



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

# Comportamiento asintótico del tiempo de cobertura en arboles de Galton-Watson

Joaquin E. Viera

Directora: Inés Armendariz  
Co-Director: Santiago Saglietti

Fecha: 13 de agosto de 2025

# Resumen / Abstract

Aquí va el resumen del trabajo. Puedes incluir objetivos, metodología, resultados y conclusiones más importantes.

**Palabras clave:** palabra1, palabra2, palabra3.

# Agradecimientos

Aquí puedes agradecer a quienes colaboraron en el desarrollo del trabajo: familiares, profesores, instituciones, etc.

# Índice general

<b>Resumen / Abstract</b>	<b>1</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>2</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>4</b>
1.1. Contexto . . . . .	4
1.2. Motivación . . . . .	4
1.3. Objetivos . . . . .	4
1.4. Estructura del documento . . . . .	4
<b>2. Presentación del modelo y preliminares</b>	<b>5</b>
2.1. Concepto 1 . . . . .	5
2.2. Concepto 2 . . . . .	5
<b>3. Relación del cover timer con el branching process/GFF</b>	<b>6</b>
3.1. Diseño del estudio . . . . .	6
3.2. Procedimientos . . . . .	6
<b>4. Resultado sobre el branching process</b>	<b>7</b>
4.1. Resultado sobre la ultima generación . . . . .	7
4.1.1. Cota superior . . . . .	7
4.1.2. Cota inferior . . . . .	8
4.2. Resultado sobre todo el arbol . . . . .	9
<b>5. Conclusiones</b>	<b>10</b>
5.1. Conclusiones generales . . . . .	10
5.2. Trabajo futuro . . . . .	10

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Contexto

Describe el contexto general del tema tratado.

### 1.2. Motivación

Explica por qué elegiste este tema.

### 1.3. Objetivos

Menciona los objetivos generales y específicos.

### 1.4. Estructura del documento

Describe brevemente qué se trata en cada capítulo.

# Capítulo 2

## Presentación del modelo y preliminares

### 2.1. Concepto 1

Explicación y fuentes.

### 2.2. Concepto 2

Más teoría relacionada.

## Capítulo 3

# Relación del cover timer con el branching process/GFF

### 3.1. Diseño del estudio

Describe el enfoque.

### 3.2. Procedimientos

Explica cómo se llevó a cabo.

# Capítulo 4

## Resultado sobre el branching process

### 4.1. Resultado sobre la ultima generaci3n

Durante esta secci3n, para no sobrecargar de notaci3n, dado un arbol de Galton-Watson  $T$  que no se extingue vamos a considerar  $\mathbb{P}(\cdot|T) = \mathbb{P}(\cdot)$ , análogamente con la esperanza.

**Teorema 1.** *Dado un GFF  $\eta = (\eta_v)_{v \in T_n}$ , construido como antes. Entonces,*

$$E[\max_{v \in L_n} \eta_v] = n\sqrt{2 \log m} (1 + o(1)). \quad (4.1)$$

#### 4.1.1. Cota superior

Sea  $\bar{Z}_n = \sum_{v \in L_n} \mathbf{1}_{S_v > (1+\epsilon)x^*n}$ , que cuenta la cantidad de vertices, en la  $n$ -th generaci3n, se encuentran por arriba de  $nx^*(1+\epsilon)$ . Aplicando el metodo del primer momento: tenemos, para todo  $v \in L_n$ ,

$$E\bar{Z}_n = |L_n|P(S_v > n(1+\epsilon)x^*) \leq CWk^n e^{-nI((1+\epsilon)x^*)},$$

Donde aplicamos la desigualdad de Chebyshev en la ultima desigualdad y la definici3n de  $I$ . Adem3s, por la monot3nia estricta de  $I$ , tenemos que  $E\bar{Z}_n \leq e^{-nc(\epsilon)}$ , para algun  $c(\epsilon) > 0$ . Por lo tanto,

$$P(M_n > (1+\epsilon)nx^*) \leq E[\bar{Z}_n] \leq CW e^{-c(\epsilon)n}. \quad (4.2)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} EM_n &\leq EM_n \mathbf{1}_{M_n \geq 0} = \int_0^\infty P(M_n > t) dt \\ &= \int_0^{(1+\epsilon)nx^*} P(M_n > t) dt + \int_{(1+\epsilon)nx^*}^\infty P(M_n > t) dt. \end{aligned}$$

Luego, usando la cota de 4.2 en el segundo integrando de 4.3 e integrando, llegamos a que,

$$EM_n \leq nx^*(1+\epsilon) + nx^* \frac{CW e^{-2nI(x^*)\epsilon}}{2nI(x^*)}. \quad (4.3)$$

Para todo  $\epsilon > 0$ . Haciendo  $\epsilon \rightarrow 0$  obtenemos la cota superior.



