

MÉTODO DA RIGIDEZ DIRETA PARA MODELOS ESTRUTURAIS LINEARES E ELÁSTICOS

CAPÍTULOS 1 a 5

Luiz Fernando Martha

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC-Rio
Departamento de Engenharia Civil
Rua Marquês de São Vicente, 225 - Gávea
CEP 22453-900 – Rio de Janeiro, RJ
Tel.: (21) 3527-1190 – Fax: (21) 3527-1195

E-mail: lfm@tecgraf.puc-rio.br
URL: <http://www.tecgraf.puc-rio.br/~lfm>

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO AO MÉTODO DA RIGIDEZ DIRETA	1
1.1. Modelo estrutural e modelo discreto	1
2. DISCRETIZAÇÃO NO MÉTODO DA RIGIDEZ DIRETA	7
2.1. Representação dos carregamentos como cargas nodais	8
2.2. Dados de entrada típicos de um programa de computador	11
2.3. Resultados típicos de um programa de computador	13
2.4. Sistemas de coordenadas generalizadas	15
2.5. Graus de liberdade e forças generalizadas globais	17
2.6. Graus de liberdade e forças generalizadas locais nas direções dos eixos globais	18
2.7. Graus de liberdade e forças generalizadas locais nas direções dos eixos locais	19
3. IDEALIZAÇÃO DO COMPORTAMENTO DE BARRAS	23
3.1. Campo de deslocamentos e tensões	24
3.2. Relações entre deslocamentos e deformações em barras	27
3.2.1. Deformações axiais	28
3.2.2. Deformações normais por flexão	29
3.2.2.1. Teoria de vigas de Navier	29
3.2.2.2. Teoria de vigas de Timoshenko	31
3.2.3. Distorções por efeito cortante	31
3.2.4. Vetor de deformações pontuais para o comportamento plano	32
3.2.5. Distorções por torção	33
3.2.6. Vetor de deformações integrais do elemento infinitesimal	33
3.3. Relações diferenciais de equilíbrio em barras	34
3.3.1. Condições de equilíbrio do caso plano para efeitos de primeira ordem	35
3.3.2. Condição de equilíbrio na torção	36
3.4. Lei constitutiva linear para o material	36
3.5. Equilíbrio entre tensões e esforços internos	38
3.5.1. Equilíbrio entre tensões normais e esforço normal e momento fletor	38
3.5.2. Equilíbrio entre tensões de cisalhamento e esforço cortante	39
3.5.3. Equilíbrio entre tensões cisalhantes e momento torçor	42
3.6. Deslocamentos relativos internos	42
3.6.1. Deslocamento axial relativo interno provocado por esforço normal	43
3.6.2. Deslocamento transversal relativo interno provocado por esforço cortante	43
3.6.3. Rotação relativa interna provocada por momento fletor	45
3.6.4. Rotação relativa interna provocada por momento torçor	45
3.6.5. Deslocamentos relativos internos provocados por variação de temperatura	46
3.7. Rigidez do elemento infinitesimal de barra	47
3.8. Equações diferenciais dos modelos analíticos de barras	52
3.8.1. Equação diferencial para o comportamento axial	52
3.8.2. Equação de Navier para o comportamento à flexão	53
3.8.3. Equações diferenciais para o comportamento à flexão considerando distorção de cisalhamento	54
3.8.4. Equação diferencial para o comportamento à torção	56
3.9. Identificação da solução particular como solução local de engastamento de barra	56
4. INTERPOLAÇÃO DE DESLOCAMENTOS EM BARRAS	59
4.1. Funções de forma para interpolação de deslocamentos e rotações em barras	59
4.2. Funções de forma para comportamento axial	62
4.3. Funções de forma para comportamento à flexão segundo a teoria de Navier	62
4.3.1. Funções de forma para barra de pórtico plano sem articulação	63
4.3.2. Funções de forma para barra de pórtico plano com articulação na esquerda	65
4.3.3. Funções de forma para barra de pórtico plano com articulação na direita	66
4.4. Funções de forma para comportamento à flexão segundo a teoria de Timoshenko	67
4.4.1. Funções de forma para barra de pórtico plano sem articulação	67
4.4.2. Funções de forma para barra com articulação na esquerda	69

4.4.3. Funções de forma para barra com articulação na direita	69
5. MATRIZ DE RIGIDEZ LOCAL	71
5.1. Coeficientes de rigidez locais	71
5.2. Princípio dos deslocamentos virtuais	73
5.3. Coeficientes de rigidez axial de barra prismática.....	74
5.4. Coeficientes de rigidez à flexão de barra de Navier prismática sem articulação.....	75
5.5. Matrizes que relacionam deslocamentos nodais com deformações integrais	77
5.6. Expressão genérica para a matriz de rigidez de barra no sistema de eixos locais	77
5.7. Matrizes de rigidez de barra prismática de pórtico plano	78
5.8. Matriz de rigidez local de barra de grelha	79
5.9. Matriz de rigidez local no sistema global	79
6. CARGAS EQUIVALENTES NODAIS LOCAIS.....	83
6.1. Reações de engastamento de barra isolada para solicitações externas.....	83
6.1.1. Reações de engastamento de barra prismática para carregamentos axiais e transversais.....	84
6.1.2. Reações de engastamento de barra prismática para variação de temperatura	87
6.2. Reações de engastamento de barra isolada no sistema global.....	89
6.3. Cargas equivalentes nodais no sistema de eixos globais.....	90
7. SISTEMA DE EQUAÇÕES GLOBAIS DE EQUILÍBRIO	93
7.1. Montagem da matriz de rigidez global.....	93
7.2. Montagem das cargas nodais combinadas no vetor das forças generalizadas globais	98
7.3. Interpretação do sistema de equações finais como imposição de equilíbrio aos nós isolados.....	100
7.4. Consideração das condições de apoio.....	102
7.4.1. Particionamento do sistema de equações	102
7.4.2. Diagonalização da linha e coluna da matriz de rigidez global correspondente ao grau de liberdade restrito.....	103
7.4.3. Inserção de um apoio elástico fictício com valor muito alto do coeficiente de rigidez	104
8. OBTENÇÃO DE RESULTADOS DE ANÁLISE	105
8.1. Determinação de reações de apoio	105
8.2. Determinação de esforços internos nas barras.....	106
8.3. Considerações finais	107

1. INTRODUÇÃO AO MÉTODO DA RIGIDEZ DIRETA

Este livro aborda a análise de *estruturas reticuladas*, isto é, de estruturas formadas por *barras* (elementos estruturais que têm um eixo claramente definido). Entre elas incluem-se *treliças* (estruturas com todas as barras articuladas em suas extremidades), *pórticos* ou *quadros*, e *grelhas* (estruturas planas com cargas fora do plano). O método de análise tratado é o método dos deslocamentos, em que os parâmetros fundamentais da solução são deslocamentos e rotações dos *nós* (pontos notáveis) do modelo estrutural. O livro apresenta uma formalização matricial do método dos deslocamentos, que tem por objetivo aproximar a sua metodologia aos procedimentos adotados usualmente nos programas de computador. Essa versão do método dos deslocamentos é conhecida como *método da rigidez direta*.

Atualmente, a utilização de programas de computador na análise de estruturas é uma atividade corriqueira no projeto de estruturas. Isso tem proporcionado a adoção de métodos cada vez mais sofisticados para a análise de estruturas. Um exemplo é a consideração de efeitos de segunda ordem, em que as condições de equilíbrio são impostas considerando a geometria do modelo estrutural atualizada pelos deslocamentos e rotações provocados pelas solicitações externas aplicadas. Esse tipo de procedimento de análise é mais sofisticado do que uma *análise de primeira ordem*, que considera a geometria original indeformada do modelo nas equações de equilíbrio. A consideração de efeitos de segunda ordem faz com que o modelo estrutural tenha um comportamento não linear, é a chamada *não linearidade de ordem geométrica*. Uma análise não linear de ordem geométrica é importante, pois permite antever possíveis problemas de instabilidade da estrutura.

Entretanto, apesar da importância de se considerar efeitos de segunda ordem, a versão atual deste livro trata apenas de análise de estruturas em regime linear e elástico, isto é, apenas são considerados efeitos de primeira ordem. A razão disso é que o foco do principal do livro são os procedimentos de análise estrutural pelo método da rigidez direta que são comuns para uma análise linear e para uma análise não linear.

Outro procedimento de análise que está se tornando comum na análise computacional de estruturas é a consideração de deformações provocadas pelo efeito transversal cortante em barras. Em uma análise estrutural tradicional despreza-se esse tipo de deformação. A teoria de flexão mais comum que considera distorções por efeito cortante é a teoria de vigas de Timoshenko, que adota como simplificação a hipótese de manutenção de seções transversais planas para uma barra, isto é, desconsidera o empenamento da seção transversal associado ao efeito cortante. O esforço computacional adicional para considerar as distorções de cisalhamento dessa forma simplificada é muito pequeno, e os programas modernos de análise de estruturas tendem a considerá-las.

Este livro formaliza procedimentos de análise de estrutura reticuladas considerando a hipótese tradicional da flexão de barras, que não considera deformações por efeito cortante (teoria de vigas de Navier ou de Euler-Bernoulli), e a hipótese que considera essas deformações (teoria de vigas de Timoshenko).

No contexto deste livro, só são considerados materiais idealizados com comportamento elástico-linear e sem limite de resistência, isto é, desconsidera-se a *não linearidade de ordem física*. Isso é justificado porque o foco principal do livro é a análise estrutural para estruturas reticuladas considerando apenas efeitos de primeira ordem. A consideração de leis constitutivas não lineares para os materiais é um tema bastante amplo que foge ao escopo deste livro.

1.1. Modelo estrutural e modelo discreto

A essência dos métodos da análise de estruturas está na representação discreta do comportamento contínuo, analítico e matemático de um modelo estrutural em termos de um número finito de parâmetros. Dessa maneira, a solução do problema estrutural, que essencialmente busca a determinação do campo de deslocamentos e do campo de tensões no domínio geométrico da estrutura, é alcançada através da determinação dos parâmetros que representam o comportamento do modelo estrutural de forma discreta. Essa essência pode ser entendida dentro de um escopo mais amplo, como está resumido na Figura 1.1. A análise estrutural moderna trabalha com quatro níveis de abstração com relação à estrutura que está sendo analisada (Martha 2010), sendo o primeiro o mundo físico, isto é, o nível que representa a estrutura real tal como é construída.

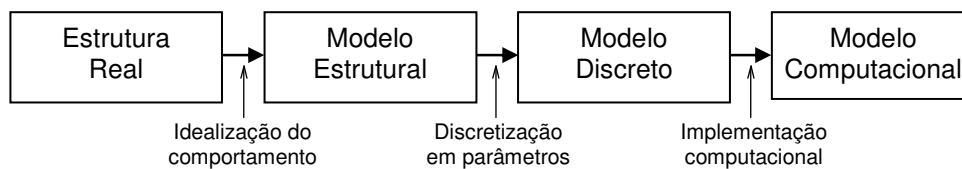


Figura 1.1 – Quatro níveis de abstração referentes a uma estrutura na análise estrutural.

O segundo nível de abstração da análise estrutural é o modelo analítico utilizado para representar matematicamente a estrutura que está sendo analisada. Esse modelo é chamado de *modelo estrutural* ou *modelo matemático* e incorpora todas as teorias e hipóteses elaboradas para descrever o comportamento da estrutura em função das diversas solicitações. Essas hipóteses são baseadas em leis físicas, tais como o equilíbrio entre forças e tensões, as relações de compatibilidade entre deslocamentos e deformações, e as leis constitutivas dos materiais que compõem a estrutura.

Na concepção do modelo estrutural faz-se uma *idealização* do comportamento da estrutura real em que se adota uma série de hipóteses simplificadoras. Estas estão baseadas em teorias físicas e em resultados experimentais e estatísticos, e podem ser divididas nos seguintes tipos:

- hipóteses sobre a geometria do modelo;
- hipóteses sobre as condições de suporte (ligação com o meio externo, por exemplo, com o solo);
- hipóteses sobre o comportamento dos materiais;
- hipóteses sobre as solicitações que atuam sobre a estrutura (cargas de ocupação ou pressão de vento, por exemplo).

A solução matemática do modelo estrutural na situação estática (sem efeitos dinâmicos de vibrações, por exemplo) é um problema de valor de contorno, com um conjunto de equações diferenciais que devem ser satisfeitas em todos os pontos do meio contínuo sólido, atendendo condições de contorno em termos de deslocamentos e forças de superfície. No caso de estruturas reticuladas (formadas por elementos estruturais unifilares denominados *barras*), o comportamento do meio sólido contínuo é condensado nos eixos das barras, isto é, o meio sólido é representado por um modelo aramado, indicado apenas pelas linhas dos eixos das barras. Para tanto, a mecânica dos sólidos idealiza o comportamento das barras através de um conjunto de hipóteses sobre o seu comportamento cinemático e mecânico. Por exemplo, admite-se que as seções transversais de uma barra que se deforma permanecem planas. Essa idealização do comportamento das barras é o que permite a criação do modelo estrutural para estruturas reticuladas. Para estruturas em que não é possível identificar elementos estruturais unifilares, outras teorias matemáticas idealizam analiticamente o comportamento estrutural do modelo, como a teoria da elasticidade, a teoria das placas, a teoria das cascas, a teoria da plasticidade etc.

O nível de simplificação envolvido na concepção de um modelo estrutural analítico pode ser muito variável, mesmo no caso de modelos de barras. Por exemplo, nos modelos de primeira ordem é considerado que os deslocamentos dos pontos da estrutura são muito pequenos quando comparados às dimensões geométricas de suas seções transversais. Adotando essa hipótese, é possível estabelecer condições de equilíbrio na geometria original, indeformada, da estrutura. Isso facilita muito o problema, pois não é necessário determinar os deslocamentos dos pontos da estrutura para escrever as equações de equilíbrio. Por outro lado, em uma análise de segunda ordem, deve-se levar em consideração os deslocamentos na imposição das condições de equilíbrio, o que faz com que o problema tenha um comportamento não linear; é a chamada *não linearidade de ordem geométrica*.

O comportamento não linear de uma estrutura também pode ser atribuído ao comportamento não linear dos materiais que a compõem, mesmo em uma aproximação de primeira ordem; é a chamada *não linearidade física*. Por exemplo, pode-se admitir que o material tem um limite de resistência com relação a tensões em que, a partir de uma determinada condição para o estado de tensões, um ponto da estrutura se plastifica, ou seja, o material perde a capacidade de resistência nesse ponto. Em resumo, os modelos estruturais podem ser simples ou sofisticados, dependendo do tipo de problema estrutural que se deseja resolver.

Para situar o leitor, o foco deste livro dentro do contexto de análise de estruturas é a solução de modelos de estruturas reticuladas para análises de primeira ordem, isto é, não considerando não linearidade de ordem geométrica. Neste volume é adotado um comportamento linear para os materiais. Portanto, a não linearidade física também não é considerada.

O terceiro nível de abstração utilizado na análise estrutural é o do *modelo discreto* (Figura 1.1), que é concebido dentro das metodologias de cálculo dos métodos de análise. Os métodos básicos possibilitam a transformação do modelo estrutural contínuo em um modelo discreto, que pode ser resolvido manualmente ou implementado computacionalmente.

De forma geral, os métodos de análise utilizam um conjunto de variáveis ou parâmetros para representar o comportamento de uma estrutura. Nesse nível de abstração, o comportamento analítico do modelo estrutural é substituído por um comportamento discreto, em que soluções analíticas contínuas são representadas pelos valores discretos dos parâmetros adotados. A passagem do modelo matemático para o modelo discreto é denominada *discretização*.

Os tipos de parâmetros adotados no modelo discreto dependem do método utilizado. No *método das forças* os parâmetros são forças ou momentos e, no *método dos deslocamentos*, são deslocamentos ou rotações.

Por exemplo, a Figura 1.2 mostra a discretização utilizada na solução de um pórtico plano pelo método das forças. A solicitação externa atuante, denominada *carregamento*, é constituída de uma força lateral (horizontal) e uma força vertical uniformemente distribuída na viga (barra horizontal). Na figura, as setas indicadas com um traço no meio são reações de apoio. Nesse método, os parâmetros adotados para *discretizar* a solução são forças ou momentos redundantes para garantir o equilíbrio estático da estrutura, isto é, forças e momentos associados a vínculos excedentes de uma estrutura hiperestática. Esses parâmetros são denominados *hiperestáticos*.

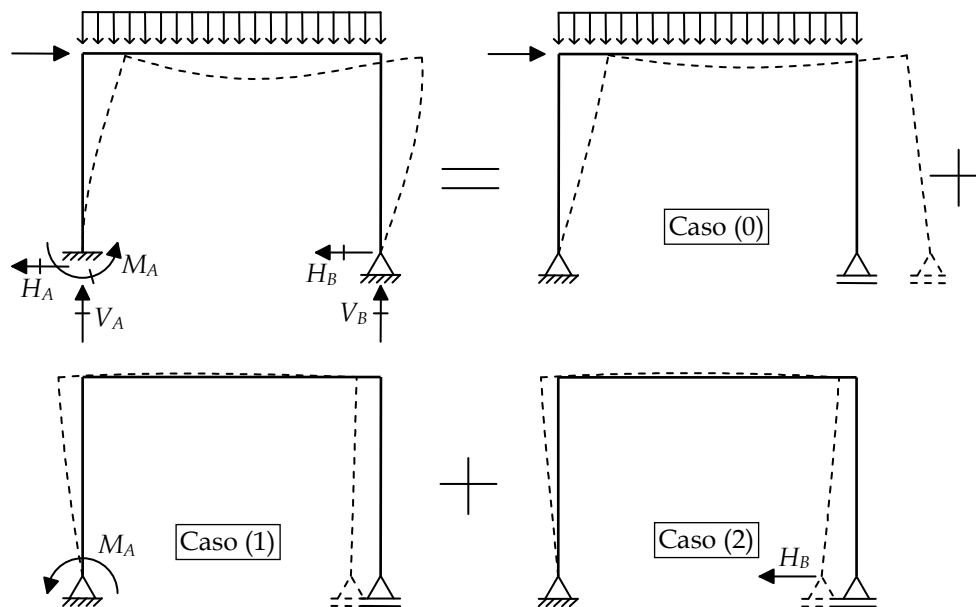


Figura 1.2 – Superposição de soluções básicas no método das forças.

No exemplo da Figura 1.2, os hiperestáticos adotados são as reações de apoio M_A (reação momento no apoio da esquerda) e H_B (reação horizontal no apoio da direita). A configuração deformada do pórtico, denominada *elástica* (indicada pela linha tracejada na figura e mostrada em escala ampliada para deslocamentos), é obtida pela superposição de soluções básicas dos casos (0), (1) e (2) ilustrados na figura. A estrutura utilizada nas soluções básicas é uma estrutura *estaticamente determinada* (isostática) obtida da estrutura original através da eliminação dos vínculos excedentes associados aos hiperestáticos. Cada solução básica isola um determinado efeito ou parâmetro: o efeito da solicitação externa (carregamento) é isolado no caso (0), o efeito do hiperestático M_A é isolado no caso (1) e o efeito do hiperestático H_B é isolado no caso (2). A metodologia de análise pelo método das forças determina os valores que os hiperestáticos devem ter para recompor os vínculos eliminados (restrição à rotação no apoio da esquerda e restrição ao deslocamento horizontal no apoio da direita). Dessa forma, a solução do problema fica parametrizada (discretizada) pelos hiperestáticos M_A e H_B .

Por outro lado, a solução discreta pelo método dos deslocamentos para estruturas reticuladas é representada por valores de deslocamentos e rotações nos nós (pontos de encontro das barras ou extremidades de barras), como indicado na Figura 1.3. Esses parâmetros são denominados *deslocabilidades*. A notação adotada neste livro para indicar genericamente uma componente de deslocamento ou rotação é uma seta com um traço na

base. No exemplo dessa figura, as deslocabilidades são os deslocamentos horizontais dos nós superiores, Δ_C^x e Δ_D^x , os deslocamentos verticais desses nós, Δ_C^y e Δ_D^y , e as rotações dos nós livres ao giro, θ_B^z , θ_C^z e θ_D^z .

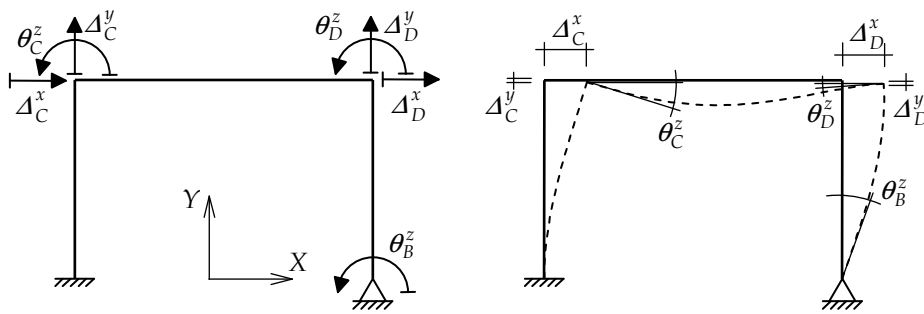


Figura 1.3 – Parâmetros nodais utilizados na discretização pelo método dos deslocamentos.

Na Figura 1.3, a configuração deformada da estrutura (elástica mostrada em escala ampliada) representa a solução contínua do modelo matemático. Os valores das deslocabilidades nodais representam a solução discreta do problema. Nesse tipo de metodologia, baseada em deslocamentos, a solução contínua pode ser obtida por interpolação dos valores discretos dos deslocamentos e rotações nodais, considerando também o efeito da força distribuída na barra horizontal.

A Figura 1.4 mostra a discretização utilizada na solução desse pórtico pelo método dos deslocamentos. A solução contínua em deslocamentos da estrutura é obtida pela superposição de configurações deformadas elementares das soluções básicas dos casos (0) a (7) mostrados na figura. Cada solução básica isola os efeitos das cargas externas – caso (0) – e de cada uma das deslocabilidades – casos (1) a (7).

