Week4 讲稿末页Quiz 答案

T1 证明 $\mathbb{R}^n$ 是 $\mathbb{R}$-线性空间.

step1. 定义其上 $\mathbb{R}$-数乘

$\forall a\in\mathbb{R}$, $[\underset{\text{实数}}{x_1},\cdots,x_n]\in\mathbb{R}^n$, 定义 $\underset{\text{数乘}}{a\cdot}[x_1,\cdots,x_n]:=[\underbrace{ax_1}_{\text{实数}a\text{乘实数}x_1},\cdots,ax_n]\in\mathbb{R}^n$

step2. 定义其上加法

$\forall [x_1,\cdots,x_n],[y_1,\cdots,y_n]\in\mathbb{R}^n$, 定义 $[x_1,\cdots,x_n]+[y_1,\cdots,y_n]=[x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n]$

step3. 验证八大条

- $\mathbb{R}$-线性空间的定义(8大条性质; 若题目请证明××是线性空间, 要逐条验证
  - 集合
    - $\mathbb{R}$ 数乘
      - "结合律" $(c_1c_2)x=c_1(c_2x)$
      - 单位元 $1\in\mathbb{R}$ 是数乘单位元
    - 加法
      - 结合律 $(x+y)+z=x+(y+z)$
      - 单位元 $\exists 0\in V$, s.t. $x+0=x$ for $\forall x\in V$
      - 有逆 $\forall x, \exists y$ s.t. $x+y=0$ 加法单位元0, 不是实数0.
      - 交换律 $x+y=y+x$
    - $\mathbb{R}$ 数乘与加法相容 compatible (先做数乘再做加法和先做加法再做数乘相同) $c(x+y)=cx+cy$, $(c_1+c_2)x=c_1x+c_2x$

i) $(c_1c_2)[x_1,\cdots,x_n]=[(c_1c_2)x_1,\cdots,(c_1c_2)x_n]=[c_1(c_2x_1),\cdots,c_1(c_2x_n)]$

$=c_1[c_2x_1,\cdots,c_2x_n]=c_1(c_2[x_1,\cdots,x_n])$

ii) $1\cdot[x_1,\cdots,x_n]=[1\cdot x_1,\cdots,1\cdot x_n]=[x_1,\cdots,x_n]$

iii) $([x_1,\cdots,x_n]+[y_1,\cdots,y_n])+[z_1,\cdots,z_n]$

$=[x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n]+[z_1,\cdots,z_n]=[x_1+y_1+z_1,\cdots,x_n+y_n+z_n]$

$=[x_1,\cdots,x_n]+[y_1+z_1,\cdots,y_n+z_n]$

$=[x_1,\cdots,x_n]+([y_1,\cdots,y_n]+[z_1,\cdots,z_n])$

iv) $[0,\cdots,0]$ 是加法单位元, 因为 $[0,\cdots,0]+[x_1,\cdots,x_n]=[0+x_1,\cdots,0+x_n]$

$=[x_1,\cdots,x_n]$

v) $[-x_1,\cdots,-x_n]$ 是 $[x_1,\cdots,x_n]$ 的逆, 因为

$[-x_1,\cdots,-x_n]+[x_1,\cdots,x_n]=[-x_1+x_1,\cdots,-x_n+x_n]=[0,\cdots,0]$

vi) $[x_1,\cdots,x_n]+[y_1,\cdots,y_n]=[x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n]=[y_1,\cdots,y_n]+[x_1,\cdots,x_n]$

vii) $c([x_1,\cdots,x_n]+[y_1,\cdots,y_n])=c[x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n]$

$=[c(x_1+y_1),\cdots,c(x_n+y_n)]=[cx_1+cy_1,\cdots,cx_n+cy_n]$

$=[cx_1,\cdots,cx_n]+[cy_1,\cdots,cy_n]$

$=c[x_1,\cdots,x_n]+c[y_1,\cdots,y_n]$

viii) $(c_1+c_2)[x_1,\cdots,x_n] = [(c_1+c_2)x_1,\cdots,(c_1+c_2)x_n]$

$= [c_1x_1+c_2x_1,\cdots,c_1x_n+c_2x_n]$

$= [c_1x_1,\cdots,c_1x_n] + [c_2x_1,\cdots,c_2x_n]$

$= c_1[x_1,\cdots,x_n] + c_2[x_1,\cdots,x_n]$

Q.E.D.
(证毕的意思)

T2

	0维	1维	2维	3维
$\mathbb{R}^1$的所有子空间：	0	$\mathbb{R}^1$	\	\
$\mathbb{R}^2$的所有子空间：	0	所有过原点直线	$\mathbb{R}^2$	\
$\mathbb{R}^3$的所有子空间：	0	所有过原点直线	所有过原点平面	$\mathbb{R}^3$

T3 (八条验证略，参照 T1)

$\mathbb{C}$ 视作 $\mathbb{C}$-线性空间 $\begin{cases} \mathbb{C} \\ \mathbb{C}\text{-数乘 就是复数乘法 } c_1\in\mathbb{C},\ c_2\in\mathbb{C},\ c_1\cdot c_2 := c_1c_2 \\ \text{加法 就是复数加法} \end{cases}$

用来作$\mathbb{C}$-数乘的复数 (c_1)　　向量空间$\mathbb{C}$中的向量 (c_2)

$\mathbb{C}$ 视作 $\mathbb{R}$-线性空间 $\begin{cases} \mathbb{C} \\ \mathbb{R}\text{-数乘 就是普通乘法 } a\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{C},\ a\cdot c := ac \\ \text{加法 就是复数加法} \end{cases}$

Rmk：两者区别在哪里？在于 $\mathbb{C}$视作$\mathbb{C}$-线性空间，线性组合系数是复数，基是 1，维数是1．$\mathbb{C}$视作$\mathbb{R}$-线性空间，线性组合系数是实数，基是 1, i，维数是 2.

T3. 证明

i) $\mathrm{span}(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = \mathrm{span}(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n)$

ii) $\mathrm{span}(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) = \mathrm{span}(v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_n)$

iii) $\mathrm{span}(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = \mathrm{span}(v_1, \dots, v_i + \lambda v_j, \dots, v_j, \dots, v_n)$

pf: (i). Obviously

(ii) Since $\lambda v_i \in \mathrm{span}(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n)$, we have

$$\mathrm{span}(v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_n) \subseteq \mathrm{span}(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n)$$

Since $v_i = \frac{1}{\lambda} \cdot \lambda v_i \in \mathrm{span}(v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_n)$,

we have $\mathrm{span}(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) \subseteq \mathrm{span}(v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_n)$

Therefore

$$\mathrm{span}(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) = \mathrm{span}(v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_n)$$

iii) Since $v_i + \lambda v_j \in \mathrm{span}(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n)$,

we have $\mathrm{span}(v_1, \dots, v_i + \lambda v_j, \dots, v_j, \dots, v_n) \subseteq \mathrm{span}(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n)$

Since $v_i = (v_i + \lambda v_j) + (-\lambda) \cdot v_j$, we have

$v_i \in \mathrm{span}(v_1, \dots, v_i + \lambda v_j, \dots, v_j, \dots, v_n)$. Hence

$$\mathrm{span}(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) \subseteq \mathrm{span}(v_1, \dots, v_i + \lambda v_j, \dots, v_j, \dots, v_n)$$