

特集

数値計算法の新たな展開 —マルチフェーズ輸送現象の高精度予測手法—

重合メッシュ法を用いた構造解析手法*

中 住 昭 吾**



Structural Analysis Using Mesh Superposition Technique*

by NAKASUMI Shogo**

キーワード 有限要素法, CAE, メッシュ生成, メッシュ重ね合わせ, 反復計算

1. はじめに

現在の工学設計現場においては、計算機を用いた構造解析が日常化しており、シミュレーションまでのプロセスを全て計算機上で行う Computer Aided engineering (CAE) が広く定着している。また、そのための汎用コードが数多く開発され、設計現場で使用されている。こうして広く普及した CAE であるが、未だ解決されていない課題もあり、そのひとつがメッシュ生成技術の問題である。計算機能力向上の結果、解析に要する時間は大幅に短縮されたが、対して有限要素モデルの作成に要する時間はさほど短縮されておらず、メッシュ生成に費やされる人的コストは非常に大きい。

ところで、このメッシュ生成の問題との関連において、Fish らは有限要素同士を重ねることによって高精度の解を得る方法を提案した^{1, 2)}。アダプティブ s 法と名付けられたこの手法は、本来、複合材料積層板のアダプティブな高精度解析が目的であったが、モデリングのフレキシビリティに注目したメッシュ独立生成手法としての側面から、他の研究者にも注目されるところとなった³⁾。

この重合メッシュ法とは、全体モデルの挙動を表現する粗いグローバルメッシュに対して、そのローカルな領域の詳細挙動を表現し得る詳細なメッシュを重ね合わせて解析を行う手法である。両者のメッシュが互いの境界を意識せず独立に作成されること、変位を両モデルのその和として定義していることが大きな特徴である。またズームング法のような境界条件のあいまいさがなく、また、グローバルモデルとローカルモデルの相互の影響が定式化の中に反映されているため、精度の面においても優れた手法である。

ここでは、この重合メッシュ法について、著者の研究室で行われてきた研究成果を解析例を中心にして紹介する。

2. 理論及び定式化

まずこの手法の導出について説明する。領域 Ω に対して変位場 u^G が定義されているものとする。一方、ローカルな領域 Ω^L ($\Omega^L \subset \Omega$) においては別の変位場 u^L が定義されているとする (図 1 参照)。そこで領域 Ω^L 内では支配方程式を満足させる変位を (1) 式として定義する。

$$u = u^G + u^L \text{ in } \Omega^L \quad (1)$$

ただし、変位の連続条件を満足させるため、 Ω と Ω^L の境界 Γ^{GL} 上で次式の条件を満足することが必要である。

$$u^L = 0 \text{ on } \Gamma^{GL} \quad (2)$$

変位場 u^G , u^L はそれぞれ独立に離散化されるものとし、それらを仮想仕事式に代入して整理すると (3) 式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^G & \mathbf{K}^{GL} \\ \mathbf{K}^{GL^T} & \mathbf{K}^L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}^G \\ \mathbf{d}^L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}^G \\ \mathbf{f}^L \end{Bmatrix} \quad (3)$$

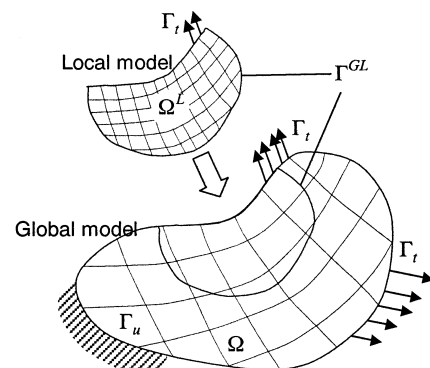


図 1 重合メッシュ法概念図

*原稿受付 平成18年 1月20日

** 東京大学 The University of Tokyo

ただし,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^G &= \int_{\Omega^G} \mathbf{B}^{G^T} \mathbf{D} \mathbf{B}^G d\Omega, & \mathbf{f}^G &= \int_{\Omega} \mathbf{N}^{G^T} \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_f} \mathbf{N}^{G^T} \mathbf{t} d\Gamma \\ \mathbf{K}^L &= \int_{\Omega^L} \mathbf{B}^{L^T} \mathbf{D} \mathbf{B}^L d\Omega, & \mathbf{f}^L &= \int_{\Omega_L} \mathbf{N}^{L^T} \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_f^L} \mathbf{N}^{L^T} \mathbf{t} d\Gamma \\ \mathbf{K}^{GL} &= \int_{\Omega^L} \mathbf{B}^{G^T} \mathbf{D} \mathbf{B}^L d\Omega \end{aligned} \quad (4)$$

