

# Resonancia Geométrica en los Enteros

Una derivación armónica de la función divisor y su dinámica espectral

Joaquín Knutzen

20/09/2025

## Resumen

El presente trabajo explora un isomorfismo entre la geometría de subdivisión de polígonos regulares y la teoría de divisores aritméticos. Se define la función  $\Omega(n)$  a partir de sumas de raíces de la unidad, demostrando formalmente su equivalencia con  $d(2n) - 4$ . A partir de esta base rigurosa, se derivan estructuras analíticas avanzadas: una función de resonancia iterada  $T(n)$  que conecta los números primos con la función error de Gauss, y una “semilla frecuencial”  $\Lambda_{MF}$  determinista basada en la paridad. La primera parte de este artículo establece los fundamentos y las identidades probadas, mientras que la segunda parte explora modelos dinámicos heurísticos aplicados a la distribución de los números primos.

## Índice

<b>I Fundamentos Analíticos y Geométricos</b>	<b>3</b>
1 Introducción y Fundamento Geométrico . . . . .	3
2 La Función $\Omega(n)$ : Definición Analítica y Equivalencia . . . . .	4
3 Patrones Aritméticos y Estructura de Resonancia . . . . .	5
4 Formulación Armónica de la Función $\pi(N)$ . . . . .	7
5 La Función de Resonancia Iterada $T(n)$ . . . . .	8
5.1 Síntesis del Espectro de Resonancia . . . . .	10
6 La Semilla Frecuencial $\Lambda_{MF}$ y la Identidad Zeta . . . . .	10
6.1 Representación Integral y el Umbral de Estabilidad de Abel . . . . .	13
<b>II Modelos Heurísticos y Conjeturas</b>	<b>16</b>
7 Resonancia y Números Perfectos . . . . .	16

7.1	La Constante de Amortiguamiento Perfecto ( $C_{Perf}$ ) . . . . .	16
7.2	Conjetura sobre Perfectos Impares . . . . .	17
<b>8</b>	<b>Tensión Aritmética y la Conjetura ABC . . . . .</b>	<b>17</b>
<b>9</b>	<b>Dinámica Espectral y la Hipótesis de Riemann . . . . .</b>	<b>18</b>
9.1	El Sismógrafo Aritmético $\Psi_E(n)$ . . . . .	18
9.2	La Constante de Equilibrio $\mathcal{K}_{MF}$ . . . . .	18
9.3	Evidencia Numérica: Regresión a la Media y Confinamiento Dinámico . . . . .	19
<b>10</b>	<b>Discusión y Vías de Avance . . . . .</b>	<b>20</b>

## Parte I

# Fundamentos Analíticos y Geométricos

*En esta sección se establecen las definiciones rigurosas y se demuestran las identidades aritméticas fundamentales del modelo, proporcionando la base sólida para la discusión posterior.*

## 1. INTRODUCCIÓN Y FUNDAMENTO GEOMÉTRICO

El punto de partida de esta investigación es un problema clásico de teselación: el estudio de las particiones regulares de un polígono. Sea  $P_n$  un polígono regular de  $n$  lados. Nos preguntamos bajo qué condiciones aritméticas  $P_n$  puede subdividirse en  $k$  polígonos regulares idénticos  $Q_m$  de  $m$  lados, dispuestos en una configuración angular regular (*edge-to-edge*).

Para formalizar esta intuición, recurrimos a la descomposición triangular elemental.

**Lema 1.1** (Descomposición triangular y equivalencia angular). *Todo polígono regular de  $r$  lados puede descomponerse en  $2r$  triángulos rectángulos congruentes, cuyos vértices agudos coinciden en el centro del polígono. La medida del ángulo central de cada triángulo elemental es  $\pi/r$ .*

*Demostración.* Dividimos el polígono en  $r$  triángulos isósceles conectando el centro con los vértices. Cada triángulo isósceles tiene un ángulo central de  $2\pi/r$ . Al trazar la altura (apotema), cada triángulo isósceles se divide en dos triángulos rectángulos idénticos, bisecando el ángulo central. Por lo tanto, obtenemos  $2r$  triángulos con ángulo  $\pi/r$ .  $\square$

Esta descomposición nos permite establecer una condición necesaria para el ensamblaje de las piezas  $Q_m$  dentro de  $P_n$ .

**Teorema 1.2** (Relación Geométrica Fundamental). *Supongamos una subdivisión regular en corona donde  $k$  polígonos  $Q_m$  cubren el perímetro interno de  $P_n$ . La condición necesaria de encaje angular implica la relación:*

$$m = \frac{2n}{k}$$

*Demostración.* Consideremos la suma de los ángulos centrales. Para cubrir el ángulo completo ( $2\pi$ ) del polígono mayor  $P_n$  utilizando  $k$  copias de  $Q_m$ , la suma de los semi-ángulos internos aportados por las piezas debe ser congruente con la geometría del contenedor.

1. El ángulo elemental del polígono mayor  $P_n$  es  $\pi/n$ . El ángulo total es  $2\pi$ , que equivale a  $2n$  unidades elementales.

2. El ángulo elemental de la pieza  $Q_m$  es  $\pi/m$ .
3. Si disponemos  $k$  piezas, la suma angular debe satisfacer la proporción:

$$k \cdot \frac{\pi}{m} = \frac{2\pi}{n}$$

Multiplicando ambos lados por  $\frac{mn}{\pi}$ , obtenemos  $kn = 2m$ . Despejando  $m$ , llegamos a  $m = \frac{2n}{k}$ .  $\square$

*Observación 1.3* (Interpretación Física). La ecuación  $m = 2n/k$  sugiere que la geometría de la subdivisión no es continua, sino cuantizada. Solo existen soluciones cuando  $k$  es un divisor de  $2n$ . Geométricamente,  $k = 1, k = 2, k = n$  o  $k = 2n$  suelen producir soluciones degeneradas o triviales, lo que motiva la necesidad de filtrar estos casos en la definición analítica subsiguiente.

