固体の力学／理論

FOUNDATIONS OF SOLID MECHANICS

Y.C.ファン著

名古屋大学教授工博 大橋義夫
名古屋大学助教授工博 村上澄男
三重大学助教授工博 神谷紀生

共訳

培風館

両端を閉じた長い円筒殻からなっている。一端の近くで，筒の軸に垂直にダイヤフラムが取りつけられている。ダイヤフラムの一方の側は真空になっており，他方の側には高圧ガスが貯えてある。作動の際，ダイヤフラムを急に破ると，高圧側から噴出したガスによって生じた衝撃波面は真空の管の中を伝ぱする。

ダイヤフラムを破り，衝撃波が伝わることによって，管の壁には弾性波が生ずる。これらの弾性波は装置の使用方法や測定法に影響を与える。衝撃波管の壁の過渡的な弾性応答を検討せよ。

8.18 弾性無限体の中に半径 a の球形の空孔がある。正弦的に変動する圧力がその空孔の表面に作用する。媒質の中の変位場を決定せよ。

9 2次元弾性問題

Airy の応力関数を用いれば，平面応力あるいは平面ひずみ状態にある静的弾性問題は重調和方程式の境界値問題となる。この問題には，複素変数の関数論を用いる一般解法が応用できる。本章では，まずこの方法を簡単に論じ，ついで二，三の重要な問題を解いて，その有用性を示す。

この章の後半では，ふたたび動的問題を取り上げ，そこで弾性半空間の表面を荷重が一定の速さで移動する問題を論ずる。

本章全体を通じて，x, y および z は直角座標を表わすことにする。この座標系に関する変位成分を u, v および w とし，またひずみ成分と応力成分を $e_{xx}, e_{xy}, \cdots$ および $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \cdots$ で表わす。ただし，ここで用いるひずみ成分の定義式

$$e_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

には係数 $\frac{1}{2}$ があることに注意すべきである。曲線座標を用いたときには，4章の記号を用いなければならない。そこでは，u_i と e_{ij} はそれぞれ変位とひずみの“テンソル成分”を表わすのに対して，ξ_i, ϵ_{ij} はこれらのテンソルの“物理成分”を表わしている（4.10～4.12 節参照)。

9.1 平面応力あるいは平面ひずみ状態

応力成分 σ_{zz}, σ_{zx} および σ_{zy} がいたるところで0になるとき，

(1)　$$\sigma_{zz}=\sigma_{zx}=\sigma_{zy}=0,$$

その応力状態を x-y 平面に平行な**平面応力**(plane stress) 状態という。この場合には

$$(2)\quad \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}), \qquad e_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}), \\ e_{zz} &= -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}), \qquad e_{xy} = \frac{1}{2G}\sigma_{xy}, \qquad e_{xz} = e_{yz} = 0, \end{aligned}$$

$$(3)\quad \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\nu^2}(e_{xx} + \nu e_{yy}), \qquad \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2}(e_{yy} + \nu e_{xx}), \\ \sigma_{xy} &= \frac{E}{1+\nu}e_{xy}, \end{aligned}$$

$$(4)\quad \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu}(e_{xx} + e_{yy}),$$

$$(5)\quad e_{xx} + e_{yy} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

が成り立つ。式 (3) を平衡方程式 (7.1：5) に代入すると，平面応力の基礎方程式はつぎのようになる。

$$(6)\ \blacktriangle\quad \begin{aligned} G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + G\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + X = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ G\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + G\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + Y = \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

一方，z 方向の変位成分 w がいたるところで 0 であり，しかも変位成分 u と v とが x, y だけの関数であって z に無関係であれば，その物体は x-y 平面に平行な**平面ひずみ**(plane strain) 状態にあるという。よって，平面ひずみでは

$$(7)\quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = w = 0, \quad \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \qquad (\because\ e_{zz} = 0)$$

の関係が成立する。基礎方程式 (7.1：9) はつぎのようになる。

$$(8)\ \blacktriangle\quad \begin{aligned} G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{1-2\nu}G\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + X = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ G\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{1-2\nu}G\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + Y = \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

上の式の ν を $\nu/(1+\nu)$ で置きかえると，式 (6) と同じになる。したがって，任意の平面ひずみ問題は，ν の真の値を‘見かけの値’ $\nu/(1-\nu)$ で置きかえておいて平面応力問題として解くことができる†。あるいは反対に，任意の平面応力問題は ν の真の値を見かけの値 $\nu/(1-\nu)$ で置換することにより平面ひずみ問題として解ける†。

