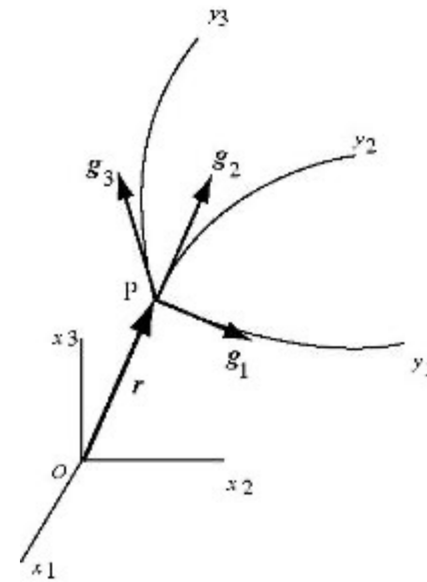
ベクトルとテンソルの基礎

- 連続体力学の計算では，ベクトル（vector）とテンソル（tensor）を多用する．
- ベクトル（vector）とテンソル（tensor）は連続体力学に関する表記をするための言語である．
- はじめに，**ベクトルとテンソルの基礎**を学ぶ．

- 連続体力学では、ベクトル（Vector）とテンソル（Tensor）を利用して様々な基礎方程式を記述する。
- この授業では「直交デカルト座標系」場合だけ取り上げる
  - 一般曲線座標系は取り上げない



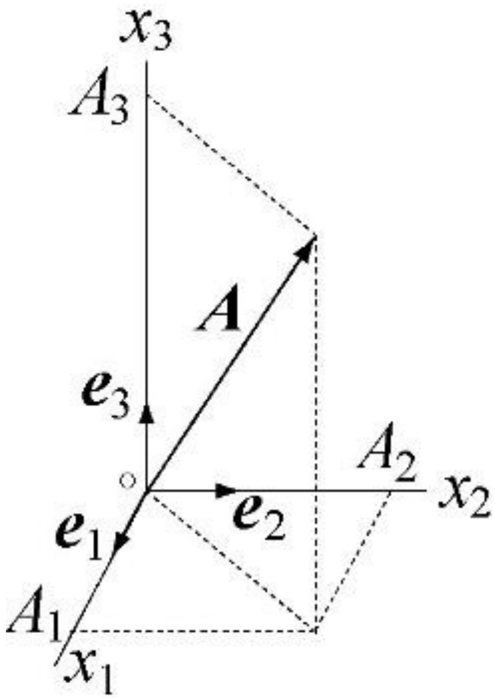
一般曲線座標系

添え字付き表示と総和規約（1）

- 直交デカルト座標系（O-x_1, x_2, x_3）のx_1, x_2, x_3方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ と書く

- $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$　を基本ベクトルと呼ぶ、または基底ベクトル（Base vector, basis vector）

添え字付き表示と総和規約（2）



直交デカルト座標系で表したベクトルの例

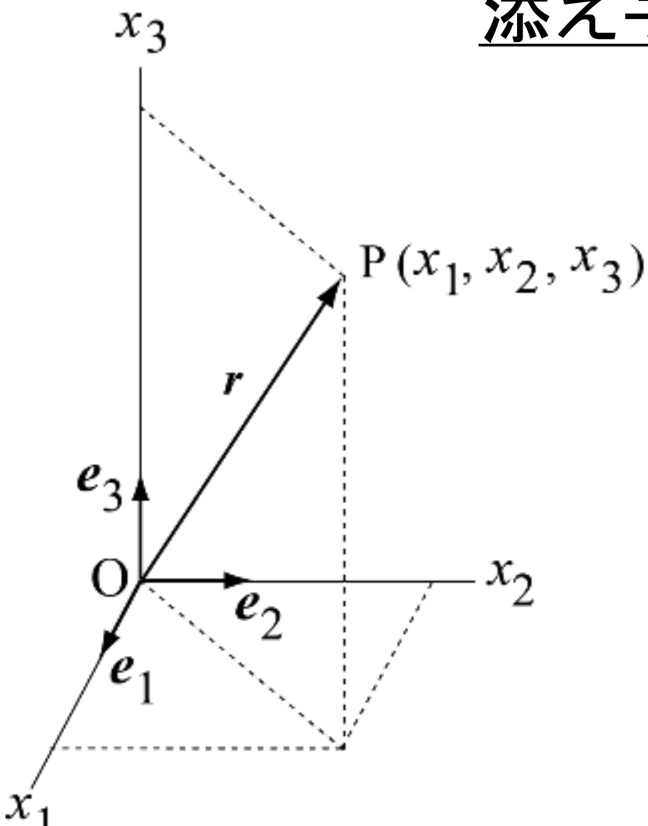
ベクトルの書き方

- ✓ 印刷物やワードプロセッサでは“太字”（Bold face、ボールド)

$$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}$$

- ✓ 手書きの時は、（板書）、下にティルダ、二重線にするなどする。本講義ではティルダを使用する

添え字付き表示と総和規約(3)



直交デカルト座標系で表した位置ベクトルの例

ベクトルの書き方

- ✓ 印刷物やワードプロセッサでは“太字”（Bold face、ボールド）

$$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}$$

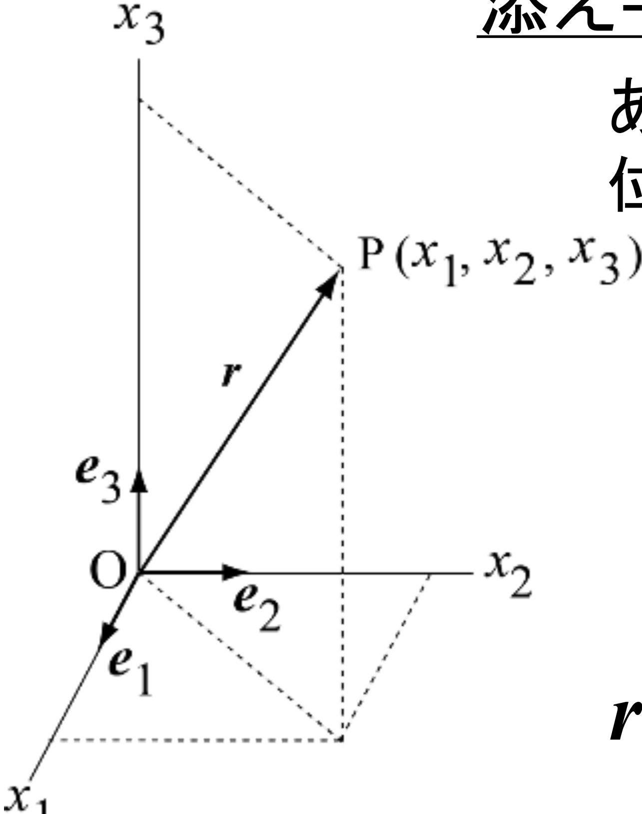
- ✓ 手書きの時は、（板書）、下にティルダ、二重線にするなどする。本講義ではティルダを使用する

ある点 P (x_1, x_2, x_3) を表すベクトル $\boldsymbol{r}$ を点Pの位置ベクトルという

$$\boldsymbol{r} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3$$

(x_1, x_2, x_3)を位置ベクトルの**成分**という

添え字付き表示と総和規約(3)



直交デカルト座標系で表した位置ベクトルの例

ある点 P (x_1, x_2, x_3) を表すベクトル $\boldsymbol{r}$ を点Pの位置ベクトルという

$$\boldsymbol{r} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3$$

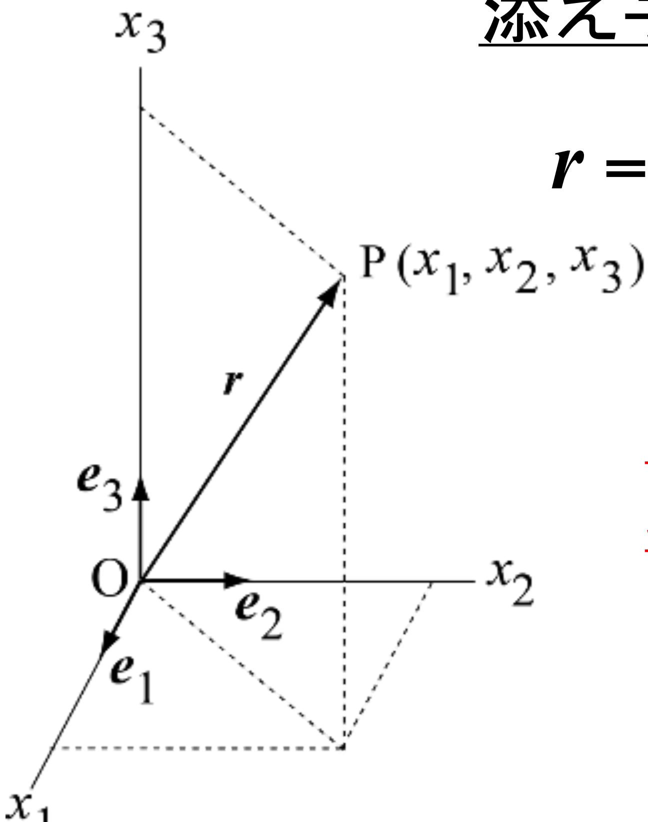
x_i (i=1,2 or 3)、すなわち、x_1、x_2 又は x_3を表す

$$\boldsymbol{r} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i\boldsymbol{e}_i = \boxed{x_i\boldsymbol{e}_i}$$

総和規約

添え字付き表示と総和規約(4)

$$\boldsymbol{r} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i\boldsymbol{e}_i = \boxed{x_i\boldsymbol{e}_i}$$



直交デカルト座標系で表した位置ベクトルの例

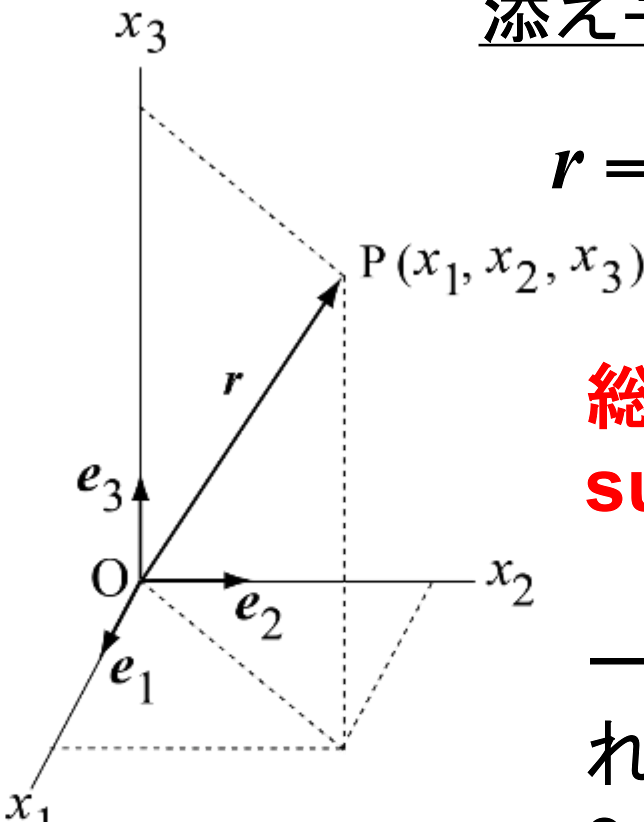
総和規約(Summation convention, summation rule)

