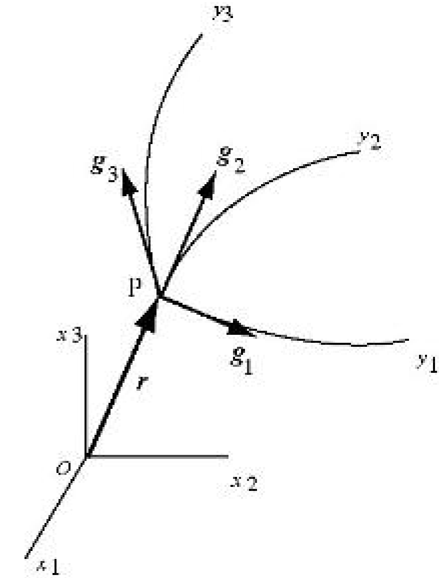
ベクトルとテンソルの基礎

- 連続体力学の計算では，ベクトル（vector）とテンソル（tensor）を多用する.
- ベクトル（vector）とテンソル（tensor）は連続体力学に関する表記をするための言語である.
- はじめに，**ベクトルとテンソルの基礎**を学ぶ.

- 連続体力学では、ベクトル（Vector）とテンソル（Tensor）を利用して様々な基礎方程式を記述する。
- この授業では「直交デカルト座標系」場合だけ取り上げる
    - 一般曲線座標系は取り上げない

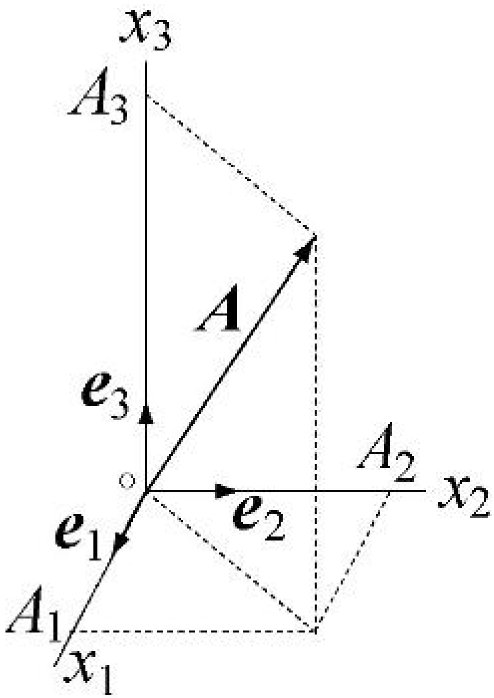


一般曲線座標系

添え字付き表示と総和規約（１）

- 直交デカルト座標系（O-x_1, x_2, x_3）のx_1, x_2, x_3方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ と書く
- $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$　を基本ベクトルと呼ぶ、または基底ベクトル（Base vector, basis vector）

添え字付き表示と総和規約（2）



直交デカルト座標系で表したベクトルの例

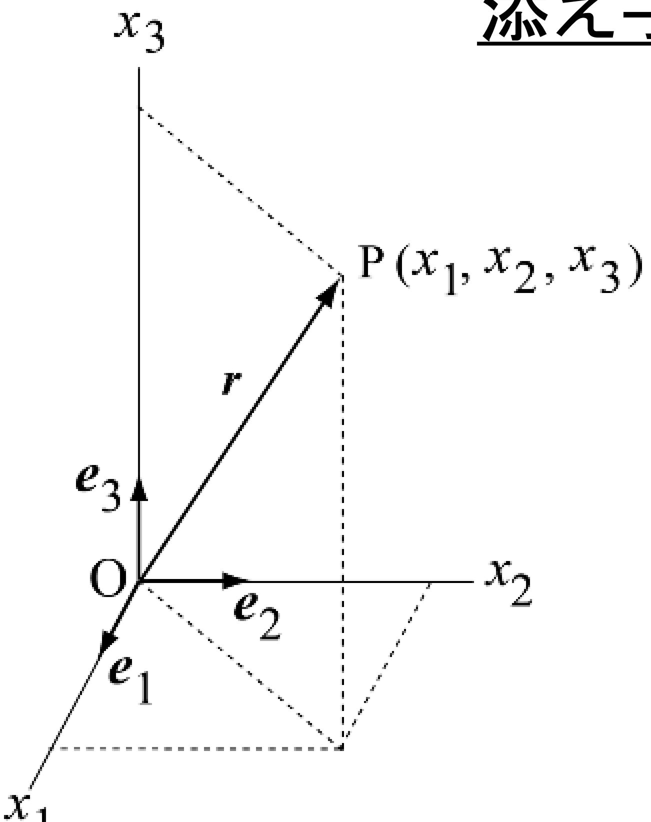
ベクトルの書き方

- ✓ 印刷物やワードプロセッサでは"太字"（Bold face、ボールド)

$$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}$$

- ✓ 手書きの時は、（板書）、下にティルダ、二重線にするなどする。本講義ではティルダを使用する

添え字付き表示と総和規約(3)



直交デカルト座標系で表した位置ベクトルの例

ベクトルの書き方

- ✓ 印刷物やワードプロセッサでは“太字”(Bold face、ボールド)

$$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}$$

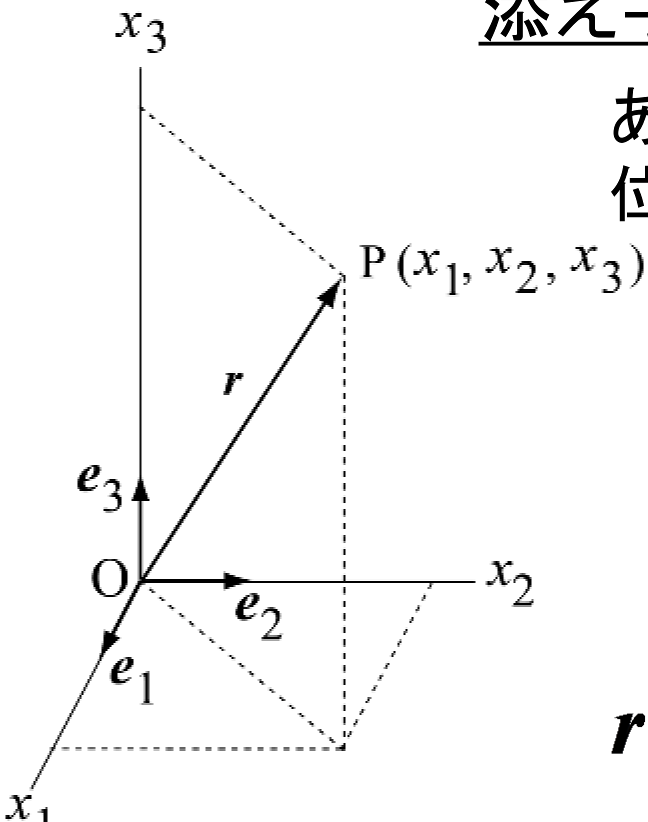
- ✓ 手書きの時は、(板書)、下にティルダ、二重線にするなどする。本講義ではティルダを使用する

ある点 $\mathrm{P}\,(x_1, x_2, x_3)$ を表すベクトル $\boldsymbol{r}$ を点Pの位置ベクトルという

$$\boldsymbol{r} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3$$

(x_1, x_2, x_3)を位置ベクトルの**成分**という

添え字付き表示と総和規約(3)



直交デカルト座標系で表した位置ベクトルの例

ある点 P (x_1, x_2, x_3) を表すベクトル $\boldsymbol{r}$ を点Pの位置ベクトルという

$$\boldsymbol{r} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3$$

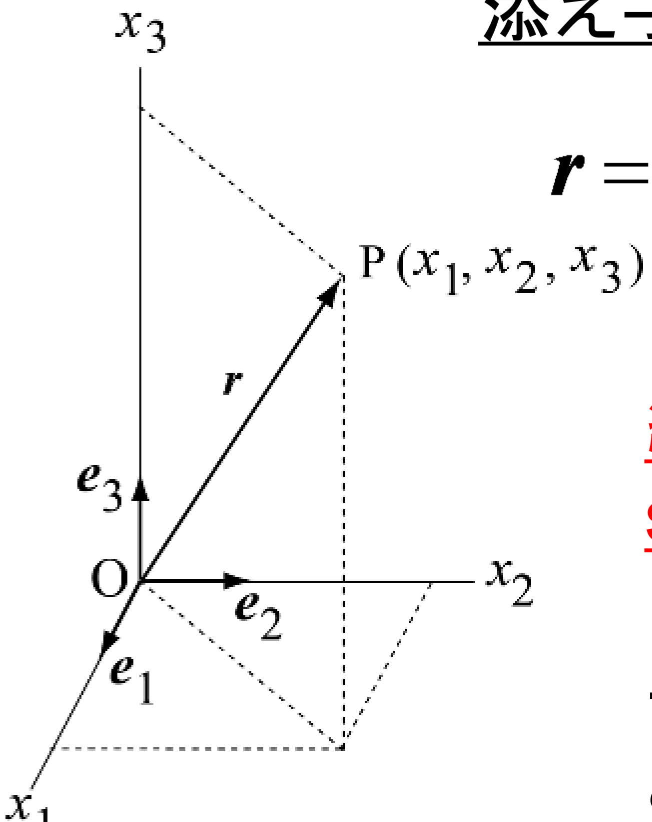
x_i $(i=1,2 \text{ or } 3)$、すなわち、x_1、x_2 又は x_3を表す

$$\boldsymbol{r} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i\boldsymbol{e}_i = \boxed{x_i\boldsymbol{e}_i}$$

総和規約

添え字付き表示と総和規約(4)

$$\boldsymbol{r} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i\boldsymbol{e}_i = \boxed{x_i\boldsymbol{e}_i}$$



直交デカルト座標系で表した位置ベクトルの例

総和規約(Summation convention, summation rule)