である。これが重合メッシュ法の基礎方程式である。なお (3) 式の \mathbf{K}^G , \mathbf{K}^L はそれぞれグローバルメッシュ, ローカルメッシュ上で定義される通常の剛性マトリクスである。それに対して \mathbf{K}^{GL} は両モデル間の連成効果を表すマトリクスであり, このマトリクスの積分計算には注意が必要である。なぜならば, 要素内の任意の点のひずみ量を算出するために用いる自然座標値はその要素の節点座標情報 (節点座標値及び要素・節点コネクティビティ) に依存するからである。すなわち, 数値積分を行う際の積分点の座標は, 要素が違えば自然座標値が一般に異なる値となる。実際の数値計算では, Newton-Raphson 法等の反復計算を用いて数値的に求めることになる。以下では, 重合メッシュ法を用いた数値解析例を紹介する。

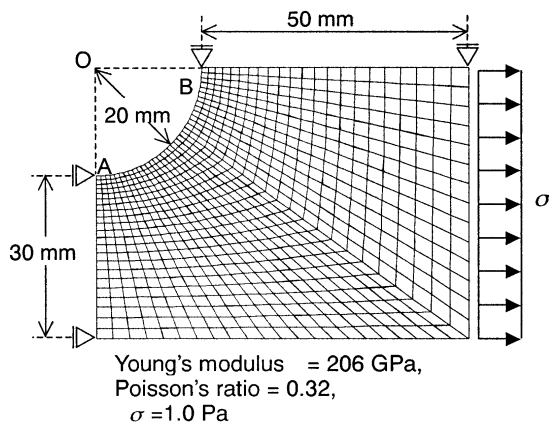


図2 円孔問題の参照メッシュ

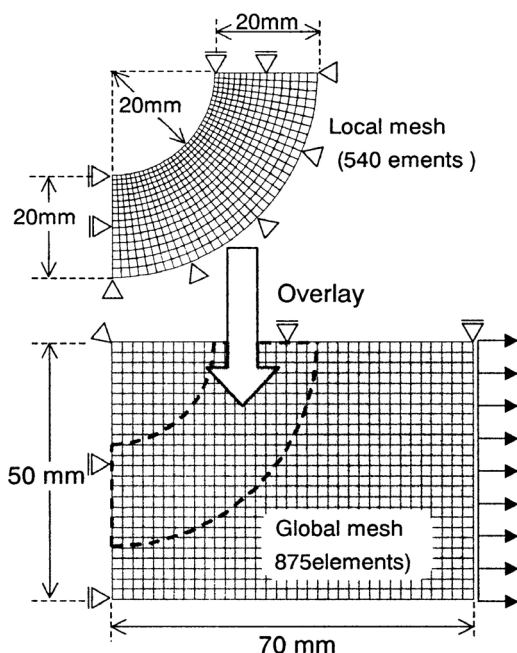


図3 円孔問題の重合メッシュ

3. グローバルモデルとローカルモデルの形状が異なる場合

重合メッシュ法をモデリングに利用してグローバルメッシュの一部の領域を解析対象から削除することが可能である⁴⁾。これは従来ローカルメッシュの変位に課していた (2) 式の条件をなくすことにより, その位置に不連続面 (自由表面) を形成して切り離せることを利用している。適用例として円孔問題を取り上げる。

円孔を有する長方形板に一樣引き張り荷重を加えたモデルを解析する。対称性より, 全体の 1/4 領域のみを解析することとする。また, 参照解の導出に用いる有限要素メッシュ, 及び重合メッシュ法による解析に用いたメッシュをそれぞれ図2, 図3に示す。グローバルメッシュは全て矩形形状に切っており, また, グローバルメッシュには円孔に相当する扇形領域にも要素が存在していること, そしてローカルメッシュの円孔に相当する境界には (2) 式で表される変位連続の条件が課されていない

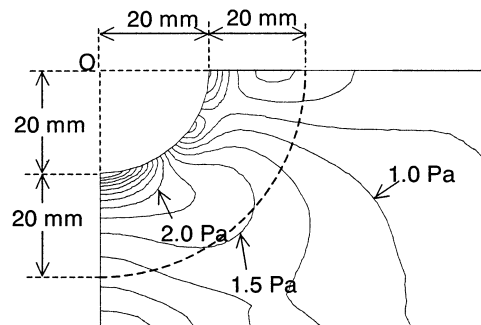


図4 von Mises 応力 (参照解, 線形解析)

