•标准正交基 $q_i^Tq_j=0$ $q_i^Tq_i=1$ $\Rightarrow$ $q_i^Tq_j=\delta_{ij}$

模1 互相正交

• 正交矩阵.

[定义] Q是正交矩阵若 $Q^TQ=I$.

[性质] 设Q是n阶方阵.以下个性质等价.

1. Q是正交矩阵.
2. Q的行向量构成$\mathbb{R}^n$标准正交基.
3. Q的列向量构成$\mathbb{R}^n$标准正交基.

[性质] 若Q是n阶正交矩阵, 则 $\forall x,y\in\mathbb{R}^n$, $(Qx)^TQy=x^Ty$.

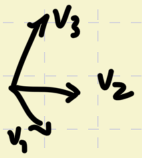
Pf: $(Qx)^TQy=x^TQ^TQy=x^TI\cdot y=x^Ty$

* 正交矩阵保内积 ⇝ 保长度、保角.

模长变为1

•施密特正交化 (只做正交化, 未作归一化)

Idea: 每次把投影部分(平行部分)剔掉, 则只留下正交部分.



v_2减往v_1投影的部分

v_3减往$span(v_1, v_2')$投影部分

☆技术细节(超级易错): 我们如何做 v_3 往 $span(v_1,v_2')$ 投影?

法①(慢但不容易错) 令 $A=[v_1\ v_2']$, 默认 v_1,v_2' L.ind. 则 A^TA 可逆.

$A(A^TA)^{-1}A^Tv_3$ 即是 v_3 往 $span(v_1,v_2')$ 的投影. 但这里涉及很多次矩阵运算, 困难.

法②(讨巧的办法) v_1,v_2' 已经正交了, 因此 v_3 往 $span(v_1,v_2')$ 投影就是

不是往v_2投影

v_3 分别往 v_1, v_2' 做投影再相加 (类比 $\mathbb{R}^3$ 中坐标的概念)

pf: $(v_3-P_{v_1}v_3-P_{v_2'}v_3)^Tv_1=v_3^Tv_1-(P_{v_1}v_3)^Tv_1-\underline{(P_{v_2'}v_3)^Tv_1}$ (由于 $P_{v_2'}v_3\in span(v_2')$ 与v_1正交, 该项是0)

$=v_3^Tv_1-v_3^TP_{v_1}v_1\ \underset{(P_{v_1}v_1=v_1)}{=}\ v_3^Tv_1-v_3^Tv_1=0$

同理 $(v_3-P_{v_1}v_3-P_{v_2'}v_3)^Tv_2'=0$. 因此 $v_3-P_{v_1}v_3-P_{v_2'}v_3$ 与 $span(v_1,v_2')$ 正交, 证明了这种办法的合理性.

[Exp] $a=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ $b=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ $c=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$

$$B=b-\frac{a^Tb}{a^Ta}a=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2\\0\\-1/2\end{bmatrix}$$

$[1/2\ \ 0\ \ -1/2]\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}=1$

$$C = c - \frac{a^Tc}{a^Ta}a - \frac{B^Tc}{B^TB}B = \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} - \frac{2}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} - \frac{1}{\frac{1}{2}}\begin{bmatrix}\frac12\\0\\-\frac12\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

a, B, C 正交（但不归一）

- 线性映射在不同基下的矩阵与QR分解

△BIG picture：QR分解的来源是普通基与标准正交基之间的转换问题

△同一个线性变换 $\mathcal{A}: V \longrightarrow W$，其中 $\dim V = n$，$\dim W = m$。

取V的基为 $B_V = [v_1, \cdots, v_n]$．取W的基为 $B_W = [w_1, \cdots, w_m]$.

设 $\mathcal{A}$ 在 B_V，B_W 下的矩阵为 A，即 $\mathcal{A}B_V = B_W A$.

Question：换新基，取A的基 B_V'，取W的基 B_W'．则存在可逆阵 P, Q，s.t. $B_V' = B_V P$，$B_W' = B_W Q$.（这里Q不指正交矩阵！）

OK，开始变魔术 :) ：

$$\mathcal{A}B_V' \underset{B_V' = B_V P}{=} \mathcal{A}B_V P \underset{\mathcal{A}B_V = B_W A}{=} B_W A P \underset{B_W = B_W' Q^{-1}}{=} B_W' Q^{-1} A P \quad , \text{ i.e., } \mathcal{A}B_V' = B_W' Q^{-1} A P.$$

结论：$\mathcal{A}$ 在新基 $B_V' = B_V P$，$B_W' = B_W Q$ 下的矩阵是 $Q^{-1}AP$.

