Week 5

4.4

T32 Graph $y=\frac{\sqrt{1-x^2}}{2x+1}$

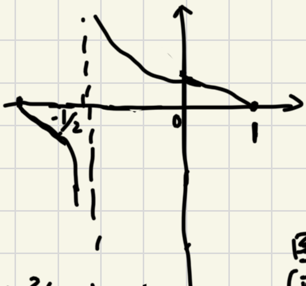
函数定义域是 $[-1,-\frac{1}{2})\cup(-\frac{1}{2},1]$

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}^-}\frac{\sqrt{1-x^2}}{2x+1}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}^+}\frac{\sqrt{1-x^2}}{2x+1}=\infty$$

$$y'=\frac{-(x+2)}{(2x+1)^2\sqrt{1-x^2}}$$ (显然很复杂但注意分母恒正)

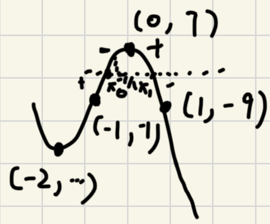
$$\begin{cases} y'(x)>0, & x<-2 \\ y'(x)<0, & x>-2 \end{cases}$$ ✓



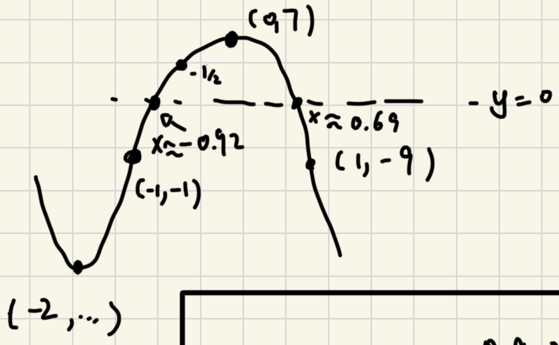
图像I
(画在草稿纸上)

$$y''=\frac{-4x^3-12x^2+7}{(2x+1)^3(1-x^2)^{3/2}}$$，其中 $(1-x^2)^{3/2}$ 恒正.

$$\begin{cases} (2x+1)^3>0, & x>-\frac{1}{2} \\ (2x+1)^3<0 & x<-\frac{1}{2} \end{cases}$$



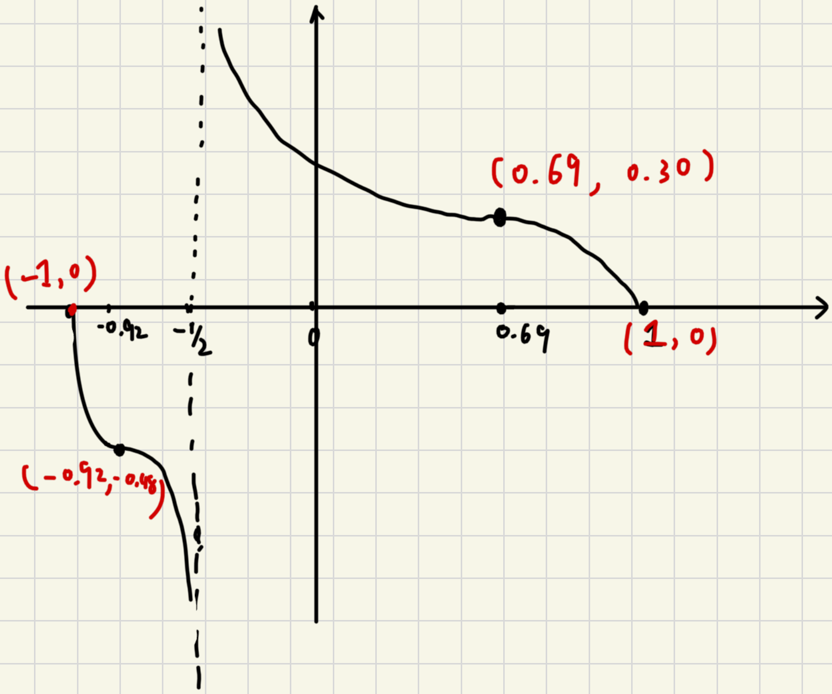
$-4x^3-12x^2+7$ 的图像:



看出所有零点, 按顺序写好.

