Índice general

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Metodo del segundo momento

1.2. Resultados sobre Galton-Watson Tree

1.3. Teorema de la Eleccion

Capítulo 2

Resultado sobre el branching process

2.1. Resultado sobre la última generación

Durante esta sección, para no sobrecargar la notación, dado un árbol de Galton-Watson T que no se extingue, vamos a considerar $P(\cdot \mid T) = P(\cdot)$, de forma análoga con la esperanza.

Teorema 1. *Dado un GFF $\eta = (\eta_v)_{v \in T_n}$, construido como antes, se tiene que*

$$E\left[\max_{v \in L_n} \eta_v\right] = n\sqrt{2 \log m}\,(1 + o(1)). \tag{2.1}$$

2.1.1. Cota superior

Sea $\bar{Z}_n = \sum_{v \in L_n} \mathbf{1}_{S_v > (1+\epsilon)x^* n}$, que cuenta la cantidad de vértices, en la generación n-ésima, que se encuentran por encima de $nx^*(1+\epsilon)$. Aplicando el método del primer momento, tenemos, para todo $v \in L_n$:

$$E[\bar{Z}_n] = |L_n|\, P(S_v > n(1+\epsilon)x^*) \leq CWk^n e^{-nI((1+\epsilon)x^*)},$$

donde aplicamos la desigualdad de Chebyshev en la última desigualdad y la definición de I. Además, por la monotonía estricta de I, tenemos que $E[\bar{Z}_n] \leq e^{-nc(\epsilon)}$, para algún $c(\epsilon) > 0$. Por lo tanto,

$$P(M_n > (1+\epsilon)nx^*) \leq E[\bar{Z}_n] \leq CWe^{-c(\epsilon)n}. \tag{2.2}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} E[M_n] \leq E[M_n \mathbf{1}_{M_n \geq 0}] &= \int_0^\infty P(M_n > t)\,dt \\ &= \int_0^{(1+\epsilon)nx^*} P(M_n > t)\,dt + \int_{(1+\epsilon)nx^*}^\infty P(M_n > t)\,dt. \end{aligned}$$

Luego, usando la cota de (4.2) en el segundo integrando de (4.3) e integrando, llegamos a que

$$E[M_n] \leq nx^*(1+\epsilon) + nx^* \frac{CWe^{-2nI(x^*)\epsilon}}{2nI(x^*)}. \tag{2.3}$$

Para todo $\epsilon > 0$. Haciendo $\epsilon \to 0$, obtenemos la cota superior.

2.1.2. Cota inferior

Sea $y > 0$ independiente de n y definamos

$$a_n = a_n(y) = x^* n - \frac{3}{2I'(x^*)} \log n.$$

Dado $v \in L_n$, definimos el evento

$$A_v = \left\{ S_v \in [y + a_n - 1, y + a_n],\ S_v(t) \leq \frac{a_n t}{n} + y,\ t = 1, \ldots, n \right\},$$

y sea

$$Z_n = \sum_{v \in L_n} \mathbf{1}_{A_v}.$$

Para derivar una cota inferior de $E[M_n]$, primero necesitamos una cota inferior en la cola derecha de la distribución de M_n, la cual vamos a obtener utilizando el método del segundo momento. Para esto, primero calculamos $P(A_v)$. Recordemos que $I(x^*) = \log k$, con $\lambda^* = I'(x^*)$. Introducimos un nuevo parámetro λ_n^* tal que

$$\lambda_n^* \frac{a_n}{n} - \Lambda(\lambda_n^*) = I(a_n/n).$$

Como $I'(a_n/n) = \lambda_n^*$, es fácil verificar que

$$\lambda_n^* = \lambda^* - \frac{3I''(x^*) \log n}{2nI'(x^*)} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

(En el caso gaussiano, $\lambda_n^* = a_n/n$).

Definimos una nueva medida de probabilidad Q en $\mathbb{R}$ por

$$\frac{d\mu}{dQ}(x) = e^{-\lambda_n^* x + \Lambda(\lambda_n^*)},$$

y, con un abuso de notación, continuamos usando Q cuando hablemos sobre un paseo aleatorio cuyos incrementos sean i.i.d. y distribuidos de acuerdo a Q. Notar que, en el caso gaussiano, Q solamente modifica la media de P.