## 2. LA FUNCIÓN $\Omega(n)$ : DEFINICIÓN ANALÍTICA Y EQUIVALENCIA

Para traducir la condición de divisibilidad  $k \mid 2n$  al lenguaje del análisis complejo, utilizamos la propiedad de ortogonalidad de las raíces de la unidad. Esto nos permite construir una función “sonda” que detecta resonancias.

**Definición 2.1** (Función  $\Omega(n)$ ). Para todo entero  $n \geq 3$ , definimos la función de resonancia geométrica como la suma ponderada:

$$\Omega(n) := \sum_{k=3}^{n-1} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \cos\left(\frac{4\pi jn}{k}\right).$$

El término interior es una suma de cosenos que actúa como una función indicatriz. Procedemos a demostrar qué cuenta exactamente esta función.

**Teorema 2.2** (Teorema de Equivalencia). *La función  $\Omega(n)$  es analíticamente equivalente a la función divisor desplazada:*

$$\boxed{\Omega(n) = d(2n) - 4}$$

donde  $d(n)$  representa el número de divisores positivos de  $n$ .

*Demostración.* Analicemos la suma interior  $S_k = \sum_{j=0}^{k-1} \cos(4\pi jn/k)$ . Esta es la parte real de una serie geométrica de raíces de la unidad  $e^{i\theta}$  con  $\theta = 4\pi n/k$ .

- **Caso 1: Resonancia ( $k \mid 2n$ )**. Si  $k$  divide a  $2n$ , entonces  $\frac{2n}{k}$  es entero, y el argumento  $2\pi j(\frac{2n}{k})$  es múltiplo de  $2\pi$ . Por tanto,  $\cos(\cdot) = 1$  para todo  $j$ . La suma es  $\sum_{j=0}^{k-1} 1 = k$ .

- **Caso 2: Disonancia ( $k \nmid 2n$ ).** Si  $k$  no divide a  $2n$ , los vectores en el plano complejo se cancelan por simetría rotacional. La suma es 0.

Sustituyendo esto en la definición de  $\Omega(n)$ :

$$\Omega(n) = \sum_{k=3}^{n-1} \frac{1}{k} \cdot (k \cdot \mathbf{1}_{k|2n}) = \sum_{k=3}^{n-1} \mathbf{1}_{k|2n}.$$

La función simplemente cuenta cuántos enteros  $k$  en el rango  $[3, n - 1]$  son divisores de  $2n$ . El conjunto total de divisores de  $2n$  siempre incluye al menos cuatro elementos que caen fuera de este rango o son triviales para la geometría:

1. 1 y 2 (siempre menores que 3).
2.  $n$  y  $2n$  (siempre mayores que  $n - 1$ , dado  $n \geq 3$ ).

Por lo tanto,  $\Omega(n)$  cuenta todos los divisores de  $2n$  excepto estos cuatro. Concluimos que  $\Omega(n) = d(2n) - 4$ .  $\square$

**Corolario 2.3** (Filtro de Primalidad). *Para  $n > 4$ , se cumple:*

$$\Omega(n) = 0 \iff n \text{ es número primo.}$$

*Demostración.* Si  $\Omega(n) = 0$ , entonces  $d(2n) = 4$ . Sabemos que  $d(2n) = 4$  ocurre si y solo si  $2n$  es producto de dos primos distintos ( $2 \cdot p$ ) o un cubo de primo ( $p^3$ ). Como  $2n$  contiene el factor 2, las opciones son  $2n = 2 \cdot p$  (con  $p$  primo impar) o  $2n = 2^3 = 8$ .

- Si  $2n = 2p$ , entonces  $n = p$  es primo.
- Si  $2n = 8$ , entonces  $n = 4$ . (Este es el caso  $\Omega(4) = d(8) - 4 = 0$ , la única excepción par).

Así, para  $n > 4$ , la ausencia de resonancia interna ( $\Omega = 0$ ) implica primalidad estricta.  $\square$

### 3. PATRONES ARITMÉTICOS Y ESTRUCTURA DE RESONANCIA

La identidad fundamental  $\Omega(n) = d(2n) - 4$  traslada el problema geométrico al dominio de la teoría multiplicativa de números. Esto nos permite catalogar el comportamiento exacto de la resonancia  $\Omega(n)$  basándonos en la descomposición en factores primos de  $n$ .

A continuación, presentamos las identidades que rigen el comportamiento de  $\Omega$  en las distintas clases de enteros.

**Proposición 3.1** (Identidades Espectrales de  $\Omega(n)$ ). *Sean  $k \geq 1$  un entero,  $p$  un número primo impar,  $e i$  un entero impar cualquiera ( $i \geq 1$ ). Se cumplen las siguientes identidades:*

(a) **Evolución en Potencias de 2:**

$$\Omega(2^k) = k - 2$$

(b) **Resonancia en Potencias de Primos Impares:**

$$\Omega(p^k) = 2(k - 1)$$

(c) **Interacción Primo-Binaria (Mezcla Simple):**

$$\Omega(p \cdot 2^k) = 2k$$

(d) **Interacción Impar-Binaria (Mezcla General):**

$$\Omega(i \cdot 2^k) = (k + 2)d(i) - 4$$

*Demostración.* Las demostraciones se siguen directamente de la propiedad multiplicativa de la función divisor  $d(n)$ , aplicada sobre el argumento duplicado  $2n$ .

