

IGA(Isogeometric Analysis)による 重合パッチ法(s-IGA)の基底関数の高次化に関する研究

東京理科大学 理工学部 機械工学科
岡田研究室 土山雄飛

年末報告 2021年12月28日

1

1

目次

1.研究背景・目的

5.今後の予定

2.原理

- ・ NURBS基底関数
- ・ 細分化・高次化手法
- ・ 重合パッチ法

6.卒業論文の目次案

3.数値解析例

4.まとめ

2

2

研究背景・目的

アイソジオメトリック解析(Isogeometric Analysis, IGA)

FEMの解析モデルはCADデータの近似であり、誤差の原因となる
IGAではCADと同じ幾何学表現(NURBS)を用いている
基底関数の連続性を自在に操作可能

- ✓ 形状誤差がない
- ✓ モデル生成の時間が短縮できる
- ✓ 基底関数の次数をあげて解析精度の向上が期待できる

重合パッチ法(S-version Finite Element Method, S-FEM)

グローバルパッチとローカルパッチを用いたマルチスケール解析手法
応力集中が予想される場所やき裂付近等で詳細な分割を施したパッチを用いて解析できる
パッチ間で境界やコントロールポイントが一致する必要がない

- ✓ 解析モデル生成が容易
- ✓ 柔軟なモデリングが可能

研究目的

重合パッチ法のグローバルパッチやローカルパッチの基底関数の次数を3次にした数値解析例を示し、
解析精度の検証を行う

3

3

NURBS基底関数(1/2)

Bスプライン

ノットベクトル Ξ

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\} \quad (i = 1, 2, \dots, n+p+1)$$

n : 基底関数の数(=コントロールポイントの数)

p : 多項式の次数

オープンノットベクトル($n = 6, p = 2$ の例)

$$\Xi = \{0, 0, 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1, 1\} \quad (\text{両端で } p+1 \text{ 回重複})$$

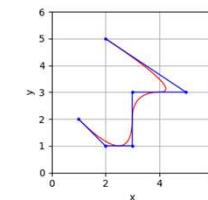
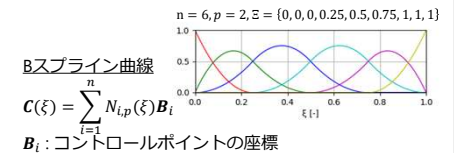
基底関数 $N_{i,p}(\xi)$

$p = 0$ のとき

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & (\text{if } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

$p = 1, 2, \dots$ のとき

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi)$$



4

4

NURBS基底関数(2/2)

NURBS(Non-Uniform Rational B-Spline,
非一様有理Bスプライン)

$$R_i^p(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi)w_i}{W(\xi)} = \frac{N_{i,p}(\xi)w_i}{\sum_{i=0}^{n-1} N_{i,p}(\xi)w_i}$$

w_i : 重み

NURBS曲線

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n R_i^p(\xi) B_i$$

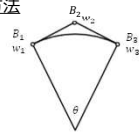
B_i : コントロールポイントの座標

円弧を表現する際の重みの設定方法

$$w_1 = w_3 = 1$$

$$w_2 = \cos \frac{\theta}{2}$$

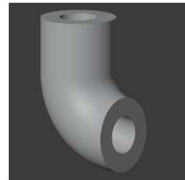
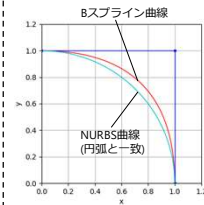
$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ のとき } w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

2パラメータ空間 (ξ, η) でのNURBS基底関数・曲線

$$R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)w_{i,j}}{\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)w_{i,j}}$$

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) B_{i,j}$$

p : ξ 方向の次数、 q : η 方向の次数
 $B_{i,j}$: コントロールポイントネット



形状を正確に表現できる

5

細分化手法

ノットインサージョン(Knot Insertion)

