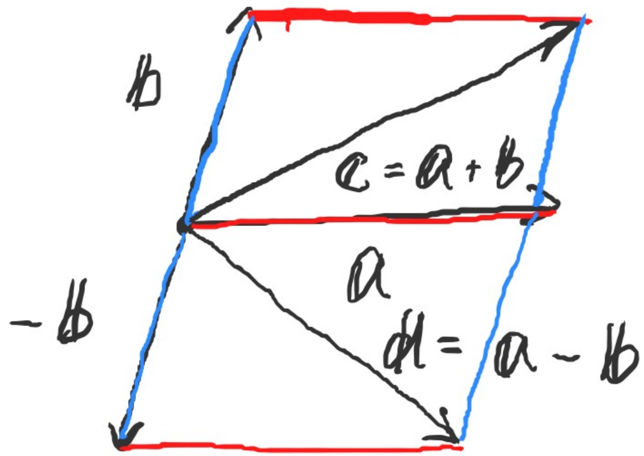
第3章 ベクトル

3.1 ベクトルの加法

ベクトルの大きさ $|\boldsymbol{a}|$, a

大きさが1のベクトル : $|\boldsymbol{a}| = 1$ 単位ベクトル

2つのベクトルの和 : 平行四辺形合成則



$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$: ベクトルの加法

$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$: ベクトルの減法

ベクトルの加法に対して

交換則 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$

結合則 $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$

ベクトル $\mathbf{a}$ とスカラー α の積：$\alpha\mathbf{a}$

α の符号により $\alpha\mathbf{a}$ の向きは変わる．

α が 0 のとき．　$\alpha\mathbf{a}=0$

ベクトル $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$ スカラー α，β に対して．

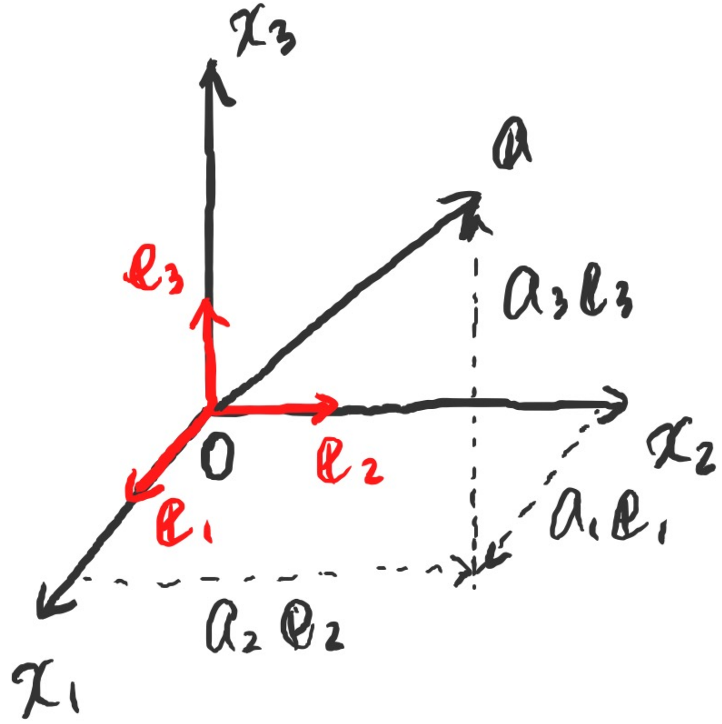
結合則．分配則

$$\alpha(\beta\mathbf{a})=(\alpha\beta)\mathbf{a}=\beta(\alpha\mathbf{a})$$

$$(\alpha+\beta)\mathbf{a}=(\beta+\alpha)\mathbf{a}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{a}$$

$$\alpha(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\alpha(\mathbf{b}+\mathbf{a})=\alpha\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}$$