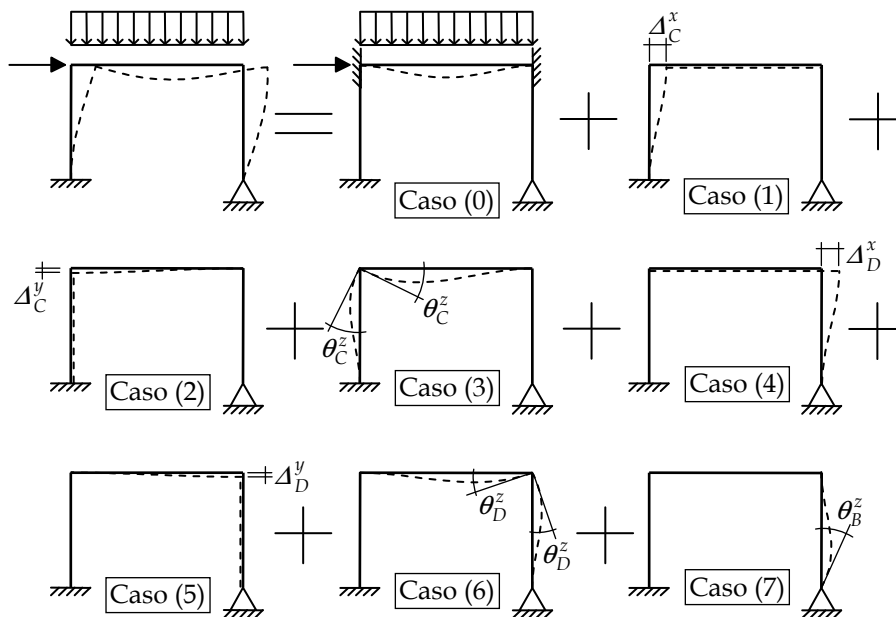


Figura 1.4 – Superposição de soluções básicas no método dos deslocamentos.

Na Figura 1.4, as configurações deformadas elementares de cada caso básico são denominadas *cinematicamente determinadas* porque são funções conhecidas que multiplicam, isoladamente, cada uma das deslocabilidades. Essas configurações deformadas elementares são as próprias funções que interpolam os deslocamentos e rotações nodais para obter a solução contínua.

Em geral, para estruturas reticuladas com barras prismáticas (a seção transversal não varia ao longo do comprimento da barra), a solução obtida por interpolação é igual à solução analítica do modelo estrutural. Isso ocorre porque as funções de interpolação que definem a configuração deformada contínua são compatíveis com a idealização matemática do comportamento das barras feita pela mecânica dos sólidos.

No caso de estruturas contínuas (que não são compostas por barras), comumente é utilizado na análise estrutural o *método dos elementos finitos*¹ com uma formulação em deslocamentos (Zienkiewicz & Taylor 2000, Vaz 2011). Nesse método, o modelo discreto é obtido pela subdivisão do domínio da estrutura em subdomínios, chamados de *elementos finitos*, com formas simples (em modelos planos, usualmente triângulos ou quadriláteros), como exemplificado na Figura 1.5 para o modelo bidimensional de uma estrutura contínua com um furo. Essa subdivisão é denominada *malha de elementos finitos*, e os parâmetros que representam a solução discreta são valores de deslocamentos nos nós (vértices) da malha.

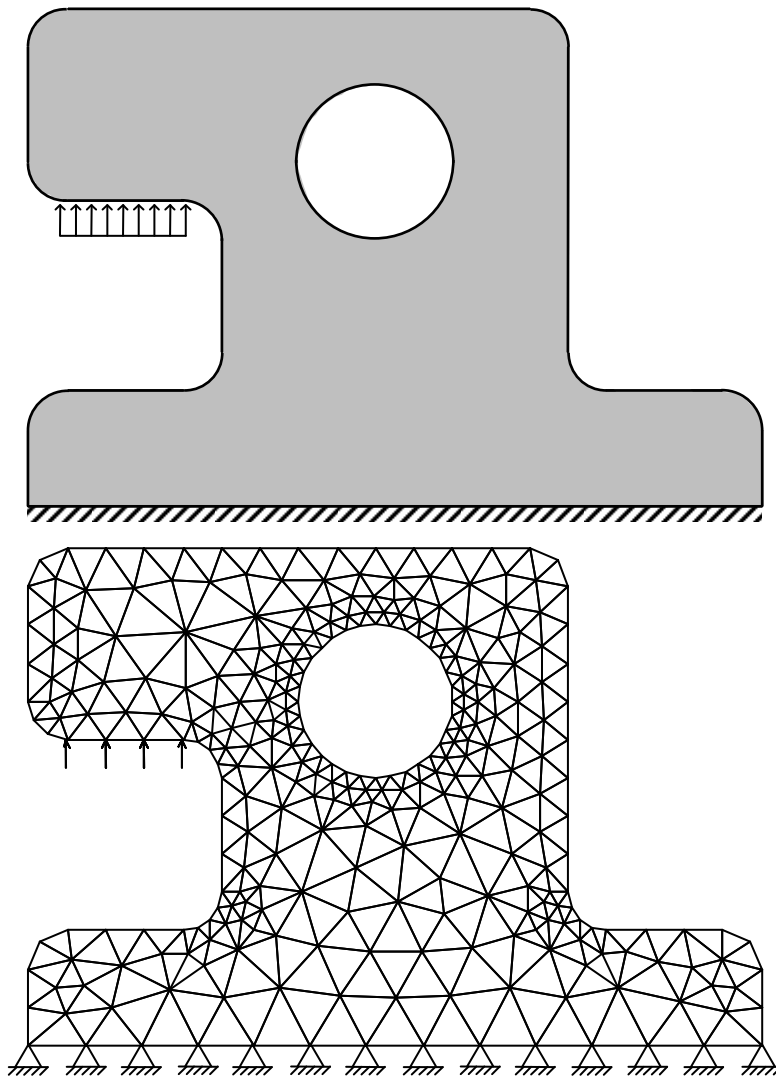


Figura 1.5 – Discretização pelo método dos elementos finitos de uma estrutura contínua.

Pode-se observar por esse exemplo que a obtenção do modelo discreto para estruturas contínuas é muito mais complexa do que no caso de modelos de estruturas reticuladas (pórticos, treliças ou grelhas). Para estruturas formadas por barras, os nós (pontos onde são definidos valores discretos) são identificados naturalmente no encontro ou nas extremidades das barras, enquanto para modelos contínuos os nós são obtidos pela discretização do domínio da estrutura em uma malha.

Uma importante diferença entre os modelos discretos de estruturas reticuladas e de estruturas contínuas é que a discretização de uma malha de elementos finitos introduz simplificações em relação à idealização matemática feita para o comportamento da estrutura. Isso ocorre porque as funções de interpolação que definem a configuração deformada de uma malha de elementos finitos não são, em geral, compatíveis com a idealização matemática do comportamento do meio contínuo feita pela teoria da elasticidade. Dessa forma, a solução do modelo discreto de elementos finitos é uma aproximação da solução analítica da teoria da elasti-

¹ Muitos outros métodos também são utilizados, tais como o método dos elementos de contorno. As notas de aula de Felippa (2009) apresentam uma excelente introdução aos métodos de análise de estruturas contínuas.

cidade, ao passo que a solução do modelo discreto de uma estrutura com barras prismáticas é igual à solução analítica da mecânica dos sólidos.

Outro ponto essencial da análise estrutural moderna é que não se concebe mais realizar tal atividade sem o uso de programas de computador. Em outras palavras, de nada adianta conceber os modelos discretos se, no caso prático de estruturas reais, não é possível resolvê-los manualmente, ou seja, na realidade dos tempos atuais o quarto nível da abstração preconizado na Figura 1.1 (o *modelo computacional*) é fundamental para o problema que se deseja resolver.

Com isso em mente, o método dos deslocamentos é o que está mais direcionado a uma implementação computacional. Portanto, conforme mencionado, este livro apresenta uma formalização matricial desse método, que tem por objetivo aproximar a sua metodologia aos procedimentos adotados usualmente nos programas de computador. Essa versão do método dos deslocamentos é conhecida como *método da rigidez direta* (White, Gergely e Sexsmith 1976), mas essencialmente segue a metodologia do método de origem. Essa formalização matricial também é conhecida como análise matricial das estruturas ou cálculo matricial das estruturas. Seria difícil citar todas as referências sobre esse assunto, pois muitas ficariam esquecidas. Mas não se pode deixar de mencionar o livro clássico de Weaver e Gere (1990), cuja primeira edição foi publicada em 1967. Outros autores consagrados nessa área são Przemieniecki (1985), com publicação original em 1968, Wang (1970) e Meek (1971). No Brasil, os livros dos professores Fernando Venâncio Filho (1975) e Domício Falcão Moreira (1977) foram pioneiros nesse assunto.

Uma excelente referência é o livro de McGuire e Gallagher (1979), que ganhou uma segunda edição com a colaboração de Ziemian mais recentemente (2000). Muito do conteúdo deste livro é baseado na primeira edição do livro de McGuire e Gallagher. Em particular, as comparações mostradas na introdução do Capítulo 2 e na Seção 2.1 entre o método da rigidez direta e o método dos elementos finitos (para estruturas contínuas) foram todas delineadas no último capítulo da primeira edição do livro de McGuire e Gallagher.

Deve ser salientado que este livro não apresenta nenhum aspecto de implementação computacional propriamente dita. Acrescenta-se apenas um formalismo matricial para o método dos deslocamentos, na sua formulação geral para barras extensíveis e flexíveis, isto é, sem simplificação alguma para reduzir o número de deslocabilidades.

Além disso, a implementação computacional de um programa para análise de estruturas reticuladas ou contínuas (pelo método dos elementos finitos) necessita de muitos outros métodos e procedimentos, que vão bem além do que é exposto neste livro. Diversos outros aspectos estão envolvidos no desenvolvimento de um programa de computador para executar uma análise estrutural. Questões como estruturas de dados e procedimentos para a criação do modelo geométrico, geração do modelo discretizado, aplicação de atributos de análise (propriedades de materiais, carregamentos, condições de suporte etc.) e visualização dos resultados são fundamentais nesse contexto.

2. DISCRETIZAÇÃO NO MÉTODO DA RIGIDEZ DIRETA

A metodologia de criação do modelo discreto no contexto do método dos deslocamentos pode ser resumida na Figura 1.4. Os parâmetros de discretização são as componentes de deslocamentos e rotações livres (não restritas por apoios) dos nós do modelo estrutural. Os nós são os pontos de encontros de barras ou as extremidades soltas de barras (não conectadas a outras barras). As componentes de deslocamentos e rotações nodais livres são denominadas *deslocabilidades*. Essencialmente, as deslocabilidades são os parâmetros que definem o comportamento cinemático de um modelo estrutural, isto é, elas determinam a sua configuração deformada. As deslocabilidades são as incógnitas do método dos deslocamentos.

Na verdade, a definição mais adequada para deslocabilidades seria “parâmetros que definem o comportamento cinemático” de um modelo estrutural discretizado, pois, quando são consideradas restrições nas deformações das barras, pode-se criar dependências entre componentes de deslocamentos e rotações dos nós do modelo. Neste livro, não estão sendo consideradas restrições nas deformações nas barras, e, portanto, as deslocabilidades são as componentes de deslocamentos e rotações nodais livres.

No contexto do método da rigidez direta (formulação matricial do método dos deslocamentos), muitas vezes, uma deslocabilidade é denominada *grau de liberdade*. Como na formulação matricial do método, em geral, as restrições de apoio são consideradas em um estágio posterior da solução, é comum se referir a uma componente de deslocamento ou rotação nodal restrita por apoio também como grau de liberdade, isto é, dentro da formulação do método, pode-se referir a um “grau de liberdade restrito por apoio”, o que seria uma inconsistência de acordo com a definição de deslocabilidade. Por uma questão de consistência, este livro adota a designação “grau de liberdade” para qualquer componente de deslocamento ou rotação nodal, incluindo as livres e as restritas por apoios. No caso de barras isoladas, a designação “deslocabilidades” ainda é preservada.

Além disso, estende-se o conceito de nó. No presente contexto, um nó deve ser entendido como *ponto de discretização*. Esse conceito generaliza a ideia de barra para *elemento de barra*, preparando o método da rigidez direta para sua forma generalizada: o método dos elementos finitos.

A ideia que se deseja passar é a possibilidade de inserir um nó (ponto de discretização) no interior de uma barra, que fica subdivida em duas barras, ou melhor, em dois elementos de barra. Essa subdivisão pode ser ilimitada, ou seja, pode-se recursivamente dividir elementos de barra em mais elementos. Mas a questão que se coloca é: por que discretizar uma barra em vários elementos de barra?

No contexto do método da rigidez direta para estruturas reticuladas, a resposta para essa pergunta é simplesmente: por conveniência. A subdivisão de barras em diversos elementos de barra, ou melhor, a discretização de uma barra com a inserção de vários nós no seu interior, não modifica os resultados da estrutura, pelo menos quando se trabalha com barras com seção transversal que não varia ao longo do comprimento. A discretização pode ser conveniente para simplificar a aplicação de uma força concentrada no interior da barra ou de uma força distribuída que abrange parcialmente o vão da barra.

Existem casos, entretanto, em que a discretização pode ser um artifício de modelagem que melhora a qualidade dos resultados. O exemplo mais clássico é o da modelagem discretizada de uma barra com seção transversal variável. Esse artifício discretiza uma barra em diversos elementos de barra, cada um com uma seção transversal constante, e varia as suas propriedades tentando capturar o efeito global da barra original. Esse exemplo é frequente porque a maioria dos programas de computador para análise de estruturas reticuladas não implementa barras com seção transversal variável. Obviamente, o resultado dessa solução discretizada é uma aproximação para o comportamento analítico da barra com seção transversal variável. A qualidade do resultado com discretização melhora à medida que mais elementos de barra são utilizados.

Essa discussão leva a outra indagação: por que os resultados de uma solução da estrutura com barras prismáticas independem do nível de discretização adotado? Na verdade, esse questionamento não deveria ficar restrito a barras prismáticas, uma vez que é possível formular soluções fundamentais consistentes para barras com seção transversal variável. Isso é feito utilizando integração numérica.

A resposta a essa indagação está na própria essência da formulação do método da rigidez direta, conforme será descrito ao longo deste livro. Entretanto, é possível sintetizar uma resposta:

- A discretização de barras no método da rigidez direta não modifica os resultados de uma análise estrutural, pois o comportamento contínuo de um elemento de barra pode ser representado por parâme-

tros nodais sem que se introduza nenhuma aproximação adicional além das simplificações já contidas na idealização analítica do comportamento de barras.

Essa é a principal diferença entre o método da rigidez direta e o método dos elementos finitos com formulação em deslocamentos para o problema estrutural. Inerente à própria concepção do segundo método, são introduzidas aproximações adicionais na substituição do comportamento contínuo do meio pelo comportamento discreto dos nós do modelo em elementos finitos. Por isso, esse método tem um caráter aproximado.

2.1. Representação dos carregamentos como cargas nodais

O ponto-chave para a discretização de um modelo estrutural dentro do contexto do método da rigidez direta está em soluções fundamentais para barras isoladas, que serão apresentadas nos Capítulos 5 e 6. Isso é o que permite utilizar um número finito de graus de liberdade para representar adequadamente o comportamento da estrutura contínua. A concepção da discretização pelo método pode ser explicada com o auxílio do exemplo da Figura 2.1.

A Figura 2.1 mostra uma viga contínua com três vãos submetida a uma força uniformemente distribuída que abrange parcialmente o vão central – superposição de estágios I + II. Considerou-se deliberadamente que a barra do vão central é subdividida (discretizada) em três elementos de barra, que correspondem aos dois trechos descarregados e ao trecho com a força uniformemente distribuída. Dessa forma, o caso geral de barra discretizada está sendo considerado. A solicitação da viga contínua é decomposta em dois estágios de carregamento, que são definidos da seguinte maneira:

Estágio I: Estrutura submetida à força uniformemente distribuída em conjunto com as reações de engastamento perfeito do elemento de barra central isolado, atuando nas suas extremidades.

Estágio II: Estrutura submetida a forças e momentos que correspondem às reações de engastamento perfeito do estágio I, atuando com sentidos invertidos nos nós das extremidades do elemento de barra carregado.

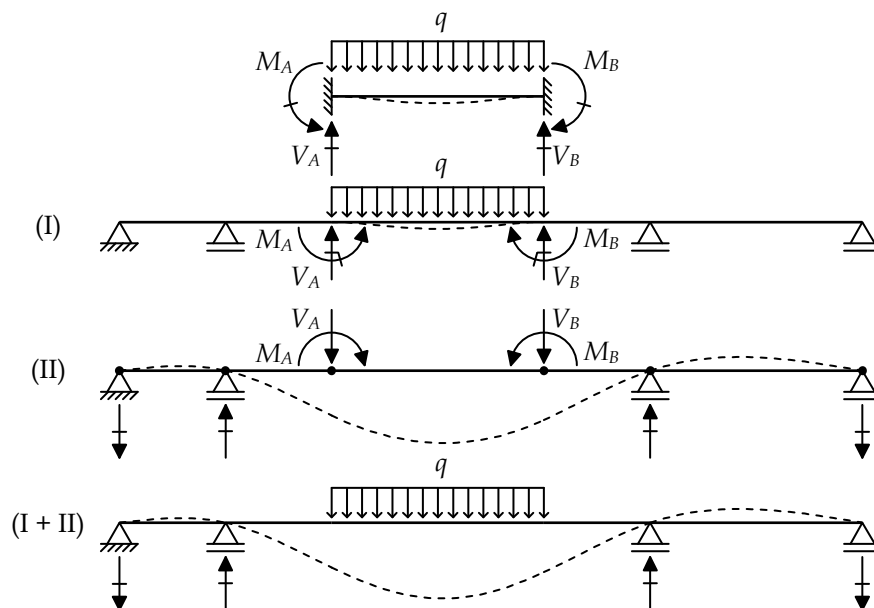


Figura 2.1 – Superposição de estágios para discretização do comportamento de uma viga contínua pelo método da rigidez direta.

Observa-se que o carregamento do estágio I indicado na Figura 2.1 é autoequilibrado. Além disso, as deformações e a elástica estão restritas ao elemento de barra carregado, sendo que os deslocamentos e rotações de todos os nós do modelo são nulos. Isso é fácil de ser identificado, pois as forças e momentos que atuam nos nós extremos do elemento de barra carregado correspondem às reações de engastamento perfeito para o carregamento desse elemento. Com isso, o efeito do carregamento não é sentido nos outros elementos de barra da estrutura. Ademais, as componentes de reações em todos os apoios no estágio I são nulas.

Outro aspecto a se destacar é que, no estágio II, estão sendo considerados como nós os pontos entre os trechos descarregados e o trecho carregado do vão central, assim como os pontos dos apoios da estrutura. Os nós estão identificados na Figura 2.1 por um pequeno círculo preto.

Com a superposição dos efeitos dos estágios I e II mostrados nessa figura, tem-se:

1. A soma dos carregamentos resulta no carregamento original da superposição de estágios I + II.
2. Os deslocamentos e rotações nodais do estágio II são iguais aos provocados pelo carregamento original, haja vista que são nulos no estágio I.
3. A elástica final nos elementos de barra descarregados corresponde à elástica do estágio II, uma vez que esses elementos não têm deformação no estágio I.
4. A elástica final no elemento de barra carregado é obtida pela soma dos deslocamentos do estágio I, que são deslocamentos para o elemento engastado perfeitamente em suas extremidades, com os deslocamentos do estágio II.
5. Os esforços internos finais nos elementos de barra descarregados correspondem aos esforços internos obtidos pela análise do estágio II, pois esses elementos não têm esforços internos no estágio I.
6. Os esforços internos finais no elemento de barra carregado são obtidos pela soma dos esforços de engastamento perfeito do estágio I com os esforços provenientes da análise do estágio II.
7. As reações de apoio finais são iguais às reações de apoio obtidas na análise do estágio II, pois o estágio I não tem reações de apoio.

O objetivo da decomposição nos estágios de carregamento I e II é claro. A ideia é isolar, no estágio I, o *efeito local* das solicitações que atuam no interior das barras (ou dos elementos de barra). O efeito local corresponde a uma situação de engastamento perfeito dos elementos de barra carregados. O estágio II considera o *efeito global* da solicitação, que foi transformada em forças e momentos nodais iguais às reações de engastamento do estágio I, mas com sentidos invertidos. Observa-se que o comportamento final da estrutura é praticamente igual ao comportamento global do estágio II, a menos dos efeitos locais de engastamento do trecho carregado.

Em essência, o estágio II corresponde ao comportamento global discretizado da estrutura. Isso se dá por dois motivos. O primeiro é que a solicitação, nesse caso, ocorre somente nos nós (pontos de discretização) do modelo. O segundo motivo é que, pelo menos em termos de deslocamentos e rotações nodais, os resultados do estágio II são os da estrutura para o carregamento original.

Observa-se que a decomposição nos estágios de carregamento I e II só faz sentido porque o estágio I corresponde à situação local de engastamento perfeito restrita ao trecho carregado, que resulta em deslocamentos e rotações nodais nulos. Esse é um dos fatos que garante que os resultados do modelo discretizado não se modificam se diferentes níveis de discretização forem utilizados. Vale observar que essa é outra diferença básica entre o método da rigidez direta para modelos reticulados e o método dos elementos finitos para meios estruturais contínuos. No segundo método, existe a decomposição em dois estágios de carregamento, mas o estágio I não é associado a uma situação de engastamento perfeito do elemento finito.

Para generalizar a metodologia de decomposição nos estágios I e II, algumas definições são necessárias:

- *cargas nodais* propriamente ditas são forças e momentos que, no carregamento original da estrutura, atuam diretamente sobre os nós da discretização;
- *cargas equivalentes nodais* são as cargas nodais que atuam no estágio II provenientes das reações de engastamento perfeito dos elementos de barra carregados no estágio I, com sentidos invertidos;
- *cargas nodais combinadas* são resultado da combinação das cargas nodais propriamente ditas com as cargas equivalentes nodais. As cargas nodais combinadas são as solicitações do estágio II e representam o efeito discretizado das solicitações externas atuando sobre os nós.

