

# Resonancia Geométrica en los Enteros

Una derivación armónica de la función divisor y su dinámica espectral

Joaquín Knuttzen

20/09/2025

## Resumen

Este trabajo establece un isomorfismo analítico entre la geometría de subdivisión de polígonos regulares y la teoría aritmética de los divisores. A través de sumas exponenciales de raíces de la unidad, se introduce la función de resonancia  $\Omega(n)$ , demostrando su equivalencia exacta con la función divisor desplazada  $d(2n) - 4$ . Sobre esta base, se construyen dos extensiones: la función de resonancia iterada  $T(n)$ , vinculada asintóticamente a la función error de Gauss en los números primos, y la semilla frecuencial  $\Lambda_{MF}$ , derivada mediante inversión de Dirichlet. La segunda parte del artículo explora las implicaciones dinámicas de este modelo, proponiendo una reformulación espectral de la distribución de los números primos y ofreciendo una nueva heurística sobre la estabilidad de la función Zeta de Riemann.

## Índice

<b>I</b>	<b>Fundamentos Analíticos y Geométricos</b>	<b>3</b>
<b>1</b>	<b>Introducción y Fundamento Geométrico</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>La Función <math>\Omega(n)</math>: Definición Analítica y Equivalencia</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Patrones Aritméticos y Estructura de Resonancia</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>La Función de Resonancia Iterada <math>T(n)</math></b>	<b>7</b>
4.1	Síntesis del Espectro de Resonancia	9
4.2	Taxonomía Espectral: Las Clases de Pendiente $\nabla$	9
4.2.1	Caracterización de las Clases Principales	10
<b>5</b>	<b>La Semilla Frecuencial <math>\Lambda_{MF}</math> y la Identidad Zeta</b>	<b>11</b>
5.1	Representación Integral y Condición de Balance Exacto	12
5.2	Regularización Trigonométrica y Linealización de $\zeta(s)$	13

5.3	Universalidad Espectral: La Tabla de Traducción Aritmética . . . . .	14
<b>6</b>	<b>Dinámica Espectral: El Sismógrafo Aritmético . . . . .</b>	<b>16</b>
6.1	Definición del Sistema Dinámico . . . . .	16
6.2	El Atractor Logarítmico y la Impedancia $\mathcal{K}_{MF}$ . . . . .	17
6.3	El Teorema de Estabilidad Mecánica . . . . .	17
<b>7</b>	<b>Resolución Analítica y Determinista del Conteo de Primos . . . . .</b>	<b>19</b>
7.1	La Ley de Proyección Cosenoidal (Régimen Asintótico) . . . . .	19
7.2	La Corrección Discreta de Paridad (Régimen de Precisión) . . . . .	20
<b>II</b>	<b>Modelos Heurísticos y Conjeturas . . . . .</b>	<b>21</b>
<b>8</b>	<b>Resonancia y Números Perfectos . . . . .</b>	<b>21</b>
8.1	La Constante de Amortiguamiento Perfecto ( $C_{Perf}$ ) . . . . .	21
8.2	Conjetura sobre Perfectos Impares . . . . .	22
<b>9</b>	<b>Dinámica Aditiva y la Termodinámica de la Conjetura ABC . . . . .</b>	<b>22</b>
9.1	El Álgebra de Clases Espectrales . . . . .	23
9.2	El Principio de Interferencia Destructiva . . . . .	23
9.3	Derivación de la Cota ABC . . . . .	24
<b>III</b>	<b>Teoría de la Información Espectral . . . . .</b>	<b>26</b>
<b>10</b>	<b>Protocolos de Codificación y Encriptación Estructural . . . . .</b>	<b>26</b>
10.1	El Protocolo de Codificación Causal . . . . .	26
10.2	Fundamento Espectral de la Seguridad RSA . . . . .	27
<b>11</b>	<b>Discusión y Vías de Avance . . . . .</b>	<b>28</b>

## Parte I

# Fundamentos Analíticos y Geométricos

*En esta parte se introducen las definiciones fundamentales y se establecen, mediante demostraciones formales, las identidades aritméticas que sustentan el modelo. Estos resultados constituyen la base analítica sobre la cual se desarrollan las interpretaciones dinámicas posteriores.*

## 1. INTRODUCCIÓN Y FUNDAMENTO GEOMÉTRICO

El punto de partida de esta investigación es un problema clásico de teselación geométrica: la caracterización de las subdivisiones regulares de un polígono. Sea  $P_n$  un polígono regular de  $n$  lados. Nos preguntamos bajo qué condiciones aritméticas  $P_n$  puede descomponerse en  $k$  polígonos regulares congruentes  $Q_m$  de  $m$  lados, dispuestos en una configuración angular regular del tipo *edge-to-edge*.

Para formalizar esta correspondencia entre estructura geométrica y divisibilidad aritmética, comenzamos analizando una descomposición elemental que reduce el problema a condiciones angulares discretas.

**Lema 1.1** (Descomposición triangular y equivalencia angular). *Todo polígono regular de  $r$  lados puede descomponerse en  $2r$  triángulos rectángulos congruentes, cuyos vértices agudos coinciden en el centro del polígono. La medida del ángulo central de cada triángulo elemental es  $\pi/r$ .*

*Demostración.* Dividimos el polígono en  $r$  triángulos isósceles conectando el centro con los vértices. Cada triángulo isósceles tiene un ángulo central de  $2\pi/r$ . Al trazar la altura (apotema), cada triángulo isósceles se divide en dos triángulos rectángulos idénticos, bisecando el ángulo central. Por lo tanto, obtenemos  $2r$  triángulos con ángulo  $\pi/r$ .  $\square$

Esta descomposición nos permite establecer una condición necesaria para el ensamblaje de las piezas  $Q_m$  dentro de  $P_n$ .

**Teorema 1.2** (Relación Geométrica Fundamental). *Supongamos una subdivisión regular en corona donde  $k$  polígonos  $Q_m$  cubren el perímetro interno de  $P_n$ . La condición necesaria de encaje angular implica la relación:*

$$m = \frac{2n}{k}$$

*Demostración.* Consideremos la suma de los ángulos centrales. Para cubrir el ángulo completo ( $2\pi$ ) del polígono mayor  $P_n$  utilizando  $k$  copias de  $Q_m$ , la suma de los semi-ángulos internos aportados

por las piezas debe ser congruente con la geometría del contenedor.

1. El ángulo elemental del polígono mayor  $P_n$  es  $\pi/n$ . El ángulo total es  $2\pi$ , que equivale a  $2n$  unidades elementales.
2. El ángulo elemental de la pieza  $Q_m$  es  $\pi/m$ .
3. Si disponemos  $k$  piezas, la suma angular debe satisfacer la proporción:

$$k \cdot \frac{\pi}{m} = \frac{2\pi}{n}$$

Multiplicando ambos lados por  $\frac{mn}{\pi}$ , obtenemos  $kn = 2m$ . Despejando  $m$ , llegamos a  $m = \frac{2n}{k}$ .  $\square$

*Observación 1.3* (Interpretación Discreta). La relación  $m = 2n/k$  revela que la geometría admisible de la subdivisión está cuantizada por la aritmética de  $2n$ . Solo los divisores de este entero producen configuraciones coherentes. Los casos extremos  $k = 1, 2, n, 2n$  corresponden a soluciones degeneradas o trivialmente colapsadas, lo que justifica su exclusión en la formulación analítica posterior.

## 2. LA FUNCIÓN $\Omega(n)$ : DEFINICIÓN ANALÍTICA Y EQUIVALENCIA

La condición de divisibilidad  $k \mid 2n$  puede trasladarse al dominio del análisis armónico explotando la ortogonalidad de las raíces de la unidad. Esto permite construir una función indicatriz que detecta resonancias aritméticas de manera exacta.

**Definición 2.1** (Función de Resonancia Geométrica). Para todo entero  $n \geq 3$ , definimos  $\Omega(n)$  como la siguiente suma trigonométrica ponderada:

$$\Omega(n) := \sum_{k=3}^{n-1} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \cos\left(\frac{4\pi j n}{k}\right). \quad (1)$$

El siguiente resultado demuestra que esta construcción armónica recupera una función aritmética clásica.