	$(-1,-0.92)$	$(-0.92,-\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2},0.69)$	$(0.69,1)$
y''	+	−	+	−

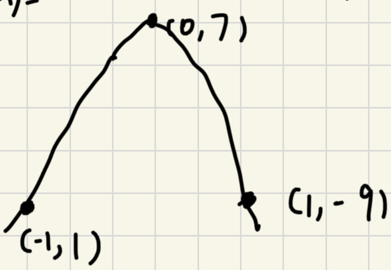
用 y'' 的正负性对图像I进行修正.



key points需要标出来.

Remark:

$g(x) = -4x^3 - 12x^2 + 7 = 0$ 的根.



在 $(-1, 0)$ 间有一根

在 $(0, 1)$ 间有一根.

求解的一个办法是二分法. 当然也可以估算……

-1到0 的中点是 $-\frac{1}{2}$. $g(-\frac{1}{2}) = 4.5 > 0$. 因此解在 $(-1, -\frac{1}{2})$

-1到$-\frac{1}{2}$ 的中点是 -0.75. $g(-0.75) = 1.9375 > 0$. 因此解在 $(-1, 1.9375)$

-1到 -0.75 - · · · -0.875. $g(-0.875) = 0.492 > 0$. · · · $(-1, -0.875)$

-1到 -0.875 · · · · -0.9375. $g(-0.9375) = -0.25 < 0$ · · · · $(-0.9375, -0.875)$

-0.9375到 -0.875 · · · -0.906. $g(-0.906) = 0.1247 > 0$ · · · · $(-0.9375, -0.906)$

- - · - - · · · · -0.92175. $g(-0.92175) = -0.0629 < 0$ · · · $(-0.92175, -0.906)$

· - - - - -0.913875. $g(-0.91375) = 0.0309447 > 0$ · · · $(-0.92175, -0.91375)$

这个区间内精确到第2位小数, 只有0.92.

求0.69同理.

其实一点也不复杂 对吧?

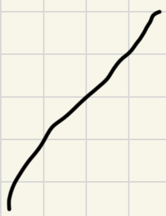
T42. $y=\sqrt[3]{x^3+1}$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{x^3+1}=\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x^3+1}=-\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(x^3+1)^{2/3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

$$y'=\frac{x^2}{(x^3+1)^{2/3}}>0.$$



图像Ⅰ

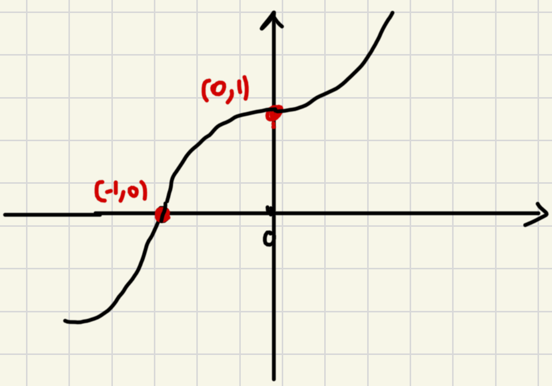
(画在草稿纸上)

$$y''=\frac{2x}{(x^3+1)^{5/3}}$$

看出所有零点，按顺序写好.

y''	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,+\infty)$
	+	-	+

用y''的正负号对图像Ⅰ修正，并标上关键点.



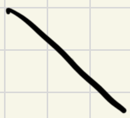
T47

$$y=\sqrt{|x|}=\begin{cases}\sqrt{-x} & x<0\\ \sqrt{x} & x\geq 0\end{cases}$$

只要分别考虑定义在 $x<0$ 上的函数 $f_1(x)=\sqrt{-x}$
和定义在 $x>0$ 上的函数 $f_2(x)=\sqrt{x}$
再拼到一张图上就可以.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x)=+\infty$

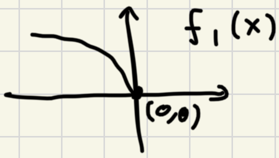
$f_1'(x)=\dfrac{-1}{2\sqrt{-x}}<0$. 注意 (此函数定义域是 $x<0$)



图像III.

$$f_1''(x)=\frac{-(-x)^{-3/2}}{4}<0.$$

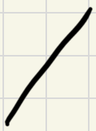
因此只知道 $f_1(x)$ 是 concavity down.
修正图像III并标上 key point.