### 4.1.2. Cota inferior

En esta primer parte vamos a resaltar la dependencia de las constantes en el arbol.  
Sea  $y > 0$  independiente de  $n$  y sea

$$a_n = a_n(y) = x^*n - \frac{3}{2I'(x^*)}\log n + y.$$

Dado  $v \in L_n$ , definimos el evento

$$A_v = \{S_v \in [a_n - 1, a_n], S_v(t) \leq a_n t/n + y, t = 1, \dots, n\},$$

y sea

$$Z_n = \sum_{v \in L_n} \mathbf{1}_{A_v}.$$

Para derivar una cota inferior de  $EM_n$ , primero necesitamos una cota inferior en la cola derecha de la distribucion de  $M_n$ , la cual vamos a obtener utilizando el metodo del segundo momento. Para esto, primero calculamos  $P(A_v)$ . Recordemos que  $I(x^*) = \log k$ , con  $\lambda^* = I'(x^*)$ . Introducimos un nuevo parametro  $\lambda_n^*$  tal que

$$\lambda_n^* \frac{a_n}{n} - \Lambda(\lambda_n^*) = I(a_n/n).$$

Como  $I'(a_n/n) = \lambda_n^*$ , es facil chequear que  $\lambda_n^* = \lambda^* - 3I''(x^*)\log n/(2nI'(x^*)) + O(1/n)$ . (En el caso Gaussiano,  $\lambda_n^* = a_n/n$ )

Definimos una nueva medida de probabilidad  $Q$  en  $\mathbb{R}$  por

$$\frac{d\mu}{dQ}(x) = e^{-\lambda_n^* x + \Lambda(\lambda_n^*)},$$

y con un abuso de notacion continuamos usan  $Q$  cuando hablemos sobre un paseo aleatorio cuyos incrementos sean i.i.d. y distribuidos de acuerdo a  $Q$ . Notar que en el caso Gaussiano,  $Q$  solamente modifica la media de  $P$ .

Ahora podemos escribir

$$\begin{aligned} P(A_v) &= E_Q(e^{-\lambda_n^* S_v + n\Lambda(\lambda_n^*)} \mathbf{1}_{A_v}) \\ &\geq e^{-n[\lambda_n^* a_n/n - \Lambda(\lambda_n^*)]} E_Q(A_v) \\ &= e^{-nI(a_n/n)} P_Q(\tilde{S}_v \in [0, 1], \tilde{S}_v(t) \geq 0, t = 1, \dots, n). \end{aligned} \tag{4.4}$$

donde  $\tilde{S}_v(t) = a_n t/n - S_v(t)$  es un paseo aleatorio con incrementos i.i.d los cuales tienen media 0 bajo  $Q$ . Ademas, en el caso Gaussiano, los incrementos son Gaussianos y no dependen de  $n$ .

Aplicando el Teorema de la votacion, obtenemos que

$$P(A_v) \geq C \frac{y+1}{n^{3/2}} e^{-nI(a_n/n)}. \tag{4.5}$$

(agregar detalles sobre esto) Como

$$I(a_n/n) = I(x^*) - I'(x^*) \left( \frac{3}{2I'(x^*)} \cdot \frac{\log n}{n} - \frac{y}{n} \right) + O \left( \left( \frac{\log n}{n} \right)^2 \right),$$

podemos concluir que

$$P(A_v) \geq C(y+1)k^{-n}e^{-I'(x^*)y},$$

y por lo tanto

$$EZ_n = |L_n|P(A_v) \geq \frac{W_T}{C_T}c_1(y+1)e^{-I'(x^*)y}. \quad (4.6)$$

## 4.2. Resultado sobre todo el arbol

Comparación con literatura o hipótesis.

# Capítulo 5

## Conclusiones

### 5.1. Conclusiones generales

Resumen de hallazgos.

### 5.2. Trabajo futuro

Ideas para desarrollos posteriores.