要素の細分化、オーダーエレベーションにも必要な操作

挿入するノットを決定した後
 コントロールポイントに対して以下の操作を行う

挿入後 $\Xi \rightarrow \bar{\Xi}$ (m 個挿入)

$$T_{ij}^0 = \begin{cases} 1 & \xi_i \in [\xi_j, \xi_{j+1}) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$T_{ij}^q = \frac{\xi_{i+q-1} - \xi_j}{\xi_{j+q-1} - \xi_j} T_{ij}^{q-1} + \frac{\xi_{j+q} - \xi_{i+q-1}}{\xi_{j+q} - \xi_{j+1}} T_{ij+1}^{q-1}$$

for $q = 1, 2, \dots, p-1$

 B_1 : 初めのコントロールポイントと重みのマトリクス

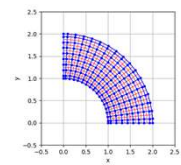
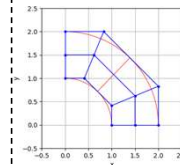
$$B_1 = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & w_1 \\ x_2 & y_2 & w_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & w_n \end{bmatrix} \rightarrow B_2 = \begin{bmatrix} x_1/w_1 & y_1/w_1 & w_1 \\ x_2/w_2 & y_2/w_2 & w_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n/w_n & y_n/w_n & w_n \end{bmatrix}$$

$$B_3 = T^p B_2$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} x_1' & y_1' & w_1' \\ x_2' & y_2' & w_2' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n+m}' & y_{n+m}' & w_{n+m}' \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow B_4 = \begin{bmatrix} x_1' * w_1' & y_1' * w_1' & w_1' \\ x_2' * w_2' & y_2' * w_2' & w_2' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n+m}' * w_{n+m}' & y_{n+m}' * w_{n+m}' & w_{n+m}' \end{bmatrix}$$

B_4 : ノットインサージョン後の
コントロールポイントと重みのマトリクス



6

高次化手法(1/2)

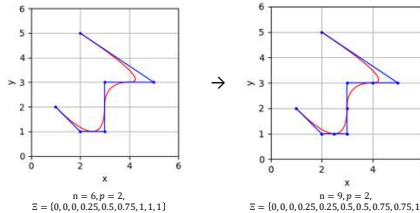
オーダーエレベーション(Order Elevation)

高次の基底関数で曲線の形状が変わらないような
ノットとコントロールポイントを生成する操作

① 最小のベジエ曲線に分割

ベジエ曲線: n 個の制御点から得られる $n-1$ 次曲線

Knot Insertionを行い、ベジエ曲線の区間に分割する



② 各区間でベジエ曲線の次数を上げる

$$\alpha_i = \frac{i}{\hat{p}}, \quad i = 0, \dots, \hat{p}$$

$$\hat{P}_i = (1 - \alpha_i)P_i + \alpha_i P_{i-1}$$

 \hat{p} : elevation後の次数($p+1$) P_i : コントロールポイントと重みのマトリクス \hat{P}_i : エレベーション後の
コントロールポイントと重みのマトリクス

③ ノットベクトルの重複度を1階上げる

$$\Xi = \{0, 0, 0, 0.25, 0.25, 0.5, 0.5, 0.75, 0.75, 1, 1, 1\}$$

$$\Xi = \{0, 0, 0, 0, 0.25, 0.25, 0.25, 0.5, 0.5, 0.5, 0.75, 0.75, 0.75, 1, 1, 1, 1\}$$

7

高次化手法(2/2)

④ 初めに挿入したノットを除去する
ノットインサージョンの逆の操作を行う

$$T_{ij}^0 = \begin{cases} 1 & \xi_i \in [\xi_j, \xi_{j+1}) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

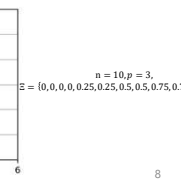
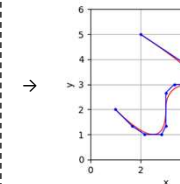
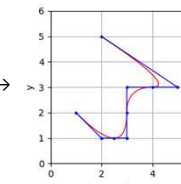
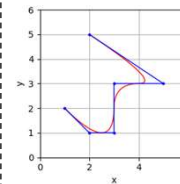
$$T_{ij}^q = \frac{\xi_{i+q-1} - \xi_j}{\xi_{j+q-1} - \xi_j} T_{ij}^{q-1} + \frac{\xi_{j+q} - \xi_{i+q-1}}{\xi_{j+q} - \xi_{j+1}} T_{ij+1}^{q-1}$$