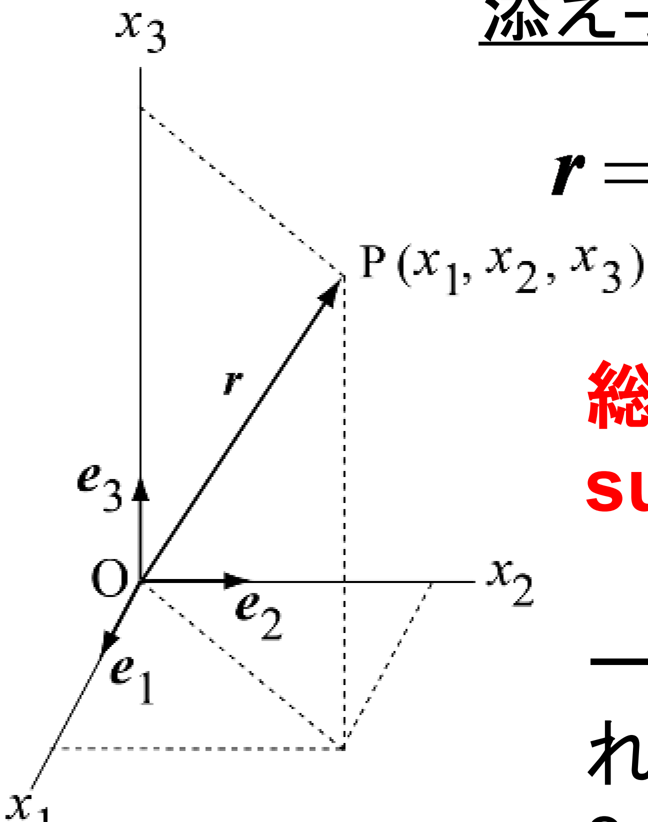
一つの項の中で同じ指標が2回現れるとき：総和1~3を行う（三次元問題）

総和を行う指標：擬標(dummy index、ダミーインデックス）

擬表の記号は何でも同じ結果となる

$$\boldsymbol{r} = x_i\boldsymbol{e}_i = x_j\boldsymbol{e}_j = x_k\boldsymbol{e}_k = x_l\boldsymbol{e}_l = \cdots$$

添え字付き表示と総和規約(4)



直交デカルト座標系で表した位置ベクトルの例

$$\boldsymbol{r} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i\boldsymbol{e}_i = \boxed{x_i\boldsymbol{e}_i}$$

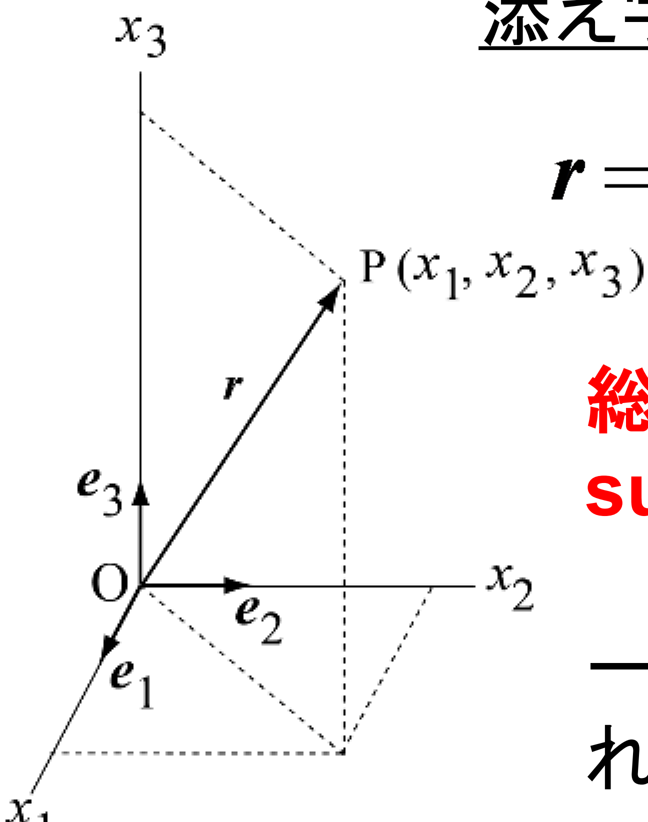
総和規約(Summation convention, summation rule)

一つの項の中で同じ指標が1回だけ現れるとき：総和は行わない（1、2　又は3　とする）

総和を行わない指標：自由指標(free index、フリーインデックス）

一般に、 $x_i \neq x_j \neq x_k \neq x_l \neq \cdots$ に注意

添え字付き表示と総和規約(5)



直交デカルト座標系で表した位置ベクトルの例

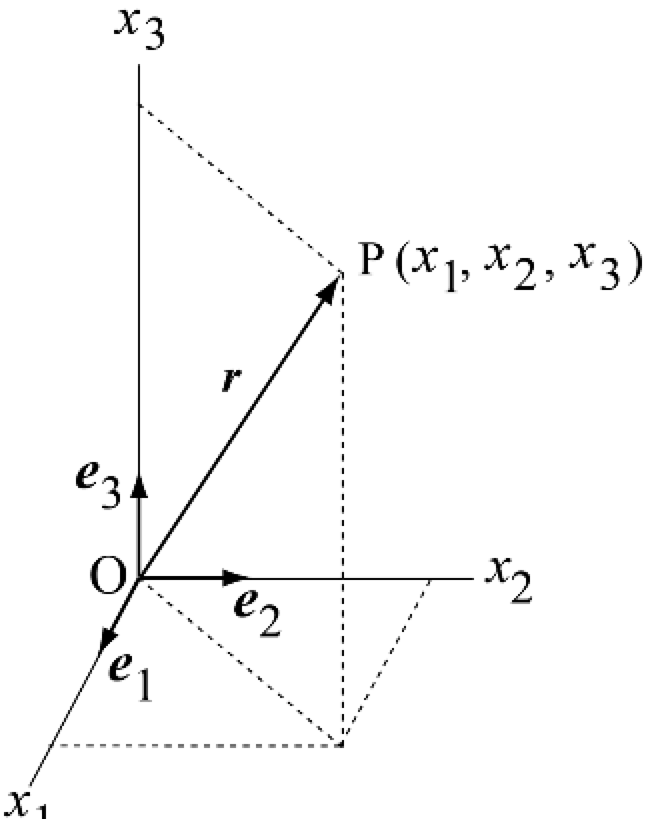
$$\boldsymbol{r} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i\boldsymbol{e}_i = \boxed{x_i\boldsymbol{e}_i}$$

総和規約(Summation convention, summation rule)

一つの項の中で同じ指標が3回以上現れるとき：意味が定義されない

一般に使用しない。どうしても使用する場合、その意味をその都度定義する。

例：　$\boldsymbol{U}_i = x_i y_i \boldsymbol{e}_i$　(No sum on i)
（iに対して総和を行わない、i=1, 2 又は 3）



直交デカルト座標系で表した位置ベクトルの例

- クロネッカーのデルタ
  (Kronecker Delta)

$$\delta_{ij}$$

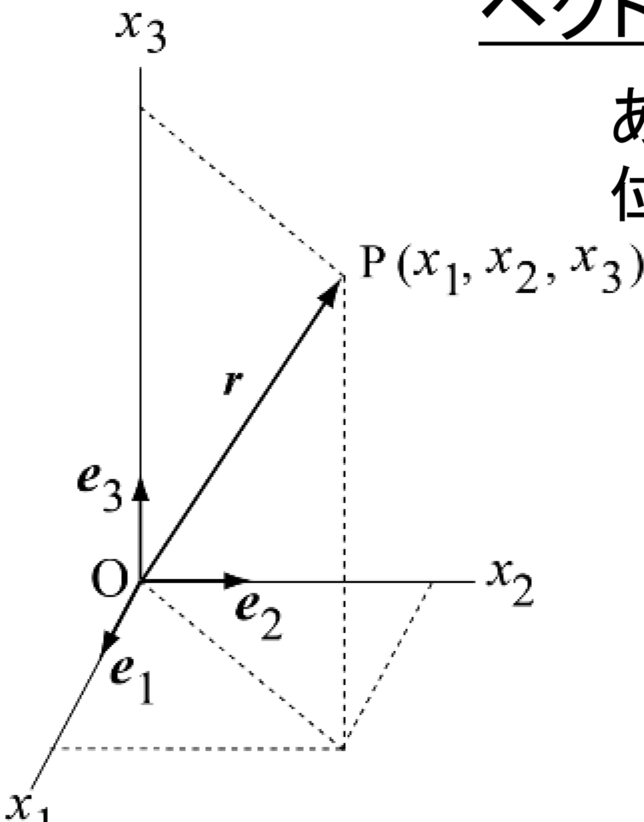
- 交代記号
  (Permutation symbol,
  alternating symbol)

$$e_{ijk}$$

板書で説明

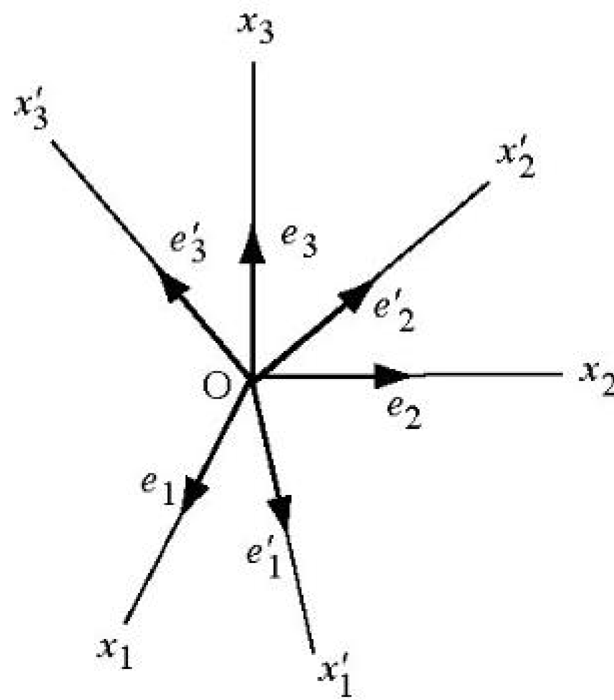
ベクトルの座標変換

ある点 P (x_1, x_2, x_3) を表すベクトル $\boldsymbol{r}$ を点Pの位置ベクトルという



直交デカルト座標系で表した位置ベクトルの例

$$\boldsymbol{r} = x_i \boldsymbol{e}_i$$



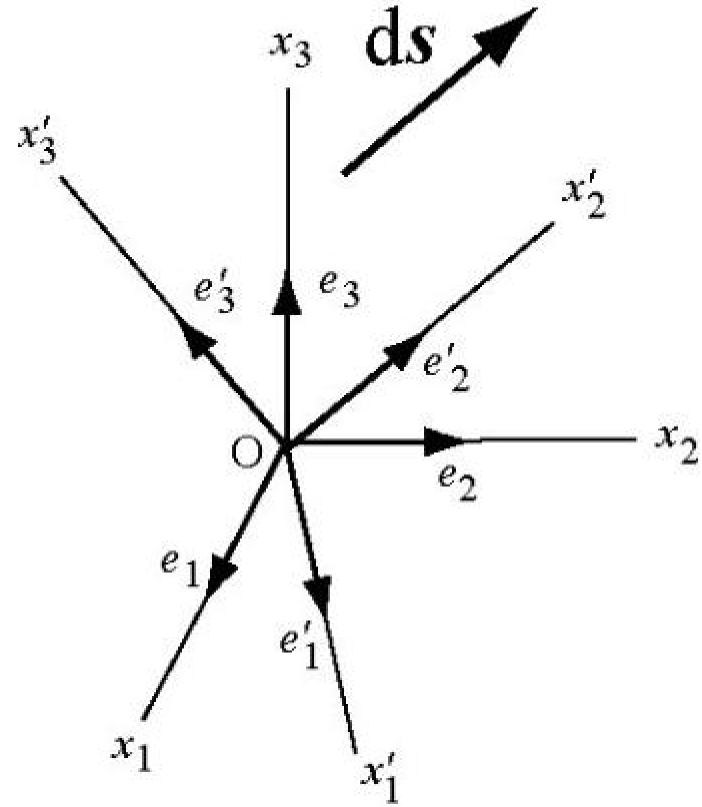
座標系では

$$\boldsymbol{r} = x'_i \boldsymbol{e}'_i$$

すなわち: $\boldsymbol{r} = x_i \boldsymbol{e}_i = x'_i \boldsymbol{e}'_i$

ベクトルとテンソルの基礎的事項

ベクトルの座標変換



微小長さを持つベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mathrm{d}x_i \boldsymbol{e}_i$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mathrm{d}x'_i \boldsymbol{e}'_i$$

