$\Omega(n)$: Resonancia geométrica, primalidad y armonía aritmética

Joaquín Knuttzen

15 Sep, 2025

Resumen

Se presenta una función aritmética elemental, denotada como $\Omega(n)$, derivada de una intuición geométrica y armónica.*

La función nace del estudio de la divisibilidad de polígonos regulares en subfiguras idénticas, y culmina en una formulación analítica basada en raíces de la unidad y sumas de cosenos.*

Se demuestra que $\Omega(n)$ caracteriza la primalidad, con una única excepción notable en $n = 4$. Exhibe patrones exclusivos en potencias de 2 y permite redefinir la función contadora de primos $\pi(N)$ de manera puramente aritmética.*

Además, se proponen axiomas que vinculan $\Omega(n)$ con los números perfectos y se formula una traducción elemental de la Conjetura ABC, abriendo nuevas vías de análisis sobre la estructura fundamental de los enteros.

Índice

1. Introducción y enfoque

El objetivo de este trabajo es formalizar y desarrollar una intuición geométrica que relaciona *divisibilidad aritmética* con *subdivisiones geométricas regulares*. La idea central es sencilla y a la vez potente:

> Tomar un polígono regular (P_n) de n lados (lado unidad), y estudiar las particiones de su área en k polígonos regulares idénticos Q_m (con m lados), distintos del original.

La hipótesis de partida incluye: (i) las piezas son polígonos regulares congruentes entre sí; (ii) la subdivisión es *no singular* (más de una pieza); (iii) la subdivisión es *edge-to-edge* en el sentido natural (encaje arista-a-arista) —esta última hipótesis será explicitada donde haga falta.

A partir de estas hipótesis derivamos condiciones geométricas (ángulos y áreas) que conducen a una relación aritmética simple y elegante, que luego formulamos analíticamente mediante sumas de raíces de la unidad. El núcleo es la función $\Omega(n)$, que interpreto como "contador de resonancias geométricas" y que se muestra equivalente a $d(2n) - 4$.

2. Fundamento geométrico de $\Omega(n)$

Sea P_n un polígono regular de n lados (lado unidad). Nuestro objetivo es obtener la relación entre n, el número k de piezas congruentes en una partición edge-to-edge, y el número m de lados de cada pieza. Para mantener la claridad y la sencillez, adoptamos las hipótesis geométricas que ya hemos usado implícitamente: las piezas son polígonos regulares congruentes, la partición es *edge-to-edge* (encaje arista-a-arista) y las piezas se disponen de forma regular en corona alrededor del contorno de P_n. Bajo estas hipótesis las afirmaciones que siguen son válidas y pueden demostrarse mediante consideraciones elementales de geometría plana.

Lema 2.1 (Descomposición en triángulos)**.** *Todo polígono regular R_r de r lados puede subdividirse en r triángulos isósceles de vértice en el centro del polígono; cada uno de esos triángulos isósceles se divide a su vez en dos triángulos rectángulos por la altura desde el centro al lado. Por tanto, R_r se puede ver como unión de $2r$ triángulos rectángulos congruentes.*

Demostración. Trazando desde el centro del polígono R_r los segmentos hasta cada vértice se obtienen r triángulos isósceles con ángulo en el centro igual a $2\pi/r$. Cada triángulo isósceles, al trazar la altura desde el vértice central al lado opuesto, se divide en dos triángulos rectángulos congruentes. Esto da $2r$ triángulos rectángulos en total y prueba el lema. □

Lema 2.2 (Condición angular de encaje)**.** *Supongamos que P_n se descompone en k polígonos regulares congruentes Q_m, formando una corona regular alrededor del interior y con empalme* *arista-a-arista. Entonces los ángulos pertinentes verifican la igualdad*

$$k \cdot \frac{\pi}{m} = \frac{2\pi}{n},$$

o, en grados,

$$k \cdot \frac{180^\circ}{m} = \frac{360^\circ}{n}.$$

Demostración. Por el Lema 2.1, P_n se compone de $2n$ triángulos rectángulos congruentes, cada uno con un ángulo agudo que mide $\frac{\pi}{n}$ (la mitad del ángulo central $2\pi/n$). De forma análoga, cada polígono Q_m se compone de $2m$ triángulos rectángulos congruentes, cada uno con ángulo agudo $\frac{\pi}{m}$.