一つの項の中で同じ指標が2回現れるとき：総和1~3を行う（三次元問題）

総和を行う指標：擬標(dummy index、ダミーインデックス）
擬表の記号は何でも同じ結果となる

$$\boldsymbol{r} = x_i\boldsymbol{e}_i = x_j\boldsymbol{e}_j = x_k\boldsymbol{e}_k = x_l\boldsymbol{e}_l = \cdots$$

添え字付き表示と総和規約(4)



直交デカルト座標系で表した位置ベクトルの例

$$\boldsymbol{r} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i\boldsymbol{e}_i = \boxed{x_i\boldsymbol{e}_i}$$

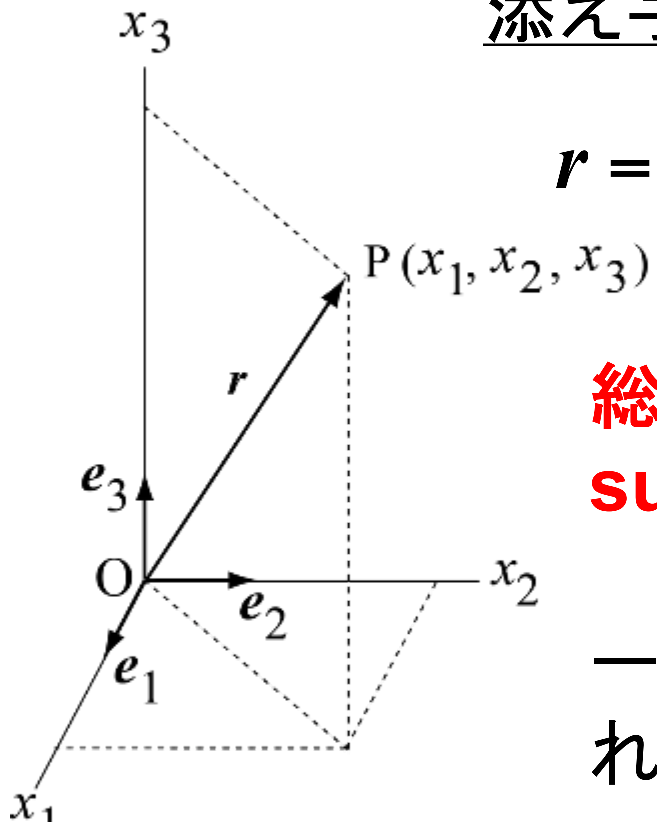
総和規約(Summation convention, summation rule)

一つの項の中で同じ指標が1回だけ現れるとき：総和は行わない（1、2　又は3　とする）

総和を行わない指標：自由指標(free index、フリーインデックス）

一般に、　$x_i \neq x_j \neq x_k \neq x_l \neq \cdots$　に注意

添え字付き表示と総和規約(5)



直交デカルト座標系で表した位置ベクトルの例

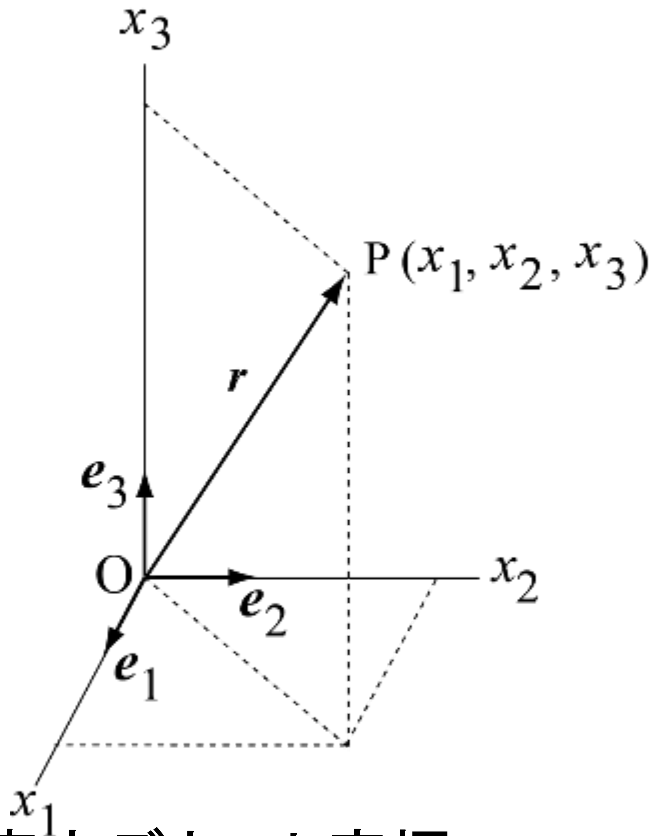
$$\boldsymbol{r} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i\boldsymbol{e}_i = \boxed{x_i\boldsymbol{e}_i}$$

総和規約(Summation convention, summation rule)

一つの項の中で同じ指標が3回以上現れるとき：意味が定義されない

一般に使用しない。どうしても使用する場合、その意味をその都度定義する。

例：　$\boldsymbol{U}_i = x_i y_i \boldsymbol{e}_i$　(No sum on i)
（iに対して総和を行わない、i=1, 2 又は 3）



直交デカルト座標系で表した位置ベクトルの例

- クロネッカーのデルタ
  （Kronecker Delta)

$$\delta_{ij}$$

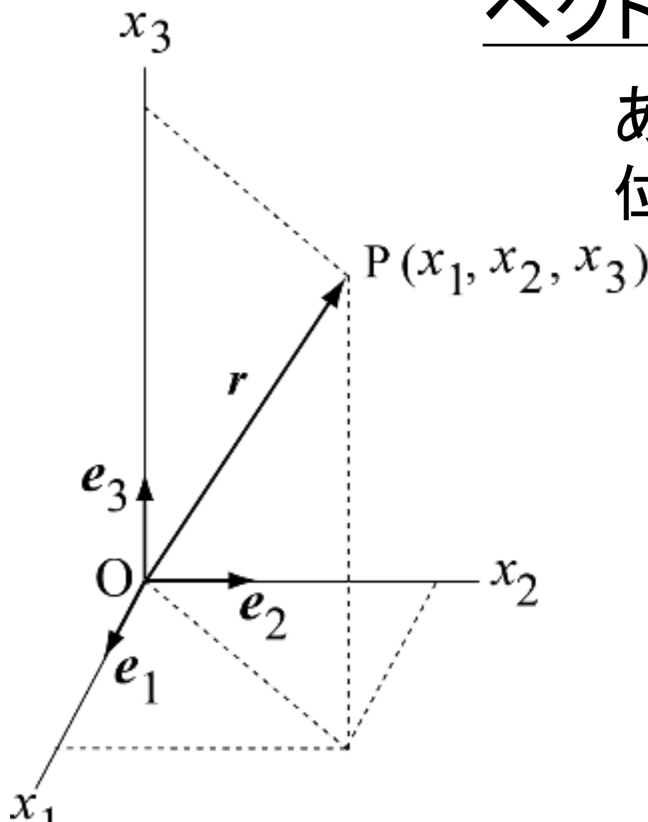
- 交代記号
  (Permutation symbol,
  alternating symbol)

$$e_{ijk}$$

板書で説明

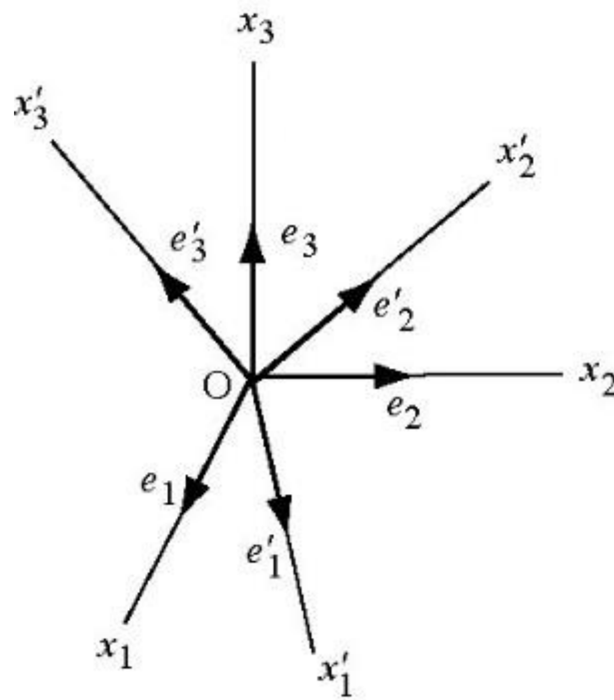
ベクトルの座標変換

ある点 P (x_1, x_2, x_3) を表すベクトル $\boldsymbol{r}$ を点Pの位置ベクトルという



直交デカルト座標系で表した位置ベクトルの例

$$\boldsymbol{r} = x_i \boldsymbol{e}_i$$



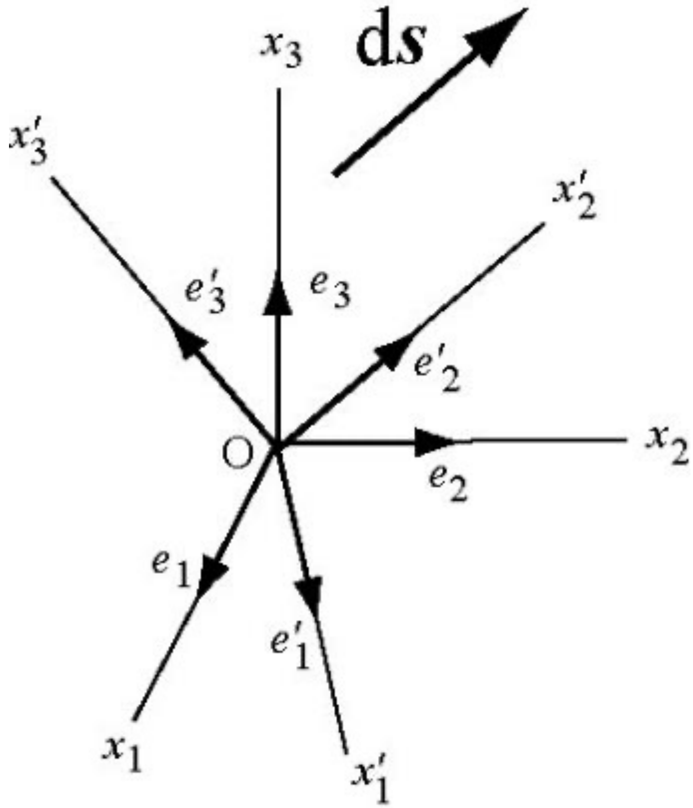
座標系では

$$\boldsymbol{r} = x'_i \boldsymbol{e}'_i$$

すなわち: $$\boldsymbol{r} = x_i \boldsymbol{e}_i = x'_i \boldsymbol{e}'_i$$

ベクトルとテンソルの基礎的事項

ベクトルの座標変換



微小長さを持つベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mathrm{d}x_i \boldsymbol{e}_i$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mathrm{d}x'_i \boldsymbol{e}'_i$$