ベクトルとテンソルの基礎的事項

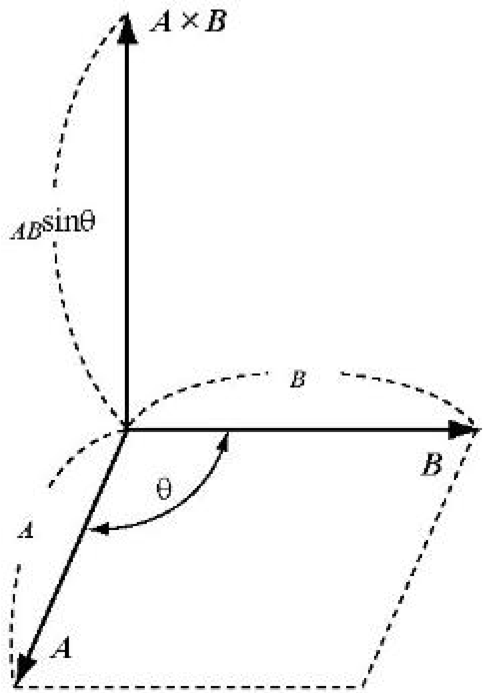


図５　ベクトルの外積

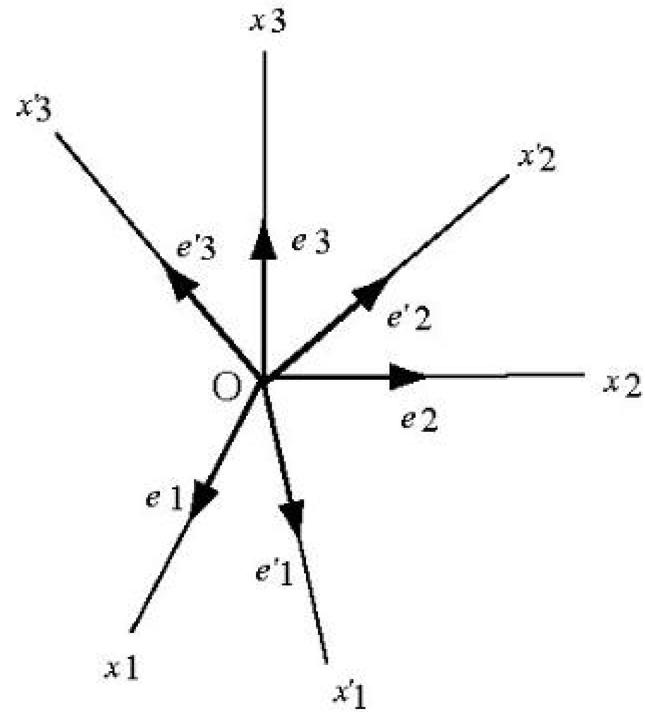
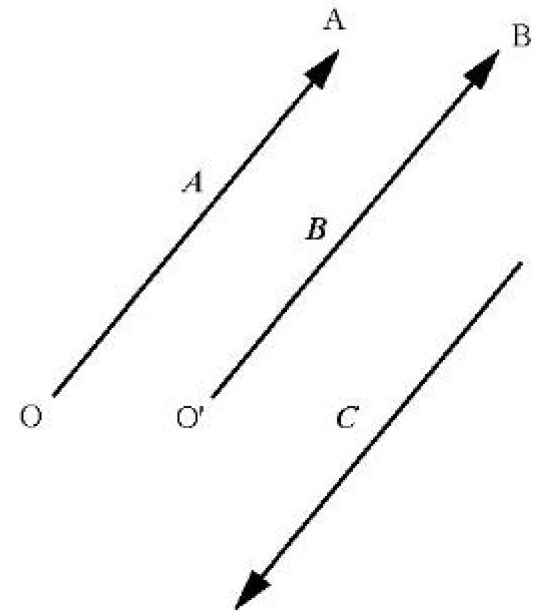
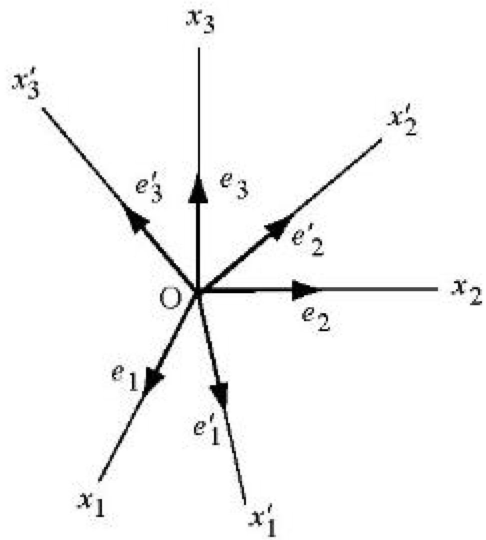


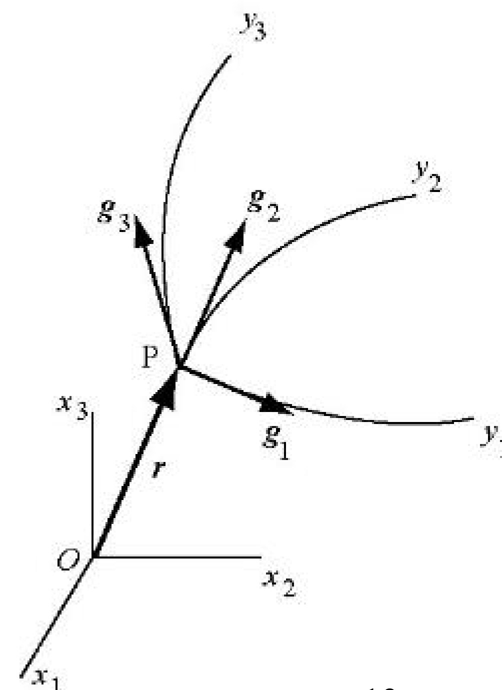
図６　座標変換

ベクトルとテンソルの基礎的事項





$O - x_1, x_2, x_3$　座標系と $O - x'_1, x'_2, x'_3$

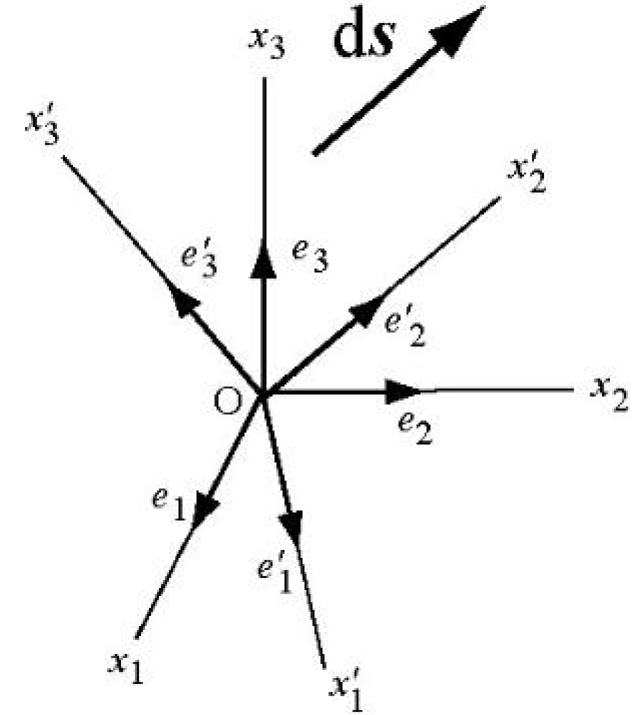


一般座標系

ベクトルの座標変換

$$\boldsymbol{a} = a_i \boldsymbol{e}_i \quad \left(O - x_1, x_2, x_3\right)$$

$$= a'_i \boldsymbol{e}'_i \quad \left(O - x'_1, x'_2, x'_3\right)$$



基本ベクトルの座標変換

$$\boldsymbol{e}_i = Q_{ji} \boldsymbol{e}'_j$$

これを利用して次式を導く

$$\boldsymbol{a} = a_i \boldsymbol{e}_i = a_i \left(Q_{ji} \boldsymbol{e}'_j\right)$$

$$= Q_{ji} a_i \boldsymbol{e}'_j$$

$$= a'_i \boldsymbol{e}'_i$$

- 2つの座標系の間のベクトル成分の変換則(Transformation Law)を導いた
- ベクトルの成分は“必ず”この変換則に従う

テンソル $\boldsymbol{A} = A_{ijk\cdots n}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k\cdots\boldsymbol{e}_n$

n 階のテンソル (n-th order tensor)

このような表記をテンソルのダイヤデックス表示（Dyadic expression）という

ただし、$\left(O - x_1, x_2, x_3\right)$座標系の表記

ベクトル: $\boldsymbol{a} = a_i\boldsymbol{e}_i$

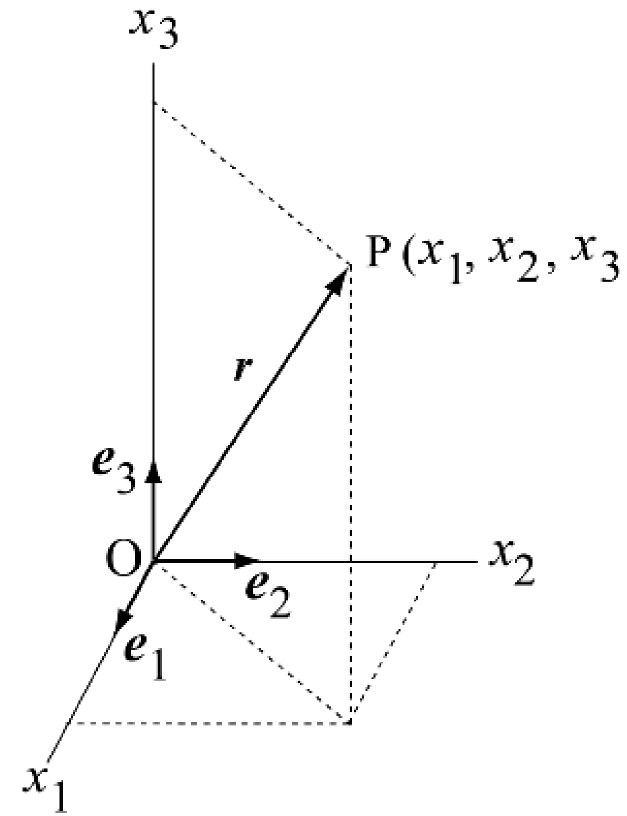
はテンソルの特別な場合

1階のテンソル（First Order Tensor)