O modelo de pórtico plano da Figura 2.2 é utilizado para ilustrar essas definições. O carregamento original do pórtico é constituído de forças verticais uniformemente distribuídas que atuam nas vigas inclinadas e por duas forças laterais horizontais. Para a análise do pórtico desse modelo, a Figura 2.3 mostra o estágio I, e a Figura 2.4 ilustra o estágio II.

Observa-se na Figura 2.3 que a configuração deformada da estrutura para o estágio I é restrita às barras carregadas. As reações de engastamento perfeito, atuando em conjunto com as forças verticais uniformemente distribuídas, isolam o efeito dessas cargas para o resto da estrutura. As outras barras não têm deformações, tampouco esforços internos. As reações nos apoios da base da estrutura são nulas. Em resumo, esse estágio de carregamento apresenta apenas efeitos locais do carregamento no interior das barras.

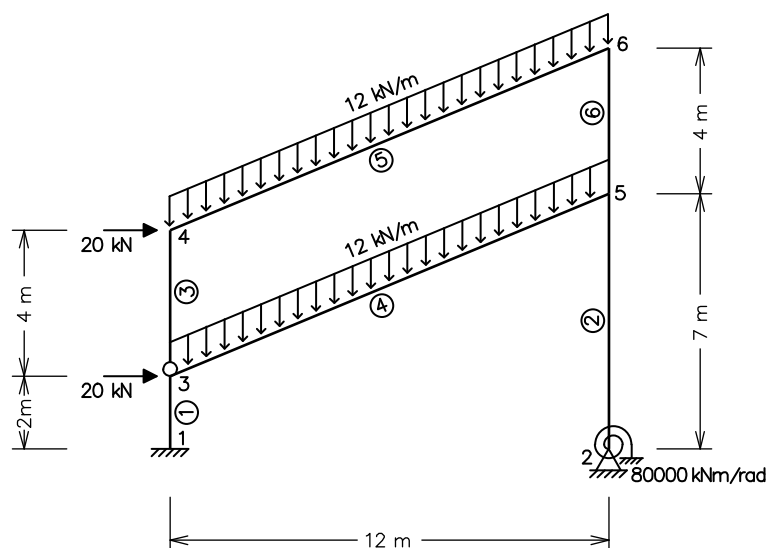


Figura 2.2 – Pórtico plano com cargas nodais e cargas em barras.

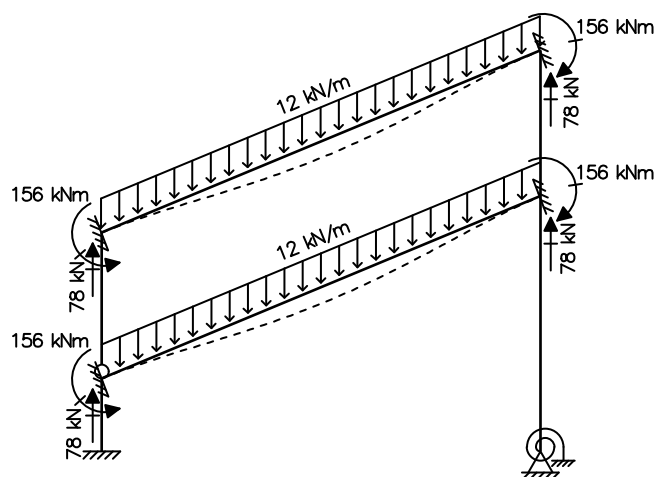


Figura 2.3 – Estágio I de carregamento do pórtico da Figura 2.2.

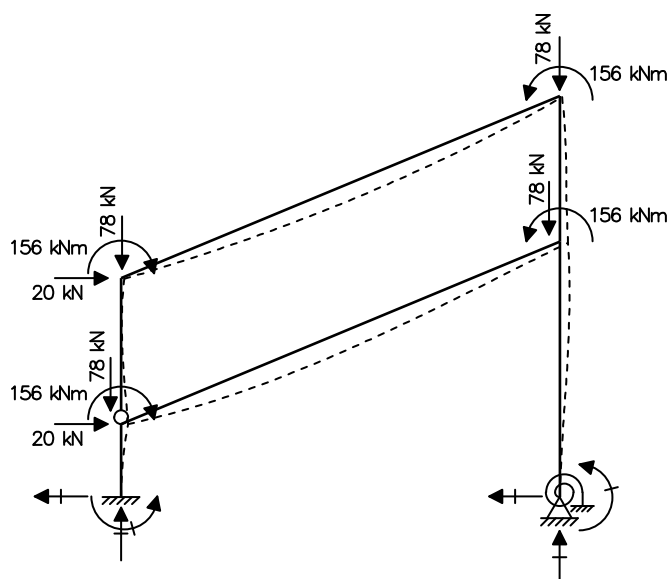


Figura 2.4 – Estágio II de carregamento do pórtico da Figura 2.2.

Por outro lado, o estágio II (Figura 2.4) é solicitado pelas cargas nodais combinadas e captura a resposta global da estrutura. Os deslocamentos e rotações nodais desse estágio de carregamento correspondem aos des-

locamentos e rotações nodais da estrutura com o carregamento original. O mesmo se dá para as reações nos apoios da base.

Deve-se salientar que os efeitos locais de engastamento perfeito dos elementos de barra carregados no seu interior são conhecidos *a priori*, pois são soluções fundamentais conhecidas e disponíveis (Capítulo 6).

O conceito de cargas equivalentes nodais no método dos elementos finitos existe, entretanto a essas cargas não é dada a conotação de reações de engastamento nos trechos carregados, com os sentidos invertidos. Nesse método, cargas equivalentes nodais são denominadas consistentes ou compatíveis porque produzem o mesmo trabalho virtual que o carregamento no interior do elemento finito produz, para um campo de deslocamentos virtuais consistente com a formulação aproximada do elemento. Essa conotação para cargas equivalentes nodais é compartilhada pelo método da rigidez direta, pelo menos para barras prismáticas, na medida em que as reações de engastamento perfeito de uma barra podem ser determinadas por equivalência de trabalho virtual utilizando funções de forma de barra como campo de deslocamentos virtuais (Seção 6.1.1). Isso caracteriza o método da rigidez direta como um caso particular do método dos elementos finitos.

Pode-se observar que, para o cálculo da elástica e dos esforços internos finais, existe uma distinção entre elementos de barra carregados no seu interior e elementos de barra descarregados. A elástica e os esforços internos finais dos elementos de barra descarregados ficam determinados completamente pela análise global do estágio de carregamento II. Por outro lado, para se obter a elástica e os esforços internos nos elementos de barra carregados, é preciso superpor os resultados dos estágios I e II.

Aqui reside mais uma diferença entre o método da rigidez direta e o método dos elementos finitos. Neste último, depois que os carregamentos no interior dos elementos finitos são convertidos em cargas equivalentes nodais, não se faz mais referência aos carregamentos originais. A configuração deformada e as tensões nos elementos finitos são determinadas sem distinção entre elementos carregados e descarregados: apenas o efeito global é considerado.

Em ambos os métodos, no estágio II, o resultado da superposição das cargas nodais combinadas com as reações de apoio é um conjunto de forças e momentos denominado *forças nodais generalizadas globais*, que são resultantes da superposição de cargas nodais combinadas e componentes de reação de apoio. Essas forças serão formalmente definidas na Seção 2.5.

Em resumo, o modelo estrutural a ser analisado pelo método da rigidez direta é o modelo discretizado do estágio de carregamento II, que é solicitado pelas cargas nodais combinadas. Um dos objetivos dessa análise é determinar os valores dos graus de liberdade desconhecidos, isto é, das componentes de deslocamentos e rotações nodais livres. Outro objetivo é determinar as componentes de reação de apoio. Dessa forma, o vetor das forças nodais generalizadas globais fica completamente determinado.

Além disso, a análise do estágio II resulta na determinação das elásticas e esforços internos em todos os elementos de barra do modelo estrutural. Para complementar os resultados, é preciso superpor as elásticas e esforços internos da situação de engastamento perfeito do estágio I, mas somente para os elementos de barra carregados.

Os capítulos seguintes deste livro detalham os passos dessa metodologia. Por questão de conveniência, as duas próximas seções descrevem, de uma maneira genérica e simplificada, como são fornecidos os dados de entrada para um programa de computador e de que forma os resultados textuais (não gráficos) da análise saem do programa.

2.2. Dados de entrada típicos de um programa de computador

Esta seção ilustra de forma muito simplificada o tipo de informação que é fornecida para um programa de computador que analisa estruturas reticuladas planas, considerando apenas um caso de carregamento onde todas as cargas atuam concomitantemente. O objetivo é caracterizar os grupos de dados necessários para o programa realizar as seguintes tarefas:

1. Montar o sistema de equações de equilíbrio do método da rigidez direta.
2. Resolver esse sistema (determinando os valores dos deslocamentos e rotações dos graus de liberdade livres).
3. Calcular as reações de apoio.

- Determinar esforços internos nas extremidades das barras nas direções dos seus eixos locais.

Todos esses passos serão detalhados neste livro.

Obviamente, cada programa de computador define um formato próprio para os dados de entrada. Os tipos de dados, entretanto, são comuns à maioria dos programas e podem ser classificados basicamente nos seguintes grupos:

- coordenadas nodais e restrições de apoio;
- incidência nodal das barras e propriedades dos seus materiais e de suas seções transversais – grupo que também fornece informações sobre liberações de continuidade, por exemplo, provenientes de rótulas;
- recalques de apoio;
- cargas nodais propriamente ditas;
- carregamentos no interior das barras.

Os três últimos grupos de dados são fornecidos para cada caso de carregamento, se existissem mais do que um caso.

Para ilustrar os dados de entrada, adota-se o pórtico da Figura 2.2 como exemplo. A seguir, é reproduzida uma listagem de um arquivo textual com os dados de entrada desse exemplo para um programa genérico:

Coordenadas Nodais e Condições de Suporte

Nó	X (m)	Y (m)	Desloc.X (tipo)	Desloc.Y (tipo)	RotaçãoZ (tipo)	Mola X (kN/m)	Mola Y (kN/m)	Mola Z (kNm/rad)
1	0.0	0.0	Fixo	Fixo	Fixo	0.0	0.0	0.0
2	12.0	0.0	Fixo	Fixo	Mola	0.0	0.0	0.0
3	0.0	2.0	Livre	Livre	Livre	0.0	0.0	80000.0
4	0.0	6.0	Livre	Livre	Livre	0.0	0.0	0.0
5	12.0	7.0	Livre	Livre	Livre	0.0	0.0	0.0
6	12.0	11.0	Livre	Livre	Livre	0.0	0.0	0.0

Dados das Barras

Barra	Nó inicial	Nó final	Rótula inicial	Rótula final	Mod.Elast. (kN/m ²)	Área Seção (m ²)	Mom.Inércia (m ⁴)
1	1	3	Não	Não	2.0e+08	0.008	0.0004
2	2	5	Não	Não	2.0e+08	0.008	0.0004
3	3	4	Sim	Não	2.0e+08	0.008	0.0004
4	3	5	Não	Não	2.0e+08	0.008	0.0004
5	4	6	Não	Não	2.0e+08	0.008	0.0004
6	5	6	Não	Não	2.0e+08	0.008	0.0004

Dados de Cargas Concentradas em Nós

Nó	Fx (kN)	Fy (kN)	Mz (kNm)
3	20.0	0.0	0.0
4	20.0	0.0	0.0

Dados de Carregamentos Uniformemente Distribuídos em Barras

Barra	Direção	Qx (kN/m)	Qy (kN/m)
4	Global	0.0	-12.0
5	Global	0.0	-12.0

A geometria global do modelo é fornecida através das coordenadas dos nós, definidas em algum sistema de eixos globais. Para cada nó, fornecem-se um número (ou índice) e suas coordenadas. No caso plano, são as coordenadas em relação aos eixos globais X e Y. No exemplo, o nó com índice 1 está localizado na origem do sistema de eixos globais.

As restrições de apoio são informadas para cada nó e indicam os graus de liberdade fixos, livres ou com um apoio elástico. No exemplo, o nó com índice 1 é um engaste e tem os três graus de liberdade fixos. O nó com índice 2 tem um apoio do 2º gênero (deslocamentos nas direções X e Y fixos) e um apoio elástico rotacional, cujo coeficiente de rigidez é fornecido. Os demais nós têm todos os graus de liberdade livres.

A topologia do modelo, isto é, a maneira como as barras se interconectam, é obtida pelo programa de computador com base em uma informação que se costuma denominar *incidência nodal dos elementos*. Essa informação é uma das mais importantes para o programa de computador, pois permite que a matriz de rigidez global do modelo (que contém os coeficientes do sistema de equações de equilíbrio) seja montada de uma

maneira muito eficiente. Essencialmente, essa informação indica como as barras usam os nós do modelo. Para cada barra, que é identificada por um índice, informa-se o número de seu nó inicial e de seu nó final. O número de um nó é o índice utilizado para definir suas coordenadas.

Na informação sobre os dois nós de uma barra, é importante a ordem em que os índices dos nós são fornecidos. Isso define o sentido do eixo local x da barra (Figura 2.9). Tal eixo é orientado do nó inicial para o nó final. O sentido do eixo x define o sistema de eixos locais da barra. O eixo local z da barra sempre sai do plano, e o eixo local y é tal que o produto vetorial do eixo x pelo y resulta no eixo z . Várias informações estão associadas aos eixos locais de um elemento de barra. Um carregamento no seu interior pode ser definido com componentes nas direções dos eixos locais ou nas direções dos eixos globais. Na próxima seção, será visto que os resultados dos esforços internos atuantes nas extremidades das barras têm sinais associados às direções dos eixos locais das barras.

No exemplo, além da incidência nodal para cada barra, são fornecidos o valor do módulo de elasticidade do seu material e os valores de área e momento de inércia da sua seção transversal. Os dados de propriedades de barra acusam a presença de uma rótula na extremidade inicial da barra com índice 3.

As cargas nodais são informadas nas direções dos eixos globais. Os sinais dos valores fornecidos são associados aos sentidos desses eixos.

No exemplo, as forças uniformemente distribuídas são aplicadas, nas barras com índices 4 e 5, na direção do eixo global Y . Portanto, o carregamento nessas barras é definido nas direções dos eixos globais (o sinal negativo indica que as forças distribuídas são contrárias ao sentido positivo do eixo Y , isto é, para baixo).

2.3. Resultados típicos de um programa de computador

Os resultados da análise de uma estrutura reticulada fornecidos por um programa de computador dependem muito do tipo de análise. Em uma análise simples, como a do pórtico da Figura 2.2, que tem apenas um caso de carregamento, os resultados típicos são:

- deslocamentos e rotações nodais;
- reações de apoio;
- esforços internos nas extremidades das barras.

A seguir, estão listados os resultados textuais da análise do pórtico de estudo feita por um programa genérico:

Resultados de Deslocamentos e Rotações Nodais

Nó	Desloc. X (m)	Desloc. Y (m)	Rotação Z (rad)
1	0.000e+00	0.000e+00	0.000e+00
2	0.000e+00	0.000e+00	-4.929e-04
3	+3.212e-03	-1.975e-04	-3.015e-03
4	+1.482e-03	-4.507e-04	-1.842e-03
5	+3.789e-03	-6.739e-04	+1.087e-03
6	+1.114e-03	-8.107e-04	+2.054e-03

Reações de Apoio

Nó	Fx (kN)	Fy (kN)	Mz (kNm)
1	-23.6	+158.0	+144.2
2	-16.4	+154.0	+39.4

Resultados de Esforços Internos nas Barras (direções locais)

Barra	Normal Nó inic. (kN)	Normal Nó final (kN)	Cortante Nó inic. (kN)	Cortante Nó final (kN)	Momento Nó inic. (kNm)	Momento Nó final (kNm)
1	+158.0	-158.0	+23.6	-23.6	+144.2	-97.0
2	+154.0	-154.0	+16.4	-16.4	+39.4	+75.6
3	+101.3	-101.3	-34.1	+34.1	0.0	-136.5
4	-13.0	+73.0	+66.8	+77.2	+97.0	-164.5
5	+88.9	-28.9	+72.7	+71.3	+136.5	-127.6
6	+54.7	-54.7	+54.1	-54.1	+88.9	+127.6

Os deslocamentos e rotações nodais fornecidos pelo programa têm as direções dos eixos globais. O mesmo ocorre para as reações de apoio. A Figura 2.5 mostra esses resultados de forma gráfica. A elástica da estrutura é traçada com base nos valores dos deslocamentos e das rotações nodais. As funções de forma das bar-

ras (Seção 4.1) são usadas para isso. Para as barras inclinadas carregadas, a elástica proveniente da situação de engastamento perfeito da barra deve ser superposta ao efeito global dos resultados do programa de computador. Na figura, as reações de apoio estão desenhadas com seus sentidos físicos, após a interpretação de seus sinais.

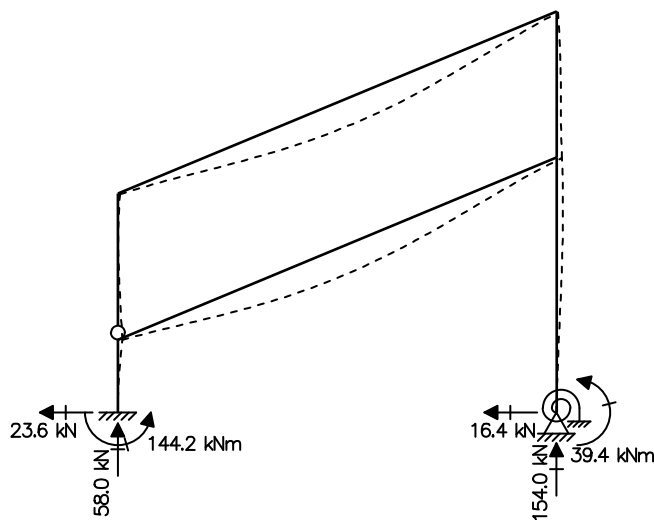


Figura 2.5 – Configuração deformada (ampliada em 40 vezes em relação à escala da estrutura) e reações de apoio do pórtico da Figura 2.2.

Em geral, um programa de computador fornece, em resultados textuais, os esforços internos nas extremidades das barras, de acordo com as direções de seus eixos locais. Os valores seguem a convenção de sinais adotada no método dos deslocamentos, como definido na Tabela 2.1. Conforme descrito anteriormente, as direções dos eixos locais de uma barra dependem da ordem de indicação dos nós da barra. Isso deve ser levado em conta para interpretar de forma correta os valores dos esforços internos fornecidos pelo programa.

Tabela 2.1 – Convenção de sinais adotada para quadros planos no método da rigidez direta.

Deslocamentos horizontais		
Deslocamentos verticais		
Rotações		
Forças horizontais		
Forças verticais		
Momentos		
Esforços axiais em extremidades de barra		
Esforços cortantes em extremidades de barra		
Momentos fletores em extremidades de barra		

Para realizar o traçado dos diagramas de esforços internos, é preciso converter os valores obtidos dos resultados textuais do programa para a convenção usual adotada na análise de estruturas (Martha 2010). As Fi-

guras 2.6, 2.7 e 2.8 mostram os diagramas de esforços normais, esforços cortantes e momentos fletores do exemplo de acordo com essa convenção usual.

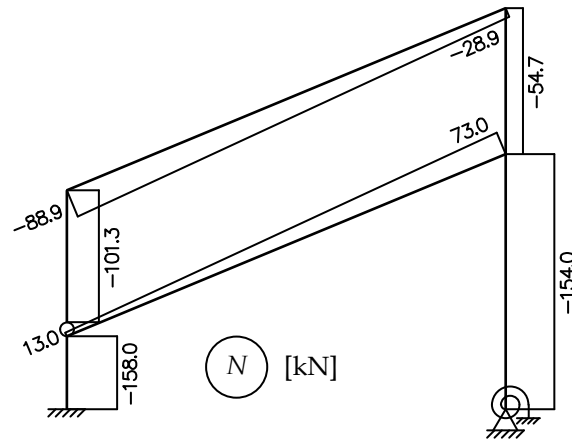


Figura 2.6 – Diagrama de esforços normais do pórtico da Figura 2.2.

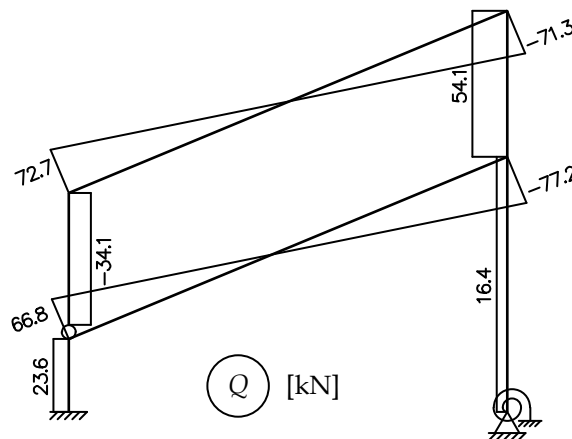


Figura 2.7 – Diagrama de esforços cortantes do pórtico da Figura 2.2.

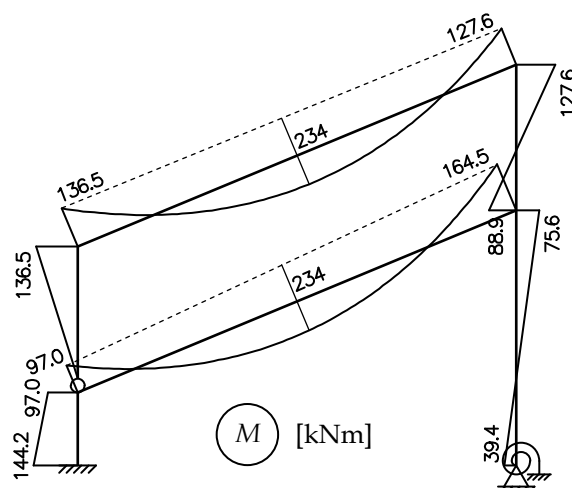


Figura 2.8 – Diagrama de momentos fletores do pórtico da Figura 2.2.