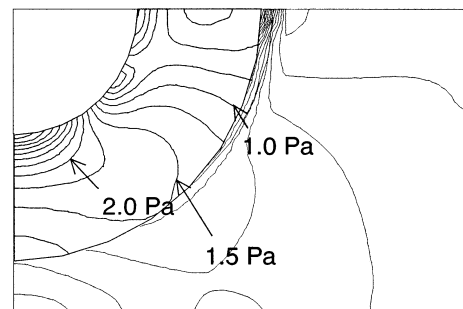


図5 von Mises 応力 (重合メッシュ解析, 線形解析)

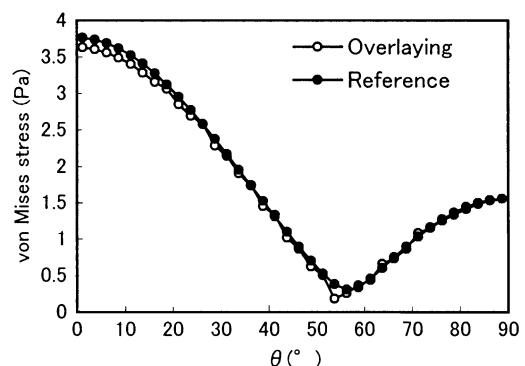


図6 円孔に沿った応力

ことに注意されたい。参照解及び重合メッシュ法で解析した結果の von Mises 応力をそれぞれ図 4, 図 5 に示す。また円孔に沿った応力分布を図 6 に示す。両者の分布はよく一致していることがわかる。

4. 弾塑性解析への拡張

また、重合メッシュ法では、グローバルモデル・ローカルモデル間で異なる材料定数を使用する解析を行った場合、ローカルモデルの材料定数のみでその部分の材料定数を評価したような解が得られる。詳細は文献⁵⁾を参照して欲しいが、このモデリングを行えば、幾何学的形状のみならず、材料定数の面からも、グローバル・ローカル両モデルを互いに意識することなく独立に有限要素分割することができ、モデリングの柔軟さがより一層向上するものと期待できる。さらにこれを弾塑性解析に応用すると、グローバルモデルは線形解析時のままで、ローカルモデルのみを弾塑性処理することが可能となる。

先ほどの例題において、荷重を 150 MPa に増加し、材料を完全弾塑性体と仮定して弾塑性解析を行った。降伏応力を 250 MPa とし、降伏開始後荷重増分を 500 ステップに分割して加え、その変位増分から応力を算出した。降伏後も (3) 式中の K^G は線形状態のままであることに注意されたい。参照解及び重合メッシュ法の結果をそれぞれ図 7 図 8 に示す。これよりローカルモデルのみで塑性変形の進展を追うことが可能であることを示せたと言える。

5. 反復計算アルゴリズムについて

重合メッシュ法はグローバルな解析自由度とローカルなそれをあわせた自由度に対する大きな剛性マトリクスを解く必要があるため、解くべき連立一次方程式の数が

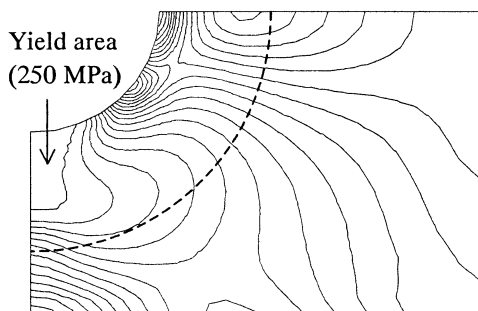


図 7 von Mises 応力 (参照解, 弾塑性解析)

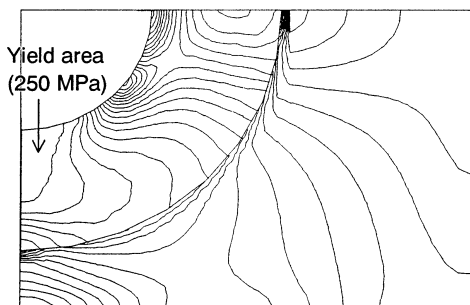


図 8 von Mises 応力 (重合メッシュ解析, 弾塑性解析)

