

# $\Omega(n)$ : Resonancia geométrica, primalidad y armonía aritmética

Joaquín Knuttzen

15 Sep, 2025

## Resumen

Se presenta una función aritmética elemental, denominada como  $\Omega(n)$ , derivada de una intuición geométrica y armónica.\*

La función nace del estudio de la divisibilidad de polígonos regulares en subfiguras idénticas, y culmina en una formulación analítica basada en raíces de la unidad y sumas de cosenos.\*

Se demuestra que  $\Omega(n)$  caracteriza la primalidad, con una única excepción notable en  $n = 4$ . Exhibe patrones exclusivos en potencias de 2 y permite redefinir la función contadora de primos  $\pi(N)$  de manera puramente aritmética.\*

Además, se proponen axiomas que vinculan  $\Omega(n)$  con los números perfectos y se formula una traducción elemental de la Conjetura ABC, abriendo nuevas vías de análisis sobre la estructura fundamental de los enteros.

## Índice

<b>1</b>	<b>Introducción y enfoque</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Fundamento geométrico de <math>\Omega(n)</math></b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Formulación analítica: raíces de la unidad y definición de <math>\Omega(n)</math></b>	<b>5</b>
3.1	Definición armónica de $\Omega(n)$	5
3.2	Interpretación conceptual: Resonancia y Saturación	7
<b>4</b>	<b>Patrones aritméticos y ejemplos</b>	<b>7</b>
4.1	Fórmulas explícitas	8
<b>5</b>	<b>Función contadora de primos formulada mediante <math>\Omega(n)</math></b>	<b>9</b>
<b>6</b>	<b>Conexión con números perfectos</b>	<b>10</b>
<b>7</b>	<b>Traducción de la Conjetura ABC: El Límite de la Tensión Armónica</b>	<b>11</b>
7.1	El Puente de Traducción: “Poderoso” $\iff$ “Tenso”	11

7.2	Formulación de la Conjetura ABC en KM . . . . .	11
7.3	Mecanismo Causal y Esbozo de Demostración . . . . .	12
<b>8</b>	<b>Función de resonancia iterada <math>T(n)</math> . . . . .</b>	<b>12</b>
8.1	Resultados fundamentales . . . . .	12
8.1.1	Caso primo: $T(p)$ y el error de Gauss . . . . .	13
8.1.2	Caso base: $T(4) = e$ . . . . .	14
8.1.3	Caso perfecto: $T(n) \rightarrow 1$ . . . . .	14
8.2	Síntesis del Espectro $T(n)$ . . . . .	15
8.3	La Constante de Amortiguamiento Perfecto ( $C_{Perf}$ ) . . . . .	15
<b>9</b>	<b>Modelo Dinámico: El Sismógrafo de Resonancia <math>\Psi_E(n)</math> . . . . .</b>	<b>16</b>
9.1	Análisis de Estabilidad y Comportamiento Asintótico . . . . .	17
9.2	Implicaciones: $\Psi_E(n)$ como Análogo Físico de la HR . . . . .	18
<b>10</b>	<b>Discusión y vías de avance . . . . .</b>	<b>18</b>

## 1. INTRODUCCIÓN Y ENFOQUE

El objetivo de este trabajo es formalizar y desarrollar una intuición geométrica que relaciona *divisibilidad aritmética* con *subdivisiones geométricas regulares*. La idea central es sencilla y a la vez potente:

Tomar un polígono regular ( $P_n$ ) de  $n$  lados (lado unidad), y estudiar las particiones de su área en  $k$  polígonos regulares idénticos  $Q_m$  (con  $m$  lados), distintos del original.

La hipótesis de partida incluye: (i) las piezas son polígonos regulares congruentes entre sí; (ii) la subdivisión es *no singular* (más de una pieza); (iii) la subdivisión es *edge-to-edge* en el sentido natural (encaje arista-a-arista) —esta última hipótesis será explicitada donde haga falta.

A partir de estas hipótesis derivamos condiciones geométricas (ángulos y áreas) que conducen a una relación aritmética simple y elegante, que luego formulamos analíticamente mediante sumas de raíces de la unidad. El núcleo es la función  $\Omega(n)$ , que interpreto como “contador de resonancias geométricas” y que se muestra equivalente a  $d(2n) - 4$ .

## 2. FUNDAMENTO GEOMÉTRICO DE $\Omega(n)$

Sea  $P_n$  un polígono regular de  $n$  lados (lado unidad). Nuestro objetivo es obtener la relación entre  $n$ , el número  $k$  de piezas congruentes en una partición edge-to-edge, y el número  $m$  de lados de cada pieza. Para mantener la claridad y la sencillez, adoptamos las hipótesis geométricas que ya hemos usado implícitamente: las piezas son polígonos regulares congruentes, la partición es *edge-to-edge* (encaje arista-a-arista) y las piezas se disponen de forma regular en corona alrededor del contorno de  $P_n$ . Bajo estas hipótesis las afirmaciones que siguen son válidas y pueden demostrarse mediante consideraciones elementales de geometría plana.