2.4. Sistemas de coordenadas generalizadas

Uma das características mais marcantes do método da rigidez direta é a soma de contribuições de coeficientes de rigidez locais das barras (Capítulo 5) para compor os coeficientes de rigidez globais da estrutura (Ca-

pítulo 7). Essa soma é feita de forma explícita e direta. Aliás, o termo “direta” no nome do método vem justamente daí.

Entretanto, para poder efetuar a soma de coeficientes de rigidez locais de várias barras, é preciso que esses coeficientes estejam definidos no mesmo sistema de eixos. Ocorre que os coeficientes de rigidez locais se referem a direções dos eixos locais da barra. Para somar os coeficientes de rigidez locais deve-se projetá-los previamente para um sistema de eixos único (em geral, para o sistema de eixos globais).

Para tratar de forma genérica e arbitrária a transformação dos coeficientes de rigidez locais do sistema local de uma barra para o sistema global da estrutura, é conveniente definir *sistemas de coordenadas generalizadas*, que são usados para indicar as direções dos coeficientes de rigidez da barra ou da estrutura.

Coordenadas generalizadas são direções associadas aos graus de liberdade (ou deslocabilidades) de uma barra ou de uma estrutura. As *coordenadas generalizadas globais* são as direções utilizadas para definir os graus de liberdade globais (da estrutura). As *coordenadas generalizadas locais* (do elemento de barra) são as direções utilizadas para definir as deslocabilidades locais. Para uma barra, as coordenadas generalizadas locais podem estar associadas tanto às direções dos eixos locais (ou do *sistema local*) quanto às direções dos eixos globais (ou do *sistema global*). A Figura 2.9 mostra um exemplo com os três tipos de sistemas de coordenadas para um pórtico simples. Os eixos locais das barras também estão indicados na figura. Os índices das coordenadas generalizadas locais nas direções dos eixos locais são identificados pelo superescrito i' , sendo i o índice de uma coordenada generalizada local.

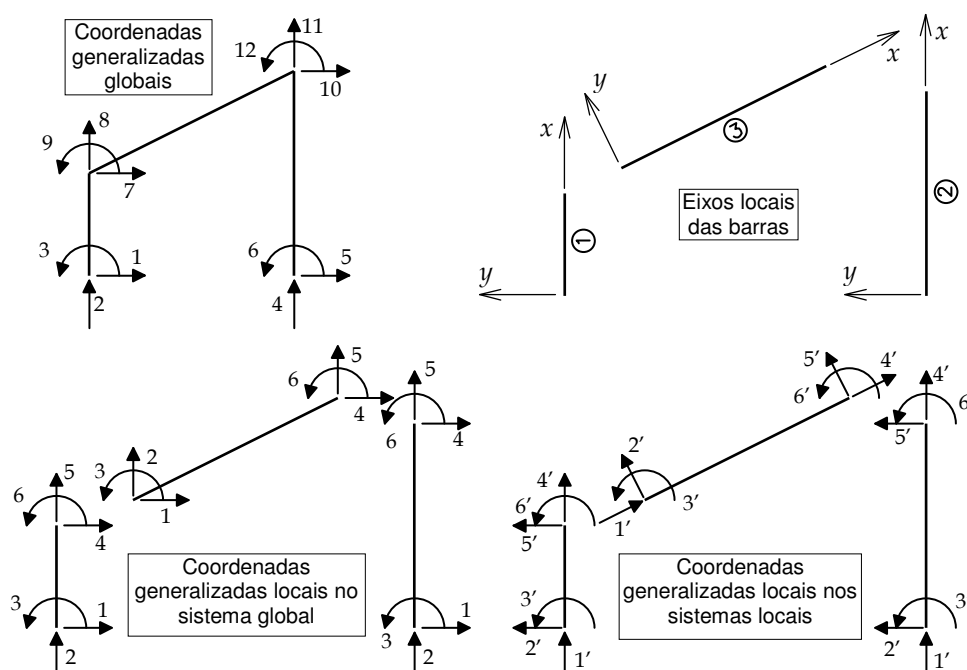


Figura 2.9 – Sistemas de coordenadas generalizadas adotados no método da rigidez direta para pórticos planos.

Na verdade, as coordenadas generalizadas globais foram utilizadas na Seção 2.1, mas sem explicitá-las: as forças generalizadas globais se referem às coordenadas generalizadas globais. Em outra situação, as soluções fundamentais (coeficientes de rigidez locais e reações de engastamento) para barras isoladas, apresentadas nas Seções 5.1 e 6.1, são definidas nas direções das coordenadas generalizadas locais, nos sistemas locais das barras.

As coordenadas generalizadas locais nas direções dos eixos globais são utilizadas em etapas intermediárias do método da rigidez direta, em que é necessário somar contribuições vindas das diversas barras para compor um efeito global. O exemplo mais evidente dessa utilização é na montagem da matriz de rigidez global da estrutura com base nos coeficientes de rigidez das barras (Seção 7.1). Outro exemplo é a composição das forças generalizadas globais, que recebem contribuição das cargas equivalentes nodais das barras carregadas e das cargas nodais propriamente ditas (Seção 7.2).

No caso de treliças planas, a principal diferença em relação a pórticos planos é que as rotações dos nós da treliça não são consideradas graus de liberdade. Portanto, cada nó de treliça tem dois graus de liberdade: um deslocamento horizontal e outro vertical. A Figura 2.10 mostra os três sistemas de coordenadas generalizadas para um modelo de treliça plana.

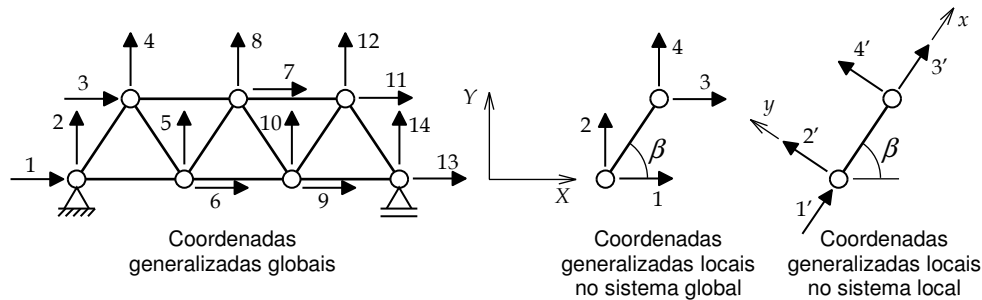


Figura 2.10 – Coordenadas generalizadas globais e locais de um modelo de treliça plana.

No caso de grelhas, o plano da estrutura é formado pelos eixos globais X e Y e são três os graus de liberdade por nó: uma rotação em torno do eixo X, uma rotação em torno do eixo Y e um deslocamento transversal ao plano da grelha, na direção do eixo global Z. A Figura 2.11 ilustra uma grelha e indica os sistemas de coordenadas generalizadas utilizados.

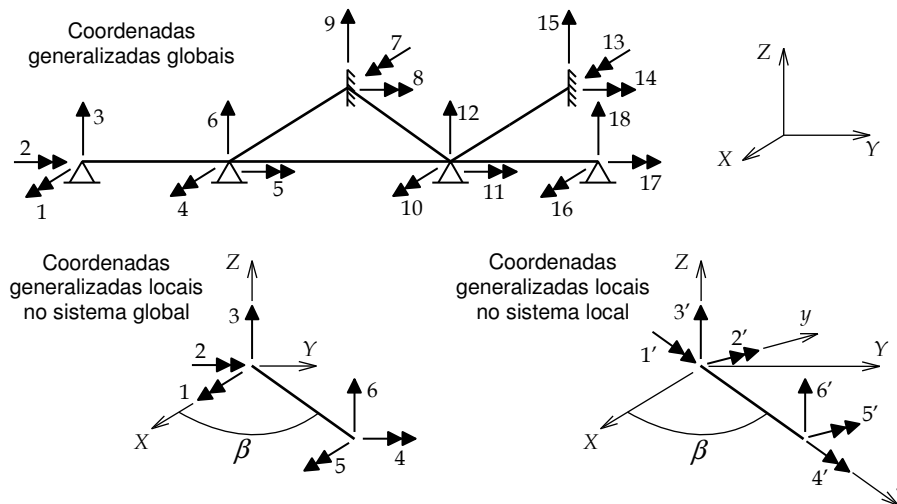


Figura 2.11 – Coordenadas generalizadas globais e locais de um modelo de grelha.

As setas duplas na Figura 2.11 representam coordenadas generalizadas associadas a rotações. Cada seta dupla tem a direção do eixo em torno do qual se dá a rotação. Nesse exemplo, a numeração das coordenadas generalizadas é feita conforme se explica a seguir. As coordenadas são numeradas consecutivamente em cada nó. No sistema global, a numeração segue a ordem: primeiro, a direção associada à rotação em torno do eixo X; segundo, a direção associada à rotação em torno do eixo Y; e, terceiro, a direção associada ao deslocamento na direção Z. No sistema local, a numeração segue a mesma ordem, mas se refere aos eixos locais da barra (x, y e z).

2.5. Graus de liberdade e forças generalizadas globais

A solução completa de um modelo estrutural pelo método da rigidez direta é obtida pela superposição de uma solução global do modelo com soluções locais em cada barra do modelo. Conforme apresentado na Seção 2.1, a solução global (estágio II) é uma representação *discreta* do problema, em que o campo de deslocamentos contínuo é representado pelas componentes de deslocamentos e rotações dos nós do modelo. Uma componente de deslocamento ou rotação nodal é definida formalmente como:

$D_i \rightarrow$ grau de liberdade global: componente de deslocamento ou rotação (livre ou com restrição de apoio) em um nó do modelo estrutural, na direção da coordenada generalizada global i .

Nessa definição, a noção de grau de liberdade global estende o conceito de deslocabilidade global para incluir os deslocamentos e rotações (conhecidos) associados às restrições de apoio.

O conjunto de graus de liberdade globais forma um vetor que é definido da seguinte maneira:

$\{D\} \rightarrow$ vetor dos graus de liberdade globais do problema discreto, incluindo graus de liberdade restritos por apoio.

Analogamente, conforme apresentado na Seção 2.1, as forças e momentos da solução discreta (estágio II) têm a seguinte definição:

$F_i \rightarrow$ *força nodal generalizada global*: componente de força ou momento que atua na direção da coordenada generalizada global i , resultante da superposição de cargas nodais combinadas e componentes de reação de apoio.

O conjunto de forças nodais generalizadas globais é agrupado em um vetor definido como:

$\{F\} \rightarrow$ *vetor das forças nodais generalizadas globais*: é o conjunto de todas as forças nodais generalizadas globais.

Para o pórtico estudado nas Seções 2.2 e 2.3, os graus de liberdade globais e as forças nodais generalizadas globais estão mostrados na Figura 2.12, com sentidos positivos. Conforme observado anteriormente, a notação adotada neste livro para indicar genericamente uma componente de deslocamento ou rotação é uma seta com um traço na base.

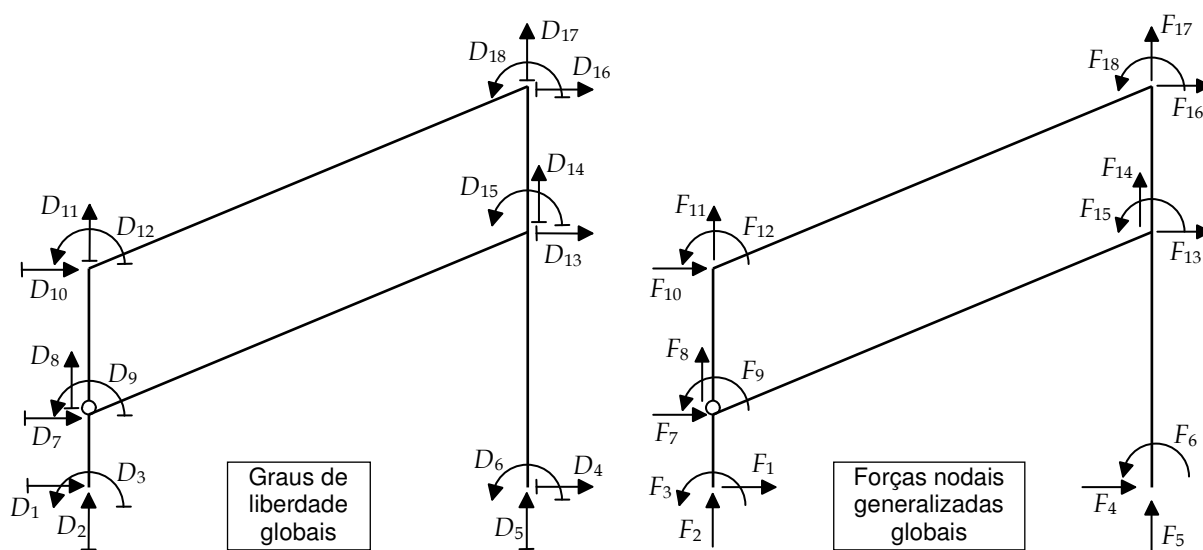


Figura 2.12 – Graus de liberdade e forças generalizadas globais do pórtico da Figura 2.2.

Vê-se, na Figura 2.12, que os graus de liberdade e as forças nodais generalizadas globais foram numerados de uma maneira arbitrária, que segue a numeração das coordenadas generalizadas globais. No exemplo, o critério adotado foi numerar as coordenadas generalizadas globais de cada nó seguindo a ordenação da numeração nodal. Os números dos nós estão indicados na Figura 2.2, assim como os números das barras (identificados com um círculo). Em cada nó, a primeira coordenada a ser numerada corresponde ao deslocamento horizontal do nó, e a última corresponde à rotação.

Essa questão da numeração das coordenadas generalizadas globais é uma das mais importantes na solução de um modelo estrutural em um programa de computador. A numeração afeta o tamanho dos vetores e matrizes que são armazenados na memória do computador. Esse assunto vai ser tratado no Capítulo 7.

Os graus de liberdade e forças generalizadas globais mostrados na Figura 2.12 estão associados a um exemplo de pórtico plano. Para outros tipos de modelos estruturais, como treliças, grelhas ou pórticos espaciais, os graus de liberdade e forças generalizadas globais são definidos de maneira análoga em relação às respectivas coordenadas generalizadas globais indicadas nas Figuras 2.10 e 2.11.

2.6. Graus de liberdade e forças generalizadas locais nas direções dos eixos globais

Um dos pontos mais importantes do método da rigidez direta é a composição do comportamento global do modelo estrutural a partir do comportamento individual de cada barra. Para que isso seja possível, é preciso definir graus de liberdade e forças generalizadas para uma barra isolada do modelo. Essas entidades são definidas nas direções das coordenadas generalizadas locais de cada barra (Figura 2.9). Nesta seção, essas entidades são definidas nas coordenadas generalizadas locais com direção dos eixos globais do modelo.

A Figura 2.13 (na esquerda) indica os deslocamentos e rotações nas extremidades de uma barra de pórtico plano, nas direções dos eixos globais do modelo estrutural. Esses deslocamentos e rotações são chamados de *deslocabilidades* ou *graus de liberdade locais*. Neste livro, os dois termos serão utilizados indistintamente, sendo que o termo *deslocabilidade local* será usado preferencialmente. Uma deslocabilidade local, no sistema global, de uma barra de pórtico plano isolada é definida formalmente como:

$d_i \rightarrow$ *deslocabilidade local (de barra) no sistema global*: deslocamento ou rotação na direção da coordenada generalizada local i , na direção de um dos eixos globais, em uma extremidade de uma barra isolada.

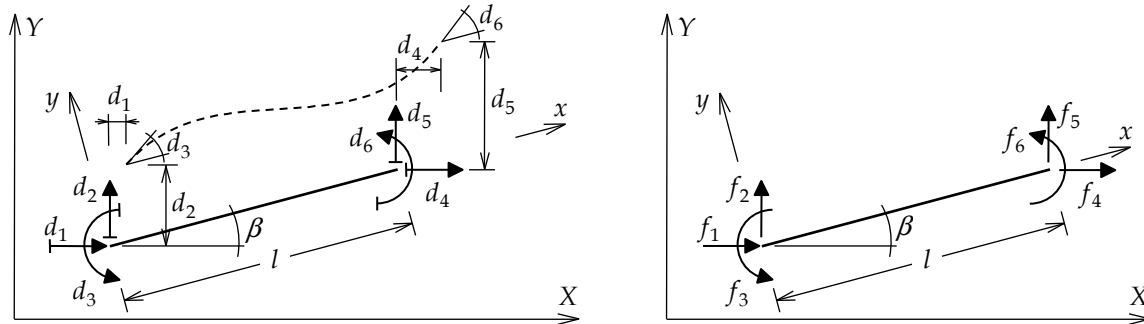


Figura 2.13 – Graus de liberdade e forças generalizadas locais de uma barra de pórtico plano nas direções dos eixos globais do modelo estrutural.

Na Figura 2.13, os índices 1 e 4 estão relacionados com deslocabilidades horizontais, isto é, na direção do eixo global X. Os índices 2 e 5 são usados para a deslocabilidades na direção do eixo global vertical Y. E os índices 3 e 6 se referem às rotações nas extremidades. Na figura, as deslocabilidades também estão indicadas com seu significado físico na configuração deformada (com amplitude exagerada).

O desenho na direita da Figura 2.13 refere-se às forças e aos momentos que atuam nas extremidades da barra isolada, que são definidos como:

$f_i \rightarrow$ *força generalizada local (de barra) no sistema global*: força ou momento que atua na direção da coordenada generalizada local i (na direção de um dos eixos globais) de uma barra para equilibrá-la quando isolada.

Todas as deslocabilidades e forças generalizadas locais da Figura 2.13 estão mostradas com sentidos positivos. Os deslocamentos são positivos nos sentidos dos eixos globais, e as rotações, para pórticos planos, são positivas no sentido anti-horário.

A deslocabilidades e forças generalizadas locais (nas direções globais) de uma barra são grupadas em vetores definidos da seguinte maneira:

$\{d\} \rightarrow$ *vetor das deslocabilidades de barra no sistema global*: conjunto de deslocabilidades locais de uma barra nas direções dos eixos globais;

$\{f\} \rightarrow$ *vetor das forças generalizadas de barra no sistema global*: conjunto de forças e momentos que atuam nas extremidades de uma barra (nas direções dos eixos globais) para equilibrá-la quando isolada.

Para outros tipos de modelos estruturais, como treliças planas e grelhas, as deslocabilidades locais e forças generalizadas locais no sistema global são definidas analogamente ao que foi feito para uma barra de pórtico plano. As coordenadas generalizadas locais no sistema global para treliças planas estão mostradas na Figura 2.10; para grelhas, na Figura 2.11.

2.7. Graus de liberdade e forças generalizadas locais nas direções dos eixos locais

O comportamento estrutural local de uma barra é naturalmente definido nas direções dos eixos locais da barra. Por exemplo, o efeito axial provoca deslocamentos na direção do eixo local x , enquanto o efeito de flexão tem deflexões na direção do eixo local transversal y . Por esse motivo, são definidos deslocabilidades (graus de liberdade) e forças generalizadas locais de uma barra isolada nas direções dos seus eixos locais.

A Figura 2.14 indica os deslocamentos e rotações nas extremidades de uma barra de pórtico plano isolada nas direções dos eixos locais da barra. Esses deslocamentos e rotações são definidos como:

$d'_i \rightarrow$ *deslocabilidade de barra no sistema local*: deslocamento ou rotação na direção da coordenada generalizada local i' , na direção de um dos eixos locais, em uma extremidade de uma barra isolada.

Sendo que d'_1 e d'_4 são deslocamentos na direção axial, d'_2 e d'_5 são deslocamentos na direção transversal, e d'_3 e d'_6 são rotações.

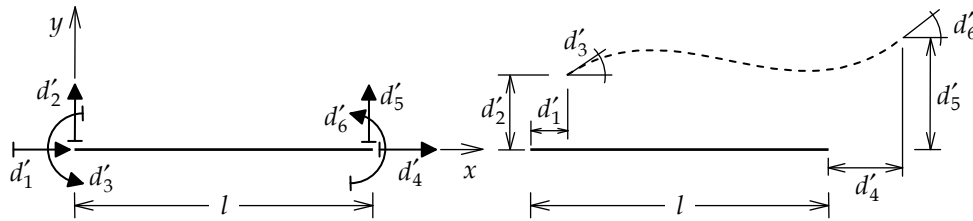


Figura 2.14 – Eixos locais e deslocabilidades de uma barra de pórtico plano isolada.

Na Figura 2.14, as deslocabilidades também estão indicadas com seu significado físico na configuração deformada (com amplitude exagerada). Todas as deslocabilidades estão mostradas com sentidos positivos. Os deslocamentos são positivos nos sentidos dos eixos locais da barra, e as rotações são positivas no sentido anti-horário.

As forças generalizadas locais, nas direções dos eixos locais, são definidas como (ver Figura 2.16):

$f'_i \rightarrow$ *força generalizada de barra no sistema local*: força ou momento que atua na direção da coordenada generalizada local i' (na direção de um dos eixos locais) de uma barra para equilibrá-la quando isolada.

Também são definidos vetores para as deslocabilidades e forças generalizadas locais nas direções dos eixos locais de uma barra:

$\{d'\} \rightarrow$ *vetor das deslocabilidades de barra no sistema local*: conjunto de deslocabilidades de uma barra nas direções dos eixos locais;

$\{f'\} \rightarrow$ *vetor das forças generalizadas de barra no sistema local*: conjunto de forças e momentos que atuam nas extremidades de uma barra (nas direções dos eixos locais) para equilibrá-la quando isolada.

É possível relacionar as deslocabilidades e forças generalizadas locais de uma barra no sistema local com as deslocabilidades e forças generalizadas no sistema global. A Figura 2.15 mostra representações das deslocabilidades locais nos dois sistemas.