*从以上论述中可以见出 换基矩阵很重要，它可以帮助计算线性映射在新基下的矩阵．称 $B_V' = B_V P$ 中的矩阵 P 为（从基 B_V 到基 B_V'）的过渡矩阵

△[Prop] 实内积空间 V 必存在标准正交基

pf：线性空间V必存在一组基．对此基做施密特正交化并归一模长，则得到标准正交基．

△ 既然线性空间必存在标准正交基，则一个自然的问题是：求普通基到标准正交基的过渡矩阵．

a matrix Q, whose columns are q_1, q_2, q_3. The QR factorization is as follows:

a在q_1上的投影　　b在q_1上的投影

$$QR = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{q_1^T a} & \boxed{q_1^T b} & q_1^T c \\ 0 & \boxed{q_2^T b} & q_2^T c \\ 0 & 0 & q_3^T c \end{bmatrix}$$

b在q_2上的投影

From example 5, we deduce that:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt2 & \frac{1}{\sqrt2} & \sqrt2 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt2} & \sqrt2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = QR.$$

- You see the lengths of a, B, C on the diagonal of R.
- The orthonormal vectors q_1, q_2, q_3, which are the whole object of orthogonalization, are in the first factor Q.

[Generalization] 实际上只考虑[$\bar{v}_1 \cdots \bar{v}_n$] = [$v_1 \cdots v_n$] U 中的 [$\bar{v}_1 \cdots \bar{v}_n$]和[$v_1 \cdots v_n$]的一部分也是成立的.

即 $[\bar{v}_1\ \bar{v}_2 \cdots \bar{v}_m \cdots \bar{v}_n] = [v_1 \cdots v_m\ v_{m+1} \cdots v_n]\,[U_1\ U_2 \cdots U_m\ U_{m+1} \cdots U_n]$

Theorem

Every m by n matrix with independent columns can be factored into $A = QR$. The columns of Q are orthonormal, and R is upper triangular and invertible. When $m = n$ and all matrices are square, Q becomes an orthogonal matrix.

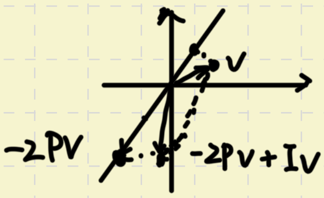
对于上面的example：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = QR.$$

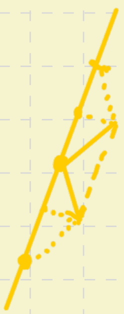
3.3作业

15. If P is the projection matrix onto a line in the x-y plane, draw a figure to describe the effect of the "reflection matrix" $H = I - 2P$. Explain both geometrically and algebraically why $H^2 = I$.

P是$\mathbb{R}^2$中往直线l投影的变换在标准基下的矩阵



先往l上投影再乘-2倍，再加上自身



Algebraically

$$\begin{aligned} H^2 &= (I-2P)(I-2P) \\ &= I - 2P - 2P + 4P^2 \\ &= I - 4P + 4P = I \end{aligned}$$

期中　　1.1　1.2　1.3　1.5　T3　T5　T6　T7

T6 设

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&0&-1\end{bmatrix},\ U=\{B\in M_{3\times3}(\mathbb{R})\mid AB=BA\}.$$

其中 $M_{3\times3}(\mathbb{R})$ 为在正常矩阵加法和数乘定义下所有 3×3 实矩阵构成的向量空间.

(a) 证明: U 是 $M_{3\times3}(\mathbb{R})$ 的一个子空间.

(b) 求 U 的一个基向量組.

(c) 求 U 的维数.

(a) $\forall B_1,B_2\in U$, $A(B_1+B_2)=AB_1+AB_2=B_1A+B_2A=(B_1+B_2)A$.

于是 $B_1+B_2\in U$. $\forall k\in\mathbb{R}$, $\forall B\in U$, $A(kB)=k(AB)=k(BA)=(kB)A$. 故 $kB\in U$ □.