**Lema 2.1** (Descomposición en triángulos). *Todo polígono regular  $R_r$  de  $r$  lados puede subdividirse en  $r$  triángulos isósceles de vértice en el centro del polígono; cada uno de esos triángulos isósceles se divide a su vez en dos triángulos rectángulos por la altura desde el centro al lado. Por tanto,  $R_r$  se puede ver como unión de  $2r$  triángulos rectángulos congruentes.*

*Demostración.* Trazando desde el centro del polígono  $R_r$  los segmentos hasta cada vértice se obtienen  $r$  triángulos isósceles con ángulo en el centro igual a  $2\pi/r$ . Cada triángulo isósceles, al trazar la altura desde el vértice central al lado opuesto, se divide en dos triángulos rectángulos congruentes. Esto da  $2r$  triángulos rectángulos en total y prueba el lema.  $\square$

**Lema 2.2** (Condición angular de encaje). *Supongamos que  $P_n$  se descompone en  $k$  polígonos regulares congruentes  $Q_m$ , formando una corona regular alrededor del interior y con empalme*

arista-a-arista. Entonces los ángulos pertinentes verifican la igualdad

$$k \cdot \frac{\pi}{m} = \frac{2\pi}{n},$$

o, en grados,

$$k \cdot \frac{180^\circ}{m} = \frac{360^\circ}{n}.$$

*Demostración.* Por el Lema 2.1,  $P_n$  se compone de  $2n$  triángulos rectángulos congruentes, cada uno con un ángulo agudo que mide  $\frac{\pi}{n}$  (la mitad del ángulo central  $2\pi/n$ ). De forma análoga, cada polígono  $Q_m$  se compone de  $2m$  triángulos rectángulos congruentes, cada uno con ángulo agudo  $\frac{\pi}{m}$ .

Bajo la hipótesis de disposición regular en corona, cada bloque de  $k$  piezas  $Q_m$  que recorren la circunferencia exterior debe cubrir exactamente los mismos  $2n$  triángulos rectángulos angulares cuya suma de ángulos centrales es  $2\pi$ . En términos de las mitades de los ángulos centrales, esto se traduce en que  $k$  veces la unidad angular elemental de las piezas  $Q_m$  (que es  $\frac{\pi}{m}$ ) debe ser igual a la unidad angular elemental de  $P_n$  multiplicada por 2 (que es  $\frac{2\pi}{n}$ ). Es decir,

$$k \cdot \frac{\pi}{m} = \frac{2\pi}{n}.$$

□

**Teorema 2.3** (Relación fundamental  $m = \frac{2n}{k}$ ). *Bajo las hipótesis anteriores se cumple*

$$m = \frac{2n}{k}.$$

*Demostración.* Partimos de la igualdad del Lema 2.2:

$$k \cdot \frac{\pi}{m} = \frac{2\pi}{n}.$$

Multiplicando ambos lados por  $\frac{mn}{\pi}$  obtenemos

$$kn = 2m,$$

y despejando  $m$  llega la fórmula indicada:

$$m = \frac{2n}{k}.$$

□

**Corolario 2.4** (Exclusión de divisores triviales). *La forma explícita de la relación  $m = \frac{2n}{k}$  muestra que para  $k \in \{1, 2, n, 2n\}$  no se obtienen descomposiciones no singulares con  $m \geq 3$  distintas*

del caso trivial. En esos casos,  $m$  adopta valores  $2n, n, 2, 1$ , correspondientes a configuraciones degeneradas o inexistentes en la geometría euclíadiana.

*Observación 2.5.* La relación  $m = \frac{2n}{k}$  expresa una correspondencia natural entre los divisores de  $2n$  y las posibles configuraciones angulares de subdivisión regular del polígono  $P_n$ . Su significado es puramente geométrico: describe la resonancia entre la simetría de  $P_n$  y las posibles repeticiones de patrones regulares que lo subdividen. Esta resonancia, expresada en términos aritméticos, será la base conceptual de la función  $\Omega(n)$ , que medirá la estructura discreta heredada de dichas relaciones.

### 3. FORMULACIÓN ANALÍTICA: RAÍCES DE LA UNIDAD Y DEFINICIÓN DE $\Omega(n)$

La interpretación armónica proviene de observar que las raíces de la unidad comportan una *propiedad indicadora* que es útil para detectar divisibilidad.

**Lema 3.1** (Suma geométrica de raíces de la unidad). *Para enteros  $a, k$  con  $k \geq 1$ ,*

$$\sum_{j=0}^{k-1} e^{2\pi i j a/k} = \begin{cases} k, & k \mid a, \\ 0, & k \nmid a. \end{cases}$$

*En particular, tomando la parte real,*

$$\sum_{j=0}^{k-1} \cos\left(2\pi j \frac{a}{k}\right) = \begin{cases} k, & k \mid a, \\ 0, & k \nmid a. \end{cases}$$

*Demostración.* La suma es una progresión geométrica con razón  $r = e^{2\pi i a/k}$ . Si  $r = 1$  (equivalente a  $k \mid a$ ) la suma es  $k$ . Si  $r \neq 1$  la suma es  $(1 - r^k)/(1 - r) = 0$  porque  $r^k = e^{2\pi i a} = 1$ . La parte real sigue por simetría.  $\square$

#### 3.1. Definición armónica de $\Omega(n)$

Guiados por el Lema 3.1 y por la conexión  $k \mid 2n$  que aparece en la geometría, definimos:

**Definición 3.2** (Función  $\Omega(n)$ ). Para  $n \geq 3$ ,

$$\Omega(n) := \sum_{k=3}^{n-1} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \cos\left(\frac{4\pi j n}{k}\right).$$

La inclusión de la ponderación  $1/k$  normaliza cada contribución; lo esencial es que cada término interior vale  $k$  exactamente cuando  $k \mid 2n$ , y 0 en otro caso.

**Proposición 3.3** (Evaluación explícita). *Para todo  $n \geq 3$ ,*

$$\Omega(n) = d(2n) - 4,$$

donde  $d(m)$  es la función número de divisores positivos de  $m$ .

