Índice general

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Metodo del segundo momento

1.2. Resultados sobre Galton-Watson Tree

1.3. Teorema de la Eleccion

Capítulo 2

Resultado sobre el branching process

2.1. Resultado sobre la ultima generación

Durante esta sección, para no sobrecargar de notación, dado un arbol de Galton-Watson T que no se extingue vamos a considerar $P(\cdot|T) = P(\cdot)$, analogamente con la esperanza.

Teorema 1. *Dado un GFF $\eta = (\eta_v)_{v\in T_n}$, construido como antes. Entonces,*

$$E[\max_{v\in L_n} \eta_v] = n\sqrt{2\log m}\,(1 + o(1)). \tag{2.1}$$

2.1.1. Cota superior

Sea $\bar{Z}_n = \sum_{v\in L_n} \mathbf{1}_{S_v>(1+\epsilon)x^*n}$, que cuenta la cantidad de vertices, en la n-th generación, se encuentran por arriba de $nx^*(1+\epsilon)$. Aplicando el metodo del primer momento: tenemos, para todo $v \in L_n$,

$$E\bar{Z}_n = |L_n|P(S_v > n(1+\epsilon)x^*) \leq CWk^n e^{-nI((1+\epsilon)x^*)},$$

Donde aplicamos la desigualdad de Chebyshev en la ultima desigualdad y la definicion de I. Además, por la monotonia estricta de I, tenemos que $E\bar{Z}_n \leq e^{-nc(\epsilon)}$, para algun $c(\epsilon) > 0$. Por lo tanto,

$$P(M_n > (1+\epsilon)nx^*) \leq E[\bar{Z}_n] \leq CWe^{-c(\epsilon)n}. \tag{2.2}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} EM_n \leq EM_n\mathbf{1}_{M_n\geq 0} &= \int_0^\infty P(M_n > t)dt \\ &= \int_0^{(1+\epsilon)nx^*} P(M_n > t)dt + \int_{(1+\epsilon)nx^*}^\infty P(M_n > t)dt. \end{aligned}$$

Luego, usando la cota de 4.2 en el segundo integrando de 4.3 e integrando, llegamos a que,

$$EM_n \leq nx^*(1+\epsilon) + nx^* \frac{CWe^{-2nI(x^*)\epsilon}}{2nI(x^*)}. \tag{2.3}$$

Para todo $\epsilon > 0$. Haciendo $\epsilon \to 0$ obtenemos la cota superior.

2.1.2. Cota inferior

Sea $y > 0$ independiente de n y sea

$$a_n = a_n(y) = x^* n - \frac{3}{2I'(x^*)} \log n.$$

Dado $v \in L_n$, definimos el evento

$$A_v = \{S_v \in [y + a_n - 1, y + a_n], S_v(t) \leq a_n t/n + y, t = 1, \ldots, n\},$$

y sea

$$Z_n = \sum_{v \in L_n} \mathbf{1}_{A_v}.$$

Para derivar una cota inferior de EM_n, primero necesitamos una cota inferior en la cola derecha de la distribucion de M_n, la cual vamos a obtener utilizando el metodo del segundo momento. Para esto, primero calculamos $P(A_v)$. Recordemos que $I(x^*) = \log k$, con $\lambda^* = I'(x^*)$. Introducimos un nuevo parametro λ_n^* tal que

$$\lambda_n^* \frac{a_n}{n} - \Lambda(\lambda_n^*) = I(a_n/n).$$

Como $I'(a_n/n) = \lambda_n^*$, es facil chequear que $\lambda_n^* = \lambda^* - 3I''(x^*)\log n/(2nI'(x^*)) + O(1/n)$. (En el caso Gaussiano, $\lambda_n^* = a_n/n$)

Definimos una nueva medida de probabilidad Q en $\mathbb{R}$ por

$$\frac{d\mu}{dQ}(x) = e^{-\lambda_n^* x + \Lambda(\lambda_n^*)},$$

y con un abuso de notacion continuamos usan Q cuando hablemos sobre un paseo aleatorio cuyos incrementos sean i.i.d. y distribuidos de acuerdo a Q. Notar que en el caso Gaussiano, Q solamente modifica la media de P.

