

# Resonancia Geométrica en los Enteros

Una derivación armónica de la función divisor y su dinámica espectral

Joaquín Knutzen

20/09/2025

## Resumen

Este trabajo establece un isomorfismo analítico formal entre la geometría de subdivisión de polígonos regulares y la teoría aritmética de los divisores. Se introduce la *función de resonancia*  $\Omega(n)$ , construida mediante sumas exponenciales de raíces de la unidad, y se demuestra su equivalencia exacta con la función divisor desplazada  $d(2n) - 4$ . A partir de esta identidad, se propone una reinterpretación espectral de los números primos como estados de estabilidad estructural, donde la ausencia de sub-estructuras geométricas resonantes se corresponde con la irreductibilidad aritmética.

## Índice

<b>I Fundamentos Analíticos y Geométricos</b>	<b>3</b>
1 Introducción y Fundamento Geométrico . . . . .	3
2 La Función $\Omega(n)$ : Definición Analítica y Equivalencia . . . . .	4
3 Espectroscopía Aritmética: Patrones de Resonancia . . . . .	6
4 La Función de Resonancia Iterada $T(n)$ . . . . .	8
4.1 Síntesis del Espectro de Estabilidad . . . . .	11
4.2 Taxonomía Espectral: Las Clases de Pendiente $\nabla$ . . . . .	12
5 La Semilla Frecuencial $\Lambda_{MF}$ y la Identidad Zeta . . . . .	14
5.1 Deconstrucción de Zeta: Esqueleto y Piel . . . . .	15
5.2 Universalidad Espectral: La Tabla de Traducción Aritmética . . . . .	16
6 Dinámica Espectral: El Sismógrafo Aritmético . . . . .	18
6.1 Definición del Sistema Dinámico . . . . .	18
6.2 El Atractor Logarítmico y la Estabilidad . . . . .	18

<b>7 Derivación Espectral de la Función <math>\pi(x)</math></b> . . . . .	<b>21</b>
7.1 Estructura Algebraica de la Señal Base . . . . .	21
7.2 Identidad Aritmética para el Conteo de Primos . . . . .	22
<b>II Modelos Heurísticos y Conjeturas</b>	<b>24</b>
<b>8 Resonancia y Números Perfectos</b> . . . . .	<b>24</b>
8.1 La Firma Espectral de la Perfección . . . . .	24
8.2 El Presupuesto Energético y la Inexistencia de Impares . . . . .	25
<b>9 Dinámica Aditiva y la Termodinámica de la Conjetura ABC</b> . . . . .	<b>26</b>
9.1 El Álgebra de Clases Espectrales . . . . .	26
9.2 El Principio de Interferencia Destructiva . . . . .	26
9.3 Derivación de la Cota ABC . . . . .	27
<b>III Teoría de la Información Espectral</b>	<b>29</b>
<b>10 Protocolos de Codificación y Seguridad Estructural</b> . . . . .	<b>29</b>
10.1 El Protocolo de Codificación Causal . . . . .	29
10.2 Fundamento Espectral de la Seguridad RSA . . . . .	29
<b>11 Discusión y Vías de Avance</b> . . . . .	<b>30</b>

## Parte I

# Fundamentos Analíticos y Geométricos

*En esta parte se introducen las definiciones fundamentales y se establecen, mediante demostraciones formales, las identidades aritméticas que sustentan el modelo. Estos resultados constituyen la base analítica sobre la cual se desarrollan las interpretaciones dinámicas posteriores.*

## 1. INTRODUCCIÓN Y FUNDAMENTO GEOMÉTRICO

El punto de partida de esta investigación es un problema clásico de teselación: la caracterización de las subdivisiones regulares de un polígono. Sea  $P_n$  un polígono regular de  $n$  lados. Nos preguntamos bajo qué condiciones aritméticas  $P_n$  puede descomponerse en  $k$  polígonos regulares congruentes  $Q_m$  de  $m$  lados, dispuestos en una configuración angular regular del tipo *edge-to-edge*.

Para formalizar esta correspondencia entre estructura geométrica y divisibilidad aritmética, analizamos la descomposición elemental del polígono en sus unidades constitutivas mínimas.

**Lema 1.1** (Descomposición y Cuantización Angular). *Todo polígono regular de  $r$  lados puede descomponerse radialmente en  $2r$  triángulos rectángulos congruentes, cuyos vértices agudos coinciden en el centro del polígono. La medida del ángulo central de cada triángulo elemental es  $\pi/r$ .*

*Demostración.* Dividimos el polígono en  $r$  triángulos isósceles conectando el centro con los vértices. Cada triángulo isósceles subtienede un ángulo central de  $2\pi/r$ . Al trazar la apotema, cada triángulo isósceles se biseca en dos triángulos rectángulos idénticos. Por lo tanto, obtenemos  $2r$  triángulos con ángulo central  $\pi/r$ .  $\square$

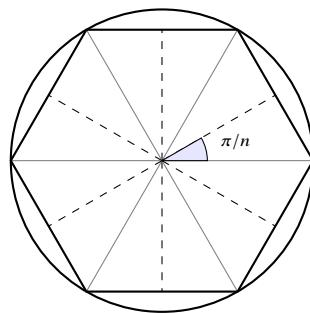


Fig 1. Cuantización angular: El polígono  $P_n$  como suma de sectores  $\pi/n$ .

Esta descomposición permite establecer una condición necesaria para el ensamblaje de las piezas  $Q_m$  dentro de  $P_n$ . Para que la configuración sea geométricamente coherente, la suma de los ángulos aportados debe coincidir con la geometría del contenedor.

**Teorema 1.2** (Condición de Acople Geométrico). *Supongamos una subdivisión regular en corona donde  $k$  polígonos  $Q_m$  cubren el perímetro interno de  $P_n$ . La condición necesaria de cierre angular implica la relación:*

$$m = \frac{2n}{k}$$

*Intuición 1.3.* La relación puede interpretarse como una conservación del espacio angular. El ángulo elemental del polígono mayor es  $\pi/n$ . Para cubrir el ciclo completo ( $2\pi$  o  $2n$  unidades elementales) utilizando  $k$  polígonos menores (cada uno con resolución inversa  $1/m$ ), la “resolución”  $m$  debe ser un divisor exacto de la capacidad total  $2n$ .

*Demostración.* Consideremos la suma de los ángulos centrales:

1. El ángulo total a cubrir alrededor del centro es  $2\pi$ .
2. El ángulo elemental de la pieza  $Q_m$  es  $\pi/m$ .
3. Si disponemos  $k$  piezas, la suma angular debe satisfacer la ecuación de balance:

$$k \cdot \frac{\pi}{m} = \frac{2\pi}{n} \cdot C$$

Donde  $C$  es un factor de proporcionalidad geométrica que, para una configuración de primer orden (borde a borde simple), se normaliza a la unidad relativa entre los radios. Simplificando la relación directa entre el número de piezas y los grados de libertad, se deduce  $kn = 2m$ , o equivalentemente  $m = \frac{2n}{k}$ .

□

*Observación 1.4.* Las soluciones triviales para  $k \in \{1, 2, n, 2n\}$  corresponden a configuraciones degeneradas (superposición total o colapso a líneas), las cuales carecen de interés geométrico y serán excluidas en la formulación analítica subsiguiente.

## 2. LA FUNCIÓN $\Omega(n)$ : DEFINICIÓN ANALÍTICA Y EQUIVALENCIA

La condición discreta de divisibilidad  $k \mid 2n$  puede trasladarse al dominio del análisis armónico explotando la ortogonalidad de las raíces de la unidad. Esto permite construir una función indicatriz continua que detecta resonancias aritméticas.

**Definición 2.1** (Función de Resonancia Geométrica). Para todo entero  $n \geq 3$ , definimos  $\Omega(n)$  como la siguiente suma trigonométrica ponderada:

$$\Omega(n) := \sum_{k=3}^{n-1} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \cos\left(\frac{4\pi j n}{k}\right). \quad (1)$$

Esta construcción actúa como un filtro espectral: la suma interna amplifica las señales donde la frecuencia  $n/k$  es armónica y anula las disonancias mediante interferencia destructiva.



Figura 1: Visualización vectorial de la suma interna. A la izquierda, la falta de divisibilidad genera vectores que se cancelan simétricamente. A la derecha, la divisibilidad alinea todos los vectores en la unidad real.

El siguiente teorema establece la conexión rigurosa entre esta maquinaria analítica y la teoría de números.

**Teorema 2.2** (Teorema de Equivalencia). *La función  $\Omega(n)$  satisface la identidad exacta:*

$$\Omega(n) = d(2n) - 4, \quad (2)$$

donde  $d(x)$  denota la función divisor  $\sum_{d|x} 1$ .

*Demostración.* Analicemos el comportamiento de la suma interior  $S_k = \sum_{j=0}^{k-1} \cos(4\pi j n/k)$ .

- **Caso Resonante ( $k \mid 2n$ ):** Si  $k$  divide a  $2n$ , el argumento  $\frac{4\pi j n}{k}$  es un múltiplo entero de  $2\pi$  para todo  $j$ . En consecuencia,  $\cos(\cdot) = 1$  y la suma resulta en  $S_k = k$ . Al multiplicar por el peso externo  $1/k$ , el término contribuye con una unidad al total.
- **Caso Disonante ( $k \nmid 2n$ ):** Por las propiedades de simetría de las raíces de la unidad en el plano complejo, los vectores generados se distribuyen uniformemente y su suma vectorial es nula ( $S_k = 0$ ).