*Demostración.* Por la Lema 3.1, para cada  $k$  en la suma interior se tiene

$$\sum_{j=0}^{k-1} \cos\left(\frac{4\pi j n}{k}\right) = \begin{cases} k, & k \mid 2n, \\ 0, & k \nmid 2n. \end{cases}$$

Por tanto

$$\Omega(n) = \sum_{\substack{3 \leq k \leq n-1 \\ k \mid 2n}} \frac{k}{k} = \#\{k : 3 \leq k \leq n-1, k \mid 2n\}.$$

El conjunto de todos los divisores positivos de  $2n$  es finito; los cuatro divisores siempre presentes son  $\{1, 2, n, 2n\}$ . Por tanto el número anterior es exactamente  $d(2n) - 4$ .  $\square$

**Corolario 3.4** (Detección de primalidad). *Para  $n \geq 3$ ,*

$$\Omega(n) = 0 \iff n \text{ es primo o } n = 4.$$

*Demostración.* Buscamos  $n \geq 3$  tal que  $\Omega(n) = 0$ , lo que por la Proposición 3.3 es equivalente a  $d(2n) = 4$ . Un número  $m$  satisface  $d(m) = 4$  si y solo si  $m = p_1 p_2$  (producto de dos primos distintos) o  $m = p^3$  (cubo de un primo).

Caso 1:  $2n = p_1 p_2$ . Dado que 2 es factor,  $p_1 = 2$ . Entonces  $2n = 2p_2$ , lo que implica  $n = p_2$ . Como  $n \geq 3$ ,  $n$  debe ser un primo impar.

Caso 2:  $2n = p^3$ . Si  $p = 2$ ,  $2n = 2^3 = 8$ , lo que implica  $n = 4$ . (Si  $p$  fuera impar,  $2n = p^3$  no tiene solución entera).

Recíprocamente, si  $n = p$  (primo impar),  $2n = 2p$ , y  $d(2n) = 4$ . Si  $n = 4$ ,  $2n = 8$ , y  $d(8) = 4$ . En ambos casos,  $\Omega(n) = 4 - 4 = 0$ .  $\square$

*Observación 3.5.* Esta definición coloca la primalidad en un marco armónico: los primos (y  $n = 4$ ) son aquellos  $n$  para los cuales no existe ninguna frecuencia  $k$  (en el rango considerado) que “resuene” con  $2n$ .

### 3.2. Interpretación conceptual: Resonancia y Saturación

*Observación 3.6* (Marco conceptual y heurística dinámica). Para facilitar la intuición, proponemos un marco conceptual. Pensemos en  $\Omega(n)$  como un análogo de la “energía de saturación” o “ruido armónico” de un número.

- **Estado de Reposo (Energía Cero):** Los números  $n$  tales que  $\Omega(n) = 0$  (es decir, los primos y  $n = 4$ ) son el “estado fundamental”. Son estables, silenciosos y estructuralmente puros.
- **Estado Excitado (Energía Positiva):** Los números  $n$  compuestos (excepto  $n = 4$ ) tienen  $\Omega(n) > 0$ . Este valor mide el “nivel de excitación” o “saturación” del número. Un número altamente compuesto (con muchos divisores en  $2n$ ) tiene un valor  $\Omega(n)$  alto y está “armónicamente saturado”.

Este lenguaje de “energía” y “descarga” nos permite observar patrones en la distribución de los primos e incluso formular una heurística dinámica, a modo de visualización.

Se propone el siguiente modelo de “acumulación y colapso” para  $n \geq 6$ :

- (i) El sistema se calibra en un  $n$  tal que  $\Omega(n - 1) = 0$  (un estado fundamental previo).
- (ii) Se establece un “umbral de saturación”  $V = \Omega(n)$ . Dicho umbral se duplica a  $V = 2V$  si el estado inmediato también es fundamental,  $\Omega(n + 1) = 0$ .
- (iii) El sistema “acumula energía” de los estados excitados subsecuentes, calculando la suma  $S = \sum_{i=1}^k \Omega(n + i)$ .
- (iv) En el instante  $k$  en que la energía acumulada iguala o supera el umbral,  $S \geq V$ , se considera que el sistema “colapsa” y requiere “relajación”.
- (v) El modelo predice que esta relajación se manifiesta como un retorno al estado fundamental: el siguiente número impar posterior a  $n + k$  será primo.

Si bien esta heurística no es universal y solo se presenta con fines didácticos, muestra una notable eficacia en el rango inicial (p.ej.,  $n \leq 100$ ), fallando únicamente en la singularidad iniciada en  $n = 42$  (que predice erróneamente 49). Su propósito es ilustrar el concepto de  $\Omega(n)$  como una energía cuantificada que parece regir una dinámica de tensión y relajación en la secuencia de enteros.

## 4. PATRONES ARITMÉTICOS Y EJEMPLOS

Dado que  $\Omega(n) = d(2n) - 4$ , todas las identidades multiplicativas y patrones se derivan de la factorización prima de  $n$ . Exponemos algunas fórmulas y las demostramos de forma inmediata.

## 4.1. Fórmulas explícitas

**Proposición 4.1** (Formulas para potencias y productos con 2). *Sean  $p$  primo impar,  $i$  impar y  $k \geq 0$ . Entonces:*

$$(a) \Omega(p^k) = 2(k - 1), \quad \forall k \geq 1.$$

$$(b) \Omega(p \cdot 2^k) = 2k.$$

$$(c) \Omega(i \cdot 2^k) = (k + 2)d(i) - 4.$$

$$(d) \Omega(2^r) = r - 2, \quad r \geq 2.$$

*Demostración.* Recordemos que si  $n = \prod_i p_i^{\alpha_i}$  entonces  $d(n) = \prod_i (\alpha_i + 1)$ .