(a) **Caso  $n = 2^k$ :** El doble del número es  $2n = 2^{k+1}$ . La función divisor para una potencia de un primo es simplemente el exponente más uno:

$$d(2n) = d(2^{k+1}) = (k + 1) + 1 = k + 2.$$

Sustituyendo en la definición de equivalencia:

$$\Omega(2^k) = (k + 2) - 4 = k - 2.$$

(b) **Caso  $n = p^k$  ( $p$  impar):** El doble del número es  $2n = 2^1 \cdot p^k$ . Como  $\gcd(2, p) = 1$ , la función divisor se separa:

$$d(2n) = d(2^1) \cdot d(p^k) = (1 + 1)(k + 1) = 2k + 2.$$

Sustituyendo:

$$\Omega(p^k) = (2k + 2) - 4 = 2k - 2 = 2(k - 1).$$

(c) **Caso  $n = p \cdot 2^k$  ( $p$  impar):** El doble es  $2n = p^1 \cdot 2^{k+1}$ . Por multiplicidad:

$$d(2n) = d(p^1) \cdot d(2^{k+1}) = 2 \cdot (k + 2) = 2k + 4.$$

Sustituyendo:

$$\Omega(p \cdot 2^k) = (2k + 4) - 4 = 2k.$$

**(d) Caso General**  $n = i \cdot 2^k$  (*i impar*): El doble es  $2n = i \cdot 2^{k+1}$ . Dado que  $i$  es impar, es coprimo con 2, por lo que la función divisor es multiplicativa:

$$d(2n) = d(i) \cdot d(2^{k+1}) = d(i) \cdot (k + 2).$$

Finalmente, restamos los 4 divisores triviales geométricos:

$$\Omega(i \cdot 2^k) = (k + 2)d(i) - 4.$$

□

*Observación 3.2* (Observación sobre la Estructura). La identidad general (d) es particularmente reveladora. Muestra que la resonancia  $\Omega$  de un número par ( $i \cdot 2^k$ ) es una amplificación lineal de la cantidad de divisores de su parte impar ( $d(i)$ ), escalada por el exponente binario ( $k + 2$ ). Nótese que la identidad (c) es un caso particular de (d) donde  $i = p$  (y por tanto  $d(i) = 2$ ):

$$(k + 2)(2) - 4 = 2k + 4 - 4 = 2k.$$

## 4. FORMULACIÓN ARMÓNICA DE LA FUNCIÓN $\pi(N)$

Dado que  $\Omega(n)$  anula a los primos (y al 4), podemos construir un contador de primos  $\pi(N)$  que no dependa de cribas explícitas, sino de la suma de “silencios” resonantes.

**Teorema 4.1** (Contador Armónico Exacto). *Para todo entero  $N \geq 4$ , el número de primos menores o iguales a  $N$  viene dado por:*

$$\pi(N) = \left\lfloor \sum_{n=3}^N N^{-\Omega(n)} \right\rfloor$$

*Demostración.* Analicemos el comportamiento de cada término  $t_n = N^{-\Omega(n)}$  en la suma  $S_N$ . Dividimos el rango de suma  $[3, N]$  en dos conjuntos disjuntos:

- **Conjunto Primal (y n=4):**  $P = \{n : \Omega(n) = 0\}$ . Para estos  $n$ ,  $t_n = N^0 = 1$ . Este conjunto contiene al número 4 y a todos los primos impares hasta  $N$ . El número de elementos es  $1 + (\pi(N) - 1) = \pi(N)$  (el -1 descuenta al primo 2, que no está en la suma, pero el +1 añade al 4, compensando exactamente).

- **Conjunto Compuesto:**  $C = \{n : \Omega(n) \geq 1\}$ . Para estos  $n$ , el término es  $t_n \leq N^{-1}$ . La suma de estos residuos es estrictamente menor que 1:

$$\sum_{n \in C} N^{-\Omega(n)} \leq \sum_{n \in C} \frac{1}{N} = \frac{|C|}{N} < \frac{N-3}{N} < 1.$$

Por lo tanto, la suma total es  $S_N = \pi(N) + \epsilon$ , con  $0 \leq \epsilon < 1$ . Al aplicar la función suelo  $\lfloor \cdot \rfloor$ , eliminamos el residuo decimal proveniente de los compuestos, obteniendo exactamente  $\pi(N)$ .  $\square$

## 5. LA FUNCIÓN DE RESONANCIA ITERADA $T(n)$

La propiedad lineal de  $\Omega$  bajo duplicación (Prop. 3.1) sugiere definir una función que mida la “estabilidad” estructural de un número frente a la multiplicación iterada por potencias de 2. Esta función cuantifica la resistencia del número a generar nuevos divisores bajo la operación de duplicación.

**Definición 5.1** (Función  $T(n)$ ). Definimos la Resonancia Iterada como la serie infinita de productos amortiguados:

$$T(n) := \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1}{1 + \Omega(n \cdot 2^j)}.$$

Esta definición, aparentemente compleja, colapsa en constantes universales para las familias fundamentales de enteros.

**Teorema 5.2** (Conexión Gaussiana de los Primos). *Para todo número primo  $p$ , el valor de  $T(p)$  es una constante universal relacionada con la función error de Gauss:*

$$T(p) = 1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{1/2} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 2.410142\dots$$

*Demostración.* Si  $p$  es primo, aplicamos la Prop. 3.1:  $\Omega(p) = 0$  y  $\Omega(p \cdot 2^j) = 2j$  para  $j \geq 1$ . Desarrollamos los términos de la suma  $T(p)$ :

- $k = 0$ : término vacío = 1.
- $k = 1$ :  $\frac{1}{1+\Omega(p)} = \frac{1}{1}$ .
- $k = 2$ :  $\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1+\Omega(2p)} = \frac{1}{1(1+2)} = \frac{1}{3}$ .
- $k = 3$ :  $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\Omega(4p)} = \frac{1}{3(1+4)} = \frac{1}{15}$ .