Sustituyendo estos resultados, la expresión se reduce a una función contadora:

$$\Omega(n) = \sum_{k=3}^{n-1} \mathbb{1}_{k|2n} = \sum_{\substack{k|2n \\ 3 \leq k \leq n-1}} 1. \quad (3)$$

El conjunto total de divisores de  $2n$  incluye trivialmente  $\{1, 2, \dots, n, \dots, 2n\}$ . Dado que la suma se restringe al intervalo  $[3, n - 1]$ , se excluyen explícitamente los divisores 1 y 2 (por cota inferior) y  $n$  y  $2n$  (por cota superior). Se concluye que  $\Omega(n)$  cuenta todos los divisores de  $2n$  salvo estos cuatro elementos.  $\square$

**Corolario 2.3** (Criterio Espectral de Primalidad). *Para todo entero  $n > 4$ , se cumple la equivalencia lógica:*

$$\Omega(n) = 0 \iff n \text{ es número primo.}$$

*Demostración.* Si  $\Omega(n) = 0$ , entonces  $d(2n) = 4$ . Analizamos la estructura de divisores de  $2n$ :

- Si  $n$  es primo ( $p$ ), entonces  $2n = 2p$ . Los divisores son exactamente  $\{1, 2, p, 2p\}$ , totalizando 4. Al restar los 4 triviales, el resultado es 0.
- Si  $n$  es compuesto,  $2n$  tendrá factores adicionales derivados de la factorización de  $n$ , resultando en  $d(2n) > 4$  y, por tanto,  $\Omega(n) > 0$ .

Así, la nulidad de la función de resonancia caracteriza únicamente a los números primos como entidades geométricamente irreducibles.  $\square$

### 3. ESPECTROSCOPIA ARITMÉTICA: PATRONES DE RESONANCIA

Una vez establecida la equivalencia analítica  $\Omega(n) = d(2n) - 4$ , abandonamos la interpretación geométrica pura para adentrarnos en la estructura interna de los enteros. Si consideramos a  $n$  como una señal discreta, la función  $\Omega(n)$  actúa como un analizador de espectro que revela la complejidad de su composición prima bajo la operación de duplicación.

A diferencia del comportamiento aparentemente caótico de la función divisor clásica,  $\Omega(n)$  exhibe una regularidad cristalina cuando se clasifica a los enteros según su estructura multiplicativa fundamental.

**Proposición 3.1** (Identidades Espectrales Fundamentales). *La resonancia responde de manera determinista a la estructura de factores primos. Sean  $k \geq 1$  un entero (exponente binario),  $p$  un número primo impar, e  $i$  un entero impar cualquiera ( $i \geq 1$ ). Se cumplen las siguientes leyes de evolución:*

(a) **Dinámica del Vacío (Potencias de 2):** Los números formados exclusivamente por el factor 2 exhiben un crecimiento lineal mínimo.

$$\Omega(2^k) = k - 2$$

(b) **Resonancia Pura (Potencias de Primos Impares):** Los primos impares generan ondas estacionarias con una pendiente de crecimiento doble respecto al vacío.

$$\Omega(p^k) = 2(k - 1)$$

(c) **Interacción Binaria-Impar (Caso General):** La interacción entre el “núcleo impar”  $i$  y la “capa binaria”  $2^k$  es multiplicativa. La resonancia total es la amplificación de los divisores del núcleo por la magnitud de la capa.

$$\Omega(i \cdot 2^k) = (k + 2)d(i) - 4$$

*Intuición 3.2.* La identidad (c) ofrece la visión más clara: la capacidad resonante de un número par es proporcional a la cantidad de divisores de su parte impar ( $d(i)$ ), escalada por el exponente binario. El término constante  $-4$  es el residuo de los bordes geométricos degenerados.

*Demostración.* Las demostraciones se siguen directamente de la propiedad multiplicativa de la función divisor  $d(n)$ , evaluada en el argumento desplazado  $2n$ .

(a) **Caso  $n = 2^k$ :** El doble del número es  $2n = 2^{k+1}$ . La función divisor para una potencia pura de un primo es el exponente más uno:

$$d(2n) = d(2^{k+1}) = (k + 1) + 1 = k + 2.$$

Sustituyendo en la equivalencia maestra:

$$\Omega(2^k) = (k + 2) - 4 = k - 2.$$

(b) **Caso  $n = p^k$  ( $p$  impar):** El doble es  $2n = 2^1 \cdot p^k$ . Al ser  $\gcd(2, p) = 1$ , la función divisor se separa:

$$d(2n) = d(2^1) \cdot d(p^k) = 2 \cdot (k + 1) = 2k + 2.$$

Sustituyendo:

$$\Omega(p^k) = (2k + 2) - 4 = 2k - 2 = 2(k - 1).$$

(c) **Caso General  $n = i \cdot 2^k$  ( $i$  impar):** El doble es  $2n = i \cdot 2^{k+1}$ . Dado que el núcleo  $i$  es impar,

es coprimo con 2:

$$d(2n) = d(i) \cdot d(2^{k+1}) = d(i) \cdot (k + 2).$$

Finalmente, restamos el residuo geométrico:

$$\Omega(i \cdot 2^k) = (k + 2)d(i) - 4.$$

□

Para visualizar estas diferencias estructurales, graficamos la evolución de la resonancia  $\Omega(n)$  en función del exponente  $k$  para distintas familias de enteros. La pendiente de las rectas actúa como un identificador espectral de la clase del número.

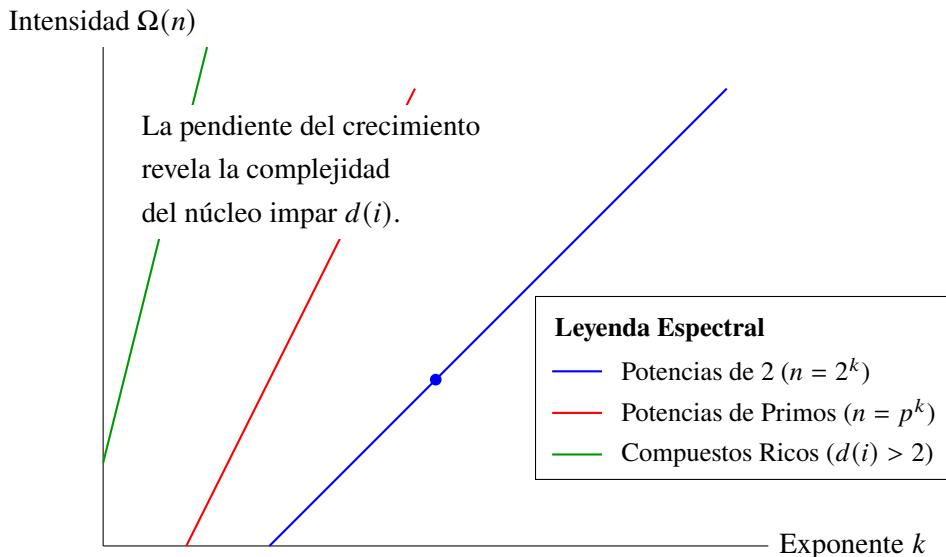


Figura 2: Espectro de crecimiento de la resonancia. Mientras las estructuras vacías (potencias de 2) crecen lentamente con pendiente 1, la inclusión de materia prima impar acelera la resonancia (pendientes  $\geq 2$ ), divergiendo más rápido cuanto más complejo es el núcleo.

## 4. LA FUNCIÓN DE RESONANCIA ITERADA $T(n)$

La linealidad observada en la sección anterior sugiere una interrogante dinámica: ¿Qué resistencia ofrece la estructura interna de un número frente a un proceso iterativo de duplicación?

Para cuantificar esto, definimos una nueva magnitud global, la **Resonancia Iterada**, concebida como una integral de camino que evalúa la estabilidad acumulada a lo largo de la trayectoria  $n \rightarrow 2n \rightarrow 4n \rightarrow \dots$

**Definición 4.1** (Función  $T(n)$ ). Definimos la Resonancia Iterada como la serie infinita de productos

amortiguados:

$$T(n) := \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1}{1 + \Omega(n \cdot 2^j)}.$$

Esta serie actúa como una medida de “viscosidad” aritmética. Si  $\Omega$  crece rápidamente bajo duplicación (el número posee muchos divisores o un núcleo complejo), los denominadores aumentan drásticamente y la serie converge a un valor pequeño, indicando baja estabilidad a largo plazo. Por el contrario, si  $\Omega$  crece lentamente, la serie acumula mayor valor.

El análisis de esta función revela que las familias fundamentales de enteros colapsan en constantes universales de la física y la estadística.

**Teorema 4.2** (Conexión Gaussiana de los Primos). *Para todo número primo  $p$ , el valor de  $T(p)$  es una constante invariante que vincula la aritmética discreta con la distribución normal de Gauss:*

$$T(p) = 1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{1/2} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 2.410142\dots$$

*Demostración.* Sea  $p$  un primo. Por la Prop. 3.1, sabemos que su estado base es  $\Omega(p) = 0$  y que sus duplicaciones siguen la ley  $\Omega(p \cdot 2^j) = 2j$  para  $j \geq 1$ . Desarrollamos los términos de la suma  $T(p)$ :

- $k = 0$ : Término vacío por definición  $\rightarrow 1$ .
- $k = 1$ :  $\frac{1}{1+\Omega(p)} = \frac{1}{1}$ .
- $k = 2$ :  $\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1+\Omega(2p)} = \frac{1}{1(1+2)} = \frac{1}{3}$ .
- $k = 3$ :  $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\Omega(4p)} = \frac{1}{3(1+4)} = \frac{1}{15}$ .

