Universidad de Buenos Aires

Facultad de Ciencias Exactas
Departamento de Matemática

Comportamiento asintótico del tiempo de covertura en arboles de Galton-Watson

Joaquin E. Viera

Directora: Inés Armendariz
Co-Director: Santiago Saglietti

Fecha: 13 de agosto de 2025

Resumen / Abstract

Aquí va el resumen del trabajo. Puedes incluir objetivos, metodología, resultados y conclusiones más importantes.

Palabras clave: palabra1, palabra2, palabra3.

Agradecimientos

Aquí puedes agradecer a quienes colaboraron en el desarrollo del trabajo: familiares, profesores, instituciones, etc.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

1.1. Contexto

Describe el contexto general del tema tratado.

1.2. Motivación

Explica por qué elegiste este tema.

1.3. Objetivos

Menciona los objetivos generales y específicos.

1.4. Estructura del documento

Describe brevemente qué se trata en cada capítulo.

Capítulo 2

Presentación del modelo y preliminares

2.1. Concepto 1

Explicación y fuentes.

2.2. Concepto 2

Más teoría relacionada.

Capítulo 3

Relación del cover timer con el branching process/GFF

3.1. Diseño del estudio

Describe el enfoque.

3.2. Procedimientos

Explica cómo se llevó a cabo.

Capítulo 4

Resultado sobre el branching process

4.1. Resultado sobre la ultima generación

Durante esta sección, para no sobrecargar de notación, dado un arbol de Galton-Watson T que no se extingue vamos a considerar $\mathbb{P}(\cdot|T) = \mathbb{P}(\cdot)$, analogamente con la esperanza.

Teorema 1. *Dado un GFF $\eta = (\eta_v)_{v\in T_n}$, construido como antes. Entonces,*

$$E[\max_{v\in L_n} \eta_v] = n\sqrt{2\log m}\,(1 + o(1)). \tag{4.1}$$

4.1.1. Cota superior

Sea $\bar{Z}_n = \sum_{v\in L_n} \mathbf{1}_{S_v>(1+\epsilon)x^*n}$, que cuenta la cantidad de vertices, en la n-th generación, se encuentran por arriba de $nx^*(1+\epsilon)$. Aplicando el metodo del primer momento: tenemos, para todo $v \in L_n$,

$$E\bar{Z}_n = |L_n|P(S_v > n(1+\epsilon)x^*) \leq CWk^n e^{-nI((1+\epsilon)x^*)},$$

Donde aplicamos la desigualdad de Chebyshev en la ultima desigualdad y la definicion de I. Además, por la monotonia estricta de I, tenemos que $E\bar{Z}_n \leq e^{-nc(\epsilon)}$, para algun $c(\epsilon) > 0$. Por lo tanto,

$$P(M_n > (1+\epsilon)nx^*) \leq E[\bar{Z}_n] \leq CWe^{-c(\epsilon)n}. \tag{4.2}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} EM_n \leq EM_n\mathbf{1}_{M_n\geq 0} &= \int_0^\infty P(M_n > t)dt \\ &= \int_0^{(1+\epsilon)nx^*} P(M_n > t)dt + \int_{(1+\epsilon)nx^*}^\infty P(M_n > t)dt. \end{aligned}$$

Luego, usando la cota de 4.2 en el segundo integrando de 4.3 e integrando, llegamos a que,

$$EM_n \leq nx^*(1+\epsilon) + nx^*\frac{CWe^{-2nI(x^*)\epsilon}}{2nI(x^*)}. \tag{4.3}$$

Para todo $\epsilon > 0$. Haciendo $\epsilon \to 0$ obtenemos la cota superior.

4.1.2. Cota inferior

Sea $y > 0$ independiente de n y sea

$$a_n = a_n(y) = x^* n - \frac{3}{2I'(x^*)}\log n + y.$$

Dado $v \in L_n$, definimos el evento

$$A_v = \{S_v \in [a_n - 1, a_n], S_v(t) \leq a_n t/n + y, t = 1, \ldots, n\},$$

y sea

$$Z_n = \sum_{v \in L_n} \mathbf{1}_{A_v}.$$

Para derivar una cota inferior de EM_n, primero necesitamos una cota inferior en la cola derecha de la distribucion de M_n, la cual vamos a obtener utilizando el metodo del segundo momento. Para esto, primero calculamos $P(A_v)$. Recordemos que $I(x^*) = \log k$, con $\lambda^* = I'(x^*)$. Introducimos un nuevo parametro λ_n^* tal que

$$\lambda_n^* \frac{a_n}{n} - \Lambda(\lambda_n^*) = I(a_n/n).$$

Como $I'(a_n/n) = \lambda_n^*$, es facil chequear que $\lambda_n^* = \lambda^* - 3I''(x^*)\log n/(2nI'(x^*)) + O(1/n)$. (En el caso Gaussiano, $\lambda_n^* = a_n/n$)

Definimos una nueva medida de probabilidad Q en $\mathbb{R}$ por

$$\frac{d\mu}{dQ}(x) = e^{-\lambda_n^* x + \Lambda(\lambda_n^*)},$$

y con un abuso de notacion continuamos usan Q cuando hablemos sobre un paseo aleatorio cuyos incrementos sean i.i.d. y distribuidos de acuerdo a Q. Notar que en el caso Gaussiano, Q solamente modifica la media de P.

Ahora podemos escribir

$$\begin{aligned} P(A_v) &= E_Q(e^{-\lambda_n^* S_v + n\Lambda(\lambda_n^*)}\mathbf{1}_{A_v}) \\ &\geq e^{-n[\lambda_n^* a_n/n - \Lambda(\lambda_n^*)]} E_Q(A_v) \\ &= e^{-nI(a_n/n)} P_Q(\tilde{S}_v \in [0,1], \tilde{S}_v(t) \geq 0, t = 1, \ldots, n). \end{aligned} \tag{4.4}$$

donde $\tilde{S}_v(t) = a_n t/n - S_v(t)$ es un paseo aleatorio con incrementos i.i.d los cuales tienen media 0 bajo Q. Ademas, en el caso Gaussiano, los incrementos son Gaussianos y no dependen de n.

Aplicando el Teorema de la votacion, obtenemos que

$$P(A_v) \geq C\frac{y+1}{n^{3/2}} e^{-nI(a_n/n)}. \tag{4.5}$$

(agregar detalles sobre esto) Como

$$I(a_n/n) = I(x^*) - I'(x^*)\left(\frac{3}{2I'(x^*)}.\frac{\log n}{n} - \frac{y}{n}\right) + O\left(\left(\frac{\log n}{n}\right)^2\right),$$

podemos concluir que

$$P(A_v) \geq C(y+1)k^{-n}e^{-I'(x^*)y},$$

y por lo tanto

$$EZ_n = |L_n|P(A_v) \geq \frac{W_T}{C_T}c_1(y+1)e^{-I'(x^*)y}. \tag{4.6}$$

Dejamos resaltada la dependencia de las constantes del arbol, ya que va a jugar un papel principal en porque pedimos que tenga grado acotado la distribucion.

4.2. Resultado sobre todo el arbol

Comparación con literatura o hipótesis.

Capítulo 5

Conclusiones

5.1. Conclusiones generales

Resumen de hallazgos.

5.2. Trabajo futuro

Ideas para desarrollos posteriores.