非常に多くなる。ところが直接解法として通常良く用いられるスカイライン法に基づくソルバーでは、重合メッシュ法の定式化上、対角項から離れたところに非ゼロ成分が多く入ってしまうため、非常に非効率的な解法となってしまう。代わって反復解法を用いる場合、図 9 のようなアルゴリズムが考えられる。これは、ブロックガウスザイデル法と呼ばれる方法であるが、実際に重合メッシュ法による大規模な問題にこの手法を適用しようとするとき、収束が非常に遅く、数百回の反復を要する場合もある。

このブロックガウスザイデル法の収束を改善するため、共役勾配法の考え方をこのグローバル・ローカルの反復計算に用いることを考える。ここで共役勾配法のアルゴリズムを図 10 に示す。3 行目の M が前処理行列であり、元の行列を近似しながら、解きやすい行列であることが求められる。著者らは、汎用プログラムを組み込んだ形でグローバル、ローカルの反復として重合メッシュ法で解くのに適した前処理として、以下のような 3 種類の前処理マトリクスを考えた。

$$M^{GL} = \begin{bmatrix} K^G & 0 \\ 0 & K^L \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$M^G = \begin{bmatrix} K^G & 0 \\ 0 & \text{diag}(K^L) \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$M^L = \begin{bmatrix} \text{diag}(K^G) & 0 \\ 0 & K^L \end{bmatrix} \quad (7)$$

(5) 式の M^{GL} は K^G , K^L を組み込んだもので、その逆行列は

$$\begin{bmatrix} K^G & 0 \\ 0 & K^L \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} K^{G-1} & 0 \\ 0 & K^{L-1} \end{bmatrix} \quad (8)$$

となるため、ブロックガウスザイデル同様、グローバル、ローカルのメッシュに対して汎用プログラムでそれぞれ 1 度ずつ解くことに相当する。また、問題によってはグローバル、ローカルのそれぞれの問題サイズが異なり、1 回の反復にかかる時間を節約したい場合にはそれぞれの対角項のみを前処理として使った (6) 式や (7) 式が考えられる。また、全体行列の対角成分のみを使った場合 (従来から使われている対角スケーリングの前処理に相当) も考えられる。反復の収束の判定としては、グローバルな変位とローカルな変位の両方を用いることは好ましくない。なぜならグローバルな変位がローカルな変位に比べて大きいため、ローカルな変位が十分に収束する前に収束したと判断されてしまうからである。ここでは

$$\bar{u}_0^L = 0, \quad i = 0$$

repeat until converge

$$\bar{u}_{i+1}^G = (K^G)^{-1} (f^G - K^{GL} \bar{u}_i^L)$$

$$\bar{u}_{i+1}^L = (K^L)^{-1} (f^L - K^{LG} \bar{u}_{i+1}^G)$$

$$i = i + 1$$

end

図 9 ブロックガウス・ザイデル法アルゴリズム

```

 $k = 0; \{r\}_0 = \{f\} - [K]\{\bar{u}\}_0$ 
while  $\{r\}_k \neq \{0\}$ 
solve  $[M]\{z\}_k = \{r\}_k$ 
 $k = k + 1$ 
if  $k = 1$ 
 $\{d\}_1 = \{r\}_0$ 
else
 $\beta_k = \frac{\{r\}_{k-1}^T \{z\}_{k-1}}{\{r\}_{k-2}^T \{z\}_{k-2}}$ 
 $\{d\}_k = \{z\}_{k-1} + \beta_k \{d\}_{k-1}$ 
end
 $\alpha = \frac{\{r\}_k^T \{z\}_{k-1}}{\{d\}_k^T [K] \{d\}_k}$ 
 $\{\bar{u}\}_k = \{\bar{u}\}_{k-1} + \alpha_k \{d\}_k$ 
 $\{r\}_k = \{r\}_{k-1} - \alpha_k [K] \{d\}_k$ 
end