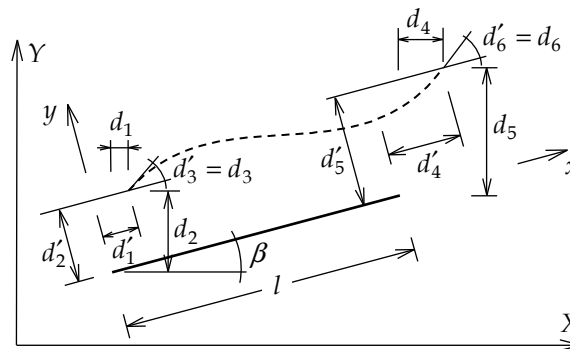


Figura 2.15 – Representações das deslocabilidades de uma barra no sistema local e no sistema global.

Com base na Figura 2.15, pode-se obter as deslocabilidades locais em função das globais:

$$\begin{aligned} d'_1 &= +d_1 \cdot \cos\beta + d_2 \cdot \sin\beta; & d'_4 &= +d_4 \cdot \cos\beta + d_5 \cdot \sin\beta; \\ d'_2 &= -d_1 \cdot \sin\beta + d_2 \cdot \cos\beta; & d'_5 &= -d_4 \cdot \sin\beta + d_5 \cdot \cos\beta; \\ d'_3 &= d_3; & d'_6 &= d_6. \end{aligned}$$

Essas relações podem ser representadas de forma condensada:

$$\{d'\} = [R] \cdot \{d\}, \quad (2.1)$$

sendo $[R]$ uma matriz de transformação por rotação:

$$[R] = \begin{bmatrix} +\cos\beta & +\sin\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\beta & +\cos\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +\cos\beta & +\sin\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\beta & +\cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

A matriz de transformação por rotação é ortogonal, isto é, sua inversa é igual a sua transposta: $[R]^{-1} = [R]^T$. Por causa disso, pode-se obter as deslocabilidades no sistema global em função das deslocabilidades no sistema local a partir da transposta da matriz $[R]$:

$$\{d\} = [R]^T \cdot \{d'\}. \quad (2.3)$$

De maneira semelhante, pode-se obter as forças generalizadas da barra no sistema global em função das forças generalizadas no sistema local (Figura 2.16):

$$\begin{aligned} f_1 &= +f'_1 \cdot \cos\beta - f'_2 \cdot \sin\beta; & f_4 &= +f'_4 \cdot \cos\beta - f'_5 \cdot \sin\beta; \\ f_2 &= +f'_1 \cdot \sin\beta + f'_2 \cdot \cos\beta; & f_5 &= +f'_4 \cdot \sin\beta + f'_5 \cdot \cos\beta; \\ f_3 &= f'_3; & f_6 &= f'_6. \end{aligned}$$

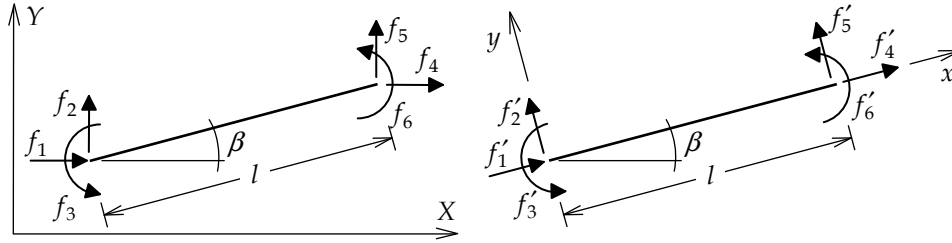


Figura 2.16 – Representação das forças generalizadas de uma barra no sistema global e no sistema local.

Define-se, então, as seguintes relações matriciais entre as forças generalizadas da barra:

$$\{f\} = [R]^T \cdot \{f'\}; \quad (2.4)$$

$$\{f'\} = [R] \cdot \{f\}. \quad (2.5)$$

A relação que existe entre $\{d'\} = [R]\{d\}$ e $\{f\} = [R]^T\{f'\}$ é chamada de *relação de contragradência* (Rubinstein 1970, Vaz 2011), pois a última expressão pode ser obtida a partir da primeira utilizando equivalência de trabalho realizado para forças generalizadas locais no sistema global e no sistema local, como mostrado a seguir.

Dado um campo de deslocamentos arbitrário, o trabalho provocado pelas forças externas não depende do sistema de eixos utilizado para definir as forças. Assim, o trabalho das forças no sistema global é igual ao trabalho das forças no sistema local para o campo de deslocamentos arbitrário $\{\bar{d}'\} = [R]\{\bar{d}\}$. Logo $\{\bar{d}\}^T \{f\} = \{\bar{d}'\}^T \{f'\}$. Considerando que $\{\bar{d}'\}^T = \{\bar{d}\}^T [R]^T$, chega-se a $\{\bar{d}\}^T \{f\} = \{\bar{d}\}^T [R]^T \{f'\}$. Como o campo de deslocamentos é arbitrário, pode-se cancelar $\{\bar{d}\}^T$ dessa expressão. Com isso, chega-se de maneira alternativa à relação $\{f\} = [R]^T \{f'\}$.

A matriz de transformação por rotação $[R]$ também pode ser obtida genericamente. Conforme visto na Seção 2.2, as coordenadas dos nós inicial e final de uma barra são fornecidas para um programa de computador. Esses dados são suficientes para calcular $\cos\beta$ e $\sin\beta$, presentes na Equação 2.2 da matriz de rotação. Considere que i é o índice do nó inicial, e j , o índice do nó final da barra, como mostrado na Figura 2.17. As coordenadas do nó inicial são (X_i, Y_i) , e as do nó final são (X_j, Y_j) .

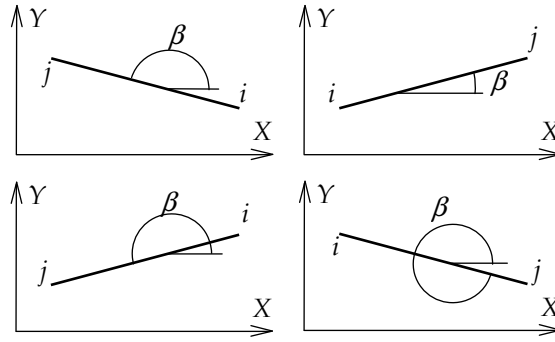


Figura 2.17 – Quatro orientações típicas de uma barra.

O comprimento da barra é dado por:

$$l = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2}.$$

Sendo β o ângulo de inclinação da barra, pode-se determinar $\cos\beta$ e $\sin\beta$ da seguinte maneira:

$$\cos\beta = \frac{X_j - X_i}{l}; \quad \sin\beta = \frac{Y_j - Y_i}{l}.$$

Essas expressões são válidas para qualquer inclinação da barra e para qualquer ordem que se considere o nó inicial e o nó final de uma barra. A Figura 2.17 mostra exemplos de duas inclinações da barra, com variações na ordem de indicação do nó inicial e do nó final da barra. Isso resulta em quatro situações típicas para o ângulo β , uma em cada quadrante. Observe que os sinais de $\cos\beta$ e $\sin\beta$ obtidos pelas expressões anteriores são consistentes com as inclinações da barra.

Procedimentos análogos podem ser deduzidos para deslocabilidades locais e forças generalizadas locais no sistema local de uma barra de treliça plana (veja Figura 2.10 para definição das coordenadas generalizadas locais no sistema local).

Para uma barra de grelha, a Figura 2.18 mostra a convenção adotada neste livro para as deslocabilidades locais e forças generalizadas locais no sistema local da barra (veja Figura 2.11). As deslocabilidades estão indicadas com seus sentidos positivos, e as setas duplas indicam rotações por torção. Observe que as deslocabilidades d'_2 e d'_5 aparecem com sentidos horários porque são rotações em torno do eixo local y , que entra no plano da figura. O mesmo ocorre para as forças generalizadas (momentos) f'_2 e f'_5 .

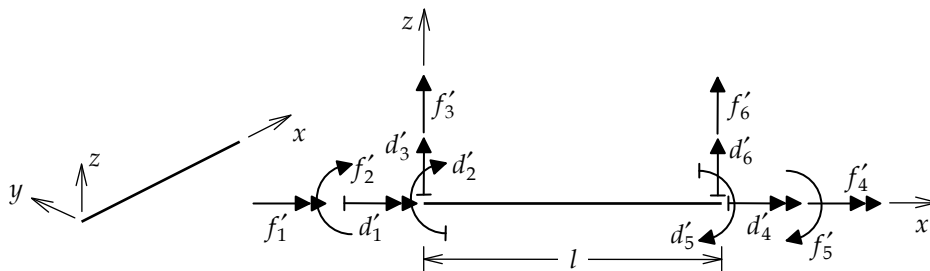


Figura 2.18 – Eixos locais, deslocabilidades locais e forças generalizadas locais no sistema local de uma barra de grelha isolada.

3. IDEALIZAÇÃO DO COMPORTAMENTO DE BARRAS

Como discutido no Capítulo 1, a análise de estruturas está fundamentada na concepção de um modelo matemático, aqui chamado de modelo estrutural, que adota hipóteses simplificadoras sobre o comportamento da estrutura real. Este capítulo resume os principais conceitos matemáticos envolvidos na idealização do comportamento de barras. Tal idealização baseia-se em hipóteses simplificadoras adotadas para o comportamento axial, para o comportamento à flexão e para o comportamento à torção de barras. Esses conceitos são básicos para a análise de estruturas reticuladas e podem ser encontrados em vários livros-texto de mecânica dos sólidos (resistência dos materiais) ou de análise estrutural. O resumo aqui apresentado baseia-se nos trabalhos dos seguintes autores: Féodosiev (1977), Beer e Johnston (2006), Timoshenko & Gere (1994), White *et al.* (1976) e West (1989).

O objetivo principal do capítulo é determinar as equações diferenciais que definem o comportamento analítico de um elemento infinitesimal de barra para efeitos axiais, de flexão e de torção. As equações diferenciais para cada um desses efeitos consideram, no nível de um elemento infinitesimal de barra, condições de compatibilidade entre deslocamentos e deformações, condições de equilíbrio e leis constitutivas dos materiais. A organização das seções do capítulo é consistente com essa abordagem. A próxima seção apresenta as hipóteses simplificadoras que são adotadas na idealização do comportamento de barras, que resultam no campo de deslocamentos usualmente considerado no modelo matemático de barras. A Seção 3.2 apresenta as expressões diferenciais das condições de compatibilidade entre deslocamentos, rotações e deformações. A Seção 3.3 mostra as condições de equilíbrio do elemento infinitesimal de barra. A Seção 3.4 indica as relações constitutivas para um material idealizado com comportamento linear-elástico, sem limite de resistência. A Seção 3.5 deduz as relações de equilíbrio entre tensões e esforços internos. A Seção 3.6 apresenta os deslocamentos relativos internos que caracterizam as relações diferenciais entre as deformações elementares (axial, transversal, de flexão e de torção) de um elemento infinitesimal de barra e os correspondentes esforços internos (esforço normal, esforço cortante, momento fletor e momentor torçor). Essas relações diferenciais entre os esforços internos e as deformações elementares são condensadas na Seção 3.7 em relações matriciais de rigidez do elemento infinitesimal de barra. Finalmente, a Seção 3.8 mostra as equações diferenciais que definem o comportamento de um elemento infinitesimal de barra para efeitos axiais, de flexão sem distorção de cisalhamento, de flexão com distorção de cisalhamento, e de torção.

Com base nessas equações diferenciais, são deduzidas expressões para as soluções homogêneas dos deslocamentos e rotações ao longo de uma barra. As soluções homogêneas correspondem a uma situação de barra descarregada e só dependem de condições de contorno nas suas extremidades. A solução completa para deslocamentos e rotações é obtida pela soma da solução homogênea com a solução particular, que depende do carregamento aplicado. A última seção do capítulo mostra que a solução particular é identificada com uma situação local de engastamento da barra. Essa identificação é muito importante, pois justifica o uso de soluções homogêneas como funções de interpolação de deslocamentos e rotações na solução global discreta do método da rigidez direta (estágio II definido na Seção 2.1).

O modelo estrutural adotado para barras submetidas à flexão baseia-se em duas teorias: a teoria de vigas de Navier (também conhecida como a teoria de Euler-Bernoulli), que despreza deformações por cisalhamento, e a teoria de vigas de Timoshenko, que considera deformações por cisalhamento de uma forma simplificada. A apresentação desse assunto neste capítulo segue os passos indicados por Reddy (1997) e Pereira (2002). Ao comportamento de barras à flexão é acrescido o comportamento axial provocado por efeitos normais à seção transversal da barra. O modelo também considera o efeito de torção para grelhas (estruturas planas com cargas fora do plano) e estruturas espaciais.

Na teoria de vigas de Euler-Bernoulli, as deformações provocadas pelos efeitos cortantes (cisalhamento) em barras não são consideradas na presença das outras deformações. Essa hipótese é comumente adotada para flexão de barras longas (cujo comprimento é muito maior do que a altura da seção transversal), que é o caso mais geral. Entretanto, como a análise estrutural atualmente é realizada quase sempre com auxílio de computador, os programas de computador mais modernos consideram deformações por cisalhamento (viga de Timoshenko), pois o esforço computacional adicional requerido é mínimo.

O modelo estrutural adotado para o comportamento de barras à flexão considera apenas efeitos de primeira ordem. Na análise de primeira ordem é considerado que os deslocamentos dos pontos de uma barra são

muito pequenos quando comparados às dimensões geométricas de suas seções transversais. Adotando essa hipótese, é possível estabelecer condições de equilíbrio na geometria original, indeformada, da barra. Isso facilita muito o problema, pois não é necessário determinar deslocamentos para escrever as equações de equilíbrio. Essa hipótese simplificadora acarreta no desacoplamento dos efeitos axial e transversal (flexão e cisalhamento). Isso significa que esses efeitos podem ser considerados em separado e superpostos, resultando nas mesmas respostas de quando os efeitos atuam em conjunto.

3.1. Campo de deslocamentos e tensões

Para definir os deslocamentos e deformações em uma barra de viga ou de pórtico plano, é adotado um sistema de coordenadas locais para a barra, indicado na Figura 3.1.

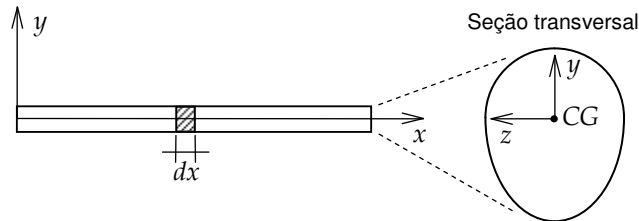


Figura 3.1 – Sistema de eixos locais de uma barra (modelo plano).

Na Figura 3.1, o eixo axial da barra, x , passa pelo centro de gravidade das seções transversais e os outros eixos são transversais à barra. Em modelos de vigas ou pórticos planos, o eixo y pertence ao plano da estrutura e o eixo z sai do plano (Figura 2.9). Os eixos y e z correspondem às direções principais de inércia da seção transversal da barra.

As duas teorias de vigas adotadas (Euler-Bernoulli e Timoshenko) para o comportamento à flexão estão fundamentadas em quatro hipóteses fundamentais, que podem ser identificadas na Figura 3.2:

- A primeira é a *hipótese de manutenção das seções transversais planas* quando a viga se deforma, proposta originalmente por Jacob Bernoulli (1654-1705). Essa hipótese acarreta na definição de um único parâmetro θ que representa a rotação por flexão de uma seção transversal.
- A segunda hipótese considera que o ângulo de rotação θ da seção transversal é muito pequeno e pode ser aproximado por sua tangente. Esta hipótese traz duas consequências: a rotação da seção transversal provoca um deslocamento na direção axial x igual ao produto da rotação pela distância do ponto ao centro de rotação (o centro de gravidade da seção transversal); e a rotação da seção não provoca deslocamento na direção transversal y .
- A terceira hipótese despreza deformações e tensões normais na direção transversal y da barra, pois essas tensões são da ordem das pressões de superfície provocadas por cargas externas, que são pequenas em relação às tensões normais longitudinais.
- Finalmente, considera-se um estado plano de tensões em cada lâmina vertical da barra, de maneira que não existem deslocamentos na direção transversal ao plano xy .

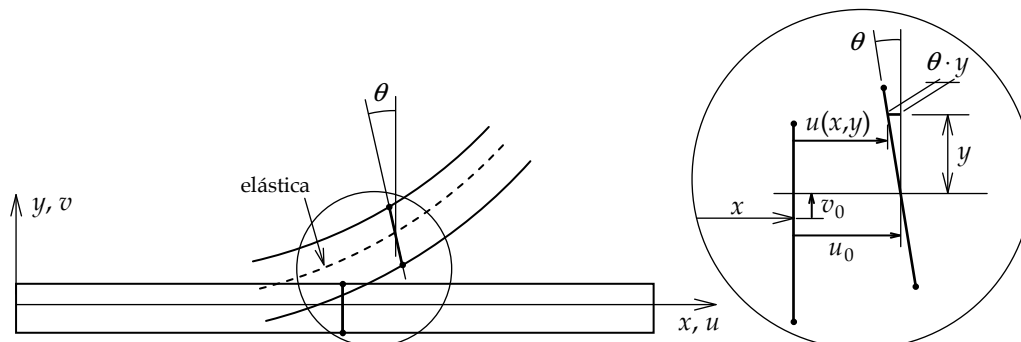


Figura 3.2 – Campo de deslocamentos no interior de uma barra para modelos planos.

Com base nessas hipóteses, o campo de deslocamentos no interior de uma barra de modelo plano fica definido da seguinte maneira (veja Figura 3.2):

$u_0(x) \rightarrow$ deslocamento longitudinal (na direção de x) do ponto do eixo da barra [L];

$v_0(x) \rightarrow$ deslocamento transversal (na direção de y) do ponto do eixo da barra [L];

$\theta(x) = \theta_z(x) \rightarrow$ rotação da seção transversal por flexão (em torno do eixo z) [R];

$u(x, y) \rightarrow$ deslocamento longitudinal de um ponto qualquer (na direção de x) [L];

$v(x, y) \rightarrow$ deslocamento transversal de um ponto qualquer (na direção de y) [L].

O campo de deslocamentos no interior da barra é dado por:

$$u(x, y) = u_0(x) - \theta(x) \cdot y ; \quad (3.1)$$

$$v(x, y) = v_0(x) . \quad (3.2)$$

Os deslocamentos axiais $u_0(x)$ e transversais $v_0(x)$ dos pontos do eixo de uma barra definem uma curva chamada *elástica*. Em pórticos planos e vigas, o sentido positivo do deslocamento longitudinal $u_0(x)$ é o do eixo local x , o sentido positivo do deslocamento transversal $v_0(x)$ é o do eixo local y e o sentido positivo da rotação por flexão $\theta(x)$ é o anti-horário.

Observa-se pelas Equações 3.1 e 3.2 que o campo de deslocamentos em uma barra, para o comportamento plano, é definido por três parâmetros, u_0 , v_0 e $\theta = \theta_z$, que são agrupados em um vetor:

$$\begin{Bmatrix} u_0(x) \\ v_0(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} \rightarrow \text{vetor do campo de deslocamentos para o comportamento plano de barras.}$$

O modelo matemático idealizado para o campo de deslocamentos do comportamento plano de uma barra resulta, como será mostrado na próxima seção, em um campo de deformações onde só existem deformações normais na direção axial e distorções de cisalhamento. Consistentemente, nesse modelo, as únicas componentes de tensão são a tensão normal à seção transversal da barra e a tensão de cisalhamento, como indica a Figura 3.3.

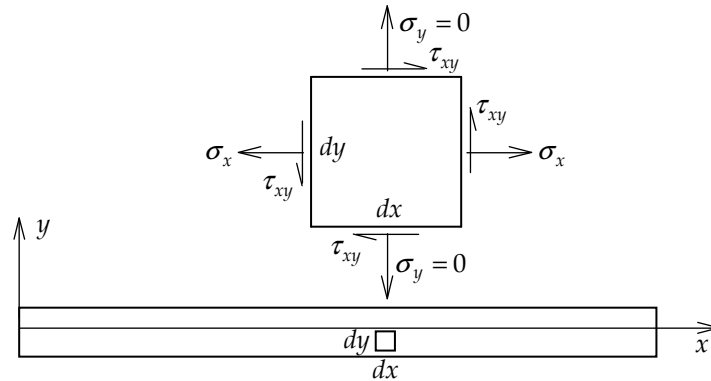


Figura 3.3 – Componentes de tensões em um elemento infinitesimal no interior de uma barra de modelo plano.

As componentes de tensões indicadas na Figura 3.3 são:

$\sigma_x \rightarrow$ tensão normal na direção longitudinal da barra provocada pelos efeitos axial e de flexão $[F/L^2]$;

$\tau_{xy} \rightarrow$ tensão de cisalhamento pontual provocada pelo efeito cortante (barra de modelo plano) $[F/L^2]$.

Observa-se que no modelo adotado as tensões normais σ_y na direção transversal da barra são consideradas nulas.

O comportamento à flexão de uma barra, como indicado na Figura 3.2 e expresso pelas Equações 3.1 e 3.2, se refere a um dos planos principais de flexão da barra, no caso o plano definido pelos eixos locais x e y . Os planos principais de uma barra são definidos em função das direções principais da seção transversal da barra. A Figura 3.4 ilustra as deformações por flexão de uma barra nos seus dois planos principais xy (Figura 3.4-a) e xz (Figura 3.4-b). As deformações estão indicadas de forma exagerada.