ベクトルとテンソルの基礎的事項

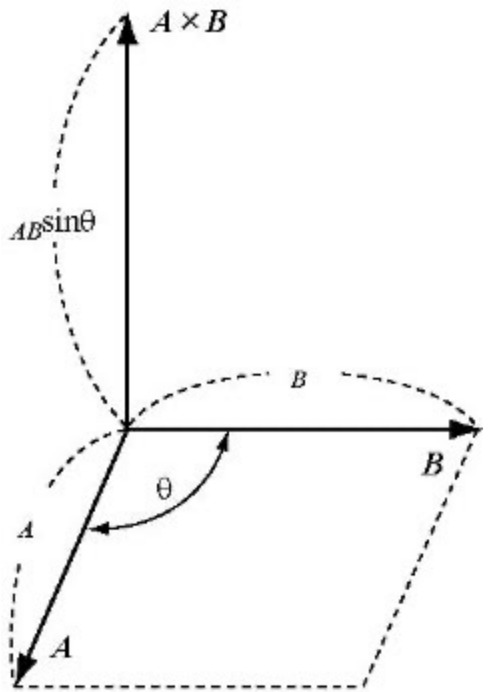


図５ ベクトルの外積

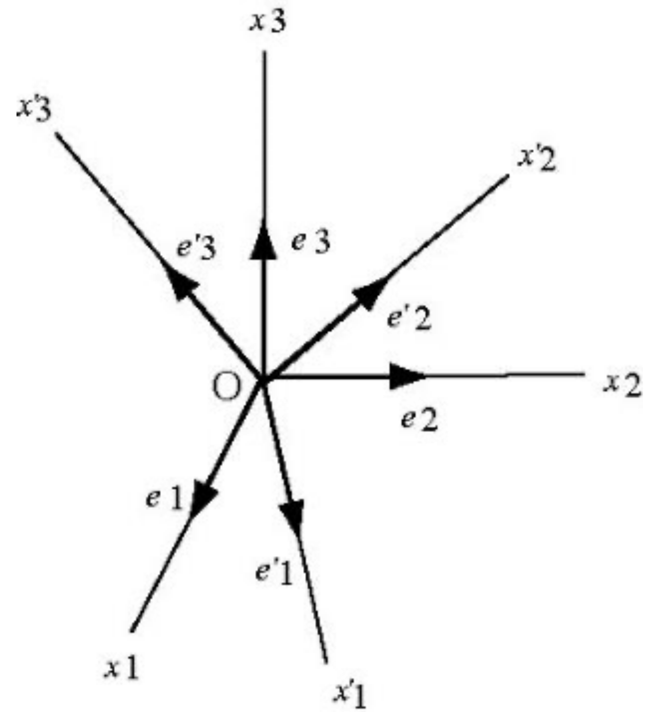
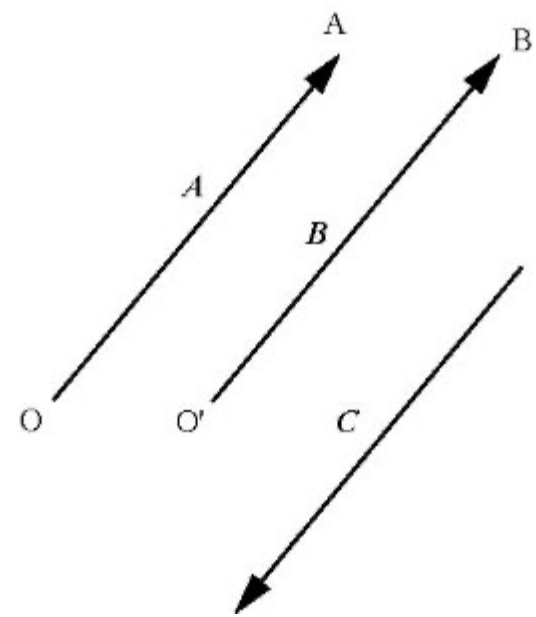
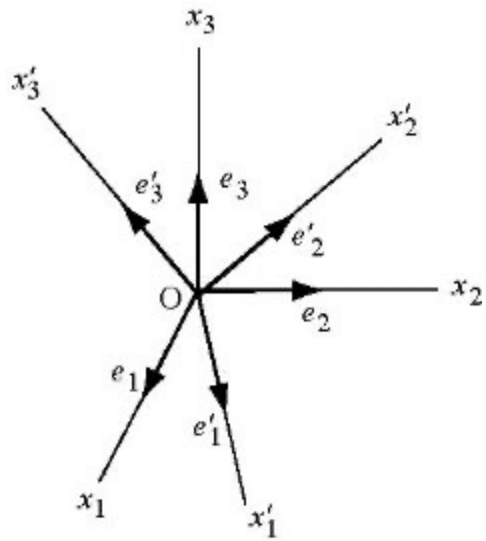


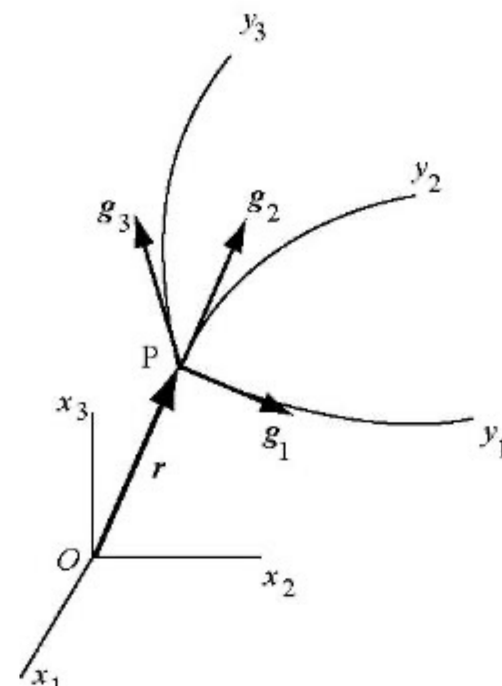
図６ 座標変換

ベクトルとテンソルの基礎的事項





$O-x_1,x_2,x_3$　座標系と $O-x_1',x_2',x_3'$

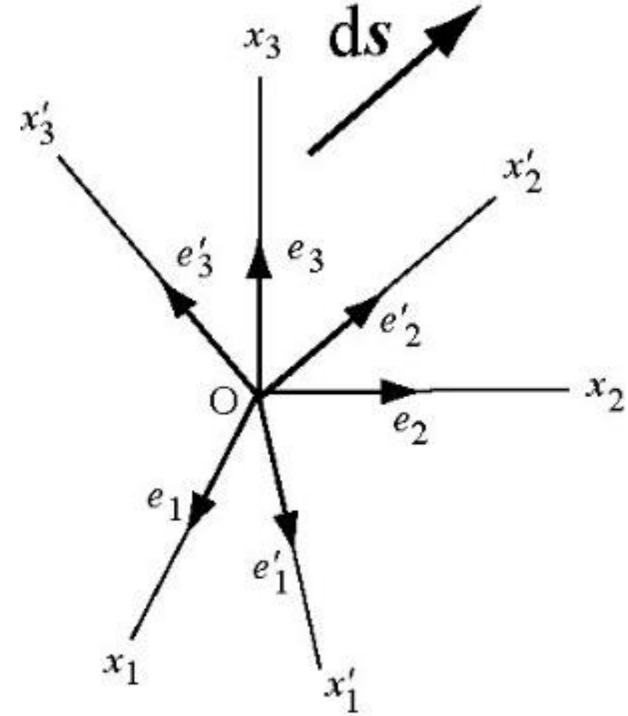


一般座標系

ベクトルの座標変換

$$\boldsymbol{a} = a_i \boldsymbol{e}_i \quad \left(O - x_1, x_2, x_3\right)$$

$$= a'_i \boldsymbol{e}'_i \quad \left(O - x'_1, x'_2, x'_3\right)$$



基本ベクトルの座標変換

$$\boldsymbol{e}_i = Q_{ji} \boldsymbol{e}'_j$$

これを利用して次式を導く

$$\boldsymbol{a} = a_i \boldsymbol{e}_i = a_i \left(Q_{ji} \boldsymbol{e}'_j\right)$$

$$= Q_{ji} a_i \boldsymbol{e}'_j$$

$$= a'_i \boldsymbol{e}'_i$$

- 2つの座標系の間のベクトル成分の変換則(Transformation Law)を導いた
- ベクトルの成分は“必ず”この変換則に従う

テンソル $\boldsymbol{A} = A_{ijk\cdots n}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k\cdots\boldsymbol{e}_n$

n 階のテンソル (n-th order tensor)

このような表記をテンソルのダイヤデックス表示（Dyadic expression）という

ただし、$\left(O - x_1, x_2, x_3\right)$座標系の表記

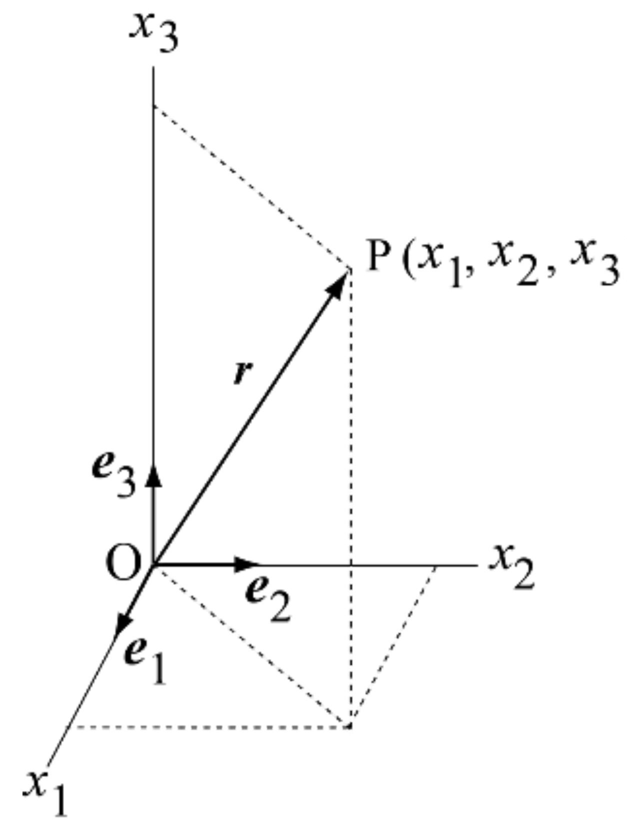
ベクトル:　$\boldsymbol{a} = a_i\boldsymbol{e}_i$