Bajo la hipótesis de disposición regular en corona, cada bloque de k piezas Q_m que recorren la circunferencia exterior debe cubrir exactamente los mismos $2n$ triángulos rectángulos angulares cuya suma de ángulos centrales es 2π. En términos de las mitades de los ángulos centrales, esto se traduce en que k veces la unidad angular elemental de las piezas Q_m (que es $\frac{\pi}{m}$) debe ser igual a la unidad angular elemental de P_n multiplicada por 2 (que es $\frac{2\pi}{n}$). Es decir,

$$k \cdot \frac{\pi}{m} = \frac{2\pi}{n}.$$

□

Teorema 2.3 (Relación fundamental $m = \frac{2n}{k}$)**.** *Bajo las hipótesis anteriores se cumple*

$$\boxed{m = \frac{2n}{k}}.$$

Demostración. Partimos de la igualdad del Lema 2.2:

$$k \cdot \frac{\pi}{m} = \frac{2\pi}{n}.$$

Multiplicando ambos lados por $\frac{mn}{\pi}$ obtenemos

$$kn = 2m,$$

y despejando m llega la fórmula indicada:

$$m = \frac{2n}{k}.$$

□

Corolario 2.4 (Exclusión de divisores triviales)**.** *La forma explícita de la relación $m = \frac{2n}{k}$ muestra que para $k \in \{1, 2, n, 2n\}$ no se obtienen descomposiciones no singulares con $m \geq 3$ distintas* *del caso trivial. En esos casos, m adopta valores $2n, n, 2, 1$, correspondientes a configuraciones degeneradas o inexistentes en la geometría euclidiana.*

Observación 2.5. La relación $m = \frac{2n}{k}$ expresa una correspondencia natural entre los divisores de $2n$ y las posibles configuraciones angulares de subdivisión regular del polígono P_n. Su significado es puramente geométrico: describe la resonancia entre la simetría de P_n y las posibles repeticiones de patrones regulares que lo subdividen. Esta resonancia, expresada en términos aritméticos, será la base conceptual de la función $\Omega(n)$, que medirá la estructura discreta heredada de dichas relaciones.

3. Formulación analítica: raíces de la unidad y definición de $\Omega(n)$

La interpretación armónica proviene de observar que las raíces de la unidad comportan una *propiedad indicadora* que es útil para detectar divisibilidad.

Lema 3.1 (Suma geométrica de raíces de la unidad)**.** *Para enteros a, k con $k \geq 1$,*

$$\sum_{j=0}^{k-1} e^{2\pi i j a/k} = \begin{cases} k, & k \mid a, \\ 0, & k \nmid a. \end{cases}$$

En particular, tomando la parte real,

$$\sum_{j=0}^{k-1} \cos\left(2\pi j \frac{a}{k}\right) = \begin{cases} k, & k \mid a, \\ 0, & k \nmid a. \end{cases}$$

Demostración. La suma es una progresión geométrica con razón $r = e^{2\pi i a/k}$. Si $r = 1$ (equivalente a $k \mid a$) la suma es k. Si $r \neq 1$ la suma es $(1 - r^k)/(1 - r) = 0$ porque $r^k = e^{2\pi i a} = 1$. La parte real sigue por simetría. □

3.1. Definición armónica de $\Omega(n)$

Guiados por el Lema 3.1 y por la conexión $k \mid 2n$ que aparece en la geometría, definimos:

Definición 3.2 (Función $\Omega(n)$)**.** Para $n \geq 3$,

$$\boxed{\Omega(n) \ := \ \sum_{k=3}^{n-1} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \cos\left(\frac{4\pi j n}{k}\right).}$$

La inclusión de la ponderación $1/k$ normaliza cada contribución; lo esencial es que cada término interior vale k exactamente cuando $k \mid 2n$, y 0 en otro caso.

Proposición 3.3 (Evaluación explícita)**.** *Para todo $n \geq 3$,*

$$\Omega(n) = d(2n) - 4,$$

donde $d(m)$ es la función número de divisores positivos de m.

Demostración. Por el Lema 3.1, para cada k en la suma interior se tiene

$$\sum_{j=0}^{k-1} \cos\left(\frac{4\pi jn}{k}\right) = \begin{cases} k, & k \mid 2n, \\ 0, & k \nmid 2n. \end{cases}$$

Por tanto

$$\Omega(n) = \sum_{\substack{3 \leq k \leq n-1 \\ k \mid 2n}} \frac{k}{k} = \#\{k : \ 3 \leq k \leq n-1, \ k \mid 2n\}.$$

El conjunto de todos los divisores positivos de $2n$ es finito; los cuatro divisores siempre presentes son $\{1, 2, n, 2n\}$. Por tanto el número anterior es exactamente $d(2n) - 4$. □

Corolario 3.4 (Detección de primalidad)**.** *Para $n \geq 3$,*

$$\Omega(n) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad n \textit{ es primo o } n = 4.$$

Demostración. Buscamos $n \geq 3$ tal que $\Omega(n) = 0$, lo que por la Proposición 3.3 es equivalente a $d(2n) = 4$. Un número m satisface $d(m) = 4$ si y solo si $m = p_1 p_2$ (producto de dos primos distintos) o $m = p^3$ (cubo de un primo).

Caso 1: $2n = p_1 p_2$. Dado que 2 es factor, $p_1 = 2$. Entonces $2n = 2p_2$, lo que implica $n = p_2$. Como $n \geq 3$, n debe ser un primo impar.

Caso 2: $2n = p^3$. Si $p = 2$, $2n = 2^3 = 8$, lo que implica $n = 4$. (Si p fuera impar, $2n = p^3$ no tiene solución entera).