3.2 座標系と基本ベクトル



右手系 直交デカルト座標系 $O-x_1, x_2, x_3$

座標軸に沿った単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$

基本ベクトル

ベクトル $\boldsymbol{a}$

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3 = a_i\boldsymbol{e}_i$$

a_1, a_2, a_3 : $\boldsymbol{a}$の成分

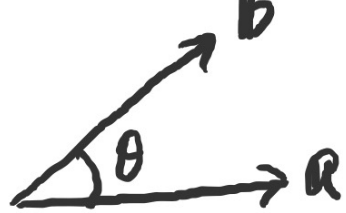
$\boldsymbol{a}$の大きさ $a^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a_i a_i$

$\boldsymbol{x}$が原点Oから点Pに至るベクトルの場合

$\boldsymbol{x}$: 位置ベクトル

$\boldsymbol{x}$の成分 x_1, x_2, x_3 : 点Pの座標

3.3 ベクトルのスカラー積とベクトル積.



$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ のスカラー積： $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ab\cos\theta$

$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ が平行のとき $\longrightarrow \theta = 0 \quad \therefore \ \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ab$

$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ が直交のとき $\longrightarrow \theta = 90^\circ \quad \therefore \ \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$

基本ベクトルのとき（基本ベクトルは互いに直交している）

$$\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j = \delta_{ij}$$

$a_i a_i$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_i\mathbf{e}_i\cdot b_j\mathbf{e}_j = a_i b_j\,\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j = a_i b_j\delta_{ij} = a_i b_i$$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} \qquad \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$$

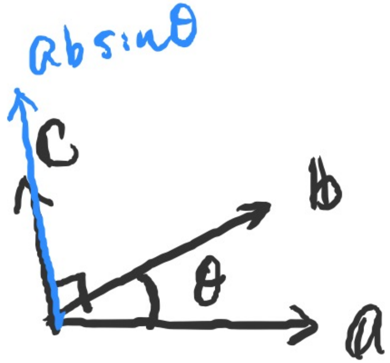
$$(\alpha\mathbf{a})\cdot(\beta\mathbf{b}) = (\alpha\beta)\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \qquad \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} \geq 0$$

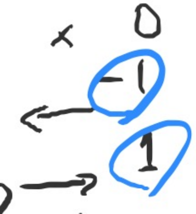
$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ のベクトル積: $\quad \mathbf{a}\times\mathbf{b} = ab\sin\theta\,\mathbf{c} \quad |\mathbf{c}|=1$

$$\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \qquad \mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \qquad \mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \qquad \mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2$$





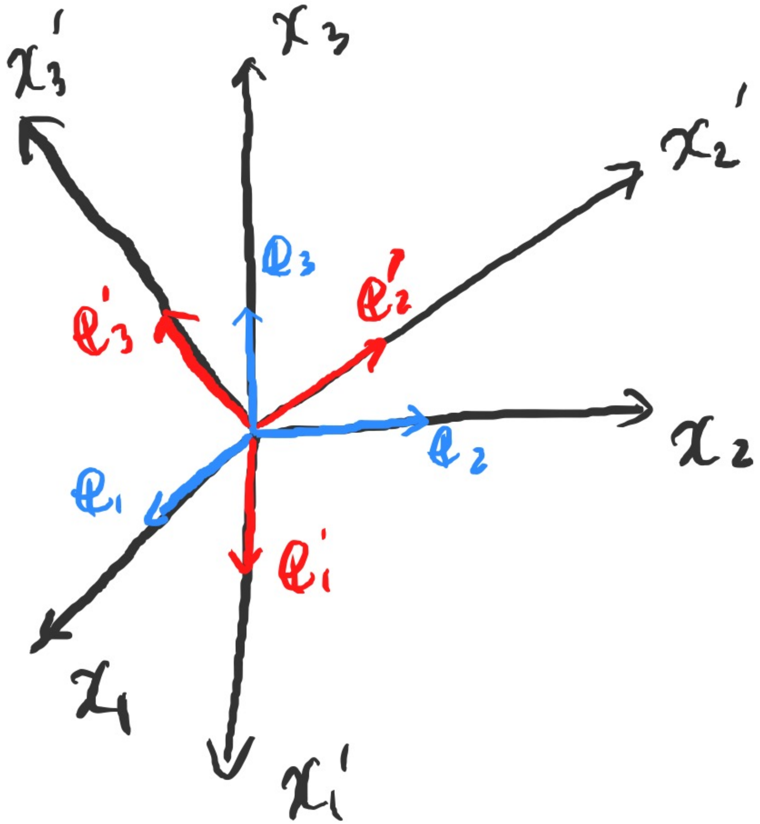
$$\mathbf{e}_{ijk} \rightarrow \varepsilon_{ijk}.$$