はテンソルの特別な場合
1階のテンソル（First Order Tensor)

$$\boldsymbol{A} = A_{ijk\cdots n}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k\cdots\boldsymbol{e}_n$$
$$= A_{ijk\cdots n}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_k \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_n$$

$\otimes$:テンソル積（Tensor Product)

テンソル積を用いて表すこともある

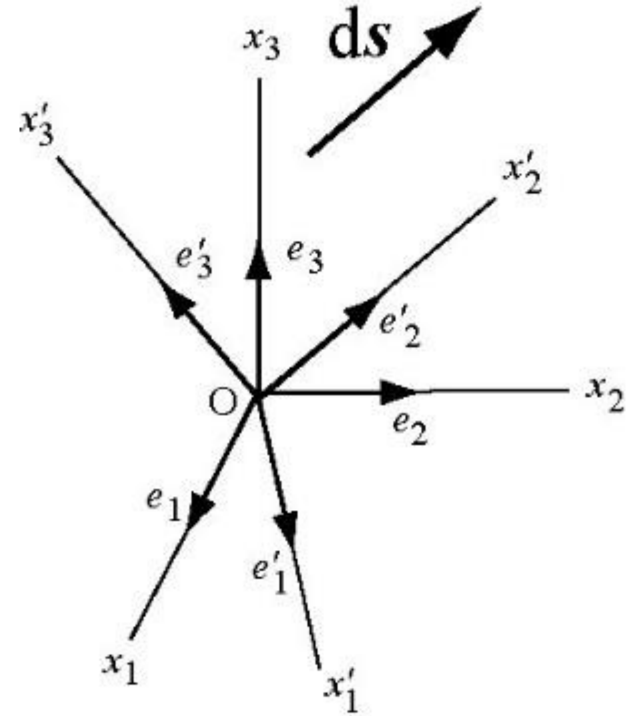


$\left(O - x_1, x_2, x_3\right)$ 座標系

テンソル $\boldsymbol{A} = A_{ijk\cdots n}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k\cdots\boldsymbol{e}_n$

$\left(O - x_1', x_2', x_3'\right)$ 座標系では、

$$\boldsymbol{A} = A'_{ijk\cdots n}\boldsymbol{e}'_i\boldsymbol{e}'_j\boldsymbol{e}'_k\cdots\boldsymbol{e}'_n$$



テンソルの成分 $A_{ijk\cdots n}$ もベクトルと同じ変換則に従う

$$A'_{ijkl\cdots} = Q_{ip}Q_{jq}Q_{kr}Q_{ls}\cdots A_{pqrs\cdots}$$

$$A_{ijkl\cdots} = Q_{pi}Q_{qj}Q_{rk}Q_{sl}\cdots A'_{pqrs\cdots}$$

テンソルの和と差（同じ階数のテンソルだけに適用）

例）2階のテンソルに対して

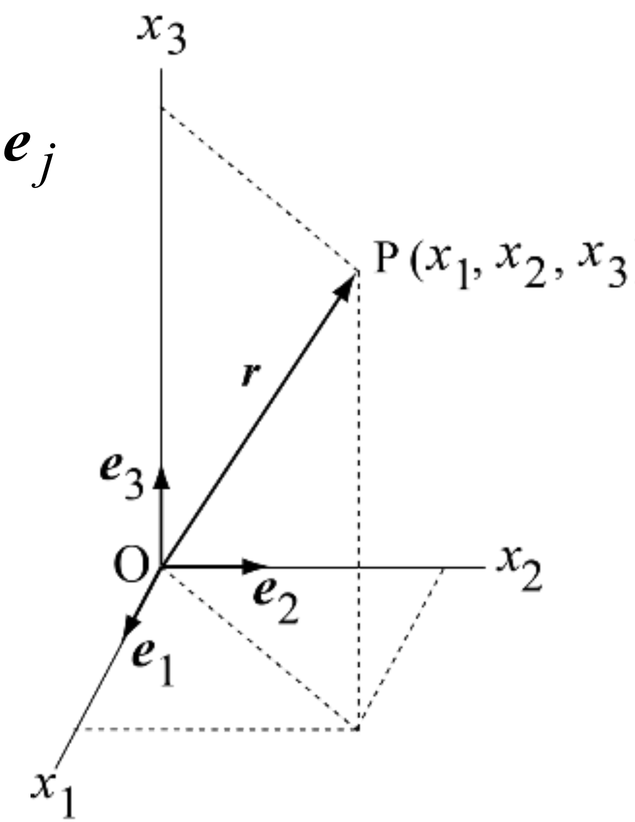
$$\boldsymbol{A} = A_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \qquad \boldsymbol{B} = B_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \qquad \boldsymbol{C} = C_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$$

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \pm \boldsymbol{C}$ 　であるとき、

$$A_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = B_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \pm C_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$$
$$= \left(B_{ij} \pm C_{ij}\right)\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$$

すなわち、$A_{ij} = B_{ij} \pm C_{ij}$

（成分どうしの和や差を行う）



$\left(O - x_1, x_2, x_3\right)$ 座標系

テンソル A とスカラー α の積

$$\alpha\boldsymbol{A} = \alpha A_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = \left(\alpha A_{ij}\right)\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$$

（成分の α 倍）

テンソルの積

- テンソル積（Tensor Product）
- テンソルの内積
- テンソルとベクトルの内積

（説明は板書）

テンソルの微分

n階テンソル $\boldsymbol{A}$ の座標 x_i に対する微分

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x_p} = \frac{\partial\left(A_{ijk\cdots n}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k\cdots\boldsymbol{e}_n\right)}{\partial x_p} = \frac{\partial A_{ijk\cdots n}}{\partial x_p}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k\cdots\boldsymbol{e}_n$$

n階テンソル $\boldsymbol{A}$ の座標 x_i' に対する微分

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x_p'} &= \frac{\partial\left(A_{ijkl\cdots n}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_l\cdots\boldsymbol{e}_n\right)}{\partial x_p'} \\ &= \frac{\partial\left(A'_{ijkl\cdots n}\boldsymbol{e}'_i\boldsymbol{e}'_j\boldsymbol{e}'_k\boldsymbol{e}'_l\cdots\boldsymbol{e}'_n\right)}{\partial x_p'} \\ &= \frac{\partial\left(Q_{ir}Q_{js}Q_{kt}Q_{lu}\cdots Q_{nv}A_{rstu\cdots v}\boldsymbol{e}'_i\boldsymbol{e}'_j\boldsymbol{e}'_k\cdots\boldsymbol{e}'_n\right)}{\partial x_q}\frac{\partial x_q}{\partial x_p'} \\ &= Q_{ir}Q_{js}Q_{kt}Q_{lu}\cdots Q_{nv}\frac{\partial x_q}{\partial x_p'}\frac{\partial A_{rstu\cdots v}}{\partial x_q}\boldsymbol{e}'_i\boldsymbol{e}'_j\boldsymbol{e}'_k\cdots\boldsymbol{e}'_n \\ &= \boxed{Q_{ir}Q_{js}Q_{kt}Q_{lu}\cdots Q_{nv}Q_{pq}\frac{\partial A_{rstu\cdots v}}{\partial x_q}}\boldsymbol{e}'_i\boldsymbol{e}'_j\boldsymbol{e}'_k\cdots\boldsymbol{e}'_n \qquad \because \frac{\partial x_q}{\partial x_p'} = Q_{pq}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x_p}\boldsymbol{e}_p$$

テンソル成分の変換式に従う

$\dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x_p}\boldsymbol{e}_p$ もまたテンソルである

$\boldsymbol{A}$ がn階のテンソルなら、

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x_p}\boldsymbol{e}_p$$

は(n+1)階のテンソルである

テンソルの主値と不変量

2階のテンソル $\boldsymbol{A} = A_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$ とベクトル $\boldsymbol{b} = b_i\boldsymbol{e}_i$

さらにスカラ a に対して、式：

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{b} = a\boldsymbol{b}$$

を満足するとき

スカラ a をテンソル $\boldsymbol{A}$ の**固有値**または**主値**

(Eigen value, principal value)

ベクトル $\boldsymbol{b}$ をテンソル $\boldsymbol{A}$ の**固有ベクトル**という

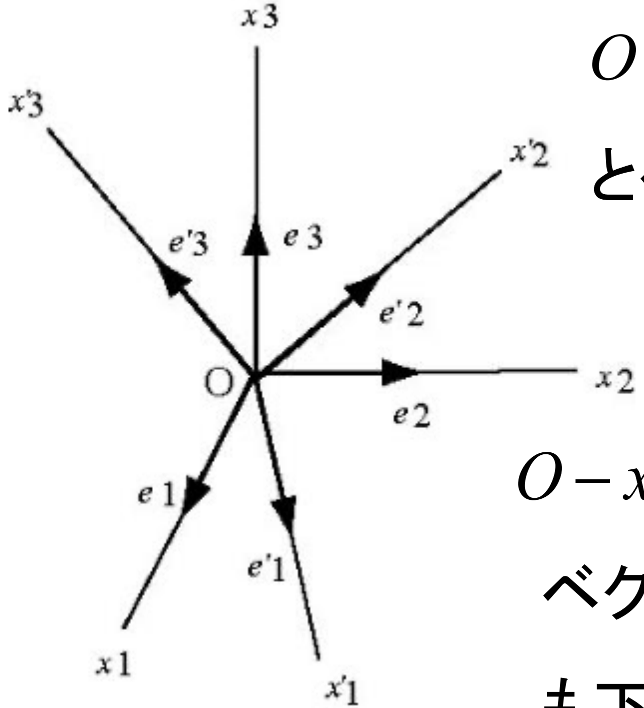
(Eigen vector)

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{b} - a\boldsymbol{b} = \cdots = \left(A_{ij} - a\delta_{ij}\right)b_j\boldsymbol{e}_i$$