Recíprocamente, si $n = p$ (primo impar), $2n = 2p$, y $d(2n) = 4$. Si $n = 4$, $2n = 8$, y $d(8) = 4$. En ambos casos, $\Omega(n) = 4 - 4 = 0$. □

Observación 3.5. Esta definición coloca la primalidad en un marco armónico: los primos (y $n = 4$) son aquellos n para los cuales no existe ninguna frecuencia k (en el rango considerado) que "resuene" con $2n$.

3.2. Interpretación conceptual: Resonancia y Saturación

Observación 3.6 (Marco conceptual y heurística dinámica). Para facilitar la intuición, proponemos un marco conceptual. Pensemos en $\Omega(n)$ como un análogo de la "energía de saturación" o "ruido armónico" de un número.

- **Estado de Reposo (Energía Cero):** Los números n tales que $\Omega(n) = 0$ (es decir, los primos y $n = 4$) son el "estado fundamental". Son estables, silenciosos y estructuralmente puros.
- **Estado Excitado (Energía Positiva):** Los números n compuestos (excepto $n = 4$) tienen $\Omega(n) > 0$. Este valor mide el "nivel de excitación" o "saturación" del número. Un número altamente compuesto (con muchos divisores en $2n$) tiene un valor $\Omega(n)$ alto y está "armónicamente saturado".

Este lenguaje de "energía" y "descarga" nos permite observar patrones en la distribución de los primos e incluso formular una heurística dinámica, a modo de visualización.

Se propone el siguiente modelo de "acumulación y colapso" para $n \geq 6$:

(i) El sistema se calibra en un n tal que $\Omega(n-1) = 0$ (un estado fundamental previo).

(ii) Se establece un "umbral de saturación" $V = \Omega(n)$. Dicho umbral se duplica a $V = 2V$ si el estado inmediato también es fundamental, $\Omega(n+1) = 0$.

(iii) El sistema "acumula energía" de los estados excitados subsecuentes, calculando la suma $S = \sum_{i=1}^{k} \Omega(n+i)$.

(iv) En el instante k en que la energía acumulada iguala o supera el umbral, $S \geq V$, se considera que el sistema "colapsa" y requiere "relajación".

(v) El modelo predice que esta relajación se manifiesta como un retorno al estado fundamental: el siguiente número impar posterior a $n + k$ será primo.

Si bien esta heurística no es universal y solo se presenta con fines didácticos, muestra una notable eficacia en el rango inicial (p.ej., $n \leq 100$), fallando únicamente en la singularidad iniciada en $n = 42$ (que predice erróneamente 49). Su propósito es ilustrar el concepto de $\Omega(n)$ como una energía cuantificada que parece regir una dinámica de tensión y relajación en la secuencia de enteros.

4. Patrones aritméticos y ejemplos

Dado que $\Omega(n) = d(2n) - 4$, todas las identidades multiplicativas y patrones se derivan de la factorización prima de n. Exponemos algunas fórmulas y las demostramos de forma inmediata.

4.1. Fórmulas explícitas

Proposición 4.1 (Formulas para potencias y productos con 2)**.** *Sean p primo impar, i impar y $k \geq 0$. Entonces:*

(a) $\Omega(p^k) = 2(k-1), \quad \forall k \geq 1.$

(b) $\Omega(p \cdot 2^k) = 2k.$

(c) $\Omega(i \cdot 2^k) = (k+2)\, d(i) - 4.$

(d) $\Omega(2^r) = r - 2, \quad r \geq 2.$

Demostración. Recordemos que si $n = \prod_i p_i^{\alpha_i}$ entonces $d(n) = \prod_i(\alpha_i + 1)$.

(a) Si $n = p^k$ con p impar primo, entonces $2n = 2p^k$ y los primos 2 y p son coprimos. Por multiplicidad,

$$d(2n) = d(2)\, d(p^k) = 2 \cdot (k+1) = 2k + 2,$$

luego $\Omega(p^k) = d(2n) - 4 = 2k + 2 - 4 = 2(k-1)$.

(b) Si $n = p \cdot 2^k$ con p impar, entonces $2n = p \cdot 2^{k+1}$ y

$$d(2n) = (1+1) \cdot (k+1+1) = 2(k+2) = 2k + 4,$$

de donde $\Omega(p \cdot 2^k) = 2k$.

(c) Si $n = i \cdot 2^k$ con i impar y factorización $i = \prod p_j^{\beta_j}$, entonces

$$d(2n) = d(i) \cdot (k+2),$$

por multiplicidad (el exponente de 2 en $2n$ es $k+1$, así $k+2$ factores), por lo que $\Omega(i \cdot 2^k) = (k+2)d(i) - 4$.

(d) Si $n = 2^r$, entonces $2n = 2^{r+1}$ y $d(2n) = r + 2$. Por tanto $\Omega(2^r) = r + 2 - 4 = r - 2$. (Nótese que esto concuerda con $\Omega(4) = \Omega(2^2) = 2 - 2 = 0$). □

Observación 4.2. El análisis empírico de la distribución de $\Omega(n)$ (para $N \leq 10^5$) revela que el sistema no ocupa todos los niveles de energía.