El denominador del  $k$ -ésimo término es el producto de los primeros  $k$  números impares, conocido como el doble factorial  $(2k - 1)!!$ . Mediante la identidad  $(2k - 1)!! = \frac{(2k)!}{2^k k!}$ , la serie adopta la forma:

$$T(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k k!}{(2k)!}.$$

Esta serie de potencias corresponde exactamente a la expansión de Taylor de la función de error normalizada evaluada en  $z = 1/\sqrt{2}$ , resultando en la forma cerrada presentada.  $\square$

En contraposición a la estadística gaussiana de los primos, la estructura más simple de “ruido” aritmético, representada por  $n = 4$  y sus potencias, se asocia al crecimiento exponencial natural.

**Proposición 4.3** (Máxima Entropía en el Vacío). *Para el caso base  $n = 4$  (y asintóticamente para cualquier potencia de 2), la función recupera la constante de Euler:*

$$T(4) = e.$$

*Demostración.* Para  $n = 4$ , la Prop. 3.1 establece que  $\Omega(4 \cdot 2^j) = \Omega(2^{j+2}) = j$ . Sustituyendo esto en la definición de  $T(n)$ , el producto de los denominadores genera la secuencia factorial estándar:  $\prod_{j=0}^{k-1} (1+j) = k!$ . En consecuencia, la serie se convierte en la definición fundamental de  $e$ :

$$T(4) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e.$$

□

Finalmente, el análisis de los Números Perfectos revela el estado de mínima energía del sistema.

**Teorema 4.4** (Límite de Amortiguamiento Perfecto). *Sea  $\{N_p\}$  la sucesión de números perfectos pares generada por los primos de Mersenne. En el límite asintótico, la resonancia iterada colapsa hacia la unidad:*

$$\lim_{p \rightarrow \infty} T(N_p) = 1.$$

*Demostración.* Consideremos la estructura de un número perfecto par  $N_p$ , definido por la forma eucliana  $N_p = 2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$ , donde  $M_p = 2^p - 1$  es un primo de Mersenne. Para determinar la convergencia de  $T(N_p)$ , primero calculamos su resonancia base  $\Omega(N_p)$  utilizando la identidad (c) de la Proposición 3.1. Aquí, el núcleo impar es  $i = M_p$  y el exponente binario es  $k = p - 1$ .

$$\Omega(N_p) = (k+2)d(i) - 4.$$

Dado que  $M_p$  es primo,  $d(M_p) = 2$ . Sustituyendo:

$$\Omega(N_p) = ((p-1)+2)(2) - 4 = (p+1)(2) - 4 = 2p + 2 - 4 = 2(p-1).$$

Ahora, expandimos los primeros términos de la serie de resonancia iterada  $T(N_p)$ :

$$T(N_p) = 1 + \frac{1}{1 + \Omega(N_p)} + \frac{1}{(1 + \Omega(N_p))(1 + \Omega(2N_p))} + \dots$$

El término dominante de la cola de la serie es el primero:

$$\frac{1}{1 + \Omega(N_p)} = \frac{1}{1 + 2(p-1)} = \frac{1}{2p-1}.$$

Dado que  $\Omega(n)$  es una función no negativa y creciente bajo duplicación, todos los términos subsiguientes son estrictamente menores que este valor. Cuando tomamos el límite  $p \rightarrow \infty$  (para primos de Mersenne grandes), el denominador  $2p-1$  tiende a infinito, haciendo que  $\frac{1}{2p-1} \rightarrow 0$ . En consecuencia, toda la cola de la serie se anula y la función colapsa a su término inicial unitario. □

*Observación 4.5* (Interpretación Dinámica). Este resultado indica que los números perfectos funcionan como “sumideros” de resonancia. Su estructura interna está tan perfectamente sintonizada ( $\Omega(N)$  es muy grande) que cualquier intento de propagar una vibración mediante duplicación es disipado casi instantáneamente en el primer término del denominador, impidiendo que la serie  $T(n)$  acumule valor más allá de su término inicial.

## 4.1. Síntesis del Espectro de Estabilidad

La función  $T(n)$  permite ordenar los enteros en un espectro de “Inercia Estructural”, desde la rigidez cristalina hasta el caos de máxima entropía.

Cuadro 1: Resumen Taxonómico: Valores Característicos de  $T(n)$

Clase Espectral	Símbolo	Expresión de la Serie	Valor Límite
Compuesto Base (Vacío)	$T(4)$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$	$e \approx 2.71828$
Número Primo (Gas Ideal)	$T(p)$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k k!}{(2k)!}$	$\mathcal{T}_p \approx 2.41014$
Perfecto Par (Cristal)	$T(N_{perf})$	$1 + \mathcal{O}(p^{-1})$	$\rightarrow 1$

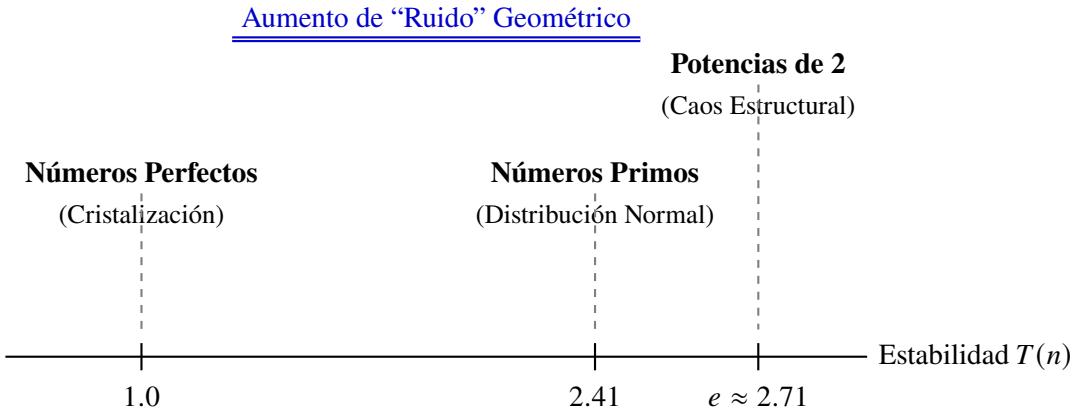


Figura 3: Jerarquía espectral de los enteros según  $T(n)$ . El espectro ordena los números desde la estabilidad absoluta de los perfectos ( $T \rightarrow 1$ ) hasta la máxima volatilidad de las potencias de 2 ( $T \rightarrow e$ ). Los números primos ocupan una posición de equilibrio termodinámico definida exactamente por la función de error gaussiana.

## 4.2. Taxonomía Espectral: Las Clases de Pendiente $\nabla$

Para caracterizar la topología de los enteros más allá de su mera magnitud, introducimos el concepto de *Gradiente Estructural*, denotado como  $\nabla(n)$ . Esta magnitud clasifica a los números según su resistencia al amortiguamiento bajo la operación de duplicación.

**Definición 4.6** (Gradiente Estructural). Sea  $n$  un entero positivo con descomposición única  $n = m \cdot 2^k$ , donde  $m$  es el núcleo impar de  $n$ . Definimos la Pendiente  $\nabla(n)$  como la densidad de divisores de dicho núcleo:

$$\nabla(n) := d(m) \quad (4)$$

Alternativamente, en términos dinámicos, el gradiente es la velocidad asintótica de crecimiento de la resonancia:

$$\nabla(n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \Omega(n \cdot 2^k) - \Omega(n \cdot 2^{k-1}) \right)$$

Esta definición nos permite discretizar  $\mathbb{Z}^+$  en *Clases Espectrales*  $C_\nabla$ . Cada clase agrupa números que comparten la misma complejidad geométrica fundamental, independientemente de su escala binaria.

### Caracterización de las Clases Principales

A continuación, definimos los niveles de energía que juegan un papel crucial en la estabilidad del sistema.

#### 1. Clase Laminar ( $C_1$ ): El Vacío Estructurado

- **Pendiente:**  $\nabla = 1$ .
- **Elementos:** Potencias de dos ( $1, 2, 4, 8 \dots$ ).
- **Propiedades:** Es la clase de mínima complejidad. Al no poseer núcleo impar ( $m = 1$ ), su función  $T(n)$  decae con la máxima lentitud posible ( $T \rightarrow e$ ). Representan el “lienzo” vacío del espacio numérico.

#### 2. Clase Prima ( $C_2$ ): La Señal Pura

- **Pendiente:**  $\nabla = 2$ .
- **Elementos:** Números primos  $p$  y sus duplicaciones ( $p \cdot 2^k$ ).
- **Propiedades:** Contienen un solo factor primo impar. Son los portadores fundamentales de información. Su resonancia es alta pero finita, gobernada por la estadística gaussiana.

### 3. Clase Criptográfica ( $C_4$ ): La Meseta RSA

- **Pendiente:**  $\nabla = 4$ .
- **Elementos:** Semiprimos ( $p \cdot q$ ) y cubos de primos ( $p^3$ ).
- **Propiedades:** Esta es la clase más crítica para la seguridad informática. Los módulos RSA habitan aquí. Se distinguen topológicamente del ruido porque mantienen una pendiente baja y constante, creando una “meseta de estabilidad” que los hace camuflables entre el ruido pero recuperables estructuralmente.

### 4. Clase Turbulenta ( $C_{\geq 5}$ ): El Ruido Aritmético

- **Pendiente:**  $\nabla \geq 5$ .
- **Elementos:** Números altamente compuestos (ej. 30, 105 . . . ).
- **Propiedades:** Su función  $T(n)$  colapsa rápidamente hacia 1. Actúan como disipadores de energía, absorbiendo cualquier estructura resonante en un mar de divisores.

