week5 讲稿

Notation：记 $N(A)$ 是 A 的 null space.

- 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，则 $N(A)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间（是一个线性空间）

  pf：只需证对数乘和加法封闭.

  对任意 $x_1\in N(A)$，有 $Ax_1=0$. 任意 $k\in\mathbb{R}$，$A(kx_1)=kAx_1=k\cdot 0=0$. 故 $kx_1\in N(A)$

  对任意 $x_1,x_2\in N(A)$，有 $Ax_1=0$，$Ax_2=0$. 则 $A(x_1+x_2)=Ax_1+Ax_2=0+0=0$. 故 $x_1+x_2\in N(A)$

- 任取 $v\in V$ 与 V 的子空间 $U\subseteq V$. 记号 $v+U:=\{v+u\mid u\in U\}$.

  注意 $v+U$ 合起来是一个集合的记号，不表示加法.

[prop] $v+U=U \iff v\in U$

pf: $\Rightarrow$ U 是子空间故 $0\in U$. 由 $v+U$ 的定义，$v+0\in v+U=U$，即 $v\in U$

$\Leftarrow$ $v+U=\{v+u\mid u\in U\}\subseteq U$.（因为 $v\in U$，$u\in U$，线性空间对加法封闭）

$\forall w\in U$，$w=v+w-v\in v+U$（因为 $w,v\in U$，故 $w-v\in U$，注意线性空间对减法封闭）

综上 $v+U=U$. Q.E.D.

[prop] $v+U=u+U \iff v-u\in U$

$\Rightarrow$ 由于 $v+U=u+U$，有 $v\in u+U$. 由 $v=u+v-u\in u+U$ 有 $v-u\in U$.

$\Leftarrow$ $\forall v+w\in v+U$，有 $v+w=u+\underbrace{v-u}_{U}+\underbrace{w}_{U}\in u+U$. 故 $v+U\subseteq u+U$

$\forall u+\xi\in u+U$，有 $u+\xi=v+u-v+\xi\in v+U$. 故 $u+U\subseteq v+U$.

$\Big\}\ u+U = v+U$

- 任取 x_p 满足 $Ax_p=b$. 则 $Ax=b$ 的所有解构成的集合是 $x_p+N(A)$

  pf: 记 $Ax=b$ 的所有解构成的集合为 S. 即证 $S=x_p+N(A)$.

  △证 $S\subseteq x_p+N(A)$. 任给 $v\in S$，即 $Av=b$. 把 v 换个写法 $v=x_p+v-x_p$.

  由于 $A(v-x_p)=Av-Ax_p=b-b=0$，故 $v-x_p\in N(A)$. 于是 $v\in x_p+N(A)$.

  因此 $S\subseteq x_p+N(A)$

  △证 $x_p+N(A)\subseteq S$. 任给 $x_p+u\in x_p+N(A)$，其中 $u\in N(A)$. $A(x_p+u)=Ax_p+Au$ $=b+0=b$，故 $x_p+u\in S$. 因此 $x_p+N(A)\subseteq S$.

  综上 $S=x_p+N(A)$.

* 当 $b=0$，x_p 是 $Ax=0$ 的特解，即 $x_p\in N(A)$. 因此 $S=x_p+N(A)=N(A)$.

✿ 当 $b=0$，$Ax=0$ 的解构成线性空间

当 $b\neq 0$，$Ax=b$ 的解不构成线性空间. 它是 $N(A)+x_p$，不包含 0，因此一定不是线性空间

图像上看，它是"线性空间做一个平移".（商空间）

Rmk (Remark)：一个常见的疑问是 x_p 的选取是否会影响结果？答案是不会.

可以从两个角度理解：① 回顾证明 $Ax=b$ 的解是 $x_p+N(A)$ 的过程，我们只用到 $Ax_p=b$ 即"x_p 是 $Ax=b$ 的一个解"这个性质. 因此任何 x_p 只要满足 $Ax_p=b$ 就可以.

② 假设有两个特解 x_{p_1} 与 x_{p_2}，即 $Ax_{p_1}=b$，$Ax_{p_2}=b$. 由于 $A(x_{p_1}-x_{p_2})=b-b=0$，故 $x_{p_1}-x_{p_2}\in N(A)$. 因此 $x_{p_1}+N(A)=x_{p_2}+N(A)$.

- $Ax=b$ 的具体计算.

Step I. 找特解 x_p. 怎么找都可以. 常用的办法是令某几个变量为0.

Step II. 找 null space $N(A)$. (以往都是找一个向量，这里要找一个空间)

week 4 中提到，行变换不改变解. (解 $Ax=0$，对A作行变换得 A'，$N(A)=N(A')$；解 $Ax=b$，对增广矩阵 $[A\ b]$ 作行变换，解不变)

我们用行变换把矩阵A化到 $\underbrace{\text{Reduced 阶梯型}}_{\text{一般用R表示.}}$ (这种情况最好解).