Ahora podemos escribir

$$\begin{aligned} P(A_v) &= E_Q(e^{-\lambda_n^* S_v + n\Lambda(\lambda_n^*)} \mathbf{1}_{A_v}) \\ &\geq e^{-n[\lambda_n^* a_n/n - \Lambda(\lambda_n^*)]} E_Q(A_v) \\ &= e^{-nI(a_n/n)} P_Q(\tilde{S}_v \in [0,1], \tilde{S}_v(t) \geq 0, t = 1, \ldots, n). \end{aligned} \tag{2.4}$$

donde $\tilde{S}_v(t) = a_n t/n - S_v(t)$ es un paseo aleatorio con incrementos i.i.d los cuales tienen media 0 bajo Q. Ademas, en el caso Gaussiano, los incrementos son Gaussianos y no dependen de n.

Aplicando el Teorema de la Eleccion, obtenemos que

$$P(A_v) \geq c_0 \frac{y+1}{n^{3/2}} e^{-nI((a_n+y)/n)}. \tag{2.5}$$

Agrego detalles sobre esto?
Como

$$I((a_n + y)/n) = I(x^*) - I'(x^*) \left(\frac{3}{2I'(x^*)} . \frac{\log n}{n} - \frac{y}{n} \right) + O\left(\left(\frac{\log n}{n} \right)^2 \right),$$

podemos concluir que

$$P(A_v) \geq c_0(y+1)k^{-n}e^{-I'(x^*)y},$$

y por lo tanto

$$EZ_n = |L_n|P(A_v) \geq \frac{W_T}{C_T}c_0(y+1)e^{-I'(x^*)y}. \tag{2.6}$$

Dejamos resaltada la dependencia de las constantes del arbol, ya que va a jugar un papel principal en porque pedimos que tenga grado acotado la distribucion.

A continuacion necesitamos probar una cota soperior sobre

$$EZ_n^2 = |L_n|P(A_v) + \sum_{v\neq w\in L_n} P(A_v\cap A_w) \quad = EZ_n + \sum_{v\in L_n}\sum_{s=1}^{n} |D_s^v|P(A_v\cap A_{v_s}), \tag{2.7}$$

Donde $D_s^v = \{w \in L_n | d(v,w) = 2s\}$ y $v_s \in L_n$ tal que $d(v, v_s) = 2s$.
Necesito ver que $|D_s^v|$ es $O(k^s)$, es facil ver

$$|D_s^v| \leq |L_s(T_{v_s})| \leq C(T_{v_s})Kk^s. \tag{2.8}$$

Me faltaria acotar esta constante C universalmente para todo $v_s \in L_{n-s}$. Para esto puedo hacer una especie de probabilidad total, donde condiciono a que todos estos subarboles a partir de la generacion l ya esten a lo sumo a distancia β de su W, elijo l y β de forma que este evento tenga alta probabilidad. Por lo que, puedo tomar $C = max\{k^l, \beta\}$.

Ahora veamos de acotar $P(A_v \cap A_{v_s})$, para esto condicionamos al valor de $S_v(n-s)$. En particular, con un poco de abuso de notacion, notamos $I_{j,s} = a_n(n-s)/n + [-j, -j+1] + y$, ahora tenemos que

$$P(A_u \cap A_{v_s}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} P\Big(S_v(t) \leq a_n t/n + y,\ t = 1,\dots,n-s,\ S_v(n-s) \in I_{j,s}\Big)$$
$$\times \max_{z\in I_{j,s}} \Big(P\big(S_v(s) \in [y + a_n - 1, y + a_n], S_v(t) \leq a_n(n-s+t)/n + y,\ 1 \leq t \leq s \mid S_v(0) = z\big)\Big)^2.$$

Agregar detalles
Usando la cota superior del Teorema de la Eleccion concluimos que

$$P(A_v \cap A_{v_s}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^5(y+1)^2}{s^3(n-s)^{3/2}} e^{-j\lambda^*} n^{3(n+s)/2n} k^{-(n+s)} e^{-(n+s)I'(x^*)y/n}. \tag{2.9}$$