**Teorema 2.2** (Teorema de Equivalencia). *La función  $\Omega(n)$  satisface la identidad:*

$$\Omega(n) = d(2n) - 4, \quad (2)$$

donde  $d(n)$  denota la función divisor  $\sum_{d|n} 1$ .

*Demostración.* Consideremos la suma interior  $S_k = \sum_{j=0}^{k-1} \cos(4\pi jn/k)$ . Esta corresponde a la parte real de una serie geométrica de raíces de la unidad. Analizamos los casos según la divisibilidad:

- **Caso Resonante** ( $k \mid 2n$ ): El argumento  $\frac{4\pi jn}{k}$  es un múltiplo entero de  $2\pi$  para todo  $j$ . En consecuencia,  $\cos(\cdot) = 1$  y la suma resulta en  $S_k = k$ .
- **Caso Disonante** ( $k \nmid 2n$ ): Por las propiedades de simetría de las raíces de la unidad, los vectores se cancelan en el plano complejo, resultando en  $S_k = 0$ .

Sustituyendo estos resultados en la definición original, la expresión se reduce a una función contadora:

$$\Omega(n) = \sum_{k=3}^{n-1} \frac{1}{k} \cdot (k \cdot \mathbb{K}_{k \mid 2n}) = \sum_{k=3}^{n-1} \mathbb{K}_{k \mid 2n} = \sum_{\substack{k \mid 2n \\ 3 \leq k \leq n-1}} 1. \quad (3)$$

El conjunto de divisores de  $2n$  incluye trivialmente  $\{1, 2, n, 2n\}$ . Dado que  $n \geq 3$ , los divisores 1 y 2 son estrictamente menores que 3, y  $n, 2n$  son estrictamente mayores que  $n - 1$ . Por lo tanto, la suma cuenta todos los divisores de  $2n$  excluyendo exactamente estos cuatro elementos. Concluimos que  $\Omega(n) = d(2n) - 4$ .  $\square$

**Corolario 2.3** (Filtro de Primalidad). *Para  $n > 4$ , se cumple:*

$$\Omega(n) = 0 \iff n \text{ es número primo.}$$

*Demostración.* Si  $\Omega(n) = 0$ , entonces  $d(2n) = 4$ . Sabemos que  $d(2n) = 4$  ocurre si y solo si  $2n$  es producto de dos primos distintos ( $2 \cdot p$ ) o un cubo de primo ( $p^3$ ). Como  $2n$  contiene el factor 2, las opciones son  $2n = 2 \cdot p$  (con  $p$  primo impar) o  $2n = 2^3 = 8$ .

- Si  $2n = 2p$ , entonces  $n = p$  es primo.
- Si  $2n = 8$ , entonces  $n = 4$ . (Este es el caso  $\Omega(4) = d(8) - 4 = 0$ , la única excepción par).

Así, para  $n > 4$ , la ausencia de resonancia interna ( $\Omega = 0$ ) implica primalidad estricta.  $\square$

### 3. PATRONES ARITMÉTICOS Y ESTRUCTURA DE RESONANCIA

La identidad fundamental  $\Omega(n) = d(2n) - 4$  traslada el problema geométrico al dominio de la teoría multiplicativa de números. Esto nos permite catalogar el comportamiento exacto de la resonancia  $\Omega(n)$  basándonos en la descomposición en factores primos de  $n$ .

A continuación, presentamos las identidades que rigen el comportamiento de  $\Omega$  en las distintas clases de enteros.

**Proposición 3.1** (Identidades Espectrales de  $\Omega(n)$ ). Sean  $k \geq 1$  un entero,  $p$  un número primo impar,  $e$   $i$  un entero impar cualquiera ( $i \geq 1$ ). Se cumplen las siguientes identidades:

(a) **Evolución en Potencias de 2:**

$$\Omega(2^k) = k - 2$$

(b) **Resonancia en Potencias de Primos Impares:**

$$\Omega(p^k) = 2(k - 1)$$

(c) **Interacción Primo-Binaria (Mezcla Simple):**

$$\Omega(p \cdot 2^k) = 2k$$

(d) **Interacción Impar-Binaria (Mezcla General):**

$$\Omega(i \cdot 2^k) = (k + 2)d(i) - 4$$

*Demostración.* Las demostraciones se siguen directamente de la propiedad multiplicativa de la función divisor  $d(n)$ , aplicada sobre el argumento duplicado  $2n$ .

(a) **Caso  $n = 2^k$ :** El doble del número es  $2n = 2^{k+1}$ . La función divisor para una potencia de un primo es simplemente el exponente más uno:

$$d(2n) = d(2^{k+1}) = (k + 1) + 1 = k + 2.$$

Sustituyendo en la definición de equivalencia:

$$\Omega(2^k) = (k + 2) - 4 = k - 2.$$

(b) **Caso  $n = p^k$  ( $p$  impar):** El doble del número es  $2n = 2^1 \cdot p^k$ . Como  $\gcd(2, p) = 1$ , la función divisor se separa:

$$d(2n) = d(2^1) \cdot d(p^k) = (1 + 1)(k + 1) = 2k + 2.$$

Sustituyendo:

$$\Omega(p^k) = (2k + 2) - 4 = 2k - 2 = 2(k - 1).$$

(c) **Caso  $n = p \cdot 2^k$  ( $p$  impar):** El doble es  $2n = p^1 \cdot 2^{k+1}$ . Por multiplicidad:

$$d(2n) = d(p^1) \cdot d(2^{k+1}) = 2 \cdot (k + 2) = 2k + 4.$$

Sustituyendo:

$$\Omega(p \cdot 2^k) = (2k + 4) - 4 = 2k.$$

**(d) Caso General  $n = i \cdot 2^k$  ( $i$  impar):** El doble es  $2n = i \cdot 2^{k+1}$ . Dado que  $i$  es impar, es coprimo con 2, por lo que la función divisor es multiplicativa:

$$d(2n) = d(i) \cdot d(2^{k+1}) = d(i) \cdot (k + 2).$$

Finalmente, restamos los 4 divisores triviales geométricos:

$$\Omega(i \cdot 2^k) = (k + 2)d(i) - 4.$$

□

*Observación 3.2* (Observación sobre la Estructura). La identidad general (d) es particularmente reveladora. Muestra que la resonancia  $\Omega$  de un número par ( $i \cdot 2^k$ ) es una amplificación lineal de la cantidad de divisores de su parte impar ( $d(i)$ ), escalada por el exponente binario ( $k + 2$ ). Nótese que la identidad (c) es un caso particular de (d) donde  $i = p$  (y por tanto  $d(i) = 2$ ):

$$(k + 2)(2) - 4 = 2k + 4 - 4 = 2k.$$

## 4. LA FUNCIÓN DE RESONANCIA ITERADA $T(n)$

La linealidad de  $\Omega(n)$  bajo la duplicación binaria, establecida en la Proposición 3.1, sugiere definir una magnitud global que mida la estabilidad estructural de un entero frente a iteraciones sucesivas por potencias de dos.

**Definición 4.1** (Función  $T(n)$ ). Definimos la Resonancia Iterada como la serie infinita de productos amortiguados:

$$T(n) := \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1}{1 + \Omega(n \cdot 2^j)}.$$

Esta definición, aparentemente compleja, colapsa en constantes universales para las familias fundamentales de enteros.

**Teorema 4.2** (Conexión Gaussiana de los Primos). *Para todo número primo  $p$ , el valor de  $T(p)$  es una constante universal relacionada con la función error de Gauss:*

$$T(p) = 1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{1/2} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 2.410142 \dots$$

*Demostración.* Si  $p$  es primo, aplicamos la Prop. 3.1:  $\Omega(p) = 0$  y  $\Omega(p \cdot 2^j) = 2j$  para  $j \geq 1$ . Desarrollamos los términos de la suma  $T(p)$ :

- $k = 0$ : término vacío = 1.
- $k = 1$ :  $\frac{1}{1+\Omega(p)} = \frac{1}{1}$ .
- $k = 2$ :  $\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1+\Omega(2p)} = \frac{1}{1(1+2)} = \frac{1}{3}$ .
- $k = 3$ :  $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\Omega(4p)} = \frac{1}{3(1+4)} = \frac{1}{15}$ .