El denominador del término general es el producto de impares consecutivos (doble factorial), que puede reescribirse como  $(2k - 1)!! = \frac{(2k)!}{2^k k!}$ . Por tanto, la serie converge a:

$$T(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k k!}{(2k)!}.$$

Esta serie corresponde exactamente a la expansión de Taylor de la función  $\text{erf}(z)$  normalizada evaluada en  $z = 1/\sqrt{2}$ .  $\square$

**Proposición 5.3** (Máxima Entropía en  $n = 4$ ). *Para el caso base  $n = 4$ , la función recupera la constante de Euler:*

$$T(4) = e.$$

*Demostración.* Para  $n = 4$ , sabemos por la Prop. 3.1 que  $\Omega(4 \cdot 2^j) = \Omega(2^{j+2}) = j$ . Sustituyendo en la serie, el producto de los denominadores genera la secuencia factorial:

$$\prod_{j=0}^{k-1} (1 + j) = k!$$

Por lo tanto:

$$T(4) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e.$$

$\square$

**Teorema 5.4** (Límite de Amortiguamiento en Números Perfectos). *Sea  $N_p = 2^{p-1}(2^p - 1)$  una sucesión de números perfectos pares generada por primos de Mersenne. Entonces, cuando  $p \rightarrow \infty$ , la resonancia iterada colapsa al mínimo absoluto:*

$$\lim_{p \rightarrow \infty} T(N_p) = 1.$$

*Demostración.* Sabemos que para un perfecto par  $N_p$ ,  $\Omega(N_p) = 2(p - 1)$  (demostrado en la Sección 7, pero derivado de las identidades de la Prop. 3.1). La función  $T(N_p)$  comienza con el término unidad, seguido de términos amortiguados por  $\Omega$ :

$$T(N_p) = 1 + \frac{1}{1 + \Omega(N_p)} + \frac{1}{(1 + \Omega(N_p))(1 + \Omega(2N_p))} + \dots$$

El primer término fraccionario es  $\frac{1}{1+2(p-1)} = \frac{1}{2p-1}$ . Dado que  $\Omega(n)$  es positivo y creciente bajo duplicación, todos los términos subsiguientes son menores que este primer término. Cuando  $p$  crece (los primos de Mersenne son grandes), el denominador  $2p - 1$  tiende a infinito, haciendo que  $\frac{1}{2p-1} \rightarrow 0$ . En consecuencia, toda la cola de la serie se anula, y  $T(N_p) \rightarrow 1$ .  $\square$

*Observación 5.5.* Este resultado indica que los números perfectos actúan como “sumideros” de resonancia. Su estructura es tan estable que cualquier intento de excitarlos mediante duplicación (el proceso  $T(n)$ ) es inmediatamente amortiguado por una densidad de divisores inicial inmensa.

### 5.1. Síntesis del Espectro de Resonancia

La función  $T(n)$  nos permite clasificar los números enteros según su “energía de fondo” o capacidad de sostener una estructura resonante bajo iteración.

Tipo de Número	Símbolo	Expresión de la Serie	Valor Característico
Compuesto Base	$T(4)$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$	$e \approx 2.71828$
Número Primo	$T(p)$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k k!}{(2k)!}$	$\mathcal{T}_p \approx 2.41014$
Perfecto Par ( $p \rightarrow \infty$ )	$T(N_{perf})$	$1 + O(p^{-1})$	$\rightarrow 1$

*Observación 5.6.* El espectro de  $T(n)$  está acotado. El valor  $e$  representa el crecimiento natural máximo (máxima entropía estructural), mientras que el valor 1 representa la estabilidad total (cristalización). Los números primos ocupan una franja estable intermedia, gobernada por la estadística gaussiana.

## 6. LA SEMILLA FRECUENCIAL $\Lambda_{MF}$ Y LA IDENTIDAD ZETA

Finalizamos la parte analítica descomponiendo  $\Omega(n)$  en sus componentes atómicos. En lugar de analizar la estructura multiplicativa caso por caso, utilizamos el álgebra de series de Dirichlet para aislar la información pura de la resonancia.

**Definición 6.1** (Semilla Frecuencial). Sea  $\Lambda_{MF}$  la inversa de Dirichlet de  $\Omega$  normalizada. Definimos su relación mediante la convolución:

$$\Lambda_{MF} = \Omega * \mu \iff \Omega(n) = \sum_{d|n} \Lambda_{MF}(d).$$

En el dominio de la frecuencia compleja, esto implica que la serie generatriz de la semilla es el cociente de las series:

$$L(s, \Lambda_{MF}) = \frac{\mathcal{D}_{\Omega}(s)}{\zeta(s)},$$

donde  $\mathcal{D}_{\Omega}(s) = \sum \Omega(n)n^{-s}$ .

El siguiente teorema establece la forma cerrada de esta serie, lo cual nos permitirá deducir los valores de la semilla directamente.

**Teorema 6.2** (Identidad Espectral Zeta). *La serie generatriz de la semilla  $\Lambda_{MF}$  satisface la siguiente identidad exacta en relación con la función Zeta de Riemann:*

$$L(s, \Lambda_{MF}) = (2 - 2^{-s})\zeta(s) - 4$$

*Demostración.* Partimos de la equivalencia demostrada en la Sección 2:  $\Omega(n) = d(2n) - 4$ . Construimos la serie de Dirichlet para  $\Omega(n)$  analizando sus dos componentes por separado.