Agregar detalles

Juntando todo,

$$
\begin{aligned}
EZ_n^2 &= EZ_n + \sum_{v\in L_n}\sum_{s=1}^{n}|D_s^v|\sum_{j=1}^{\infty}\frac{j^5(y+1)^2}{s^3(n-s)^{3/2}}\,e^{-j\lambda^*}\,n^{\frac{3(n+s)}{2n}}\,k^{-(n+s)}\,e^{-(n+s)\frac{I'(x^*)y}{n}}\\
&\le EZ_n + (y+1)^2\sum_{v\in L_n}\sum_{s=1}^{n}\frac{K^s}{s^3(n-s)^{3/2}}\,n^{\frac{3(n+s)}{2n}}\,k^{-(n+s)}\,e^{-(n+s)\frac{I'(x^*)y}{n}}\sum_{j=1}^{\infty}j^5e^{-j\lambda^*}\\
&\le EZ_n + (y+1)^2CWk^n\sum_{s=1}^{n}\frac{K^s}{s^3(n-s)^{3/2}}\,n^{\frac{3(n+s)}{2n}}\,k^{-(n+s)}\,e^{-(n+s)\frac{I'(x^*)y}{n}}H\\
&\le EZ_n + H(y+1)^2CW\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{K}{k}\right)^s\frac{n^{\frac{3(n+s)}{2n}}\,e^{-(n+s)\frac{I'(x^*)y}{n}}}{s^3(n-s)^{3/2}}\\
&\le EZ_n\left(1 + H(y+1)CW\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{K}{k}\right)^s\frac{n^{\frac{3(n+s)}{2n}}\,e^{-s\frac{I'(x^*)y}{n}}}{s^3(n-s)^{3/2}}\right)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
P(M_n\ge a_n-1) &\ge P(Z_n\ge 1)\\
&\ge \frac{(EZ_n)^2}{EZ_n^2}\\
&\ge \frac{EZ_n}{1+H(y+1)CW\sum_{s=1}^{n}\frac{\left(\frac{K}{k}\right)^s n^{\frac{3(n+s)}{2n}}e^{-\frac{sI'(x^*)y}{n}}}{s^3(n-s)^{3/2}}}\\
&\ge \frac{\frac{W_T}{C_T}c_0(y+1)e^{-I'(x^*)y}}{1+H(y+1)CW\sum_{s=1}^{n}\frac{\left(\frac{K}{k}\right)^s n^{\frac{3(n+s)}{2n}}e^{-\frac{sI'(x^*)y}{n}}}{s^3(n-s)^{3/2}}}\\
&\ge \frac{\frac{W_T}{C_T}c_0(y+1)e^{-I'(x^*)y}}{1+H(y+1)CWn^{3/2}\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{K}{k}\right)^s e^{-\frac{sI'(x^*)y}{n}}}.
\end{aligned}
$$

Por otro lado, para cada $v\in L_r$, sea $w(v)\in L_r$ el ancestro de v en la generación r. Entonces, por independencia,

$$
\begin{aligned}
&P\Big(M_n\le -cs+(n-r)x^*-\tfrac{3}{2I'(x^*)}\log(n-r)\Big)\\
&\le \Big(P\Big(M_{n-r}\le (n-r)x^*-\tfrac{3}{2I'(x^*)}\log(n-r)\Big)\Big)^{|L_r|} + P\Big(\min_{w\in L_r}h_s(w)\le -cr\Big)\\
&\le \left(1-\frac{c_0}{1+HC_T^2(n-r)^{3/2}\sum_{s=1}^{n-r}\left(\frac{K}{k}\right)^s}\right)^{|L_r|} + e^{-c'r}\\
&\le \left(1-\frac{c_0}{1+HC_T^2(n-r)^{3/2}\sum_{s=1}^{n-r}\left(\frac{K}{k}\right)^s}\right)^{\frac{W}{C}k^r} + e^{-c'r}.
\end{aligned}
$$

A partir de 2.9 en el original concluye que

$$EZ_n^2 \leq c(y+1)EZ_n,$$

y por lo tanto, usando nuevamente el metodo del segundo momento,

$$P(M_n \geq a_n - 1) \geq P(Z_n \geq 1) \geq c\frac{EZ_n}{y+1} \geq c_0 e^{-I'(x^*)y} \tag{2.10}$$

Esto completa la evaluación de una cota inferior para la cola derecha de la ley de M_n. Con el fin de obtener una cota inferior para EM_n, solo necesitamos mostrar que

$$\lim_{y\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{y} P(M_n \leq a_n(y))\, dy = 0. \tag{2.11}$$

Por otro lado, para cada $v \in L_n$, sea $w(v) \in L_s$ el ancestro de v en la generación s. Entonces, por independencia,

$$P\left(M_n \leq -cs + (n-s)x^* - \frac{3}{2I'(x^*)}\log(n-s)\right) \leq (1-c_0)^{k^s} + e^{-c's}, \tag{2.12}$$

donde c_0 es como en (2.5.11). Esto implica (2.5.21). Junto con (2.5.20), esto completa la demostración del Teorema 1. □

2.2. Resultado sobre todo el arbol

Comparación con literatura o hipótesis.