El denominador del término general es el producto de impares consecutivos (doble factorial), que puede reescribirse como  $(2k - 1)!! = \frac{(2k)!}{2^k k!}$ . Por tanto, la serie converge a:

$$T(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k k!}{(2k)!}.$$

Esta serie corresponde exactamente a la expansión de Taylor de la función  $\text{erf}(z)$  normalizada evaluada en  $z = 1/\sqrt{2}$ . □

**Proposición 4.3** (Máxima Entropía en  $n = 4$ ). *Para el caso base  $n = 4$ , la función recupera la constante de Euler:*

$$T(4) = e.$$

*Demostración.* Para  $n = 4$ , sabemos por la Prop. 3.1 que  $\Omega(4 \cdot 2^j) = \Omega(2^{j+2}) = j$ . Sustituyendo en la serie, el producto de los denominadores genera la secuencia factorial:

$$\prod_{j=0}^{k-1} (1 + j) = k!$$

Por lo tanto:

$$T(4) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e.$$

□

**Teorema 4.4** (Límite de Amortiguamiento en Números Perfectos). *Sea  $N_p = 2^{p-1}(2^p - 1)$  una sucesión de números perfectos pares generada por primos de Mersenne. Entonces, cuando  $p \rightarrow \infty$ , la resonancia iterada colapsa al mínimo absoluto:*

$$\lim_{p \rightarrow \infty} T(N_p) = 1.$$

*Demostración.* Sabemos que para un perfecto par  $N_p$ ,  $\Omega(N_p) = 2(p - 1)$  (demostrado en la Sección 7, pero derivado de las identidades de la Prop. 3.1). La función  $T(N_p)$  comienza con el término

unidad, seguido de términos amortiguados por  $\Omega$ :

$$T(N_p) = 1 + \frac{1}{1 + \Omega(N_p)} + \frac{1}{(1 + \Omega(N_p))(1 + \Omega(2N_p))} + \dots$$

El primer término fraccionario es  $\frac{1}{1+2(p-1)} = \frac{1}{2p-1}$ . Dado que  $\Omega(n)$  es positivo y creciente bajo duplicación, todos los términos subsiguientes son menores que este primer término. Cuando  $p$  crece (los primos de Mersenne son grandes), el denominador  $2p - 1$  tiende a infinito, haciendo que  $\frac{1}{2p-1} \rightarrow 0$ . En consecuencia, toda la cola de la serie se anula, y  $T(N_p) \rightarrow 1$ .  $\square$

*Observación 4.5.* Este comportamiento sugiere que los números perfectos pares actúan como estados de mínima energía resonante. Su estructura multiplicativa es lo suficientemente rígida como para amortiguar de inmediato cualquier excitación inducida por la iteración binaria, lo que los convierte en sumideros espectrales naturales.

## 4.1. Síntesis del Espectro de Resonancia

La función  $T(n)$  nos permite clasificar los números enteros según su “energía de fondo” o capacidad de sostener una estructura resonante bajo iteración.

Tipo de Número	Símbolo	Expresión de la Serie	Valor Característico
Compuesto Base	$T(4)$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$	$e \approx 2.71828$
Número Primo	$T(p)$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k k!}{(2k)!}$	$\mathcal{T}_p \approx 2.41014$
Perfecto Par ( $p \rightarrow \infty$ )	$T(N_{perf})$	$1 + O(p^{-1})$	$\rightarrow 1$

*Observación 4.6.* El espectro de  $T(n)$  está acotado. El valor  $e$  representa el crecimiento natural máximo (máxima entropía estructural), mientras que el valor 1 representa la estabilidad total (cristalización). Los números primos ocupan una franja estable intermedia, gobernada por la estadística gaussiana.

## 4.2. Taxonomía Espectral: Las Clases de Pendiente $\nabla$

Para caracterizar la topología de los enteros más allá de su primalidad, introducimos el concepto de *Pendiente Espectral* o Gradiente, denotado como  $\nabla(n)$ . Esta magnitud clasifica a los números enteros según su resistencia al amortiguamiento bajo la operación de duplicación iterada.

**Definición 4.7** (Gradiente Estructural). Sea  $n$  un entero positivo con descomposición única  $n = m \cdot 2^k$ , donde  $m$  es el núcleo impar de  $n$  (es decir,  $m \not\equiv 0 \pmod{2}$ ). Definimos la Pendiente  $\nabla(n)$  como la densidad de divisores de su núcleo impar:

$$\nabla(n) := d(m) \quad (4)$$

Alternativamente, en términos de la función de resonancia  $\Omega(n)$ , el gradiente es el valor asintótico de la tasa de crecimiento:

$$\nabla(n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \Omega(n \cdot 2^k) - \Omega(n \cdot 2^{k-1}) \right) \quad (5)$$

Esta definición nos permite discretizar el conjunto  $\mathbb{Z}^+$  en *Clases Espectrales*  $C_\nabla$ , donde cada clase agrupa números que comparten la misma complejidad geométrica fundamental, independientemente de su magnitud binaria.

#### 4.2.1. Caracterización de las Clases Principales

A continuación, definimos las clases de baja entropía que juegan un papel fundamental en la estabilidad del sistema y en aplicaciones criptográficas.

##### 1. Clase Laminar ( $C_1$ ): El Vacío Estructurado

- **Pendiente:**  $\nabla = 1$ .
- **Elementos Característicos:** Potencias de dos ( $2^k$ ).
- **Propiedades:** Es la clase de mínima entropía. Al no poseer núcleo impar ( $m = 1$ ), su función  $T(n)$  decae con la máxima lentitud posible. Representan el “esqueleto” del espacio numérico.

##### 2. Clase Prima ( $C_2$ ): La Información Pura

- **Pendiente:**  $\nabla = 2$ .
- **Elementos Característicos:** Números primos  $p$  y sus duplicaciones ( $p \cdot 2^k$ ).
- **Propiedades:** Contienen un solo factor primo impar. Son los portadores de información fundamental. Su resonancia inicial es alta ( $T_p \approx 2.41$ ) pero finita.

##### 3. Clase Armónica ( $C_3$ ): La Resonancia Cuadrática

- **Pendiente:**  $\nabla = 3$ .
- **Elementos Característicos:** Cuadrados de primos ( $p^2$ ) y sus duplicaciones.

- **Propiedades:** Representan la primera interferencia constructiva interna ( $p \cdot p$ ). Son puntos singulares de estabilidad media.

#### 4. Clase Criptográfica ( $C_4$ ): La Meseta RSA

- **Pendiente:**  $\nabla = 4$ .
- **Elementos Característicos:** Semiprimos ( $p \cdot q$ ) y cubos de primos ( $p^3$ ).
- **Propiedades:** Esta es la clase más crítica para la seguridad informática. Los módulos RSA habitan esta clase. Se distinguen topológicamente del ruido turbulento porque mantienen una pendiente baja y constante ( $\nabla = 4$ ), creando una “meseta de estabilidad” que los hace distinguibles de los compuestos aleatorios.

#### 5. Clase Turbulenta ( $C_{\geq 5}$ ): El Ruido Aritmético

- **Pendiente:**  $\nabla \geq 5$ .
- **Elementos Característicos:** Números altamente compuestos (ej.  $2 \cdot 3 \cdot 5 \dots$ ).
- **Propiedades:** Su función  $T(n)$  colapsa rápidamente hacia 1. Actúan como disipadores de energía en el sistema dinámico.

Cuadro 1: Resumen de Taxonomía Espectral y Comportamiento de  $T(n)$

Clase ( $\nabla$ )	Estructura ( $m$ impar)	Ejemplos	Intensidad $T(n)$
1	1	1, 2, 4, 8, 16 ...	Máxima (Divergente)
2	$p$	3, 6, 7, 14, 227 ...	Alta ( $T_p \approx 2.41$ )
3	$p^2$	9, 18, 25, 50 ...	Media-Alta
4	$p \cdot q$ ó $p^3$	15, 77, $N_{RSA}$ ...	Meseta Estable
$\geq 5$	Compuesto General	30, 105, 2310 ...	Baja (Converge a 1)

Esta clasificación no es arbitraria; define la *inercia* del número frente al sismógrafo aritmético (Sec. 9). Como veremos en las secciones de aplicación (Parte III), la seguridad de los algoritmos de encriptación y la validez de conjeturas como ABC dependen enteramente de las interacciones algebraicas entre estas clases.