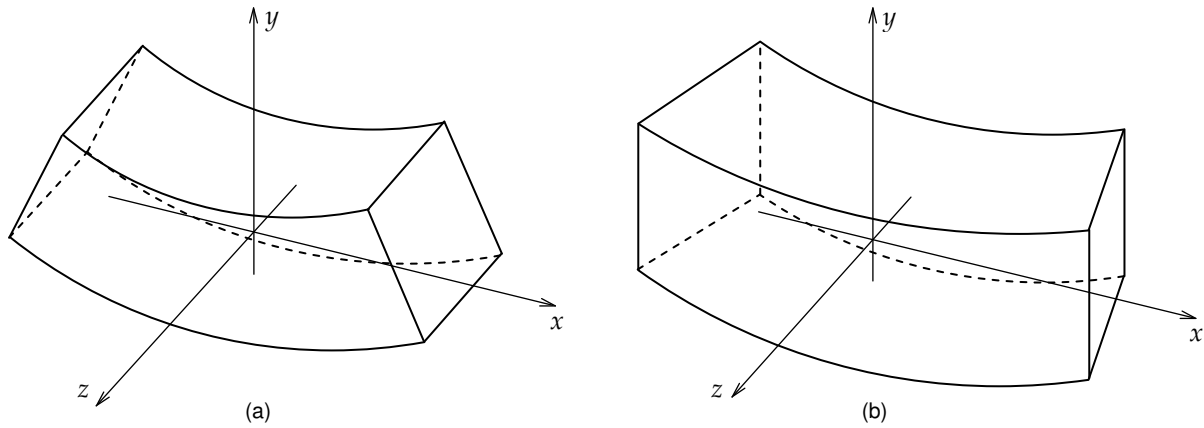


Figura 3.4 – Flexão de uma barra nos planos principais.

A formulação do comportamento à flexão de uma barra vai ser deduzida neste capítulo para a flexão no plano xy . Deduções análogas podem ser feitas para a flexão no plano xz . O comportamento tridimensional à flexão de uma barra em um pórtico espacial é obtido pela superposição da flexão em seus planos principais.

Um caso particular de um pórtico espacial é o de um modelo de grelha. Uma grelha é um modelo plano cuja solicitação se dá transversalmente ao plano. Neste livro, o plano adotado para uma grelha é o plano formado pelos eixos globais X e Y , e o eixo local z de qualquer barra coincide com o eixo global Z que sai do plano da grelha (Figura 2.11). Portanto, a flexão de uma barra de grelha se dá no plano local xz , como indica a Figura 3.5-a. Dessa forma, o deslocamento transversal de uma barra de grelha tem a direção do eixo z e a rotação θ se dá em torno do eixo local y :

$w_0(x) \rightarrow$ deslocamento transversal (na direção de z) do ponto do eixo da barra de grelha [L];

$\theta(x) = \theta_y(x) \rightarrow$ rotação da seção transversal por flexão (em torno do eixo y) da barra de grelha [R].

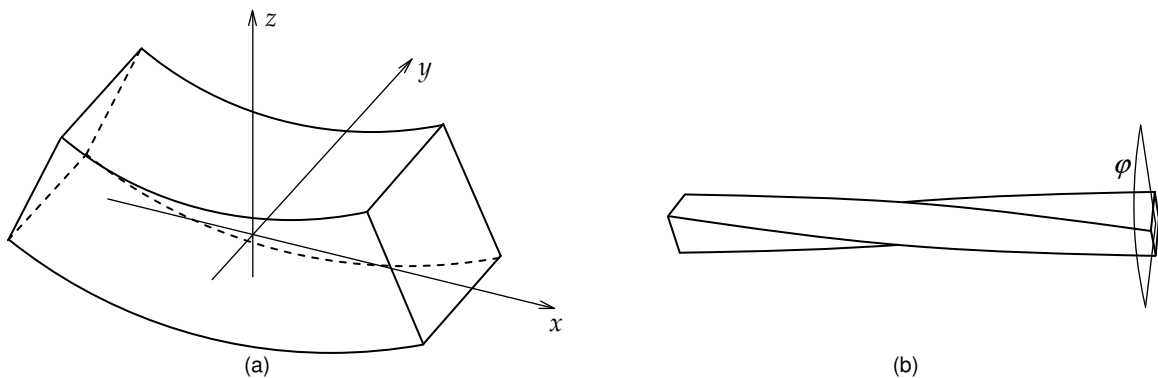


Figura 3.5 – Flexão e torção de uma barra de grelha.

Para grelhas (e para pórticos espaciais), também aparece uma rotação por torção (Figura 3.5-b):

$\phi(x) \rightarrow$ rotação por torção (em torno do eixo x) [R].

Considera-se, por hipótese, que a seção transversal de uma barra também permanece plana na torção, isto é, não se considera o empenamento da seção. Essa hipótese só é verdadeira para seções transversais que apresentam simetria radial e para rotações pequenas. Para outros tipos de seção transversal, a simplificação de manutenção de seções planas na torção é comumente adotada (Féodosiev 1977).

Como no caso de grelhas, por hipótese, não existem efeitos axiais e a flexão se dá no plano xz , o campo de deslocamentos em uma barra de grelha é definido por três parâmetros, ϕ , $\theta = \theta_y$ e w_0 , que são agrupados em um vetor:

$$\begin{Bmatrix} \phi(x) \\ \theta(x) \\ w_0(x) \end{Bmatrix} \rightarrow \text{vetor do campo de deslocamentos para o comportamento de barras de grelha.}$$

A ordem dos parâmetros do vetor do campo de deslocamentos da barra de grelha (rotação por torção, rotação por flexão e deslocamento transversal) é consistente com a ordem da numeração das coordenadas generalizadas locais na direção dos eixos locais de uma barra, como indica a Figura 2.11.

As componentes de tensões para uma barra de grelha são:

$\sigma_x \rightarrow$ tensão normal na direção longitudinal da barra provocada pelo efeito de flexão $[F/L^2]$;

$\tau_{xz} \rightarrow$ tensão de cisalhamento pontual provocada pelo efeito cortante (barra de grelha) $[F/L^2]$;

$\tau^t \rightarrow$ tensão de cisalhamento pontual por efeito de torção (veja Seção 3.5.3) $[F/L^2]$.

Observa-se que em uma barra de grelha a tensão normal longitudinal é provocada apenas pelo efeito de flexão, pois não existe efeito axial em uma barra de grelha. Nesse caso a tensão de cisalhamento por efeito cortante está no plano formado pelos eixos locais x e z .

3.2. Relações entre deslocamentos e deformações em barras

O modelo estrutural tem como premissa uma condição de continuidade dos campos de deslocamentos e deformações no interior das barras. Além disso, esses dois campos têm que ser compatíveis entre si, isto é, os deslocamentos e deformações de uma barra devem estar associados. Nos métodos de análise, a condição de continuidade no interior de uma barra é forçada automaticamente quando só se admitem deformações contínuas para a barra. Observe também que a hipótese de manutenção das seções transversais planas garante uma continuidade de deslocamentos em todos os pontos interiores de uma barra que sofre flexão, pois cada seção transversal permanece encaixada com suas adjacentes. Esta seção resume as hipóteses básicas do modelo estrutural que garantem continuidade e compatibilidade entre deformações e deslocamentos no interior de uma barra.

Considerando que as deformações são pequenas, as relações diferenciais entre deslocamentos e deformações para o estado plano são definidas conforme indicado na Figura 3.6:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad (3.3)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad (3.4)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (3.5)$$

Sendo:

$\varepsilon_x \rightarrow$ deformação normal na direção longitudinal da barra $[]$;

$\varepsilon_y \rightarrow$ deformação normal na direção transversal da barra $[]$;

$\gamma_{xy} \rightarrow$ distorção de cisalhamento (pontual) $[]$.

Considerando o modelo de campos de deslocamentos adotado para o comportamento de barras dado pelas Equações 3.1 e 3.2, tem-se que:

$$\varepsilon_x = \frac{du_0}{dx} - \frac{d\theta}{dx} \cdot y; \quad (3.6)$$

$$\varepsilon_y = 0; \quad (3.7)$$

$$\gamma^c = \gamma_{xy} = \frac{dv_0}{dx} - \theta. \quad (3.8)$$

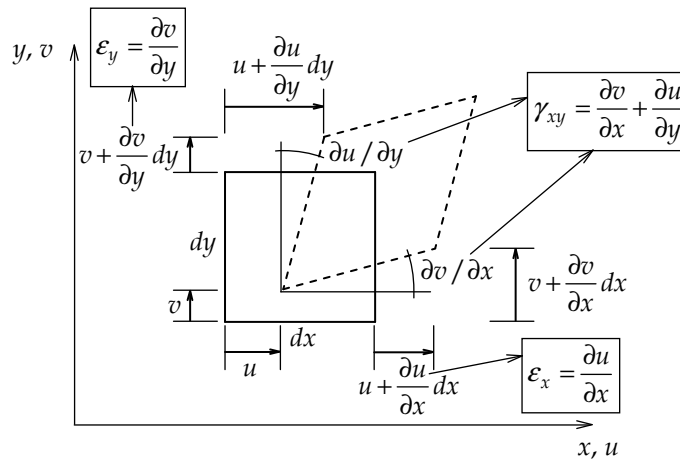


Figura 3.6 – Componentes lineares de deformação de um elemento infinitesimal no caso plano.

A deformação normal na direção longitudinal da Equação 3.6 tem duas parcelas, uma axial e outra de flexão. Essas parcelas são descritas nas Seções 3.2.1 e 3.2.2. Observa-se que o campo de deslocamentos adotado para o comportamento de barras resulta em uma deformação normal nula na direção transversal.

A Equação 3.8 indica que o modelo adotado para o campo de deslocamentos resulta em uma distorção de cisalhamento constante em cada seção transversal:

$\gamma^c \rightarrow$ distorção de cisalhamento (integral) por efeito cortante [].

Essa equação define uma relação de compatibilidade entre a distorção de cisalhamento por efeito cortante, a rotação da seção e o deslocamento transversal.

3.2.1. Deformações axiais

Uma barra submetida a solicitações axiais centradas (cuja resultante passa pelo centro de gravidade da seção transversal) apresenta uma deformação axial tal que todos os pontos de uma seção transversal têm os mesmos deslocamentos na direção axial. Uma consequência disso é que as seções transversais de uma barra submetida a uma deformação axial permanecem planas, como indica a Figura 3.7. Tal condição garante a continuidade de deslocamentos no interior da barra.

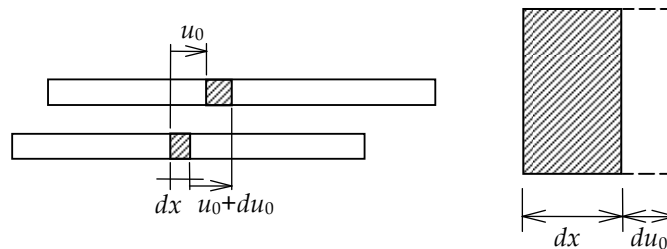


Figura 3.7 – Deslocamento axial relativo de um elemento infinitesimal de barra.

A deformação axial é obtida com base no deslocamento axial relativo, du_0 , entre duas seções transversais que distam dx entre si (Figura 3.7). A deformação é igual à razão entre a variação de comprimento do elemento infinitesimal e seu comprimento inicial:

$$\epsilon_x^a = \frac{du_0}{dx}. \quad (3.9)$$

Nessa equação:

$dx \rightarrow$ comprimento original de um elemento infinitesimal de barra [L];

$du_0 \rightarrow$ deslocamento axial (longitudinal) relativo interno de um elemento infinitesimal de barra [L];

$\epsilon_x^a \rightarrow$ deformação normal na direção axial ou longitudinal devida ao efeito axial [].

Observa-se que a deformação normal devida ao efeito axial dada pela Equação 3.9 é a primeira parcela da Equação 3.6.

3.2.2. Deformações normais por flexão

As deformações associadas à flexão em uma barra são consequência direta das quatro hipóteses básicas do modelo de barras mencionadas na Seção 3.1. A manutenção das seções transversais planas introduz uma condição de compatibilidade que relaciona deformações normais por flexão com a rotação da seção transversal. Considere a rotação relativa por flexão, $d\theta$, de um elemento infinitesimal de barra indicada na Figura 3.8.

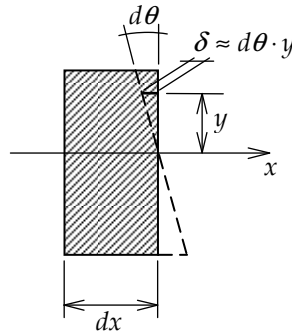


Figura 3.8 – Rotação relativa por flexão de um elemento infinitesimal de barra.

Observa-se na Figura 3.8 que cada fibra do elemento infinitesimal é definida por uma coordenada y . Quando se consideram pequenos deslocamentos, a variação de comprimento de uma fibra genérica é $\delta = d\theta \cdot y$. A deformação normal por flexão é dada pela razão entre δ e o comprimento inicial da fibra, dx :

$$\varepsilon_x^f = -\frac{d\theta}{dx} \cdot y. \quad (3.10)$$

Nessa equação:

$d\theta \rightarrow$ rotação relativa interna por flexão de um elemento infinitesimal de barra [R];

$\varepsilon_x^f \rightarrow$ deformação normal na direção longitudinal devida ao efeito de flexão [].

A deformação normal por efeito de flexão dada pela Equação 3.10 é a segunda parcela da Equação 3.6. O sinal negativo aparece porque uma fibra superior (y positivo) sofre deformação por encurtamento (negativa) quando $d\theta$ é positiva (anti-horária). O sinal negativo da equação considera uma deformação positiva (alongamento) para uma fibra inferior (y negativo), com $d\theta$ positiva.

Define-se a derivada $d\theta/dx$ como:

$$\kappa^f = \frac{d\theta}{dx}, \quad (3.11)$$

sendo

$\kappa^f \rightarrow$ gradiente da rotação por flexão [R/L].

3.2.2.1. Teoria de vigas de Navier

A teoria de vigas de Navier (1785-1836) está fundamentada nas quatro hipóteses básicas do modelo de barras e em mais uma hipótese, que considera que a seção transversal da barra, ao girar por flexão, permanece perpendicular ao eixo deformado da barra, como indica a Figura 3.9. Essa última hipótese é conhecida como *hipótese de Euler-Bernoulli*. Essa hipótese é análoga a desprezar a deformação provocada por efeito de cisalhamento.

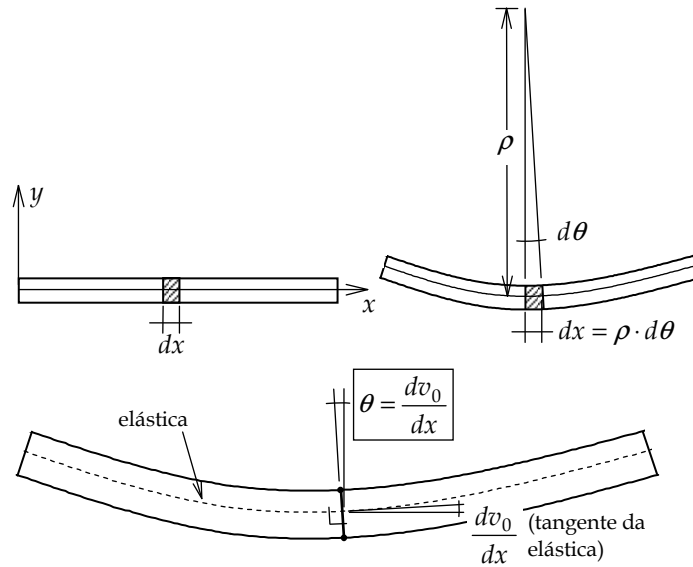


Figura 3.9 – Hipótese de manutenção de seções transversais planas e normais ao eixo deformado da barra.

Observa-se na Figura 3.9 que, considerando que os deslocamentos são pequenos, pode-se aproximar a rotação da seção transversal pela tangente da elástica. Dessa forma, com a hipótese de Euler-Bernoulli o deslocamento transversal fica associado à rotação da seção transversal em uma equação que também é considerada uma relação de compatibilidade:

$$\theta = \frac{dv_0}{dx}. \quad (3.12)$$

Caso seja considerada uma distorção de cisalhamento nula, a Equação 3.8 resulta na Equação 3.12 da hipótese de Euler-Bernoulli. Isso enfatiza que a consideração de que o giro de seções transversais mantendo-se normais ao eixo deformado da barra está associada a desprezar deformações por cisalhamento.

Observe na Figura 3.9 a relação $dx = \rho \cdot d\theta$ entre o raio de curvatura ρ do eixo da barra e o comprimento do elemento infinitesimal de barra. Disso resulta:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\rho}, \quad (3.13)$$

sendo:

$1/\rho \rightarrow$ curvatura da elástica transversal $v(x)$ da barra [L^{-1}];

$\rho \rightarrow$ raio de curvatura da elástica transversal $v(x)$ da barra [L].

A deformação normal por flexão de uma fibra, dada pela Equação 3.10, também pode ser escrita em função curvatura da barra:

$$\epsilon_x^f = -\frac{y}{\rho}. \quad (3.14)$$

Em outras palavras, a deformação normal por flexão em uma fibra genérica é proporcional à distância da fibra ao eixo x e à curvatura $1/\rho$ da barra.

A partir da Equação 3.10, considerando a relação entre o deslocamento transversal $v_0(x)$ e a rotação da seção transversal $\theta(x)$ dada pela Equação 3.12, pode-se escrever:

$$\epsilon_x^f = -\frac{d^2v_0}{dx^2} \cdot y. \quad (3.15)$$

A Equação 3.15 é uma relação de compatibilidade entre o deslocamento transversal de uma barra e suas deformações normais por flexão.

Combinando a Equação 3.12 com a Equação 3.13, observa-se que existe uma relação entre a curvatura e a derivada à segunda da elástica transversal $v_0(x)$ em relação a x :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 v_0}{dx^2}. \quad (3.16)$$

Essa equação é aproximada e é válida somente na condição de pequenos deslocamentos. A expressão completa da curvatura de uma curva para grandes flechas $v_0(x)$ é (Féodosiev 1977):

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 v_0 / dx^2}{\left[1 + \left(\frac{dv_0}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}. \quad (3.17)$$

Observa-se que, para pequenas inclinações dv_0/dx da curva elástica, a curvatura da Equação 3.17 se aproxima à fornecida pela Equação 3.16 para pequenos deslocamentos.

Observa-se que, para o caso da teoria de vigas de Navier, o gradiente de rotação por flexão fica associado à curvatura e à derivada à segunda da elástica transversal da barra:

$$\kappa^f = \frac{d^2 v_0}{dx^2}. \quad (3.18)$$

3.2.2.2. Teoria de vigas de Timoshenko

A diferença entre as teorias de vigas de Navier e de Timoshenko é que na segunda não se considera que a seção transversal permanece normal ao eixo da barra que sofre flexão. A teoria de vigas de Timoshenko também adota a hipótese de manutenção das seções planas (não existe empenamento da seção), mas considera que existe uma distorção de cisalhamento que faz com que a seção transversal não permaneça perpendicular ao eixo na flexão, como indica a Figura 3.10.

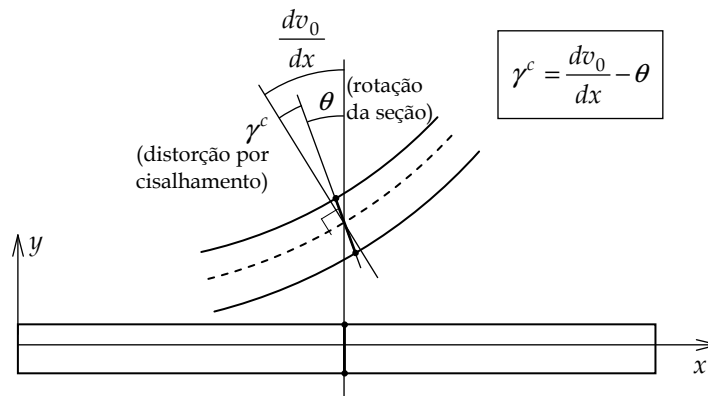


Figura 3.10 – Viga de Timoshenko: consideração de distorção de cisalhamento no comportamento à flexão.

Considerando-se a distorção de cisalhamento, a rotação da seção transversal fica desassociada da tangente da elástica. A Figura 3.10 mostra a interpretação física para a distorção de cisalhamento γ^c , dada pela Equação 3.8: a diferença entre a tangente da elástica dv_0/dx e a rotação da seção é justamente γ^c .

A deformação normal provocada por flexão na teoria de vigas de Timoshenko fica relacionada com a rotação da seção transversal de acordo com a Equação 3.10: $\epsilon_x^f = -(d\theta/dx) \cdot y$. Entretanto, a deformação normal não pode ser associada diretamente à curvatura ou à derivada à segunda da elástica da viga, pois a Equação 3.12 não é válida na teoria de vigas de Timoshenko.

3.2.3. Distorções por efeito cortante

O efeito cortante em uma barra provoca o empenamento da seção transversal, como indicado na Figura 3.11, e a distribuição de distorções de cisalhamento não é uniforme ao longo da seção.

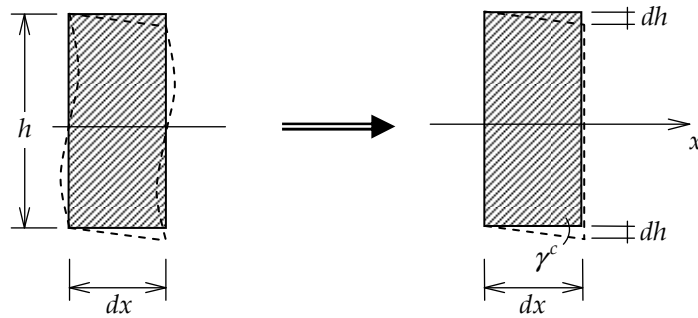


Figura 3.11 – Deslocamento transversal relativo por efeito cortante em um elemento infinitesimal de barra.