† この置きかえは，場の方程式 (6) および (8) だけに関するものである。境界条件，応力-ひずみ関係および横弾性係数 G は変化を受けない。

軸に垂直であり，しかも，軸方向に一様な荷重が作用する長い柱状の物体のひずみ状態は，平面ひずみ状態で近似できることが多い。この場合，x-y 平面の応力成分をなんら変化することなく，平面ひずみ状態に一定値の軸方向のひずみ e_{zz} を加えることができる。ゆえに e_{zz} を一定とし，したがって u と v は x, y だけの関数，w は z だけの 1 次関数であるとして，平面ひずみの定義式をいくらか拡張することができる。

板の中央面に平行な力を受ける薄い平板の応力状態は，近似的に平面応力である。しかし，e_{zz} は一般に 0 でないから，変位成分 u, v および w は z の関数であり，問題は正しくは 2 次元的ではない。事実，式 (1) と平衡方程式および Beltrami-Michell の適合条件 (7.3：6) を満足する一般的な平面応力状態は，応力成分 $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ が板の厚さ方向に放物線状，すなわち $f(x, y)+g(x, y)z^2$ のように分布する状態であることが証明できる (Timoshenko および Goodier[1.2], p. 241 参照)。しかし，議論を十分薄い板に限定すれば (つまり板の厚さ h，板の代表的な寸法 L に対して，$h/L \to 0$ とすれば)，z^2 に比例する項を第 1 項に比べてどれだけでも小さくできる。

9.2　2次元問題に対する Airy の応力関数

平面応力あるいは平面ひずみ問題に対して，平衡方程式と適合条件を満足する一般の応力系を求め，境界条件によって個々の問題の解を決定することができる。

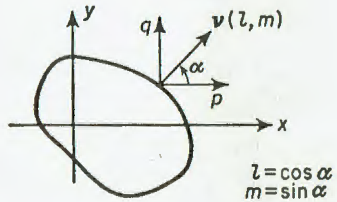

図 9.2：1　記号

x, y を直角座標とする。x-y 平面内の平面応力および平面ひずみ問題に対しては，平衡方程式 (3.4：2) は

$$(1)\qquad \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = -X,$$

$$(2)\qquad \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} = -Y$$

となり，また境界条件は

(3)　　$l\sigma_{xx} + m\sigma_{xy} = p, \qquad m\sigma_{yy} + l\sigma_{xy} = q$

と書ける。ここで l, m は境界の外向き法線の方向余弦であり，p, q はその境界に作用する表面力である。

ひずみ成分はつぎの各式によって与えられる。

(a)　平面応力：

(4)
$$e_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}), \qquad e_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}),$$
$$e_{xy} = \frac{1}{2G}\sigma_{xy} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xy}.$$

(b)　平面ひずみ：

(5)
$$e_{xx} = \frac{1}{E}[(1-\nu^2)\sigma_{xx} - \nu(1+\nu)\sigma_{yy}],$$
$$e_{yy} = \frac{1}{E}[(1-\nu^2)\sigma_{yy} - \nu(1+\nu)\sigma_{xx}],$$
$$e_{xy} = \frac{1}{E}(1+\nu)\sigma_{xy}.$$

前節の議論を考慮すれば，非常に薄い板に対しては $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ が z に無関係であると仮定できる。この場合，平面応力問題は平面ひずみ問題と同様に厳密に2次元的になる。適合条件はつぎのようになる（4.6節参照）。

(6)
$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = 2\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y},$$
$$\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2} = 2\frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial y \partial z},$$
$$\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial z^2} = 2\frac{\partial^2 e_{xz}}{\partial z \partial x},$$
$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z}\right),$$
$$\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial e_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z}\right),$$
$$\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial e_{xy}}{\partial z}\right).$$

式（4）を式（6）の第1式に代入すると，平面応力状態に対して

(7)
$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}) = 2(1+\nu)\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}$$

の関係を得る。さらに，式（1）を x について，また式（2）を y についてそれぞれ微分し，互いに加え合わせると

(8)
$$\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = -2\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}$$

を得る。最後に式（7）と（8）から τ_{xy} を消去すれば，次式が得られる。

(9)
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -(1+\nu)\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right).$$

同様に平面ひずみ状態に対してつぎの式が成り立つ。

(10)
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -\frac{1}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right).$$

式（1），（2），（3），および（9）あるいは（10）は応力成分 $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ によって平面問題を定義している。問題の境界条件が表面力で与えられる場合には，問題は応力に関して解くことができ，必要がなければ変位を考えなくてよい。境界の一部分で変位が指定される混合境界値問題においても，はじめに応力問題について解く方が便利である。Airy の応力関数が用いられるのは，このような実際的理由によるものである†。