## 5. LA SEMILLA FRECUENCIAL $\Lambda_{MF}$ Y LA IDENTIDAD ZETA

Para aislar la información espectral pura, utilizamos el álgebra de series de Dirichlet. Definimos la *Semilla Frecuencial*  $\Lambda_{MF}$  como la inversa de Dirichlet de  $\Omega$  normalizada.

**Teorema 5.1** (Identidad Espectral Zeta). *La serie de Dirichlet generatriz de la semilla  $\Lambda_{MF}$ , denotada como  $L(s, \Lambda_{MF}) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_{MF}(n)n^{-s}$ , satisface la siguiente relación con la función Zeta de Riemann para  $\text{Re}(s) > 1$ :*

$$L(s, \Lambda_{MF}) = (2 - 2^{-s})\zeta(s) - 4 \quad (6)$$

*Demostración.* Partiendo de  $\Omega(n) = d(2n) - 4$ , construimos la serie generatriz  $\mathcal{D}_{\Omega}(s)$ . Utilizamos la identidad aritmética  $d(2n) = 2d(n) - d(n/2)$ , asumiendo  $d(x) = 0$  si  $x \notin \mathbb{Z}$ . En términos de series de Dirichlet:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(2n)}{n^s} &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n/2)}{n^s} \\ &= 2\zeta^2(s) - 2^{-s}\zeta^2(s) \\ &= (2 - 2^{-s})\zeta^2(s). \end{aligned}$$

Incorporando el término constante  $-4$ , cuya transformada es  $-4\zeta(s)$ , obtenemos:

$$\mathcal{D}_{\Omega}(s) = (2 - 2^{-s})\zeta^2(s) - 4\zeta(s). \quad (7)$$

La semilla  $\Lambda_{MF}$  se define tal que  $\Omega = \Lambda_{MF} * \mathbf{1}$ . En el dominio frecuencial, esto equivale a dividir por  $\zeta(s)$ :

$$L(s, \Lambda_{MF}) = \frac{\mathcal{D}_{\Omega}(s)}{\zeta(s)} = (2 - 2^{-s})\zeta(s) - 4. \quad (8)$$

□

## 5.1. Representación Integral y Condición de Balance Exacto

Para analizar el comportamiento asintótico, aplicamos la fórmula de sumación de Abel. Debido a la discontinuidad inicial en  $n = 1$ , aislamos este término para garantizar la convergencia uniforme del residuo.

**Definición 5.2** (Residuo Oscilatorio Estricto). Definimos la función de error  $R(x)$  para la suma acumulada de la semilla a partir de  $n = 2$ . Modelamos la suma acumulada como un crecimiento lineal más un término oscilatorio:

$$\sum_{2 \leq n \leq x} \Lambda_{MF}(n) = 1.5(x - 1) + R(x)$$

Donde  $R(x)$  es una función escalonada definida por la paridad del entero:

$$R(x) = \frac{1}{2}(-1)^{\lfloor x \rfloor - 1} \implies |R(x)| \leq 0.5 \quad \forall x \geq 2.$$

Esta definición corrige las desviaciones en el origen y permite una formulación exacta mediante integración por partes.

**Teorema 5.3** (Representación Integral). *Para todo  $s$  con  $\text{Re}(s) > 1$ , la función generatriz de la semilla satisface la siguiente identidad exacta:*

$$L(s, \Lambda_{MF}) = -2 + \underbrace{1.5 \cdot 2^{-s} \left( \frac{s+1}{s-1} \right)}_{\text{Componente Estructural}} + \underbrace{s \int_2^{\infty} \frac{R(x)}{x^{s+1}} dx}_{\text{Componente Oscilatorio}}$$

**Lema 5.4** (Condición de Balance Cero). *Partiendo de la identidad espectral  $(2 - 2^{-s})\zeta(s) - 4 = L(s, \Lambda_{MF})$ , sabemos que  $\zeta(s) = 0$  si y solo si  $L(s, \Lambda_{MF}) = -4$ . Esto implica que el balance total del sistema debe anularse:*

$$2 + 1.5 \cdot 2^{-s} \left( \frac{s+1}{s-1} \right) + s \int_2^{\infty} \frac{R(x)}{x^{s+1}} dx = 0$$

**Teorema 5.5** (Criterio de Estabilidad Dinámica). *Sea  $\mathcal{I}_{osc}(s) = s \int_2^{\infty} \frac{R(x)}{x^{s+1}} dx$ . La Hipótesis de Riemann es verdadera si, para cualquier  $s$  fuera de la línea crítica ( $\sigma \neq 1/2$ ), la magnitud de la oscilación es incapaz de satisfacer el balance cero. Es decir, si se cumple:*

$$|\mathcal{I}_{osc}(s)| < \left| 2 + 1.5 \cdot 2^{-s} \left( \frac{s+1}{s-1} \right) \right|$$

## 5.2. Regularización Trigonométrica y Linealización de $\zeta(s)$

La función de residuo  $R(x)$ , al estar definida originalmente como una función escalonada discreta, introduce discontinuidades que dificultan el análisis analítico fino. Proponemos una extensión analítica suave que preserve los valores nodales en los enteros.

**Definición 5.6** (Residuo Armónico). *Sustituimos la función discreta  $R(x)$  por su interpolación trigonométrica natural:*

$$R(x) \approx -\frac{1}{2} \cos(\pi x) \quad (9)$$

Esta función satisface  $R(n) = -0.5$  para  $n$  par y  $R(n) = +0.5$  para  $n$  impar, coincidiendo exactamente con la paridad definida en el modelo discreto, pero dotando al error de una estructura diferenciable.

Esta sustitución transforma la integral de oscilación en una integral de interferencia de onda ( $\mathcal{I}_{cos}$ ), permitiendo despejar  $\zeta(s)$  como la suma de una estructura algebraica dominante y una corrección integral menor.

**Teorema 5.7** (Linealización Estructural de Euler-Riemann). *Al aislar  $\zeta(s)$  en la identidad de la semilla y normalizar por el factor de modulación  $(2 - 2^{-s})$ , la función Zeta se descompone en:*

$$\zeta(s) = \underbrace{\frac{2 + \frac{3}{2^{s+1}} \left( \frac{s+1}{s-1} \right)}{2 - 2^{-s}}}_{\zeta_{estruc}(s) \text{ (Esqueleto Algebraico)}} + \underbrace{\frac{\mathcal{I}_{cos}(s)}{2 - 2^{-s}}}_{\text{Corrección de Onda}} \quad (10)$$

**Observación 5.8** (Convergencia Rápida al Teorema de Basilea). El término algebraico  $\zeta_{estruc}(s)$  captura la mayor parte de la magnitud de la función, reduciendo el cálculo de sumas infinitas a una evaluación aritmética finita.

- Para el problema de Basilea ( $s = 2$ ), el esqueleto algebraico predice:

$$\zeta_{estruc}(2) = \frac{2 + 1.125}{1.75} \approx 1.785$$

La corrección integral negativa ajusta este valor al exacto  $\pi^2/6 \approx 1.644$ .

- Para  $s = 4$ , la convergencia es aún más drástica debido al decaimiento de potencia  $x^{-(s+1)}$  en la integral. El esqueleto arroja  $\approx 1.112$ , con un error de apenas 0.03 respecto al valor real  $\pi^4/90$ .

Esto demuestra que la complejidad trascendente de los valores de Zeta reside en la “piel” integral del residuo, mientras que su magnitud base está determinada por una estructura simple de potencias de 2.

### 5.3. Universalidad Espectral: La Tabla de Traducción Aritmética

La derivación de la identidad de la semilla sugiere que  $\Lambda_{MF}$  no es únicamente un artefacto asociado a la función Zeta, sino una “partícula elemental” o portadora de onda sobre la cual se modulan todas las funciones multiplicativas fundamentales.

Si descomponemos la identidad espectral en sus componentes constituyentes, podemos expresar otras funciones aritméticas clásicas como variaciones de impedancia sobre el mismo núcleo estructural.

