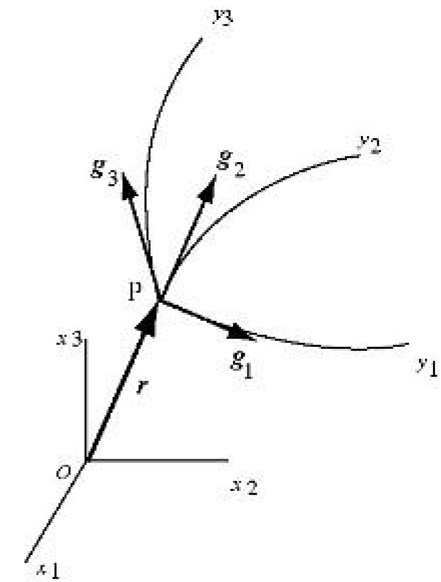
ベクトルとテンソルの基礎

- 連続体力学の計算では，ベクトル（vector）とテンソル（tensor）を多用する．
- ベクトル（vector）とテンソル（tensor）は連続体力学に関する表記をするための言語である．
- はじめに，**ベクトルとテンソルの基礎**を学ぶ．

- 連続体力学では、ベクトル（Vector）とテンソル（Tensor）を利用して様々な基礎方程式を記述する。
- この授業では「直交デカルト座標系」場合だけ取り上げる
  - 一般曲線座標系は取り上げない

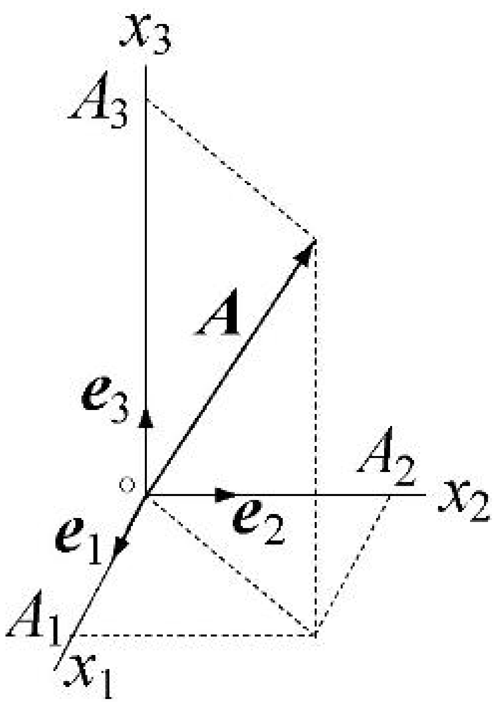


一般曲線座標系

添え字付き表示と総和規約（１）

- 直交デカルト座標系（O-x_1, x_2, x_3）のx_1, x_2, x_3方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ と書く
- $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$　を基本ベクトルと呼ぶ、または基本ベクトル（Base vector, basis vector）

添え字付き表示と総和規約(2)



直交デカルト座標系で表したベクトルの例

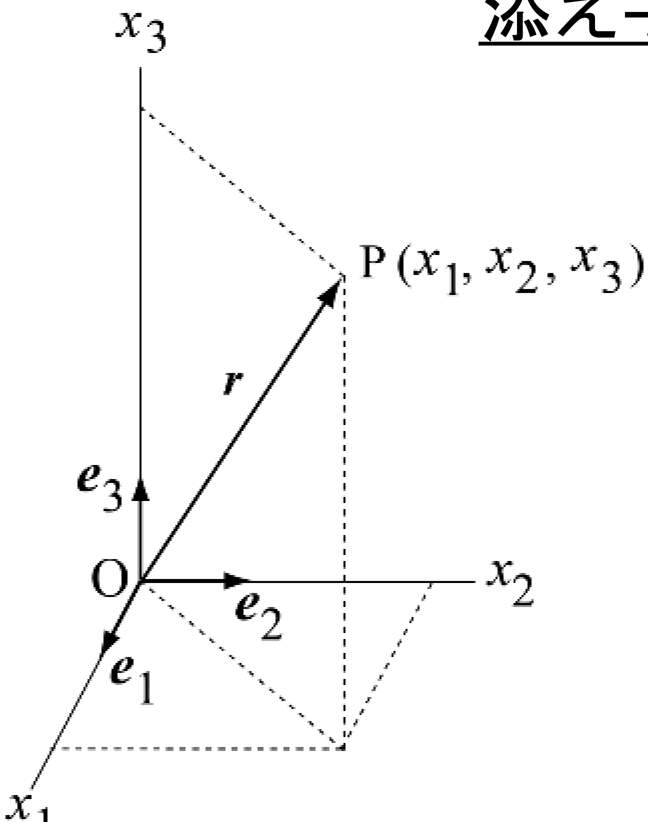
ベクトルの書き方

- ✓ 印刷物やワードプロセッサでは“太字”(Bold face、ボールド)

$$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}$$

- ✓ 手書きの時は、(板書)、下にティルダ、二重線にするなどする。本講義ではティルダを使用する

添え字付き表示と総和規約(3)



直交デカルト座標系で表した位置ベクトルの例

ベクトルの書き方

- ✓ 印刷物やワードプロセッサでは“太字”（Bold face、ボールド)

$$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}$$

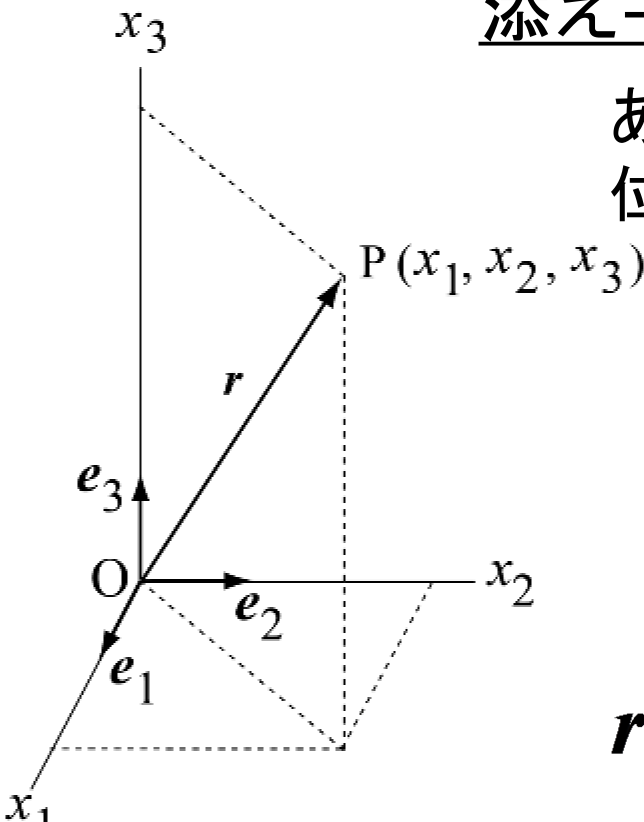
- ✓ 手書きの時は、(板書)、下にティルダ、二重線にするなどする。本講義ではティルダを使用する

ある点 P (x_1, x_2, x_3) を表すベクトル $\boldsymbol{r}$ を点Pの位置ベクトルという

$$\boldsymbol{r} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3$$

(x_1, x_2, x_3)を位置ベクトルの**成分**という

添え字付き表示と総和規約(3)



直交デカルト座標系で表した位置ベクトルの例

ある点 P (x_1, x_2, x_3) を表すベクトル $\boldsymbol{r}$ を点Pの位置ベクトルという

$$\boldsymbol{r} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3$$

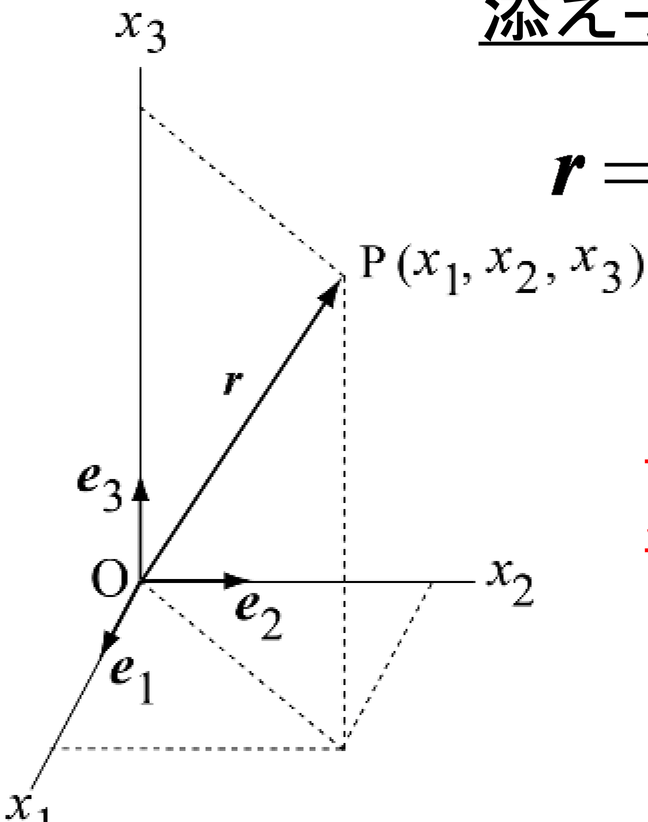
x_i (i=1,2 or 3)、すなわち、x_1、x_2 又は x_3を表す

$$\boldsymbol{r} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i\boldsymbol{e}_i = \boxed{x_i\boldsymbol{e}_i}$$