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}} \longrightarrow \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \underset{R}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & * \\ & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}.$$

主元化为1

往上打洞(消0)

对A作行变换得到R，则 $N(A)=N(R)$.

[例] 解 $Rx=0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

↓转化成方程组

$$\begin{cases} u+3v-y=0 \\ w+y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=-3v+y \\ w=-y \end{cases} \Rightarrow \text{解} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3v+y \\ v \\ -y \\ y \end{bmatrix}=v\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+y\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},\ v,y\in\mathbb{R}$$

因此 $N(R)=\text{span}\left(\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

- 在第一节课就学习了高斯消元法解方程，和这里的区别在哪里？

对于可逆阵A，$[A\,\vdots\,b]\rightarrow[I\,\vdots\,b']$ 可得唯一解就是 $x=b'$. 此时高斯消元法能找到所有解(只有一个解). 对于不可逆矩阵A，对增广矩阵作行变换

$[A \,\vdots\, b] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc:c} I & F & \\ 0 & 0 & b' \end{array}\right]$.

情况良好： $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x+z=1 \\ y+z=1 \end{cases} \xRightarrow{\text{解得}} \begin{cases} x=1-z \\ y=1-z \end{cases}$ 故解 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-z \\ 1-z \\ z \end{bmatrix}$

$= \underbrace{z\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}$

(也长成 $x_p+N(A)$ 的形式)

情况不好： $[\ ' \ , * * * * * * \vdots *]$ ⇝ 很麻烦.

采用 $x_p+N(A)$ 的办法求解 $Ax=b$ 比增广矩阵作行变换更简单，而且揭示了解的形式.

· 矩阵的秩 = 主元的个数 = 初等行变换得到行阶梯型的非零行数

= 初等列变换得到最简形式的非零行数

= 极大线性无关行数 = 极大线性无关列数

= 行空间维数 = 列空间维数.

△ 初等行/列变换不改变秩

Pf: 初等行变换不改变行空间，因此不改变行空间维数，因此不改变秩.

✡ A是 $m\times n$ 矩阵. $r(A)+\dim N(A)=n$

△ 设A是 $m\times n$ 矩阵，B是 $n\times l$ 矩阵

1. $0\le r(A)\le \min(m,n)$

$r(A)=\dim(C(A))\le m$

$r(A)=\dim(R(A))\le n$ $\Rightarrow r(A)\le \min(m,n)$

2. $r(kA)=r(A),\ k\ne 0$

Pf: kA是对A的每一行作乘k的初等行变换

$$A=\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{不改变秩}]{R_1\to k\cdot R_1} \begin{bmatrix} kA_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{不改变秩}]{R_2\to k\cdot R_2} \begin{bmatrix} kA_1 \\ kA_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{不改变秩}]{} \cdots \xrightarrow[\text{不改变秩}]{} \begin{bmatrix} kA_1 \\ \vdots \\ kA_m \end{bmatrix} = kA$$

3. $r(A)=r(A^T)=r(AA^T)=r(A^TA)$

Pf: △证 $r(A)=r(A^T)$. A的秩=A的行秩=A^T的列秩=A^T的秩

△证 $r(A)=r(AA^T)=r(A^TA)$ 证明涉及未学知识，先记住.

4. $r(AB)\le\min\{r(A),r(B)\}$ 口号：矩阵的秩只会越乘越小

$$AB=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}B_1+\cdots+a_{1n}B_n \\ \vdots \\ a_{m1}B_1+\cdots+a_{mn}B_n \end{bmatrix}$$

. AB的每一行行向量都可由

B左乘A，B的行空间小于等于AB行空间.

$B_1,\dots,B_n$线性表出，因此AB的行空间 $R(AB)\subseteq R(B)$.

*口号：左乘矩阵行空间变小或相等
同理，右乘矩阵列空间变小或相等

[Fact] 线性空间V,W满足 $V\subseteq W$，则有 $\dim V\le \dim W$.

于是 $r(AB)=\dim R(AB)\le\dim R(B)=r(B)$.

* Trick: $r(AB)=r((AB)^T)=r(B^TA^T)\le r(A^T)=r(A)$.

5. $r(A+C)\le r(A)+r(C)$，C是m×n矩阵(与A同型可相加)

*Trick: 引入中间矩阵 $[A\,\vdots\,C]$，证 $r(A+C)\le r([A\,\vdots\,C])$，证 $r([A\,\vdots\,C])\le r(A)+r(C)$.