テンソルの主値と不変量

詳細は板書

テンソルの商法則



$O-x_1,x_2,x_3$ 座標系で定義されたテンソル c_{ij} とベクトル b_k の積を考える

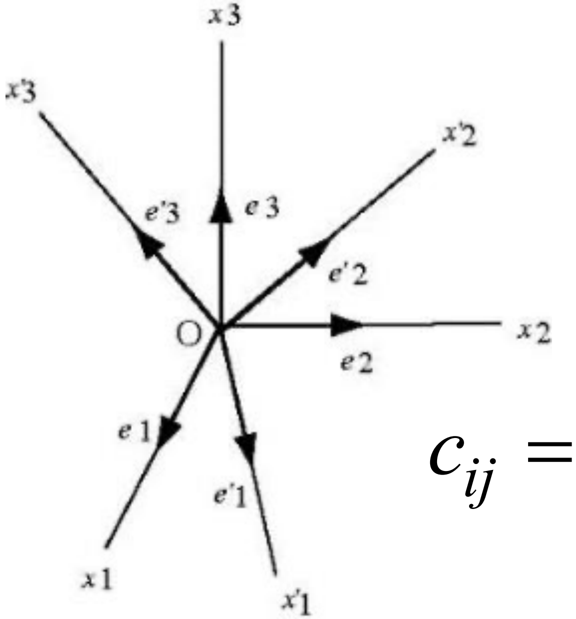
$$\boxed{c_{ij}=a_{ijk}b_k}$$

$O-x_1',x_2',x_3'$ 座標系で定義されたテンソル c_{ij}' と ベクトル b_k' を考える。$O-x_1',x_2',x_3'$ 座標系でも下記の関係が成立する。

$$\boxed{c_{ij}'=a_{ijk}'b_k'}$$

a_{ijk} はテンソルだろうか？

テンソルの商法則



a_{ijk} はテンソルだろうか？

テンソルであるためには、座標変換則に従う必要がある

$$a_{ijk} = Q_{li}Q_{mj}Q_{nk}a'_{lmn} \Longleftrightarrow a'_{ijk} = Q_{il}Q_{jm}Q_{kn}a_{lmn}$$

$$\underbrace{c_{ij} = Q_{ki}Q_{lj}c'_{kl}}_{\text{テンソル}} \qquad \underbrace{b_i = Q_{ki}b'_k}_{\text{ベクトル}}$$

元の式に代入する

$$c_{ij} = a_{ijk}b_k$$

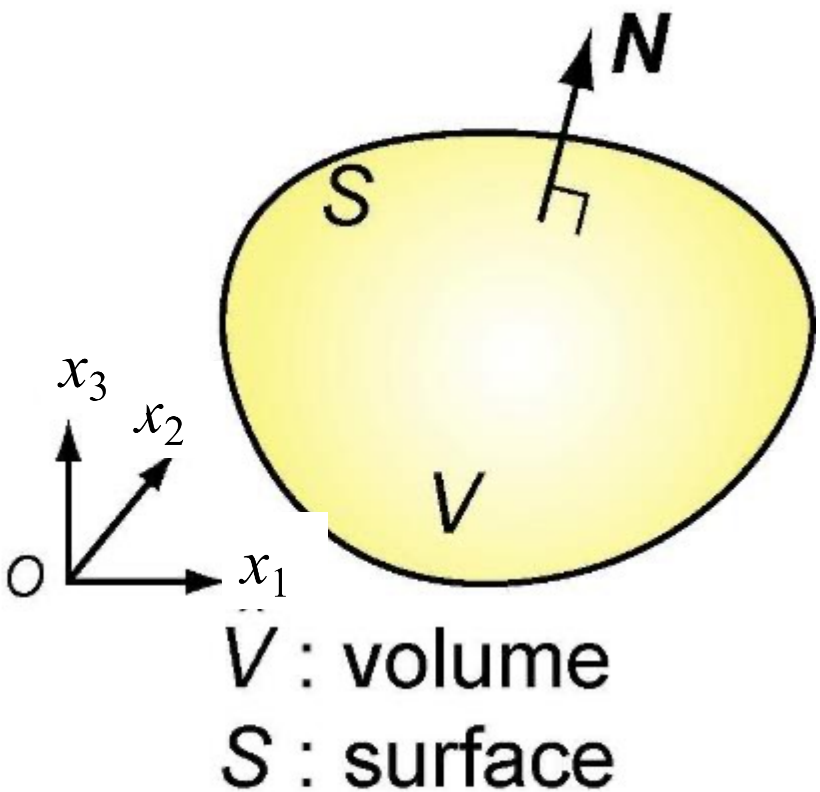
$$= Q_{ki}Q_{lj}c'_{kl} = Q_{ki}Q_{lj}\left(a'_{klm}b'_m\right) = Q_{ki}Q_{lj}\left\{a'_{klm}\left(Q_{mn}b_n\right)\right\}$$

$$= \left(Q_{ki}Q_{lj}Q_{mn}a'_{klm}\right)b_n$$

$a_{ijn} = Q_{ki}Q_{lj}Q_{mn}a'_{klm}$ が成立、よって a_{ijk} はテンソル

ガウスの発散定理(Gauss divergence theorem)

面積分⇔体積積分　の変換を行う



$\boldsymbol{v}$ をベクトル関数　$\boldsymbol{v}(x_1, x_2, x_3)$ として

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + v_3\boldsymbol{e}_3$$

$$\int_V \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\mathrm{d}V = \int_S N_1 v_1 \mathrm{d}S$$

$$\int_V \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\mathrm{d}V = \int_S N_2 v_2 \mathrm{d}S$$

$$\int_V \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\mathrm{d}V = \int_S N_3 v_3 \mathrm{d}S$$

すなわち、

$$\boxed{\int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}V = \int_S \boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}S}$$

ガウスの発散定理（Gauss divergence theorem）

証明）

$$\int_V \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\mathrm{d}V = \int_S N_1 \varphi \mathrm{d}S$$

を証明する

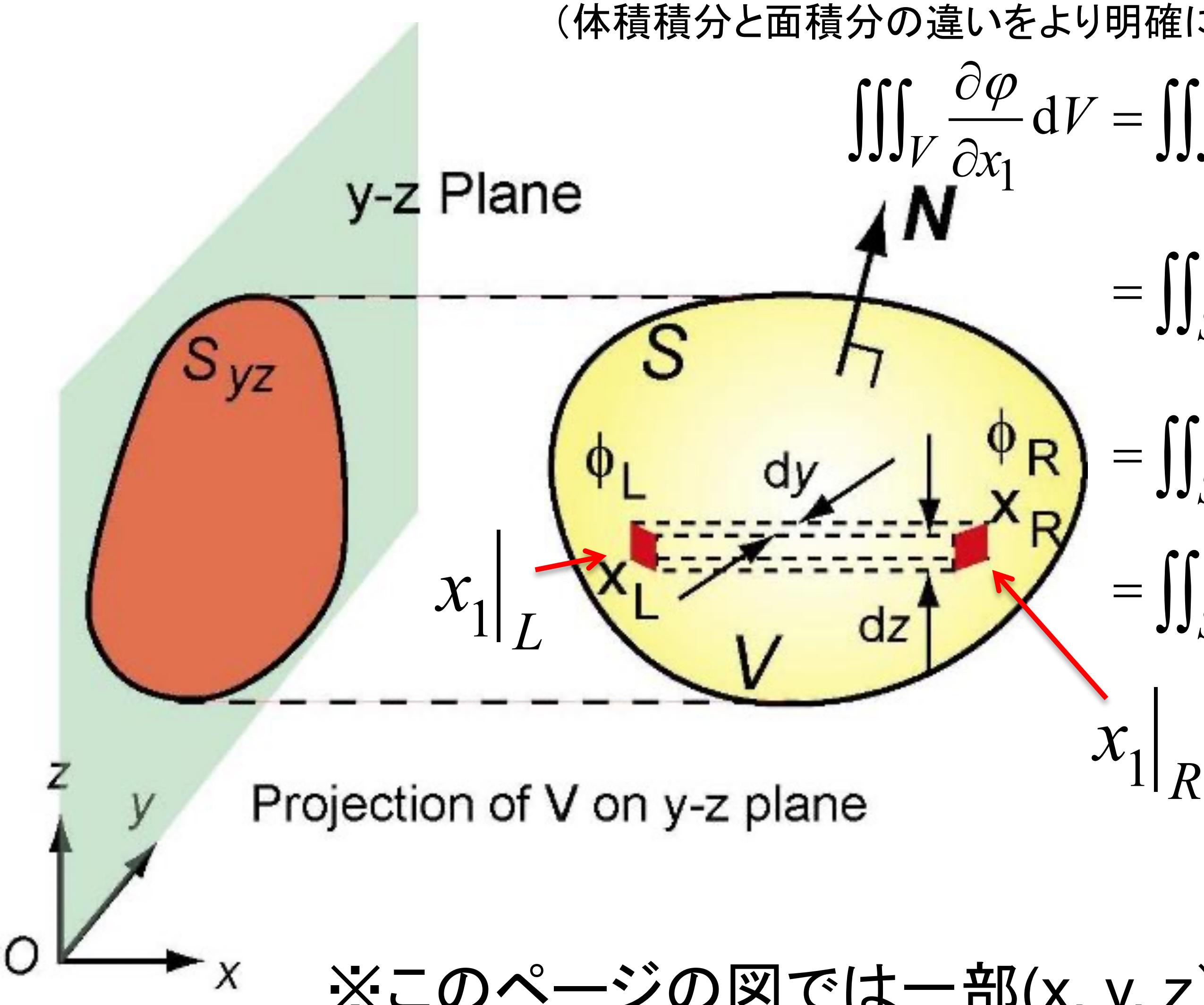
（体積積分と面積分の違いをより明確にする目的で積分の記号を変えた）

$$\iiint_V \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\mathrm{d}V = \iiint_V \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$$

$$= \iint_{S_{yz}} \left(\int_{x_1|_L}^{x_1|_R} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 \right)\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$$

$$= \iint_{S_{yz}} [\varphi]_{x_1|_L}^{x_1|_R}\,\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$$