$\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x)=+\infty$

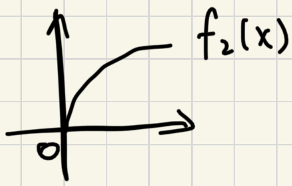
$f_2'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}>0$

图象IV

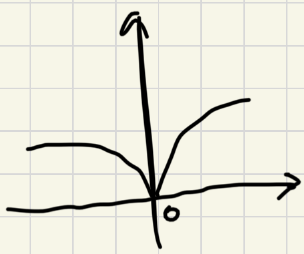


$$f_2''(x)=\frac{-x^{-3/2}}{4}<0.$$

$f_2(x)$ 是 concavity down, 修正图像IV并标上 key point.



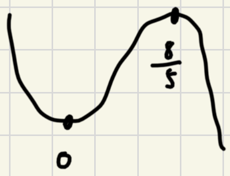
整合 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 图像得



T55.

$$y' = (8x - 5x^2)(4 - x)^2$$

y'	$(-\infty, 0)$	$(0, \frac{8}{5})$	$(\frac{8}{5}, +\infty)$
	$-$	$+$	$-$

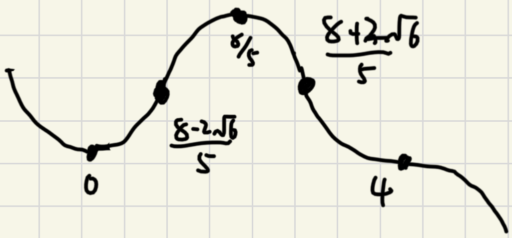


图像V

$$y'' = 4(4 - x)(5x^2 - 16x + 8)$$

y''	$(-\infty, \frac{8-2\sqrt{6}}{5})$	$(\frac{8-2\sqrt{6}}{5}, \frac{8+2\sqrt{6}}{5})$	$(\frac{8+2\sqrt{6}}{5}, 4)$	$(4, +\infty)$
	$+$	$-$	$+$	$-$

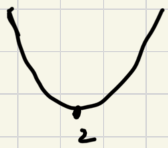
对图像V修正.



T101

y' $\quad(-\infty, 2) \quad (2, +\infty)$

$\quad\quad - \quad\quad\quad +$

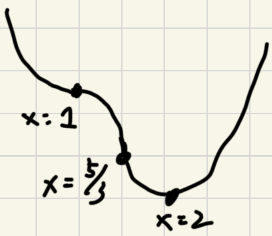


图像VI.

$$y' = 2(x-1)(x-2) + (x-1)^2 = (x-1)(x-\tfrac{5}{3})$$

y'' $\quad(-\infty, 1) \quad (1, \tfrac{5}{3}) \quad (\tfrac{5}{3}, +\infty)$

$\quad\quad + \quad\quad - \quad\quad +$



$x=2$: local min

no local max

$(-\infty, 1) \cup (\tfrac{5}{3}, +\infty)$: concave up

$(1, 5/3)$ concave down

$x=1$, $x=5/3$: inflection pts.

T110

$$y'' = x^2(x-2)^3(x+3).$$

y'' $\quad(-\infty, -3) \quad (-3, 2) \quad (2, +\infty)$

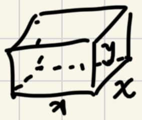
$\quad\quad + \quad\quad - \quad\quad +$

$x=-3$ 与 $x=2$ 是 points of inflection.

4.5

T9

重量正比于面积

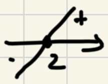


$x^2 y = 4 \Rightarrow y = \frac{4}{x^2}$

$S = x^2 + 4xy = x^2 + \frac{16}{x}$.

$S' = 2x - \frac{16}{x^2} = 2\frac{x^3-8}{x^2}$

$\Rightarrow x = 2$



故 S_{min} 在 $x=2$ 处取到.

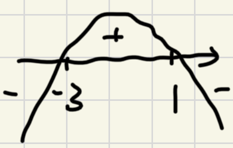
$S_{min} = 4 + \frac{16}{2} = 12$.

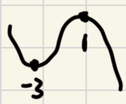
T12

$V = \frac{1}{3}\pi x^2 (3+y)$

$= \frac{1}{3}\pi (9-y^2)(3+y)$.

$V'(y) = \pi(1-y)(3+y)$





当 $y=1$ 时 体积最大.

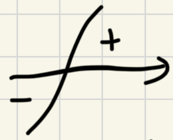
$V_{max} = V(1) = \frac{32\pi}{3}$

T15.