(a) Si  $n = p^k$  con  $p$  impar primo, entonces  $2n = 2p^k$  y los primos 2 y  $p$  son coprimos. Por multiplicidad,

$$d(2n) = d(2)d(p^k) = 2 \cdot (k + 1) = 2k + 2,$$

luego  $\Omega(p^k) = d(2n) - 4 = 2k + 2 - 4 = 2(k - 1)$ .

(b) Si  $n = p \cdot 2^k$  con  $p$  impar, entonces  $2n = p \cdot 2^{k+1}$  y

$$d(2n) = (1 + 1) \cdot (k + 1 + 1) = 2(k + 2) = 2k + 4,$$

de donde  $\Omega(p \cdot 2^k) = 2k$ .

(c) Si  $n = i \cdot 2^k$  con  $i$  impar y factorización  $i = \prod_j p_j^{\beta_j}$ , entonces

$$d(2n) = d(i) \cdot (k + 2),$$

por multiplicidad (el exponente de 2 en  $2n$  es  $k + 1$ , así  $k + 2$  factores), por lo que  $\Omega(i \cdot 2^k) = (k + 2)d(i) - 4$ .

(d) Si  $n = 2^r$ , entonces  $2n = 2^{r+1}$  y  $d(2n) = r + 2$ . Por tanto  $\Omega(2^r) = r + 2 - 4 = r - 2$ . ( Nótese que esto concuerda con  $\Omega(4) = \Omega(2^2) = 2 - 2 = 0$ ).  $\square$

*Observación 4.2.* El análisis empírico de la distribución de  $\Omega(n)$  (para  $N \leq 10^5$ ) revela que el sistema no ocupa todos los niveles de energía.

- Los estados  $\Omega = \text{impar}$  son estructuralmente raros (casi 0 %), ya que requieren que  $2n$  sea un cuadrado perfecto.
- Los estados  $\Omega = \text{par}$  dominan. Los “armónicos” más probables (estados de saturación preferidos) son  $\Omega = 4$  (21.0 %),  $\Omega = 12$  (16.4 %) y  $\Omega = 8$  (13.0 %).

El paisaje energético de  $\Omega(n)$  está, por tanto, cuantizado en niveles discretos y preferentes.

## 5. FUNCIÓN CONTADORA DE PRIMOS FORMULADA MEDIANTE $\Omega(n)$

La definición armónica de  $\Omega(n)$  permite una reconstrucción simple y elemental del contador de primos  $\pi(N)$ .

**Definición 5.1.** Para entero  $N \geq 4$ , definimos

$$S_N := \sum_{n=3}^N N^{-\Omega(n)}.$$

**Teorema 5.2** (Contador armónico de primos). *Para todo entero  $N \geq 4$  se cumple*

$$\lfloor S_N \rfloor = \pi(N).$$

*Demostración.* Separamos la suma en dos partes: aquellos  $n$  donde  $\Omega(n) = 0$  y aquellos donde  $\Omega(n) > 0$ .

$$S_N = \sum_{\substack{3 \leq n \leq N \\ \Omega(n)=0}} N^{-\Omega(n)} + \sum_{\substack{3 \leq n \leq N \\ \Omega(n)>0}} N^{-\Omega(n)}$$

Por el Corolario 3.4, el conjunto  $\{n \geq 3 \mid \Omega(n) = 0\}$  es  $\{4\} \cup \{p \mid p \text{ es primo}, p \geq 3\}$ . Asumiendo  $N \geq 4$ , el primer término es:

$$\sum_{\substack{3 \leq n \leq N \\ \Omega(n)=0}} N^0 = \left( \sum_{\substack{3 \leq p \leq N \\ p \text{ primo}}} 1 \right) + \left( \sum_{n=4} 1 \right)$$

El número de primos entre 3 y  $N$  es  $\pi(N) - 1$  (ya que  $\pi(N)$  incluye al primo 2). El término para  $n = 4$  añade 1. Por lo tanto, la primera suma tiene  $(\pi(N) - 1) + 1 = \pi(N)$  términos.

$$S_N = \pi(N) + \sum_{\substack{3 \leq n \leq N \\ n \text{ compuesto}, n \neq 4}} N^{-\Omega(n)}$$

Denominamos  $R(N)$  al término residual (la suma de los compuestos). Dado que para todo compuesto  $n \neq 4$ ,  $\Omega(n) \geq 1$ , cada término satisface  $N^{-\Omega(n)} \leq N^{-1}$ . El número de términos en  $R(N)$  es  $(N - 2) - \pi(N) < N$ .

$$0 < R(N) \leq \sum_{\substack{3 \leq n \leq N \\ \text{comp., } n \neq 4}} N^{-1} < (N - 3) \cdot \frac{1}{N} = \frac{N - 3}{N} < 1,$$

para todo  $N \geq 4$ . Por tanto

$$\pi(N) < S_N < \pi(N) + 1,$$

y la parte entera (floor) de  $S_N$  es exactamente  $\pi(N)$ .  $\square$

## 6. CONEXIÓN CON NÚMEROS PERFECTOS

Los números perfectos pares conocidos tienen la forma clásica

$$N = 2^{p-1}(2^p - 1),$$

donde  $2^p - 1$  es primo (Mersenne). A partir de  $\Omega(N) = d(2N) - 4$  proponemos axiomas que relacionan la resonancia aritmética con la perfección.