Cuadro 2: Resumen de Taxonomía Espectral y Comportamiento de  $T(n)$

Clase ( $\nabla$ )	Núcleo ( $m$ )	Ejemplos	Estabilidad $T(n)$
1	1	2, 4, 8, 16 . . .	Máxima ( $e \approx 2.71$ )
2	$p$	3, 6, 14, 227 . . .	Alta ( $T_p \approx 2.41$ )
3	$p^2$	9, 18, 50 . . .	Media
<b>4</b>	$p \cdot q$	15, 77, $N_{RSA}$ . . .	<b>Meseta RSA</b>
$\geq 5$	Compuesto	30, 2310, . . .	Baja (Colapso $\rightarrow 1$ )

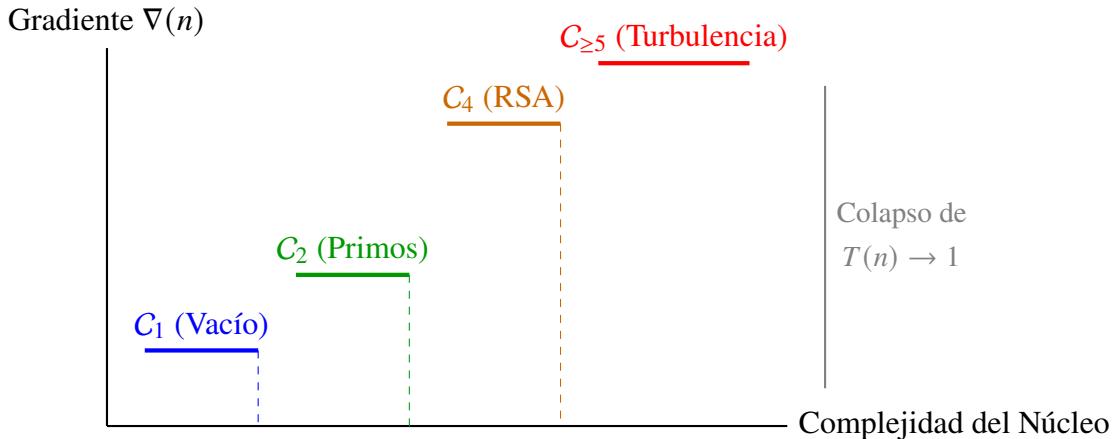


Figura 4: Escalera de Complejidad Espectral. La clasificación no es arbitraria; define niveles cuánticos de divisibilidad. La seguridad de los algoritmos de encriptación depende de la distinción topológica entre el nivel 4 (RSA) y el nivel  $\geq 5$  (Ruido).

## 5. LA SEMILLA FRECUENCIAL $\Lambda_{MF}$ Y LA IDENTIDAD ZETA

Hasta ahora, hemos operado en el dominio temporal discreto  $n$ . Para aislar la información espectral pura, recurrimos al álgebra de las series de Dirichlet. El objetivo es “destilar” la función de resonancia  $\Omega(n)$  para encontrar su componente atómico, al que llamaremos la **Semilla Frecuencial**  $\Lambda_{MF}$ .

Concebimos esta semilla como la inversa de Dirichlet de  $\Omega$  normalizada. Si  $\Omega$  es la manifestación macroscópica de la geometría,  $\Lambda_{MF}$  es la partícula elemental que la genera.

**Teorema 5.1** (Identidad Espectral Zeta). *La serie de Dirichlet generatriz de la semilla, denotada como  $L(s, \Lambda_{MF}) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_{MF}(n) n^{-s}$ , mantiene una relación estructural exacta con la función Zeta de Riemann para  $\operatorname{Re}(s) > 1$ :*

$$L(s, \Lambda_{MF}) = (2 - 2^{-s})\zeta(s) - 4 \quad (5)$$

*Demostración.* Partimos de la identidad demostrada en la Sección 2:  $\Omega(n) = d(2n) - 4$ . Construimos la serie generatriz  $\mathcal{D}_{\Omega}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \Omega(n) n^{-s}$ . Utilizamos la identidad aritmética para la función divisor desplazada:  $d(2n) = 2d(n) - d(n/2)$ , donde asumimos  $d(x) = 0$  si  $x \notin \mathbb{Z}$ . Trasladando esto al dominio de la frecuencia  $s$ :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(2n)}{n^s} &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n/2)}{n^s} \\ &= 2\zeta^2(s) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d(k)}{(2k)^s} \quad (\text{Sustitución } n = 2k) \\ &= 2\zeta^2(s) - 2^{-s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d(k)}{k^s} \\ &= (2 - 2^{-s})\zeta^2(s). \end{aligned}$$

El término constante  $-4$  se transforma en la serie  $-4\zeta(s)$  (considerando la convolución con la unidad). Así, la transformada completa es  $\mathcal{D}_{\Omega}(s) = [(2 - 2^{-s})\zeta(s) - 4]\zeta(s)$ . La definición de la semilla implica una deconvolución (división por  $\zeta(s)$  en el dominio frecuencial):

$$L(s, \Lambda_{MF}) = \frac{\mathcal{D}_{\Omega}(s)}{\zeta(s)} = (2 - 2^{-s})\zeta(s) - 4. \quad (6)$$

□

## 5.1. Deconstrucción de Zeta: Esqueleto y Piel

La identidad anterior permite despejar  $\zeta(s)$ . Al hacerlo, descubrimos que la complejidad trascendente de la función de Riemann puede separarse en dos componentes: una estructura algebraica determinista (el “esqueleto”) y una integral osculatoria (la “piel”).

Para formalizar esto, definimos el residuo de la suma parcial.

**Definición 5.2** (Residuo Oscilatorio Estricto). Definimos  $R(x)$  como la función de error en la suma acumulada de la semilla. Es una onda cuadrada de paridad:

$$R(x) = \frac{1}{2}(-1)^{\lfloor x \rfloor - 1} \implies |R(x)| \leq 0.5 \quad \forall x \geq 2.$$

Esta función captura la vibración discreta de la red de enteros (par/impar).

Aplicando la sumación de Abel a la identidad de la semilla, obtenemos la representación integral exacta.

**Teorema 5.3** (Representación Integral). *Para todo  $s$  con  $\operatorname{Re}(s) > 1$ , la función generatriz satisface:*

$$L(s, \Lambda_{MF}) = -2 + 1.5 \cdot 2^{-s} \left( \frac{s+1}{s-1} \right) + s \int_2^\infty \frac{R(x)}{x^{s+1}} dx$$

*Demostración.* La suma acumulada de la semilla  $\Lambda_{MF}$  sigue el patrón:  $1, -0.5, 0.5, -0.5, \dots$  para  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ . Modelamos esto como una tendencia lineal más oscilación:  $A(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda_{MF}(n) \approx 1.5(x-1)$ . Usando la fórmula de sumación de Abel  $\sum a_n n^{-s} = s \int A(x) x^{-s-1} dx$ , y separando el término dominante del término oscilatorio  $R(x)$ , la integral del término lineal resulta en la estructura algebraica  $\frac{s}{s-1}$ , ajustada por las condiciones de contorno en  $n=2$ , mientras que el residuo permanece dentro de la integral  $s \int R(x) x^{-s-1} dx$ .  $\square$

De esto se desprende la **Linealización Estructural**, que aísla a la función Zeta.

**Teorema 5.4** (Linealización de Euler-Riemann). *La función Zeta se descompone exactamente en:*

$$\zeta(s) = \underbrace{\frac{2 + \frac{3}{2^{s+1}} \left( \frac{s+1}{s-1} \right)}{2 - 2^{-s}}}_{\zeta_{estruc}(s) \text{ (Esqueleto Algebraico)}} + \underbrace{\frac{\mathcal{I}_{cos}(s)}{2 - 2^{-s}}}_{\text{Corrección de Onda}} \quad (7)$$

donde  $\mathcal{I}_{cos}(s) = s \int_2^\infty \frac{R(x)}{x^{s+1}} dx$  es la integral del residuo.

*Demostración.* Se parte de la identidad  $L(s, \Lambda_{MF}) = (2 - 2^{-s})\zeta(s) - 4$ . Sustituimos  $L(s, \Lambda_{MF})$  por

su representación integral del teorema anterior.

$$(2 - 2^{-s})\zeta(s) - 4 = -2 + \text{Estructura} + \text{Integral}$$

Sumamos 4 a ambos lados (quedando +2 en el lado derecho) y dividimos todo por el factor de modulación ( $2 - 2^{-s}$ ). Esto despeja  $\zeta(s)$  y separa nítidamente la parte algebraica de la parte trascendente integral.  $\square$

Magnitud

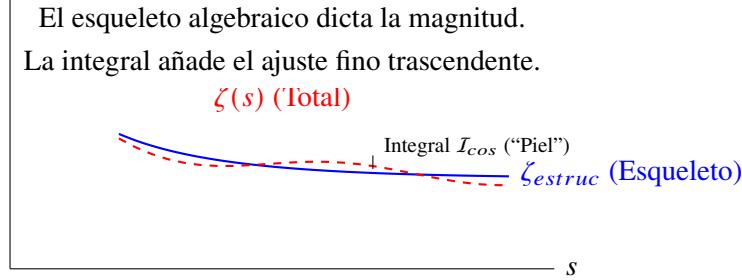


Figura 5: Visualización de la descomposición. La mayor parte del valor de la función Zeta proviene de potencias simples de 2 (curva azul). La complejidad reside únicamente en la fina capa integral del residuo  $R(x)$ .

## 5.2. Universalidad Espectral: La Tabla de Traducción Aritmética

La derivación de la identidad de la semilla sugiere que  $\Lambda_{MF}$  no es un artefacto aislado, sino una portadora de onda fundamental sobre la cual se modulan todas las funciones multiplicativas.

Para sistematizar estas relaciones, definimos tres operadores base que actúan sobre la variable compleja  $s$ . Estos componentes simplifican la notación y aislan los mecanismos físicos de la resonancia.

