Week 2 讲稿

• 常用符号 $\mathbb{R}$ 全体实数，$\mathbb{C}$ 全体复数，$\mathbb{Q}$ 全体有理数.

$\mathbb{R}-0$ 全体非零实数，有些地方记作 $\mathbb{R}^*$. $\mathbb{C}^*$ 同理.

Rmk 表示 Remark，注记，I_n 表示 n阶单位阵 $\begin{bmatrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{bmatrix}$，中文书记作 E_n.

矩阵元空着表示0 如 $\begin{bmatrix}1&\\&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

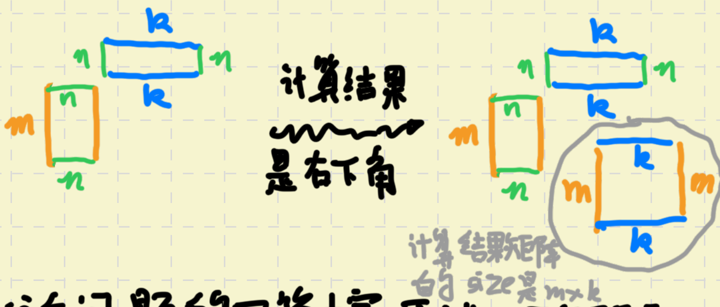
• 矩阵乘法

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix}1 & \cdots & \cdots\\ 2 & & \\ 3 & & \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}4 & 5 & 6\\ & \cdots & \end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1\times4+2\times5+3\times6 & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}\end{array}$$

Rmk: 1. 只要会拉拉链就会做矩阵乘法

2. 矩阵乘法是向量内积的推广

3. 形状一致才能相乘，否则没意义



Rmk：两个矩阵相乘有什么意义？目前这个问题的回答大家可能理解不了：一个实矩阵可表示两个有限维实线性空间之间的线性映射，而两个矩阵相乘是两个线性映射的复合。我把还没学到的内容标红了，日后大家学到就能理解.

• 形式转化 —— 用不同语言描述同一件事

1. 把线性方程组写成矩阵形式

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+3=2x_3 \\ x_2+3x_1+x_3=0 \\ x_1=4 \end{cases}$$

⟶ 把变量移项到左边常数移到右边

⟶ 规定按 x_1, x_2, x_3 顺序书写，需要调序

⟶ 未出现的变量系数是0

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-2x_3=-3 \\ 3x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+0x_2+0x_3=4 \end{cases} \xrightarrow[\text{形式}]{\text{写成矩阵}} \begin{bmatrix}2&1&-2\\3&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\0\\4\end{bmatrix}$$

(用矩阵乘法验算检查是否有误)

2. 一个矩阵一般用某个大写字母表示,如矩阵A. 一个列或行向量一般用小写字母表示,如向量 x. 注意:列向量行向量一般不加上标"→"(这一般省略→写作 x)
列向量与行向量转化用转置 transport,用右上标"T"表示. 如

$$[1\ \ 2\ \ 3]^T = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}.$$ (用行形式书写列向量省空间;之后在某些公式表达中会用到)

Rmk:需要区分行列向量.

3. 把 $n\times n$ 矩阵写成 n 个行向量或把 $n\times n$ 矩阵写成 n 个列向量.

如 $\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$,其中 $a=[1\ \ 2\ \ 3]$, $b=[4\ \ 5\ \ 6]$, $c=[7\ \ 8\ \ 9]$

如 $\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix} = [x\ \ y\ \ z]$,其中 $x=\begin{bmatrix}1\\4\\7\end{bmatrix}$, $y=\begin{bmatrix}2\\5\\8\end{bmatrix}$, $z=\begin{bmatrix}3\\6\\7\end{bmatrix}$

好处:可以把矩阵看成熟悉为中学时的向量. 这种写法可帮助理解矩阵乘法

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix} \xlongequal{列形式} [a\ \ b]$$ 其中 $a=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\end{bmatrix}$

$$B=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{bmatrix} \xlongequal{行形式} \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$ 其中 $x=[b_{11}\ \ b_{12}]$, $y=[b_{21}\ \ b_{22}]$

则 $$A\cdot B = [a\ \ b]\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = [ax+by] = \begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\end{bmatrix}[b_{11}\ \ b_{12}] + \begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\end{bmatrix}[b_{21}\ \ b_{22}]$$

$$= \begin{bmatrix}a_{11}b_{11}&a_{11}b_{12}\\a_{21}b_{11}&a_{21}b_{12}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}a_{12}b_{21}&a_{12}b_{22}\\a_{22}b_{21}&a_{22}b_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}&a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}&a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{bmatrix}$$

Rmk:加法同理.

4. 所有实数可以看成 1×1 实矩阵,所有 1×1 实矩阵可以看成实数.
(1×1 复矩阵与复数同理)

5. 把矩阵方程写成行形式或列形式

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$$ (不明白为什么这是一个线性方程组请参考第1点)

行形式:

$$\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1\\a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2\\a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3\end{cases}$$

列形式:

$$x\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}a_{13}\\a_{23}\\a_{33}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$$

Rmk: 1. 请用矩阵乘法验算可以写成行、列形式

2. 灵活运用矩阵写成行向量或列向量形式可以看得更加清楚

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \xlongequal{\text{行形式}} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ 则方程是 $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$，其中 $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$a = [a_{11} \ a_{12} \ a_{13}]$，$\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

即 $\begin{cases} a\vec{x} = b_1 \\ b\vec{x} = b_2 \\ c\vec{x} = b_3 \end{cases}$ ← 验算第一条示范 则 $a\vec{x} = b_1$ 是

$$[a_{11} \ a_{12} \ a_{13}] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1$$

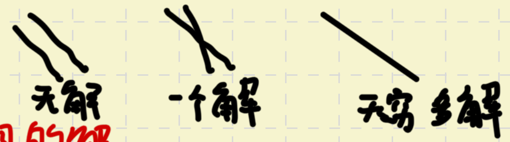
$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \xlongequal{\text{列形式}} [u \ v \ w]$ 则方程是 $[u \ v \ w] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = b$

即 $xu + yv + zw = b$.