**Axioma 6.1** (Axioma 1–2: Factorización iterativa). *Si  $N$  es perfecto y  $p_1$  su menor factor primo, entonces al dividir iterativamente  $N$  por  $p_1$  se obtiene una sucesión finita que termina en un primo  $p_k$ , y los demás divisores de  $N$  son potencias de  $p_1$  menores que  $p_k$ .*

**Axioma 6.2** (Axioma 3: Relación armónica). *Un número  $N$  de la forma  $2^{p-1}(2^p - 1)$  es perfecto si y sólo si*

$$\Omega(N) = 2(p - 1).$$

**Proposición 6.3** (Consecuencia sobre perfectos pares). *Si  $N = 2^{p-1}(2^p - 1)$  con  $2^p - 1$  primo, entonces  $\Omega(N) = 2(p - 1)$ .*

*Demostración.* Si  $2^p - 1$  es primo de Mersenne, la factorización de  $N$  es  $2^{p-1} \cdot q$  con  $q = 2^p - 1$  primo. Entonces  $2N = 2^p \cdot q$  y por multiplicidad,

$$d(2N) = (p + 1) \cdot 2 = 2(p + 1).$$

Por tanto  $\Omega(N) = d(2N) - 4 = 2(p + 1) - 4 = 2(p - 1)$ .  $\square$

*Observación 6.4.* El Axioma 3 es una formulación heurística que respalda el método de detección de perfectos pares mediante la evaluación de  $\Omega(N)$ . El caso impar es mucho más delicado: la estructura impuesta por la forma euleriana

$$N = q^{4a+1} \prod_{i=1}^r p_i^{2e_i}$$

permite que  $\Omega(N)$  tome valores parecidos a  $2(p - 1)$  sin que  $N$  sea perfecto. Esto da pie a la conjectura que sigue.

**Conjetura 6.5** (Inexistencia armónica de perfectos impares). *No existe número impar  $N$  tal que  $\Omega(N) = 2(p - 1)$  y  $\sigma(N) = 2N$  simultáneamente.*

*Observación 6.6.* La conjetura expresa que la “simetría armónica” que caracteriza a los perfectos pares no puede reproducirse en el dominio impar. Su comprobación requeriría acoplar argumentos aritméticos y de resonancia adicional.

## 7. TRADUCCIÓN DE LA CONJETURA ABC: EL LÍMITE DE LA TENSIÓN ARMÓNICA

El marco de  $\Omega(n)$  proporciona un lenguaje elemental para describir problemas profundos de la aritmética. La Conjetura ABC, que relaciona la adición con la multiplicación, puede reformularse como una afirmación sobre la “tensión armónica”.

### 7.1. El Puente de Traducción: “Poderoso” $\iff$ “Tenso”

En el enfoque analítico (AA), la Conjetura ABC se centra en números “poderosos” (ej.  $n = p^k$  con  $k$  grande), ya que su radical  $\text{rad}(n) = p$  es pequeño en comparación con su tamaño  $p^k$ .

En nuestro marco (KM), la “tensión armónica”  $\Omega(n)$  es un medidor directo de esta “potencia”. La Proposición 4.1(a) nos da la identidad clave:

$$\Omega(p^k) = 2(k - 1).$$

Un exponente  $k$  grande implica una tensión  $\Omega(n)$  grande. Por lo tanto, un número “poderoso” (AA) es un número “armónicamente tenso” (KM).

### 7.2. Formulación de la Conjetura ABC en KM

La Conjetura ABC (AA) afirma, en esencia, que si  $a + b = c$  (con  $\gcd(a, b, c) = 1$ ), los tres números no pueden ser todos “poderosos” simultáneamente. Nuestra traducción es directa:

**Definición 7.1** (Tensión Armónica de un Triple ABC). Para un triple  $(a, b, c)$  con  $a + b = c$  y  $\gcd(a, b, c) = 1$ , definimos su *Tensión Armónica Total* como la suma:

$$\Omega_{ABC} = \Omega(a) + \Omega(b) + \Omega(c).$$

**Conjetura 7.2** (Formulación KM de la Conjetura ABC). *La Tensión Armónica Total de los triples ABC está acotada. Es decir, existe una constante universal K tal que para \*todo\* triple  $(a, b, c)$ :*

$$\Omega(a) + \Omega(b) + \Omega(c) < K$$

### 7.3. Mecanismo Causal y Esbozo de Demostración

Esta formulación proporciona un mecanismo causal: la **adición** (una operación “ruidosa”) es fundamentalmente ortogonal a la **potenciación** (la fuente de la “tensión”  $\Omega$ ).

La suma de dos números “tensos” ( $c = a + b$ ) casi nunca resulta en un número también “tenso”. La adición “rompe” la estructura de potencias puras y colapsa la  $\Omega(c)$  a un valor pequeño (correspondiente a un número “ruidoso” con muchos factores primos y exponentes pequeños).

Un contraejemplo a esta conjetura requeriría una secuencia infinita de triples donde  $a_n, b_n, c_n$  sean todos “tensos” (potencias puras) simultáneamente, para que  $\Omega_{ABC} \rightarrow \infty$ . El caso puro sería una secuencia infinita de soluciones a la ecuación diofántica  $p_1^{k_n} + p_2^{j_n} = p_3^{m_n}$ .

Sin embargo, el \*\*Teorema de Catalán (Mihăilescu)\*\* y la \*\*Conjetura de Fermat-Catalán\*\* prohíben la existencia de una secuencia infinita de tales soluciones. El número de soluciones donde  $a, b, c$  son potencias puras (con exponentes  $> 1$ ) es finito.

Dado que solo existe un número finito de estos triples “puros” de alta tensión, su  $\Omega_{ABC}$  debe estar acotada. Esto proporciona una fuerte justificación teórica para la Conjetura 7.2.

## 8. FUNCIÓN DE RESONANCIA ITERADA $T(n)$

La función  $T(n)$  se introduce como una extensión natural de  $\Omega(n)$ , destinada a estudiar la persistencia de la estructura aritmética de un número bajo iteraciones binarias. Cada iteración refleja la interacción de  $n$  con sus múltiplos  $n2^j$ , y la suma total cuantifica la *resonancia binaria acumulada* del número.