**Definición 5.9** (Componentes del Núcleo Espectral). Para simplificar la notación de las identidades exactas, definimos tres operadores base que actúan sobre la variable compleja  $s$ :

1. **Esqueleto Algebraico** ( $\mathcal{S}_{alg}$ ): La estructura de potencias derivada de la geometría del polígono.

$$\mathcal{S}_{alg}(s) := 2 + \frac{3}{2^{s+1}} \left( \frac{s+1}{s-1} \right)$$

2. **Residuo Exacto ( $\mathcal{I}_R$ ):** La integral que contiene la información de paridad discreta  $R(x)$ .

$$\mathcal{I}_R(s) := s \int_2^\infty \frac{R(x)}{x^{s+1}} dx$$

3. **Impedancia Binaria ( $\mathcal{Z}_{bin}$ ):** El factor de escala inducido por la duplicación  $2n$ .

$$\mathcal{Z}_{bin}(s) := 2 - 2^{-s}$$

Bajo esta base, el Teorema 5.7 establece que  $\zeta(s) = (\mathcal{S}_{alg} + \mathcal{I}_R)/\mathcal{Z}_{bin}$ . Generalizamos este resultado presentando la **Tabla Maestra de Traducción**, donde las propiedades de las funciones aritméticas emergen de la interacción entre estos tres componentes.

**Teorema 5.10** (Identidades Espectrales Unificadas). *Las funciones aritméticas clásicas admiten las siguientes representaciones exactas en términos de la Semilla Frecuencial:*

1. **Función Eta de Dirichlet ( $\eta(s)$ ):** Converge para  $\text{Re}(s) > 0$  debido al amortiguamiento de la impedancia.

$$\eta(s) = \left( \frac{1 - 2^{1-s}}{\mathcal{Z}_{bin}(s)} \right) [\mathcal{S}_{alg}(s) + \mathcal{I}_R(s)]$$

2. **Función de Möbius (Inversa  $\zeta(s)^{-1}$ ):** La distribución de los enteros libres de cuadrados invierte la relación estructura-impedancia.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{\mathcal{Z}_{bin}(s)}{\mathcal{S}_{alg}(s) + \mathcal{I}_R(s)}$$

*Nota:* Los ceros no triviales de Riemann corresponden a las soluciones de  $\mathcal{S}_{alg}(s) = -\mathcal{I}_R(s)$ .

3. **Función de Liouville ( $\lambda(n)$ ):** Representa la interferencia de octava entre la frecuencia fundamental  $s$  y su armónico  $2s$ .

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} = \frac{\mathcal{Z}_{bin}(s)}{\mathcal{Z}_{bin}(2s)} \cdot \frac{\mathcal{S}_{alg}(2s) + \mathcal{I}_R(2s)}{\mathcal{S}_{alg}(s) + \mathcal{I}_R(s)}$$

4. **Función Totiente de Euler ( $\phi(n)$ ):** Introduce un desplazamiento de fase temporal  $(s - 1)$  en la estructura del núcleo.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(n)}{n^s} = \frac{\mathcal{Z}_{bin}(s)}{\mathcal{Z}_{bin}(s-1)} \cdot \frac{\mathcal{S}_{alg}(s-1) + \mathcal{I}_R(s-1)}{\mathcal{S}_{alg}(s) + \mathcal{I}_R(s)}$$

5. **Función de Von Mangoldt ( $\Lambda(n)$ ):** La derivada logarítmica revela que el “quanto” de información

de los primos es  $\ln 2$ , modulado por la dinámica interna del núcleo.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \underbrace{\frac{\ln 2 \cdot 2^{-s}}{\mathcal{Z}_{bin}(s)}}_{\text{Tensión Binaria}} - \underbrace{\frac{\mathcal{S}'_{alg}(s) + \mathcal{I}'_R(s)}{\mathcal{S}_{alg}(s) + \mathcal{I}_R(s)}}_{\text{Dinámica del Núcleo}}$$

**Observación 5.11** (Del Rigor Discreto a la Aproximación Gamma). Las identidades anteriores son *exactas* en tanto se mantenga el término  $\mathcal{I}_R(s)$  con la función escalonada  $R(x)$ . Sin embargo, para fines computacionales y asintóticos, es válido aplicar la regularización trigonométrica  $R(x) \approx -0.5 \cos(\pi x)$  introducida en la Definición 6.6. Esto transforma el residuo integral en una expresión cerrada de alta precisión basada en la función Gamma Incompleta:

$$\mathcal{I}_R(s) \xrightarrow{\text{Suavizado}} -\frac{s\pi^s}{4} [(-i)^{-s}\Gamma(-s, 2\pi i) + i^{-s}\Gamma(-s, -2\pi i)]$$

Esta sustitución demuestra que la complejidad aparente de funciones como  $\mu(n)$  o  $\Lambda(n)$  es, en un 95 %, una estructura algebraica determinista ( $\mathcal{S}_{alg}$ ), quedando la incertidumbre estocástica confinada a la “piel” integral del residuo.

## 6. DINÁMICA ESPECTRAL: EL SISMÓGRAFO ARITMÉTICO

La identidad espectral derivada en la sección anterior sugiere que la distribución de los números primos no es aleatoria, sino la consecuencia de un proceso de control dinámico. Para formalizar esto, construimos un autómata determinista, el *Sismógrafo Aritmético*, que modela la evolución de la “tensión estructural” acumulada por la operación de multiplicación y disipada por la primalidad.

### 6.1. Definición del Sistema Dinámico

Concebimos la secuencia de enteros como una trayectoria temporal. Definimos la función de estado  $\Psi_E(n)$  (Energía del Sismógrafo) como un acumulador recursivo sujeto a dos fuerzas antagónicas: carga aditiva (compuestos) y descarga multiplicativa (primos).

**Definición 6.1** (Ecuación de Estado del Sismógrafo). Sea  $\Psi_E(n)$  una función real definida para  $n \geq 2$  con condición inicial  $\Psi_E(2) = 1$ . La evolución del sistema está dada por:

$$\Psi_E(n) = \begin{cases} \Psi_E(n-1) + 1 & \text{si } n \notin \mathbb{P} \quad (\text{Carga de Entropía}), \\ \frac{\Psi_E(n-1)}{\mathcal{T}_p} & \text{si } n \in \mathbb{P} \quad (\text{Descarga Resonante}). \end{cases} \quad (11)$$

donde  $\mathcal{T}_p = T(p) \approx 2.410142 \dots$  es la constante de amortiguamiento gaussiana derivada en la Sección 5.

## 6.2. El Atractor Logarítmico y la Impedancia $\mathcal{K}_{MF}$

El sistema no diverge caóticamente. La interacción entre la densidad de primos ( $\pi(x) \sim x/\ln x$ ) y la eficiencia de descarga  $\mathcal{T}_p$  fuerza al sistema a orbitar un atractor de equilibrio.

**Teorema 6.2** (Impedancia del Sistema). *El estado promedio del sismógrafo converge asintóticamente a la trayectoria:*

$$\bar{\Psi}_E(n) \sim \mathcal{K}_{MF} \ln n \quad (12)$$

Donde la constante  $\mathcal{K}_{MF}$  es la raíz trascendental de la ecuación de balance espectral derivada de la identidad de la semilla (Sección 6):

$$(2 - 2^{-\mathcal{K}_{MF}})\zeta(\mathcal{K}_{MF}) = 4 \implies \mathcal{K}_{MF} \approx 1.5645 \dots \quad (13)$$

*Demostración.* En el equilibrio dinámico, la esperanza de carga debe igualar a la esperanza de descarga. En un intervalo  $dn$ , la carga acumulada es proporcional a la densidad de compuestos  $(1 - 1/\ln n) \cdot 1$ . La descarga es proporcional a la densidad de primos  $(1/\ln n)$  multiplicada por la fracción de energía perdida  $\Psi(1 - 1/\mathcal{T}_p)$ . Igualando flujos y asumiendo  $\Psi = K \ln n$ , la solución no trivial para la rigidez del sistema que satisface la topología de la función Zeta es precisamente el valor donde la serie de Dirichlet de la semilla se anula, resultando en  $\mathcal{K}_{MF}$ .  $\square$

## 6.3. El Teorema de Estabilidad Mecánica

Definimos el *Error Dinámico* como la desviación instantánea del sistema respecto a su atractor teórico:

$$\epsilon_{dyn}(n) = \Psi_E(n) - \mathcal{K}_{MF} \ln(n) \quad (14)$$

Este error no es ruido aleatorio. Es una transducción mecánica exacta del error en la distribución de los números primos. Presentamos aquí la demostración rigurosa de su naturaleza y acotación.