1. **Componente  $d(2n)$ :** Utilizamos la identidad aritmética para el divisor desplazado:

$$d(2n) = 2d(n) - d(n/2)$$

donde asumimos  $d(x) = 0$  si  $x \notin \mathbb{Z}$ . En el lenguaje de series de Dirichlet, el desplazamiento  $n/2$  equivale a una multiplicación por  $2^{-s}$ . Dado que la serie generatriz de  $d(n)$  es  $\zeta^2(s)$ , tenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(2n)}{n^s} = 2\zeta^2(s) - 2^{-s}\zeta^2(s) = (2 - 2^{-s})\zeta^2(s).$$

2. **Componente Constante  $-4$ :** La función constante  $f(n) = -4$  genera la serie  $-4\zeta(s)$ .

Combinando ambos términos, la serie total para  $\Omega(n)$  es:

$$\mathcal{D}_{\Omega}(s) = (2 - 2^{-s})\zeta^2(s) - 4\zeta(s).$$

Finalmente, para obtener la serie de la semilla  $L(s, \Lambda_{MF})$ , aplicamos la inversión de Möbius, que en este dominio corresponde simplemente a dividir por  $\zeta(s)$ :

$$L(s, \Lambda_{MF}) = \frac{(2 - 2^{-s})\zeta^2(s) - 4\zeta(s)}{\zeta(s)} = (2 - 2^{-s})\zeta(s) - 4.$$

□

Una vez establecida la identidad analítica, los valores discretos de la semilla emergen como los coeficientes de la expansión en serie.

**Teorema 6.3** (Determinismo de la Paridad). *La función  $\Lambda_{MF}(n)$  está determinada por la paridad de  $n$ . Al expandir la identidad espectral, obtenemos los coeficientes:*

$$\Lambda_{MF}(n) = \begin{cases} -2 & \text{si } n = 1 \\ 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ 2 & \text{si } n \text{ es impar } (> 1) \end{cases}$$

*Demostración.* Expandimos la expresión  $L(s) = 2\zeta(s) - 2^{-s}\zeta(s) - 4$  término a término interpretando cada componente como una suma de Dirichlet  $\sum a_n n^{-s}$ :

1. **Término  $2\zeta(s)$ :** Corresponde a la función aritmética constante  $f_1(n) = 2$  para todo  $n \geq 1$ .
2. **Término  $-2^{-s}\zeta(s)$ :** El factor  $2^{-s}$  actúa como un operador de desplazamiento que inyecta valores solo en los índices pares. Corresponde a la función:

$$f_2(n) = \begin{cases} -1 & \text{si } n \text{ es par (existe } n/2 \text{ entero)} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

3. **Término constante  $-4$ :** En una serie de Dirichlet, una constante aditiva  $C$  afecta exclusivamente al primer término de la suma (coeficiente de  $1^{-s}$ ). Corresponde a la función impulso:

$$f_3(n) = \begin{cases} -4 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Sumando las contribuciones  $f_1 + f_2 + f_3$  para cada caso:

- Si  $n = 1$  (Impar):  $2 + 0 - 4 = -2$ .
- Si  $n > 1$  es Impar:  $2 + 0 + 0 = 2$ .
- Si  $n$  es Par:  $2 - 1 + 0 = 1$ .

□

*Observación 6.4.* Este resultado demuestra que la complejidad aparente de  $\Omega(n)$  (ligada a la factorización) se construye a partir de una “señal portadora” determinista y de baja entropía ( $\Lambda_{MF}$ ), cuya única variación depende de la paridad. La dificultad de los números primos no reside en la semilla, sino en la interferencia constructiva generada por la función Zeta al integrar esta señal.

## 6.1. Representación Integral y el Umbral de Estabilidad de Abel

Hasta ahora hemos tratado a  $\Lambda_{MF}$  como una entidad discreta. Para analizar su comportamiento asintótico en el plano complejo, utilizamos la fórmula de sumación de Abel, transformando la serie de Dirichlet en una integral acotada. Esto nos permite establecer un criterio analítico preciso para la validación de la Hipótesis de Riemann (HR).

**Definición 6.5** (Residuo Oscilatorio de la Semilla). Sea  $A(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda_{MF}(n)$  la función sumatoria de la semilla. Dado que la secuencia  $\Lambda_{MF}(n)$  para  $n \geq 2$  oscila determinísticamente como  $\{1, 2, 1, 2, \dots\}$ , definimos el residuo  $R(x)$  respecto a su tendencia lineal media:

$$A(x) = -2 + \sum_{n=2}^{\lfloor x \rfloor} \Lambda_{MF}(n) = \frac{3}{2}x + R(x).$$

Es trivial verificar que el término de error es estrictamente acotado:

$$|R(x)| \leq \frac{1}{2} \quad \forall x \geq 1.$$

Aplicando la transformación integral a la serie generatriz  $L(s, \Lambda_{MF})$ , obtenemos la siguiente representación analítica.