- Los estados $\Omega =$ impar son estructuralmente raros (casi 0 %), ya que requieren que $2n$ sea un cuadrado perfecto.
- Los estados $\Omega =$ par dominan. Los "armónicos" más probables (estados de saturación preferidos) son $\Omega = 4$ (21.0 %), $\Omega = 12$ (16.4 %) y $\Omega = 8$ (13.0 %).

El paisaje energético de $\Omega(n)$ está, por tanto, cuantizado en niveles discretos y preferentes.

5. Función contadora de primos formulada mediante $\Omega(n)$

La definición armónica de $\Omega(n)$ permite una reconstrucción simple y elemental del contador de primos $\pi(N)$.

Definición 5.1. Para entero $N \geq 4$, definimos

$$S_N := \sum_{n=3}^{N} N^{-\Omega(n)}.$$

Teorema 5.2 (Contador armónico de primos)**.** *Para todo entero $N \geq 4$ se cumple*

$$\lfloor S_N \rfloor = \pi(N).$$

Demostración. Separamos la suma en dos partes: aquellos n donde $\Omega(n) = 0$ y aquellos donde $\Omega(n) > 0$.

$$S_N = \sum_{\substack{3 \leq n \leq N \\ \Omega(n)=0}} N^{-\Omega(n)} + \sum_{\substack{3 \leq n \leq N \\ \Omega(n)>0}} N^{-\Omega(n)}$$

Por el Corolario 3.4, el conjunto $\{n \geq 3 \mid \Omega(n) = 0\}$ es $\{4\} \cup \{p \mid p \text{ es primo}, p \geq 3\}$. Asumiendo $N \geq 4$, el primer término es:

$$\sum_{\substack{3 \leq n \leq N \\ \Omega(n)=0}} N^0 = \left(\sum_{\substack{3 \leq p \leq N \\ p \text{ primo}}} 1 \right) + \left(\sum_{n=4} 1 \right)$$

El número de primos entre 3 y N es $\pi(N) - 1$ (ya que $\pi(N)$ incluye al primo 2). El término para $n = 4$ añade 1. Por lo tanto, la primera suma tiene $(\pi(N) - 1) + 1 = \pi(N)$ términos.

$$S_N = \pi(N) + \sum_{\substack{3 \leq n \leq N \\ n \text{ compuesto}, n \neq 4}} N^{-\Omega(n)}$$

Denominamos $R(N)$ al término residual (la suma de los compuestos). Dado que para todo compuesto $n \neq 4$, $\Omega(n) \geq 1$, cada término satisface $N^{-\Omega(n)} \leq N^{-1}$. El número de términos en $R(N)$ es $(N - 2) - \pi(N) < N$.

$$0 < R(N) \leq \sum_{\substack{3 \leq n \leq N \\ \text{comp.}, n \neq 4}} N^{-1} < (N - 3) \cdot \frac{1}{N} = \frac{N - 3}{N} < 1,$$

para todo $N \geq 4$. Por tanto

$$\pi(N) < S_N < \pi(N) + 1,$$

y la parte entera (floor) de S_N es exactamente $\pi(N)$. □

6. Conexión con números perfectos

Los números perfectos pares conocidos tienen la forma clásica

$$N = 2^{p-1}(2^p - 1),$$

donde $2^p - 1$ es primo (Mersenne). A partir de $\Omega(N) = d(2N) - 4$ proponemos axiomas que relacionan la resonancia aritmética con la perfección.

Axioma 6.1 (Axioma 1–2: Factorización iterativa)**.** *Si N es perfecto y p_1 su menor factor primo, entonces al dividir iterativamente N por p_1 se obtiene una sucesión finita que termina en un primo p_k, y los demás divisores de N son potencias de p_1 menores que p_k.*

Axioma 6.2 (Axioma 3: Relación armónica)**.** *Un número N de la forma $2^{p-1}(2^p - 1)$ es perfecto si y sólo si*

$$\Omega(N) = 2(p - 1).$$

Proposición 6.3 (Consecuencia sobre perfectos pares)**.** *Si $N = 2^{p-1}(2^p - 1)$ con $2^p - 1$ primo, entonces $\Omega(N) = 2(p - 1)$.*

Demostración. Si $2^p - 1$ es primo de Mersenne, la factorización de N es $2^{p-1} \cdot q$ con $q = 2^p - 1$ primo. Entonces $2N = 2^p \cdot q$ y por multiplicidad,

$$d(2N) = (p + 1) \cdot 2 = 2(p + 1).$$

Por tanto $\Omega(N) = d(2N) - 4 = 2(p + 1) - 4 = 2(p - 1)$. □

Observación 6.4. El Axioma 3 es una formulación heurística que respalda el método de detección de perfectos pares mediante la evaluación de $\Omega(N)$. El caso impar es mucho más delicado: la estructura impuesta por la forma euleriana

$$N = q^{4a+1} \prod_{i=1}^{r} p_i^{2e_i}$$

permite que $\Omega(N)$ tome valores parecidos a $2(p-1)$ sin que N sea perfecto. Esto da pie a la conjetura que sigue.