for $q = 1, 2, \dots, p-1$

 T^p を求めることができる T^p は正則ではないので逆行列が求められない
 $m \leq n$ となるので、疑似逆行列は

$$T^{p+} = T^{pT} (T^p T^{pT})^{-1}$$

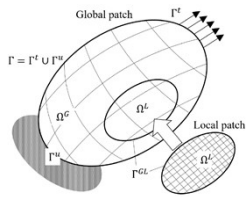
$$B_2 = T^{p+} B_3$$

 $(T^p)^+$: 疑似逆行列従って、 $B_4 \rightarrow B_1$ の順でコントロールポイントと
重みのマトリクスが求められる

8

7

重合パッチ法



グローバル領域: Ω^G グローバル領域の境界: Γ^G
ローカル領域: Ω^L ローカル領域の境界: Γ^L
 Ω^G と Ω^L の境界: Γ^{GL}

Ω^L では実際の変位が両モデルの変位の和で定義される

$$\mathbf{u} = \begin{cases} \mathbf{u}^G & \text{in } \Omega^G - \Omega^L \\ \mathbf{u}^G + \mathbf{u}^L & \text{in } \Omega^L \end{cases}$$

境界 Γ^{GL} で変位の C^0 連続性を保証するため
 $\mathbf{u}^L = \mathbf{0}$ on Γ^{GL}

離散化したつり合い方程式

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^G & \mathbf{K}^{GL} \\ \mathbf{K}^{GL^T} & \mathbf{K}^L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}^G \\ \mathbf{d}^L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}^G \\ \mathbf{f}^L \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{K}^G = \int_{\Omega^G} \mathbf{B}^{G^T} \mathbf{D} \mathbf{B}^G d\Omega \quad \mathbf{K}^L = \int_{\Omega^L} \mathbf{B}^{L^T} \mathbf{D} \mathbf{B}^L d\Omega$$

$$\mathbf{K}^{GL} = \int_{\Omega^L} \mathbf{B}^{G^T} \mathbf{D} \mathbf{B}^L d\Omega \quad \mathbf{K}^{GL^T} = \int_{\Omega^L} \mathbf{B}^{L^T} \mathbf{D} \mathbf{B}^G d\Omega$$

$$\mathbf{f}^G = \int_{\Omega^G} \mathbf{N}^{G^T} \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma^G} \mathbf{N}^{G^T} \mathbf{t} d\Gamma$$

$$\mathbf{f}^L = \int_{\Omega^L} \mathbf{N}^{L^T} \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma^L} \mathbf{N}^{L^T} \mathbf{t} d\Gamma$$

9

数値解析例

Knot InsertionとOrder Elevationを行いインプットデータを生成するプログラムを作成して、インハウスプログラムを高次の基底関数で解析が行えるように拡張

1. 内圧を受ける厚肉円筒の解析 (通常のIGA)

- ✓ 通常のIGAで基底関数3次で正常に動作しているか確認
- ✓ 2次と3次の誤差を厳密解と比較

2. 遠方で一様引張を受ける円孔を有する平板の解析 (重合パッチ法)

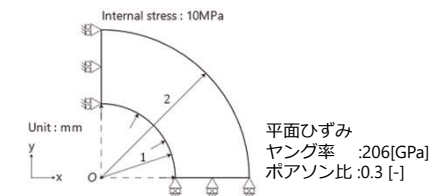
- グローバルパッチの分割数を固定してローカルパッチの分割数を変更した解析
- ローカルパッチの分割数を固定してグローバルパッチの分割数を変更した解析
- グローバルパッチの分割数を固定してローカルパッチのサイズと分割数を変更した解析

- ✓ 重合パッチ法で基底関数3次で正常に動作しているか確認
- ✓ 2次と3次の誤差を比較
- ✓ それぞれの解析から重合パッチ法における適切なパッチのサイズや分割数の関係を考察

10

内圧を受ける厚肉円筒の解析 (通常のIGA)

解析条件

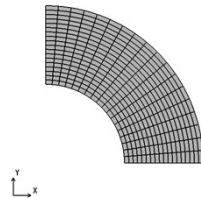


以下に示す誤差ノルムを
ガウス点での σ_r , σ_θ を使用して計算を行う。

$$\sigma_r = -\frac{r_o^2 r_i^2 P}{r_o^2 - r_i^2} \frac{1}{r^2} + \frac{r_i^2 P}{r_o^2 - r_i^2}$$

$$\sigma_\theta = \frac{r_o^2 r_i^2 P}{r_o^2 - r_i^2} \frac{1}{r^2} + \frac{r_i^2 P}{r_o^2 - r_i^2}$$