Airy の方法は，式（1）と（2）の左辺がベクトルの発散の形になっていることを基礎にしたものである。流体力学では，速度ベクトル成分を u, v として連続の式

(11)
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

で表わした質量保存の法則が，任意の流れ関数 $\psi(x, y)$ から

(12)
$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

のように導かれることはよく知られている。いいかえれば，u, v が任意の関数 $\psi(x, y)$ から式（12）によって導かれるならば，式（11）は恒等的に満足される。

式（1）および（2）に対しても，これと同じ手法を用いることにしよう。これらの式は，物体力がポテンシャル V から

(13)
$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

のように導かれるものと仮定すれば，式（11）の形になる。すなわち，式（13）を式（1）と（2）に代入すれば

† 境界全体で変位が規定されるような問題に対しては，変位ポテンシャルを使った方法あるいは前章で述べたその他の方法をまず試みるべきである。

$$(14)\quad \frac{\partial}{\partial x}(\sigma_{xx}-V)+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}(\sigma_{yy}-V)=0$$

の関係が得られる。式 (11) と同じく，これらの式は，つぎのような二つの流れ関数 Ψ および χ を用いれば，恒等的に満足される。

$$(15)\quad \begin{aligned}\sigma_{xx}-V&=\frac{\partial\Psi}{\partial y}, & \sigma_{xy}&=-\frac{\partial\Psi}{\partial x},\\ \sigma_{xy}&=-\frac{\partial\chi}{\partial y}, & \sigma_{yy}-V&=\frac{\partial\chi}{\partial x}.\end{aligned}$$

いいかえれば，式 (15) を (14) に代入すると，式 (14) は Ψ および χ に関する恒等式になる。さらに χ と Ψ を

$$(16)\quad \chi=\frac{\partial\Phi}{\partial x},\qquad \Psi=\frac{\partial\Phi}{\partial y}$$

とおけば，式 (15) は結合されてつぎの形になる。

$$(17)\ \blacktriangle\quad \sigma_{xx}-V=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2},\qquad \sigma_{xy}=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y},\qquad \sigma_{yy}-V=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}.$$

応力成分 σ_{xx}, σ_{xy}, σ_{yy} が任意の関数 $\Phi(x, y)$ から式 (17) によって誘導されるときに，式 (14) が恒等的に満足されることは容易に証明できる。関数 $\Phi(x, y)$ は，その発見者である有名な天文学者の名前をとって，**Airy の応力関数**(Airy stress function) とよばれている。

任意の関数 $\Phi(x, y)$ は平衡方程式を満足するような応力成分を与える。しかし Φ は完全に任意ではなく，適合条件を満たすような応力場だけを与えるものでなければならない。適合条件は式 (9) あるいは (10) で与えられるから，式 (17) を代入することによってこの必要条件は，平面応力状態に対しては

$$(18)\ \blacktriangle\quad \frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4}=-(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)$$

となり，また平面ひずみ状態では

$$(19)\ \blacktriangle\quad \frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4}=-\frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)$$

となる。とくに，物体力がなければ，平面応力あるいは平面ひずみのいずれの場合においても，Φ はつぎの方程式に支配される。

$$(20)\ \blacktriangle\quad \frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4}=0.$$

式 (20) の正則な解は**重調和関数**(biharmonic function) とよばれている。重調和関数による平面弾性問題の解法は以下の各節で論じてある。

ところで，いままで考えなかった式 (6) の残りの 5 個の適合条件についてはどうであろうか。平面ひずみの場合には，それらが恒等的に満足されることは明らかである。しかし平面応力の場合には，σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{xy} が z に無関係であると仮定するならば，一般にこれらの式を満足することはできない。なぜならば，このような仮定のもとでは，これらの適合条件は

$$(21)\quad \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x\partial y}=0$$

を意味しており，e_{zz}，したがって $\sigma_{xx}+\sigma_{yy}$ は x と y の 1 次関数でなければならない [$e_{zz}=-\nu(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})/E$]。これは平面応力問題の解では例外的な場合にすぎない。よって一般には，平面応力状態が 2 次元的であり，したがって σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{xy} が x, y だけの関数であるとする仮定は正しくなく，この仮定のもとで得られた解は厳密ではありえない。しかし，前に論じたように (9.1 節)，これらの解は薄い板に対してはよい近似となる。