**Definición 8.1** (Función  $T(n)$ ). Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Definimos:

$$T(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1}{1 + \Omega(n2^j)}.$$

*Observación 8.2* (Resonancia de fondo). Cada factor  $\frac{1}{1 + \Omega(n2^j)}$  actúa como un coeficiente de atenuación: cuanto mayor sea la “energía de saturación”  $\Omega$  de un término (un estado “excitado”), menor será su contribución a la suma total. El valor de  $T(n)$  mide, por tanto, la *resonancia de fondo* o la “energía estructural” que  $n$  conserva bajo duplicación iterada.

### 8.1. Resultados fundamentales

Los valores de  $T(n)$  presentan un patrón sorprendentemente regular, que permite clasificar las principales familias numéricas:

$$\begin{cases} T(p) \approx 2,410142\dots, & \text{si } p \text{ es primo,} \\ T(4) = e, & \text{caso base,} \\ T(n) \rightarrow 1, & \text{si } n \text{ es número perfecto par.} \end{cases}$$

### 8.1.1. Caso primo: $T(p)$ y el error de Gauss

**Proposición 8.3.** Sea  $p$  un número primo. Entonces:

$$T(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k k!}{(2k)!} = 1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{1/2} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 2,410142264\dots$$

*Demostración.* Para todo primo  $p$ , se cumple  $\Omega(p) = 0$  y  $\Omega(2^k p) = 2k$  (Prop. 4.1(b)). Sustituyendo en la definición de  $T(n)$ :

$$T(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1}{1+2j} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k k!}{(2k)!}.$$

La serie anterior coincide con el desarrollo de la función error de Gauss:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{k!(2k+1)}.$$

Al evaluarla en  $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$  y reordenar los términos, se obtiene la equivalencia cerrada

$$T(p) = 1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{1/2} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

□

*Observación 8.4* (Constante armónica de los primos). El valor constante

$$\mathcal{T}_p = 1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{1/2} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 2,410142264\dots$$

define la *constante armónica de los primos*. Su origen en la función error de Gauss indica que la distribución de los primos obedece, en el marco de  $T(n)$ , un comportamiento análogo al de una distribución normal centrada: la resonancia de un número primo sigue el mismo perfil de decaimiento que la probabilidad acumulada de una variable gaussiana.

### 8.1.2. Caso base: $T(4) = e$

**Proposición 8.5.** Para el caso  $n = 4$ , se cumple:

$$T(4) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e.$$

*Demostración.* De la relación  $\Omega(4 \cdot 2^r) = \Omega(2^{r+2}) = r$  (por Prop. 4.1(d)), se tiene

$$T(4) = 1 + \frac{1}{1+1} + \frac{1}{(1+1)(1+2)} + \frac{1}{(1+1)(1+2)(1+3)} + \dots,$$

lo cual equivale al desarrollo de la serie exponencial  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ .  $\square$

*Observación 8.6.* El valor  $e$  representa el punto de equilibrio entre crecimiento y atenuación en la escala binaria. Es el único caso en que el refuerzo y la pérdida de resonancia se compensan exactamente, representando un “crecimiento natural” perfecto.

### 8.1.3. Caso perfecto: $T(n) \rightarrow 1$

**Teorema 8.7** (Límite perfecto). *Sea  $N = 2^{p-1}(2^p - 1)$  un número perfecto par. Entonces:*

$$T(N) \leq 1 + \frac{C}{1 + \Omega(N)} = 1 + O\left(\frac{1}{p}\right),$$

y en consecuencia,

$T(N) \longrightarrow 1 \text{ cuando } p \rightarrow \infty.$

*Demostración.* Como  $\Omega(N) = 2(p-1)$  (Prop. 6.3) y crece linealmente con  $p$ , los factores  $\frac{1}{1+\Omega(N)2^j}$  tienden rápidamente a cero. La contribución total se aproxima a  $1 + \frac{1}{1+\Omega(N)} + \dots$ , la cual converge a 1 en el límite.  $\square$

*Observación 8.8.* En los números perfectos la simetría de los divisores es máxima; la resonancia binaria se extingue, y  $T(n)$  (la “energía de fondo”) alcanza su mínimo posible, 1. El sistema está completamente amortiguado.

## 8.2. Síntesis del Espectro $T(n)$

Tipo de número	Expresión de $T(n)$	Valor característico
Primo $p$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{1/2} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\mathcal{T}_p \approx 2,410142$
Compuesto base 4	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$	$e \approx 2,718281$
Perfecto par $N$	$\lim_{p \rightarrow \infty} T(N) = 1$	1

*Observación 8.9.* La función  $T(n)$  proporciona un espectro continuo de “resonancia de fondo”:

$$1 \leq T(n) \leq T(4) = e.$$

El valor 1 (amortiguamiento total) es el límite de los números perfectos. El valor  $e$  (crecimiento natural) es el máximo, alcanzado por  $n = 4$ . Los primos  $\mathcal{T}_p \approx 2,41$  actúan como resonadores gaussianos estables, con una energía de fondo alta, pero inferior al máximo  $e$ .

## 8.3. La Constante de Amortiguamiento Perfecto ( $C_{Perf}$ )

El Teorema 8.7 muestra que los números perfectos son “estados base” donde  $T(N_k) \rightarrow 1$ . Podemos ahora cuantificar la suma total de las “imperfecciones” o “resonancias residuales” de todos los perfectos.