Ahora podemos escribir:

$$\begin{aligned} P(A_v) &= E_Q\left(e^{-\lambda_n^* S_v + n\Lambda(\lambda_n^*)} \mathbf{1}_{A_v}\right) \\ &\geq e^{-n[\lambda_n^* a_n/n - \Lambda(\lambda_n^*)]} E_Q(A_v) \\ &= e^{-nI(a_n/n)} P_Q\left(\tilde{S}_v \in [0,1],\ \tilde{S}_v(t) \geq 0,\ t = 1, \ldots, n\right), \end{aligned} \tag{2.4}$$

donde $\tilde{S}_v(t) = a_n t/n - S_v(t)$ es un paseo aleatorio con incrementos i.i.d. de media cero bajo Q. Además, en el caso gaussiano, los incrementos son gaussianos y no dependen de n.

Aplicando el Teorema de la Elección, obtenemos que

$$P(A_v) \geq c_0 \frac{y+1}{n^{3/2}} e^{-nI((a_n+y)/n)}. \tag{2.5}$$

¿Agregar detalles sobre esto?

Como

$$I\left(\frac{a_n + y}{n}\right) = I(x^*) - I'(x^*)\left(\frac{3\log n}{2nI'(x^*)} - \frac{y}{n}\right) + O\left(\left(\frac{\log n}{n}\right)^2\right),$$

podemos concluir que

$$P(A_v) \geq c_0(y+1)k^{-n}e^{-I'(x^*)y},$$

y por lo tanto

$$E[Z_n] = |L_n|P(A_v) \geq \frac{W_T}{C_T}c_0(y+1)e^{-I'(x^*)y}. \tag{2.6}$$

Resaltamos la dependencia de las constantes en el árbol, ya que jugarán un papel principal en justificar por qué pedimos que la distribución tenga grado acotado.

A continuación, necesitamos probar una cota superior sobre

$$\begin{aligned} E[Z_n^2] &= |L_n|P(A_v) + \sum_{v \neq w \in L_n} P(A_v \cap A_w) \\ &= E[Z_n] + \sum_{v \in L_n} \sum_{s=1}^{n} |D_s^v| P(A_v \cap A_{v_s}), \end{aligned} \tag{2.7}$$

donde $D_s^v = \{w \in L_n \mid d(v,w) = 2s\}$ y $v_s \in L_n$ tal que $d(v, v_s) = 2s$.

Necesitamos ver que $|D_s^v| = O(k^s)$. Es fácil ver que

$$|D_s^v| \leq |L_s(T_{v_s})| \leq C(T_{v_s})Kk^s. \tag{2.8}$$

Faltaría acotar esta constante C universalmente para todo $v_s \in L_{n-s}$. Para esto, podemos hacer una especie de argumento de probabilidad total, condicionando a que todos estos subárboles, a partir de la generación l, estén a lo sumo a distancia β de su W. Elegimos l y β de forma que este evento tenga alta probabilidad. Por lo tanto, podemos tomar $C = \max\{k^l, \beta\}$.

Ahora veamos cómo acotar $P(A_v \cap A_{v_s})$. Para esto, condicionamos al valor de $S_v(n-s)$. Con un pequeño abuso de notación, definimos $I_{j,s} = a_n(n-s)/n + [-j, -j+1] + y$. Entonces:

$$\begin{aligned} P(A_v \cap A_{v_s}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} &P\left(S_v(t) \leq \frac{a_n t}{n} + y,\ t = 1, \ldots, n-s,\ S_v(n-s) \in I_{j,s}\right) \\ &\times \max_{z \in I_{j,s}}\left(P\left(S_v(s) \in [y + a_n - 1, y + a_n],\ S_v(t) \leq \frac{a_n(n-s+t)}{n} + y,\ 1 \leq t \leq s \mid S_v(0) = \right.\right. \end{aligned}$$

¿Agregar detalles?