応力関数による解法は 3 次元にも拡張できる。このためには，平衡方程式が応力テンソルのベクトル発散の形になっていることに注意すればよい。流体力学における流れ関数はよく知られている。3 次元の場合には三つの流れ関数が必要である。同様にして，Airy の方法を 3 次元の平衡方程式に一般化するためには，応力関数の“テンソル”が必要である。Finzi[8.1] (1934) は方程式

$$(22)\quad \sigma_{ij,j}=0,\qquad \sigma_{ij}=\sigma_{ji}$$

の一般解が

$$(23)\quad \sigma_{ij}=e_{imr}e_{jns}\phi_{rs,mn}$$

で与えられることを示した。ここに ϕ_{rs} は応力関数の対称な 2 階のテンソルの成分であり，また e_{imr} は交代記号 (2.1 節) である。とくに $\phi_{rs}=0$ ($r\neq s$) とすれば Maxwell の応力関数となり，また $\phi_{rr}=0$ (総和をとらない) とすれば Morera の応力関数となる [後出，10.9 節，式 (10.9 : 19) 参照]。もしも ϕ_{33} 以外のすべての成分 ϕ_{rs} を 0 と仮定すれば，式 (23) は 2 次元の平衡方程式に対する Airy の解になる。Finzi の結果の巧妙な証明は Dorn と Schild[8.1] によって行なわれているが，これは n 次元の Euclid 空間に対しても適用できる。

Finzi (1934) はさらに 4 次元空間を考え，任意の密度場をもつ連続体の運動方程式に対してこの方法を見事に拡張した。Finzi の導いた任意のテンソルを微分することによって，運動方程式を満足する運動と応力場が得られる。

曲がりのある空間 (非 Euclid 空間) に対しては，Truesdell[16.1] が変分法を用いて類似の結果を導いている。曲がりのある空間の問題は固有の座標系を用い

る薄い殻，あるいは薄膜の理論において自然に生ずる。なぜならば，その面を離れることのできない2次元的な観測者にとっては，2次元的な表面は3次元Euclid空間にある非Euclid空間であるからである。

［例 1］ つぎの2次および3次多項式は明らかに重調和関数である。

$$\Phi_2 = a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2,$$

$$\Phi_3 = a_3x^3 + b_3x^2y + c_3xy^2 + d_3y^3.$$

定数 $a_2, a_3, \cdots$ を適当に選ぶことによって，長方形の境界上に，応力が直線的に分布するような多くの問題を解くことができる。この種の問題の例を図9.2：2に示す。

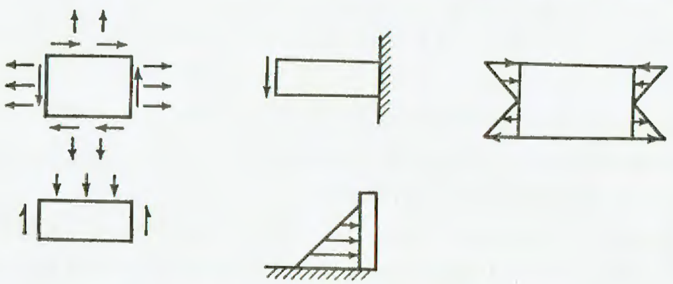

図 9.2：2　簡単な多項式で解ける問題の例

［例 2］ 両端で支持され，表面力

$y = +c$ 上で　$\sigma_{xy} = 0,\quad \sigma_{yy} = -B\sin\alpha x$

$y = -c$ 上で　$\sigma_{xy} = 0,\quad \sigma_{yy} = -A\sin\alpha x$

を受ける長方形断面のはり（図9.2：3）を考えよ。このほかの境界条件は規定せず，また物体力は作用しないものとする。

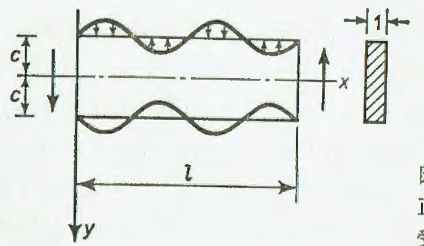

図 9.2：3
正弦状の分布荷重を受けるはり

［解］ 応力関数 Φ を

$$\Phi = \sin\alpha x f(y)$$

とする。ここに $f(y)$ は y だけの関数である。Φ を式(20)に代入すると

$$\alpha^4 f(y) - 2\alpha^2 f''(y) + f^{\text{iv}}(y) = 0$$

を得る。この式の一般解は

$$f(y) = C_1\cosh\alpha y + C_2\sinh\alpha y + C_3 y\cosh\alpha y + C_4 y\sinh\alpha y$$

で与えられる。したがって，応力関数ならびに応力成分はつぎのようになる。

$$\Phi = \sin\alpha x(C_1\cosh\alpha y + C_2\sinh\alpha y + C_3 y\cosh\alpha y + C_4 y\sinh\alpha y),$$

$$\sigma_{xx} = \sin\alpha x[C_1\alpha^2\cosh\alpha y + C_2\alpha^2\sinh\alpha y + C_3(y\alpha^2\cosh\alpha y + 2\alpha\sinh\alpha y) + C_4(y\alpha^2\sinh\alpha y + 2\alpha\cosh\alpha y)],$$

$$\sigma_{yy} = -\alpha^2\sin\alpha x[C_1\cosh\alpha y + C_2\sinh\alpha y + \cdots],$$

$$\sigma_{xy} = -\alpha\cos\alpha x[C_1\alpha\sinh\alpha y + C_2\alpha\cosh\alpha y + C_3(\cosh\alpha y + y\alpha\sinh\alpha y) + C_4(\sinh\alpha y + y\alpha\cosh\alpha y)].$$