$\pi r^2 h = 1000 \Rightarrow h = \frac{1000}{\pi r^2}$

$A = 8r^2 + 2\pi r h = 8r^2 + \frac{2000}{r}$

$A'(r) = 16r - \frac{2000}{r^2} = \frac{16r^3 - 2000}{r^2}$



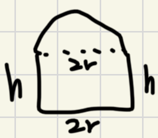
$r=5$ 时 A 取 min.

此时 $h = \frac{40}{\pi}$.

$\frac{h}{x} = \frac{8}{\pi}$.

T22. 周长 $P = 2r + 2h + \pi r$

$2h = P - 2r - \pi r$



$A = 2rh + \frac{1}{4}\pi r^2$

$= r(P - 2r - \pi r) + \frac{1}{4}\pi r^2$

$= rP - 2r^2 - \frac{3}{4}\pi r^2$.

$A'(r) = P - 4r - \frac{3}{2}\pi r = 0$

$\Rightarrow r = \frac{2P}{8+3\pi}$.

$A''\left(\frac{2P}{8+3\pi}\right) < 0$.

$$\frac{2r}{h} = \left.\frac{2r}{\frac{P-2r-\pi r}{2}}\right|_{r=\frac{2P}{8+3\pi}}$$

$= \frac{8}{4+\pi}$.

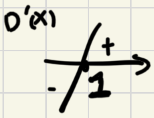
T67

a. $(x, \sqrt{x})$ 与 $(\frac{3}{2}, 0)$ 的间距平方是

$D(x) = (x - \frac{3}{2})^2 + x = x^2 - 2x + \frac{9}{4}$.

$D'(x) = 2x - 2. \Rightarrow D'(1) = 0$

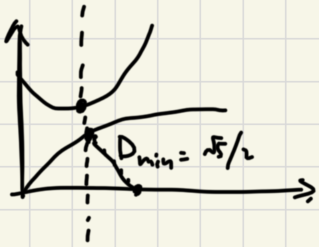
$D''(x) > 0$



故 $D(x)$ 有最小值 $D(1) = \frac{5}{4}$.

$y = \sqrt{x}$ 与 $(\frac{3}{2}, 0)$ 最短距离是 $\sqrt{5}/2$.

b.



4.6

T6

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^4 - 2}{x_n^3}.$$

$x_0 = -1 \Rightarrow x_1 = -\frac{5}{4} \Rightarrow x_2 = -1.1935$

T21

即求 $x^2(x+1) - \frac{1}{x} = 0$ 的根.

令 $f(x) = x^3 + x^2 - \frac{1}{x}$. 则 $f'(x) = 3x^2 + 2x + \frac{1}{x^2}$.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 + x_n^2 - \frac{1}{x_n}}{3x_n^2 + 2x_n + \frac{1}{x_n^2}}$$

$x_1 = 0.83333$, $x_2 = 0.81924$,

$x_3 = 0.81917$, $x_4 = 0.819173$

$x_5 = 0.819173$ 前5位稳定.

故解的前5位是 0.81917.

保留4位是 0.8192.

5.1

T3

$f(x) = \frac{1}{x}$ between $x = 1$ and $x = 5$

(a) $\Delta x = \frac{5-1}{2} = 2$, $x_i = 1 + i\Delta x = 1 + 2i$

Lower sum $= \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{x_i} \cdot 2 = \frac{16}{15}$

(b) $\Delta x = \frac{5-1}{4} = 1$, $x_i = 1 + i\Delta x = 1 + i$

Lower sum $= \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{x_i} \cdot 1 = \frac{77}{60}$

(c) $\Delta x = \frac{5-1}{2}$, $x_i = 1 + i\Delta x = 1 + 2i$

Upper sum $= \sum_{i=0}^{2} \frac{1}{x_i} \cdot 2 = \frac{8}{3}$

(d) $\Delta x = \frac{5-1}{4} = 1$, $x_i = 1 + i\Delta x = 1 + i$

Upper sum $= \sum_{i=0}^{3} \frac{1}{x_i} \cdot 1 = \frac{25}{12}$.

T17

$f(t)=\frac{1}{2}+\sin \pi t$ on $[0,2]$,
分割为4个子区间 $[0,0.5]$, $[0.5,1]$, $[1,1.5]$, $[1.5,2]$. 子区间中点分别是 $m_1=0.25$, $m_2=0.75$, $m_3=1.25$ $m_4=1.75$.

$f(m_1)=1$, $f(m_2)=1$, $f(m_3)=1$
$f(m_4)=1$.

总面积 $\approx (1+1+1+1)\times\frac{1}{2}=2$.

