boldsymbol{U}^{-1}+\boldsymbol{U}^{-1}\cdot\dot{\boldsymbol{U}}\right)\cdot\boldsymbol{R}^{T}\right\} = \frac{1}{2}\boldsymbol{R}\cdot\left(\dot{\boldsymbol{U}}\cdot\boldsymbol{U}^{-1}+\boldsymbol{U}^{-1}\cdot\dot{\boldsymbol{U}}\right)\cdot\boldsymbol{R}^{T}$$

弾塑性問題の有限変形問題への拡張(16)

久田・野口(p. 55~)などから

■ 回転している座標系(物体)で表現した応力速度(Corotational Stress Rate)

$$\boldsymbol{T}^* = \boldsymbol{R}(t)\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{R}^T(t) \quad \text{より} \quad \boldsymbol{T} = \boldsymbol{R}^T(t)\cdot\boldsymbol{T}^*\cdot\boldsymbol{R}(t)$$

両辺時間微分をとる(左辺は回転していない座標系の下の微係数)

$$\dot{\boldsymbol{T}} = \dot{\boldsymbol{R}}^T(t)\cdot\boldsymbol{T}^*\cdot\boldsymbol{R}(t) + \boldsymbol{R}^T(t)\cdot\dot{\boldsymbol{T}}^*\cdot\boldsymbol{R}(t) + \boldsymbol{R}^T(t)\cdot\boldsymbol{T}^*\cdot\dot{\boldsymbol{R}}(t)$$

極分解定理 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{U}$ とストレッチング、スピンテンソル($\boldsymbol{D},\boldsymbol{W}$)

次に、速度こう配: $\boldsymbol{L} = \dot{\boldsymbol{F}}\cdot\boldsymbol{F}^{-1}$ とスピンテンソル

$$\boldsymbol{L} = (\boldsymbol{R}\dot{\cdot}\boldsymbol{U})\cdot(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{U})^{-1} = \left(\dot{\boldsymbol{R}}\cdot\boldsymbol{U} + \boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{U}}\right)\cdot\boldsymbol{U}^{-1}\cdot\boldsymbol{R}^{-1} = \dot{\boldsymbol{R}}\cdot\boldsymbol{R}^T + \boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{U}}\cdot\boldsymbol{U}^{-1}\cdot\boldsymbol{R}^T$$

$$\boldsymbol{W} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{L}^T) = \frac{1}{2}\left\{\left(\dot{\boldsymbol{R}}\cdot\boldsymbol{R}^T + \boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{U}}\cdot\boldsymbol{U}^{-1}\cdot\boldsymbol{R}^T\right) - \left(\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{R}}^T + \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{U}^{-T}\cdot\dot{\boldsymbol{U}}^T\cdot\boldsymbol{R}^T\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\dot{\boldsymbol{R}}\cdot\boldsymbol{R}^T + \boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{U}}\cdot\boldsymbol{U}^{-1}\cdot\boldsymbol{R}^T\right) - \left(\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{R}}^T + \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{U}^{-1}\cdot\dot{\boldsymbol{U}}\cdot\boldsymbol{R}^T\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\dot{\boldsymbol{R}}\cdot\boldsymbol{R}^T - \boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{R}}^T\right) + \boldsymbol{R}\cdot\left(\dot{\boldsymbol{U}}\cdot\boldsymbol{U}^{-1} - \boldsymbol{U}^{-1}\cdot\dot{\boldsymbol{U}}\right)\cdot\boldsymbol{R}^T\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{2\dot{\boldsymbol{R}}\cdot\boldsymbol{R}^T + \boldsymbol{R}\cdot\left(\dot{\boldsymbol{U}}\cdot\boldsymbol{U}^{-1} - \boldsymbol{U}^{-1}\cdot\dot{\boldsymbol{U}}\right)\cdot\boldsymbol{R}^T\right\}$$