$$\mathbf{e}_k\times\mathbf{e}_\ell = \underset{321}{\overset{312}{\underline{\varepsilon_{pk\ell}}}}\,\mathbf{e}_p$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = a_k\mathbf{e}_k\times b_\ell\mathbf{e}_\ell = a_k b_\ell\,\underline{\mathbf{e}_k\times\mathbf{e}_\ell} = a_k b_\ell\,\varepsilon_{pk\ell}\,\mathbf{e}_p$$

$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ が平行 $\rightarrow \theta = 0 \Rightarrow \mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{0}$

3.4 ベクトルの変換



新しい座標系　$O-x_1', x_2', x_3'$

基本ベクトル：e_i'

方向余弦を定義：$Q_{ij} = e_i' \cdot e_j$

[例3.1] ベクトルは他のベクトルの線形結合で表すことができる.

$$\mathbf{e}'_i = A_{ik}\mathbf{e}_k \qquad \mathbf{e}_j = B_{jk}\mathbf{e}'_k$$

内積をとる.

$$\underbrace{\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j}_{Q_{ij}} = A_{ik}\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_j = A_{ik}\delta_{kj} = A_{ij}$$

$$\underbrace{\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}'_i}_{Q_{ij}} = B_{jk}\mathbf{e}'_k \cdot \mathbf{e}'_i = B_{jk}\delta_{ki} = B_{ji}$$

$$\therefore \mathbf{e}'_i = Q_{ij}\mathbf{e}_j \qquad \mathbf{e}_j = Q_{ij}\mathbf{e}'_i$$

例3.1より、2つの座標系の間に以下が成立する。

$$x'_i = Q_{ij} x_j \qquad x_j = Q_{ij} x'_i$$

$$\therefore \; Q_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \qquad Q_{ij} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i}$$

$\mathbf{e}'_i = Q_{ij} \mathbf{e}_i$ を $\mathbf{e}_j = Q_{ij} \mathbf{e}'_i$ に代入して。

$$\mathbf{e}_j = Q_{ij} Q_{ik} \mathbf{e}_k$$

$\mathbf{e}_l$ でスカラー積をとる。 $\underbrace{\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_l}_{\delta_{jl}} = Q_{ij} Q_{ik} \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_l = Q_{ij} Q_{ik} \delta_{kl}$

$$= Q_{ij} Q_{il}$$

$$\therefore \; Q_{ij} Q_{il} = \delta_{jl}$$

$$e_i' = Q_{ij} Q_{kj} e_k'$$

e_l' とスカラー積： $\underbrace{e_i' \cdot e_l'}_{\delta_{il}} = Q_{ij} Q_{kj} e_k' \cdot e_l' = Q_{ij} Q_{kj} \delta_{kl} = Q_{ij} Q_{lj}$

$$\therefore Q_{ij} Q_{lj} = \delta_{il}$$

ベクトル a を2つの座標系の基本ベクトルで表すと．

$$a = a_m e_m = a_k' e_k'$$

$e_m = Q_{km} e_k'$ 　 $e_k' = Q_{km} e_m$ を代入する．

$$a = a_m e_m = a_k' Q_{km} e_m$$

$$a = a_k' e_k' = a_m Q_{km} e_k'$$

$$\therefore a_m = Q_{km} a_k'$$

$$a_k' = Q_{km} a_m$$

座標変換則