総和規約

添え字付き表示と総和規約(4)

$$\boldsymbol{r} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i\boldsymbol{e}_i = \boxed{x_i\boldsymbol{e}_i}$$



直交デカルト座標系で表した位置ベクトルの例

総和規約(Summation convention, summation rule)

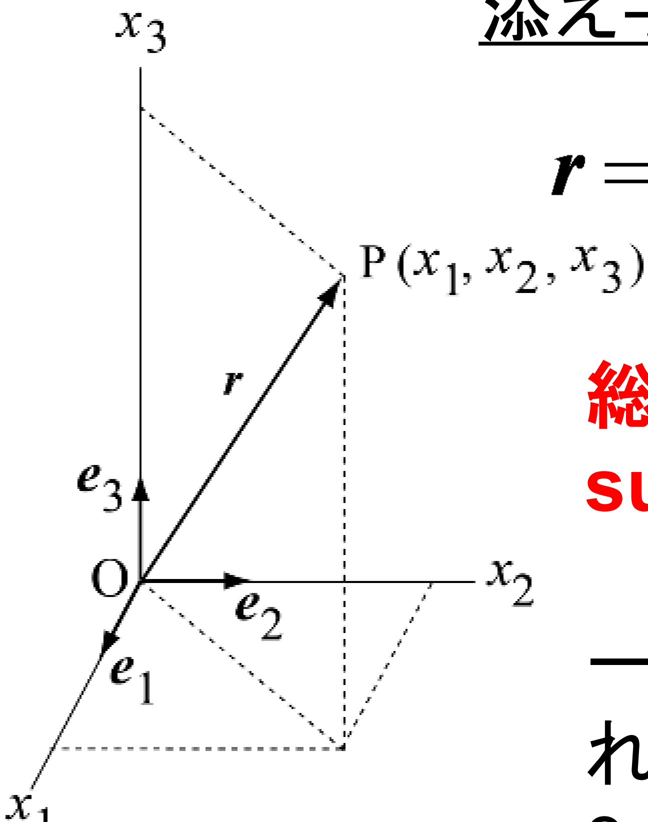
一つの項の中で同じ指標が2回現れるとき：総和1~3を行う（三次元問題）

総和を行う指標：擬標(dummy index、ダミーインデックス）

擬表の記号は何でも同じ結果となる

$$\boldsymbol{r} = x_i\boldsymbol{e}_i = x_j\boldsymbol{e}_j = x_k\boldsymbol{e}_k = x_l\boldsymbol{e}_l = \cdots$$

添え字付き表示と総和規約(4)



直交デカルト座標系で表した位置ベクトルの例

$$\boldsymbol{r} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i\boldsymbol{e}_i = \boxed{x_i\boldsymbol{e}_i}$$

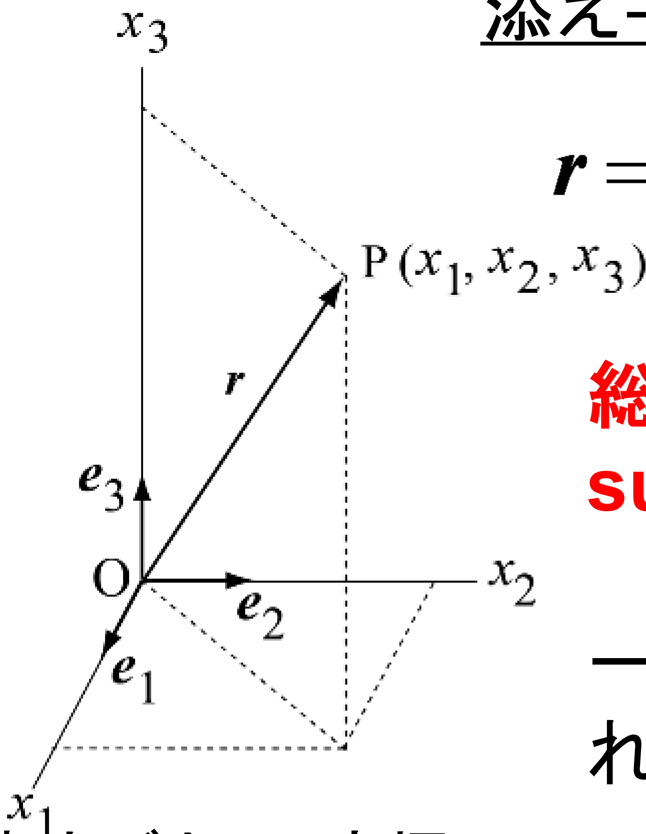
総和規約(Summation convention, summation rule)

一つの項の中で同じ指標が1回だけ現れるとき：総和は行わない（1、2　又は3　とする）

総和を行わない指標：自由指標(free index、フリーインデックス）

一般に、　$x_i \neq x_j \neq x_k \neq x_l \neq \cdots$　に注意

添え字付き表示と総和規約(5)



直交デカルト座標系で表した位置ベクトルの例

$$\boldsymbol{r} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i\boldsymbol{e}_i = \boxed{x_i\boldsymbol{e}_i}$$

総和規約(Summation convention, summation rule)

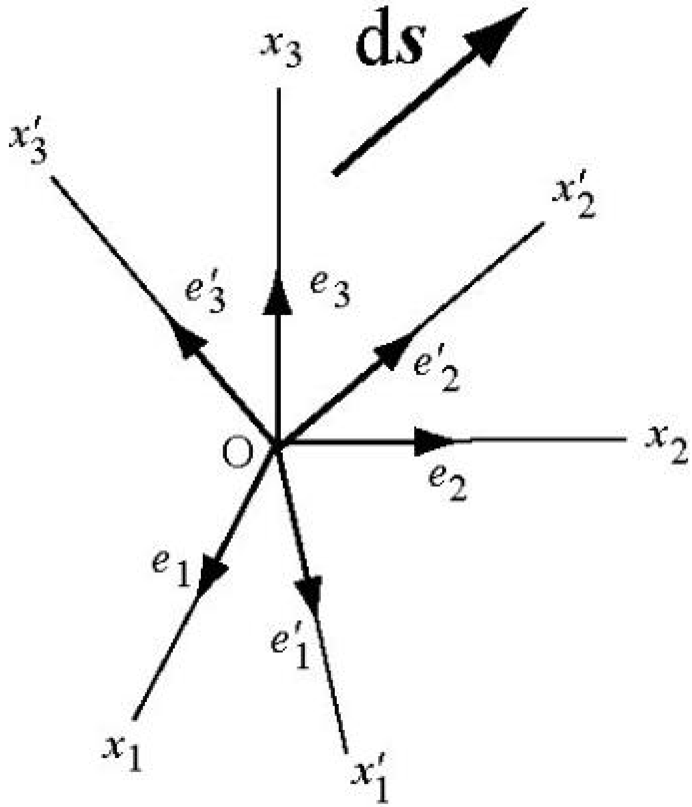
一つの項の中で同じ指標が3回以上現れるとき：意味が定義されない

一般に使用しない。どうしても使用する場合、その意味をその都度定義する。

例：　$\boldsymbol{U}_i = x_i y_i \boldsymbol{e}_i$　(No sum on i)
（iに対して総和を行わない、i=1, 2 又は 3）

ベクトルとテンソルの基礎的事項

ベクトルの座標変換

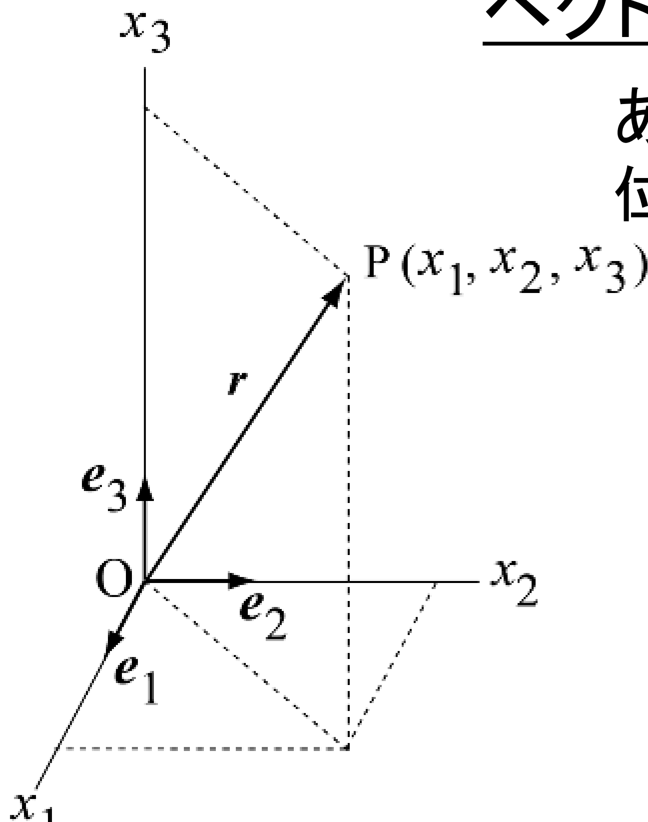


微小長さを持つベクトル d$\boldsymbol{s}$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mathrm{d}x_i \boldsymbol{e}_i$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mathrm{d}x'_i \boldsymbol{e}'_i$$