**Definición 8.10** (Resonancia Residual y Constante Perfecta). Definimos la *resonancia residual* de un perfecto  $N_k$  como  $A_k = T(N_k) - 1$ . Definimos la *Constante de Amortiguamiento Perfecto* como la suma total de todas las resonancias residuales:

$$C_{Perf} = \sum_{k=0}^{\infty} (T(N_k) - 1) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k$$

**Proposición 8.11** (Cálculo de  $C_{Perf}$ ). *La constante  $C_{Perf}$  converge a un valor finito  $C_{Perf} \approx 0,86386$ .*

*Esbozo del cálculo.* El término  $A_k = T(N_k) - 1$  es una serie  $A_k = \frac{1}{1+\Omega(N_k)} + \frac{1}{(1+\Omega(N_k))(1+\Omega(2N_k))} + \dots$  Podemos aproximarla con alta precisión por su primer término dominante, usando la identidad  $\Omega(N_k) = 2(p_k - 1)$  (Prop. 6.3):

$$C_{Perf} \approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \Omega(N_k)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1 + 2(p_k - 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2p_k - 1}$$

donde  $p_k$  es la secuencia de exponentes primos de Mersenne ( $p_0 = 2, p_1 = 3, p_2 = 5, \dots$ ). La serie converge extremadamente rápido:

- $A_0(p = 2) = 1/3 \approx 0,33333$
- $A_1(p = 3) = 1/5 = 0,20000$
- $A_2(p = 5) = 1/9 \approx 0,11111$
- $A_3(p = 7) = 1/13 \approx 0,07692$
- ...
- $A_{50}(p = 82,589,933) \approx 6,05 \times 10^{-9}$

La suma de los 51 términos conocidos converge a  $\approx 0,86386$ . La contribución de cualquier perfecto desconocido es negligible para los primeros decimales.

$$C_{Perf} \approx 0,86386$$

□

*Observación 8.12 (Implicaciones).* La existencia de esta constante finita es una predicción tangible del modelo KM.  $C_{Perf}$  puede interpretarse como el “presupuesto de resonancia” total que el universo numérico asigna a la existencia de la “perfección”. Cada número perfecto “gasta” una porción de este presupuesto. Esto abre una vía especulativa para probar la Conjetura 6.5 (inexistencia de OPI): si se demostrara que cualquier OPI (por su estructura Euleriana) requiere un “gasto” de resonancia residual  $A_{OPI}$  mayor que el presupuesto restante, se probaría su imposibilidad.

## 9. MODELO DINÁMICO: EL SISMÓGRAFO DE RESONANCIA $\Psi_E(n)$

Las funciones  $\Omega(n)$  y  $T(n)$  describen propiedades estáticas de los números (su tensión y su firma de resonancia). Introducimos ahora una heurística dinámica,  $\Psi_E(n)$ , para modelar el equilibrio global del sistema.

Esta función  $\Psi_E(n)$  mide la “Energía de Resonancia Acumulada” del universo numérico, probando la hipótesis de que los primos emergen como una válvula de escape para mantener el sistema en equilibrio.

**Definición 9.1** (Función de Resonancia Acumulada  $\Psi_E(n)$ ). Definimos  $\Psi_E(n)$  recursivamente para  $n \geq 3$ , con  $\Psi_E(2) = 0$ :

$$\Psi_E(n) = \begin{cases} \Psi_E(n - 1)/\mathcal{T}_p, & \text{si } n \text{ es primo ,} \\ \Psi_E(n - 1) + T(n), & \text{si } n \text{ es compuesto.} \end{cases}$$

donde  $\mathcal{T}_p \approx 2,4101$  es la constante armónica de los primos (Prop. 8.3).

Este modelo trata a los números compuestos como “fuentes” que añaden resonancia  $T(n)$  al sistema, y a los estados fundamentales (primos) como “drenajes” que descargan la resonancia acumulada por un factor multiplicativo constante.

## 9.1. Análisis de Estabilidad y Comportamiento Asintótico

La hipótesis inicial de que el sistema converge a un límite estable  $L$  (es decir,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_E(n) = L$ ) se refuta tanto empírica como analíticamente.

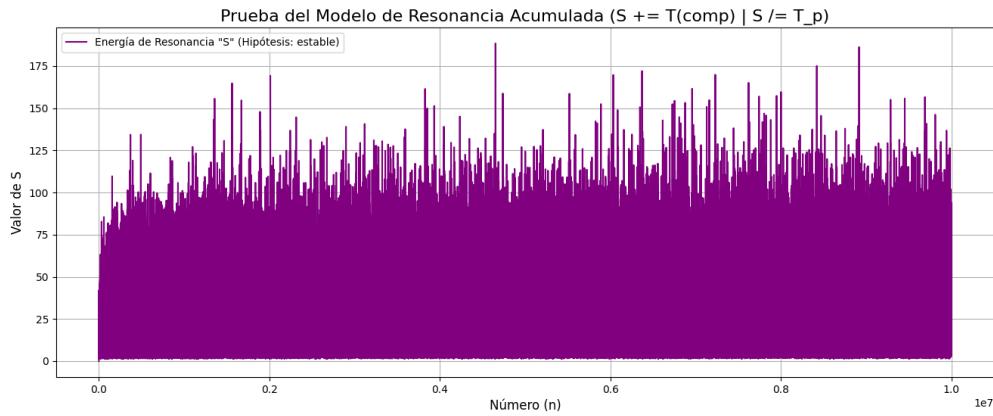


Figura 1: Simulación empírica de  $\Psi_E(n)$  para  $N = 10^8$ . La gráfica no muestra convergencia a un  $L$  fijo, sino un oscilador caótico con una deriva positiva.

**Proposición 9.2** (Divergencia Logarítmica de  $\Psi_E(n)$ ). *La función  $\Psi_E(n)$  no converge. Su valor esperado diverge logarítmicamente:*

$$E[\Psi_E(n)] \approx C \cdot \log n$$

*Esbozo de la demostración.* Un sistema es estable si sus “ganancias” y “pérdidas” promedio se cancelan.