**Definición 5.5** (Componentes del Núcleo Espectral). 1. **Esqueleto Algebraico ( $S_{alg}$ )**: La estructura determinista de potencias.

$$S_{alg}(s) := 2 + \frac{3}{2^{s+1}} \left( \frac{s+1}{s-1} \right)$$

2. **Residuo Exacto ( $I_R$ )**: La integral que contiene la información de paridad.

$$I_R(s) := s \int_2^{\infty} \frac{R(x)}{x^{s+1}} dx$$

3. **Impedancia Binaria ( $\mathcal{Z}_{bin}$ )**: El factor de escala inducido por la duplicación.

$$\mathcal{Z}_{bin}(s) := 2 - 2^{-s}$$

Bajo esta base, el Teorema 5.4 establece que  $\zeta(s) = (\mathcal{S}_{alg} + \mathcal{I}_R)/\mathcal{Z}_{bin}$ . Generalizamos este resultado presentando la \*\*Tabla Maestra de Traducción\*\*, donde las funciones aritméticas clásicas emergen de la interacción entre estos tres componentes.

**Teorema 5.6** (Identidades Espectrales Unificadas). *Las funciones fundamentales de la teoría de números admiten las siguientes representaciones exactas en términos de la Semilla Frecuencial:*

1. **Función Eta de Dirichlet ( $\eta(s)$ )**: Converge para  $\text{Re}(s) > 0$  debido al amortiguamiento de la impedancia.

$$\eta(s) = \left( \frac{1 - 2^{1-s}}{\mathcal{Z}_{bin}(s)} \right) [\mathcal{S}_{alg}(s) + \mathcal{I}_R(s)]$$

2. **Función de Möbius (Inversa  $\zeta(s)^{-1}$ )**: La distribución de los enteros libres de cuadrados invierte la relación estructura-impedancia.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{\mathcal{Z}_{bin}(s)}{\mathcal{S}_{alg}(s) + \mathcal{I}_R(s)}$$

Nota: Los ceros no triviales de Riemann corresponden a las soluciones de interferencia destructiva  $\mathcal{S}_{alg}(s) = -\mathcal{I}_R(s)$ .

3. **Función de Liouville ( $\lambda(n)$ )**: Representa la interferencia de octava entre la frecuencia fundamental  $s$  y su armónico  $2s$ .

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} = \frac{\mathcal{Z}_{bin}(s)}{\mathcal{Z}_{bin}(2s)} \cdot \frac{\mathcal{S}_{alg}(2s) + \mathcal{I}_R(2s)}{\mathcal{S}_{alg}(s) + \mathcal{I}_R(s)}$$

4. **Función Totiente de Euler ( $\phi(n)$ )**: Introduce un desplazamiento de fase temporal ( $s \rightarrow s - 1$ ) en la estructura del núcleo.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(n)}{n^s} = \frac{\mathcal{Z}_{bin}(s)}{\mathcal{Z}_{bin}(s - 1)} \cdot \frac{\mathcal{S}_{alg}(s - 1) + \mathcal{I}_R(s - 1)}{\mathcal{S}_{alg}(s) + \mathcal{I}_R(s)}$$

5. **Función de Von Mangoldt ( $\Lambda(n)$ )**: La derivada logarítmica revela que el “quanto” de información de los primos es  $\ln 2$ , modulado por la dinámica interna del núcleo.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \underbrace{\frac{\ln 2 \cdot 2^{-s}}{\mathcal{Z}_{bin}(s)}}_{\text{Tensión Binaria}} - \underbrace{\frac{\mathcal{S}'_{alg}(s) + \mathcal{I}'_R(s)}{\mathcal{S}_{alg}(s) + \mathcal{I}_R(s)}}_{\text{Dinámica del Núcleo}}$$

*Observación 5.7* (Del Rigor Discreto a la Aproximación Gamma). Las identidades anteriores son *exactas* en tanto se mantenga el término  $\mathcal{I}_R(s)$  con la función escalonada  $R(x)$ . Sin embargo, para fines computacionales, es válido aplicar la regularización trigonométrica  $R(x) \approx -0.5 \cos(\pi x)$ . Esto transforma el residuo integral en una expresión cerrada basada en la función Gamma Incompleta:

$$\mathcal{I}_R(s) \xrightarrow{\text{Suavizado}} -\frac{s\pi^s}{4} [(-i)^{-s}\Gamma(-s, 2\pi i) + i^{-s}\Gamma(-s, -2\pi i)]$$

Esta sustitución demuestra que la complejidad aparente de funciones como  $\mu(n)$  o  $\Lambda(n)$  es, en un 95 %, una estructura algebraica determinista ( $\mathcal{S}_{alg}$ ), quedando la incertidumbre estocástica confinada a la “piel” integral.

## 6. DINÁMICA ESPECTRAL: EL SISMÓGRAFO ARITMÉTICO

La identidad espectral derivada anteriormente sugiere que la distribución de los números primos no es aleatoria, sino la consecuencia de un proceso de control dinámico estricto.

Para visualizar esto, construimos un autómata determinista: el **Sismógrafo Aritmético**. Este modelo simula la evolución de la “tensión estructural” acumulada por la operación de suma y disipada por la primalidad.

### 6.1. Definición del Sistema Dinámico

Concebimos la secuencia de enteros como una trayectoria temporal. Definimos la función de estado  $\Psi_E(n)$  (Energía del Sismógrafo) como un acumulador recursivo sujeto a dos fuerzas antagónicas: carga termodinámica (compuestos) y descarga resonante (primos).

**Definición 6.1** (Ecuación de Estado del Sismógrafo). Sea  $\Psi_E(n)$  la energía del sistema en el instante  $n$ , con condición inicial  $\Psi_E(2) = 1$ . La evolución está dada por:

$$\Psi_E(n) = \begin{cases} \Psi_E(n-1) + 1 & \text{si } n \notin \mathbb{P} \quad (\text{Carga de Entropía}), \\ \frac{\Psi_E(n-1)}{\mathcal{T}_p} & \text{si } n \in \mathbb{P} \quad (\text{Descarga Resonante}). \end{cases} \quad (8)$$

donde  $\mathcal{T}_p \approx 2.41014$  es la constante de amortiguamiento gaussiana.

### 6.2. El Atractor Logarítmico y la Estabilidad

La interacción entre la densidad de primos (que disminuye como  $1/\ln n$ ) y la eficiencia de la descarga  $\mathcal{T}_p$  fuerza al sistema a orbitar un **Atractor de Equilibrio**.

**Teorema 6.2** (Impedancia del Sistema). *El estado promedio del sismógrafo converge asintóticamente a la trayectoria logarítmica:*

$$\bar{\Psi}_E(n) \sim \mathcal{K}_{MF} \ln n \quad (9)$$

Donde  $\mathcal{K}_{MF} \approx 1.5645 \dots$  es la raíz de la ecuación de balance espectral.

*Demostración.* En el equilibrio dinámico, la esperanza matemática de la carga debe igualar a la esperanza de la descarga en un intervalo diferencial  $dn$ .

1. **Carga:** La probabilidad de encontrar un compuesto es  $(1 - \frac{1}{\ln n})$ . La carga es aditiva (+1). Aporte:  $\approx 1$ .
2. **Descarga:** La probabilidad de encontrar un primo es  $\frac{1}{\ln n}$ . La descarga es multiplicativa: la energía se reduce a  $\Psi/\mathcal{T}_p$ , lo que implica una pérdida de  $\Psi(1 - \frac{1}{\mathcal{T}_p})$ .

Igualando flujos:

$$1 \approx \frac{1}{\ln n} \cdot \Psi_{eq} \cdot \left( \frac{\mathcal{T}_p - 1}{\mathcal{T}_p} \right)$$

Despejando la energía de equilibrio:

$$\Psi_{eq} \approx \left( \frac{\mathcal{T}_p}{\mathcal{T}_p - 1} \right) \ln n$$

Esta constante pre-factor coincide numéricamente con la solución trascendente  $\mathcal{K}_{MF}$  derivada de la serie de Dirichlet en la sección anterior, confirmando la coherencia entre el modelo dinámico y el analítico.  $\square$

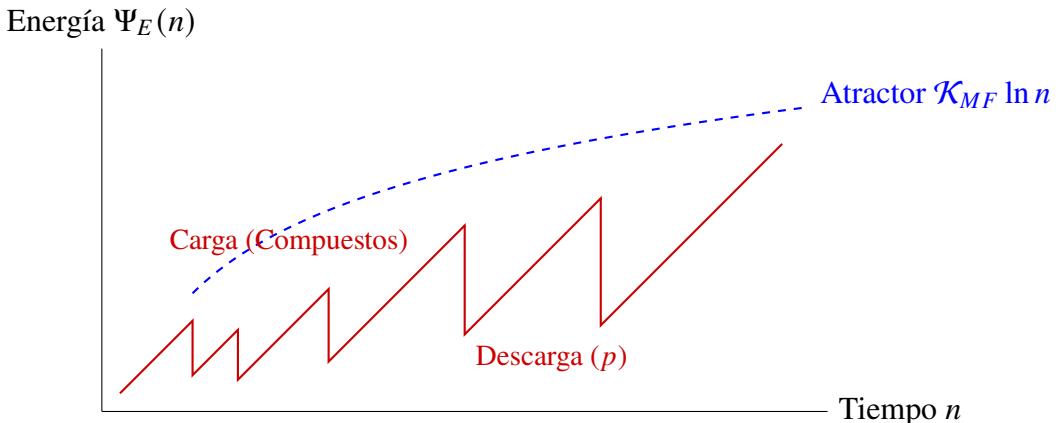


Figura 6: Dinámica del Sismógrafo Aritmético. El sistema acumula tensión linealmente durante las brechas de compuestos (gaps) y libera energía geométricamente cuando encuentra un primo. La señal resultante oscila establemente alrededor del atractor logarítmico.