$$= \dot{\boldsymbol{R}}\cdot\boldsymbol{R}^T + \frac{1}{2}\boldsymbol{R}\cdot\left(\dot{\boldsymbol{U}}\cdot\boldsymbol{U}^{-1} - \boldsymbol{U}^{-1}\cdot\dot{\boldsymbol{U}}\right)\cdot\boldsymbol{R}^T$$

$$\because\ \boldsymbol{0} = \dot{\boldsymbol{I}} = (\boldsymbol{R}\dot{\cdot}\boldsymbol{R}^T) = \dot{\boldsymbol{R}}\cdot\boldsymbol{R}^T + \boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{R}}^T$$

よって、$\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{R}}^T = -\dot{\boldsymbol{R}}\cdot\boldsymbol{R}^T$

弾塑性問題の有限変形問題への拡張(17)

久田・野口(p. 55~)などから

- ■ 応力の表現 （Stresses)
- ✓ 亜弾性（Hypoelastic constitutive law): 微小変形の速度形弾塑性構成方程式の拡張 （Extension of rate form constitutive law)

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^* = \boldsymbol{E}:\boldsymbol{D}^e = \boldsymbol{E}:(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{D}^p)$$

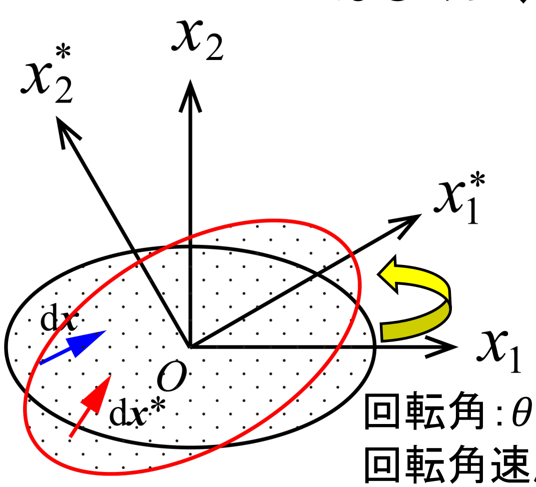
応力速度 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^*$ の定義に注意！材料（物体は回転している）

簡単のため $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{R}(t=0)$ とする

はじめに、速度こう配： $\boldsymbol{L} = \dot{\boldsymbol{F}}\cdot\boldsymbol{F}^{-1}$ と ストレッチングテンソル

$$\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{L}^T) = \dot{\boldsymbol{U}}$$

$$\boldsymbol{W} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{L}^T) = \dot{\boldsymbol{R}}$$



回転角：θ

回転角速度：$\omega = \dot{\theta}$

- ■ 回転している座標系（物体）で表現した応力速度 （Corotational Stress Rate)

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{R}^T(t)\cdot\boldsymbol{T}^*\cdot\boldsymbol{R}(t)$$

両辺時間微分をとる（左辺は回転していない座標系の下の微係数）

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{T}} &= \dot{\boldsymbol{R}}^T(t)\cdot\boldsymbol{T}^*\cdot\boldsymbol{R}(t) + \boldsymbol{R}^T(t)\cdot\dot{\boldsymbol{T}}^*\cdot\boldsymbol{R}(t) + \boldsymbol{R}^T(t)\cdot\boldsymbol{T}^*\cdot\dot{\boldsymbol{R}}(t)\\ &= \boldsymbol{W}^T\cdot\boldsymbol{T}^* + \dot{\boldsymbol{T}}^* + \boldsymbol{T}^*\cdot\boldsymbol{W} = -\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{T} + \dot{\boldsymbol{T}}^* + \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{W} =\\ &= \dot{\boldsymbol{T}}^* - \boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{T} + \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{W}\end{aligned}$$

(Jaumann応力速度）

弾塑性問題の有限変形問題への拡張(18)

久田・野口(p. 55~)などから

■ 応力の表現 (Stresses)