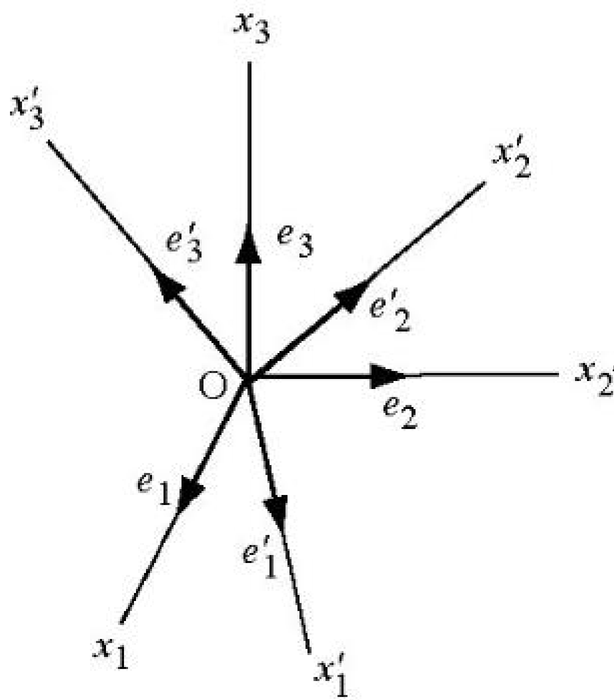
ベクトルの座標変換



ある点 P (x_1, x_2, x_3) を表すベクトル $\boldsymbol{r}$ を点Pの位置ベクトルという

$$\boldsymbol{r} = x_i \boldsymbol{e}_i$$

直交デカルト座標系で表した位置ベクトルの例



座標系では

$$\boldsymbol{r} = x'_i \boldsymbol{e}'_i$$

すなわち: $$\boldsymbol{r} = x_i \boldsymbol{e}_i = x'_i \boldsymbol{e}'_i$$

ベクトルとテンソルの基礎的事項

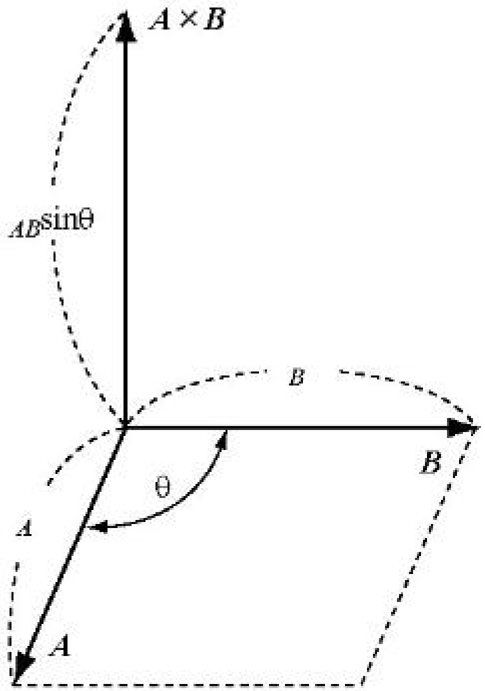


図５　ベクトルの外積

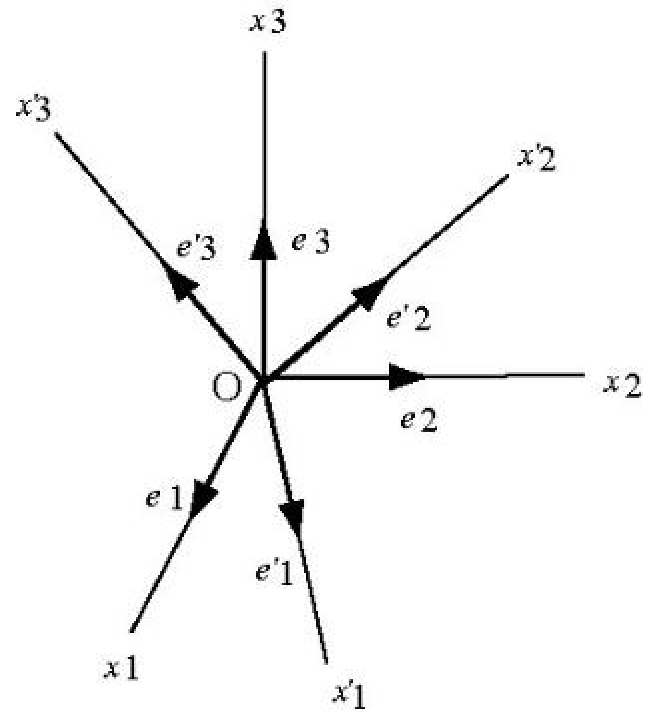
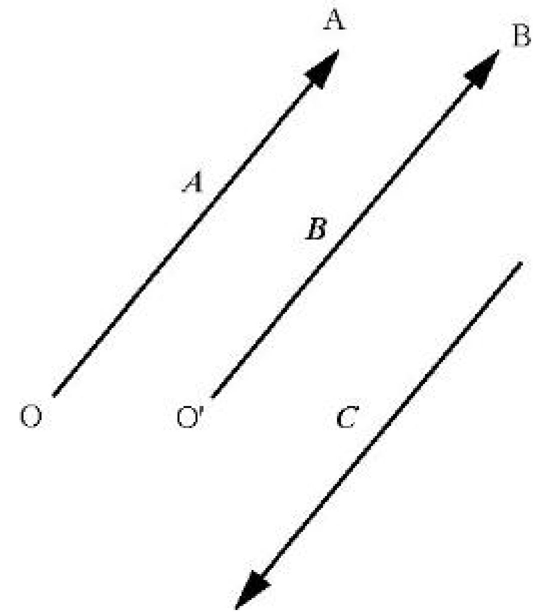
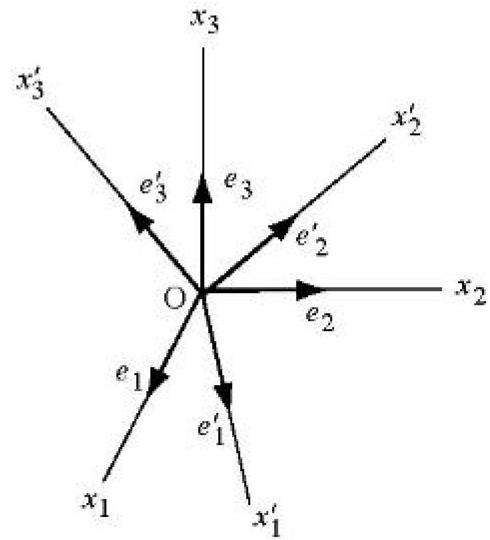


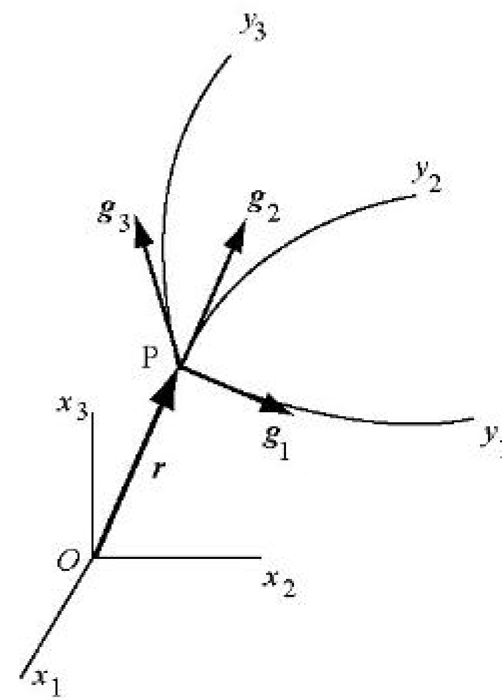
図６　座標変換

ベクトルとテンソルの基礎的事項





$O-x_1, x_2, x_3$　座標系と $O-x'_1, x'_2, x'_3$



一般座標系

テンソル　$\boldsymbol{A} = A_{ijk\cdots n}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k\cdots\boldsymbol{e}_n$