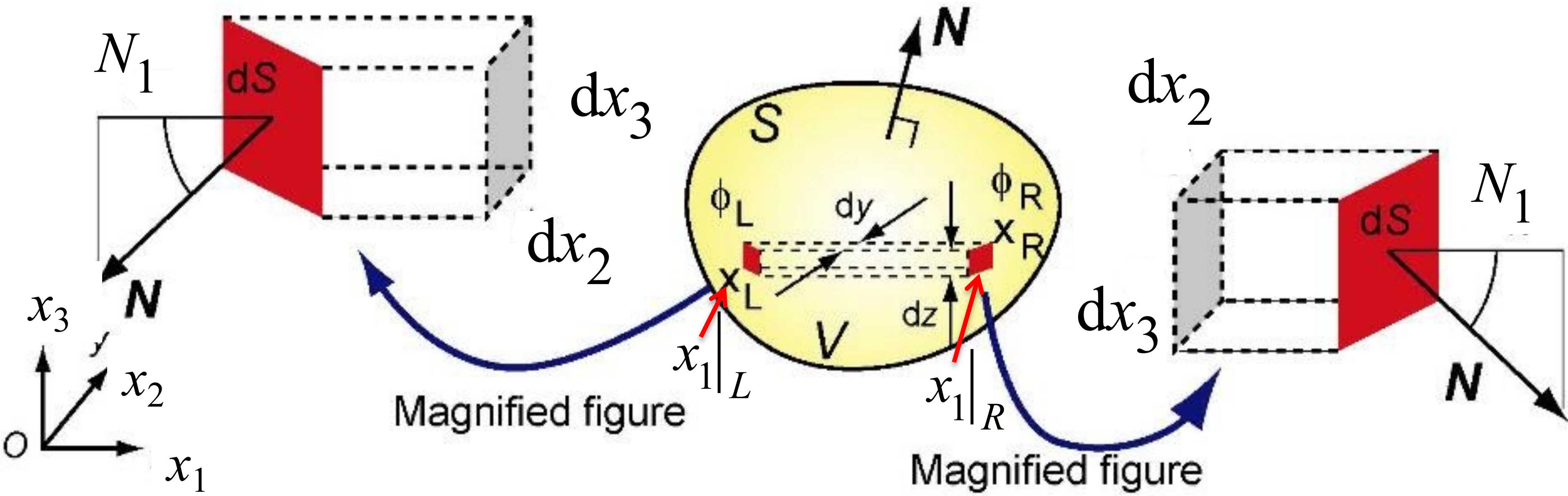
$$= \iint_{S_{yz}} (\varphi_R - \varphi_L)\,\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$$



※このページの図では一部(x, y, z)座標系を使用した

ガウスの発散定理(Gauss divergence theorem)

証明） $\int_V \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \mathrm{d}V = \int_S N_1 \varphi \mathrm{d}S$ を証明する

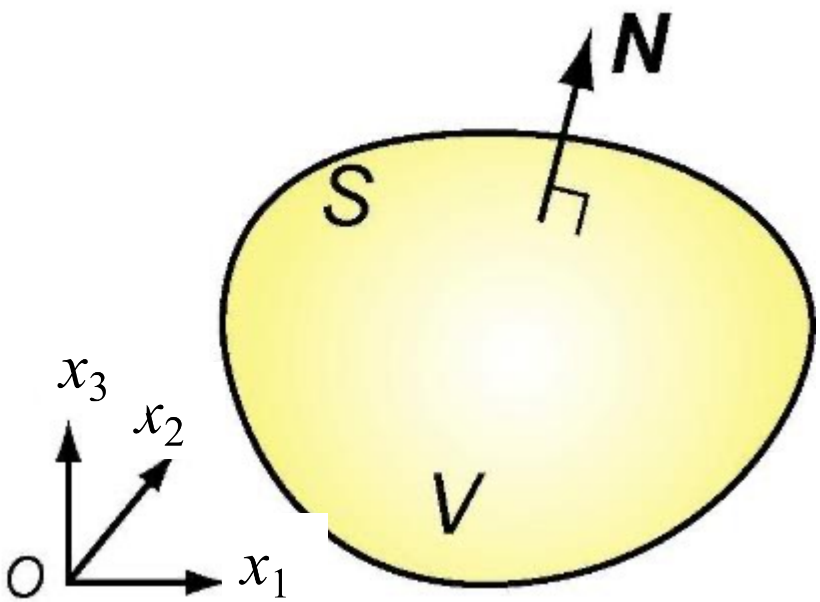


$x_1\big|_L$ では、 $\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 = -N_1\mathrm{d}S$ $x_1\big|_R$ では、 $\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 = N_1\mathrm{d}S$

$$\iiint_V \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\mathrm{d}V = \iint_{S_{yz}} (\varphi_R - \varphi_L)\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 = \iint_{S_R} N_1\varphi\,\mathrm{d}S_R + \iint_{S_L} N_1\varphi\,\mathrm{d}S_L = \iint_S N_1\varphi\,\mathrm{d}S$$

ガウスの発散定理（Gauss divergence theorem)

面積分⇔体積積分　の変換を行う



V : volume
S : surface

$\boldsymbol{v}$ をベクトル関数　$\boldsymbol{v}(x_1, x_2, x_3)$ として

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + v_3\boldsymbol{e}_3$$

$$\int_V \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\mathrm{d}V = \int_S N_1 v_1 \mathrm{d}S$$

$$\int_V \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\mathrm{d}V = \int_S N_2 v_2 \mathrm{d}S$$

$$\int_V \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\mathrm{d}V = \int_S N_3 v_3 \mathrm{d}S$$

すなわち、

$$\boxed{\int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}V = \int_S \boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}S}$$

ベクトルとテンソルの基礎的事項

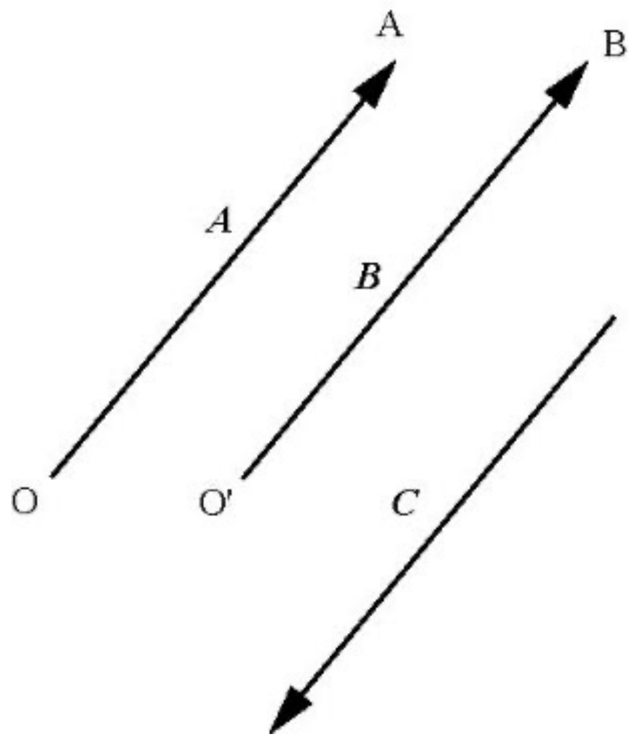


図１　ベクトルの表示

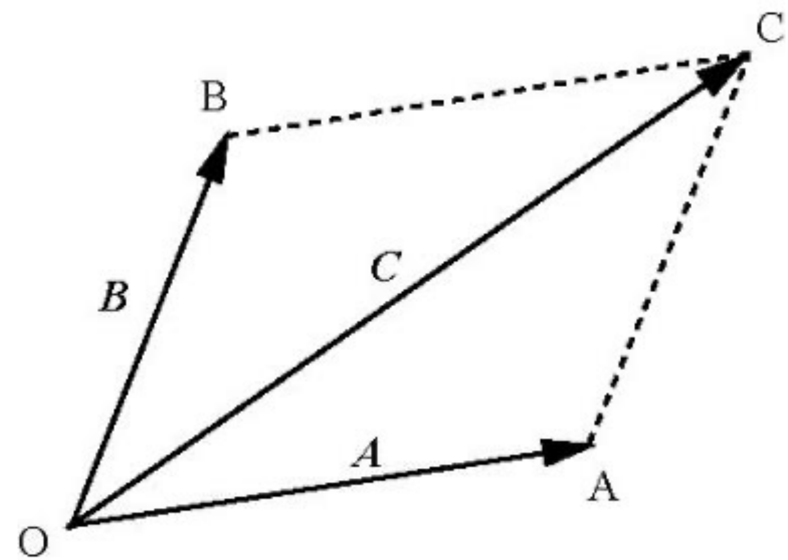
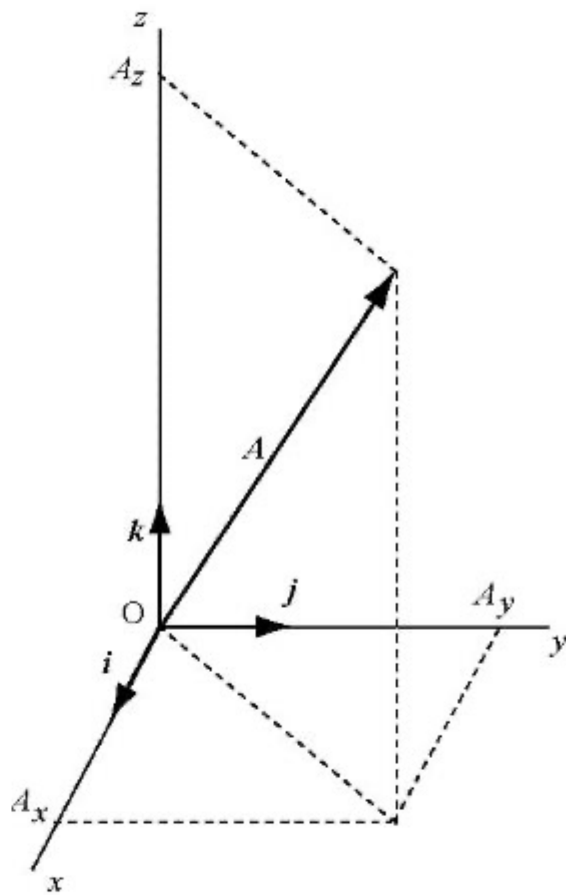
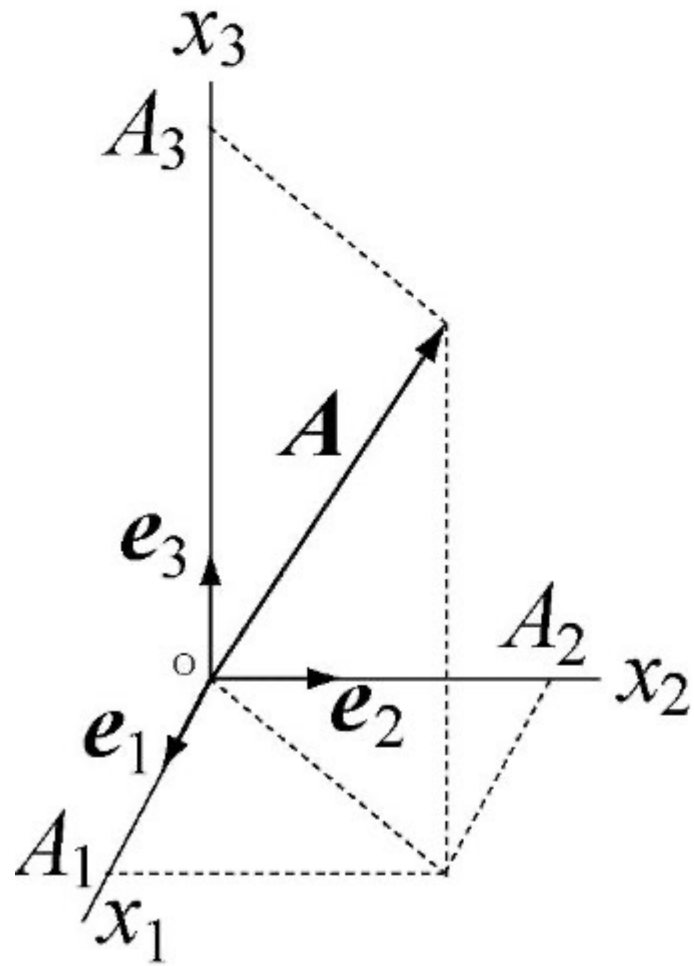


