Week 2

2.5

T23 找不连续点

$y = \frac{x\tan x}{x^2+1}$

$\mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \}$

T33 找极限并判断是否连续

$\lim\limits_{y\to 1} \sec(y\sec^2 y - \tan^2 y - 1)$

$= \lim\limits_{y\to 1} \frac{1}{\cos\left(y\frac{1}{\cos^2 y} - \tan^2 y - 1\right)}$

$= \lim\limits_{y\to 1} \frac{1}{\cos\left(\frac{y - \sin^2 y - \cos^2 y}{\cos^2 y}\right)}$

$= \lim\limits_{y\to 1} \frac{1}{\cos\left(\frac{y-1}{\cos^2 y}\right)}$

函数 $\frac{1}{\cos\left(\frac{y-1}{\cos^2 y}\right)}$ 在 $y=1$ 处连续.

因此原式 $= \frac{1}{\cos 0} = 1$

T38. 在 $x=0$ 处不连续(因为没定义)

$\lim\limits_{x\to 0} \sec\left(\frac{\pi(\sin 2x - \sin x)}{3x}\right)$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi(\sin 2x - \sin x)}{3x}\right)}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\cos\left(\frac{2\pi}{3}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right) - \frac{\pi}{3}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right)}$

$= \frac{1}{\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right)} = 2$

T47

For what values of a and b is $f(x) = \begin{cases} -2 & x \le -1 \\ ax - b & -1 < x < 1 \\ 3 & x \ge 1 \end{cases}$ continuous at every x?

$\begin{cases} a(-1) - b = -2 \\ a - b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5/2 \\ b = -1/2 \end{cases}$

T55

令 $f(x) = x^3 - 15x + 1$. $f(x)$ 在 $[-4,4]$ 上连续. $f(-4) = -3$, $f(0) = 1$, $f(1) = -13$, $f(4) = 5$. 由介值定理得 $(-4,0)$, $(0,1)$, $(1,4)$ 中分别存在至少一个根.

T61

a. 证明 $f(x) = \begin{cases} 1 & x\text{是有理数} \\ 0 & x\text{是无理数} \end{cases}$

若 x_0 是有理数, 存在无理数列 $\{x_n\} \to x_0$, $n \to +\infty$, 则

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0 \ne 1 = f(x_0)$

x_0 是无理数同理

b. 不.

T64

不矛盾. Thm 9: f 在 $x=c$ 连续, g 在 $f(c)$ 连续则 $g\circ f$ 在 $x=c$ 连续.

此例中 g 并不在 $x=f(0)$ 处连续, 虽然 g 在 $x=0$ 处连续.

$f(x) = x+1$

$g(t) = \begin{cases} 0 & t = 1 \\ 1 & t \ne 1 \end{cases}$

$g\circ f(x) = g(x+1) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x \ne 0 \end{cases}$

T67

f is conti on $[0,1]$ and

$0 \le f(x) \le 1 \quad \forall x \in [0,1]$.

Show that there exists a number $c \in [0,1]$ s.t. $f(c)=c$.

证明:

令 $\varphi(x) = f(x) - x$.

x与$f(x)$在$[0,1]$上连续,故$\varphi(x)$在$[0,1]$上连续. $\varphi(0) = f(0) - 0 \ge 0$.

$\varphi(1) = f(1) - 1 \le 0$

故 $\exists c \in [0,1]$, s.t. $\varphi(c) = 0$, i.e., $f(c) = c$.

2.6

T31

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^{5/3} - x^{1/3} + 7}{x^{8/5} + 3x + \sqrt{x}}$$

令 $x^{1/30} = t$. 原式 $= \lim_{t\to\infty} \frac{2t^{50} - t^{10} + 7}{t^{48} + 3t^{30} + t^{15}}$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{2t^2 - t^{-38} + 7t^{-48}}{1 + 3t^{-18} + t^{-33}}$$

$$= \infty$$

T36

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4 - 3x^3}{\sqrt{x^6+9}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{4/\sqrt{x^6} - 3x^3/\sqrt{x^6}}{\sqrt{1+9x^{-6}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4/(-x)^3 - 3x^3/(-x)^3}{\sqrt{1+9x^{-6}}}$$

$$= \frac{-4x^3 + 3}{\sqrt{1+9x^{-6}}} = 3$$

T51

$$\lim_{\theta\to0^-} (1 + \csc\theta)$$

$$= \lim_{\theta\to0^-} \left(1 + \frac{1}{\sin\theta}\right)$$

$$= \lim_{x\to0^-} 1 + \frac{1}{x}$$

$$= -\infty$$

T58.