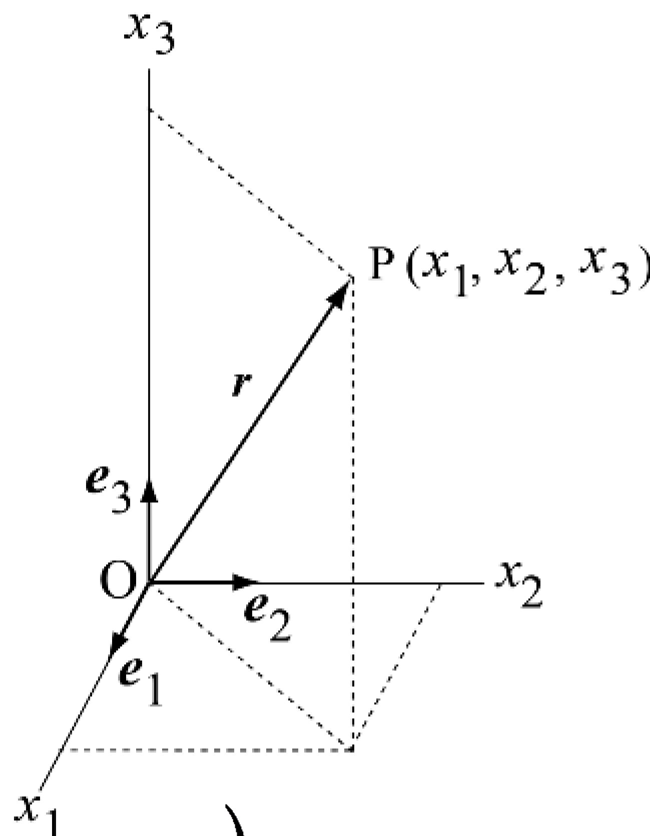
n 階のテンソル (n-th order tensor)

このような表記をテンソルのダイヤデックス表示（Dyadic expression）という

ただし、$\left(O - x_1, x_2, x_3\right)$座標系の表記

ベクトル：　$\boldsymbol{a} = a_i\boldsymbol{e}_i$

はテンソルの特別な場合
1階のテンソル（First Order Tensor)



$\left(O - x_1, x_2, x_3\right)$ 座標系

テンソルの主値と不変量

2階のテンソル $\boldsymbol{A} = A_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$ とベクトル $\boldsymbol{b} = b_i\boldsymbol{e}_i$

さらにスカラ a に対して、式：

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{b} = a\boldsymbol{b}$$

を満足するとき

スカラ a をテンソル $\boldsymbol{A}$ の**固有値**または**主値**

(Eigen value, principal value)

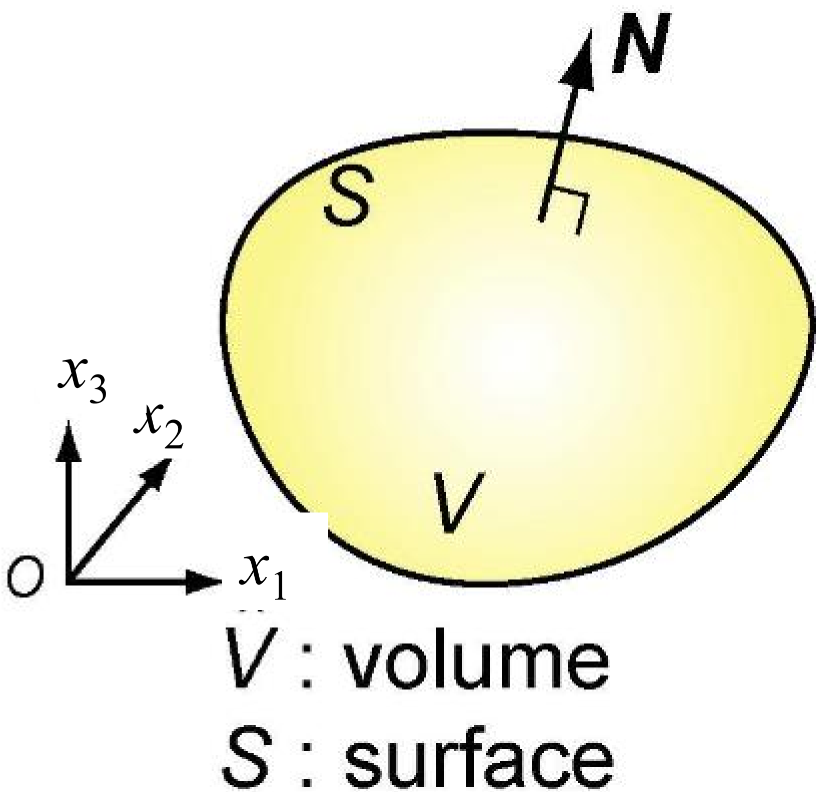
ベクトル $\boldsymbol{b}$ をテンソル $\boldsymbol{A}$ の**固有ベクトル**という

(Eigen vector)

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{b} - a\boldsymbol{b} = \cdots = \left(A_{ij} - a\delta_{ij}\right)b_j\boldsymbol{e}_i$$

ガウスの発散定理(Gauss divergence theorem)

面積分⇔体積積分　の変換を行う



$\boldsymbol{v}$ をベクトル関数　$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(x_1, x_2, x_3)$ として

$$\boldsymbol{v} = v_1 \boldsymbol{e}_1 + v_2 \boldsymbol{e}_2 + v_3 \boldsymbol{e}_3$$

$$\iiint_V \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \mathrm{d}V = \iint_S N_1 v_1 \mathrm{d}S$$

$$\iiint_V \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \mathrm{d}V = \iint_S N_2 v_2 \mathrm{d}S$$

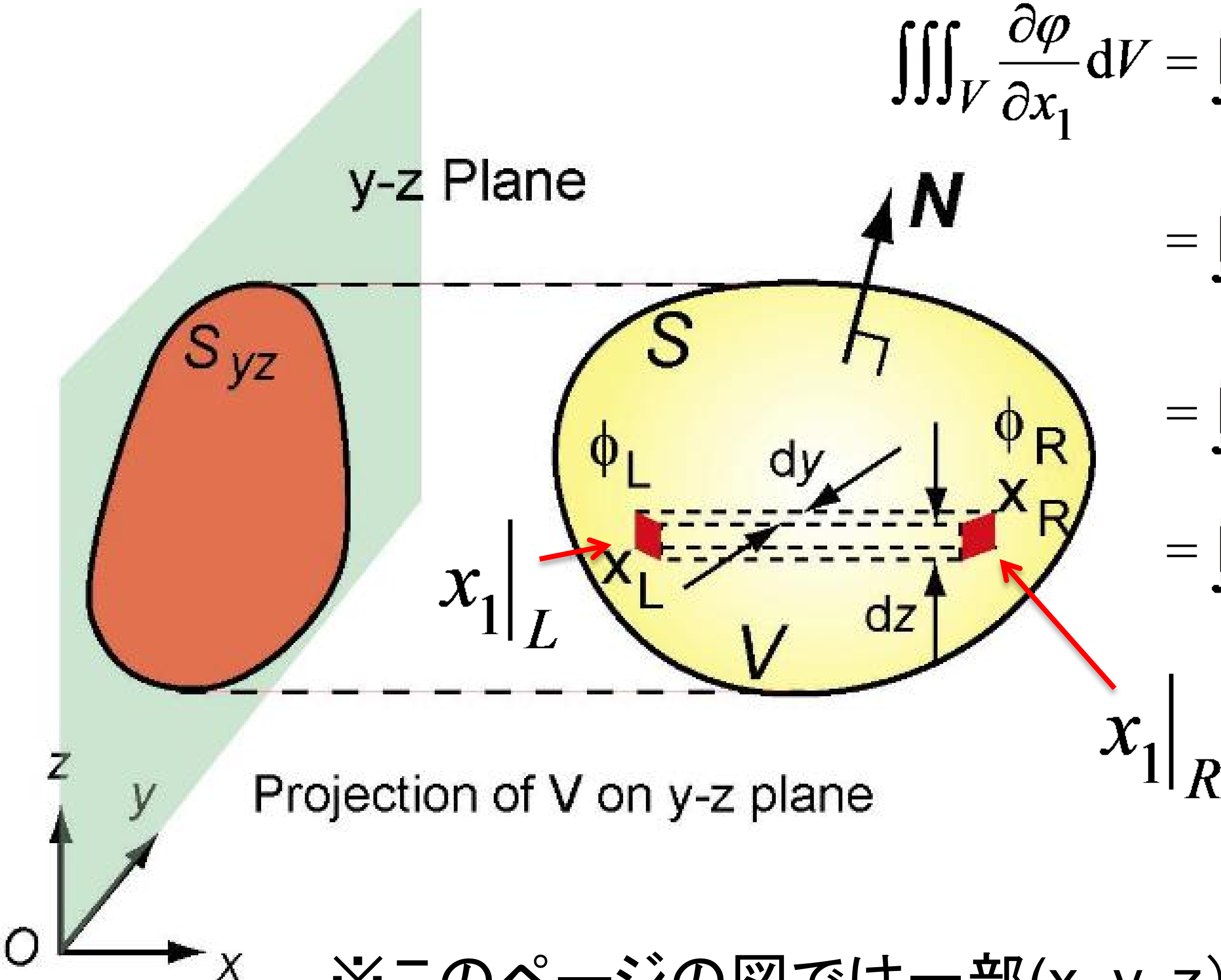
$$\iiint_V \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \mathrm{d}V = \iint_S N_3 v_3 \mathrm{d}S$$