△证 $r(A+C)\le r([A\,\vdots\,C])$

设 $A=[A_1,\dots,A_n]$，$C=[C_1,\dots,C_n]$，

$A+C=[A_1+C_1,\dots,A_n+C_n]$的每一列是$[A\,\vdots\,C]$的列的线性组合，因此
$C(A+C)\subseteq C([A\,\vdots\,C])$，于是 $r(A+C)=\dim C(A+C)\le\dim C([A\,\vdots\,C])=r([A\,\vdots\,C])$

△证 $r([A\,\vdots\,C])\le r(A)+r(C)$ $C([A\,\vdots\,C])=\mathrm{span}(A_1,A_2,\cdots A_n,C_1,\cdots,C_n)$

$r(A)=\{A_1,\cdots,A_n\}$中极大线性无关组个数，$r(C)$同理. $=\mathrm{span}(\{A_1,\cdots,A_n,C_1,\cdots,C_n\}$极大线性无关组)

$\{A_1,\dots,C_n\}$极大线性无关组个数 $\le\#\{A_1,\cdots,A_n\}+\#\{C_1,\cdots,C_n\}$，故 $r([A\,\vdots\,C])\le r(A)+r(C)$.

6. 若P是可逆 $\underbrace{m\times m}_{\text{可左乘}A}$ 矩阵，Q是可逆 $\underbrace{n\times n}_{\text{可右乘}A}$ 矩阵，则 $r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)$.

Pf: 由4.的过程，可知 $R(PA)\subseteq R(A)$. 对PA矩阵左乘P^{-1}，行空间也变小，
即 $R(P^{-1}(PA))\subseteq R(PA)$，即 $R(A)\subseteq R(PA)$. 2边包含关系得 $R(A)=R(PA)$，故 $r(A)=r(PA)$.

*口号：左乘可逆矩阵不改变行空间；右乘可逆矩阵不改变列空间.

$R(PA)=R(A)\Rightarrow r(PA)=\dim R(PA)=\dim R(A)=r(A)$

其余同理.

7. $AB=0\Rightarrow r(A)+r(B)\le n$

Pf: 设 $B=[B_1,\cdots,B_l]$. 由$AB=0$得 $C(B)\subseteq N(A)$. 由[Fact]，

$r(B)=\dim C(B)\le\dim N(A)=n-r(A)$.

5. Addition and scalar multiplication are required to satisfy these eight rules:

1. $x + y = y + x$.
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$.
3. There is a unique "zero vector" such that $x + 0 = x$ for all x.
4. For each x there is a unique vector $-x$ such that $x + (-x) = 0$.
5. $1x = x$.
6. $(c_1c_2)x = c_1(c_2x)$.
7. $c(x + y) = cx + cy$.
8. $(c_1 + c_2)x = c_1x + c_2x$.

(a) Suppose addition in $\mathbf{R}^2$ adds an extra 1 to each component, so that $(3,1) + (5,0)$ equals $(9,2)$ instead of $(8,1)$. With scalar multiplication unchanged, which rules are broken?

(b) Show that the set of all positive real numbers, with $x + y$ and cx redefined to equal the usual xy and x^c, is a vector space. What is the "zero vector"?

(c) Suppose $(x_1, x_2) + (y_1, y_2)$ is defined to be $(x_1 + y_2, x_2 + y_1)$. With the usual $cx = (cx_1, cx_2)$, which of the eight conditions are not satisfied?

- $Ax=b$. $b=0$ 则用高斯消元先办法求解.

  $b\neq 0$ $\quad \underbrace{x_p}_{\text{特解}} + N(A)$, $N(A)$的基是special sol

- (c) If $\mathbf{S}$ and $\mathbf{T}$ are subspaces of $\mathbf{R}^5$, their intersection $\mathbf{S} \cap \mathbf{T}$ (vectors in both subspaces) is a subspace of $\mathbf{R}^5$. *Check the requirements on $x + y$ and cx.*

  口号:子空间的交是子空间

任意$x,y\in S\cap T$,由于S是子空间,因此$x+y\in S$, $kx\in S$, $\forall k\in\mathbb{R}$.
由于T是子空间,因此$x+y\in T$, $kx\in T$, $\forall k\in\mathbb{R}$.
于是 $x+y\in S\cap T$, $kx\in S\cap T$, $\forall k\in\mathbb{R}$. 因此 $S\cap T$是$\mathbb{R}^5$子空间.

- **记号**

  △ $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $a\in\mathbb{R}$ 参数化矩阵

  △ $\left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| a\in\mathbb{R}\right\}$ 一个线性空间

  △ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 一个向量

  △ $\left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} =: 0$ 一个线性空间,这个线性空间只包含一个向量.

△向量:不一定指高中意义下的向量(含有几个分量),线性空间中的一个元素都称为一个向量.
比如 $\left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| a\in\mathbb{R}\right\}$这个线性空间里的一个向量是$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,但对于具体的线性空间一般不这么称呼.

△线性空间的加法和数乘:加法、数乘都只是运算的名称,并不一定是高中意义下的加法和数乘.