コントロールポイントは、2次と3次でそれぞれ
5x5, 10x10, 20x20, 40x40 の4通り

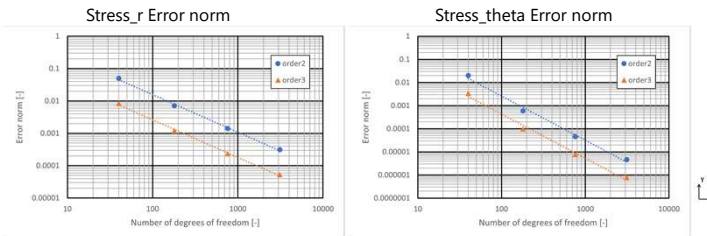


$$\text{Error norm} = \frac{\sqrt{\int (\alpha_{\text{analysis}} - \alpha_{\text{theory}})^2 d\Omega}}{\sqrt{\int \alpha_{\text{theory}}^2 d\Omega}}$$

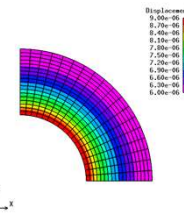
11

内圧を受ける厚肉円筒の解析 (通常のIGA)

各次数での自由度と誤差ノルムの関係



どちらも3次の方が誤差が小さく、
より少ない自由度で同程度の精度の解析結果が得られることが確認できた



12

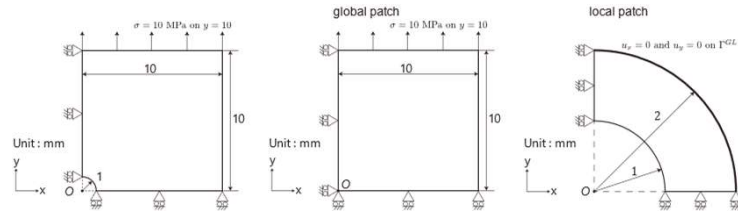
遠方で一様引張を受ける円孔を有する平板の解析 (重合パッチ法)

一様引張応力を受ける円孔を有する平板を重合パッチ法で解析する

解析条件

グローバルパッチとローカルパッチで同じ次数の基底関数を用いて解析

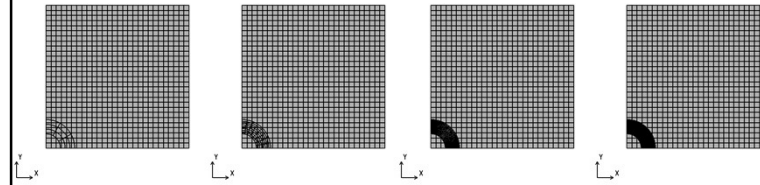
平面ひずみ
ヤング率 : 206[GPa]
ポアソン比 : 0.3 [-]



13

グローバルパッチの分割数を固定してローカルパッチの分割数を変更した解析(1/4)

グローバルパッチはコントロールポイントを30x30で固定し、
ローカルパッチは2次と3次でそれぞれ5x5, 10x10, 20x20, 30x30の4通り
ローカルパッチの全体のサイズは $r1=1$ [mm], $r2=2$ [mm] で固定
($r1$: ローカルパッチの内側の半径, $r2$: ローカルパッチの外側の半径)

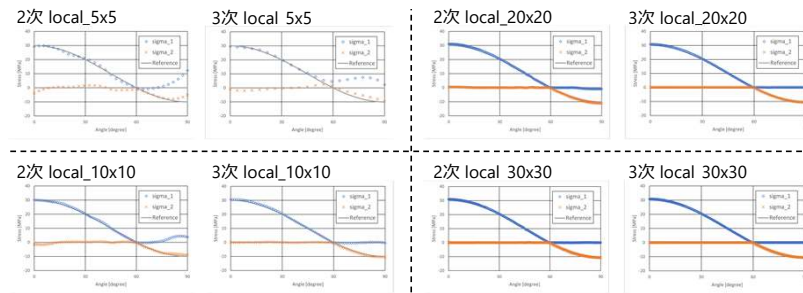


同じ自由度での円孔縁の主応力の分布, x軸上の σ_y の分布, コンター図を比較し,
ローカルパッチの分割数による影響を考察する

14

グローバルパッチの分割数を固定してローカルパッチの分割数を変更した解析(2/4)