```

図10 前処理付き共役勾配法アルゴリズム

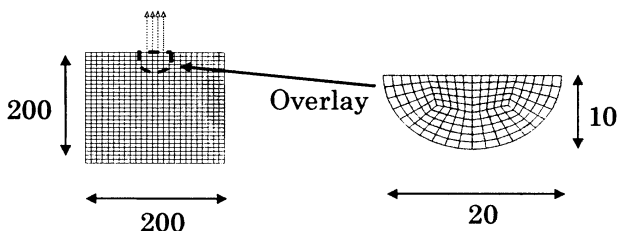


図11 反復計算例題

収束判定として変位の残差 $\{r\}$ のローカルメッシュ成分が十分に小さくなることとした。

6. 反復計算例題

ブロック Gauss ザイデル法, 前処理を用いない共役勾配法, 対角スケール前処理を用いた共役勾配法, (5) 式~(7) 式の前処理を用いた共役勾配法に対して, 図11に示すメッシュにて重合メッシュ解析を行った。結果の反復過程を図12に示す。縦軸の誤差としては, 直接法による解を正解と考え, 反復法の解との差の2ノルムを正解の2ノルムで割ったものを使った。ブロック Gauss ザイデル法では一様に誤差が小さくなっているのに対して, 共役勾配法では, 誤差の減少があるところで急激におき, ところによっては誤差が増加するという現象も見られる。しかし, (5) 式の前処理を使ったものが圧倒的に早く, 十数回の反復で誤差が十分に小さくなった。(6) 式の前処理を用いたものも比較的早い収束を示すが, これはグローバルな自由度がローカルな自由度に比べて多いことによる。

同様の例題をグローバルな自由度よりもローカルな自

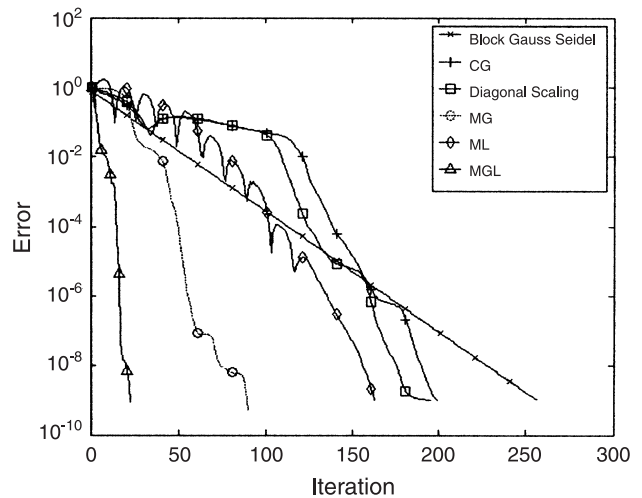


図12 各手法の収束状況

由度が多いケース, ほぼ同等なケース, より大規模な問題など, 様々な問題に適用したが, ほぼ同じ傾向が見られた。すなわち, (5) 式の前処理を用いたものが他のケースよりも数倍~数十倍早い収束回数を示し, トータルの計算時間も常に以前のものの半分以下であった。

7. まとめ及び今後の展望

以上, 重合メッシュ法に関してグローバルモデルとローカルモデルの形状が異なる場合, 及び, 両者の間で応力ひずみ関係が異なる場合の解析例を紹介した。また重合メッシュ法に対する連立一次方程式の効果的な解法について述べた。その他, 著者らはこの重合メッシュ法を, シェル要素とソリッド要素の重ね合わせ⁹⁾, 亀裂進展解析への応用, 疲労強度評価, 最適化, 有限被覆法と組み合わせた解析精度向上方法などに取り組んでいる。

参考文献

- 1) J. Fish, The s-version of the finite element, Computers & Structures Vol.43, No.3, 539-547 (1992).
- 2) J. Fish and S. Markolefas, Adaptive global-local refinement strategy based on the interior error estimates of the h-Method, Int. J. Numer. Meth. Engng., 37, 827-838 (1994)
- 3) 鈴木克幸, 大坪英臣, 関勝哉, 白石卓士郎「重合メッシュ法による船体構造のマルチスケール解析」日本計算工学講演会論文集 Vol.1, 155-160 (1999).
- 4) 中住昭吾, 鈴木克幸, 藤井大地, 大坪英臣, 重合メッシュ法による穴あき板の解析に関する一考察, 日本計算工学会論文集, 3 (2001), 145-150.
- 5) 中住昭吾, 鈴木克幸, 大坪英臣, 藤井大地, 「重合メッシュ法を用いた弾性・弾塑性混合解析」, 日本機械学会論文集 A 編, 第68巻 第668号 2002年4月, pp.603-610.
- 6) 中住昭吾, 鈴木克幸, 大坪英臣, 藤井大地, 「重合メッシュ法によるシェル・ソリッド混合解析」, 日本造船学会論文集第189号, 2001年6月, pp.219-224.