Usando la cota superior del Teorema de la Elección, concluimos que

$$P(A_v \cap A_{v_s}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^5(y+1)^2}{s^3(n-s)^{3/2}} e^{-j\lambda^*} n^{\frac{3(n+s)}{2n}} k^{-(n+s)} e^{-(n+s)\frac{I'(x^*)y}{n}}. \tag{2.9}$$

¿Agregar detalles?

Juntando todo:

$$
\begin{aligned}
E[Z_n^2] &\leq E[Z_n] + \sum_{v\in L_n}\sum_{s=1}^{n}|D_s^v|\sum_{j=1}^{\infty}\frac{j^5(y+1)^2}{s^3(n-s)^{3/2}}\,e^{-j\lambda^*}\,n^{\frac{3(n+s)}{2n}}\,k^{-(n+s)}\,e^{-(n+s)\frac{I'(x^*)y}{n}}\\
&\leq E[Z_n] + H(y+1)^2CW\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{K}{k}\right)^s\frac{n^{\frac{3(n+s)}{2n}}e^{-s\frac{I'(x^*)y}{n}}}{s^3(n-s)^{3/2}}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
P(M_n \geq a_n - 1) \geq P(Z_n \geq 1) &\geq \frac{(E[Z_n])^2}{E[Z_n^2]}\\
&\geq \frac{E[Z_n]}{1 + H(y+1)CW\sum_{s=1}^{n}\frac{\left(\frac{K}{k}\right)^s n^{\frac{3(n+s)}{2n}} e^{-\frac{sI'(x^*)y}{n}}}{s^3(n-s)^{3/2}}}\\
&\geq \frac{\frac{W_T}{C_T}c_0(y+1)e^{-I'(x^*)y}}{1 + H(y+1)CWn^{3/2}\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{K}{k}\right)^s e^{-\frac{sI'(x^*)y}{n}}}.
\end{aligned}
$$

Por otro lado, para cada $v \in L_r$, sea $w(v) \in L_r$ el ancestro de v en la generación r. Entonces, por independencia:

$$
\begin{aligned}
P\left(M_n \leq -cs + (n-r)x^* - \tfrac{3}{2I'(x^*)}\log(n-r)\right) &\leq \left(1 - \frac{c_0}{1 + HC_T^2(n-r)^{3/2}\sum_{s=1}^{n-r}\left(\frac{K}{k}\right)^s}\right)^{|L_r|} + e^{-c'r}\\
&\leq \left(1 - \frac{c_0}{1 + HC_T^2(n-r)^{3/2}\left(\frac{K}{k}\right)^{n-r+1}}\right)^{\frac{W}{C}k^r} + e^{-c'r}.
\end{aligned}
$$

Con esto podemos ver que, en principio, la expresión anterior **no tiende a 0**. Sospechamos que debemos pedir más restricciones al árbol.

A partir de (2.9) en el original, se concluye que

$$E[Z_n^2] \leq c(y+1)E[Z_n],$$

y por lo tanto, usando nuevamente el método del segundo momento,

$$P(M_n \geq a_n - 1) \geq P(Z_n \geq 1) \geq c\frac{E[Z_n]}{y+1} \geq c_0 e^{-I'(x^*)y}. \tag{2.10}$$

Esto completa la evaluación de una cota inferior para la cola derecha de la ley de M_n. Para obtener una cota inferior para $E[M_n]$, solo necesitamos mostrar que

$$\lim_{y\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{y}P(M_n \leq a_n(y))\,dy = 0. \tag{2.11}$$

Por otro lado, para cada $v \in L_n$, sea $w(v) \in L_s$ el ancestro de v en la generación s. Entonces, por independencia,

$$P\left(M_n \leq -cs + (n-s)x^* - \frac{3}{2I'(x^*)}\log(n-s)\right) \leq (1-c_0)^{k^s} + e^{-c's}, \tag{2.12}$$

donde c_0 es como en (2.5.11). Esto implica (2.5.21). Junto con (2.5.20), se completa la demostración del Teorema 1. $\square$

2.2. Resultado sobre todo el arbol