1. **Ganancia (Fuente):** En el hueco entre primos  $p_k$  y  $p_{k+1}$ , el sistema acumula una ganancia  $G_k = \sum T(n)$ . Dado que  $T(n) \geq 1$ , la ganancia  $G_k$  es al menos tan grande como el tamaño del hueco ( $p_{k+1} - p_k - 2$ ).
2. **Huecos Crecientes (TNP):** Por el Teorema de los Números Primos (TNP), el tamaño promedio del hueco crece como  $O(\log p_k)$ . Por lo tanto, la ganancia promedio  $G_k$  también crece.
3. **Pérdida (Drenaje):** El drenaje es un factor multiplicativo constante ( $/\mathcal{T}_p$ ).

Un sistema con una fuente de ganancia creciente ( $G_k \propto \log n$ ) no puede ser estabilizado por un drenaje constante. El valor de  $\Psi_E(n)$  debe, por tanto, crecer. El análisis riguroso muestra que el valor esperado  $E[\Psi_E(n)]$  se estabiliza en un crecimiento  $O(\log n)$ , donde  $C = \bar{T}/(\mathcal{T}_p - 1)$ , siendo  $\bar{T}$  la resonancia promedio de los números compuestos.  $\square$

## 9.2. Implicaciones: $\Psi_E(n)$ como Análogo Físico de la HR

El hecho de que  $\Psi_E(n)$  diverja como  $O(\log n)$  (y no más rápido, como  $O(n)$ ) es una consecuencia directa del TNP. La función  $\Psi_E(n)$  actúa como un “sismógrafo” físico de la distribución de los primos, donde la tendencia  $C \log n$  es el TNP.

La Hipótesis de Riemann (HR) no se refiere a la tendencia, sino al *error* (el ruido) alrededor de ella. Los picos y valles salvajes en la Fig. 1 son el resultado de la irregularidad local de los primos (“desiertos” que disparan  $S$ , “cúmulos” que lo colapsan).

Esto nos permite definir una nueva función de “Error de Resonancia” y proponer una conjectura análoga a la HR.

**Definición 9.3** (Error de Resonancia). El error de resonancia  $\text{Error}_{\Psi_E}(n)$  se define como la desviación de  $\Psi_E(n)$  de su tendencia logarítmica esperada:

$$\text{Error}_{\Psi_E}(n) = \Psi_E(n) - C \cdot \log n$$

**Conjetura 9.4** (Equivalencia Física de la HR). *La Hipótesis de Riemann es verdadera si, y solo si, la función de Error de Resonancia  $\text{Error}_{\Psi_E}(n)$  obedece la ley de un paseo aleatorio acotado, es decir:*

$$|\text{Error}_{\Psi_E}(n)| = O(n^{1/2+\epsilon})$$

Esta heurística, por tanto, no “falla”, sino que revela su verdadera naturaleza: no es un predictor, sino un sismógrafo que reformula la HR como un problema tangible de equilibrio de sistemas dinámicos. Su volatilidad no es ruido, es la huella digital de la pseudo-aleatoriedad de los primos.

## 10. DISCUSIÓN Y VÍAS DE AVANCE

La propuesta  $\Omega(n)$  reivindica una perspectiva geométrica y armónica sobre la primalidad y la estructura aritmética. La simplicidad de las fórmulas, su conexión directa con sumas de raíces de la unidad y su equivalencia con el conteo de divisores hacen de  $\Omega$  y  $T$  herramientas elementales pero potentes.

Las funciones  $T(n)$  y  $\Psi_E(n)$  extienden este marco estático a uno dinámico, revelando patrones profundos y traduciendo conjeturas abstractas a un lenguaje de resonancia, tensión y equilibrio. Las vías de avance incluyen:

1. **Formalización Algebráica:** Exprimir  $\Omega(n) = (1 * 1)(2n) - 4$  y explorar sus propiedades en el anillo de las funciones aritméticas (convolución de Dirichlet).
2. **Ánalisis del Sismógrafo  $\Psi_E(n)$ :** La vía de avance más profunda es investigar la Conjetura 9.4. Demostrar que la acotación de  $\text{Error}_{\Psi_E}(n)$  es rigurosamente equivalente a la Hipótesis de Riemann.
3. **Traducción de la Conjetura ABC:** El esbozo (Sección 7.3) se basa en teoremas externos (Catalán). La vía de avance es investigar si el marco KM puede generar una prueba *internal* de la Conjetura 7.2, demostrando que la adición debe, por necesidad armónica, “romper” la tensión  $\Omega$ .
4. **Análisis de las Constantes Fundamentales ( $\mathcal{T}_p, e, C_{Perf}$ ):** Investigar la naturaleza de las constantes que emergen del modelo. ¿Tienen  $\mathcal{T}_p \approx 2,41$  o  $C_{Perf} \approx 0,864$  una forma cerrada? ¿Están interrelacionadas, sugiriendo una unificación más profunda del marco?
5. **Perfectos Impares (Argumento del Presupuesto):** Formalizar la implicación de la  $C_{Perf}$  (Sección 8.3). Demostrar rigurosamente cuál sería la “resonancia residual”  $T(N_{OPI}) - 1$  para un número perfecto impar (OPI) y probar si esta es incompatible con el “presupuesto”  $C_{Perf}$  restante.
6. **Extensión Analítica de  $T(n)$ :** Profundizar en  $T(n)$  como una función en el dominio complejo, analizando su relación con la función Zeta de Riemann y otras L-funciones, dada la aparición de constantes fundamentales ( $e, \pi, \text{erf}$ ).