図２　ベクトルの加法

ベクトルとテンソル：ベクトルの成分





$$\boldsymbol{A} = A_x \boldsymbol{i} + A_y \boldsymbol{j} + A_z \boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{A} = A_1 \boldsymbol{e}_1 + A_2 \boldsymbol{e}_2 + A_3 \boldsymbol{e}_3$$

$$= A_i \boldsymbol{e}_i$$

総和規約

本題の前に：ベクトルとテンソルの基礎的事項

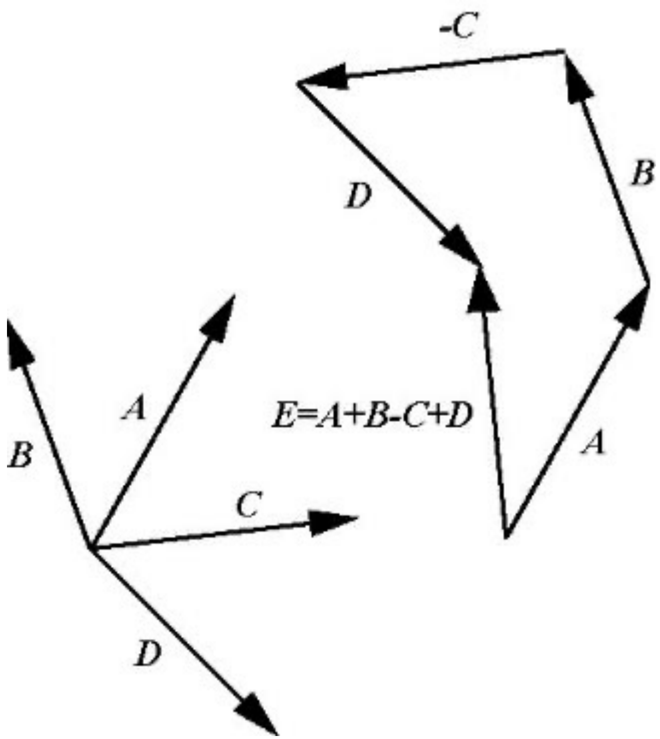


図３　ベクトルの合成

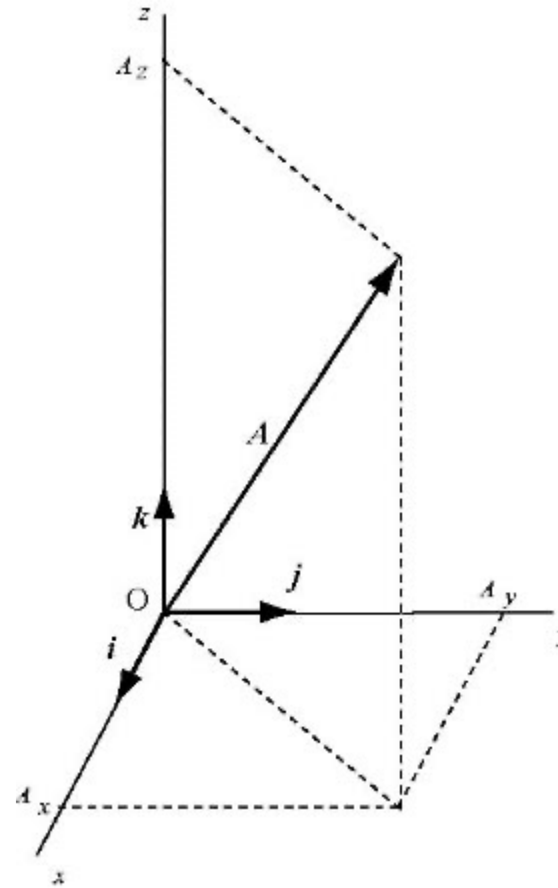


図４　ベクトルの成分

本題の前に:ベクトルとテンソルの基礎的事項

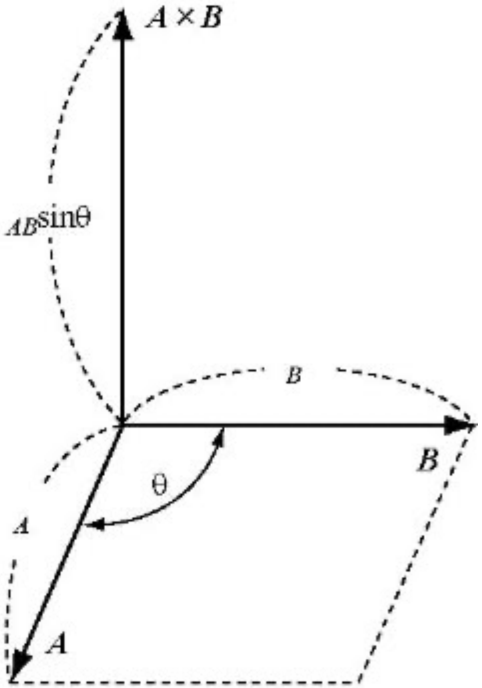


図5　ベクトルの外積

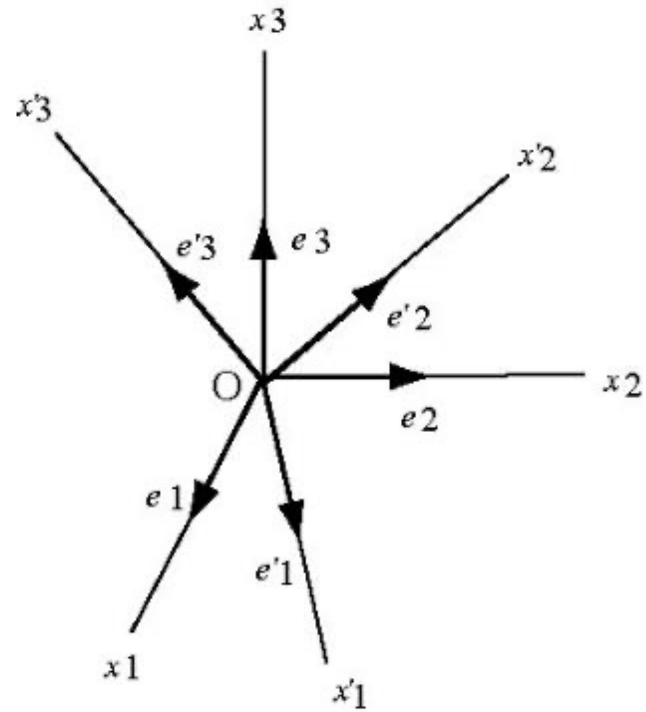


図6　座標変換

本題の前に:ベクトルとテンソルの基礎的事項

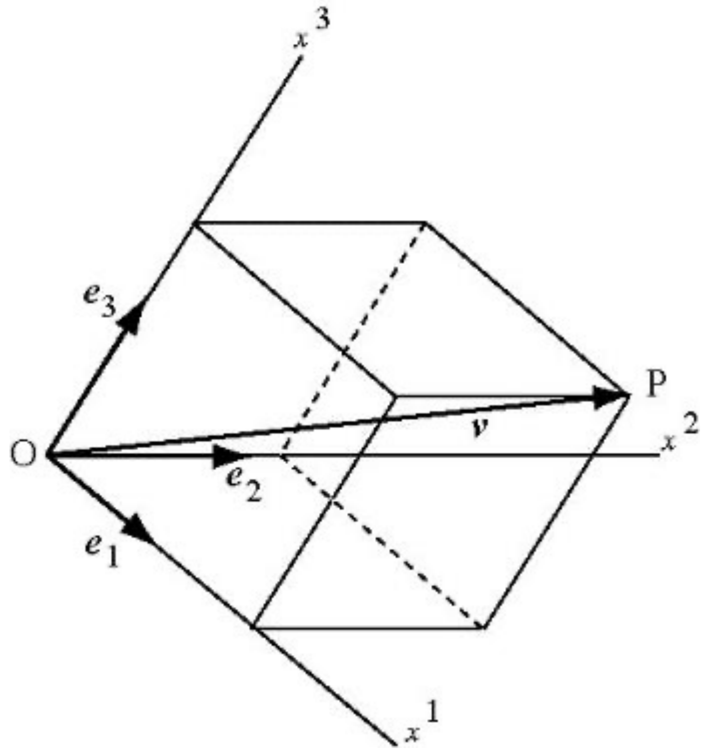


図7　斜交座標系

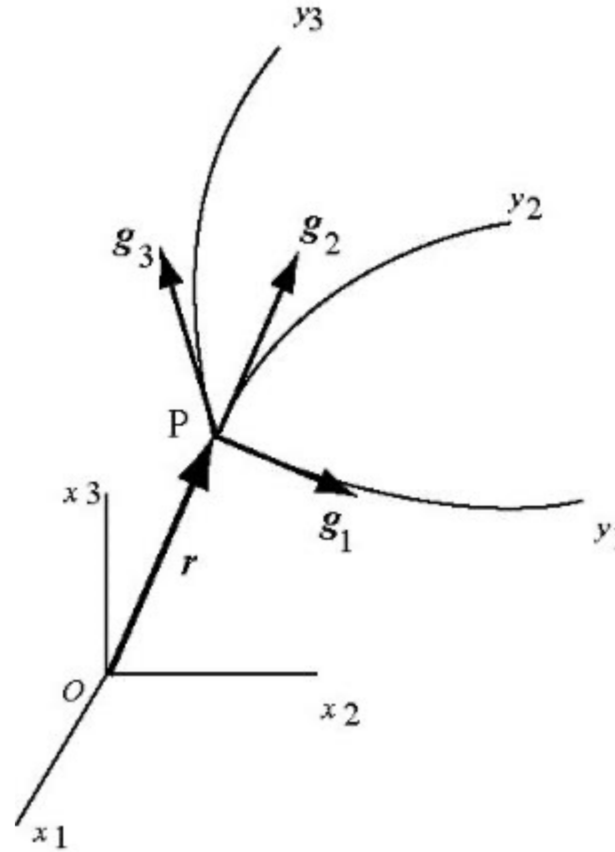
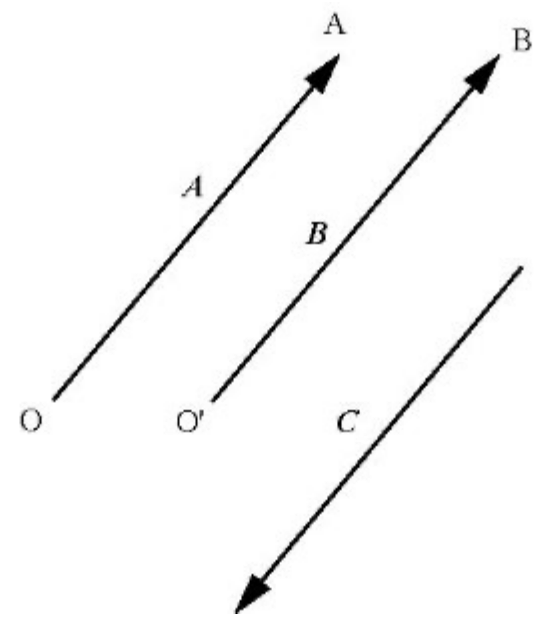
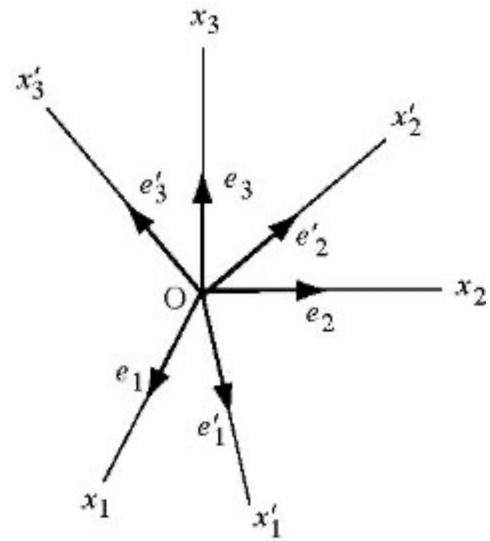