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= A_{ijk\cdots n}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k\cdots\boldsymbol{e}_n \\
&= A_{ijk\cdots n}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_k \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_n
\end{aligned}
$$

$\otimes$:テンソル積（Tensor Product)

テンソル積を用いて表すこともある

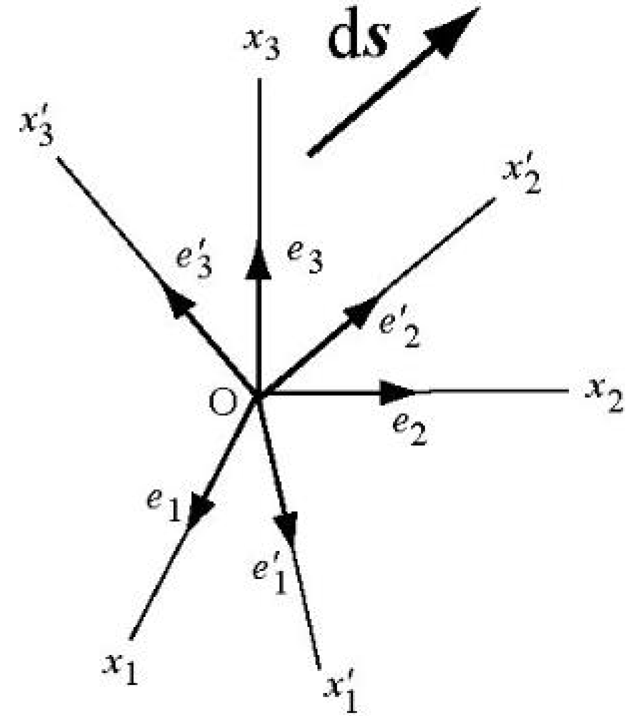


$\left(O - x_1, x_2, x_3\right)$ 座標系

テンソル $\boldsymbol{A} = A_{ijk\cdots n}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k\cdots\boldsymbol{e}_n$

$\left(O - x_1', x_2', x_3'\right)$ 座標系では、

$$\boldsymbol{A} = A'_{ijk\cdots n}\boldsymbol{e}'_i\boldsymbol{e}'_j\boldsymbol{e}'_k\cdots\boldsymbol{e}'_n$$



テンソルの成分 $A_{ijk\cdots n}$ もベクトルと同じ変換則に従う

$$A'_{ijkl\cdots} = Q_{ip}Q_{jq}Q_{kr}Q_{ls}\cdots A_{pqrs\cdots}$$

$$A_{ijkl\cdots} = Q_{pi}Q_{qj}Q_{rk}Q_{sl}\cdots A'_{pqrs\cdots}$$

テンソルの和と差（同じ階数のテンソルだけに適用）

例）2階のテンソルに対して

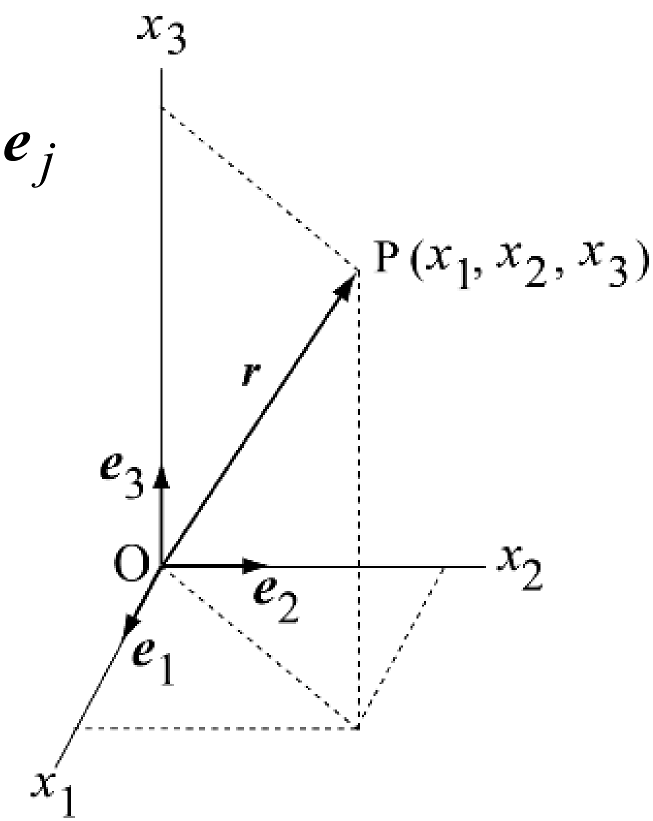
$$\boldsymbol{A} = A_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \quad \boldsymbol{B} = B_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \quad \boldsymbol{C} = C_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$$

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \pm \boldsymbol{C}$ であるとき、

$$A_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = B_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \pm C_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$$
$$= \left(B_{ij} \pm C_{ij}\right)\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$$

すなわち、 $A_{ij} = B_{ij} \pm C_{ij}$

（成分どうしの和や差を行う）



$\left(O - x_1, x_2, x_3\right)$ 座標系

テンソル A とスカラー α の積

$$\alpha\boldsymbol{A} = \alpha A_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = \left(\alpha A_{ij}\right)\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$$

（成分の α 倍）

テンソルの積

- テンソル積（Tensor Product）
- テンソルの内積
- テンソルとベクトルの内積

（説明は板書）

テンソルの微分

n階テンソル $\boldsymbol{A}$ の座標 x_i に対する微分

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x_p}=\frac{\partial\left(A_{ijk\cdots n}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k\cdots\boldsymbol{e}_n\right)}{\partial x_p}=\frac{\partial A_{ijk\cdots n}}{\partial x_p}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k\cdots\boldsymbol{e}_n$$

n階テンソル $\boldsymbol{A}$ の座標 x'_i に対する微分

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x'_p}=\frac{\partial\left(A_{ijkl\cdots n}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_l\cdots\boldsymbol{e}_n\right)}{\partial x'_p}$$

$$=\frac{\partial\left(A'_{ijkl\cdots n}\boldsymbol{e}'_i\boldsymbol{e}'_j\boldsymbol{e}'_k\boldsymbol{e}'_l\cdots\boldsymbol{e}'_n\right)}{\partial x'_p}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x_p}\boldsymbol{e}_p$$

$$=\frac{\partial\left(Q_{ir}Q_{js}Q_{kt}Q_{lu}\cdots Q_{nv}A_{rstu\cdots v}\boldsymbol{e}'_i\boldsymbol{e}'_j\boldsymbol{e}'_k\cdots\boldsymbol{e}'_n\right)}{\partial x_q}\frac{\partial x_q}{\partial x'_p}$$

$$=Q_{ir}Q_{js}Q_{kt}Q_{lu}\cdots Q_{nv}\frac{\partial x_q}{\partial x'_p}\frac{\partial A_{rstu\cdots v}}{\partial x_q}\boldsymbol{e}'_i\boldsymbol{e}'_j\boldsymbol{e}'_k\cdots\boldsymbol{e}'_n$$

$$=\boxed{Q_{ir}Q_{js}Q_{kt}Q_{lu}\cdots Q_{nv}Q_{pq}\frac{\partial A_{rstu\cdots v}}{\partial x_q}}\boldsymbol{e}'_i\boldsymbol{e}'_j\boldsymbol{e}'_k\cdots\boldsymbol{e}'_n \quad \because \frac{\partial x_q}{\partial x'_p}=Q_{pq}$$

テンソル成分の変換式に従う

$\dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x_p}\boldsymbol{e}_p$ もまたテンソルである

$\boldsymbol{A}$ がn階のテンソルなら、

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x_p}\boldsymbol{e}_p$$

は(n+1)階のテンソルである

テンソルの主値と不変量

２階のテンソル $\boldsymbol{A} = A_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$ とベクトル $\boldsymbol{b} = b_i\boldsymbol{e}_i$

さらにスカラ a に対して、式：

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{b} = a\boldsymbol{b}$$

を満足するとき

スカラ a をテンソル $\boldsymbol{A}$ の**固有値**または**主値**

(Eigen value, principal value)

ベクトル $\boldsymbol{b}$ をテンソル $\boldsymbol{A}$ の**固有ベクトル**という

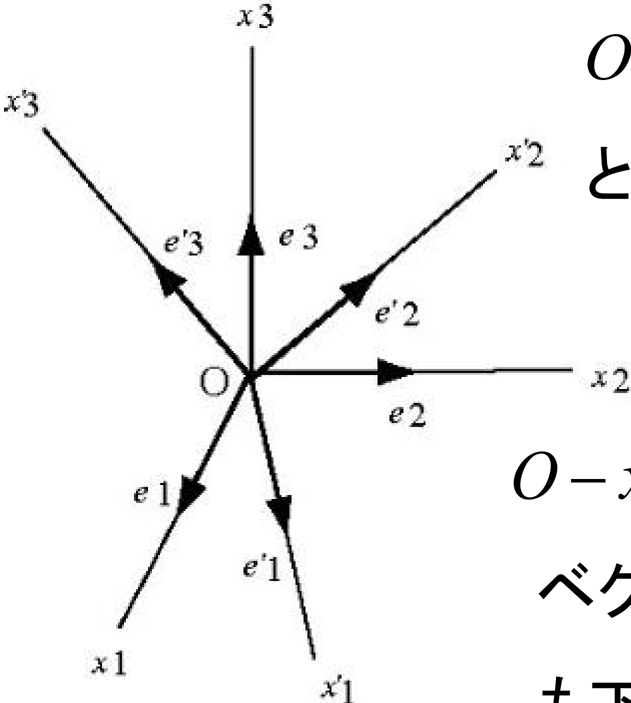
(Eigen vector)

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{b} - a\boldsymbol{b} = \cdots = \left(A_{ij} - a\delta_{ij}\right)b_j\boldsymbol{e}_i$$