(b)

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{11}+b_{21}+b_{31}&b_{12}+b_{22}+b_{32}&b_{13}+b_{23}+b_{33}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\\-b_{31}&-b_{32}&-b_{33}\end{bmatrix}\quad ①$$

$$\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{11}&b_{11}+b_{12}-b_{13}\\b_{21}&b_{21}&b_{21}+b_{22}-b_{23}\\b_{31}&b_{31}&b_{31}+b_{32}-b_{33}\end{bmatrix}\quad ②$$

联立①②, 有

$$\begin{cases}b_{11}+b_{21}+b_{31}=b_{11}\\b_{12}+b_{22}+b_{32}=b_{11}\\b_{13}+b_{23}+b_{33}=b_{11}+b_{12}-b_{13}\\b_{31}=b_{21}\\b_{32}=b_{21}\\b_{33}=b_{21}+b_{22}-b_{23}\\-b_{31}=b_{31}\\-b_{32}=b_{31}\\-b_{33}=b_{31}+b_{32}-b_{33}\end{cases}\xRightarrow{\text{化简}}\begin{cases}b_{32}=b_{21}=b_{31}=0\\b_{12}+b_{22}=b_{11}\\2b_{13}+b_{23}+b_{33}-b_{11}-b_{12}=0\\b_{33}=b_{21}+b_{22}-b_{23}\end{cases}$$

$\forall B \in U$, B 形如

$$B = \begin{bmatrix} b_{12}+b_{22} & b_{12} & b_{12} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{22}-b_{23} \end{bmatrix}$$

$$= b_{12}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + b_{22}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + b_{23}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

易知三个矩阵线性无关. 因此 U 的一个基向量组是 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & \\ & & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix}$.

(c) U 的维数是 3.

T7

(a) 设 A 为一个 $m \times n$ 实矩阵. 假定 $v_1, v_2, \ldots, v_s$ 为 $C(A^T)$ 的一组基, $w_1, w_2, \ldots, w_t$ 为 $N(A)$ 的一组基. 证明: $s + t = n$, 并且

$$v_1, v_2, \ldots, v_s, w_1, w_2, \ldots, w_t$$

为 $\mathbb{R}^n$ 的一组基.

(b) 设 A 为秩为 m 的 $m \times n$ 实矩阵. 证明: AA^T 为可逆矩阵.

(a)

$\dim C(A^T) = r(A) = s$

$t = \dim N(A) = n - r(A) = n - s$ $\Rightarrow$ 故 $s + t = n$.

要 $\{v_1, \ldots, v_s, w_1, \ldots, w_t\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基, 只需证它们 L.ind.

$c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_sv_s + d_1w_1 + \cdots + d_tw_t = 0$

令 $v = c_1v_1 + \cdots + c_sv_s$, $w = d_1w_1 + \cdots + d_tw_t$, 则 $v + w = 0$, 且 $v \in C(A^T)$, $w \in N(A)$.

$v^T(v+w) = v^T 0 = 0.$

On the other hand, $v^T(v+w) = v^Tv + \underbrace{v^Tw}_{\overset{\shortparallel}{0}\ v \perp w} = v^Tv$ $\Bigg\} \Rightarrow v^Tv = 0 \Rightarrow v = 0$

$v = 0$ 即 $c_1v_1 + \cdots + c_sv_s = 0$. 由 $v_1, \cdots, v_s$ L.ind., 有 $c_1 = \cdots = c_s = 0$

$0 = w^T(v+w) = w^Tw \Rightarrow w = 0 \Rightarrow d_1 = \cdots = d_t = 0$. $\Bigg\} \Rightarrow$ 向量组 L.ind.

(b) Claim: $N(A)=N(A^TA)$.

$\forall x\in N(A)$, $Ax=0$, 故 $A^TAx=0$. 于是 $x\in N(A^TA)$. 故 $N(A)\subseteq N(A^TA)$

$\forall x\in N(A^TA)$, 有 $A^TAx=0$. 故 $x^TA^TAx=0$, 即 $(Ax)^T(Ax)=0$. 由内积正定性, $Ax=0$. 故 $x\in N(A)$. 于是 $N(A^TA)\subseteq N(A)$.

Claim 中将 A 取为 A^T 也成立, 即 $N(A^T)=N(AA^T)$.

$r(AA^T)=n-\dim(N(AA^T))=n-\dim(N(A^T))=\dim C(A)=r(A)=m$

故 AA^T 可逆.