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 4x}$$

$$= \frac{(x-1)(x-2)}{x(x-2)(x+2)}$$

$$\overset{x\neq2}{=} \frac{x-1}{x(x+2)}$$

(a) $\lim_{x\to2^+} \frac{x-1}{x(x+2)} = \frac{2-1}{2(2+2)} = \frac{1}{8}$

(b) $\lim_{x\to-2^+} \frac{x-1}{x(x+2)} = \infty$

分子极限是常数,
分母极限是0;
再判断下符号可
知极限是∞

(c) $\lim_{x\to0^-} \frac{x-1}{x(x+2)} = \infty$

(d) $\lim_{x\to1^+} \frac{x-1}{x(x+2)} = \frac{1-1}{1(1+2)} = 0$

(e) $\lim_{x\to0^+} \frac{x-1}{x(x+2)} = -\infty$

因此 $\lim_{x\to0} \frac{x-1}{x(x+2)}$ 不存在.

T62

$$\lim \frac{1}{x^{1/3}} - \frac{1}{(x-1)^{4/3}}$$

a. $x\to 0^+$，极限是 ∞

b. $x\to 0^-$，极限是 $-\infty$

c. $x\to 1^+$，极限是 $-\infty$

d. $x\to 1^-$，极限是 $-\infty$

T83

$$\lim_{x\to-\infty} \left(2x+\sqrt{4x^2+3x-2}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2-(4x^2+3x-2)}{2x-\sqrt{4x^2+3x-2}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty} \frac{-3x+2}{2x-\sqrt{4x^2+3x-2}}$$

上下同除 $-x$

$$=\lim_{x\to-\infty} \frac{3-2x^{-1}}{-2-\sqrt{4+3x^{-1}-2x^{-2}}}$$

$$=-\frac{3}{4}$$

T102.

$$y=\frac{x^2-1}{2x+4}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{2x+4} = \lim_{x\to\infty} \frac{x-x^{-1}}{2+4x^{-1}} = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-1}{2x+4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-x^{-1}}{2+4x^{-1}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-2^+} \frac{x^2-1}{2x+4}$$

令 $t=x+2$

$$=\lim_{t\to0^+} \frac{(t-2)^2-1}{2t}$$

$$=\lim_{t\to0^+} \frac{t^2-4t+3}{2t}$$

$$=\lim_{t\to0^+} \frac{t}{2}-2+\frac{3}{2t}$$

$$=\infty$$

同理 $\lim_{x\to-2^-} y(x) = -\infty$

$$a_\infty=\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{(2x+4)x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-x^{-2}}{2+4x^{-1}} = \frac{1}{2}$$

$$a_{-\infty}=\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-1}{(2x+4)x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-x^{-2}}{2+4x^{-1}} = \frac{1}{2}$$