境界条件，$y = \pm c$ 上で $\sigma_{xy} = 0$ を用いれば，C_3 と C_4 を C_1 と C_2 で表わすことができる。C_1 と C_2 は残りの二つの境界条件から決定できる。したがって，これら4個の定数はつぎのようになる。

$$C_1 = \frac{A+B}{\alpha^2}\,\frac{\sinh\alpha c + \alpha c\cosh\alpha c}{\sinh 2\alpha c + 2\alpha c},$$

$$C_2 = -\frac{A-B}{\alpha^2}\,\frac{\cosh\alpha c + \alpha c\sinh\alpha c}{\sinh 2\alpha c - 2\alpha c},$$

$$C_3 = \frac{A-B}{\alpha^2}\,\frac{\alpha\cosh\alpha c}{\sinh 2\alpha c - 2\alpha c},$$

$$C_4 = -\frac{A+B}{\alpha^2}\,\frac{\alpha\sinh\alpha c}{\sinh 2\alpha c + 2\alpha c}.$$

以上の解法の詳細は Timoshenko および Goodier[1,2], p. 48 にしるされている。

9.3　極座標における Airy の応力関数

円形の境界をもった2次元問題に対しては，極座標を用いると便利である。ξ_r, ξ_θ, ξ_z を変位の物理成分とし，また $e_{rr}, e_{r\theta}, \cdots, \sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, \cdots$ をそれぞれひずみと応力の物理成分とする。円柱座標に関する一般式は4.12節で与えられる。"平面応力"問題に対しては

（1）　$$\sigma_{zz} = \sigma_{zr} = \sigma_{z\theta} = 0$$

を仮定する。これに対して，"平面ひずみ"問題では

（2）　$$\xi_z = 0$$

であり，また z に関する導関数はすべて0であるものとする。いずれの場合にも，ひずみ成分は次式で定義される。

（3）　$$e_{rr} = \frac{\partial\xi_r}{\partial r},\qquad e_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial\xi_\theta}{\partial\theta} + \frac{\xi_r}{r},$$
$$e_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\xi_r}{\partial\theta} + \frac{\partial\xi_\theta}{\partial r} - \frac{\xi_\theta}{r}\right).$$

さらに平面応力では

（4）　$$e_{rr} = \frac{1}{E}(\sigma_{rr} - \nu\sigma_{\theta\theta}),\quad e_{\theta\theta} = \frac{1}{E}(\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{rr}),\quad e_{r\theta} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{r\theta}$$

であり，また平面ひずみでは

$$\text{(5)}\quad \begin{aligned} \epsilon_{rr} &= \frac{1}{E}[(1-\nu^2)\sigma_{rr} - \nu(1+\nu)\sigma_{\theta\theta}], \\ \epsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{E}[(1-\nu^2)\sigma_{\theta\theta} - \nu(1+\nu)\sigma_{rr}], \qquad \epsilon_{r\theta} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{r\theta} \end{aligned}$$

が成立する。平衡方程式はつぎのようになる。

$$\text{(6)}\quad \begin{aligned} &\frac{1}{r}\frac{\partial(r\sigma_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} + F_r = 0, \\ &\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2\sigma_{\theta r})}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta} + F_\theta = 0. \end{aligned}$$

物体力 F_r, F_θ が 0 の場合，応力成分が関数 $\Phi(r, \theta)$ から

$$\text{(7)} \blacktriangle \quad \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}, \\ \sigma_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) \end{aligned}$$

のように導かれるならば式(6)は恒等的に満足される。これは上の式を式(6)に直接代入してみれば明らかである。関数 $\Phi(r, \theta)$ は Airy の応力関数である。

適合条件（9.2：9）および（9.2：10）は，物体力が 0 の場合には

$$\text{(8)}\qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0$$

となる。ここで，$\sigma_{xx}+\sigma_{yy}$ は座標の回転に関して不変であるから

$$\text{(9)}\qquad \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}$$

が成り立つ。また，Laplace の演算子はつぎのように変換される。

$$\text{(10)}\qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}.$$

したがって，式（7）を（9）に代入し，式（10）を用いると，式（8）はつぎのようになる。

$$\text{(11)} \blacktriangle \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}\right) = 0.$$