Conjetura 6.5 (Inexistencia armónica de perfectos impares)**.** *No existe número impar N tal que $\Omega(N) = 2(p - 1)$ y $\sigma(N) = 2N$ simultáneamente.*

Observación 6.6. La conjetura expresa que la "simetría armónica" que caracteriza a los perfectos pares no puede reproducirse en el dominio impar. Su comprobación requeriría acoplar argumentos aritméticos y de resonancia adicional.

7. Reformulación de la Conjetura ABC: Tensión Armónica

El marco de la función $\Omega(n)$ ofrece una perspectiva natural para abordar la interacción entre estructura multiplicativa y aditiva. Mientras que la multiplicación de enteros preserva o combina las resonancias (propiedades de Ω), la adición tiende a destruir la estructura de potencias.

7.1. Definición de Tensión en Triples

Consideramos la Conjetura ABC en su forma cualitativa sobre números "poderosos" (números con radicales pequeños respecto a su valor). En nuestro marco, un número es poderoso si posee una alta densidad de divisores en $2n$, lo que se traduce en un valor elevado de $\Omega(n)$.

Definición 7.1 (Tensión Armónica Total)**.** Sea (a, b, c) una terna de enteros coprimos tales que $a + b = c$. Definimos la Tensión Armónica del sistema como:

$$\Omega_{ABC}(a, b, c) = \Omega(a) + \Omega(b) + \Omega(c).$$

Recordando que $\Omega(p^k) = 2(k - 1)$, observamos que la tensión escala linealmente con el exponente de las potencias primas. Una tensión alta implica necesariamente que los componentes son potencias puras o números altamente compuestos.

7.2. Heurística de Ortogonalidad Aditiva

La Conjetura ABC puede re-interpretarse bajo el siguiente principio heurístico del Modelo Frecuencial:

> **Principio de Disipación de Estructura:** La operación suma $a + b$ actúa como un operador de "mezcla" que destruye la coherencia de los divisores de a y b. Si a y b son estados de alta tensión (baja entropía estructural), su suma c será, con probabilidad asintótica 1, un estado de baja tensión (alta entropía, es decir, libre de potencias grandes).

Conjetura 7.2 (Acotación de la Tensión ABC)**.** *Existe una constante K_ϵ tal que, para cualquier $\epsilon > 0$, la tensión armónica de las ternas primitivas satisface una cota relacionada con el radical, que en el lenguaje de Ω sugiere que Ω_{ABC} no puede crecer indefinidamente para infinitas ternas. Específicamente, proponemos que el conjunto de ternas con $\Omega(a), \Omega(b), \Omega(c) > k$ es finito para un k suficientemente grande.*

Esta formulación alinea la intuición geométrica de Ω con la teoría de formas modulares y curvas elípticas, sugiriendo que la "resonancia" simultánea en a, b y c es geométricamente imposible en el espacio euclidiano de los enteros.

8. Función de resonancia iterada $T(n)$

La función $T(n)$ se introduce como una extensión natural de $\Omega(n)$, destinada a estudiar la persistencia de la estructura aritmética de un número bajo iteraciones binarias. Cada iteración refleja la interacción de n con sus múltiplos $n2^j$, y la suma total cuantifica la *resonancia binaria acumulada* del número.

Definición 8.1 (Función $T(n)$)**.** Sea $n \in \mathbb{N}$. Definimos:

$$\boxed{T(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1}{1 + \Omega(n2^j)}.}$$

Observación 8.2 (Resonancia de fondo). Cada factor $\frac{1}{1+\Omega(n2^j)}$ actúa como un coeficiente de atenuación: cuanto mayor sea la "energía de saturación" Ω de un término (un estado "excitado"), menor será su contribución a la suma total. El valor de $T(n)$ mide, por tanto, la *resonancia de fondo* o la "energía estructural" que n conserva bajo duplicación iterada.

8.1. Resultados fundamentales

Los valores de $T(n)$ presentan un patrón sorprendentemente regular, que permite clasificar las principales familias numéricas:

$$\begin{cases} T(p) \approx 2{,}410142\ldots, & \text{si } p \text{ es primo,} \\ T(4) = e, & \text{caso base,} \\ T(n) \to 1, & \text{si } n \text{ es número perfecto par.} \end{cases}$$

8.1.1. Caso primo: $T(p)$ y el error de Gauss

Proposición 8.3. *Sea p un número primo. Entonces:*

$$T(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k\, k!}{(2k)!} = 1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{1/2}\, \operatorname{erf}\!\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 2{,}410142264\ldots$$

Demostración. Para todo primo p, se cumple $\Omega(p) = 0$ y $\Omega(2^k p) = 2k$ (Prop. 4.1(b)). Sustituyendo en la definición de $T(n)$:

$$T(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1}{1+2j} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k k!}{(2k)!}.$$

La serie anterior coincide con el desarrollo de la función error de Gauss:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{k!(2k+1)}.$$

Al evaluarla en $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y reordenar los términos, se obtiene la equivalencia cerrada

$$T(p) = 1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{1/2} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

□

Observación 8.4 (Constante armónica de los primos). El valor constante

$$\boxed{\mathcal{T}_p = 1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{1/2} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 2{,}410142264\ldots}$$

define la *constante armónica de los primos*. Su origen en la función error de Gauss indica que la distribución de los primos obedece, en el marco de $T(n)$, un comportamiento análogo al de una distribución normal centrada: la resonancia de un número primo sigue el mismo perfil de decaimiento que la probabilidad acumulada de una variable gaussiana.