Esse efeito é considerado aproximadamente ao se adotar uma distorção de cisalhamento média na seção transversal (Timoshenko & Gere 1994, Féodosiev 1977). Essa consideração é análoga à hipótese de manutenção de seção transversal plana adotada no modelo de deslocamentos de barras descrito na Seção 3.1, o que resulta na Equação 3.8 para a distorção de cisalhamento por efeito cortante. Uma maneira alternativa de interpretar essa distorção é mostrada na Figura 3.11. Observe nessa figura que a distorção de cisalhamento por efeito cortante é representada de forma integral através do deslocamento transversal relativo:

$$\gamma^c = -\frac{dh}{dx}, \quad (3.19)$$

sendo que:

$\gamma^c \rightarrow$ distorção de cisalhamento por efeito cortante (efeito integral na seção transversal) [];

$dh \rightarrow$ deslocamento transversal relativo interno de um elemento infinitesimal [L].

O sentido do deslocamento transversal relativo interno indicado na Figura 3.11 é consistente com o sentido positivo do esforço cortante na seção transversal (veja Figura 3.13). O sinal que aparece na Equação 3.19 é negativo porque o sentido da distorção de cisalhamento γ^c indicada na Figura 3.11 é contrário ao sentido positivo da convenção adotada para uma distorção genérica γ_{xy} , como indicado na Figura 3.6.

3.2.4. Vetor de deformações pontuais para o comportamento plano

De acordo com as seções anteriores, o modelo matemático do comportamento plano de barra, baseado nas quatro hipóteses básicas mencionadas na Seção 3.1, resulta em duas componentes de deformação indicadas na Seção 3.2: a deformação normal na direção longitudinal ε_x e a distorção de cisalhamento γ^c . Essas duas componentes podem ser grupadas em uma única entidade, que é o vetor de deformações para o comportamento plano de uma barra:

$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma^c \end{Bmatrix} \rightarrow$ vetor de deformações pontuais para o comportamento plano de barras.

A componente de deformação normal longitudinal é provocada pela superposição dos efeitos axial e de flexão:

$\varepsilon_x = \varepsilon_x^a + \varepsilon_x^f \rightarrow$ deformação normal na direção longitudinal devida aos efeitos axial e de flexão [].

As relações completas de compatibilidade entre deformações e deslocamentos dependem da teoria de vigas adotada para o comportamento à flexão. Quando se adota a teoria de vigas de Navier, a distorção de cisalhamento é nula. Com base nas Equações 3.9 e 3.15, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma^c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d/dx & -(d^2/dx^2) \cdot y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \theta \end{Bmatrix}. \quad (3.20)$$

Nesse caso, existe uma dependencia entre a rotação da seção transversal e o deslocamento transversal: $\theta = dv_0/dx$ (Equação 3.12).

Para o caso do comportamento à flexão da teoria de vigas de Timoshenko, que considera distorção de cisalhamento, as relações completas de compatibilidade são obtidas utilizando as Equações 3.9, 3.10 e 3.8:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma^c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d/dx & 0 & -(d/dx) \cdot y \\ 0 & d/dx & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \theta \end{Bmatrix}. \quad (3.21)$$

3.2.5. Distorções por torção

Uma barra submetida a uma solicitação de torção apresenta distorções de cisalhamento (Féodosiev 1977). No caso de seções transversais com simetria radial (círculos ou anéis circulares), como indicado na Figura 3.12, as distorções são proporcionais ao raio r do ponto na seção, não ocorrendo o empenamento da seção (Timoshenko & Gere 1994), isto é, nesses casos, é válida a hipótese de manutenção das seções transversais planas.

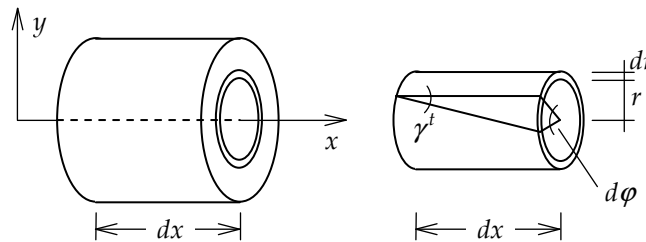


Figura 3.12 – Distorção por torção em um elemento infinitesimal de barra com seção circular.

A relação entre a rotação relativa por torção $d\varphi$ em um elemento infinitesimal de barra e a correspondente distorção de cisalhamento pode ser obtida ao se observar, na Figura 3.12, que $\gamma^t \cdot dx = r \cdot d\varphi$. Dessa forma, tem-se:

$$\gamma^t = \frac{d\varphi}{dx} \cdot r. \quad (3.22)$$

Nessa equação:

$\gamma^t \rightarrow$ distorção de cisalhamento por efeito de torção (seção com simetria radial) [];

$d\varphi \rightarrow$ rotação relativa interna por torção de um elemento infinitesimal de barra [R];

$r \rightarrow$ raio que define a posição de um ponto no interior da seção circular [L].

No caso de uma seção transversal que não apresenta simetria radial, ocorre um empenamento quando a barra é solicitada à torção. Nesse caso, a distorção não depende somente do giro relativo entre seções, mas também de efeitos locais. Para considerar a distorção por torção de forma integral no nível da seção transversal, é feita uma aproximação, considerando-se ainda a manutenção das seções transversais planas (Féodosiev 1977). Isso será abordado na Seção 3.6.4.

Define-se a derivada $d\varphi/dx$ como:

$$\kappa^t = \frac{d\varphi}{dx}, \quad (3.23)$$

sendo

$\kappa^t \rightarrow$ gradiente da rotação por torção [R/L].

3.2.6. Vetor de deformações integrais do elemento infinitesimal

Uma consequência direta das quatro hipóteses básicas sobre o campo de deslocamentos adotado no modelo de barras descrito na Seção 3.1 é que as deformações pontuais podem ter representações integrais no nível de um elemento infinitesimal de barra. Esta seção resume as deformações do elemento infinitesimal de barra de pórtico plano e de barra de grelha que foram definidas nas seções anteriores. Essas deformações são agrupadas em vetores em que cada componente representa uma das deformações elementares do elemento infinitesimal.

Para o elemento infinitesimal de barra de pórtico plano é feita a seguinte definição:

$\{\kappa\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^a \\ \gamma^c \\ \kappa^f \end{Bmatrix} \rightarrow$ vetor de deformações integrais para o elemento infinitesimal de barra de pórtico plano.

As componentes de deformação desse vetor estão definidas nas Equações 3.9, 3.18, e 3.11. Para o comportamento à flexão da teoria de vigas de Navier, a distorção de cisalhamento é nula e o gradiente de rotação à flexão é dado pela Equação 3.18, resultando em:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^a \\ \gamma^c \\ \kappa^f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d/dx & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & d^2/dx^2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \theta \end{Bmatrix}. \quad (3.24)$$

Para o caso do comportamento à flexão da teoria de vigas de Timoshenko, a distorção de cisalhamento é dada pela Equação 3.8 e o gradiente de rotação por flexão não está associado à curvatura da elástica transversal, resultando em:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^a \\ \gamma^c \\ \kappa^f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d/dx & 0 & 0 \\ 0 & d/dx & -1 \\ 0 & 0 & d/dx \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \theta \end{Bmatrix}. \quad (3.25)$$

De maneira análoga, define-se para o elemento infinitesimal de barra de grelha:

$\{\kappa\} = \begin{Bmatrix} \kappa^t \\ \kappa^f \\ \gamma^c \end{Bmatrix} \rightarrow$ vetor de deformações integrais para o elemento infinitesimal de barra de grelha.

Quando se adota o comportamento à flexão da teoria de vigas de Navier, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \kappa^t \\ \kappa^f \\ \gamma^c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d/dx & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d^2/dx^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varphi \\ \theta \\ w_0 \end{Bmatrix}. \quad (3.26)$$

E para o comportamento à flexão da teoria de vigas de Timoshenko:

$$\begin{Bmatrix} \kappa^t \\ \kappa^f \\ \gamma^c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d/dx & 0 & 0 \\ 0 & d/dx & 0 \\ 0 & -1 & d/dx \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varphi \\ \theta \\ w_0 \end{Bmatrix}. \quad (3.27)$$

As matrizes nas Equações 3.24, 3.25, 3.26 e 3.27 são formadas por operadores diferenciais. Genericamente, essas duas equações podem ser representadas por:

$$\{\kappa\} = [\nabla] \cdot \{u\}, \quad (3.28)$$

sendo

$\{\kappa\} \rightarrow$ vetor de deformações integrais do elemento infinitesimal;

$\{u\} \rightarrow$ vetor de deslocamentos generalizados integrais do elemento infinitesimal;

$[\nabla] \rightarrow$ matriz de operadores diferenciais.

3.3. Relações diferenciais de equilíbrio em barras

O modelo matemático adotado para a representação do comportamento de estruturas reticuladas considera que as condições de equilíbrio devem ser satisfeitas para a estrutura como um todo, para cada barra ou nó isolado, ou para qualquer porção isolada da estrutura. Isso inclui o equilíbrio de um elemento infinitesimal de barra.

3.3.1. Condições de equilíbrio do caso plano para efeitos de primeira ordem

Nesta seção, serão indicadas relações diferenciais que resultam do equilíbrio considerado em nível infinitesimal para uma barra de pórtico plano considerando apenas efeitos de primeira ordem, isto é, as relações de equilíbrio são escritas na geometria original (indeformada) do modelo. Conforme mencionado anteriormente, esse modelo matemático baseia-se nas teorias de vigas de Navier e de Timoshenko para barras submetidas à flexão, acrescidas da consideração de efeitos axiais.

Para deduzir as relações de equilíbrio para um elemento infinitesimal de barra, adota-se direções positivas de cargas distribuídas e esforços internos. A Figura 3.13 isola um elemento infinitesimal de barra e indica os sentidos positivos para forças distribuídas e esforços internos.

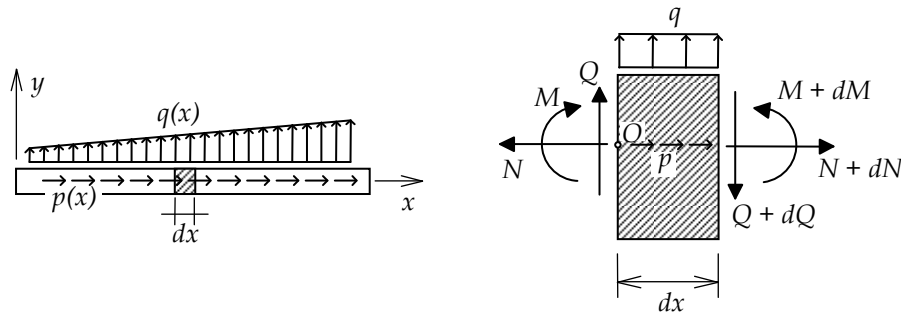


Figura 3.13 – Equilíbrio de um elemento infinitesimal de barra e direções positivas adotadas para cargas distribuídas e esforços internos.

Na Figura 3.13, as seguintes entidades são apresentadas:

$p(x) \rightarrow$ taxa de carregamento (força) longitudinal distribuído na barra [F/L];

$q(x) \rightarrow$ taxa de carregamento (força) transversal distribuído na barra [F/L];

$N(x) \rightarrow$ esforço normal (esforço interno axial ou longitudinal) na direção do eixo local x [F];

$Q(x) = Q_y(x) \rightarrow$ esforço cortante (esforço interno transversal de cisalhamento) na direção do eixo y [F];

$M(x) = M_z(x) \rightarrow$ momento fletor (esforço interno de flexão) na direção de giro em torno do eixo z [F·L].

A convenção de sinais para as taxas de carregamento aplicado é tal que as forças distribuídas são positivas quando têm, respectivamente, as direções dos eixos locais da barra. Para os esforços internos para uma barra no comportamento plano, as seguintes convenções de sinais são adotadas:

- O esforço normal é positivo quando provoca um efeito de tração no elemento infinitesimal de barra. O sinal é negativo quando o esforço normal provoca um efeito de compressão.
- A convenção de sinais adotada para o esforço cortante é tal que o esforço é positivo quando a resultante das forças transversais que atua na face esquerda do elemento infinitesimal tem o sentido do eixo local y e a resultante das forças transversais na face direita tem o sentido contrário ao do eixo y . Essa é uma convenção usualmente adotada para barras em um modelo plano. Entretanto, o sentido positivo do esforço cortante é contrário ao sentido positivo da convenção adotada para a tensão de cisalhamento pontual τ_{xz} , indicada na Figura 3.3, nas faces laterais de um elemento infinitesimal. Essa divergência entre convenção de sinais será considerada na Seção 3.5.2, onde é estabelecida uma relação de equilíbrio entre esforço cortante e tensões de cisalhamento.
- O momento fletor é positivo quando as tensões normais de flexão nas faces laterais do elemento infinitesimal (veja Figura 3.15) provocam tração na fibra inferior do elemento e compressão na fibra superior. Caso as tensões normais associadas à flexão sejam de compressão na fibra inferior e de tração na fibra superior, o momento fletor é negativo.

O equilíbrio de forças no elemento infinitesimal nas direções horizontal e vertical, considerando as direções positivas indicadas na Figura 3.13, resulta em:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow dN + p(x) \cdot dx = 0 \rightarrow \frac{dN}{dx} = -p(x); \quad (3.29)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow -dQ + q(x) \cdot dx = 0 \rightarrow \frac{dQ}{dx} = q(x). \quad (3.30)$$

O equilíbrio de momentos em relação ao ponto O do elemento infinitesimal (Figura 3.13), desprezando os termos de mais alta ordem, proporciona a seguinte relação:

$$\sum M_O = 0 \rightarrow dM - (Q + dQ) \cdot dx + q(x) \cdot \frac{dx^2}{2} = 0 \rightarrow \frac{dM}{dx} = Q(x). \quad (3.31)$$

As Equações 3.30 e 3.31 podem ser combinadas, resultando em uma relação de equilíbrio entre o momento fletor em uma seção transversal e a taxa de carregamento transversal distribuído:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = q(x). \quad (3.32)$$

Deve-se observar que as Equações 3.30 e 3.31 se referem ao equilíbrio no comportamento à flexão no plano xy , para barras de modelos de viga e pórtico plano. Para barras de grelha, equações semelhantes podem ser escritas para o equilíbrio infinitesimal de forças na direção transversal z e de momentos em torno no eixo local y . Nesse caso:

$Q(x) = Q_z(x) \rightarrow$ esforço cortante na direção do eixo z [F];

$M(x) = M_y(x) \rightarrow$ momento fletor na direção de giro em torno do eixo y [F·L].

3.3.2. Condição de equilíbrio na torção

O efeito de torção, como visto na Seção 3.2.3, provoca distorções de cisalhamento, com correspondentes tensões cisalhantes na seção transversal de uma barra. O esforço interno de torção é o *momento torçor* T , que representa o efeito integral das tensões de cisalhamento na seção. A condição de equilíbrio à torção de um elemento infinitesimal de barra é obtida isolando o elemento infinitesimal e considerando todos os momentos atuantes em torno do eixo x , como indica a Figura 3.14.

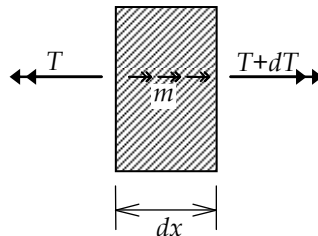


Figura 3.14 – Equilíbrio à torção de um elemento infinitesimal de barra.

Na Figura 3.14:

$m(x) \rightarrow$ taxa de momento longitudinal (em torno do eixo local x) distribuído na barra [F·L/L];

$T \rightarrow$ momento torçor (esforço interno de torção) na direção de giro em torno do eixo x [F·L].

Impondo-se o equilíbrio de momentos em torno do eixo x resulta em:

$$\sum M_x = 0 \rightarrow dT + m(x) \cdot dx = 0 \rightarrow \frac{dT}{dx} = -m(x); \quad (3.33)$$

3.4. Lei constitutiva linear para o material

O modelo matemático do comportamento dos materiais, em nível macroscópico, é expresso por um conjunto de relações matemáticas entre tensões e deformações, chamadas de *leis constitutivas*. Tais relações contêm parâmetros que definem o comportamento dos materiais. A Teoria da Elasticidade (Timoshenko & Goodier 1980) estabelece que as relações da lei constitutiva sejam expressas através de equações lineares com parâmetros constantes. Nesse caso, diz-se que o material trabalha em *regime elástico-linear*. O comportamento é considerado *elástico* quando, ao se descarregar a estrutura, o material não apresenta deformação residual algu-

ma, isto é, ele retorna ao estado natural sem deformação. O comportamento é considerado *linear* quando existe proporcionalidade entre tensões e deformações. Entretanto, nem sempre é possível adotar um comportamento tão simplificado para os materiais. Por exemplo, procedimentos modernos de projeto de estruturas metálicas ou de concreto armado baseiam-se no estado de limite último, quando o material não apresenta mais comportamento elástico-linear.

Apesar disso, no contexto deste livro, só são considerados materiais idealizados com comportamento elástico-linear e sem limite de resistência. Isso é justificado porque o foco principal deste livro é a análise estrutural para estruturas reticuladas considerando apenas efeitos de não linearidade geométrica (efeitos de segunda ordem). A consideração em si de leis constitutivas não lineares é um tema bastante amplo que foge ao escopo deste livro.

A lei constitutiva que relaciona tensões normais e deformações normais é a conhecida lei de Hooke (Beer & Johnston 2006, Féodosiev 1977) e é dada por:

$$\sigma_x = E \varepsilon_x, \quad (3.34)$$

sendo:

$E \rightarrow$ módulo de elasticidade (propriedade do material) $[F/L^2]$;

$\sigma_x \rightarrow$ tensão normal genérica na seção transversal da barra (direção longitudinal) $[F/L^2]$;

$\varepsilon_x \rightarrow$ deformação normal genérica na direção longitudinal da barra $[]$.

Nos casos em que o material é solicitado ao efeito de cisalhamento, para materiais trabalhando em regime elástico-linear, a lei constitutiva que relaciona tensões cisalhantes com distorções de cisalhamento é dada por:

$$\tau = G \gamma, \quad (3.35)$$

sendo:

$G \rightarrow$ módulo de cisalhamento (propriedade do material) $[F/L^2]$;

$\tau \rightarrow$ tensão de cisalhamento genérica $[F/L^2]$;

$\gamma \rightarrow$ distorção de cisalhamento genérica $[]$.

No regime elástico-linear, o módulo de elasticidade E e o módulo de cisalhamento G se relacionam da seguinte maneira:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}, \quad (3.36)$$

em que ν é um coeficiente adimensional:

$\nu \rightarrow$ coeficiente de Poisson $[]$.

Para o comportamento plano (barras de vigas e pórticos planos), pode-se definir uma relação matricial entre as componentes de tensões e deformações, considerando uma distorção de cisalhamento integral em uma seção transversal:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma^c \end{Bmatrix}. \quad (3.37)$$

Para uma barra de grelha, a relação matricial análoga entre as componentes de tensões e deformações é:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xz} \\ \tau^t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma^c \\ \gamma^t \end{Bmatrix}. \quad (3.38)$$

De forma condensada, as Equações 3.37 e 3.38 são expressas da seguinte maneira:

$$\{\sigma\} = [E] \cdot \{\varepsilon\}. \quad (3.39)$$

sendo:

$[E] \rightarrow$ matriz da lei constitutiva do material em regime elástico-linear no caso plano.

3.5. Equilíbrio entre tensões e esforços internos

A formulação geral do modelo matemático para o comportamento de barras também considera relações de equilíbrio, no nível da seção transversal da barra, que associam tensões com esforços internos. Nesta seção são deduzidas as relações de equilíbrio entre tensões normais à seção transversal de uma barra e o esforço normal e o momento fletor, entre tensões de cisalhamento e o esforço cortante e entre tensões de cisalhamento e o momento fletor.

3.5.1. Equilíbrio entre tensões normais e esforço normal e momento fletor

As Seções 3.2.1 e 3.2.2 mostram que os efeitos axiais e de flexão provocam deformações normais na direção longitudinal da barra de viga ou de pórtico plano. Como consequência, aparecem tensões normais longitudinais σ_x devidas a esses dois efeitos, como indica a Figura 3.15.

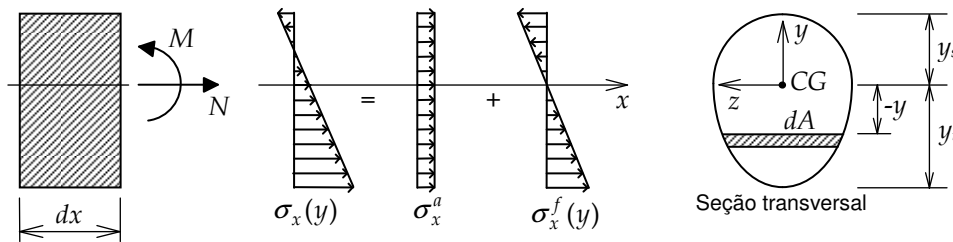


Figura 3.15 – Decomposição das tensões normais longitudinais em parcelas devidas aos efeitos axial e de flexão.

As tensões indicadas na Figura 3.15 são:

$\sigma_x^a \rightarrow$ tensão normal na seção transversal da barra devida ao efeito axial $[F/L^2]$;

$\sigma_x^f \rightarrow$ tensão normal na seção transversal da barra devida à flexão $[F/L^2]$.

Tais tensões devem estar em equilíbrio com o esforço normal e o momento fletor na seção transversal, isto é, as resultantes das tensões normais longitudinais, integradas ao longo da seção transversal, devem ser iguais ao esforço normal e ao momento fletor na seção transversal.

Na Figura 3.15 é considerado um caso de flexão composta reta. A flexão é composta quando é combinada com o efeito axial. A flexão é reta quando ocorre em torno de um dos eixos principais da seção transversal (no caso, o eixo z), tendo como consequência que cada fibra identificada por uma ordenada y apresenta um valor constante de tensão normal. Também é indicado na Figura 3.15 que as tensões normais longitudinais variam linearmente ao longo da altura da seção transversal. Essa distribuição linear se deve a dois fatores. Primeiro, conforme apresentado nas Seções 3.2.1 e 3.2.2, pela hipótese da manutenção das seções transversais planas, as deformações normais longitudinais variam linearmente ao longo da altura da seção. O segundo fator é a consideração de um comportamento linear para o material.