円孔縁での主応力の分布

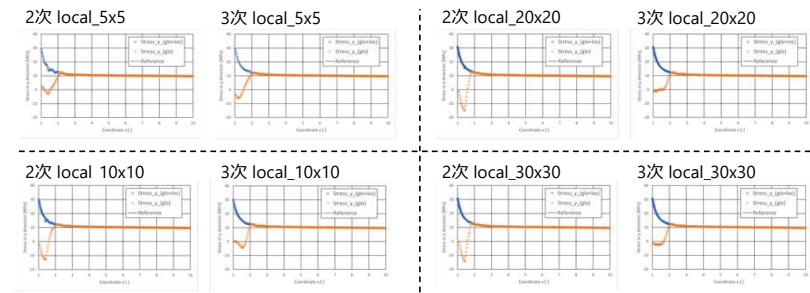


一般的に3次の方が精度が向上し, 滑らかな分布となった

15

グローバルパッチの分割数を固定してローカルパッチの分割数を変更した解析(3/4)

x軸上の σ_y の分布



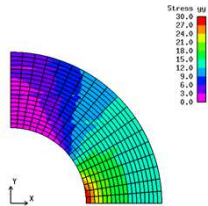
3次の方が精度が向上し, 滑らかな分布となった
主応力とx軸上の σ_y の分布は, 2次と3次共にローカルパッチの分割数が比較的小さい場合(loc_10x10)でも,
Referenceとよく合っており, さらにローカルを細かくすると分布がよりよくなる

16

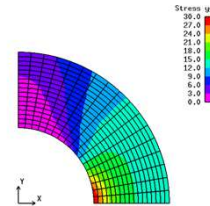
グローバルパッチの分割数を固定してローカルパッチの分割数を変更した解析(4/4)

ローカルパッチ上のコンター図の比較

2次 local_20x20



3次 local_20x20

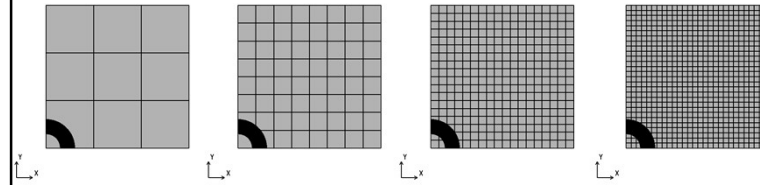


3次の方が滑らかな分布となった

17

ローカルパッチの分割数を固定してグローバルパッチの分割数を変更した解析(1/4)

ローカルパッチはコントロールポイントを30x30で固定し、
 グローバルパッチは2次と3次でそれぞれ5x5, 10x10, 20x20, 30x30の4通り
 ローカルパッチのサイズは $r_1=1$ [mm], $r_2=2$ [mm]で固定



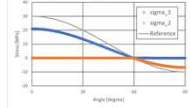
同じ自由度での円孔縁の主応力の分布, x軸上の σ_y の分布, コンター図を比較し,
 グローバルパッチの分割数による影響を考察する

18

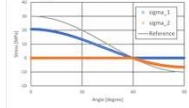
ローカルパッチの分割数を固定してグローバルパッチの分割数を変更した解析(2/4)

円孔縁での主応力の分布

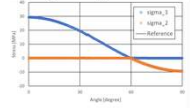
2次 global_5x5



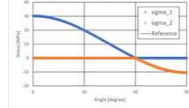
3次 global_5x5



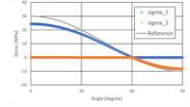
2次 global_20x20



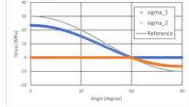
3次 global_20x20



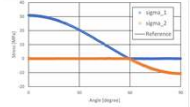
2次 global_10x10



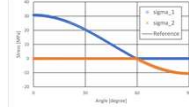
3次 global_10x10



2次 global_30x30



3次 global_30x30



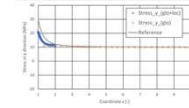
2次と3次どちらの場合も,
 ローカルパッチが十分に細かくてもグローバルパッチの分割数が小さい場合には精度の上限が決まっていて,
 ローカルパッチを細かくしても, ローカルパッチ内の分布が滑らかになるだけである