**Teorema 6.6** (Representación de Abel-Knuttzen). *Para todo  $s$  con  $\operatorname{Re}(s) > 0$ , la función de la semilla admite la descomposición exacta:*

$$L(s, \Lambda_{MF}) = \frac{1.5s}{s-1} + s \int_1^\infty \frac{R(x)}{x^{s+1}} dx.$$

*Demostración.* Por la fórmula de sumación de Abel, para una serie de Dirichlet  $f(s) = \sum a_n n^{-s}$ :

$$f(s) = s \int_1^\infty \frac{A(x)}{x^{s+1}} dx.$$

Sustituyendo  $A(x) = 1.5x + R(x)$ :

$$L(s) = s \int_1^\infty \frac{1.5x}{x^{s+1}} dx + s \int_1^\infty \frac{R(x)}{x^{s+1}} dx.$$

Evaluamos la primera integral (componente principal):

$$\int_1^\infty \frac{1.5}{x^s} dx = 1.5 \left[ \frac{x^{1-s}}{1-s} \right]_1^\infty.$$

Para  $\operatorname{Re}(s) > 1$ , el término en infinito se anula, resultando en  $\frac{1.5}{s-1}$ . Por continuación analítica, esta

forma es válida para todo  $s \neq 1$ . El segundo término (integral del residuo) converge absolutamente para  $\operatorname{Re}(s) > 0$  dado que  $|R(x)|$  está acotado.  $\square$

Una vez establecida la forma integral, procedemos a derivar la condición de anulación de la función Zeta en términos de energía espectral.

**Lema 6.7** (Condición de Anulación). *En la franja crítica  $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$ , la función Zeta de Riemann se anula,  $\zeta(s) = 0$ , si y solo si la función semilla alcanza el nivel de saturación negativo:*

$$L(s, \Lambda_{MF}) = -4.$$

*Demostración.* Retomamos la Identidad Espectral probada anteriormente:  $(2 - 2^{-s})\zeta(s) = L(s, \Lambda_{MF}) + 4$ . El factor  $(2 - 2^{-s})$  se anula únicamente cuando  $2^{-s} = 2$ , es decir,  $s = -1 + \frac{2\pi ik}{\ln 2}$ . Ninguno de estos ceros yace en la franja crítica con  $\operatorname{Re}(s) > 0$ . Por lo tanto,  $\zeta(s) = 0 \iff L(s, \Lambda_{MF}) + 4 = 0$ .  $\square$

Finalmente, combinamos la representación integral con la condición de anulación para formular el criterio asintótico de estabilidad.

**Teorema 6.8** (El Umbral Asintótico de 5.5). *Sea  $s = \sigma + it$  con  $\sigma > \frac{1}{2}$ . La Hipótesis de Riemann es verdadera si se cumple la siguiente desigualdad estricta para el componente integral oscilatorio cuando  $|t| \rightarrow \infty$ :*

$$\limsup_{|t| \rightarrow \infty} \left| s \int_1^\infty \frac{R(x)}{x^{s+1}} dx \right| < 5.5$$

*Demostración.* Supongamos que existe un contraejemplo a la HR, es decir, un cero de Zeta con  $\sigma > 1/2$ . Por el Lema anterior, esto implica  $L(s) = -4$ . Sustituyendo la representación de Abel:

$$\frac{1.5s}{s-1} + s \int_1^\infty \frac{R(x)}{x^{s+1}} dx = -4.$$

Aislamos el término integral (que llamaremos  $\mathcal{J}(s)$ ):

$$\mathcal{J}(s) = -4 - \frac{1.5s}{s-1}.$$

Analizamos el comportamiento asintótico del término racional cuando  $|t| \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{1.5(\sigma + it)}{(\sigma - 1) + it} = 1.5.$$

Por lo tanto, para que la ecuación se satisfaga en el límite de altas frecuencias, la magnitud de la integral oscilatoria debe compensar exactamente la suma de las constantes:

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \mathcal{J}(s) = -4 - 1.5 = -5.5.$$

En consecuencia, si podemos demostrar que la magnitud de la integral  $\mathcal{J}(s)$  está acotada superiormente por un valor menor a 5.5 en el semiplano  $\sigma > 1/2$ , la igualdad  $L(s) = -4$  es imposible, y por reducción al absurdo,  $\zeta(s) \neq 0$ .  $\square$

*Observación 6.9.* Este resultado reduce el problema de la distribución de los números primos a un problema de análisis armónico: demostrar que la decoherencia de fases inducida por  $x^{-s}$  impide que la suma de vectores acotados por  $|R(x)| \leq 0.5$  alcance una amplitud resonante de 5.5.

## Parte II

# Modelos Heurísticos y Conjeturas

En esta segunda parte, abandonamos la deducción estricta para adentrarnos en la modelización dinámica.

Utilizando las herramientas analíticas de la Parte I ( $\Omega, T, \Lambda_{MF}$ ), proponemos nuevas heurísticas para abordar problemas abiertos, interpretando la aritmética no como una estructura estática, sino como un sistema vivo de tensiones acumuladas y relajaciones puntuales.

## 7. RESONANCIA Y NÚMEROS PERFECTOS

En el marco del MFN, los números perfectos no son meras curiosidades de la suma de divisores, sino estados de \*\*equilibrio armónico total\*\*. Representan configuraciones donde la estructura multiplicativa interna resuena en perfecta fase con la magnitud del número, anulando la necesidad de “ajustes” externos.

**Teorema 7.1** (Firma Resonante de Perfectos Pares). *Sea  $N$  un número perfecto par de la forma Euclídea  $N = 2^{p-1}(2^p - 1)$ , donde  $M_p = 2^p - 1$  es un primo de Mersenne. Entonces:*

$$\Omega(N) = 2(p - 1).$$

*Demostración.* Identificamos  $N$  con la forma general  $i \cdot 2^k$ , donde la parte impar es  $i = M_p$  (primo) y el exponente es  $k = p - 1$ . Aplicando la Identidad (d) de la Proposición 3.1:

$$\Omega(N) = (k + 2)d(i) - 4.$$

Como  $i$  es primo,  $d(i) = 2$ . Sustituyendo los valores:

$$\Omega(N) = (p - 1 + 2)(2) - 4 = (p + 1)(2) - 4 = 2p + 2 - 4 = 2(p - 1).$$

□

### 7.1. La Constante de Amortiguamiento Perfecto ( $C_{Perf}$ )

En la Sección 5 demostramos que para los números perfectos pares, la función de resonancia iterada colapsa asintóticamente:  $T(N) \rightarrow 1$ . Esto implica que estos números actúan como sumideros de entropía. Sin embargo, para  $p$  finitos, existe un residuo. Esto sugiere que el universo numérico asigna un “costo energético” finito a la existencia de la perfección.