T3 设

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix}.$$

考虑

$$X-XA^2-AX+AXA^2=I,$$

其中 I 为 3 阶单位阵, X 为一个 3 阶矩阵.

(a) 计算 $I-A$ 和 $I-A^2$.

(b) 求出所有可能的矩阵 X.

(a) $I-A=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&1&1\\0&-1&1\end{bmatrix}$

$I-A^2=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&2\end{bmatrix}$

(b)

$X-XA^2-AX+AXA^2=I$

$\Downarrow$

$X(I-A^2)-AX(I-A^2)=I$

$\Downarrow$

$(I-A)X(I-A^2)=I \xrightarrow{I-A\text{与}I-A^2\text{可逆}} X=(I-A)^{-1}(I-A^2)^{-1}=\begin{bmatrix}3&1&-2\\1&1&-1\\2&1&-1\end{bmatrix}$

T1

设 A 为一个 $m\times n$ 实矩阵 $(m<n)$, 对于任意的 m 维实列向量 $\mathbf{b}$, $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 都有解, 以下说法一定正确的是

(A) 对于每个 $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^m$, $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 都有唯一解.

(B) 对于任意的 $\mathbf{d}\in\mathbb{R}^n$, $A^T\mathbf{x}=\mathbf{d}$ 都有解.

(C) $N(A)=\{\mathbf{0}\}$.

(D) A 有右逆.

用线性无关性去想

$A=[A_1\cdots A_n]$ $\quad [A_1\cdots A_n]\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=b$ 都有解 $\Rightarrow A_1,\cdots,A_n$ 可以将 $\mathbb{R}^m$ 中所有向量线性表出, 但 $A_1,\cdots,A_n$ 不一定 L.ind., 因此不一定构成一组基

(A) $\forall b\in\mathbb{R}^m$, $Ax=b$ 有唯一解, 则对 $b=0$, $Ax=0$ 有唯一解, 即 $A_1\cdots A_n$ L.ind.
但 $A_1,\cdots,A_n$ 未必 L.ind.

(B) 这要求 A 的行向量能把所有 $\mathbb{R}^n$ 中向量表出. 但 A 的行向量数是 m 小于 $\mathbb{R}^n$ 基个数 n, 因此一定不对.

(C) $N(A)=0$ 说明 A 的列向量 L.ind., 不一定.

(D) $[A_1\cdots A_n]\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}$ 有解 $\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\ \vdots\\a_{n1}\end{bmatrix}$

$[A_1\cdots A_n]\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}$ 有解 $\begin{bmatrix}a_{12}\\ \vdots\\a_{n2}\end{bmatrix}$

$\vdots$

故 $[A_1\cdots A_n]\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}$

T2

假定 A,B 满足 $EA=B$, E 为一个可逆矩阵, 以下结论一定正确的是

(A) $N(A)=N(B)$.

(B) $C(A)=C(B)$.

(C) $N(A^T)=N(B^T)$.

(D) $A^TA=B^TB$.

(A) $x\in N(A)\Rightarrow Ax=0\Rightarrow EAx=0\Rightarrow Bx=0\Rightarrow x\in N(B)$
$x\in N(B)\Rightarrow Bx=0\Rightarrow E^{-1}Bx=0\Rightarrow Ax=0\Rightarrow x\in N(A)$ $\quad\Rightarrow N(A)=N(B)$

(B) (C) (D) 不一定.

T5

设 A 为一个满足 $A=A^2$ 的 n 阶矩阵 $(n>1)$, I 为一个 n 阶单位阵, 则

(A) $\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(A-I)>n$.

(B) $\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(A-I)<n$.

(C) $\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(A-I)=n$.

(D) $\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(A-I)=n-1$.

$A-A^2=0 \Rightarrow A(I-A)=0$

① $r(A+B) \leq r(A)+r(B)$

$\underbrace{r(A+I-A)}_{=r(I)=n} \leq r(A)+\underbrace{r(I-A)}_{=r(A-I)} \Rightarrow r(A)+r(A-I) \geq n$

② $r(A)+r(B) \leq n+r(AB)$

$r(A)+\underbrace{r(I-A)}_{=r(A-I)} \leq n+r(0)=n \Rightarrow r(A)+r(A-I) \leq n$

$\Rightarrow r(A)+r(A-I)=n$