19

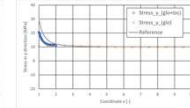
ローカルパッチの分割数を固定してグローバルパッチの分割数を変更した解析(3/4)

x軸上の σ_y の分布

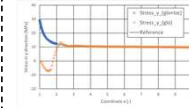
2次 global_5x5



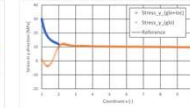
3次 global_5x5



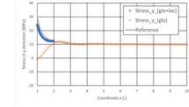
2次 global_20x20



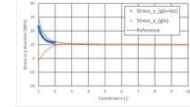
3次 global_20x20



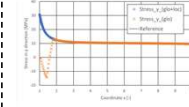
2次 global_10x10



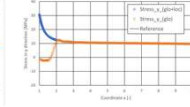
3次 global_10x10



2次 global_30x30



3次 global_30x30



主応力の分布と同様に, 2次と3次どちらの場合も,
 ローカルパッチが十分に細かくてもグローバルパッチの分割数によって精度の上限が決まっていて,
 ローカルパッチを細かくしても, 滑らかになるだけである

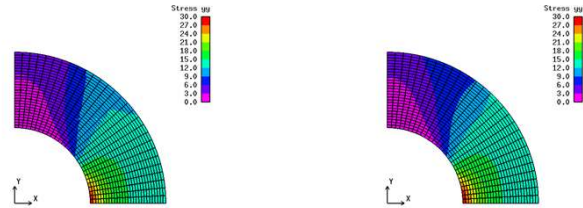
20

ローカルパッチの分割数を固定してグローバルパッチの分割数を変更した解析(4/4)

ローカルパッチ上のコンター図の比較

2次 global_20x20

3次 global_20x20



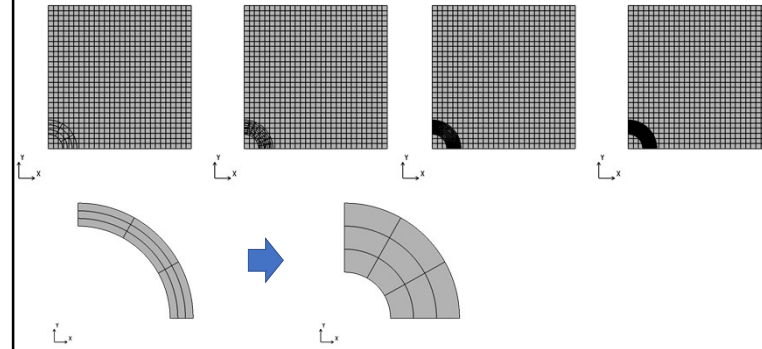
3次の方がやや滑らかな分布となった

21

21

グローバルパッチの分割数を固定してローカルパッチのサイズと分割数を変更した解析(1/4)

グローバルパッチはコントロールポイントを30x30とし、
ローカルパッチは2次と3次でそれぞれ5x5, 10x10, 20x20, 30x30の4通り
ローカルパッチの全体のサイズはr1=1[mm], r2=1.25, 1.50, 1.75, 2.00, 2.25, 2.50[mm]の6通り



22

22

グローバルパッチの分割数を固定してローカルパッチのサイズと分割数を変更した解析(2/4)

ローカルパッチ内のガウス点の解析結果と無限遠で一様引張が作用する円孔板の解を用いて
ローカルパッチの全体のサイズ別に自由度と誤差ノルムの関係を比較し、
ローカルパッチの全体のサイズと誤差ノルムの関係を示す

誤差ノルムを以下のように定義する

$$\text{Error norm} = \frac{\sqrt{\int_{\Omega_L} (\alpha_{\text{analysis}} - \alpha_{\text{theory}})^2 d\Omega}}{\sqrt{\int_{\Omega_L} \alpha_{\text{theory}}^2 d\Omega}} \quad \sigma_r = \frac{\sigma_0}{2} \left(1 - \frac{\rho^2}{r^2}\right) - \frac{\sigma_0}{2} \left(1 - \frac{4\rho^2}{r^2} + \frac{3\rho^4}{r^4}\right) \cos 2\theta$$