**Definición 7.2.** Definimos la **Constante de Amortiguamiento Perfecto** como la suma acumulada de las resonancias residuales de todos los números perfectos pares  $N_k$ :

$$C_{Perf} = \sum_{k=1}^{\infty} (T(N_k) - 1).$$

*Observación 7.3* (El Presupuesto Energético). Evaluaciones numéricas sugieren que esta serie converge rápidamente ( $C_{Perf} \approx 0.863 \dots$ ). Interpretar esto físicamente es revelador: existe un “presupuesto” limitado de resonancia residual disponible para formar estructuras perfectas. La perfección no es gratuita; consume una porción definida del espacio de fases aritmético.

## 7.2. Conjetura sobre Perfectos Impares

La existencia de Números Perfectos Impares (NPI) es una de las incógnitas más antiguas. El MFN ofrece un argumento basado en la \*\*economía de resonancia\*\*.

**Conjetura 7.4** (Inexistencia por Costo Resonante). *No existe ningún número entero impar  $N$  tal que  $\sigma(N) = 2N$ .*

*Observación 7.5* (Justificación: Simetría y Suciedad). Para un perfecto par, la resonancia  $\Omega(N)$  es generada por una estructura “ limpia ” y eficiente (un primo Mersenne y una potencia pura de 2). En contraste, un NPI requiere, según la forma de Euler  $N = p^k m^2$ , una estructura multiplicativa densa y “ sucia ”. Postulamos que la resonancia combinada  $\Omega(N_{impar})$  necesaria para simular la perfección excedería el presupuesto energético permitido ( $C_{Perf}$ ), o bien generaría una inestabilidad en  $T(N)$  que impediría el amortiguamiento necesario ( $T(N) \not\rightarrow 1$ ). La geometría de los impares simplemente no permite tal grado de simetría sin romper la coherencia resonante.

# 8. TENSIÓN ARITMÉTICA Y LA CONJETURA ABC

La Conjetura ABC explora la profunda fricción entre la multiplicación (que crea estructura) y la suma (que la destruye). El marco MFN traduce este problema a una dinámica de \*\*tensión y disipación\*\*.

**Definición 8.1** (Tensión Armónica Total). Para una terna coprima  $(a, b, c)$  con  $a + b = c$ , definimos la tensión del sistema como la suma de sus resonancias individuales:

$$\Omega_{ABC} = \Omega(a) + \Omega(b) + \Omega(c).$$

Recordemos que  $\Omega(p^k) = 2(k - 1)$ . Un número con altas potencias (radical pequeño) posee una  $\Omega$  muy alta. Lo definimos como un estado de “alta tensión” o baja entropía configuracional.

**Conjetura 8.2** (Principio de Disipación Aditiva). *La operación suma actúa como un operador de “mezcla” que disipa la estructura multiplicativa. Si  $a$  y  $b$  son estados de alta tensión (altas potencias), su suma  $c = a + b$  colapsará, con probabilidad asintótica 1, a un estado de baja tensión (libre de potencias grandes).*

*Observación 8.3* (Imposibilidad Geométrica). La Conjetura ABC estándar afirma que  $\text{rad}(abc)$  no puede ser mucho menor que  $c$ . En nuestro lenguaje geométrico: es imposible teselar tres polígonos ( $P_a, P_b, P_c$ ) con subdivisiones de ultra-alta frecuencia si sus lados están ligados aditivamente. La suma destruye la “coherencia de fase” necesaria para mantener resonancias altas simultáneamente en los tres términos. El universo aritmético no tolera concentraciones infinitas de tensión en una terna aditiva.

## 9. DINÁMICA ESPECTRAL Y LA HIPÓTESIS DE RIEMANN

Llegamos al corazón del modelo. Si visualizamos la secuencia de enteros no como una lista estática, sino como un proceso temporal evolutivo, podemos modelar la distribución de los primos como una respuesta dinámica a la acumulación de tensión.

### 9.1. El Sismógrafo Aritmético $\Psi_E(n)$

Definimos un instrumento teórico, el “Sismógrafo”, que simula la competencia eterna entre la generación de divisores (que carga el sistema de energía) y la aparición de primos (que lo descargan y estabilizan).

**Definición 9.1** (Dinámica del Sismógrafo  $\Psi_E$ ). Sea  $\Psi_E(2) = 0$ . Para  $n > 2$ :

$$\Psi_E(n) = \begin{cases} \Psi_E(n-1) + T(n) & \text{si } n \text{ es compuesto (Carga),} \\ \frac{\Psi_E(n-1)}{\mathcal{T}_p} & \text{si } n \text{ es primo (Descarga).} \end{cases}$$

Donde  $\mathcal{T}_p \approx 2.4101 \dots$  es la constante armónica gaussiana derivada en la Sección 5.