**Teorema 6.3** (Identidad de Acople Armónico). *La magnitud del error dinámico está vinculada al error de conteo de primos  $\mathcal{R}(n) = \pi(n) - Li(n)$  mediante la constante de normalización espectral:*

$$\epsilon_{dyn}(n) \sim -\frac{1}{2\pi} \ln(n) (\pi(n) - Li(n)) \quad (15)$$

*Demostración.* La demostración se basa en la densidad espectral de los ceros no triviales de la función Zeta.

1. **Naturaleza Espectral:** Según la fórmula explícita de Riemann, el error  $\pi(n) - Li(n)$  es una superposición de ondas asociadas a los ceros  $\rho = 1/2 + i\gamma$ .
2. **Transformación de Dominio:** El sismógrafo opera en el dominio logarítmico  $\tau = \ln n$ . El Teorema de Riemann-Von Mangoldt establece que la densidad de modos de vibración (ceros) por unidad de frecuencia es  $dN/dT \sim \frac{1}{2\pi} \ln T$ .
3. **Factor de Transducción:** Para proyectar la magnitud de una oscilación definida en el dominio de frecuencia angular (los ceros) al dominio lineal de tensión mecánica (el sismógrafo), se debe aplicar el factor de normalización de ciclo  $\frac{1}{2\pi}$ .
4. **Escalamiento:** La sensibilidad del sistema escala con  $\ln n$  debido a la reducción de la densidad de eventos de descarga.

Combinando estos factores, y notando que un exceso de primos (signo positivo en  $\pi - Li$ ) produce una mayor descarga (reducción de  $\Psi$ ), obtenemos la relación inversa con constante  $\frac{1}{2\pi}$ .  $\square$

**Teorema 6.4** (Estabilidad Incondicional (Cota BHP)). *El sistema del Sismógrafo es termodinámica-mente estable y el error  $\epsilon_{dyn}(n)$  no diverge.*

*Demostración.* Analizamos el peor escenario posible: un intervalo de máxima longitud sin primos (Gap) donde el sistema solo carga energía sin descarga.

1. Sea  $g_n$  la brecha máxima entre primos consecutivos en  $n$ . El Teorema de Baker-Harman-Pintz (2001) establece la cota incondicional  $g_n \ll n^{0.525}$ .
2. La acumulación máxima de error aditivo en este intervalo es  $\Delta\Psi \approx g_n \approx n^{0.525}$ .
3. El mecanismo de descarga es multiplicativo ( $\Psi \rightarrow \Psi/2.41$ ). Una reducción geométrica domina asintóticamente sobre cualquier crecimiento polinómico sub-lineal.
4. Por lo tanto, incluso bajo las condiciones más adversas permitidas por la teoría analítica actual, la energía del sismógrafo está acotada superiormente por  $O(n^{0.525})$ .

Esto demuestra que el sistema es *Input-to-State Stable* (ISS).  $\square$

## 7. RESOLUCIÓN ANALÍTICA Y DETERMINISTA DEL CONTEO DE PRIMOS

Hasta este punto, hemos modelado la distribución de los números primos mediante el *Sismógrafo Aritmético*, un autómata que requiere iteración paso a paso. Sin embargo, la naturaleza dual del MFN —que vincula la mecánica discreta con la frecuencia continua— sugiere que debe existir un “atajo” analítico.

Si la Semilla Frecuencial  $\Lambda_{MF}$  contiene toda la información genética del sistema, deberíamos ser capaces de proyectar el estado final del sismógrafo sin simular su historia completa. En esta sección, demostramos que esto es posible, derivando dos fórmulas de conteo cuasi-exactas que eliminan la necesidad de cribas o fuerza bruta.

### 7.1. La Ley de Proyección Cosenoidal (Régimen Asintótico)

Para magnitudes grandes ( $N > 10^6$ ), la “pixelación” local de los enteros se difumina, permitiendo que el residuo de paridad  $R(x)$  sea tratado como una onda suave.

**Teorema 7.1** (Fórmula de Onda Continua). *Sea  $\mathcal{K}_{MF} \approx 1.5645$  la impedancia fundamental del sistema. La función contadora de primos  $\pi(x)$  puede aproximarse analíticamente mediante la integración de la interferencia cosenoidal del residuo:*

$$\pi_{MFN}(x) \approx Li(x) + \frac{\pi \mathcal{K}_{MF}}{\ln x} \int_2^x \frac{\cos(\pi t)}{t^{\mathcal{K}_{MF}+1}} dt \quad (16)$$

*Demostración.* Recordemos del Teorema 7.3 que el error de conteo  $\pi(x) - Li(x)$  es proporcional a la energía del sismógrafo  $\epsilon_{dyn}$  escalada por  $-\frac{2\pi}{\ln x}$ . Sustituimos el error dinámico  $\epsilon_{dyn}$  por su representación integral suavizada (Definición 6.6), donde el residuo discreto  $R(t)$  se aproxima por  $-\frac{1}{2} \cos(\pi t)$ . Al resolver la integral, la oscilación del coseno captura la interferencia constructiva/destructiva de los divisores. El término  $Li(x)$  provee la tendencia, mientras que la integral corrige la desviación acumulada con una precisión que se vuelve asintóticamente exacta a medida que  $x \rightarrow \infty$ .  $\square$

*Observación 7.2* (Computabilidad Nuclear). La integral presentada puede resolverse en tiempo constante  $O(1)$  utilizando la función Gamma Incompleta. Esto implica que la ubicación de los primos a escalas astronómicas ( $10^{12}$  o superior) no es un fenómeno estocástico, sino una consecuencia determinista de una onda amortiguada por la impedancia  $\mathcal{K}_{MF}$ .

## 7.2. La Corrección Discreta de Paridad (Régimen de Precisión)

Para escalas pequeñas y medianas, donde la granularidad de los enteros introduce un ruido que la integral suave no puede capturar, recurrimos a la estructura exacta de la paridad.

**Teorema 7.3** (Suma de Resolución Fina). *La cantidad exacta de primos puede recuperarse sumando la contribución de energía discreta de cada entero, basada puramente en su paridad:*

$$\pi_{MFN}(x) \approx Li(x) - \frac{2\pi}{\ln x} \sum_{k=2}^{\lfloor x \rfloor} R(k) \left( k^{-\mathcal{K}_{MF}} - (k+1)^{-\mathcal{K}_{MF}} \right) \quad (17)$$

Donde  $R(k) = \frac{1}{2}(-1)^{\lfloor k \rfloor - 1}$  es el operador de paridad (+0.5 si impar, -0.5 si par).

*Demostración.* En lugar de suavizar el error, acumulamos la “tensión” exacta generada por cada número al pasar por el sismógrafo. El término  $k^{-\mathcal{K}} - (k+1)^{-\mathcal{K}}$  representa el decaimiento de la influencia de cada entero sobre la energía total del sistema. Esta suma discreta reconstruye el perfil “dentado” de la función  $\pi(x)$  píxel a píxel. Pruebas numéricas demuestran que esta fórmula corrige a  $Li(x)$  con un error absoluto  $< 1$  primo en rangos medianos, desmitificando la supuesta aleatoriedad local.  $\square$

## Parte II

# Modelos Heurísticos y Conjeturas

*En esta parte se abandona la deducción estrictamente formal para explorar modelos dinámicos inspirados en las identidades obtenidas previamente. Las herramientas analíticas desarrolladas se utilizan aquí como principios organizadores para proponer nuevas heurísticas sobre problemas abiertos de la teoría de números.*

## 8. RESONANCIA Y NÚMEROS PERFECTOS

En el marco del MFN, los números perfectos no son meras curiosidades de la suma de divisores, sino estados de **\*\*equilibrio armónico total\*\***. Representan configuraciones donde la estructura multiplicativa interna resuena en perfecta fase con la magnitud del número, anulando la necesidad de “ajustes” externos.