これは Airy の応力関数 $\Phi(r, \theta)$ が満足しなければならない適合方程式である。境界条件も同時に満足するような式（11）の“一つの解”が求まれば，問題は解けたことになる。なぜならば，Kirchhoff の一意性の定理によれば，このような解はただ一つに限られるからである。

軸対称問題　Φ が r だけの関数であって，θ には無関係であるならば，θ

に関する導関数はすべて 0 であって，式（11）はつぎのようになる。

$$\text{(12)}\qquad \frac{d^4\Phi}{dr^4} + \frac{2}{r}\frac{d^3\Phi}{dr^3} - \frac{1}{r^2}\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{1}{r^3}\frac{d\Phi}{dr} = 0.$$

これは同次微分方程式であって，$r=e^t$ のような新しい変数 t を導入することによって，定数係数の線形微分方程式に帰着できる。その一般解は

$$\text{(13)}\qquad \Phi = A\log r + Br^2\log r + Cr^2 + D$$

であるから，応力成分は

$$\text{(14)}\quad \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{A}{r^2} + B(1 + 2\log r) + 2C, \\ \sigma_{\theta\theta} &= -\frac{A}{r^2} + B(3 + 2\log r) + 2C, \\ \sigma_{r\theta} &= 0 \end{aligned}$$

となる。応力分布が対称であって，しかも物体力のないあらゆる問題の解がこの式から得られる。

式（14）の応力成分に対応する変位成分はつぎのように求めることができる。“平面応力”の場合について考えてみよう。式（14）を式（4）および（3）の第 1 式に代入すれば

$$\frac{\partial\xi_r}{\partial r} = \frac{1}{E}\left[\frac{(1+\nu)A}{r^2} + 2(1-\nu)B\log r + (1-3\nu)B + 2(1-\nu)C\right]$$

となり．さらにこれを積分することによって

$$\text{(15)}\quad \xi_r = \frac{1}{E}\left[-\frac{(1+\nu)A}{r} + 2(1-\nu)Br\log r - B(1+\nu)r + 2C(1-\nu)r\right] + f(\theta)$$

が導かれる。ここに $f(\theta)$ は θ だけの任意の関数である。また，式（14）と式（4）および（3）の第 2 式を用いると

$$\frac{\partial\xi_\theta}{\partial\theta} = \frac{4Br}{E} - f(\theta)$$

を得る。この式を積分すれば

$$\text{(16)}\qquad \xi_\theta = \frac{4Br\theta}{E} - \int_0^\theta f(\theta)d\theta + f_1(r)$$

となる。ただし，$f_1(r)$ は r だけの関数である。最後に，式（14），（4）および（3）の第 3 式を用いれば，$\sigma_{r\theta}=\epsilon_{r\theta}=0$ であるから

$$\frac{1}{r}\frac{df(\theta)}{d\theta} + \frac{df_1(r)}{dr} + \frac{1}{r}\int_0^\theta f(\theta)d\theta - \frac{1}{r}f_1(r) = 0$$

〔例 4〕 接合した円輪における元応力

図 9.3：3 に示すような円輪のすきまの両端をつけ合わせて接合するとき，元応力は式 (14) において

$$B = \frac{\epsilon E}{8\pi}, \qquad A = C = 0 \tag{22}$$

とおくことによって求められる。円周方向の変位については式 (17) を見よ。定数 α, β, γ はすべて 0 である。

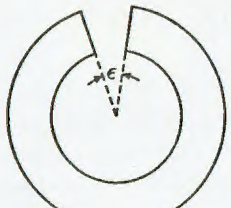

図 9.3：3　接合した円輪

問題 9.1　応力関数

$$\Phi = C[r^2(\alpha-\theta) + r\sin\theta\cos\theta - r^2\cos^2\theta\tan\alpha]$$

において，図 P 9.1 に示す三角形板の上下の縁における条件を満足するように，定数 C を決定せよ。また上側の縁の各点の変位成分を求めよ。

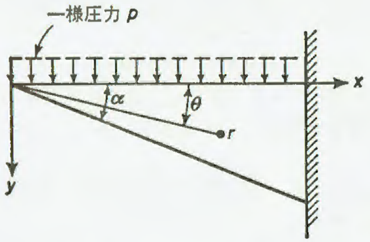

図 P 9.1

9.4　一般の場合

直接に代入すれば証明できるように，方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}\right) = 0$$