すなわち、

$$\boxed{\iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{v} \mathrm{d}V = \iint_S \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{v} \mathrm{d}S}$$

ガウスの発散定理(Gauss divergence theorem)

証明) $\iiint_V \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \mathrm{d}V = \iint_S N_1 \varphi \mathrm{d}S$　を証明する



$$\iiint_V \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \mathrm{d}V = \iiint_V \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2 \,\mathrm{d}x_3$$

$$= \iint_{S_{yz}} \left(\int_{x_1|_L}^{x_1|_R} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathrm{d}x_1 \right) \mathrm{d}x_2 \,\mathrm{d}x_3$$

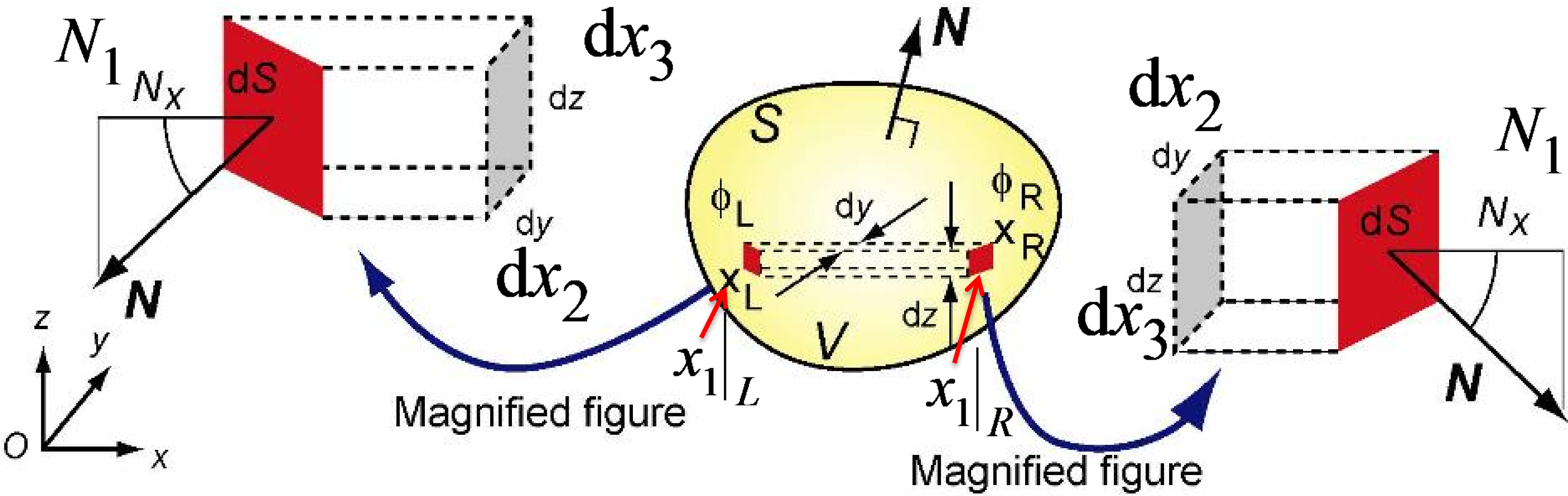
$$= \iint_{S_{yz}} \left[\varphi \right]_{x_1|_L}^{x_1|_R} \mathrm{d}x_2 \,\mathrm{d}x_3$$

$$= \iint_{S_{yz}} \left(\varphi_R - \varphi_L \right) \mathrm{d}x_2 \,\mathrm{d}x_3$$

※このページの図では一部(x, y, z)座標系を使用した

ガウスの発散定理（Gauss divergence theorem）

証明） $\iiint_V \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \mathrm{d}V = \iint_S N_1 \varphi \mathrm{d}S$ を証明する



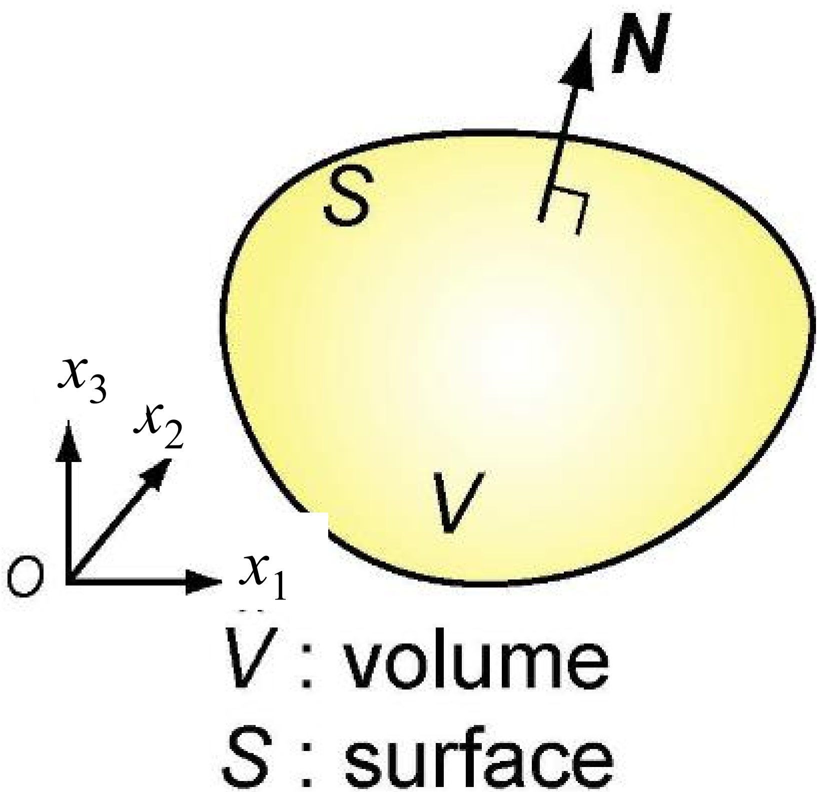
$x_1\big|_L$ では、 $\mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 = -N_1 \mathrm{d}S$ $x_1\big|_R$ では、 $\mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 = N_1 \mathrm{d}S$

$$\iiint_V \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \mathrm{d}V = \iint_{S_{yz}} (\varphi_R - \varphi_L) \mathrm{d}x_2 \, \mathrm{d}x_3 = \iint_{S_R} N_1 \varphi \mathrm{d}S_R + \iint_{S_L} N_1 \varphi \mathrm{d}S_L = \iint_S N_1 \varphi \mathrm{d}S$$

※このページの図では一部(x, y, z）座標系を使用した

ガウスの発散定理(Gauss divergence theorem)

面積分⇔体積積分　の変換を行う



$\boldsymbol{v}$ をベクトル関数 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(x_1, x_2, x_3)$ として

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + v_3\boldsymbol{e}_3$$

$$\iiint_V \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \mathrm{d}V = \iint_S N_1 v_1 \mathrm{d}S$$

$$\iiint_V \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \mathrm{d}V = \iint_S N_2 v_2 \mathrm{d}S$$

$$\iiint_V \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \mathrm{d}V = \iint_S N_3 v_3 \mathrm{d}S$$

すなわち、

$$\boxed{\iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{v} \mathrm{d}V = \iint_S \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{v} \mathrm{d}S}$$