テンソルの主値と不変量

詳細は板書

テンソルの商法則



$O - x_1, x_2, x_3$ 座標系で定義されたテンソル c_{ij} とベクトル b_k の積を考える

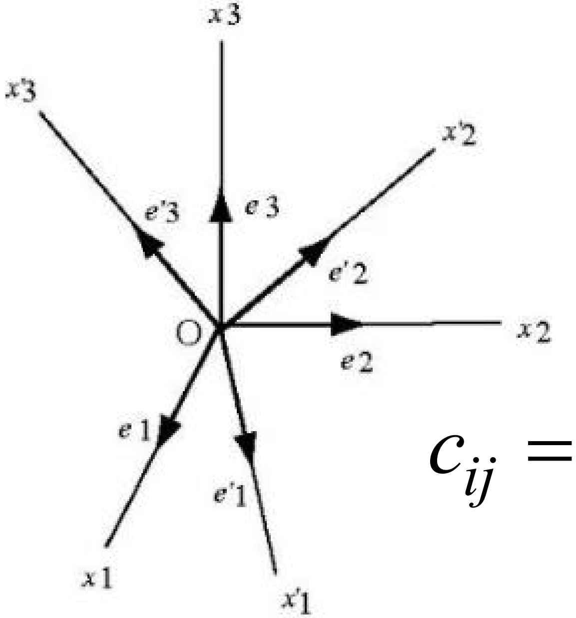
$$\boxed{c_{ij} = a_{ijk} b_k}$$

$O - x_1', x_2', x_3'$ 座標系で定義されたテンソル c_{ij}' と ベクトル b_k' を考える。$O - x_1', x_2', x_3'$ 座標系でも下記の関係が成立する。

$$\boxed{c_{ij}' = a_{ijk}' b_k'}$$

a_{ijk} はテンソルだろうか？

テンソルの商法則



a_{ijk} はテンソルだろうか？

テンソルであるためには、座標変換則に従う必要がある

$$a_{ijk} = Q_{li}Q_{mj}Q_{nk}a'_{lmn} \Longleftrightarrow a'_{ijk} = Q_{il}Q_{jm}Q_{kn}a_{lmn}$$

$$c_{ij} = \underbrace{Q_{ki}Q_{lj}c'_{kl}}_{\text{テンソル}} \qquad \underbrace{b_i = Q_{ki}b'_k}_{\text{ベクトル}}$$

元の式に代入する

$$c_{ij} = a_{ijk}b_k$$

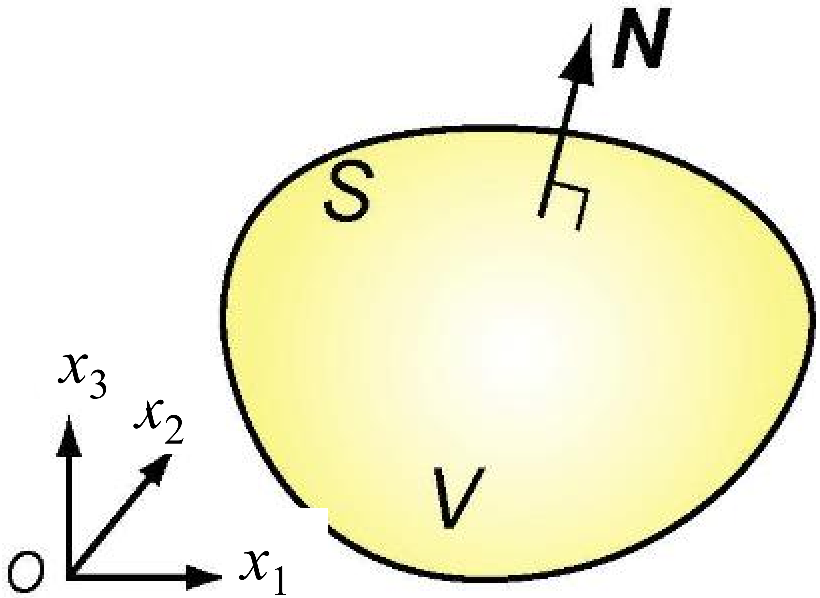
$$= Q_{ki}Q_{lj}c'_{kl} = Q_{ki}Q_{lj}\left(a'_{klm}b'_m\right) = Q_{ki}Q_{lj}\left\{a'_{klm}\left(Q_{mn}b_n\right)\right\}$$

$$= \left(Q_{ki}Q_{lj}Q_{mn}a'_{klm}\right)b_n$$

$\boxed{a_{ijn} = Q_{ki}Q_{lj}Q_{mn}a'_{klm} \text{ が成立、よって } a_{ijk} \text{ はテンソル}}$

ガウスの発散定理(Gauss divergence theorem)

面積分⇔体積積分　の変換を行う



V : volume

S : surface

$\boldsymbol{v}$ をベクトル関数 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(x_1, x_2, x_3)$ として

$$\boldsymbol{v} = v_1 \boldsymbol{e}_1 + v_2 \boldsymbol{e}_2 + v_3 \boldsymbol{e}_3$$

$$\iiint_V \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \mathrm{d}V = \iint_S N_1 v_1 \mathrm{d}S$$

$$\iiint_V \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \mathrm{d}V = \iint_S N_2 v_2 \mathrm{d}S$$

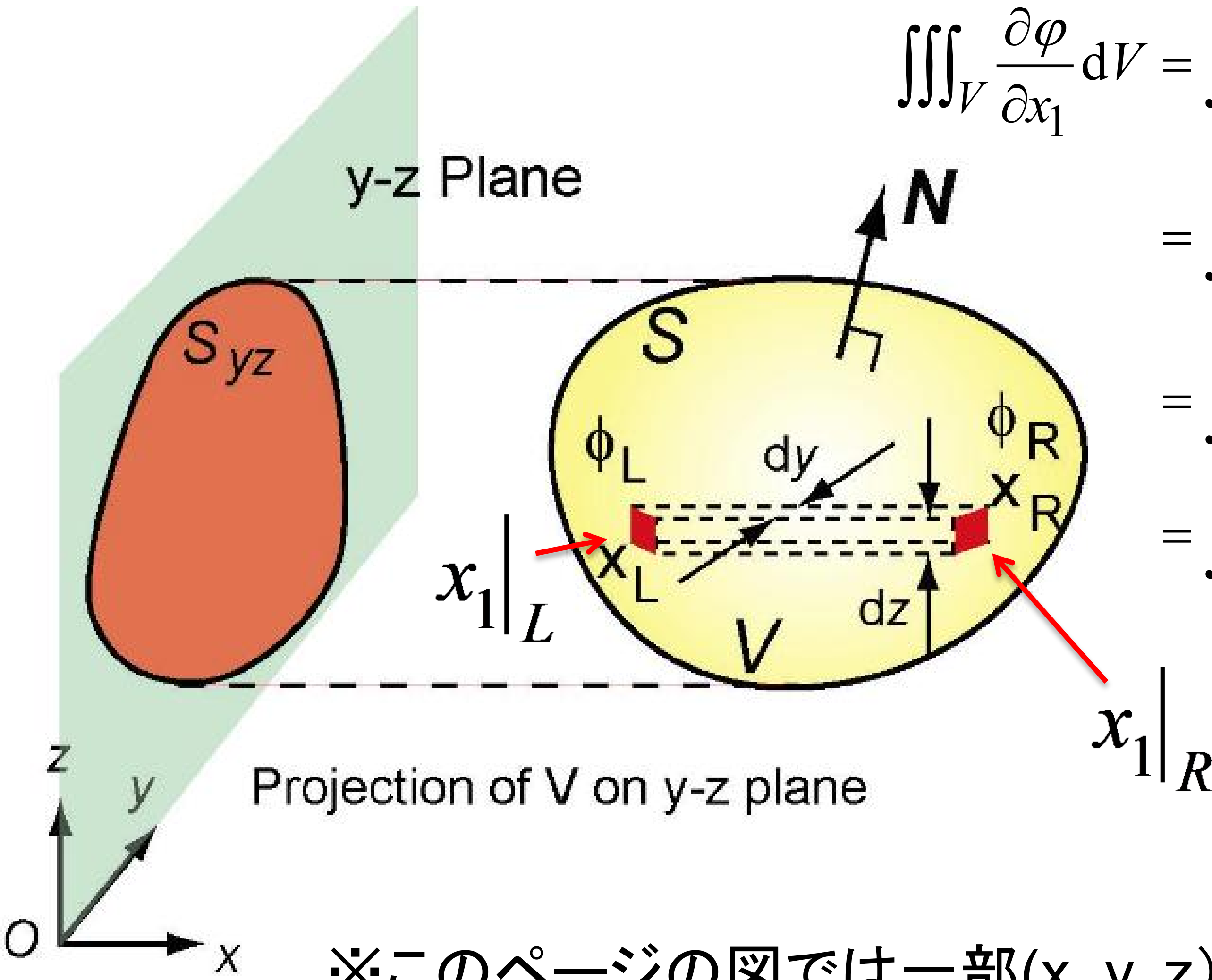
$$\iiint_V \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \mathrm{d}V = \iint_S N_3 v_3 \mathrm{d}S$$

すなわち、

$$\boxed{\iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{v} \mathrm{d}V = \iint_S \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{v} \mathrm{d}S}$$

ガウスの発散定理(Gauss divergence theorem)

証明） $\iiint_V \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \mathrm{d}V = \iint_S N_1 \varphi \mathrm{d}S$ を証明する



$$\iiint_V \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \mathrm{d}V = \iiint_V \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3$$

$$= \iint_{S_{yz}} \left(\int_{x_1|_L}^{x_1|_R} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \mathrm{d}x_1 \right) \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3$$

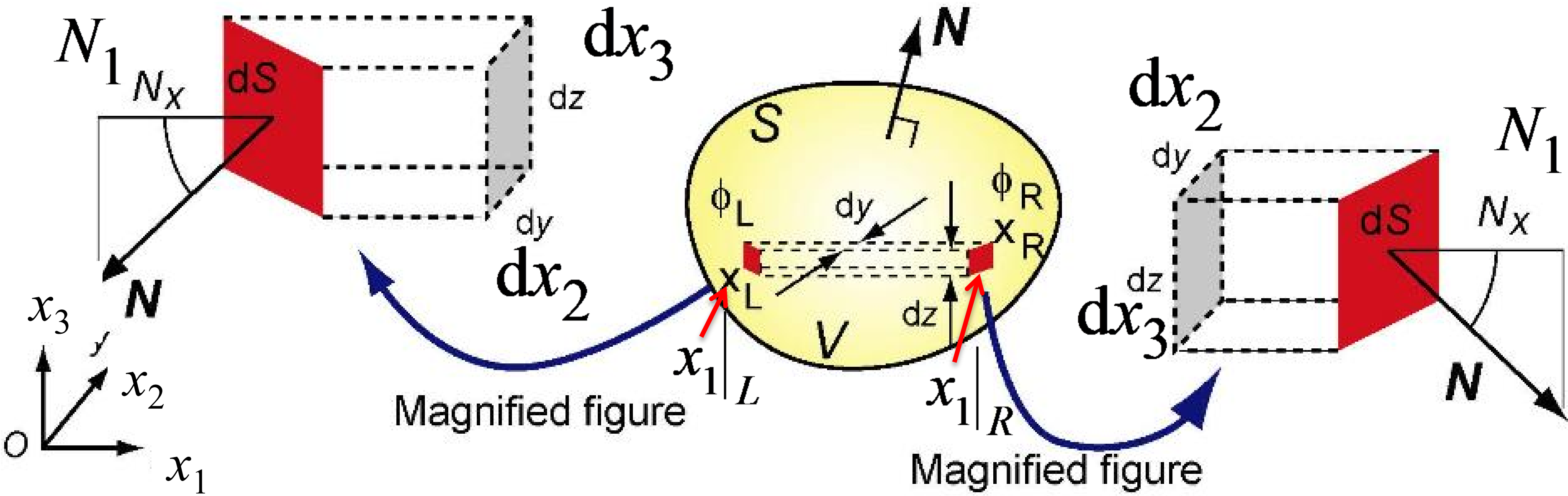
$$= \iint_{S_{yz}} [\varphi]_{x_1|_L}^{x_1|_R} \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3$$

$$= \iint_{S_{yz}} (\varphi_R - \varphi_L) \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3$$