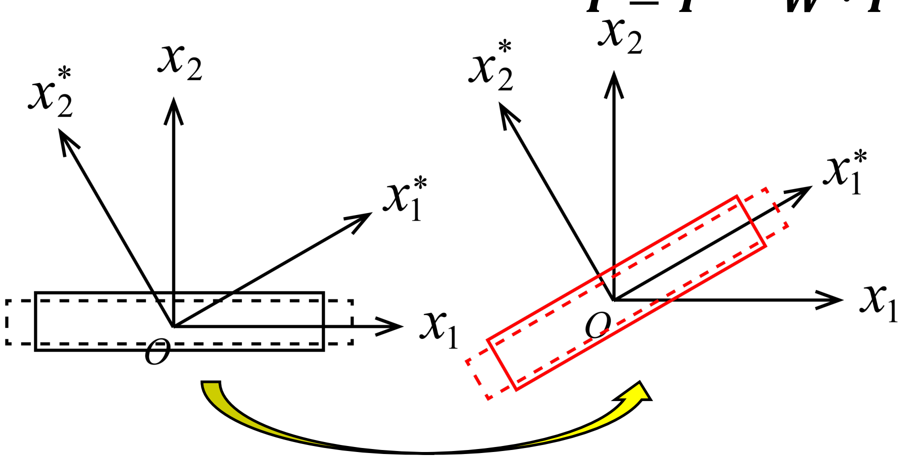
✓ 亜弾性(Hypoelastic constitutive law): 微小変形の速度形弾塑性構成方程式の拡張 (Extension of rate form constitutive law)

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^* = \boldsymbol{E}:\boldsymbol{D}^e = \boldsymbol{E}:(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{D}^p)$$

応力速度 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^*$ の定義に注意！材料(物体は回転している)

Jaumann応力速度(Corotational Stress Rateともいうことがある)の解釈

$$\dot{\boldsymbol{T}} = \dot{\boldsymbol{T}}^* - \boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{T} + \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{W}$$



物体と座標が回転 回転角 : θ

$\dot{\boldsymbol{T}}$: 回転なしの物体に対して書かれた応力速度

$\dot{\boldsymbol{T}}^*$: 回転している物体に対して書かれた応力速度

✓ 回転なし(左側の図)に対して応力速度を記述(亜弾性, Hyperelasticityを使用)

$$\dot{\boldsymbol{\tau}}^J = \boldsymbol{E}:\boldsymbol{D}^e = \boldsymbol{E}:(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{D}^p)$$

Kirchhoff 応力のJaumann応力速度に対して亜弾性構成方程式を適用する

✓ Kirchhoff 応力速度 $\dot{\boldsymbol{\tau}}$ に変換

$$\dot{\boldsymbol{\tau}} = \dot{\boldsymbol{\tau}}^J + \boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{W}$$

■ スピンの表現(塑性スピン)なども考慮する必要がある

弾塑性力学特論

非線形有限要素法解析を　実行（正しい各種設定を含む）・結果の理解・結果 の評価のために

In order for us to perform FEA correctly with setting FE model, various BCs, material data, etc. and evaluate/understand the results correctly, we must know:

□材料力学/Strength of materials
□弾性論/Elasticity
□三次元弾性論/Three-dimensional elasticity
□連続体力学/Continuum Mechanics
□弾性構成方程式/Elastic-plastic constitutive equations
□非線形連続体力学/Nonlinear Continuum mechanics

この講義の内容はまだまだ不十分です。超弾性理論、弾塑性理論、有限変形理論などさらに勉強してください。

さらに、構造設計をするのであれば/For design optimization (further usages of FEAs)
□最適化/Optimization
□熱力学・流体力学・振動学、etc. /Thermodynamics, Fluid dynamics, Vibration, etc.
□材料学/Material Science
□機械加工、加工に関する知識/Material processing, Manufacturing