ベクトルとテンソルの基礎的事項

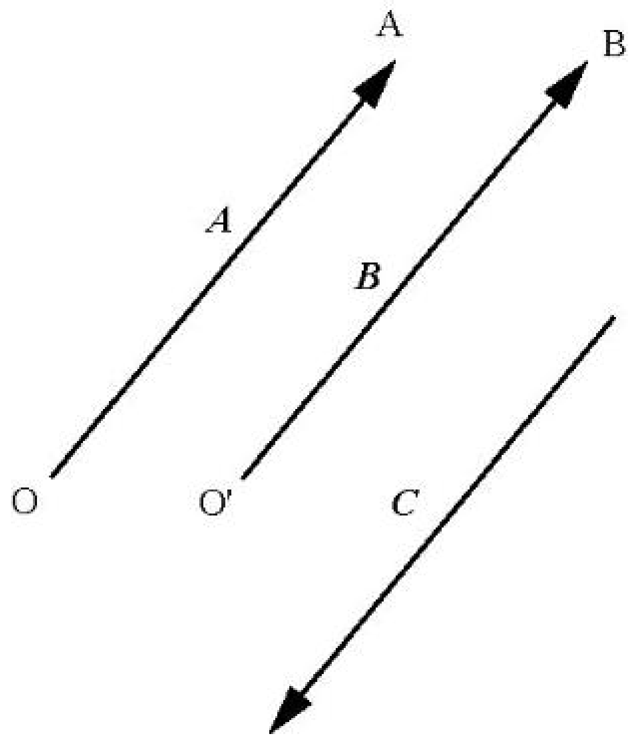


図１　ベクトルの表示

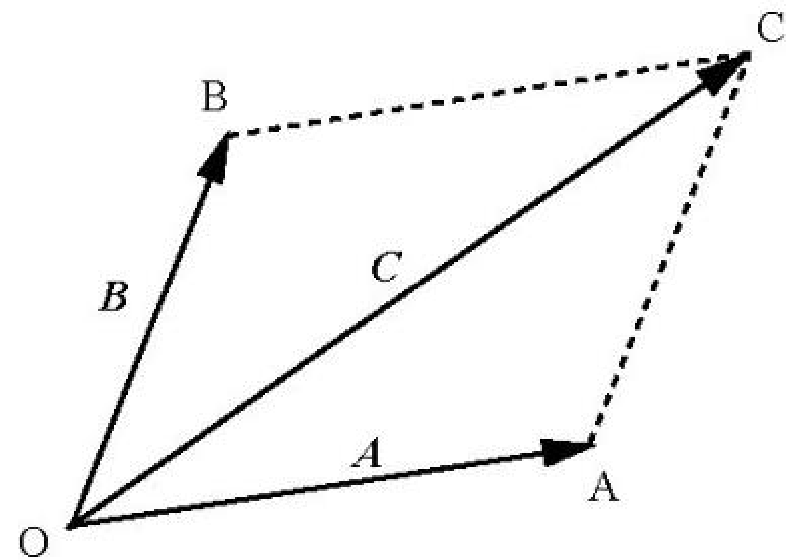
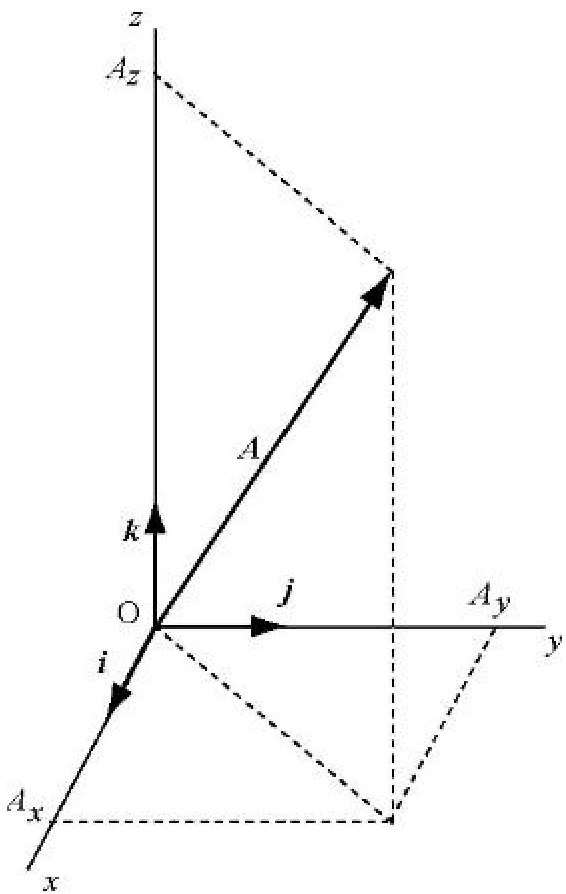
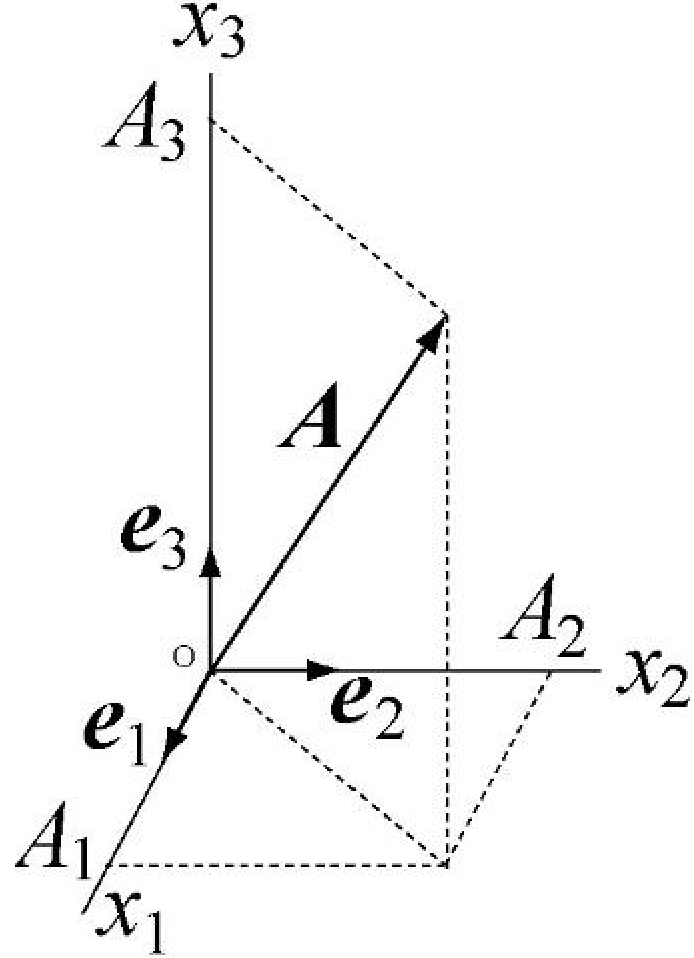


図２　ベクトルの加法

ベクトルとテンソル：ベクトルの成分





$$\boldsymbol{A} = A_x \boldsymbol{i} + A_y \boldsymbol{j} + A_z \boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{A} = A_1 \boldsymbol{e}_1 + A_2 \boldsymbol{e}_2 + A_3 \boldsymbol{e}_3$$