※このページの図では一部(x, y, z)座標系を使用した

ガウスの発散定理(Gauss divergence theorem)

証明)　$\iiint_V \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \mathrm{d}V = \iint_S N_1 \varphi \mathrm{d}S$　を証明する



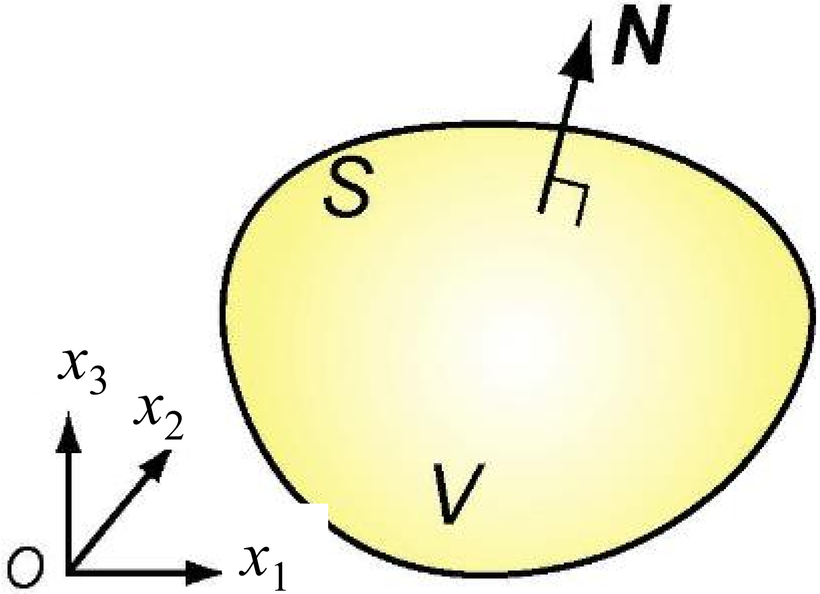
$x_1\big|_L$ では、　$\mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 = -N_1 \mathrm{d}S$　$x_1\big|_R$ では、　$\mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 = N_1 \mathrm{d}S$

$$\iiint_V \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \mathrm{d}V = \iint_{S_{yz}} \left(\varphi_R - \varphi_L\right) \mathrm{d}x_2\, \mathrm{d}x_3 = \iint_{S_R} N_1 \varphi \mathrm{d}S_R + \iint_{S_L} N_1 \varphi \mathrm{d}S_L = \iint_S N_1 \varphi \mathrm{d}S$$

※このページの図では一部(x, y, z)座標系を使用した

ガウスの発散定理(Gauss divergence theorem)

面積分⇔体積積分　の変換を行う



V : volume

S : surface

$\boldsymbol{v}$ をベクトル関数 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(x_1, x_2, x_3)$ として

$$\boldsymbol{v} = v_1 \boldsymbol{e}_1 + v_2 \boldsymbol{e}_2 + v_3 \boldsymbol{e}_3$$

$$\iiint_V \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \mathrm{d}V = \iint_S N_1 v_1 \mathrm{d}S$$

$$\iiint_V \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \mathrm{d}V = \iint_S N_2 v_2 \mathrm{d}S$$

$$\iiint_V \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \mathrm{d}V = \iint_S N_3 v_3 \mathrm{d}S$$

すなわち、

$$\boxed{\iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{v} \mathrm{d}V = \iint_S \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{v} \mathrm{d}S}$$

ベクトルとテンソルの基礎的事項

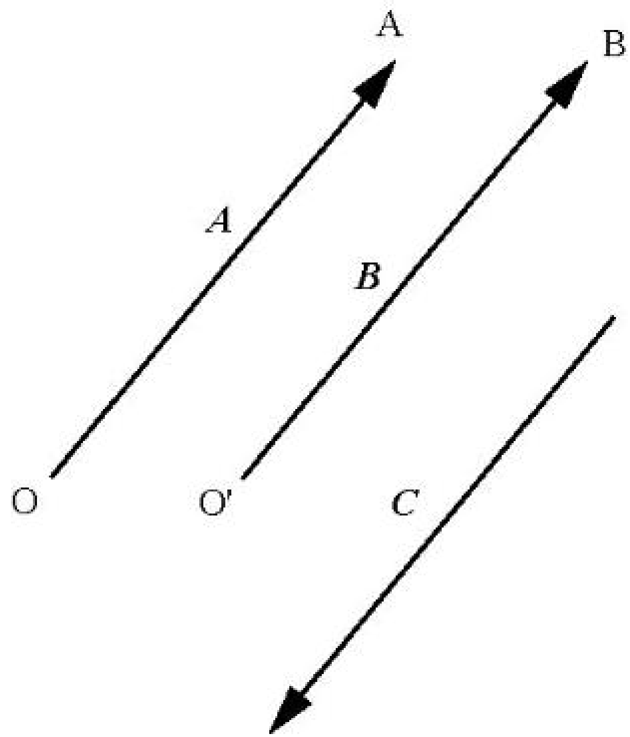


図１　ベクトルの表示

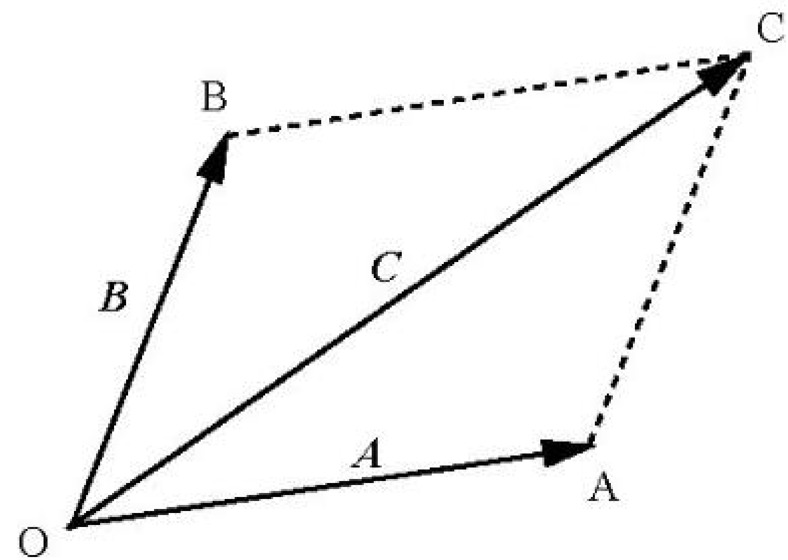
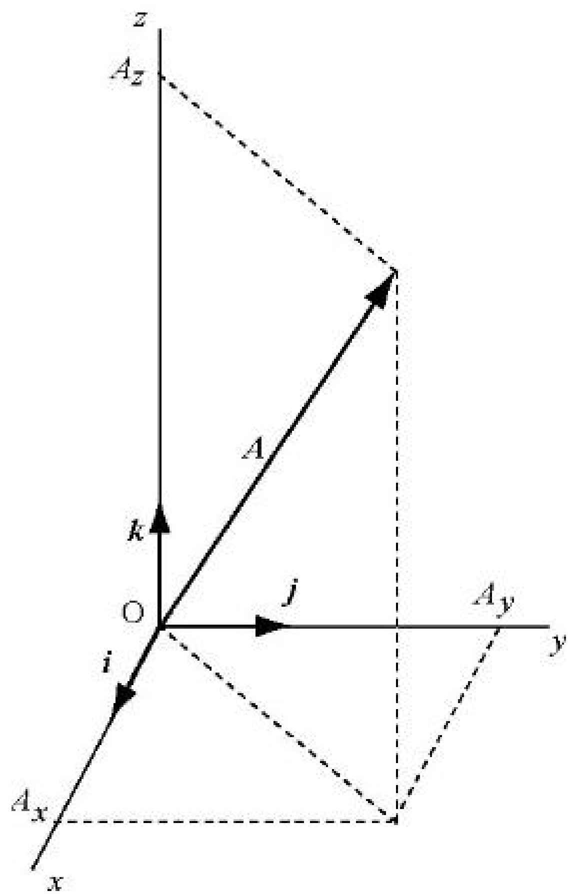
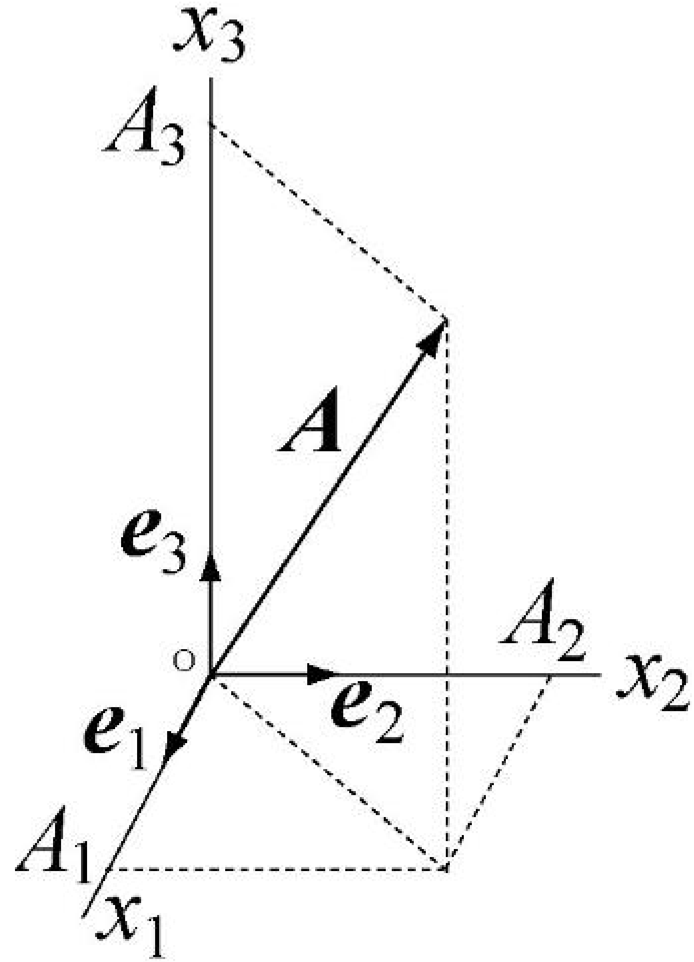