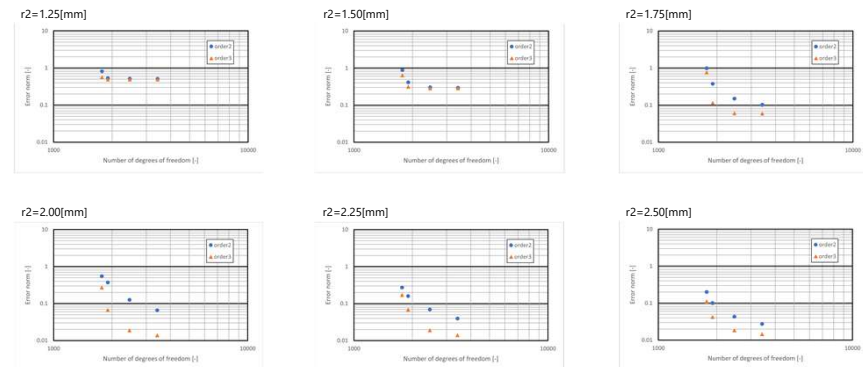
$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_0}{2} \left(1 + \frac{\rho^2}{r^2}\right) + \frac{\sigma_0}{2} \left(1 + \frac{3\rho^4}{r^4}\right) \cos 2\theta$$

まず、各ローカルパッチの全体のサイズ別に自由度と誤差ノルムの関係を比較する

23

23

グローバルパッチの分割数を固定してローカルパッチのサイズと分割数を変更した解析(3/4)

 σ_r の誤差ノルム

すべてのローカルパッチサイズで2次より3次の方が誤差ノルムが小さくなっている

24

24

グローバルパッチの分割数を固定してローカルパッチのサイズと分割数を変更した解析(4/4)

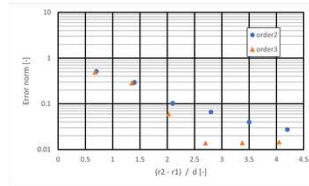
各ローカルパッチサイズでの同自由度での誤差ノルムを比較する

ローカルパッチのサイズとグローバルパッチの要素サイズの比と誤差ノルムの関係

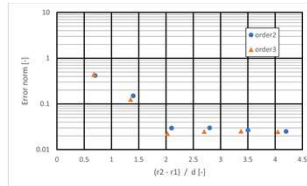
$r2-r1$: ローカルパッチの全体のサイズ

d : グローバルパッチの要素サイズ

stress_r error norm



stress_theta error norm



2次と3次共にローカルパッチのサイズをグローバルパッチの要素サイズの2.5～4倍程度にすると同自由度で最も精度が高くなることが確認された

25

25

まとめ・今後の予定

まとめ

- 通常のIGA解析と重合パッチ法解析で、同自由度では基底関数が2次の場合より3次の場合の方が精度が高くなり、プログラムが正常に動作していることが確認された
- 基底関数が2次、3次の場合共にローカルパッチサイズをグローバルパッチの要素の2.5～4倍程度にすると同自由度で最も精度が高くなる

今後の予定

- 各パッチでの基底関数の次数の組み合わせによる解析精度検証を行う

26

26

卒業論文の目次案

第1章 緒言

- 1.1 研究の背景
- 1.2 研究の目的
- 1.3 研究の概要
- 1.4 本論文の構成

第2章 アイソジオメトリック解析手法

- 2.1 非一様有理Bスプライン関数の概要
 - 2.1.1 ノットベクトル
 - 2.1.2 Bスプライン基底関数
 - 2.1.3 NURBS基底関数
 - 2.1.4 細分化操作
 - 2.1.5 高次化操作
- 2.2 アイソジオメトリック解析

第3章 重合パッチ法

- 3.1 重合パッチ法の理論
- 3.2 結合剛性マトリクス

第4章 数値解析例

- 4.1 3次の基底関数を用いたIGA解析
 - 4.1.1 内圧を受ける厚肉円筒の解析
- 4.2 3次の基底関数を用いた重合パッチ法解析
 - 4.2.1 遠方で一様引張を受ける円孔を有する平板の解析
 - 4.2.1.1 各パッチでの基底関数の次数の組み合わせによる解析精度検証
 - 4.2.1.2 グローバルパッチの分割数を固定してローカルパッチの分割数を変更した解析
 - 4.2.1.3 グローバルパッチの分割数を固定してローカルパッチのサイズと分割数を変更した解析

第5章 考察

第6章 結言

謝辞

参考文献

27

27