$$= A_i \boldsymbol{e}_i$$ 総和規約

本題の前に:ベクトルとテンソルの基礎的事項

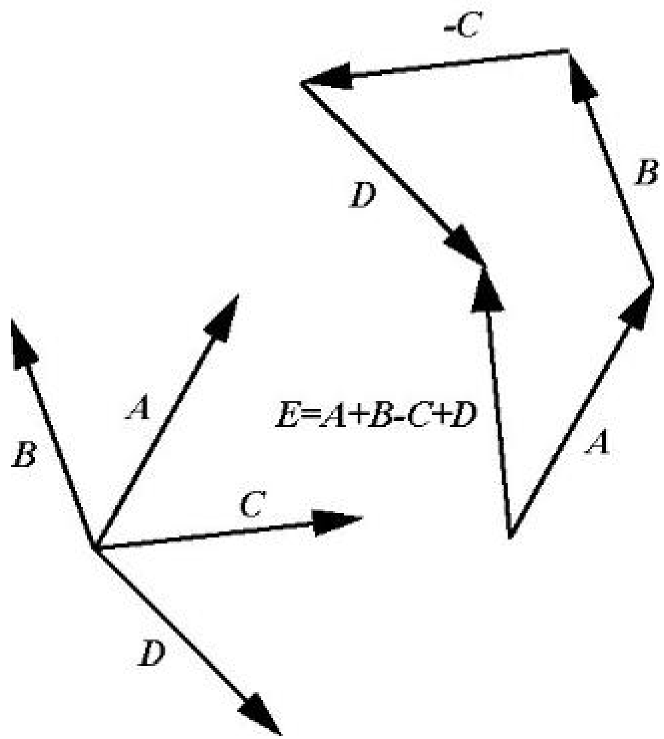


図３　ベクトルの合成

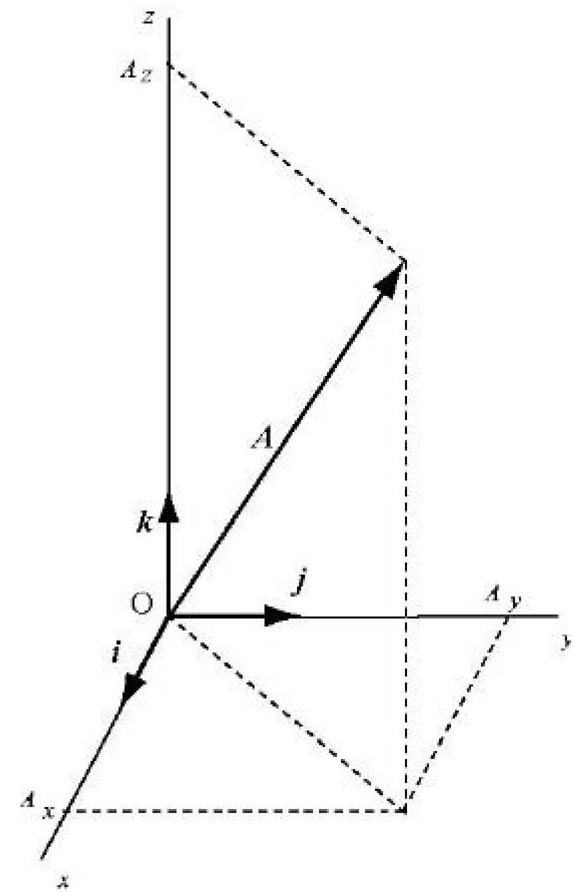


図４　ベクトルの成分

本題の前に:ベクトルとテンソルの基礎的事項

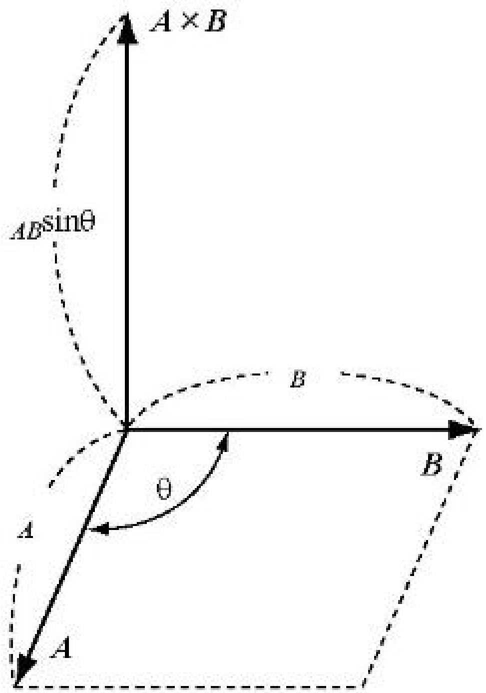


図５ ベクトルの外積

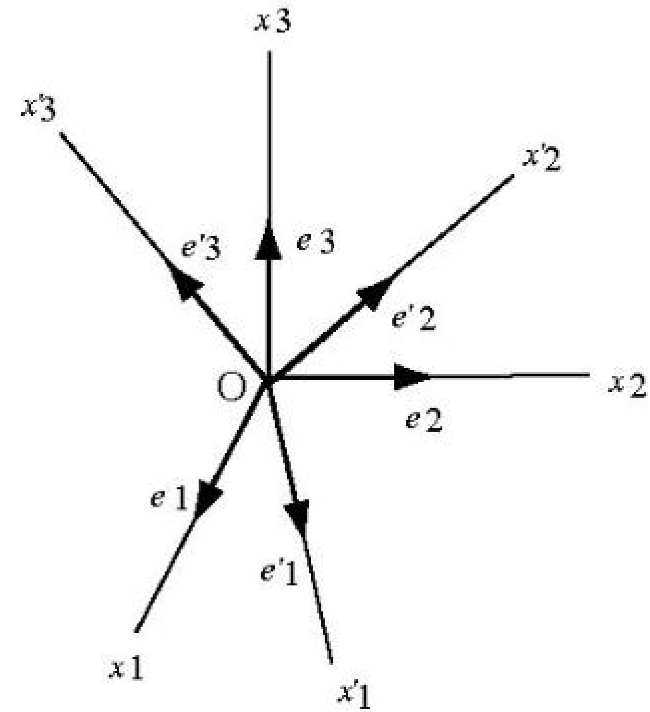


図６ 座標変換

本題の前に:ベクトルとテンソルの基礎的事項

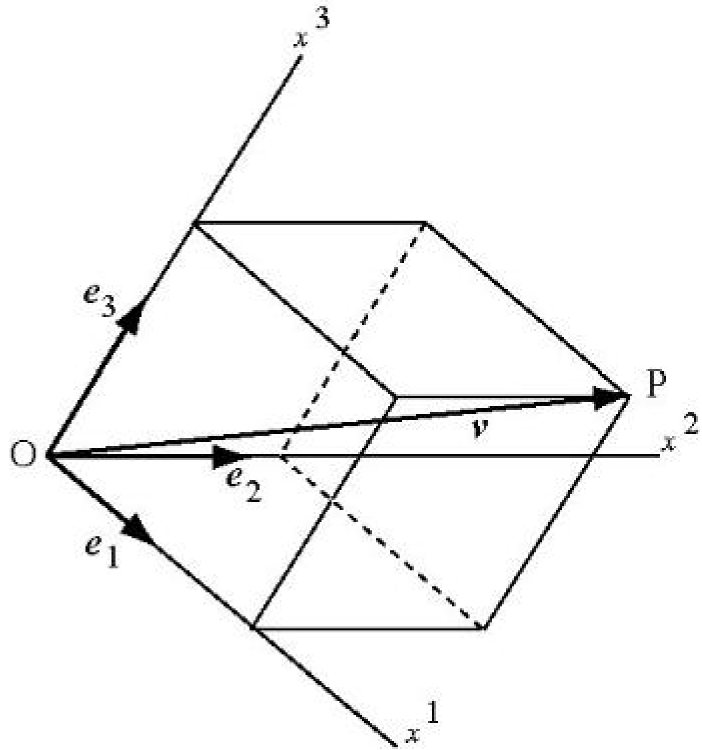


図7　斜交座標系

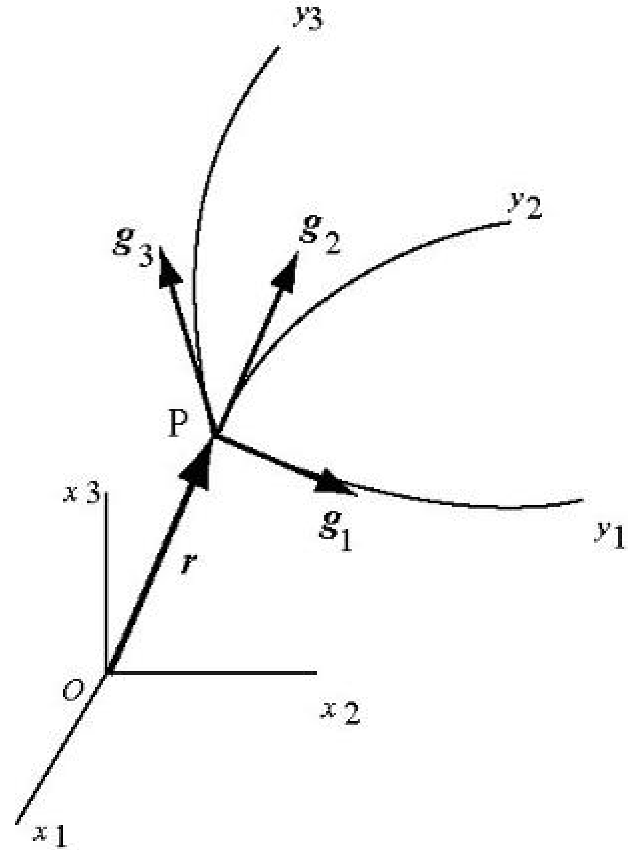
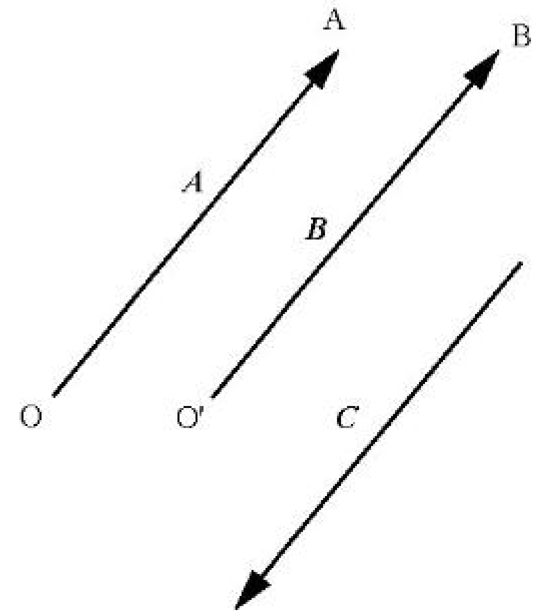
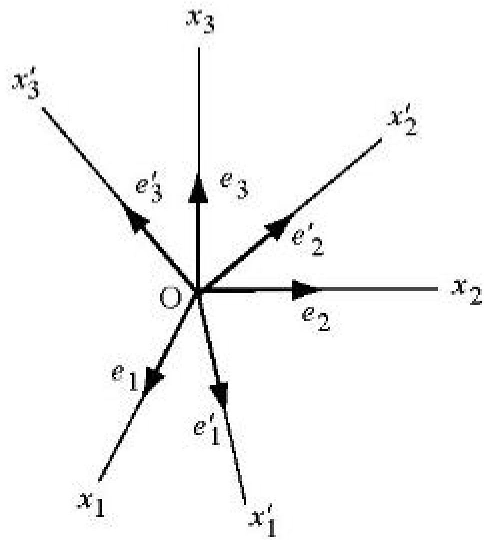