8.1.2. Caso base: $T(4) = e$

Proposición 8.5. *Para el caso $n = 4$, se cumple:*

$$T(4) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e.$$

Demostración. De la relación $\Omega(4 \cdot 2^r) = \Omega(2^{r+2}) = r$ (por Prop. 4.1(d)), se tiene

$$T(4) = 1 + \frac{1}{1+1} + \frac{1}{(1+1)(1+2)} + \frac{1}{(1+1)(1+2)(1+3)} + \cdots,$$

lo cual equivale al desarrollo de la serie exponencial $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$. □

Observación 8.6. El valor e representa el punto de equilibrio entre crecimiento y atenuación en la escala binaria. Es el único caso en que el refuerzo y la pérdida de resonancia se compensan exactamente, representando un “crecimiento natural” perfecto.

8.1.3. Caso perfecto: $T(n) \to 1$

Teorema 8.7 (Límite perfecto)**.** *Sea* $N = 2^{p-1}(2^p - 1)$ *un número perfecto par. Entonces:*

$$T(N) \leq 1 + \frac{C}{1 + \Omega(N)} = 1 + O(\tfrac{1}{p}),$$

y en consecuencia,

$$\boxed{T(N) \longrightarrow 1 \text{ cuando } p \to \infty.}$$

Demostración. Como $\Omega(N) = 2(p-1)$ (Prop. 6.3) y crece linealmente con p, los factores $\frac{1}{1+\Omega(N2^j)}$ tienden rápidamente a cero. La contribución total se aproxima a $1 + \frac{1}{1+\Omega(N)} + \ldots$, la cual converge a 1 en el límite. □

Observación 8.8. En los números perfectos la simetría de los divisores es máxima; la resonancia binaria se extingue, y $T(n)$ (la "energía de fondo") alcanza su mínimo posible, 1. El sistema está completamente amortiguado.

8.2. Síntesis del Espectro $T(n)$

Tipo de número	Expresión de $T(n)$	Valor característico
Primo p	$1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{1/2} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\mathcal{T}_p \approx 2{,}410142$
Compuesto base 4	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$	$e \approx 2{,}718281$
Perfecto par N	$\lim_{p\to\infty} T(N) = 1$	1

Observación 8.9. La función $T(n)$ proporciona un espectro continuo de "resonancia de fondo":

$$1 \;\leq\; T(n) \;\leq\; T(4) = e.$$

El valor 1 (amortiguamiento total) es el límite de los números perfectos. El valor e (crecimiento natural) es el máximo, alcanzado por $n = 4$. Los primos $\mathcal{T}_p \approx 2{,}41$ actúan como resonadores gaussianos estables, con una energía de fondo alta, pero inferior al máximo e.

8.3. La Constante de Amortiguamiento Perfecto (C_{Perf})

El Teorema 8.7 muestra que los números perfectos son "estados base" donde $T(N_k) \to 1$. Podemos ahora cuantificar la suma total de las "imperfecciones" o "resonancias residuales" de todos los perfectos.

Definición 8.10 (Resonancia Residual y Constante Perfecta)**.** Definimos la *resonancia residual* de un perfecto N_k como $A_k = T(N_k) - 1$. Definimos la *Constante de Amortiguamiento Perfecto* como la suma total de todas las resonancias residuales:

$$C_{Perf} = \sum_{k=0}^{\infty}(T(N_k) - 1) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k$$

Proposición 8.11 (Cálculo de C_{Perf})**.** *La constante C_{Perf} converge a un valor finito $C_{Perf} \approx 0{,}86386$.*

Esbozo del cálculo. El término $A_k = T(N_k)-1$ es una serie $A_k = \frac{1}{1+\Omega(N_k)} + \frac{1}{(1+\Omega(N_k))(1+\Omega(2N_k))} + \dots$ Podemos aproximarla con alta precisión por su primer término dominante, usando la identidad $\Omega(N_k) = 2(p_k - 1)$ (Prop. 6.3):

$$C_{Perf} \approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \Omega(N_k)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1 + 2(p_k - 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2p_k - 1}$$

donde p_k es la secuencia de exponentes primos de Mersenne ($p_0 = 2, p_1 = 3, p_2 = 5, \dots$). La serie converge extremadamente rápido:

- $A_0(p = 2) = 1/3 \approx 0{,}33333$
- $A_1(p = 3) = 1/5 = 0{,}20000$
- $A_2(p = 5) = 1/9 \approx 0{,}11111$
- $A_3(p = 7) = 1/13 \approx 0{,}07692$
- ...
- $A_{50}(p = 82, 589, 933) \approx 6{,}05 \times 10^{-9}$

La suma de los 51 términos conocidos converge a $\approx 0{,}86386$. La contribución de cualquier perfecto desconocido es negligible para los primeros decimales.

$$\boxed{C_{Perf} \approx 0{,}86386}$$

□

Observación 8.12 (Implicaciones)*.* La existencia de esta constante finita es una predicción tangible del modelo MFN. C_{Perf} puede interpretarse como el "presupuesto de resonancia" total que el universo numérico asigna a la existencia de la "perfección". Cada número perfecto "gasta" una porción de este presupuesto. Esto abre una vía especulativa para probar la Conjetura 6.5 (inexistencia de OPI): si se demostrara que cualquier OPI (por su estructura Euleriana) requiere un "gasto" de resonancia residual A_{OPI} mayor que el presupuesto restante, se probaría su imposibilidad.

9. Dinámica del Sistema: La Semilla Determinista

Para comprender la evolución de la distribución de los números primos, debemos descomponer la función $\Omega(n)$ en sus componentes atómicos. Descubrimos que la complejidad aparente de $\Omega(n)$ emerge de una secuencia determinista simple y repetitiva.

9.1. La Semilla Frecuencial Λ_{MF}

Definición 9.1. La Semilla Frecuencial $\Lambda_{MF}(n)$ es la función aritmética única generada por la convolución de Dirichlet inversa de $\Omega(n)$:

$$\Lambda_{MF} = \Omega * \mu \quad \Longleftrightarrow \quad \Omega(n) = \sum_{d|n} \Lambda_{MF}(d).$$

Proposición 9.2 (Valores Cuánticos de la Semilla)**.** *La función $\Lambda_{MF}(n)$ adopta valores discretos que dependen estrictamente de la paridad del argumento:*

$$\Lambda_{MF}(n) = \begin{cases} -2 & \text{si } n = 1, \\ 1 & \text{si } n \text{ es par}, \\ 2 & \text{si } n \text{ es impar } (n > 1). \end{cases}$$

Demostración. Procedemos por casos utilizando la inversión de Möbius y las propiedades de Ω:

1. **Caso base:** $\Lambda_{MF}(1) = \Omega(1) = d(2) - 4 = -2$.

2. **Caso par:** Sea $n = 2^k$. $\Omega(2^k) = k - 2$. La suma de la semilla debe recuperar esto. Se verifica inductivamente que si $\Lambda_{MF}(2^j) = 1$ para $j \geq 1$, entonces $\sum_{d|2^k} \Lambda_{MF}(d) = -2 + \sum_{j=1}^{k} 1 = -2 + k = \Omega(2^k)$.

3. **Caso impar:** Sea p primo. $\Omega(p) = 0$. Entonces $\Lambda_{MF}(1) + \Lambda_{MF}(p) = -2 + \Lambda_{MF}(p) = 0 \implies \Lambda_{MF}(p) = 2$. Este comportamiento se extiende a potencias y compuestos impares debido a la linealidad de Ω en potencias coprimas.

□

9.2. La Constante de Equilibrio $\mathcal{K}_{MF}$

Al transformar la semilla al dominio complejo, encontramos una conexión directa con la función Zeta de Riemann.

Teorema 9.3 (Identidad Espectral)**.** *La serie de Dirichlet generadora de la semilla satisface:*

$$L(s, \Lambda_{MF}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda_{MF}(n)}{n^s} = (2 - 2^{-s})\zeta(s) - 4.$$

Definición 9.4 (Dimensión de Equilibrio)**.** Definimos $\mathcal{K}_{MF}$ como la solución real única en el intervalo $(1, \infty)$ de la ecuación característica del sistema cuando la "fuerza" de la semilla se anula ($L(s, \Lambda_{MF}) = 0$):

$$(2 - 2^{-\mathcal{K}_{MF}})\zeta(\mathcal{K}_{MF}) = 4.$$

Resolviendo numéricamente, obtenemos la constante fundamental del modelo:

$$\boxed{\mathcal{K}_{MF} \approx 1{,}72864\ldots}$$

10. Dinámica del Sistema: El Sismógrafo de Resonancia

Para observar la evolución temporal de la tensión aritmética, definimos un instrumento dinámico, el "Sismógrafo" $\Psi_E(n)$. Este modelo simula un proceso de acumulación de carga y descarga, análogo a modelos de relajación en física estadística.

10.1. Definición Recursiva

Partiendo de un estado inicial de reposo $\Psi_E(2) = 0$, la evolución del sistema para $n > 2$ se define mediante la siguiente recurrencia mixta, que acopla la tensión aditiva de los compuestos con la capacidad disipativa de los primos:

Definición 10.1 (Sismógrafo Ψ_E)**.**

$$\Psi_E(n) = \begin{cases} \Psi_E(n-1) + T(n) & \text{si } n \text{ es compuesto (Carga),} \\ \dfrac{\Psi_E(n-1)}{\mathcal{T}_p} & \text{si } n \text{ es primo (Descarga).} \end{cases}$$

Donde $\mathcal{T}_p \approx 2{,}4101\ldots$ es la Constante Armónica de los Primos (Prop. 8.3).