の解はつぎの式で与えられる (J. H. Michell, 1899)。

$$\begin{aligned}
\Phi &= a_0\log r + b_0 r^2 + c_0 r^2\log r + d_0 r^2\theta + a_0'\theta \\
&\quad + \frac{a_1''}{2} r\theta\sin\theta + (a_1 r + b_1 r^3 + a_1' r^{-1} + b_1' r\log r)\cos\theta \\
&\quad + \frac{c_1''}{2} r\theta\cos\theta + (c_1 r + d_1 r^3 + c_1' r^{-1} + d_1' r\log r)\sin\theta
\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
&+ \sum_{n=2}^{\infty}(a_n r^n + b_n r^{n+2} + a_n' r^{-n} + b_n' r^{-n+2})\cos n\theta \\
&+ \sum_{n=2}^{\infty}(c_n r^n + d_n r^{n+2} + c_n' r^{-n} + d_n' r^{-n+2})\sin n\theta.
\end{aligned}$$

係数 a_0, b_0, a_1, … を適当に選ぶことによって，多くの重要な問題を解くことができる。θ に関しては Fourier 級数として，また r についてはべき級数として表わした式 (1) のような一般形は，円周方向あるいは半径方向の境界をもつ問題を解くための有力な手段を与える。級数の各項は工学上重要な種々の問題に対する都合のよい解を与える。Timoshenko と Goodier[1.2], pp. 73〜130 および Sechler[1.2], pp. 149〜171 の書には数多くの例が挙げてある。

〔例 1〕 端面に働く力による曲がりはりの曲げ

図 9.4：1 に示すように，円弧状の軸をもち，半径方向に力 P を受ける薄い長方形断

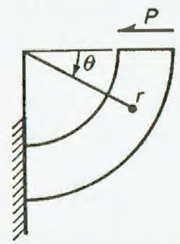

図 9.4：1　曲がりはりの曲げ

面の曲がりを考える。任意の断面の曲げモーメントは $\sin\theta$ に比例する。はりの初等理論によれば，垂直応力 $\sigma_{\theta\theta}$ は曲げモーメントに比例するから $\sigma_{\theta\theta}$，したがって Φ が $\sin\theta$ に比例するような解を試みるのが合理的である。このような解は式 (1) の中で $\sin\theta$ を含む項によって与えられ

$$\Phi = \left(d_1 r^3 + \frac{c_1'}{r} + d_1' r\log r\right)\sin\theta \tag{2}$$

の形になることが証明できる。ここで各係数はそれぞれ

$$d_1 = \frac{P}{2N}, \quad c_1' = -\frac{Pa^2b^2}{2N}, \quad d_1' = -\frac{P}{N}(a^2+b^2),$$
$$N = a^2 - b^2 + (a^2+b^2)\log(b/a)$$

である。このとき，応力成分はつぎのようになる。

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= \frac{P}{N}\left(r + \frac{a^2b^2}{r^3} - \frac{a^2+b^2}{r}\right)\sin\theta, \\
\sigma_{\theta\theta} &= \frac{P}{N}\left(3r - \frac{a^2b^2}{r^3} - \frac{a^2+b^2}{r}\right)\sin\theta, \\
\sigma_{r\theta} &= -\frac{P}{N}\left(r + \frac{a^2b^2}{r^3} - \frac{a^2+b^2}{r}\right)\cos\theta.
\end{aligned} \tag{3}$$

境界における応力分布が，上の式で規定されるものと厳密に同じであれば，すなわち

$r=a$ および $r=b$ において　　$\sigma_{rr}=\sigma_{r\theta}=0,$

(4)　$\theta=0$ において　　$\sigma_{\theta\theta}=0,\quad \sigma_{r\theta}=-\dfrac{P}{N}\left[r+\dfrac{a^2b^2}{r^3}-\dfrac{1}{r}(a^2+b^2)\right],$

$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ において　　$\sigma_{r\theta}=0,\quad \sigma_{\theta\theta}=\dfrac{P}{N}\left[3r-\dfrac{a^2b^2}{r^3}-(a^2+b^2)\dfrac{1}{r}\right]$

であれば，厳密解が得られたことになる。

ここで導いた厳密解を詳しく調べてみると，はりの平らな横断面は曲げの後でも平面を保つというはりの初等理論で用いられる工学的近似が非常に満足すべき結果を与えることがわかる。

［例 2］　境界上の1点に集中力を受ける半無限板

半無限板の水平な直線境界に，垂直な集中力 P の作用する場合を考える（図 9.4：2)。板の厚さ方向の荷重の分布は一様であるとする。板の厚さを1と仮定すれば，P は単位厚さ当りの荷重になる。

これは Lamb の問題の静的な場合に相当する（8.15 節，9.7 節参照)。その解は，3次元の場合に対する Boussinesq (1855) の解（8.10 節）から，Flamant (1892) により求められた。動的な場合あるいは3次元の場合とは異なって，この問題の解は Airy の応力関数