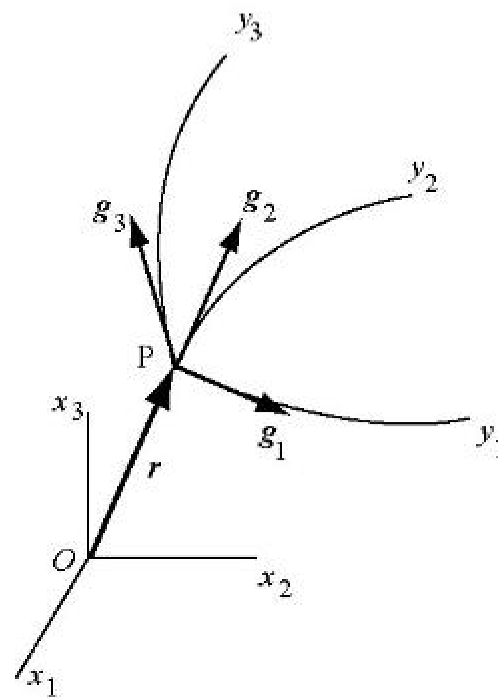
図8　一般座標系

ベクトルとテンソルの基礎的事項



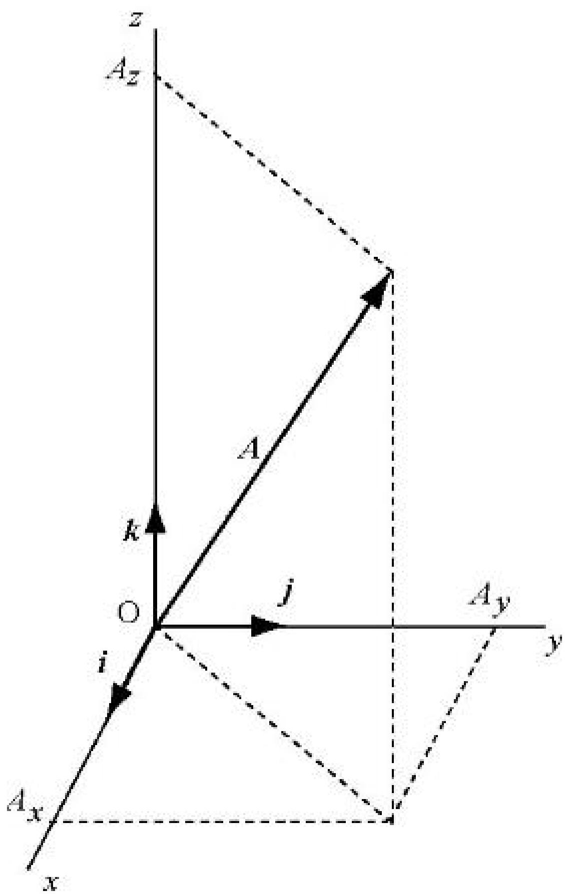


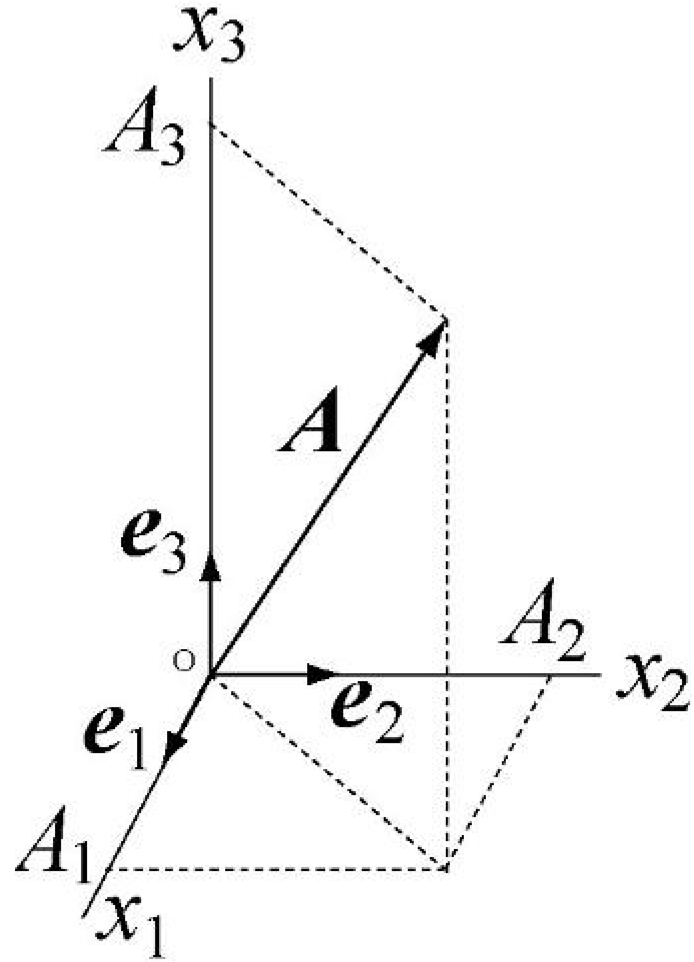
$O-x_1,x_2,x_3$　座標系と $O-x'_1,x'_2,x'_3$



一般座標系

ベクトルとテンソル：ベクトルの成分



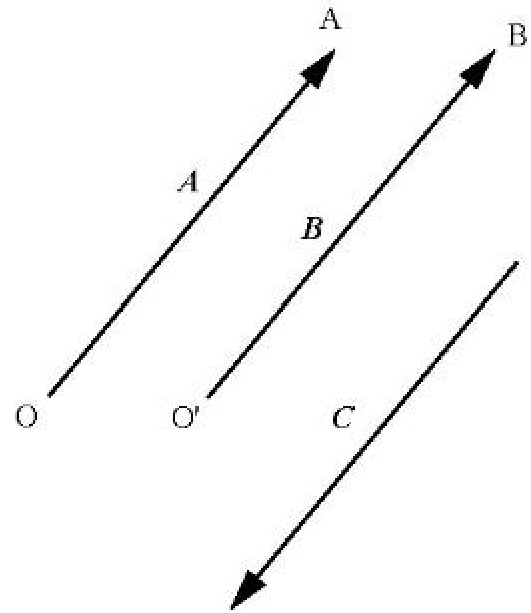


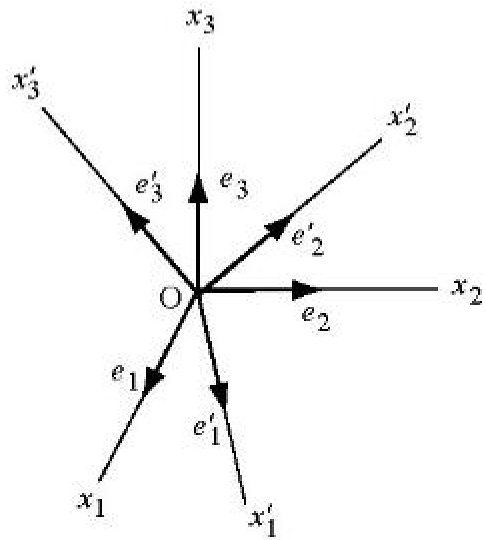
$$\boldsymbol{A} = A_x \boldsymbol{i} + A_y \boldsymbol{j} + A_z \boldsymbol{k}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= A_1 \boldsymbol{e}_1 + A_2 \boldsymbol{e}_2 + A_3 \boldsymbol{e}_3 \\ &= A_i \boldsymbol{e}_i\end{aligned}$$

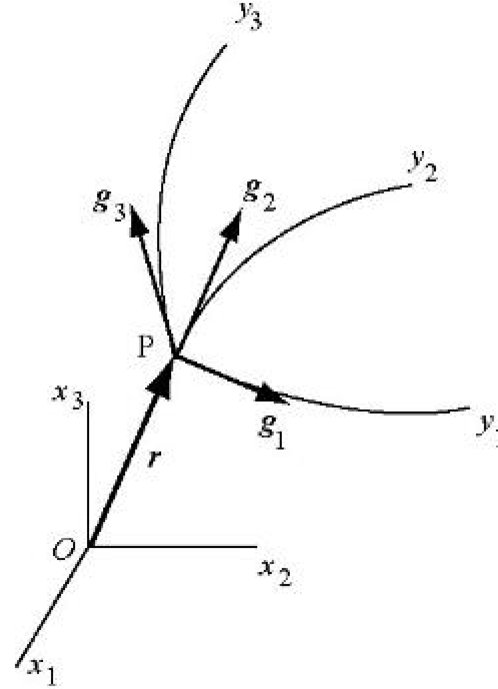
総和規約

ベクトルとテンソルの基礎的事項





$O-x_1, x_2, x_3$ 座標系と $O-x'_1, x'_2, x'_3$



一般座標系

ベクトルとテンソルの基礎的事項

テンソル

二階のテンソル（Second Order Tensor）は，ベクトルからベクトルへの一次変換（Linear Transformation）の作用素（オペレータ，Operator）として定義される.

$$\boldsymbol{v} = \left(\text{Second Order Tensor}\right) \cdot \boldsymbol{u}$$