図２　ベクトルの加法

ベクトルとテンソル：ベクトルの成分





$$\boldsymbol{A} = A_x \boldsymbol{i} + A_y \boldsymbol{j} + A_z \boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{A} = A_1 \boldsymbol{e}_1 + A_2 \boldsymbol{e}_2 + A_3 \boldsymbol{e}_3$$

$$= A_i \boldsymbol{e}_i$$

総和規約

本題の前に:ベクトルとテンソルの基礎的事項

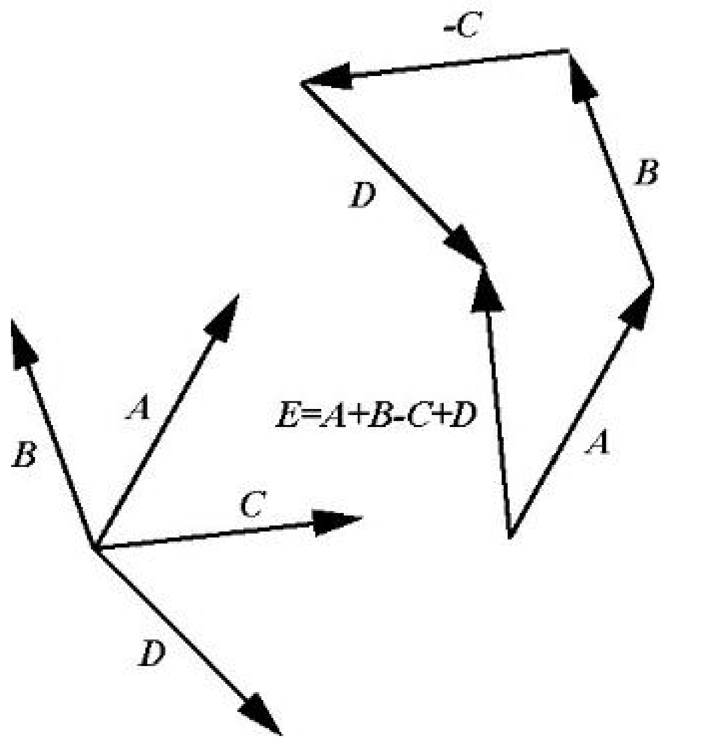


図3　ベクトルの合成

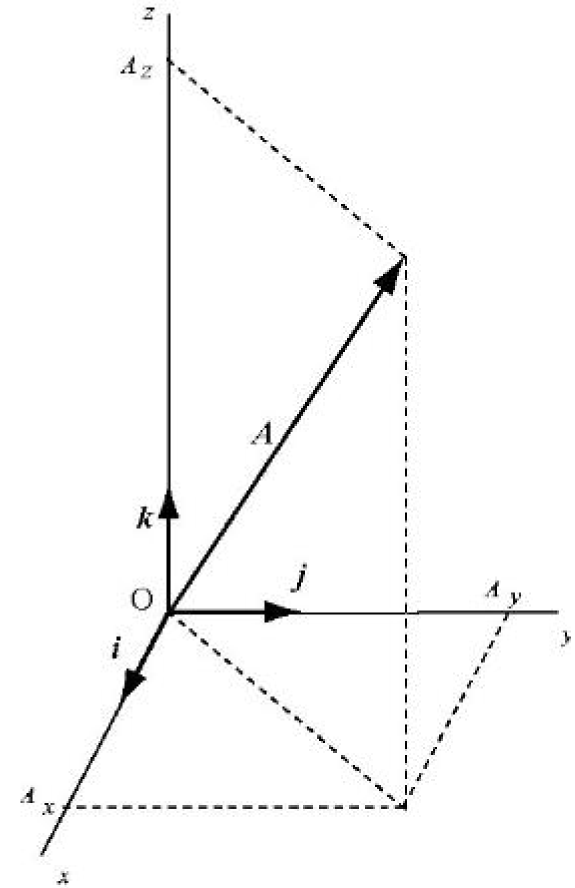


図4　ベクトルの成分

本題の前に:ベクトルとテンソルの基礎的事項

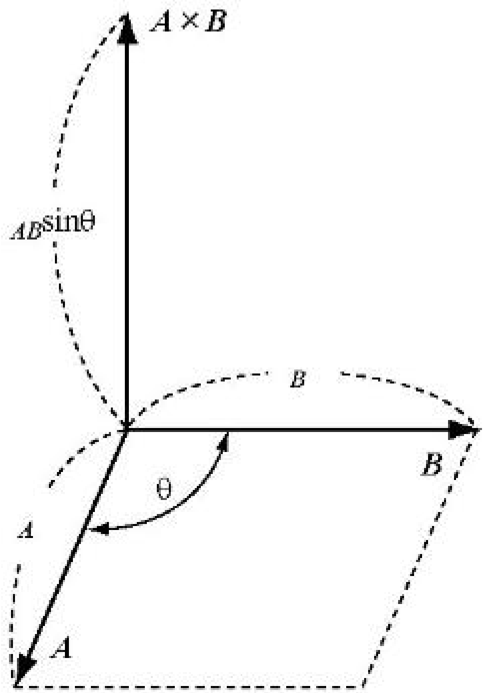


図５　ベクトルの外積

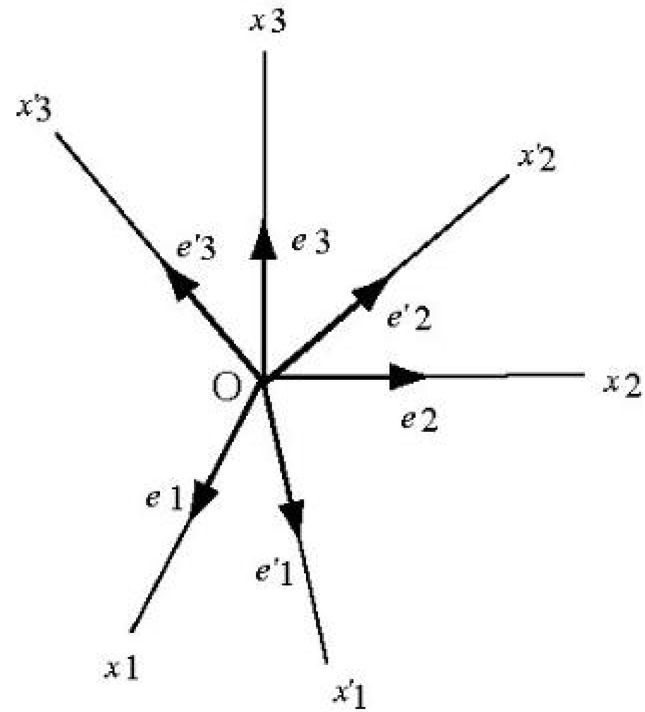


図６　座標変換

本題の前に:ベクトルとテンソルの基礎的事項

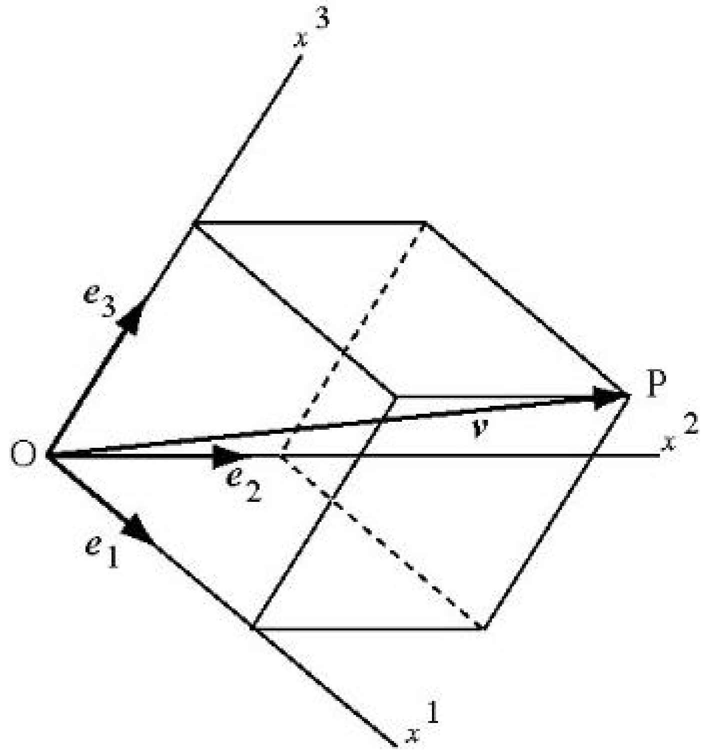


図7　斜交座標系

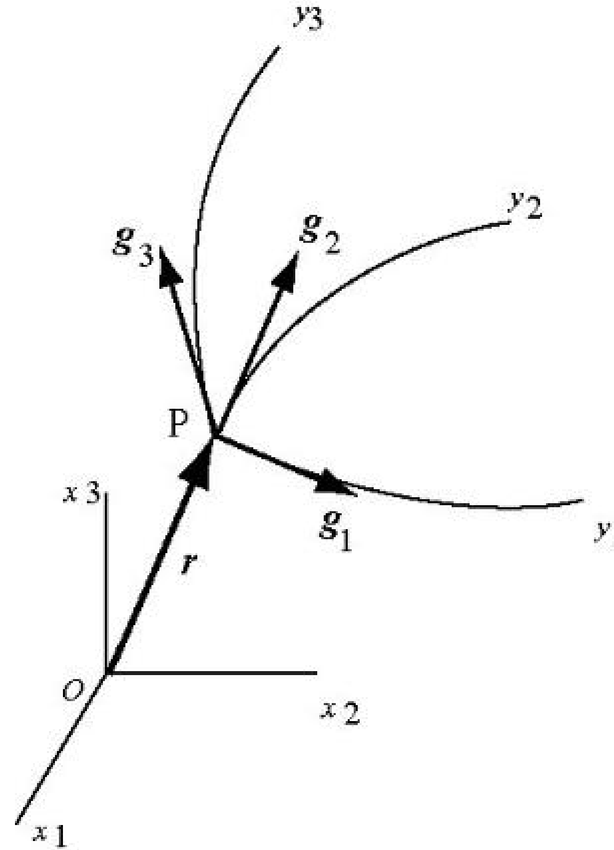
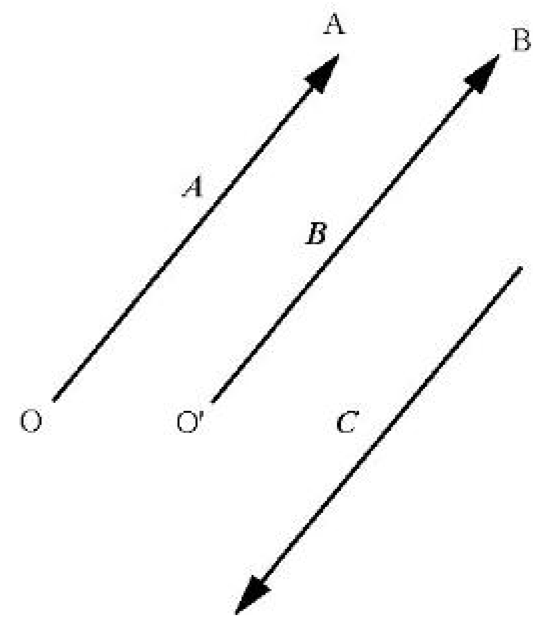
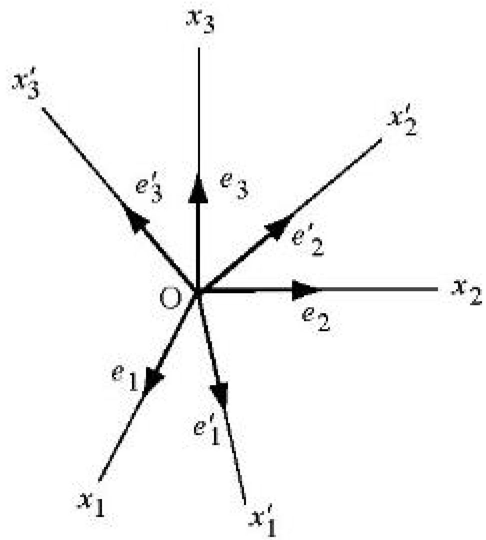