△ $x = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} a + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} b$, $a,b\in\mathbb{R}$.

△ Reduced row echelon form 主元所在列是主元为1其余元为0.
"非零元永远可以用来打洞"

45. Write all known relations between r and m and n if $Ax = b$ has

(a) no solution for some b.

(b) infinitely many solutions for every b.

(c) exactly one solution for some b, no solution for other b.

(d) exactly one solution for every b.

(a) $r < m$

$\exists b \in \mathbb{R}^m$ s.t. $b \notin C(A)$.

故 $C(A) \subsetneq \mathbb{R}^m$. 于是

$r(A) = \dim C(A) < \dim(\mathbb{R}^m) = m$

(b) $r = m < n$

对 $\forall b \in \mathbb{R}^m$ 都有解, 说明 $C(A) = \mathbb{R}^m$, 即 $r = m$.

假设 $\{A_1, \cdots, A_n\}$ 线性无关, 则取 $b=0$,

$x_1A_1 + \cdots + x_nA_n = 0$ 只有唯一解 $(0, \cdots, 0)$, 与题意矛盾. 因此 $\{A_1, \cdots, A_n\}$ 线性相关.

因此 $r = \{A_1, \cdots, A_n\}$ 线性无关向量个数 $< n$

(c) $r = n < m$

$\exists b$ 使方程无解, 则 $C(A) \subsetneq \mathbb{R}^m$.

因此 $r < m$.

假设 $\{A_1, \cdots, A_n\}$ 线性相关.

则存在不全为0的 $x_1', \cdots, x_n'$ s.t

$x_1'A_1 + \cdots + x_n'A_n = 0$, 即 $N(A) \supseteq \text{span}\left(\begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}\right)$

因此 $\dim N(A) \geq 1$. 对于任何 b 满足 $Ax = b$ 有解, 则解 $x_p + N(A)$ 必为无穷多解, 不存在只有唯一一解.

(d) $r = n = m$

$\forall b$ 有解, $C(A) = \mathbb{R}^m$. 故 $r = m$.

若 $\{A_1, \cdots, A_n\}$ 线性相关, 则由 (c), $Ax = b$ 有解则有无穷多解. 因此 $\{A_1, \cdots, A_n\}$ 线性无关, 即 $r = n$.

2. Suppose you know that the 3×4 matrix A has the vector $\mathbf{s} = (2, 3, 1, 0)$ as the only special solution to $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(a) What is the rank of A and the complete solution to $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(b) What is the exact row reduced echelon form R of A?

(c) How do you know that $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ can be solved for all $\mathbf{b}$?

(a) $N(A) = \text{span}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ 故 $\dim N(A) = 1$. $r(A) = n - \dim N(A) = 4 - 1 = 3$.

$Ax = 0$ 不用找特解. Complete solution is $x = k\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$.

(b)

$N(A) = \text{span}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \left\{ k\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| k \in \mathbb{R} \right\}$, i.e., $\forall \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in N(A)$, 有 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k \\ 3k \\ k \\ 0 \end{bmatrix}$ for some $k \in \mathbb{R}$.

即 $x_1 = 2k$, $x_2 = 3k$, $x_3 = k$, $x_4 = 0$, 即 $\begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = 3x_3 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases}$ (*). 把(*)化成矩阵形式:

$x_3 = x_3$: 0=0不提供方程

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ 正是 reduce echelon form.

(c)

$r(R) = 3$ 故 $\dim C(A) = 3$. 又 $C(A) \subseteq \mathbb{R}^3$, 有 $C(A) = \mathbb{R}^3$.

由等价 "$Ax = b$ 有解 $\Leftrightarrow b \in C(A)$" 得 $Ax = b$ 对 $\forall b \in \mathbb{R}^3$ 有解.

3. Suppose $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ and $C\mathbf{x} = \mathbf{b}$ have the same (complete) solutions for every $\mathbf{b}$. Is is true that A equals C?

Pf:

误区：行变换不改变解，误认为只要A, C之间相差行变换则对任意b同解.

行变换不改变解是在<u>增广矩阵</u>意义下的

$[A \,\vdots\, b] \xrightarrow{\text{行变换}} [C \,\vdots\, b']$ 即 $Ax=b$ 与 $Cx=b'$ 同解.

和本题要求不同

令 $A=[A_1,\cdots,A_n]$，$C=[C_1,\cdots,C_n]$.

$Ax=b$ 与 $Cx=b$ 同解对任意 b 成立，则特别地，对 $b=A_1$ 成立.

易知 $\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$ 是 $Ax=A_1$ 的一个解，由题意 $\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$ 也是 $Cx=A_1$ 的一个解，

即 $C\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}=A_1$. $L.H.S.=C_1=R.H.S.=A_1$ 同理可证 $C_i=A_i$, $i\in[\![1,n]\!]$.

故 $C=A$.