### 9.2. La Constante de Equilibrio $\mathcal{K}_{MF}$

La “impedancia característica” del sistema no es arbitraria. En la Sección 6, hallamos la identidad de la semilla  $L(s, \Lambda_{MF}) = (2 - 2^{-s})\zeta(s) - 4$ . La dinámica media del sistema está dictada por la solución de la ecuación de equilibrio espectral:

$$(2 - 2^{-\mathcal{K}_{MF}})\zeta(\mathcal{K}_{MF}) = 4 \implies \mathcal{K}_{MF} \approx 1.5645 \dots$$

### 9.3. Evidencia Numérica: Regresión a la Media y Confinamiento Dinámico

El análisis computacional del sismógrafo, extendido hasta  $N = 10^6$ , confirma que la dinámica del sistema no es divergente, sino que está fuertemente confinada por un atractor logarítmico. Al fijar la impedancia en su valor teórico derivado de la identidad de la semilla ( $\mathcal{K}_{MF} \approx 1.5645$ ), el comportamiento se describe mediante una ley de regresión a la media:

$$\Psi_E(n) = \underbrace{\mathcal{K}_{MF} \ln(n)}_{\text{Atractor Teórico}} + \underbrace{\epsilon_{dyn}(n)}_{\text{Corrección Dinámica}}$$

Donde  $\epsilon_{dyn}(n)$  no es un error aleatorio simple ni una constante rígida, sino un término de **corrección dinámica** que refleja la elasticidad del sistema:

- 1. El Atractor Logarítmico ( $\mathcal{K}_{MF}$ ):** La curva  $\mathcal{K}_{MF} \ln(n)$  actúa como el centro de gravedad del sistema. La validación numérica muestra que la pendiente asintótica del sismógrafo converge exactamente a este valor. Cualquier desviación de esta curva genera una tensión que el sistema busca corregir asintóticamente.
- 2. Inercia y Excitación del Sistema ( $\epsilon_{dyn}$ ):** Observamos que el término  $\epsilon_{dyn}(n)$  fluctúa con un sesgo positivo local. Esto no implica una constante estructural añadida, sino que es consecuencia de la *inercia dinámica*: dado que los eventos de carga (números compuestos) son mucho más frecuentes que los eventos de descarga (números primos, densidad  $\sim 1/\ln n$ ), el sistema pasa la mayor parte del tiempo en estados de “excitación” por encima del atractor. Sin embargo, la fuerza restauradora de los primos garantiza que el sistema orbite siempre en la vecindad de la curva teórica, sin escapar nunca.

**Conjetura 9.2** (Confinamiento del Error). *Postulamos que el término de corrección dinámica  $\epsilon_{dyn}(n)$  está estrictamente confinado por la escala del sistema. Es decir, la tensión aritmética nunca rompe la barrera impuesta por la semilla:*

$$\epsilon_{dyn}(n) = \Psi_E(n) - \mathcal{K}_{MF} \ln(n) = O(n^{1/2+\delta})$$

*Esto implica que las fluctuaciones en la distribución de los primos son el mecanismo de regresión a la media necesario para mantener el equilibrio espectral determinado por  $(2 - 2^{-s})\zeta(s) = 4$ .*

**Observación 9.3** (Elasticidad Aritmética). Bajo esta interpretación, el sistema de los enteros se comporta como un medio elástico. La acumulación de divisores estira el “resorte” numérico (alejándolo de la media), y los números primos son los puntos de ruptura o relajación que permiten al sistema regresar hacia su estado base de mínima energía ( $\mathcal{K}_{MF} \ln n$ ).

## 10. DISCUSIÓN Y VÍAS DE AVANCE

El Modelo Frecuencial de los Números (MFN) ha trazado un arco conceptual desde la geometría elemental ( $m = 2n/k$ ) hasta las fronteras de la función Zeta. Lo que emerge no es solo una colección de fórmulas, sino una visión coherente: los números enteros poseen una estructura vibracional interna gobernada por leyes deterministas de paridad.

Hemos visto cómo la identidad exacta  $\Omega(n) = d(2n) - 4$  actúa como puente entre mundos, y cómo la Semilla Frecuencial  $\Lambda_{MF}$  reduce el caos aparente de los divisores a una secuencia atómica simple ( $\{-2, 1, 2\}$ ), cuya serie generatriz  $(2 - 2^{-s})\zeta(s) - 4$  dicta la impedancia fundamental  $\mathcal{K}_{MF}$  del sistema.

Para consolidar esta teoría y pasar de la heurística a la prueba rigurosa, proponemos la siguiente hoja de ruta:

1. **Análisis de la Inercia Dinámica:** En lugar de buscar una constante de corrección arbitraria, se debe investigar la naturaleza estadística de  $\epsilon_{dyn}(n)$ . Es necesario modelar formalmente la probabilidad de retorno a la media, demostrando que la frecuencia de los primos es la mínima necesaria para evitar que la inercia de los compuestos haga diverger el sistema.
2. **Formalización vía Teoremas Tauberianos:** Se requiere aplicar análisis complejo para probar que la dinámica de carga/descarga definida por el atractor  $\mathcal{K}_{MF}$  converge efectivamente a la distribución de primos. El vínculo de  $\Lambda_{MF}$  con  $\zeta(s)$  facilita el uso de la fórmula de Perron para acotar rigurosamente las sumas parciales.
3. **Estudio de la Semilla:** La función  $\Lambda_{MF}$  es el hallazgo más sólido del trabajo. Investigar las propiedades de autocorrelación de esta secuencia determinista podría ofrecer una nueva vía, puramente aritmética, para acotar el término de error en el Teorema de los Números Primos, interpretando la Hipótesis de Riemann como un problema de estabilidad de osciladores acoplados.

En conclusión, el enfoque geométrico-armónico ofrece una perspectiva refrescante: los números primos no son anomalías aleatorias, sino los **disipadores necesarios** que, mediante un proceso continuo de regresión a la media, mantienen la estabilidad resonante del universo aritmético.