(5)
$$\Phi=-\frac{P}{\pi}r\theta\sin\theta$$

から簡単に求められる。応力成分は

(6)
$$\sigma_{rr}=-\frac{2P}{\pi}\frac{\cos\theta}{r},\qquad \sigma_{\theta\theta}=0,\qquad \sigma_{r\theta}=0$$

となる。この式からわかるように，荷重の作用点から r の距離にある要素は半径方向の単純圧縮を受ける。上の式はまた，半径方向の応力が一定値 $-\sigma_{rr}$ を取るような点の軌跡が，x 軸に接する円 $r=(-2P/\pi\sigma_{rr})\cos\theta$（図 9.4：2）であることを示している。

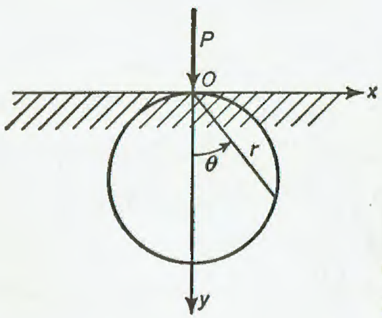

図 9.4：2
Boussinesq-Flamant の問題

関係式 (9.3：3)，(9.3：4）および式 (6) を用いると，変位場 ξ_r, ξ_θ が決定できる。y 軸上の点が横方向の変位成分をもたないように（すなわち，$\theta=0$ において $\xi_\theta=0$ のように）拘束した場合，半無限体の弾性変位は次式で与えられることが証明できる。

(7)
$$\xi_r=-\frac{2P}{\pi E}\cos\theta\log r-\frac{(1-\nu)P}{\pi E}\theta\sin\theta+B\cos\theta,$$
$$\xi_\theta=\frac{2\nu P}{\pi E}\sin\theta+\frac{2P}{\pi E}\log r\sin\theta-\frac{(1-\nu)P}{\pi E}\theta\cos\theta+\frac{(1-\nu)P}{\pi E}\sin\theta-B\sin\theta.$$

定数 B は1点を固定することによって，たとえば，$\theta=0$，$r=a$ において $\xi_r=0$ と置くことによって決定できる。しかしこの問題に特有の $r=\infty$ における対数特異性は除去できない。これは2次元問題の特殊性である。相当する3次元の場合あるいは動的な場合には，無限遠においてこのような対数的無限大の変位はない。

［問　題］

9.2　式 (6) と (7) を証明し，式 (5) は例2の問題の厳密解を与えることを示せ。

9.3　境界 $y=0$ 上に大きさ $\tau\cos\alpha x$ のせん断力を受ける半無限板 $(-\infty<x<\infty,\ 0\leq y<\infty)$ 中の応力を求めよ。ただし，τ と α は与えられた定数である。［注：応力関数 $\Phi=(Ae^{\alpha y}+Be^{-\alpha y}+Cye^{\alpha y}+Dye^{-\alpha y})\sin\alpha x$ を考えよ。］

9.4　関数 $(M_t/2\pi)\theta$ は応力関数となることを示せ。ただし M_t は定数である。このような応力関数を用いて解ける境界値問題を考え，定数 M_t の物理的意味を明らかにせよ。

9.5　完全弾性材料からなる図 P9.5 のような2次元のくさびを考える。くさびの一

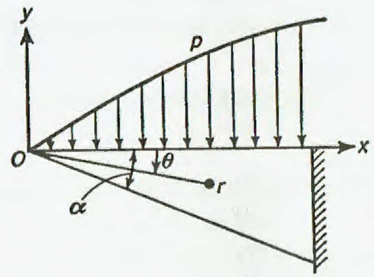

図 P 9.5

つの辺 $(\theta=0)$ は垂直方向の圧力分布 $p(r)=Pr^m$（P, m は定数）を受けるが，もう一つの辺 $(\theta=\alpha)$ は自由である場合，この問題はつぎのような形の Airy の応力関数 $\Phi(r,\theta)$ によって解けることを示せ。

$m\neq0$　$(m>0$ あるいは $m<0)$ の場合

(1)　$\Phi=r^{m+2}[a\cos(m+2)\theta+b\sin(m+2)\theta+c\cos m\theta+d\sin m\theta],$

$m=0$ の場合

(2)　$\Phi=Kr^2\left[-\tan\alpha\cos^2\theta+\dfrac{1}{2}\sin2\theta+\alpha-\theta\right].$

上式の定数 a, b, c, d, K を定めよ。また，くさびの先端近傍 $(r\to0)$ における応力 σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{r\theta}$, 傾き $\partial v/\partial r$ および2次導関数 $\partial^2v/\partial r^2$ の “有界性”（つまり，0か，有限かあるいは無限大か）を検討せよ。ただし，v は θ の増加する方向の変位成分である。