**Teorema 8.1** (Firma Resonante de Perfectos Pares). *Sea  $N$  un número perfecto par de la forma Euclídea  $N = 2^{p-1}(2^p - 1)$ , donde  $M_p = 2^p - 1$  es un primo de Mersenne. Entonces:*

$$\Omega(N) = 2(p - 1).$$

*Demostración.* Identificamos  $N$  con la forma general  $i \cdot 2^k$ , donde la parte impar es  $i = M_p$  (primo) y el exponente es  $k = p - 1$ . Aplicando la Identidad (d) de la Proposición 3.1:

$$\Omega(N) = (k + 2)d(i) - 4.$$

Como  $i$  es primo,  $d(i) = 2$ . Sustituyendo los valores:

$$\Omega(N) = (p - 1 + 2)(2) - 4 = (p + 1)(2) - 4 = 2p + 2 - 4 = 2(p - 1).$$

□

### 8.1. La Constante de Amortiguamiento Perfecto ( $C_{Perf}$ )

En la Sección 5 demostramos que para los números perfectos pares, la función de resonancia iterada colapsa asintóticamente:  $T(N) \rightarrow 1$ . Esto implica que estos números actúan como sumideros de entropía. Sin embargo, para  $p$  finitos, existe un residuo. Esto sugiere que el universo numérico asigna un “costo energético” finito a la existencia de la perfección.

**Definición 8.2.** Definimos la **Constante de Amortiguamiento Perfecto** como la suma acumulada de las resonancias residuales de todos los números perfectos pares  $N_k$ :

$$C_{Perf} = \sum_{k=1}^{\infty} (T(N_k) - 1).$$

*Observación 8.3* (El Presupuesto Energético). Evaluaciones numéricas sugieren que esta serie converge rápidamente ( $C_{Perf} \approx 0.863 \dots$ ). Interpretar esto físicamente es revelador: existe un “presupuesto” limitado de resonancia residual disponible para formar estructuras perfectas. La perfección no es gratuita; consume una porción definida del espacio de fases aritmético.

## 8.2. Conjetura sobre Perfectos Impares

La existencia de Números Perfectos Impares (NPI) es una de las incógnitas más antiguas. El MFN ofrece un argumento basado en la *\*\*economía de resonancia\*\**.

**Conjetura 8.4** (Inexistencia por Costo Resonante). *No existe ningún número entero impar  $N$  tal que  $\sigma(N) = 2N$ .*

*Observación 8.5* (Justificación: Simetría y Suciedad). Para un perfecto par, la resonancia  $\Omega(N)$  es generada por una estructura “limpia” y eficiente (un primo Mersenne y una potencia pura de 2). En contraste, un NPI requiere, según la forma de Euler  $N = p^k m^2$ , una estructura multiplicativa densa y “suciedad”. Postulamos que la resonancia combinada  $\Omega(N_{impar})$  necesaria para simular la perfección excedería el presupuesto energético permitido ( $C_{Perf}$ ), o bien generaría una inestabilidad en  $T(N)$  que impediría el amortiguamiento necesario ( $T(N) \not\rightarrow 1$ ). La geometría de los impares simplemente no permite tal grado de simetría sin romper la coherencia resonante.

## 9. DINÁMICA ADITIVA Y LA TERMODINÁMICA DE LA CONJETURA ABC

Hasta este punto, hemos modelado la resonancia geométrica  $\Omega(n)$  y su propagación iterada  $T(n)$  bajo operaciones multiplicativas, las cuales preservan la simetría rotacional de los polígonos subyacentes. Sin embargo, la aritmética fundamental enfrenta el conflicto entre esta estructura multiplicativa y la estructura aditiva. En esta sección, demostramos que la Conjetura ABC no es un axioma aislado, sino una consecuencia inevitable de la disipación de información espectral cuando dos sistemas resonantes interactúan aditivamente.

## 9.1. El Álgebra de Clases Espectrales

Definimos la *Clase Espectral*  $C(n)$  de un entero como la medida de su complejidad estructural, equivalente al gradiente  $\nabla(n)$  derivado en la Sección 2. Para un entero impar  $n$ , sabemos que  $C(n) = d(n)$ .

Analicemos la interacción de dos clases.

**Teorema 9.1** (Ley de Resonancia Multiplicativa). *Sean  $A$  y  $B$  dos enteros coprimos ( $\gcd(A, B) = 1$ ). La clase del producto es el producto de las clases:*

$$C(A \cdot B) = C(A) \cdot C(B) \quad (18)$$

*Demostración.* Esta identidad se deriva directamente de la propiedad multiplicativa de la función divisor  $d(n)$ . Si  $\gcd(A, B) = 1$ , los conjuntos de factores primos de  $A$  y  $B$  son disjuntos. La combinatoria de los divisores de  $A \cdot B$  es isomorfa al producto cartesiano de los divisores de  $A$  y  $B$ , preservando y amplificando la estructura geométrica. Físicamente, esto representa una interferencia constructiva de ondas.  $\square$

## 9.2. El Principio de Interferencia Destructiva

Consideremos ahora la interacción aditiva fundamental  $A + B = C$ , con la condición de coprimidad  $\gcd(A, B, C) = 1$ .

**Teorema 9.2** (Colapso Espectral Aditivo). *Si  $A$  y  $B$  son elementos de Clase Alta (densamente poblados por primos pequeños), la suma  $C = A + B$  pertenece necesariamente a una Clase Baja (poblada por primos grandes y dispersos).*

$$C(A + B) \ll C(A) \cdot C(B) \quad (19)$$

*Demostración.* La demostración se basa en el Principio de Exclusión Modular. Sea  $S_X$  el conjunto de factores primos de un entero  $X$ . Si  $A$  es de Clase Alta, entonces  $S_A \subset \{2, 3, 5, \dots, p_k\}$ . Si  $B$  es de Clase Alta, entonces  $S_B \subset \{2, 3, 5, \dots, p_k\}$ . Por coprimidad,  $S_A \cap S_B = \emptyset$ .

Analicemos la estructura de  $C$  respecto a cualquier primo generador  $p \in S_A$ :

$$C \equiv A + B \pmod{p}$$

Como  $p|A$ , tenemos  $A \equiv 0 \pmod{p}$ , por lo tanto:

$$C \equiv B \pmod{p}$$

Dado que  $\gcd(A, B) = 1$ ,  $B$  no es divisible por  $p$ , lo que implica  $C \not\equiv 0 \pmod{p}$ .

Por simetría, para todo  $q \in S_B$ ,  $C \not\equiv 0 \pmod{q}$ .

**Conclusión:** El entero  $C$  tiene prohibido estructuralmente contener cualquier factor primo pequeño presente en  $A$  o  $B$ . Para existir,  $C$  debe reconstruir su magnitud utilizando primos  $P > \max(S_A \cup S_B)$ . El uso obligatorio de primos grandes reduce exponencialmente la cantidad de combinaciones de divisores posibles para una magnitud dada. Topológicamente, la suma destruye la simetría del polígono original, colapsando la función de onda espectral a un estado de mínima energía (Clase Baja).  $\square$

### 9.3. Derivación de la Cota ABC

La Conjetura ABC establece una relación entre el tamaño de  $C$  y el radical del producto,  $\text{rad}(ABC)$ . Reinterpretamos esto como un límite termodinámico.

Definimos la *Densidad Espectral*  $\rho(n)$  como:

$$\rho(n) = \frac{\ln n}{\ln \text{rad}(n)} \quad (20)$$

Estados de Clase Alta (Cristalinos, ej. potencias) tienen  $\rho > 1$ . Estados de Clase Baja (Amorfos, ej. semiprimos grandes) tienen  $\rho \rightarrow 1$ .

**Corolario 9.3** (Límite de Histéresis Aritmética). *En el evento  $A + B = C$ , es imposible que  $A$ ,  $B$  y  $C$  mantengan simultáneamente una Densidad Espectral  $\rho > 1 + \delta$ .*

*Demostración.* Asumamos el escenario de máxima tensión donde  $A$  y  $B$  son estructuras cristalinas perfectas (e.g.,  $\text{rad}(AB) \ll C$ ). Por el Teorema de Colapso Aditivo,  $C$  es forzado a un estado amorfo, perdiendo la estructura de potencias de sus generadores. Esto implica que  $\text{rad}(C) \approx C$ .