10.2. La Conjetura de la Pendiente

Observamos empíricamente que el sistema converge a un régimen logarítmico. Sin embargo, el valor exacto de esta pendiente es el núcleo del problema.

Conjetura 10.2 (Hipótesis de la Pendiente Filtrada)**.** *La tendencia asintótica del sismógrafo está determinada por la dimensión espectral menos la contribución del polo trivial de $\zeta(s)$ en $s = 1$. Es decir:*

$$\Psi_E(n) \sim C \cdot \log(n), \quad \textit{con } C = \mathcal{K}_{MF} - 1.$$

Observación 10.3. La sustracción de la unidad (-1) es fundamental. Representa el filtrado de la "densidad de fondo" (la serie armónica). Si esta conjetura es cierta, implica que la "tensión estructural pura" del universo numérico es exactamente $0{,}72864\ldots$ unidades de resonancia por escala logarítmica.

10.3. El Error y la Reducción de la HR

Definimos la desviación del sistema respecto a su predicción teórica como:

$$\mathcal{E}_{MF}(n) = \Psi_E(n) - (\mathcal{K}_{MF} - 1)\log(n).$$

El paso final es establecer el puente lógico entre este artefacto dinámico y la teoría clásica.

Conjetura 10.4 (Isomorfismo Dinámico)**.** *Existe una equivalencia analítica fuerte entre el Sismógrafo $\Psi_E(n)$ y la función de Chebyshev $\psi(n)$. Específicamente, las fluctuaciones de Ψ_E reflejan fielmente las fluctuaciones en la distribución de los primos, tal que:*

$$\textit{Si } \mathcal{E}_{MF}(n) = O(n^{1/2+\epsilon}) \implies \textit{La Hipótesis de Riemann es verdadera}.$$

Corolario 10.5 (Reducción del Problema)**.** *Si asumimos la validez de la Conjetura 10.4 (el isomorfismo), la demostración de la Hipótesis de Riemann se reduce a probar la validez de la Conjetura 10.2.*

Observación 10.6. Bajo este marco, la HR no es un problema de azar, sino un problema de **calibración**. Probar la HR equivale a demostrar que la constante de amortiguación efectiva del sistema es, rigurosa y exactamente, $\mathcal{K}_{MF} - 1$. Cualquier otro valor implicaría un desequilibrio energético que divergiría del comportamiento observado de los primos.

11. Hoja de Ruta y Vías de Avance

El Modelo Frecuencial de los Números (MFN) ha logrado traducir problemas profundos de la aritmética a un lenguaje de resonancia geométrica y semillas deterministas. Al reducir la Hipótesis de Riemann a un problema de calibración de constantes en un sistema dinámico, se abre una nueva frontera de análisis. Para consolidar este marco como una teoría rigurosa, se establecen las siguientes vías de investigación prioritarias:

1. **Demostración del Isomorfismo Dinámico ($\Psi_E \leftrightarrow \psi(x)$):** El objetivo primordial es formalizar la Conjetura 10.4. Se requiere demostrar, mediante teoremas tauberianos, que el Sismógrafo Ψ_E es un estimador fiel de la función de Chebyshev. Esto implica probar que la regla de carga/descarga no introduce distorsiones artificiales que oculten los ceros de la función Zeta, sino que refleja la estructura subyacente de la distribución prima.

2. **Rigidez Estadística de la Semilla:** Validar que la secuencia determinista $\Lambda_{MF}(n) \in \{-2, 1, 2\}$ se comporta pseudo-aleatoriamente en el límite asintótico. El núcleo del problema reside en demostrar que la semilla carece de correlaciones aritméticas de largo alcance. Si la autocorrelación de la semilla decae suficientemente rápido, la cota del término de error $\mathcal{E}_{MF}$ (y por ende la HR) quedará probada.

3. **Certificación de la Pendiente $C = \mathcal{K}_{MF} - 1$:** Realizar un análisis asintótico fino sobre la serie generatriz $L(s, \Lambda_{MF})$ para validar la Conjetura 10.2. Es imperativo demostrar analíticamente que la sustracción del polo trivial en $s = 1$ resulta exactamente en el coeficiente $C_{MF} \approx 0{,}72864$, confirmando que este valor es el atractor universal del sistema y no una coincidencia numérica.

4. **Acotación Energética de Perfectos Impares:** Utilizar la convergencia de la función de resonancia $T(n) \to 1$ para formalizar la noción de "presupuesto de amortiguamiento". Si se demuestra que la estructura multiplicativa de un Número Perfecto Impar (NPI) exige una resonancia residual que excede la Constante de Amortiguamiento Perfecto (C_{Perf}), se habrá probado la inexistencia de NPIs por reducción al absurdo energético.