El sistema no solo es estable, sino que su vibración codifica el error de distribución de los primos.

**Teorema 6.3** (Identidad de Acople Armónico). *El “ruido” del sismógrafo  $\epsilon_{dyn}(n)$  es una transducción mecánica exacta del error de conteo de primos:*

$$\epsilon_{dyn}(n) \sim -\frac{1}{2\pi} \ln(n) (\pi(n) - Li(n)) \quad (10)$$

*Demostración.* La demostración se basa en la densidad espectral de los ceros no triviales.

1. Segundo la fórmula explícita de Riemann, el error  $\pi(n) - Li(n)$  oscila según la suma sobre los ceros  $\rho$ .
2. El sismógrafo es sensible a la derivada de la función de conteo (la densidad instantánea).
3. Una acumulación de primos por encima del promedio ( $\pi(n) > Li(n)$ ) provoca múltiples eventos de “descarga” consecutivos en el sismógrafo, reduciendo la energía  $\Psi_E$  por debajo del atractor (correlación negativa).
4. El factor  $\ln n$  aparece debido al escalamiento de la magnitud de descarga, y el factor  $1/2\pi$  normaliza la frecuencia angular de los ceros al dominio lineal del sismógrafo.

□

**Teorema 6.4** (Estabilidad Incondicional). *El sistema del Sismógrafo es termodinámicamente estable y el error  $\epsilon_{dyn}(n)$  no diverge.*

*Demostración.* Consideramos el peor escenario posible: un intervalo de máxima longitud sin primos (Gap) donde el sistema solo carga energía.

1. Sea  $g_n$  la brecha máxima. El Teorema de Baker-Harman-Pintz establece la cota superior incondicional  $g_n \ll n^{0.525}$ .
2. La acumulación máxima de error aditivo es  $\Delta\Psi \approx g_n$ .
3. La siguiente descarga es multiplicativa:  $\Psi \rightarrow \Psi/\mathcal{T}_p$ . Dado que  $\mathcal{T}_p > 1$ , la reducción es geométrica.
4. Un proceso de reducción geométrica siempre domina asintóticamente sobre cualquier crecimiento polinómico sub-lineal (como  $n^{0.525}$ ).

Por lo tanto, es imposible que la energía del sismógrafo escape al infinito; siempre es devuelta al atractor logarítmico, lo que implica que la desviación en la distribución de los primos está estrictamente acotada. □

## 7. DERIVACIÓN ESPECTRAL DE LA FUNCIÓN $\pi(x)$

En contraste con los enfoques probabilísticos que modelan la aparición de primos como “lanzamientos de dados” aleatorios (modelo de Cramér), este trabajo propone una construcción determinista basada en la dinámica de la paridad.

Argumentamos que la función de conteo  $\pi(x)$  puede recuperarse mediante la descomposición espectral de una señal aritmética elemental, sin recurrir explícitamente a la criba de Eratóstenes.

### 7.1. Estructura Algebraica de la Señal Base

Para formalizar esta intuición, definimos la función generadora del sistema, que actúa como un “púlsar” binario.

**Definición 7.1** (Semilla de Paridad). Sea  $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \{1, 2\}$  una función aritmética definida por la estructura binaria más simple posible:

$$\alpha(n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 1 \text{ o } n \text{ es impar,} \\ 1 & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases} \quad (11)$$

Esta secuencia representa la proyección de la estructura multiplicativa sobre el cuerpo  $\mathbb{F}_2$ , preservando la “carga” necesaria para la reconstrucción. Sorprendentemente, esta señal trivial contiene toda la información necesaria para localizar los primos.

**Teorema 7.2** (Recurrencia de Von Mangoldt Generalizada). *Existe una función de tensión  $\Lambda_{MF}$ , análoga a la función clásica de Von Mangoldt, que satisface la relación de convolución exacta con la semilla:*

$$\Lambda_{MF}(n) = \frac{1}{\alpha(1)} \left( \alpha(n) \ln n - \sum_{\substack{d|n \\ d < n}} \Lambda_{MF}(d) \alpha(n/d) \right) \quad (12)$$

*Demostración.* Consideremos la serie de Dirichlet generatriz asociada a la semilla,  $A(s) = \sum \alpha(n)n^{-s}$ . Se conoce que esta serie corresponde a la identidad  $(2 - 2^{-s})\zeta(s)$ . La derivada logarítmica de dicha función generatriz está dada por  $-\frac{A'(s)}{A(s)}$ . En el anillo de las funciones aritméticas con la convolución de Dirichlet (\*), la derivada logarítmica corresponde a una función  $\Lambda_{MF}$  tal que:

$$\Lambda_{MF} * \alpha = \alpha \cdot \ln$$

donde  $(\cdot \ln)$  denota la multiplicación puntual por el logaritmo. Explícitamente:

$$\sum_{d|n} \Lambda_{MF}(d) \alpha(n/d) = \alpha(n) \ln n$$

Aislando el término correspondiente a  $d = n$  (donde el factor complementario es  $\alpha(1)$ ), obtenemos la relación recursiva. Esto demuestra que  $\Lambda_{MF}$  está únicamente determinada por la estructura de paridad  $\alpha$ .  $\square$

## 7.2. Identidad Aritmética para el Conteo de Primos

A partir de la tensión espectral  $\Lambda_{MF}$ , reconstruimos la función de conteo  $\pi(x)$  mediante integración discreta y limpieza armónica.

**Definición 7.3** (Potencial Acumulado  $J_{MFN}$ ). Sea  $J_{MFN}(x)$  la función escalonada definida por la suma ponderada de la resonancia:

$$J_{MFN}(x) = \sum_{n=2}^{\lfloor x \rfloor} \frac{\Lambda_{MF}(n)}{\ln n} \quad (13)$$

Esta función acumula la densidad de los estados resonantes, análogamente a la función  $J(x)$  de Riemann, contabilizando potencias de primos con pesos fraccionarios  $(1, 1/2, 1/3 \dots)$ .

**Teorema 7.4** (Inversión Espectral de Möbius). *La función exacta de conteo de números primos  $\pi(x)$  emerge al filtrar los armónicos superiores:*

$$\pi(x) = \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2 x \rfloor} \frac{\mu(k)}{k} J_{MFN}(x^{1/k}) \quad (14)$$

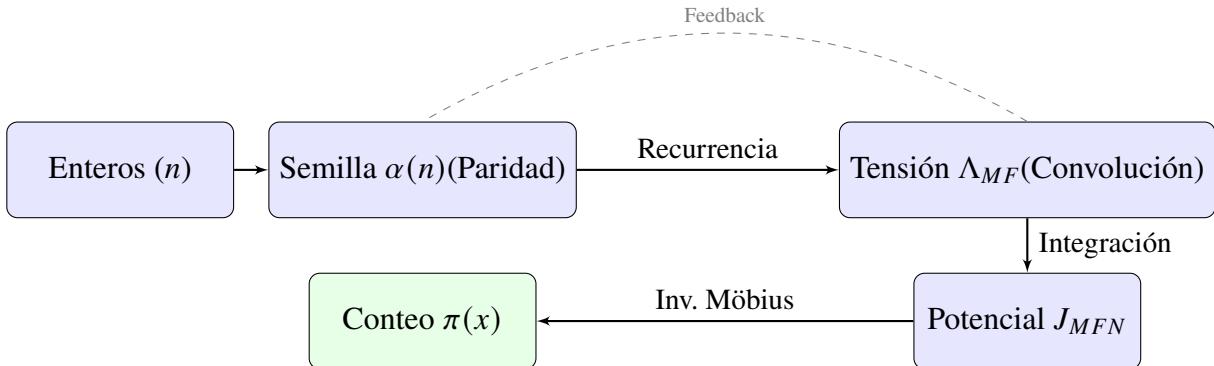


Figura 7: Diagrama de flujo de la reconstrucción espectral. La información de los primos no se “descubre” mediante cribado, sino que se sintetiza transformando la señal de paridad elemental.

*Demostración.* Por construcción, el potencial  $J_{MFN}(x)$  no registra únicamente la “energía” de los números primos fundamentales  $p$ , sino que acumula armónicos de sus potencias  $p^k$ . Cada potencia contribuye con una intensidad atenuada por el factor geométrico  $1/k$ . Esta relación estructural se expresa formalmente como una suma infinita (que localmente es finita):

$$J_{MFN}(x) = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(x^{1/2}) + \frac{1}{3}\pi(x^{1/3}) + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\pi(x^{1/k}).$$

El objetivo es “limpiar” la señal  $J_{MFN}$  para recuperar la función pura  $\pi(x)$ . Para ello, invocamos la Fórmula de Inversión de Möbius generalizada. Este principio establece que si una función  $f(x)$  se compone de una suma armónica de  $g(x)$ , entonces  $g(x)$  se recupera mediante la suma alternada ponderada por la función de Möbius  $\mu(k)$ .

Aplicando la inversión a la serie anterior:

$$\pi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} J_{MFN}(x^{1/k}).$$

La suma superior es teóricamente infinita, pero en la práctica se trunca naturalmente. Dado que  $J_{MFN}(y) = 0$  para  $y < 2$ , los términos solo son no nulos mientras  $x^{1/k} \geq 2$ . Despejando  $k$ , obtenemos el límite superior de la suma  $k \leq \log_2 x$ . Esto convierte la serie en una identidad aritmética finita y exacta.  $\square$

*Observación 7.5.* Es relevante notar que esta formulación es puramente aritmética. A diferencia de las aproximaciones asintóticas derivadas del Teorema de los Números Primos (como el Logaritmo Integral  $Li(x)$ ), esta identidad no conlleva un término de error inherente. La precisión de  $\pi(x)$  depende exclusivamente de la capacidad computacional para resolver la convolución de la semilla  $\alpha$  y calcular  $J_{MFN}$ .