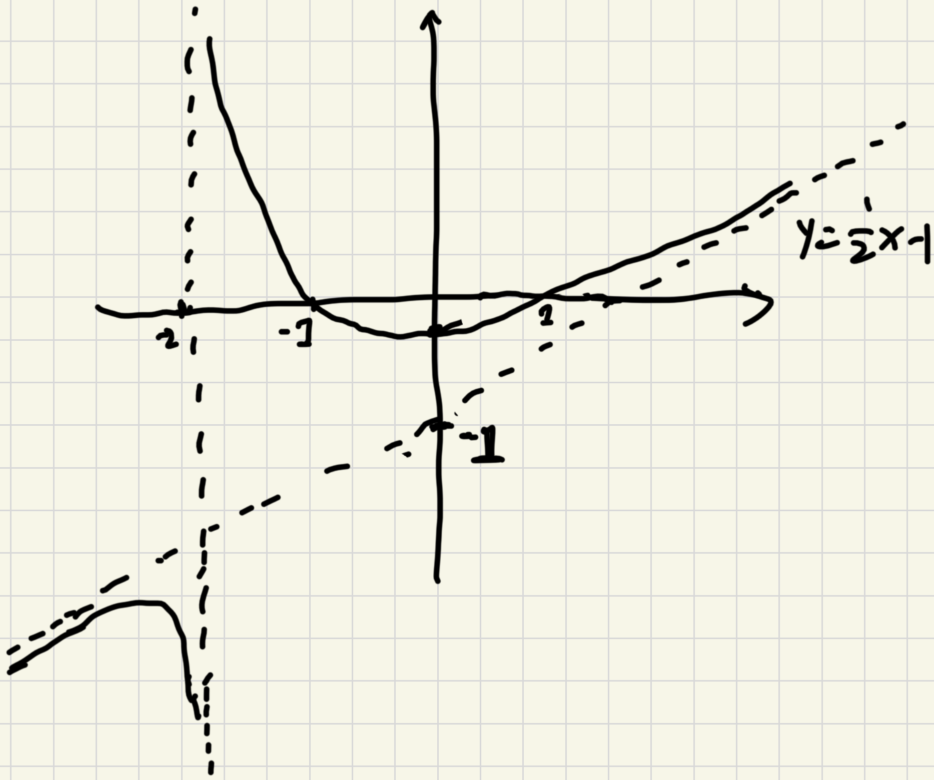
$$b_\infty=\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{2x+4}-\frac{1}{2}x$$

$$=\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1-\frac{1}{2}x(2x+4)}{2x+4}$$

$$=\lim_{x\to\infty} \frac{-x^{-1}-2}{2+4x^{-1}}$$

$$=-1$$

同理 $b_{-\infty}=-1$



3.1

T18.

$f(x)=\sqrt{x+1}$,(8,3)

$f'(x)\ \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

$f'(8)=\frac{1}{6}$

$y=\frac{1}{6}x+\frac{5}{3}$

T32

$\frac{dV}{dr}=\frac{4}{3}\pi 3r^2=4\pi r^2$

$r=2$, $\left.\frac{dV}{dr}\right|_{r=2}=4\pi 4=16\pi$

T35

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\frac{1}{h}-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}h\sin\frac{1}{h}=0$$

这个极限是week 1作业题证过的.

T48.

$x>4$, $y'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-4}}$, 不可能出现斜率为$\pm\infty$.

$x<4$, $y'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{4-x}}$, 不可能出现斜率为$\pm\infty$.

唯一可能出现斜率$\pm\infty$是在$x=4$.

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{4+h-4}-0}{h}=+\infty$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{\sqrt{4-(4+h)}-0}{h}=-\infty$$

3.2

T16.

$$\left.y'\right|_{x=-2}=\left.\frac{1-x+(x+3)}{(1-x)^2}\right|_{x=-2}$$

$$=\frac{4}{9}$$

T21

$$\left.\frac{dr}{d\theta}\right|_{\theta=0}=\left.2\left(-\frac{1}{2}\right)(4-\theta)^{-\frac{3}{2}}(-1)\right|_{\theta=0}$$

$$=\frac{1}{8}$$

T42

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{h^{2/3}-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}h^{-1/3}=\infty$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{h^{1/3}}{h}=h^{-2/3}=\infty$$

因此导数不存在.

T58

(a) $|f(0)| \le 0 \Rightarrow |f(0)| = 0$ 即 $f(0)=0$.