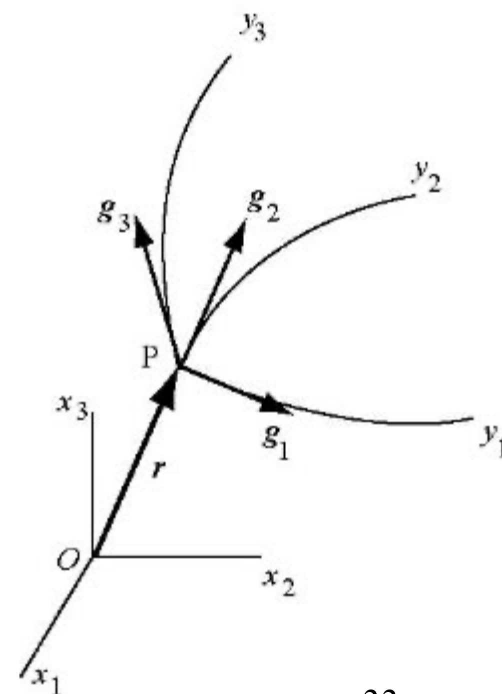
図８　一般座標系

ベクトルとテンソルの基礎的事項



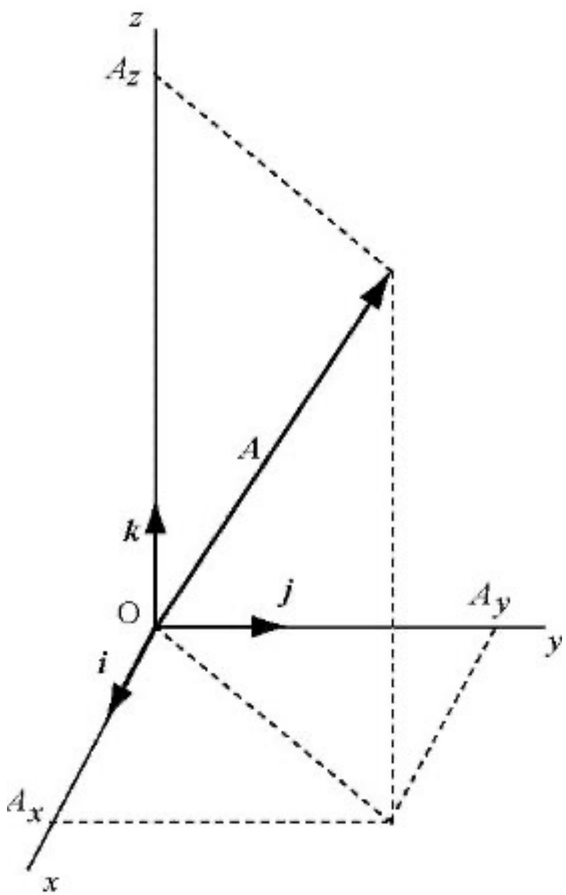


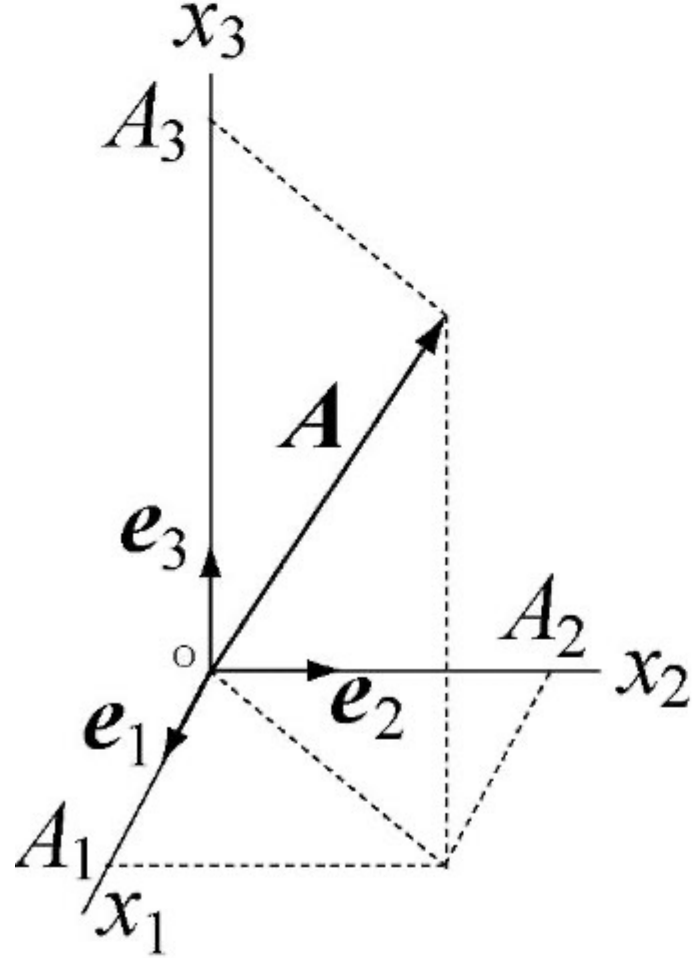
$O-x_1,x_2,x_3$　座標系と $O-x'_1,x'_2,x'_3$



一般座標系

ベクトルとテンソル：ベクトルの成分





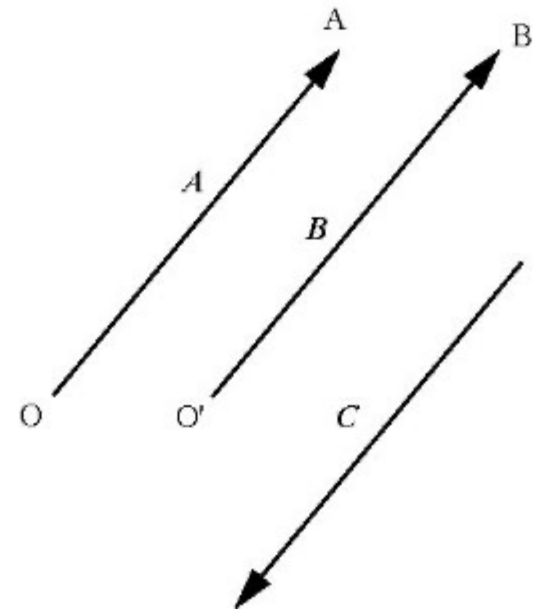
$$\boldsymbol{A} = A_x \boldsymbol{i} + A_y \boldsymbol{j} + A_z \boldsymbol{k}$$

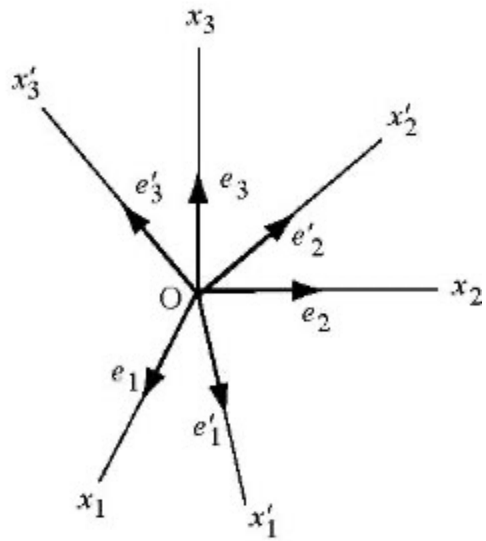
$$\boldsymbol{A} = A_1 \boldsymbol{e}_1 + A_2 \boldsymbol{e}_2 + A_3 \boldsymbol{e}_3$$

$$= A_i \boldsymbol{e}_i$$

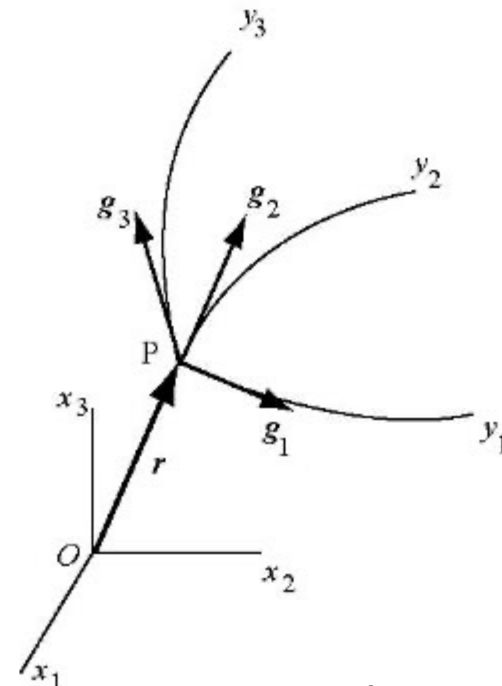
総和規約

ベクトルとテンソルの基礎的事項





$O - x_1, x_2, x_3$　座標系と $O - x'_1, x'_2, x'_3$



一般座標系

ベクトルとテンソルの基礎的事項

テンソル

二階のテンソル（Second Order Tensor）は，ベクトルからベクトルへの一次変換（Linear Transformation）の作用素（オペレータ，Operator）として定義される.

$$\boldsymbol{v} = \left(\text{Second Order Tensor}\right) \cdot \boldsymbol{u}$$