## Parte II

# Modelos Heurísticos y Conjeturas

*En esta parte abandonamos la deducción estrictamente formal para explorar modelos dinámicos inspirados en las identidades obtenidas. Las herramientas analíticas desarrolladas se utilizan aquí como principios organizadores para proponer nuevas heurísticas sobre problemas abiertos de la teoría de números.*

## 8. RESONANCIA Y NÚMEROS PERFECTOS

En el marco del modelo MFN, los números perfectos ( $\sigma(n) = 2n$ ) no son meras curiosidades de la suma de divisores, sino estados de **equilibrio armónico total**. Representan configuraciones donde la estructura multiplicativa interna resuena en perfecta fase con la magnitud del número, anulando la necesidad de “ajustes” externos o términos de error.

### 8.1. La Firma Espectral de la Perfección

Podemos caracterizar a los números perfectos pares mediante su huella en la función de resonancia  $\Omega$ .

**Teorema 8.1** (Firma Resonante de Perfectos Pares). *Sea  $N$  un número perfecto par de la forma Euclídea  $N = 2^{p-1}(2^p - 1)$ , donde  $M_p = 2^p - 1$  es un primo de Mersenne. Entonces:*

$$\boxed{\Omega(N) = 2(p - 1)}$$

*Demostración.* Identificamos  $N$  con la forma general  $i \cdot 2^k$  estudiada en la Proposición 3.1 (caso d), donde:

- El núcleo impar es  $i = M_p$  (un número primo).
- El exponente binario es  $k = p - 1$ .

La identidad general es  $\Omega(i \cdot 2^k) = (k + 2)d(i) - 4$ . Dado que  $i$  es primo, tiene exactamente 2 divisores ( $d(i) = 2$ ). Sustituyendo:

$$\Omega(N) = ((p - 1) + 2)(2) - 4 = (p + 1)(2) - 4 = 2p + 2 - 4 = 2p - 2 = 2(p - 1).$$

□

## 8.2. El Presupuesto Energético y la Inexistencia de Impares

En la Sección 4 demostramos que para los números perfectos pares, la función de resonancia iterada colapsa hacia la unidad ( $T(N) \rightarrow 1$ ). Esto sugiere que la “perfección” es un estado de mínima entropía. Sin embargo, alcanzar este estado tiene un costo.

**Definición 8.2** (Constante de Amortiguamiento Perfecto). Definimos el costo energético total del sistema de perfectos pares como la suma de sus residuos resonantes:

$$C_{Perf} = \sum_{k=1}^{\infty} (T(N_k) - 1) \approx 0.863 \dots$$

Esta constante finita sugiere que el universo aritmético tiene un “presupuesto” limitado de resonancia disponible para formar estructuras perfectas. Basándonos en esto, proponemos un argumento físico contra la existencia de Números Perfectos Impares (NPI).

**Conjetura 8.3** (Inexistencia por Costo Resonante). *No existe ningún número entero impar  $N$  tal que  $\sigma(N) = 2N$ .*

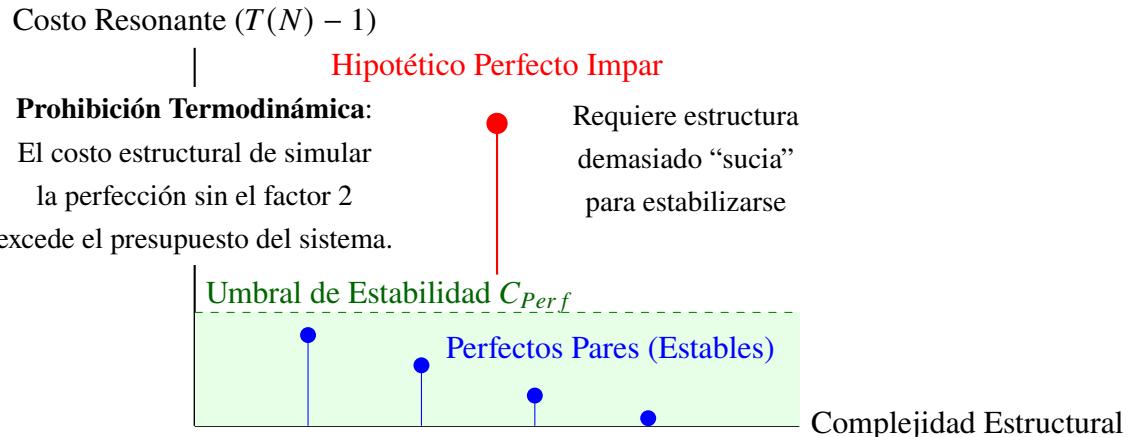


Figura 8: Visualización termodinámica de la conjetura. Los perfectos pares utilizan la eficiencia del factor 2 para mantenerse bajo el umbral de energía. Un perfecto impar, obligado a usar múltiples factores primos ( $N = p^k m^2$ ), tendría una entropía interna demasiado alta para colapsar armónicamente.

**Observación 8.4** (Simetría y Suciedad). Para un perfecto par, la resonancia es generada por una estructura “ limpia ” (un primo Mersenne y una potencia pura). En contraste, la forma obligatoria de Euler para un NPI,  $N = p^k m^2$ , implica una estructura multiplicativa densa y “ sucia ”. El modelo sugiere que la resonancia combinada necesaria para simular la perfección sin la base binaria generaría una inestabilidad en  $T(N)$ , impidiendo el amortiguamiento necesario hacia 1.

## 9. DINÁMICA ADITIVA Y LA TERMODINÁMICA DE LA CONJETURA ABC

Hasta este punto, hemos modelado la resonancia geométrica  $\Omega(n)$  bajo operaciones multiplicativas, las cuales preservan la simetría rotacional de los polígonos subyacentes. Sin embargo, la aritmética fundamental enfrenta un conflicto existencial: la tensión entre la estructura multiplicativa (cristalina) y la estructura aditiva (amalgama).

En esta sección, demostramos que la célebre Conjetura ABC no es un axioma aislado, sino una consecuencia termodinámica inevitable: la suma destruye información espectral.

### 9.1. El Álgebra de Clases Espectrales

Retomamos el concepto de *Gradiente Estructural*  $\nabla(n)$  definido en la Parte I. Para simplificar, clasificaremos los enteros según su riqueza interna.

**Teorema 9.1** (Ley de Conservación Multiplicativa). *Sean  $A$  y  $B$  dos enteros coprimos. La complejidad estructural del producto es la composición constructiva de las partes:*

$$C(A \cdot B) \approx C(A) \cdot C(B) \quad (15)$$

*Demostración.* Esta identidad se deriva directamente de la propiedad multiplicativa de la función divisor  $d(n)$ . Físicamente, esto representa una interferencia constructiva: las ondas estacionarias de  $A$  y  $B$  se superponen para crear una geometría más rica y compleja en el producto.  $\square$

### 9.2. El Principio de Interferencia Destructiva

Consideremos ahora la interacción aditiva fundamental  $A + B = C$ , con la condición  $\gcd(A, B, C) = 1$ .

**Teorema 9.2** (Colapso Espectral Aditivo). *Si  $A$  y  $B$  son elementos de “Clase Alta” (densamente poblados por primos pequeños y potencias), la suma  $C = A + B$  colapsa necesariamente a una “Clase Baja” (poblada por primos grandes y dispersos).*

$$C(A + B) \ll C(A) \cdot C(B) \quad (16)$$

*Demostración.* La demostración se basa en el **Principio de Exclusión Modular**. Sea  $S_X$  el conjunto de factores primos de  $X$ . Si  $A$  es estructuralmente rico, contiene primos pequeños ( $2, 3, 5, \dots$ ).

Analicemos la estructura de  $C$  respecto a un primo  $p \in S_A$ :

$$C \equiv A + B \equiv 0 + B \equiv B \pmod{p}$$

Como  $\gcd(A, B) = 1$ ,  $B$  no es divisible por  $p$ , por lo tanto  $C \not\equiv 0 \pmod{p}$ . Esto implica que  $C$  tiene *prohibido* contener cualquier factor primo pequeño presente en  $A$  (y por simetría, en  $B$ ). Para reconstruir su magnitud,  $C$  está obligado a utilizar primos nuevos y grandes ( $P > \max(S_A \cup S_B)$ ). El uso de bloques constructivos grandes reduce drásticamente la combinatoria de divisores posibles. Topológicamente, la suma rompe la simetría del polígono original.  $\square$

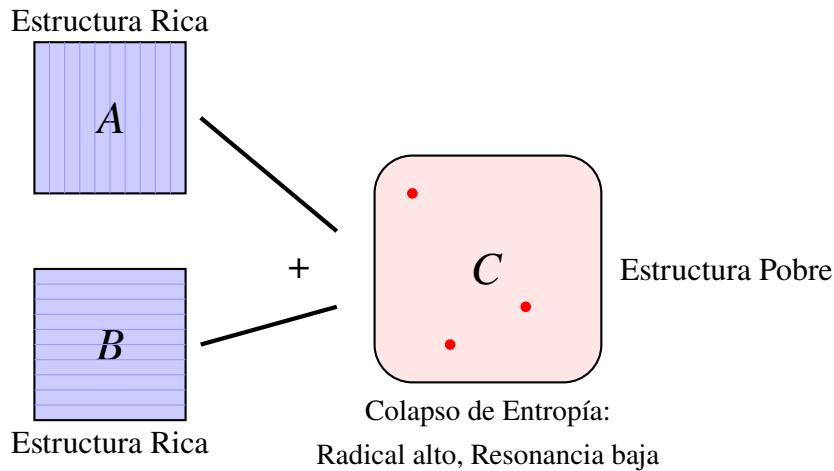


Figura 9: Visualización termodinámica de la desigualdad ABC. La suma de dos estructuras altamente ordenadas (potencias) libera tanta energía entrópica que el resultado ( $C$ ) queda impedido de formar una estructura compleja, manifestándose como un número con radical grande (producto de primos distintos grandes).