平均值 $=\dfrac{\text{总面积}}{\text{区间长度}}=\dfrac{2}{2}=1$

补充题.

T3. $f'(x)=(x-1)^2(x-2)^3$

$$f''(x)=2(x-1)(x-2)^3+3(x-1)^2(x-2)^2$$
$$=(x-1)(x-2)^2\left(2(x-2)+3(x-1)\right)$$
$$=(x-1)(x-2)^2(5x-7)$$

$(1,f(1))$ 与 $(\frac{7}{5},f(\frac{7}{5}))$ 是 inflection point.

故 B 错误.

T8.

Let $f(x)=x\sin x+\cos x-x^2$.

$f'(x)=x\cos x-2x=x(\cos x-2)$

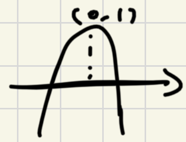
$f'(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上大于0
在 $(0,+\infty)$ 上小于0.

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上递增
在 $(0,+\infty)$ 上递减.

$$\lim_{x\to-\infty} x\sin x+\cos x-x^2$$
$$=\lim_{x\to-\infty} \underbrace{x}_{-\infty}\underbrace{(\sin x-x)}_{+\infty}+\underbrace{\cos x}_{\text{有限值}}=-\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} x\sin x+\cos x-x^2=\lim_{x\to\infty} \underbrace{x}_{\infty}\underbrace{(\sin x-x)}_{-\infty}+\cos x=-\infty$$

又由 $f(0)=1>0$ 知图像为



因此 f 在 $\mathbb{R}$ 上有两个根.

T10

令 $F(x)=f(x)-g(x)$.

设 f 在 $x=x_1$ 处取到最大值,
g 在 $x=x_2$ 处取到最大值.

1) 若 $x_1\neq x_2$. 不妨设 $x_1<x_2$

$F(x_1)=f(x_1)-g(x_1)>0$

$F(x_2)=f(x_2)-g(x_2)<0$.

则存在 $x_3\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$

使得 $F(x_3)=f(x_3)-g(x_3)=0$

$F(a)=f(a)-g(a)=0$

$F(b)=f(b)-g(b)=0$.

$F(a)=F(x_3)$, 故存在 $x_4\in(a,x_3)$
使得 $F'(x_4)=0$

$F(b)=F(x_3)$. 故存在 $x_5\in(x_3,b)$
使得 $F'(x_5)=0$.

由 $F'(x_4)=F'(x_5)$, 可知存在 $c\in(x_4,x_5)$
使得 $F''(c)=f''(c)-g''(c)=0$

2) 若 $x_1=x_2=:t$

$F(t)=f(t)-g(t)=0$

在 1) 中令 $x_3=t$, 则同理可证
存在 $c\in(a,b)$, 使得 $F''(c)=f''(c)-g''(c)=0$.

T11 Find extreme values of $y=f(x)$ defined by $y^3+xy^2+x^2y+6=0$ (1),

两边同时对 x 求导 得

$$3y^2y'+y^2+2xyy'+2xy+x^2y'=0 \quad (2)$$

在y取极值时，$y'=0$.

因此上式化为 $y^2+2xy=0$ (3)

由表达式 $y^3+xy^2+x^2y+6=0$ 可知

函数值 $y\neq 0$，否则会得到 $6=0$，矛盾.

由于 $y\neq 0$，因此等式(3)化为 $y+2x=0$

将 $y=-2x$ 代入(1)得

$$-8x^3+4x^3-2x^3+6=0$$

$$\Rightarrow x=1$$

则 $y=-2\times 1=-2$.

对(2)再关于x求导得

$$6yy'^2+3y^2y''+2yy'+2yy'+2xy'^2+$$
$$2xyy''+2y+2xy'+2xy'+x^2y''=0$$

由$y'=0$，上式化简为

$$3y^2y''+2xyy''+2y+x^2y''=0$$

代入 $\begin{cases}x=1\\y=-2\end{cases}$，求得 $y''=\frac{4}{9}\neq 0$

故 $y=-2$ 是一个极值.

T 15

$f(x)=f(x+0)=f(x)f(0)$，对任意x成立.

若 $f\equiv 0$，则 $f'(x)\equiv 0$，

故 $f'(x)=f'(0)f(x)$.

若f不恒为0，则 $f(0)=1$.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)f(h)-f(x)f(0)}{h}$$
$$=f(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=f(x)f'(0)$$