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)}{h}$$

$$-\frac{h^2}{h} \le \frac{f(h)}{h} \le \frac{h^2}{h}$$

$$\lim_{h\to 0^+} -\frac{h^2}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^2}{h} = 0$$

故 $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)}{h} = 0$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)}{h}$$

$$\frac{h^2}{h} \le \frac{f(h)}{h} \le -\frac{h^2}{h}$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{h^2}{h} = \lim_{h\to 0^-} -\frac{h^2}{h} = 0$$

故 $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)}{h} = 0$

(b)

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin\frac{1}{h}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} h \sin\frac{1}{h} = 0$$

3.3

T28 $$y = \frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)}$$

$$y' = \frac{(x+2+x+1)(x-1)(x-2) - (x+1)(x+2)(x-1+x-2)}{(x-1)^2(x-2)^2}$$

$$= \frac{(2x+3)(x-1)(x-2) - (x+1)(x+2)(2x-3)}{(x-1)^2(x-2)^2}$$

$$= \frac{-6(x^2-2)}{(x-1)^2(x-2)^2}$$

T40

$$p = \frac{q^2+3}{(q-1)^3+(q+1)^3}$$

$$= \frac{q^2+3}{q^3-3q^2+3q-1+q^3+3q^2+3q+1}$$

$$= \frac{q^2+3}{2q(q^2+3)} = \frac{1}{2q}$$

$$p' = -\frac{1}{2}q^{-2}$$

$$p'' = q^{-3}$$

T41

a. $$\frac{d}{dx}(uv)\Big|_{x=0}$$

$$= u'(0)v(0) + u(0)v'(0)$$

$$= -3\times(-1) + 5\times 2$$

$$= 13$$

b. $$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'(0)v(0) - u(0)v'(0)}{v(0)^2}$$

$$= \frac{(-3)\times(-1) - 5\times 2}{(-1)^2}$$

$$= -7$$

c. $$\frac{d}{dx}\left(\frac{v}{u}\right)\Big|_{x=0}$$

$$= \frac{v'(0)u(0) - v(0)u'(0)}{u(0)^2}$$

$$= \frac{2\times 5 - (-1)\times(-3)}{25}$$

$$= 7/25$$

d. $$\frac{d}{dx}(7v-2u)$$

$$= 7v'(0) - 2u'(0)$$

$$= 14+6 = 20$$

T44

a.

$y' = 3x^2 - 3 = 0$

$\Rightarrow x = \pm 1.$

当 $x=1$, $y = 1^3 - 3\times1 - 2 = -4$

当 $x=-1$, $y = (-1)^3 - 3\times(-1) - 2 = 0$

因此水平切线为 $y=0$ 与 $y=-4$

垂直线分别是 $x=-1$ 与 $x=1$.

b.

$y' = 3x^2 - 3$ 的最小值是 -3,

因此最小斜率是 -3.

在 $x=0$ 时, y 的斜率是 -3.

切线方程是 $y = -3x - 2$, 与此

切线垂直的直线方程是 $y = \frac{1}{3}x - 2$.

· 斜率是 $-\frac{1}{k}$, 因为 $\tan(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{\tan\theta}$

· 过点 $(0,-2)$.

T47

$$\begin{cases} a+b+c=2 \\ 2ax+b \big|_{x=0} = 1 \\ a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=0 \end{cases}$$

T58

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & x>-1 \\ bx^2-3 & x\le -1 \end{cases}$$

$ax+b$ 在 $(-1,+\infty)$ 上可导

bx^2-3 在 $(-\infty,-1)$ 上可导

只要 $f(x)$ 在 $x=-1$ 上可导则

$f(x)$ 在所有点处可导.

$$\lim_{h\to0^+} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to0^+} \frac{a(-1+h)+b-(b-3)}{h}$$

$$= \lim_{h\to0^+} \frac{-a+ah+3}{h} \text{ 存在}$$

$\Rightarrow 3-a=0 \Rightarrow a=3$ 且右导为3

$$\lim_{h\to0^-} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to0^-} \frac{b(-1+h)^2-3-(b-3)}{h}$$

$$= \lim_{h\to0^-} \frac{b(1-2h+h^2)-3-b+3}{h}$$

$$= \lim_{h\to0^-} -2b + bh = -2b$$

要求左导 = 右导 = 3 即

$-2b = 3 \Rightarrow b = -\frac{3}{2}.$

3.4

T10

a.

$\frac{ds}{dt} = 24 - 1.6t$ 速度是 $v(t) = 24-1.6t$

$\frac{d^2s}{dt^2} = -1.6$ 因此加速度

是 $-1.6\,m/s^2$.

b.

