

材料力学Ⅱ 中間試験代替レポート 問題用紙

注意:

- 下記の問題、全て解答すること
- 答案は手書きで丁寧に作成し、レポート BOX 〇〇 に 7 月 13 日(火)10:30 までに提出すること。ただし、対面授業をまったくできない状況になった場合は別途指示する(スキャンして LETUS から提出, など)
- 仲間と議論をしても良い。しかし、答案の作成は各自で行うこと。同じ内容の答案を見つけたら問答無用で 0 点とする。

コメント:

これだけしっかり勉強すれば相当な実力が付きます。頑張ってください。

1. e_{ijk} は交代記号, δ_{ij} をクロネッカーのデルタ記号とする. $e_{ijk}e_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$ が成立する. 以下の関係が成立することを示せ.

(ア) $e_{ijk}e_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$, (イ) $\delta_{ii} = 3$, (ウ) $\delta_{ki}\delta_{kj} = \delta_{ij}$, (エ) $e_{ijk}e_{ijm} = 2\delta_{km}$,

(オ) $e_{ijk}e_{ijk} = 6$

2. ガウスの発散定理の証明を示せ.

3. 2 階のテンソル $A = A_{ij}e_i e_j$ の第 1 不変量 **I**, 第 2 不変量 **II**, 第 3 不変量 **III** が次式で与えられることを示せ.

$$I = A_{ii}, \quad II = \frac{1}{2}(A_{ii}A_{jj} - A_{ij}A_{ji}),$$

$$III = \det \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} \quad \left(\det \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} \text{ は determinant である} \right)$$

4. アルマンジ (Almansi) のひずみテンソルの導出を示せ.

5. ラグランジュ (Lagrange, Green-Lagrange) のひずみテンソルの導出を示せ.

6. 平衡方程式 $\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + G_i = 0$ を導出せよ. ただし, σ_{ij} は応力, G_i は単位体積あたりに作用する物体力である.

7. 応力が対称($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$)であることを問 3 と同じ手法で示せ.

8. 点 P の応力テンソルが次のように与えられている.

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

点 P で単位法線ベクトル $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ を有する面に作用する応力ベクトルを求めよ.

9. 応力テンソルが次のように与えられている.

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

主応力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ を求めよ.

10. はじめに、等方弾性体の応力—ひずみ関係（一般化された Hooke の法則）はテンソルのインデックス標記を用いた場合、次式で与えられることを示せ.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \sigma_{kk}$$

(E はヤング率, ν はポアソン比 ($-1 < \nu < 0.5$), σ_{ij} は応力, ε_{ij} はひずみである)

この式の逆関係 $\sigma_{ij} = \frac{\nu E \delta_{ij} \varepsilon_{kk}}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{E \varepsilon_{ij}}{1+\nu}$ を導け.

11. 等方弾性体の応力—ひずみ関係を表す 4 階テンソル D_{ijkl}^e をラメの定数 λ と μ を用いて次式で表す.

$$D_{ijkl}^e = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

このとき、ヤング率 E とポアソン比 ν を次式で表せることを示せ.

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

ポアソン比 ν の値が $-1 < \nu < 0.5$ であるとき、非ゼロ応力状態に対して、ひずみエネルギー密度が必ず正值であることを示せ.

—以上—