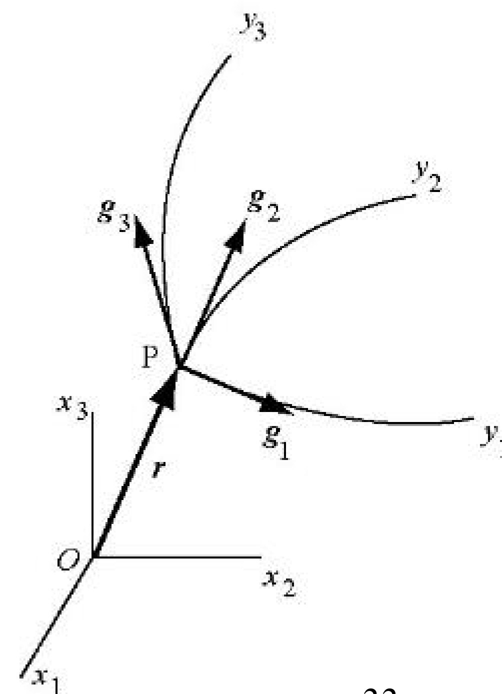
図８　一般座標系

ベクトルとテンソルの基礎的事項



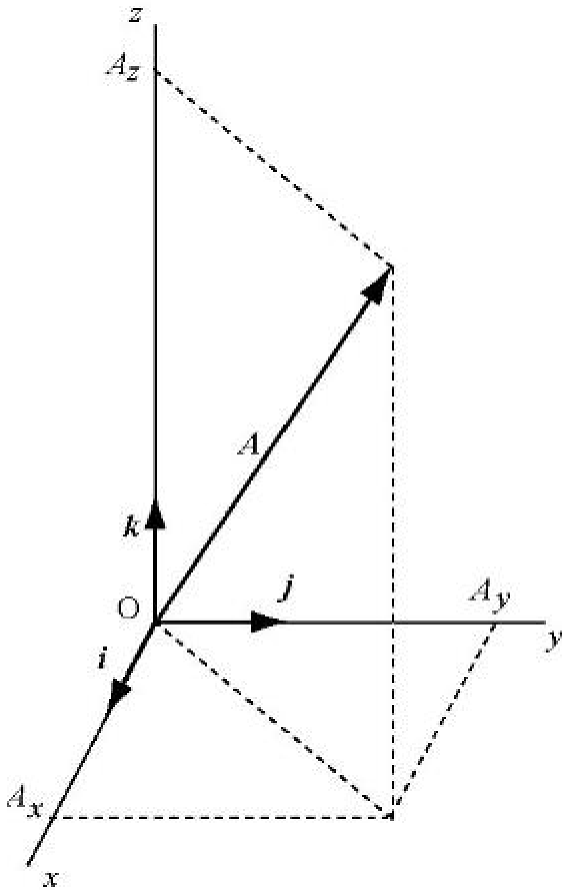


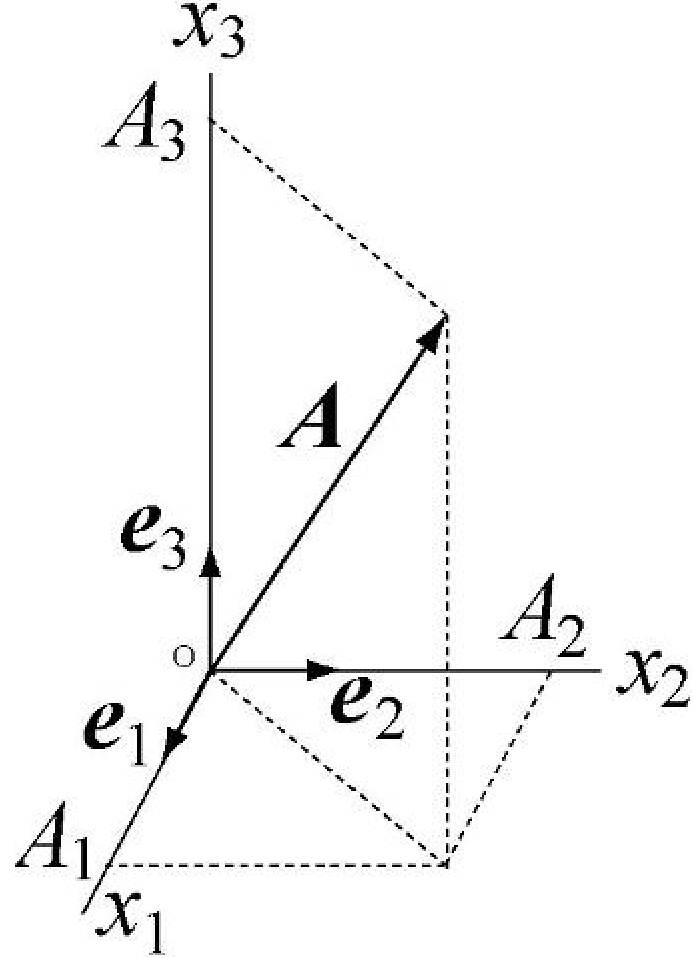
$O-x_1, x_2, x_3$　座標系と $O-x'_1, x'_2, x'_3$



一般座標系

ベクトルとテンソル：ベクトルの成分



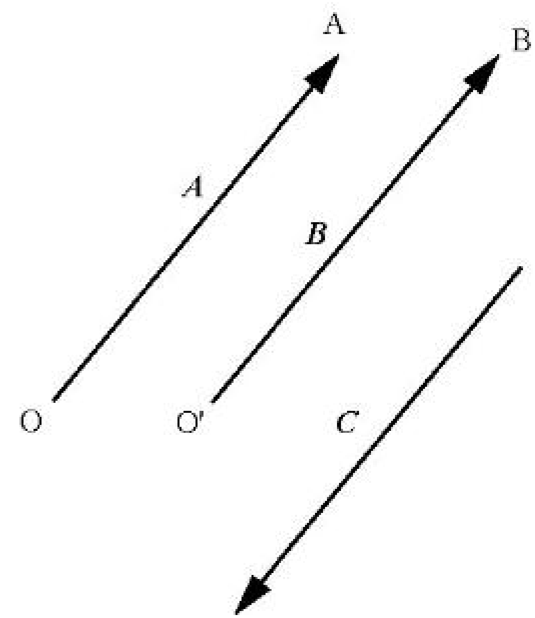


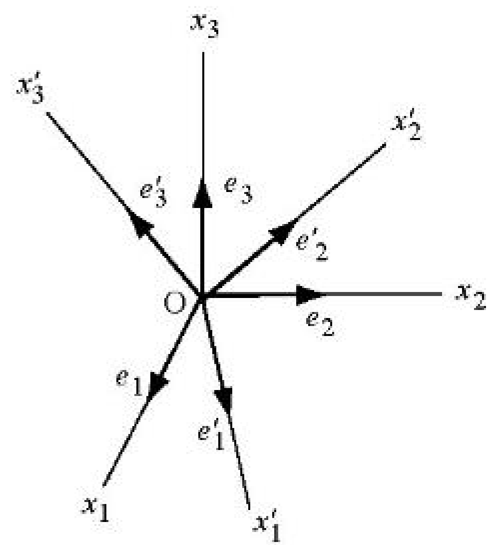
$$\boldsymbol{A} = A_x \boldsymbol{i} + A_y \boldsymbol{j} + A_z \boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{A} = A_1 \boldsymbol{e}_1 + A_2 \boldsymbol{e}_2 + A_3 \boldsymbol{e}_3$$

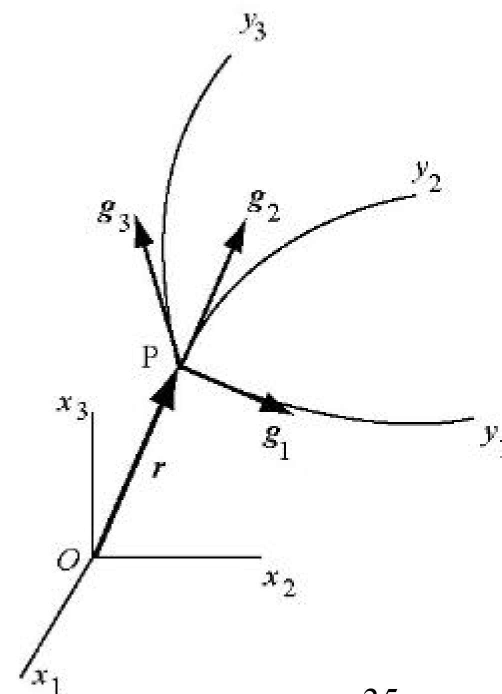
$$= A_i \boldsymbol{e}_i$$ 総和規約

ベクトルとテンソルの基礎的事項





$O-x_1,x_2,x_3$　座標系と $O-x'_1,x'_2,x'_3$



一般座標系

ベクトルとテンソルの基礎的事項

テンソル

二階のテンソル（Second Order Tensor）は，ベクトルからベクトルへの一次変換（Linear Transformation）の作用素（オペレータ，Operator）として定義される.

$$\boldsymbol{v} = \left(\text{Second Order Tensor}\right)\cdot \boldsymbol{u}$$