- Geometry of linear equations

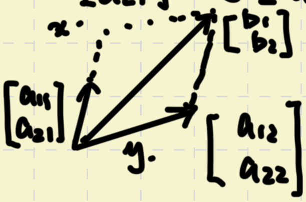
1. 行形式 $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$ ← 每一行是一条直线

方程组的解是两条直线的交



*"Find intersection of planes" 就是求方程组的解.

2. 列形式 $x\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ 此时方程解变成叠加系数.



*"Find combinations of columns" 就是求方程组的解

- 方程组的解个数是0个, 1个, 或无穷多个. Why? 线性组合

1. 线性组合的定义：设 x, y 是两个向量 ($n\times 1$ 或 $1\times n$) 则任取 $l, t \in \mathbb{R}$, $lx + ty$ 是 x 与 y 的一个线性组合或线性叠加.

2. ☆ 齐次方程解的线性组合仍是解. (齐次方程 $Ax=0$)

设 x_1, x_2 是 $Ax=0$ 的两个解 即 $Ax_1=0$, $Ax_2=0$. 则任意 $l, t \in \mathbb{R}$

$A(lx_1 + tx_2) = lAx_1 + tAx_2 = l\cdot 0 + t\cdot 0 = 0$，即 $lx_1 + tx_2$ 仍是解.

Rmk：1. $Ax=b\neq 0$ 不满足解的线性组合还是解.（$Ax_1+Ax_2=2b\neq b$）
2. 线性组合还是解说明 $Ax=0$ 的解可以构成一个线性空间.

对于非齐次方程 $Ax=b$，若 x_1, x_2 是它的两个解即 $Ax_1=b$，$Ax_2=b$，则 $A(x_1-x_2)=Ax_1-Ax_2=b-b=0$. 故 $k(x_1-x_2)+x_1$，$k\in\mathbb{R}$ 都是 $Ax=b$ 的解.
即 $Ax=b$ 的解个数要么是 0，要么是 1，一旦有 ≥2 个解就有 ∞解.

3. 解的个数 $\begin{cases} 0 \text{ 个—又称无解, nonsolvable} \\ \text{无穷多个—solvable} \\ 1\text{ 个} \end{cases}$ } singular

nonsingular ⇔ $\det A\neq 0$

singular ⇔ $\det A=0$ ⇔ A 不可逆 ⇔ A 的行相关 ⇔ A 的列相关
⇕ A 不满秩
A 的行相关 (linear dependent) 即 $R_i=mR_j+nR_k$，行线性相关
A 的列相关 (linear dependent)

nonsingular ⇔ $\det A\neq 0$ ⇔ A 可逆 ⇔ A 的行线性无关 ⇔ A 的列线性无关.
⇕ A 满秩

• 高斯消元法解方程

△ Idea：两个方程组若有相同解则称两个方程组等价. 高斯消元法解方程的思路不是直接解当前的方程，而是把给定方程化为有相同解的另一个等价的方程（新方程是上三角方程，解能很快就行）. 详细步骤如下：

$Ax=b$（任意一个方程） $\xrightarrow{\text{在不改变解的情况下改造它}}$ 改造成新方程 $Tx=b'$，设解为 $x=\bar{b}$ $\xrightarrow[\text{相同解}]{Ax=b\text{ 与 }Tx=b'\text{ 有}}$ 则 $Ax=b$ 的解是 $x=\bar{b}$

可选的改造方法：1. 某一行乘上非 0 系数（不改变解）
2. 某一行加上另一行（不改变解）
3. 换序（不改变解）

注意这些改造方法用于增广矩阵 $[A \vdots b]$ 而不是 A！

Rmk：减法是特殊的加法（加上一个负数），除法是特殊的乘法（乘上一个分数）
因此不改变解的改造方法包含加减乘除.

For 1：$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2 \end{cases}$ (I) $\xrightarrow{\text{第一行乘上 }\lambda\neq 0}$ $\begin{cases} a_{11}\lambda x+a_{12}\lambda y=b_1\lambda \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2 \end{cases}$ (II)

(II) 的解等于 (I) 的解

For 2: $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$ (I) $\xrightarrow{R_1 \to R_1 + R_2}$ $\begin{cases} (a_{11}+a_{21})x + (a_{12}+a_{22})y = b_1 + b_2 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$ (II)

(II)的解等于(I)的解

For 3: $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$ (I) $\rightsquigarrow$ $\begin{cases} a_{21}x + a_{22}y = b_2 \\ a_{11}x + a_{12}y = b_1 \end{cases}$ (II)

(II)的解等于(I)的解

△ 解上三角方程再回代即可(写成线性方程组的形式并用高中的内容解该组). 以上可推广到行阶梯型.

- 行阶梯型 row echelon form $\begin{bmatrix} \; \end{bmatrix}$, 对角阵 $\begin{bmatrix} \; \end{bmatrix}$, 上三角 $\begin{bmatrix} \; \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ & 1 & 0 & 3 \\ & & 1 & 2 \end{bmatrix}$

  下三角 $\begin{bmatrix} \; \end{bmatrix}$, 方阵 $\begin{bmatrix} \; \end{bmatrix}_n^n$, 分块矩阵 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$, $\lambda\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}$ 数乘矩阵 (multiple of identity)

- 矩阵运算: 加法逐位相加, 数乘逐位相乘.

  注意区分数乘和矩阵乘法.