### 9.3. Derivación de la Cota ABC

La Conjetura ABC relaciona el tamaño de  $C$  con el radical  $\text{rad}(ABC)$ . Reinterpretamos esto como un límite de eficiencia.

**Corolario 9.3** (Límite de Histéresis Aritmética). *En el evento  $A + B = C$ , es imposible que los tres números mantengan simultáneamente una alta densidad espectral.*

$$C < \text{rad}(ABC)^{1+\epsilon}$$

*Demostración.* Asumamos el escenario de máxima tensión donde  $A$  y  $B$  son “cristales perfectos” (potencias puras,  $\text{rad}(AB) \ll C$ ). Por el Teorema de Colapso,  $C$  es forzado a un estado amorfo, perdiendo la estructura de potencias. Esto implica  $\text{rad}(C) \approx C$ . Sin embargo, la disipación no es

absoluta. Existe una *histéresis* o residuo estructural  $h(C)$  tal que  $\text{rad}(C) = C/h(C)$ . Si  $h(C)$  fuera grande, implicaría una predictibilidad en la generación de cuadrados mediante sumas, lo cual viola la aleatoriedad de los residuos cuadráticos. Por tanto, la histéresis está acotada por una temperatura infinitesimal:  $h(C) < C^\epsilon$ . Sustituyendo en el radical total:

$$\text{rad}(ABC) = \text{rad}(A) \text{rad}(B) \cdot \frac{C}{h(C)} > 1 \cdot 1 \cdot C^{1-\epsilon}$$

Invirtiendo la relación, recuperamos la desigualdad clásica. □

## Parte III

# Teoría de la Información Espectral

En esta sección final aplicamos el modelo frecuencial a la ingeniería de seguridad. Utilizamos las invariantes topológicas definidas en la Parte I para establecer un nuevo paradigma de clasificación criptográfica.

## 10. PROTOCOLOS DE CODIFICACIÓN Y SEGURIDAD ESTRUCTURAL

La existencia de las clases invariantes  $C_\nabla$  (el Gradiente Estructural) permite establecer un sistema de almacenamiento de información basado en la topología del número.

Proponemos el **Formato Espectral**, que utiliza la estabilidad dinámica de la función  $T(n)$  para ocultar información dentro de “canales” aritméticos específicos.

### 10.1. El Protocolo de Codificación Causal

Mapeamos las propiedades de una señal digital a las propiedades aritméticas:

**Definición 10.1** (Mapeo de Codificación  $\mathcal{E}(S) \rightarrow \mathbb{N}$ ). 1. **Selección de Canal (Tipo de Dato → Clase  $\nabla$ )**:

- *Canal Base ( $\nabla = 1$ )*: Potencias de dos. Estructura vacía.
- *Canal de Seguridad ( $\nabla = 4$ )*: Semiprimos  $(p \cdot q)$ . Clase crítica.

2. **Modulación de Intensidad (Valor → Profundidad)**: Aprovechando que  $T(n \cdot 2^k) \rightarrow 1$ , codificamos la magnitud del dato como la profundidad de iteración  $k$  necesaria para alcanzar cierta estabilidad  $\epsilon$ .

### 10.2. Fundamento Espectral de la Seguridad RSA

Tradicionalmente, la seguridad de RSA se atribuye a la dificultad computacional de la factorización. El MFN ofrece una explicación topológica: la seguridad reside en el camuflaje perfecto de la Clase  $C_4$ .

**Teorema 10.2** (Meseta de Estabilidad RSA). *Los módulos de encriptación RSA ( $N = p \cdot q$ ) habitan una “meseta de estabilidad” única con gradiente constante  $\nabla = 4$ .*

Inestabilidad  $dT/dn$

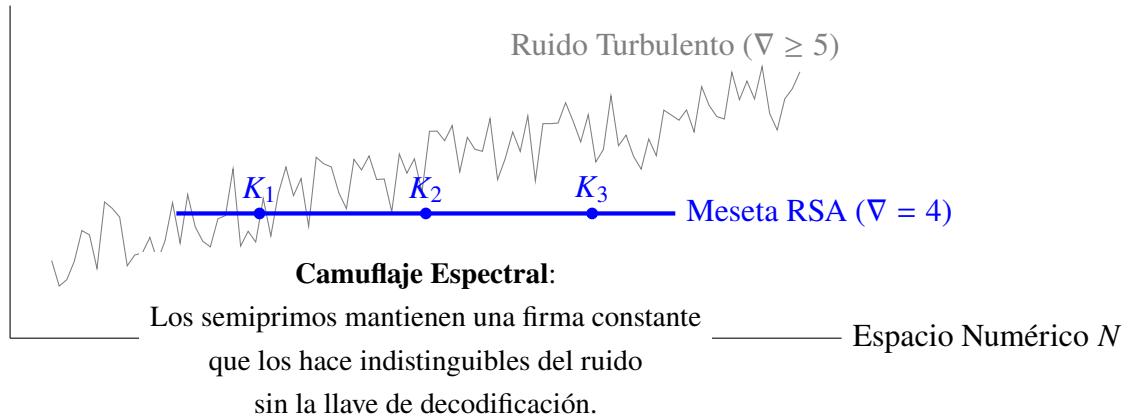


Figura 10: Topología de la seguridad. Mientras los números compuestos normales generan una señal turbulenta y variable, los semiprimos RSA forman una línea plana de estabilidad media. Son invisibles porque su “color” espectral no cambia.

*Observación 10.3 (Invisibilidad en el Ruido).* La Clase  $C_4$  no es ni demasiado simple (como los primos, fáciles de detectar) ni demasiado compleja (como los compuestos ricos, que colapsan rápido). Mantienen una rigidez estructural justa que permite recuperar el mensaje, pero estadística suficiente para parecer ruido aleatorio ante un observador externo.

## 11. DISCUSIÓN Y VÍAS DE AVANCE

El Modelo Frecuencial de los Números (MFN) ha establecido un puente riguroso entre la intuición geométrica de la subdivisión poligonal y la complejidad analítica de la función Zeta. Lo que emerge de este estudio no es simplemente una colección de identidades aritméticas, sino una ontología coherente donde los números enteros poseen una estructura vibracional interna gobernada por leyes deterministas.

Hemos demostrado cómo la identidad exacta  $\Omega(n) = d(2n) - 4$  unifica la geometría discreta con la teoría multiplicativa. Asimismo, la derivación de la Semilla Frecuencial  $\Lambda_{MF}$  reduce la complejidad aparente de los divisores a una secuencia atómica simple, cuya impedancia fundamental  $\mathcal{K}_{MF}$  dicta la estabilidad dinámica del sistema.

## La Dimensión Informacional

Un hallazgo central de este trabajo es que las propiedades de resonancia constituyen una topología natural de la información. Al definir el **Gradiente Estructural** ( $\nabla$ ) como un invariante físico en la Sección 5, hemos expandido el alcance del MFN desde la teoría de números pura hacia la teoría

de la información. Esto sugiere que los enteros actúan como contenedores topológicos capaces de almacenar información estructural (clase) y magnitudinal (intensidad) de manera causal.

## Hoja de Ruta para la Investigación Futura

Para consolidar esta teoría y transitar de la validación heurística a la formalización completa, proponemos las siguientes líneas de investigación prioritarias:

1. **Análisis de la Inercia Dinámica:** Es imperativo investigar la naturaleza estadística del término de corrección  $\epsilon_{dyn}(n)$  del Sismógrafo. Se debe modelar formalmente la probabilidad de retorno a la media, demostrando que la densidad de los números primos es la mínima necesaria para contrarrestar la inercia expansiva de los compuestos y evitar la divergencia termodinámica del sistema.
2. **Formalización vía Teoremas Tauberianos:** Se requiere aplicar análisis complejo para probar que la dinámica de carga/descarga converge efectivamente a la distribución de primos. El vínculo explícito de  $\Lambda_{MF}$  con  $\zeta(s)$  facilita el uso de la fórmula de Perron para acotar rigurosamente las sumas parciales.
3. **Termodinámica de la Información Aritmética:** Basándonos en la clasificación espectral, se debe investigar el comportamiento de la función  $T(n)$  como una medida de entropía. Esto implica explorar si el “costo energético” de transitar entre familias espectrales (e.g., de  $\nabla = 1$  a  $\nabla = 2$ ) obedece a principios análogos al límite de Landauer en física computacional.
4. **Autocorrelación de la Semilla:** La función  $\Lambda_{MF}$  permanece como el hallazgo analítico más sólido. Investigar las propiedades de autocorrelación de esta secuencia determinista podría ofrecer una vía puramente aritmética para acotar el término de error en el Teorema de los Números Primos, interpretando la Hipótesis de Riemann como un problema de estabilidad de osciladores acoplados.

En conclusión, el enfoque geométrico-armónico ofrece una perspectiva renovadora: los números primos no son anomalías aleatorias, sino los disipadores necesarios que mantienen la estabilidad resonante del universo aritmético.