$\frac{ds}{dt} = 0 \Rightarrow t = 15$

c.

$s = 24\times15 - 0.8\times15^2 = 180$

d.

$90 = 24t - 0.8t^2$

$\Rightarrow t = \frac{30\pm15\sqrt{2}}{2}$

e. $s=0 \Rightarrow t=0$ 与 $t=30$

30 s.

$18000 - 8000$

T28.

$\frac{dQ}{dt}\Big|_{t=10} = -400(30-t)\Big|_{t=10}$

$= -8000$

$Q(10) = 200\times20^2 = 80000$

$\frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{Q(10)-Q(0)}{10} = -10000$

补充作业. CH 2　T2(3)(10)，T8，T12，T24

T2

(3)

$$\lim_{x\to-\infty} x+\sqrt{x^2-x+4}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+\sqrt{x^2-x+4})(x-\sqrt{x^2-x+4})}{x-\sqrt{x^2-x+4}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-4}{x-\sqrt{x^2-x+4}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x-4)/(-x)}{-1-\sqrt{x^2-x+4}/\sqrt{(-x)^2}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1+4/x}{-1-\sqrt{1-x^{-1}+4x^{-2}}}$$

$$=\frac{1}{2}$$

(10)

$$\lim_{x\to1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$$

令 $1-x=t$

$$=\lim_{t\to0} t\tan\frac{\pi(1-t)}{2}$$

$$=\lim_{t\to0} t\frac{1}{\tan\frac{\pi}{2}t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{t\cos\frac{\pi}{2}t}{\sin\frac{\pi}{2}t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\frac{\pi}{2}t}{\sin\frac{\pi}{2}t}\cdot\cos\frac{\pi}{2}t=\frac{2}{\pi}$$

T8

Find a,b, s.t.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}-\frac{a}{x}-b=0$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-(a+bx)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2+x+1-(a+bx)^2}{x(\sqrt{x^2+x+1}+a+bx)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-b^2)x^2+(1-2ab)x+1-a^2}{x(\sqrt{x^2+x+1}+a+bx)}$$

分母趋于0，若要最终极限存在，分子也要趋于0.

因此 $1-a^2=0\Rightarrow a=\pm1$.

① 当 $a=1$

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{(1-b^2)x+(1-2b)}{\sqrt{x^2+x+1}+1+bx}$$

$$=\frac{1-2b}{2}=0\Rightarrow b=\frac{1}{2}.$$

② 当 $a=-1$

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{(1-b^2)x+(1+2b)}{\sqrt{x^2+x+1}-1+bx}$$ 发散舍去.

综上 $\begin{cases}a=1\\ b=1/2\end{cases}$

T12. 给定 $\lim_{x\to0^+}f(x)=l$ 与 $\lim_{x\to0^-}f(x)=m$，考虑如下极限是否存在.

a) $\lim_{x\to0}f(-x)=\lim_{t\to0}f(t)$

若 $l=m$ 则极限存在且为 l.

若 $l\neq m$ 则极限不存在.

b)

$x^2-x\to0^-$ 当 $x\to0^+$

$$\lim_{x\to0^+}f(x^2-x)=\lim_{t\to0^-}f(t)=m.$$

c)

$$\lim_{x\to0^-}2f(-x)+f(x^2)$$

$$=\lim_{x\to0^-}2f(-x)+\lim_{x\to0^-}f(x^2)$$

$$=\lim_{t\to0^+}2f(t)+\lim_{t\to0^+}f(t)$$

$$=2l+l=3l.$$

T24

令 $g(x) = f(x) - f(x+a)$

则 $g(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续.

① 若 $f(0) = f(a)$ 则 $0 \in [0,a]$

就是使 $f(x_0) = f(x_0+a)$ 成立的 x_0.

若 $f(0) \neq f(a)$ 则 $g(0) = f(0) - f(a)$

$g(a) = f(a) - f(2a) = f(a) - f(0) = -g(0)$.

由介值定理, 存在

$x_0 \in [0,a]$, s.t.

$g(x_0) = f(x_0) - f(x_0+a) = 0$