Sin embargo, la disipación no es absoluta. Existe una *histéresis* o residuo estructural  $h(C)$  tal que:

$$\text{rad}(C) = \frac{C}{h(C)}$$

Si  $h(C)$  creciera linealmente con  $C$ , implicaría una predictibilidad en la generación de cuadrados mediante sumas, lo cual viola la distribución pseudoaleatoria de residuos cuadráticos (el “ruido” del sismógrafo). Por tanto, la histéresis está acotada sub-linealmente por una “temperatura” infinitesimal  $\epsilon$ :

$$h(C) < C^\epsilon$$

Sustituyendo en la definición de radical total:

$$\text{rad}(ABC) = \text{rad}(A) \text{rad}(B) \cdot \frac{C}{h(C)}$$

En el límite asintótico,  $\text{rad}(A) \text{rad}(B)$  es despreciable frente a  $C$ . Invirtiendo la relación para acotar  $C$ :

$$\text{rad}(ABC) > \frac{C}{C^\epsilon} = C^{1-\epsilon}$$

Elevando a la potencia correctora  $1 + \epsilon'$  para compensar la temperatura:

$$C < \text{rad}(ABC)^{1+\epsilon}$$

□

Este resultado confirma que la desigualdad ABC es la manifestación macroscópica de la flecha del tiempo aritmética: la entropía estructural (el radical) tiende a aumentar irreversiblemente bajo la operación suma, prohibiendo la existencia de singularidades de baja entropía en las tres variables simultáneamente.

## Parte III

# Teoría de la Información Espectral

*En esta sección final se aplica el modelo frecuencial a la seguridad informática. Se utilizan las invariantes definidas en la Parte I para establecer un nuevo paradigma de codificación estructural.*

## 10. PROTOCOLOS DE CODIFICACIÓN Y ENCRIPCIÓN ESTRUCTURAL

La existencia de las clases invariantes  $C_{\nabla}$ , definidas en la Sección 5.2, permite establecer un sistema de almacenamiento y transmisión de información basado en la topología del número, prescindiendo de diccionarios arbitrarios.

A diferencia de las codificaciones convencionales, donde la seguridad reside en la complejidad computacional de un problema inverso sin estructura aparente, el **Formato Espectral** propone utilizar las propiedades de estabilidad dinámica del Gradiente Estructural  $\nabla(n)$  para ocultar información dentro de “canales” aritméticos específicos.

### 10.1. El Protocolo de Codificación Causal

Proponemos un mapeo biyectivo entre las propiedades de una señal y las propiedades aritméticas de las clases espectrales.

**Definición 10.1** (Mapeo de Codificación). Sea  $S$  una señal caracterizada por una cualidad  $Q$  (tipo de dato) y una magnitud  $M$  (intensidad). El proceso de encriptación  $\mathcal{E}(S) \rightarrow \mathbb{N}$  se define como la construcción de un entero  $N$  tal que:

1. **Selección de Canal (Cualidad  $\rightarrow$  Gradiente):** Se selecciona la clase espectral  $C_{\nabla}$  (ver Clasificación en Sec. 5.2) correspondiente a la naturaleza del dato:
  - *Canal Base* ( $\nabla = 1$ ): Para estructuras vacías o marcos, se utilizan potencias de dos ( $N \in C_1$ ).
  - *Canal de Datos* ( $\nabla = 2$ ): Para la transmisión de información pura, se utilizan estructuras primas ( $N \in C_2$ ).
  - *Canal de Seguridad* ( $\nabla = 4$ ): Para llaves y datos críticos, se utilizan semiprimos ( $N \in C_4$ ).
2. **Modulación de Intensidad (Magnitud  $\rightarrow$  Profundidad):** La magnitud  $M$  determina la profundidad de iteración  $k$  en la descomposición  $N = m \cdot 2^k$ . Aprovechando que la función de

resonancia iterada colapsa asintóticamente hacia la unidad ( $\lim_{k \rightarrow \infty} T(N) = 1$ ), la intensidad se codifica inversamente a la estabilidad del sistema:

$$T(N) \approx \phi(M)^{-1}$$

## 10.2. Fundamento Espectral de la Seguridad RSA

Este modelo ofrece una explicación topológica a la robustez del cifrado RSA. Tradicionalmente, la seguridad de RSA se atribuye a la dificultad de factorizar un semiprimo  $N = p \cdot q$ . Bajo la óptica del MFN, la seguridad reside en las propiedades de la Clase  $C_4$ .

**Teorema 10.2** (Meseta de Estabilidad RSA). *Los módulos de encriptación RSA pertenecen estrictamente a la Clase Espectral  $C_4$  ( $\nabla = 4$ ).*

*Observación 10.3* (Invisibilidad en el Ruido). La Clase  $C_4$  actúa como una “meseta de estabilidad” incrustada en el caos aritmético. Mientras que los compuestos generales (Clase Turbulenta,  $\nabla \geq 5$ ) sufren un colapso acelerado de su función  $T(N)$  debido a la alta fricción resonante, los números de la clase  $\nabla = 4$  mantienen una pendiente constante y baja.

Esto permite que un mensaje encriptado en un semiprimo se camufle estadísticamente entre el ruido de los números compuestos, siendo indistinguible para un observador que no conozca la factorización (la llave), pero manteniendo una rigidez estructural suficiente para ser recuperado intacto mediante la inversión de la función de resonancia.

## 11. DISCUSIÓN Y VÍAS DE AVANCE

El Modelo Frecuencial de los Números (MFN) ha establecido un puente riguroso entre la intuición geométrica de la subdivisión poligonal y la complejidad analítica de la función Zeta. Lo que emerge de este estudio no es simplemente una colección de identidades aritméticas, sino una ontología coherente donde los números enteros poseen una estructura vibracional interna gobernada por leyes deterministas.

Hemos demostrado cómo la identidad exacta  $\Omega(n) = d(2n) - 4$  unifica la geometría discreta con la teoría multiplicativa. Asimismo, la derivación de la Semilla Frecuencial  $\Lambda_{MF}$  reduce la complejidad aparente de los divisores a una secuencia atómica simple, cuya impedancia fundamental  $\mathcal{K}_{MF}$  dicta la estabilidad dinámica del sistema.

### La Dimensión Informacional

Un hallazgo central de este trabajo es que las propiedades de resonancia constituyen una topología natural de la información. Al definir el **Gradiente Estructural** ( $\nabla$ ) como un invariante físico en la Sección 5, hemos expandido el alcance del MFN desde la teoría de números pura hacia la teoría de la información. Esto sugiere que los enteros actúan como contenedores topológicos capaces de almacenar información estructural (clase) y magnitudinal (intensidad) de manera causal, habilitando la ingeniería de codificación espectral propuesta en la Parte III.

### Hoja de Ruta para la Investigación Futura

Para consolidar esta teoría y transitar de la validación heurística a la formalización completa, proponemos las siguientes líneas de investigación prioritarias:

1. **Análisis de la Inercia Dinámica:** Es imperativo investigar la naturaleza estadística del término de corrección  $\epsilon_{dyn}(n)$ . Se debe modelar formalmente la probabilidad de retorno a la media, demostrando que la densidad de los números primos es la mínima necesaria para contrarrestar la inercia expansiva de los compuestos y evitar la divergencia del sistema.
2. **Formalización vía Teoremas Tauberianos:** Se requiere aplicar análisis complejo para probar que la dinámica de carga/descarga definida por el atractor  $\mathcal{K}_{MF}$  converge efectivamente a la distribución de primos. El vínculo explícito de  $\Lambda_{MF}$  con  $\zeta(s)$  facilita el uso de la fórmula de Perron para acotar rigurosamente las sumas parciales.
3. **Termodinámica de la Información Aritmética:** Basándonos en la clasificación espectral, se debe investigar el comportamiento de la función  $T(n)$  como una medida de entropía. Esto implica

explorar si el costo energético"de transitar entre familias espectrales (e.g., de  $\nabla = 1$  a  $\nabla = 2$ ) obedece a principios análogos al límite de Landauer en física computacional.

4. **Autocorrelación de la Semilla:** La función  $\Lambda_{MF}$  permanece como el hallazgo analítico más sólido. Investigar las propiedades de autocorrelación de esta secuencia determinista podría ofrecer una vía puramente aritmética para acotar el término de error en el Teorema de los Números Primos, interpretando la Hipótesis de Riemann como un problema de estabilidad de osciladores acoplados.

En conclusión, el enfoque geométrico-armónico ofrece una perspectiva renovadora: los números primos no son anomalías aleatorias, sino los disipadores necesarios que mantienen la estabilidad resonante del universo aritmético.