Pela Figura 3.15, vê-se que, para o efeito axial, as tensões são constantes ao longo da seção transversal e, para o efeito de flexão pura, as tensões normais são nulas na fibra do centro de gravidade (CG) da seção. Dessa forma, as relações de equilíbrio entre as tensões normais longitudinais e o esforço normal e o momento fletor são:

$$\int_A \sigma_x^f dA = 0 \Rightarrow N = \int_A \sigma_x^a dA \rightarrow N = \sigma_x^a \cdot A; \quad (3.40)$$

$$\int_A y \cdot \sigma_x^a dA = 0 \Rightarrow M = \int_A (-y) \cdot \sigma_x^f dA. \quad (3.41)$$

Na Equação 3.40 tem-se:

$A \rightarrow$ área da seção transversal $[L^2]$.

O sinal negativo que aparece na Equação 3.41 deve-se à convenção de sinais adotada: uma tensão normal positiva (tração) em uma fibra inferior (y negativo) provoca um momento fletor positivo (como indicado na Figura 3.15).

A partir Equação 3.40, tem-se a expressão da tensão normal do efeito axial e o esforço normal:

$$\sigma_x^a = \frac{N}{A}. \quad (3.42)$$

Para obter a expressão entre tensão normal do efeito de flexão e o momento fletor, obtem-se inicialmente uma relação entre o momento fletor e a rotação da seção transversal. Isso é feito com base nas Equações 3.41, 3.34 e 3.10:

$$M = \int_A (-y) \cdot \sigma_x^f dA = \int_A (-y) \cdot E \cdot \varepsilon_x^f dA = \int_A (-y) \cdot E \cdot \left(-\frac{d\theta}{dx} y \right) dA \rightarrow \frac{M}{EI} = \frac{d\theta}{dx}. \quad (3.43)$$

Na Equação 3.43, aparece um parâmetro geométrico de seção transversal para o comportamento à flexão de barras:

$$I = I_z = \int_A y^2 dA \rightarrow \text{momento de inércia à flexão da seção transversal em relação ao eixo } z \text{ [L}^4\text{]}.$$

O momento de inércia à flexão da seção transversal é uma propriedade geométrica que depende de sua orientação com respeito ao plano onde ocorre a flexão da barra. A Equação 3.43 se refere a uma barra do caso plano, em que a flexão se dá no plano xy . Para uma barra de grelha, a flexão se dá no plano xz , e o momento fletor e o momento de inércia da seção transversal têm a direção de giro em torno no eixo y :

$$I = I_y = \int_A z^2 dA \rightarrow \text{momento de inércia à flexão da seção transversal em relação ao eixo } y \text{ [L}^4\text{]}.$$

Existem inúmeros manuais e livros que apresentam fórmulas e tabelas de valores de momentos de inércia (e de outras propriedades geométricas) para diversos tipos de seções transversais.

A distribuição de tensões normais provocada por flexão é linear e é obtida utilizando a relação entre tensões normais e deformações normais, dada pela Equação 3.34, e a relação entre a deformação normal por flexão e a rotação, dada pela Equação 3.10:

$$\sigma_x^f(y) = -E \cdot \frac{d\theta}{dx} \cdot y. \quad (3.44)$$

Substituindo $d\theta/dx$ da Equação 3.43 na Equação 3.44, chega-se à expressão para a distribuição de tensões normais provocada por um momento fletor M em uma seção transversal:

$$\sigma_x^f(y) = -\frac{M \cdot y}{I}. \quad (3.45)$$

Os valores máximos da tensão normal provocada por flexão ocorrem nos bordos superior e inferior da seção transversal da barra, como indica a Figura 3.15:

$$\sigma_s^f = -\frac{M \cdot y_s}{I}; \quad (3.46)$$

$$\sigma_i^f = +\frac{M \cdot y_i}{I}. \quad (3.47)$$

Sendo que:

$\sigma_s^f \rightarrow$ tensão normal por flexão no bordo superior da seção transversal $[F/L^2]$;

$\sigma_i^f \rightarrow$ tensão normal por flexão no bordo inferior da seção transversal $[F/L^2]$;

$y_s \rightarrow$ distância do bordo superior à linha neutra que passa pelo centro de gravidade da seção transversal $[L]$;

$y_i \rightarrow$ distância do bordo inferior à linha neutra que passa pelo centro de gravidade da seção transversal $[L]$.

Os parâmetros y_s e y_i estão indicados na Figura 3.15.

3.5.2. Equilíbrio entre tensões de cisalhamento e esforço cortante

Analogamente ao equilíbrio entre tensões normais e o esforço normal e o momento fletor, as tensões de cisalhamento devidas ao efeito cortante devem estar em equilíbrio com o esforço cortante. As tensões de cisalhamento nesse caso estão, por hipótese, na direção do eixo transversal y . Entretanto, a determinação das

tensões de cisalhamento transversais pode ser feita com mais facilidade por meio das tensões de cisalhamento recíprocas que surgem em planos longitudinais da barra. Isso é mostrado na Figura 3.16.

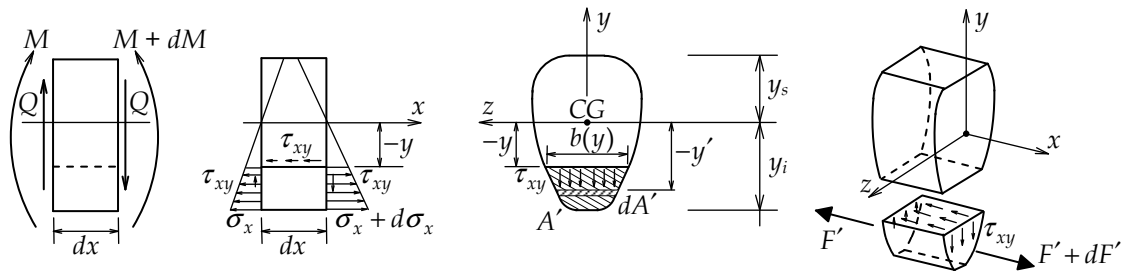


Figura 3.16 – Tensões de cisalhamento provocadas por esforço cortante em uma barra (adaptado do livro de Féodosiev, 1977).

A Figura 3.16 destaca um elemento infinitesimal de barra submetido à flexão e ao efeito cortante. O momento fletor tem uma variação igual a dM da seção transversal na esquerda do elemento para a seção transversal na direita. Uma porção inferior do elemento infinitesimal é isolada por meio de uma seção horizontal longitudinal, localizada a uma distância $-y$ do eixo x da barra. Analisando o equilíbrio da porção isolada, a força normal F' resultante das tensões normais σ_x dentro dos limites da área hachurada A' na seção esquerda é igual a:

$$F' = \int_{A'} \sigma_x dA',$$

ou, em conformidade com a Equação 3.45,

$$F' = -\frac{M}{I} \int_{A'} y' dA,$$

sendo y' a ordenada variável dentro da área hachurada A' . A integral obtida representa o momento estático da área A' relativo ao eixo z da seção transversal (Figura 3.16):

$$S(y) = \int_{A'} y' dA \rightarrow S(y) = \int_{-y_i}^y y' \cdot b(y') \cdot dy', \quad (3.48)$$

em que:

$S(y) \rightarrow$ momento estático, em relação ao eixo z , da área da seção transversal abaixo da ordenada y [L^3];

$b(y) \rightarrow$ largura da seção transversal, na direção do eixo z , na ordenada y [L].

Obtem-se então:

$$F' = -\frac{M}{I} \cdot S(y).$$

Na seção transversal direita, a força normal resultante na área isolada é:

$$F' + dF' = -\frac{M + dM}{I} \cdot S(y).$$

A diferença dessas forças

$$dF' = -\frac{dM}{I} \cdot S(y)$$

deve ser equilibrada pela força longitudinal resultante das tensões de cisalhamento τ_{xy} que surgem na seção horizontal longitudinal do elemento infinitesimal (Figura 3.16). Admitindo como hipótese aproximadora que as tensões tangenciais estão uniformemente distribuídas na largura $b(y)$ da seção longitudinal, o equilíbrio da porção isolada do elemento na direção longitudinal resulta em:

$$-\frac{dM}{I} \cdot S(y) = \tau_{xy} \cdot b(y) \cdot dx.$$

Dessa relação, considerando a expressão diferencial entre o momento fletor e o esforço cortante dada pela Equação 3.31, obtém-se uma relação entre a tensão cisalhante e o esforço cortante na seção transversal:

$$\tau_{xy} = -\frac{dM}{dx} \cdot \frac{S(y)}{I \cdot b(y)} \rightarrow \tau_{xy}(y) = -Q \cdot \frac{S(y)}{I \cdot b(y)}. \quad (3.49)$$

A Equação 3.49 é conhecida como *fórmula de Juravski* em homenagem ao cientista russo do século XIX que foi o primeiro a realizar uma pesquisa geral das tensões cisalhantes no caso da flexão de barras (Féodosiev 1977). O sinal negativo dessa equação está associado à divergência entre as convenções de sinais adotadas para esforço cortante e para tensão de cisalhante pontual, conforme observado na Seção 3.3.1.

Com base na Equação 3.49, a Figura 3.17 mostra a distribuição de tensões cisalhantes ao longo do eixo y para três tipos de seção transversal: retangular, triangular e circular.

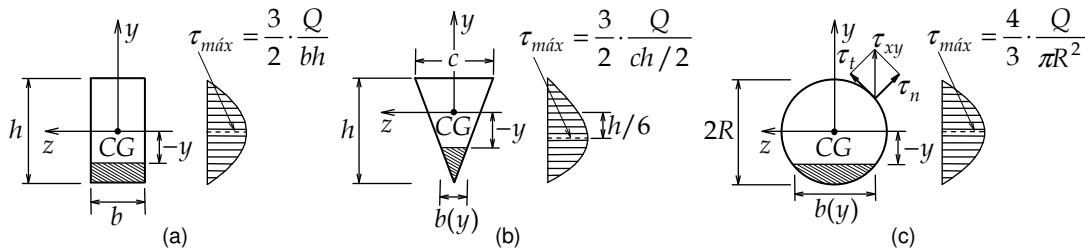


Figura 3.17 – Tensões de cisalhamento provocadas por esforço cortante para três tipos de seção transversal (adaptado do livro de Féodosiev, 1977).

No caso de uma barra com seção transversal retangular com base b e altura h (Figura 3.17-a), obtém-se para o momento estático, em relação ao eixo z , da área da seção transversal abaixo da ordenada y :

$$S(y) = \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right). \quad (3.50)$$

Considerando que o momento de inércia da seção transversal é $bh^3/12$, utilizando a Equação 3.49, chega-se à seguinte expressão para a distribuição de tensões de cisalhamento na seção transversal retangular:

$$\tau_{xy}(y) = -Q \cdot \frac{6}{bh^3} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right). \quad (3.51)$$

A distribuição parabólica da tensão de cisalhamento (em módulo) ao longo da altura da seção transversal retangular (Equação 3.51) é mostrada na Figura 3.17-a. O valor máximo do módulo da tensão de cisalhamento, que ocorre no meio da altura, também está indicado na figura. As Figuras 3.17-b e 3.17-c indicam a distribuição de tensões cisalhantes e os valores máximos para uma seção transversal triangular e uma circular. Para uma seção transversal de um perfil metálico com forma “I”, a distribuição de tensões de cisalhamento é praticamente constante na alma do perfil e desprezível na mesa do perfil (Timoshenko & Gere 1994). Nesse caso, o valor da tensão de cisalhamento é aproximado pela divisão do esforço cortante Q pela área da alma do perfil.

Deve-se observar o caráter aproximativo da Equação 3.49 para a distribuição das tensões de cisalhamento. Foi assumido que a distribuição é uniforme ao longo de cada ordenada y e que as tensões de cisalhamento têm sempre a direção transversal do eixo y . Com efeito, no caso da seção circular da Figura 3.17-c, por exemplo, a tensão de cisalhamento τ_{xy} em um ponto na borda da seção transversal não pode ter uma componente τ_n na direção normal à borda, pois isso não satisfaz a condição de contorno $\tau_n = 0$ no bordo livre de cargas. No bordo livre, a única componente possível para a tensão de cisalhamento é a componente τ_t tangencial ao bordo. A adoção dessas aproximações para a distribuição de tensões de cisalhamento em uma seção transversal se justifica porque as tensões cisalhantes são, em geral, muito menores do que as tensões normais provocadas por flexão (Féodosiev 1977).

Entretanto, a variação da tensão de cisalhamento ao longo da altura da seção transversal está associada a uma variação da distorção de cisalhamento, o que é inconsistente com a hipótese de manutenção das seções transversais planas. Conforme mencionado na Seção 3.2.3, essa hipótese considera uma distorção de cisalhamento uniforme na seção transversal. Por esse motivo, no modelo matemático do comportamento à flexão de barras, a distorção de cisalhamento por efeito cortante é representada de forma integral e uniforme na

seção transversal, embora ainda se considere a variação das tensões de cisalhamento na seção transversal. Esse efeito integral da distorção de cisalhamento será mostrado na Seção 3.6.2.

3.5.3. Equilíbrio entre tensões cisalhantes e momento torçor

Finalmente, deve ser considerado o equilíbrio entre o momento torçor na seção transversal da barra e as correspondentes tensões de cisalhamento. A Figura 3.18 apresenta a convenção de sinais para o momento torçor: a seta dupla indica um momento em torno do eixo x , que é positivo quando “saí” da seção transversal.

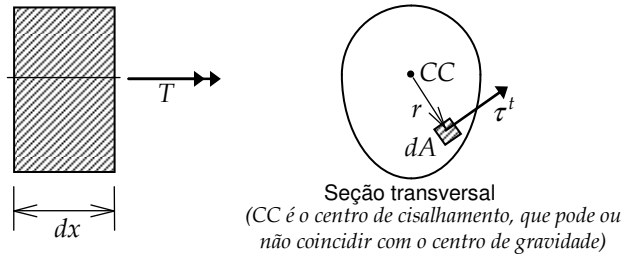


Figura 3.18 – Momento torçor em um elemento infinitesimal de barra e correspondente tensão de cisalhamento.

No caso de seções transversais com simetria radial (círculos e anéis), as tensões cisalhantes por efeito de torção são tangenciais (perpendiculares ao raio). No caso geral, entretanto, a distribuição de tensões cisalhantes por torção depende da forma da seção transversal. O equilíbrio entre essas tensões e o momento torçor na seção transversal estabelece que o produto vetorial do vetor raio r pelo vetor tensão cisalhante τ^t em um ponto da seção (Figura 3.18), integrado ao longo da seção, deve ser igual ao momento torçor:

$$T = \int_A \left| \vec{r} \times \vec{\tau}^t \right| dA, \quad (3.52)$$

sendo:

$T \rightarrow$ momento torçor (esforço interno de torção) [F·L];

$r \rightarrow$ raio de um ponto (distância ao centro de cisalhamento da seção transversal) [L];

$\tau^t \rightarrow$ tensão de cisalhamento pontual por efeito de torção [F/L²].

Entretanto, conforme foi mencionado na Seção 3.2.5, o efeito de torção em uma barra é tratado de forma integral no nível da seção transversal, considerando-se ainda, como aproximação, a manutenção das seções transversais planas (Féodosiev 1977). Isso será abordado na Seção 3.6.4.

3.6. Deslocamentos relativos internos

A Seção 3.5 mostrou que os esforços internos (esforço normal, esforço cortante, momento fletor e momento torçor) em uma seção transversal representam resultantes de tensões internas integradas ao longo da seção. O modelo matemático adotado para o comportamento de barras permite que as deformações tenham representações integrais no nível de seção transversal. Essas representações têm significado físico e são chamadas de *deslocamentos relativos internos*.

Na verdade, os deslocamentos relativos internos já foram introduzidos na Seção 3.2 e são resumidos abaixo:

$du_0 \rightarrow$ deslocamento axial relativo interno de um elemento infinitesimal de barra (Figura 3.7) [L];

$dh \rightarrow$ deslocamento transversal relativo interno de um elemento infinitesimal de barra (Figura 3.11) [L];

$d\theta \rightarrow$ rotação relativa interna por flexão de um elemento infinitesimal de barra (Figura 3.8) [R];

$d\varphi \rightarrow$ rotação relativa interna por torção de um elemento infinitesimal de barra (Figura 3.12) [R].

Os deslocamentos relativos internos representam deformações elementares do elemento infinitesimal de barra. Eles podem ser interpretados com deformações representadas no nível integral de uma seção transversal, considerando a hipótese de manutenção de seções transversais planas adotada para o comportamento de barra.

Deve-se salientar que o deslocamento transversal relativo interno e a rotação relativa interna por flexão têm duas componentes cada, que são associadas à flexão nos dois planos principais xy e xz (Figura 3.4). Dessa forma, no caso da barra de viga ou pórtico plano, o deslocamento transversal se dá na direção y e a rotação relativa por flexão se dá em torno do eixo local z . Para a barra de grelha, o deslocamento relativo tem a direção z e a rotação relativa por flexão é em torno do eixo local y . Uma barra de um pórtico espacial tem todas as componentes de deslocamentos relativos internos.

Com base nas relações entre deformações e deslocamentos em barras (Seção 3.2), nas relações das leis constitutivas do material (Seção 3.4) e nas relações de equilíbrio em tensões na seção transversal e esforços internos (Seção 3.5), é possível estabelecer relações entre os deslocamentos relativos internos e os esforços internos. Isso é mostrado em seguida.

3.6.1. Deslocamento axial relativo interno provocado por esforço normal

Para o efeito axial, usando as Equações 3.40, 3.34 e 3.9, tem-se que o deslocamento relativo interno provocado por um esforço normal atuando em um elemento infinitesimal de barra (Figura 3.19) é igual a:

$$N = \sigma_x^a \cdot A = E \cdot \varepsilon_x^a \cdot A \rightarrow N = EA \frac{du_0}{dx} \rightarrow du_0 = \frac{N}{EA} dx. \quad (3.53)$$

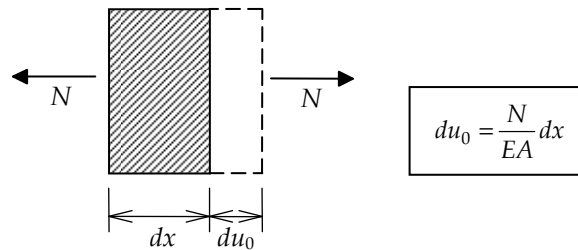


Figura 3.19 – Deslocamento axial relativo de um elemento infinitesimal de barra provocado por esforço normal.

3.6.2. Deslocamento transversal relativo interno provocado por esforço cortante

Conforme mencionado nas Seções 3.2.3 e 3.5.2, a distorção de cisalhamento por efeito cortante, quando considerada, é tratada de forma aproximada e integral na seção transversal. Com essa aproximação, o transversal relativo interno provocado por um esforço cortante (Figura 3.20) é considerado sem empenamento da seção transversal. Para tanto, adota-se uma *área efetiva para cisalhamento* para a seção transversal (Timoshenko & Gere 1994), tal que o esforço cortante Q na seção se relacione com a distorção de cisalhamento γ^c uniforme da seguinte maneira:

$$Q = -GA_c \cdot \gamma^c, \quad (3.54)$$

sendo:

$A_c = A / \chi \rightarrow$ área da seção transversal efetiva para cisalhamento [F^2];

$\chi \rightarrow$ fator de forma que define a área efetiva para cisalhamento [].

O sinal negativo da Equação 3.54 considera a discrepância de convenções de sinais para esforço cortante e tensão de cisalhamento. Essa equação também considera a relação entre tensão e distorção de cisalhamento da Equação 3.35.

O fator de forma χ considera o efeito integral da distorção de cisalhamento na seção transversal associada ao esforço cortante. Esse fator tem valor $6/5$ para seções retangulares, $10/9$ para uma seção circular e aproximadamente 1 para uma grande variedade de perfis com forma “I” (White *et al.* 1976).

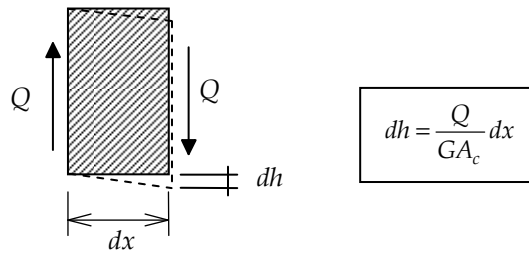


Figura 3.20 – Deslocamento transversal relativo de um elemento infinitesimal de barra provocado por esforço cortante.

A expressão do deslocamento transversal relativo interno provocado por um esforço cortante indicada na Figura 3.20 é obtida de acordo com as Equações 3.54 e 3.19:

$$Q = GA_c \cdot \frac{dh}{dx} \rightarrow dh = \frac{Q}{GA_c} dx. \quad (3.55)$$

A Equação 3.55 se refere ao elemento infinitesimal de barra do caso plano, isto é, o deslocamento relativo interno e esforço cortante têm a direção do eixo local y da barra. Para uma barra de grelha, o deslocamento relativo interno e o esforço cortante têm a direção do eixo z e a área efetiva para cisalhamento A_c se refere a essa mesma direção.

A questão que surge é como definir de maneira adequada a área efetiva para cisalhamento para uma seção transversal. O procedimento indicado a seguir segue os passos sugeridos por Bathe (1982). A área efetiva para cisalhamento é definida tal que a energia de deformação de cisalhamento por unidade de comprimento de barra seja preservada da visão pontual (tensão cisalhante e distorção de cisalhamento pontuais) para a visão integral (esforço cortante e distorção de cisalhamento uniforme da seção transversal).

Considerando um comportamento elástico-linear, a energia de deformação por cisalhamento de um elemento infinitesimal de barra é definida como a área abaixo da curva linear que relaciona o esforço cortante Q com o deslocamento transversal relativo interno dh :

$$dU^c = \frac{1}{2} Q dh.$$

Dessa relação, chega-se à energia de deformação de cisalhamento por unidade de comprimento (versão integral):

$$\frac{dU^c}{dx} = \frac{1}{2} Q \cdot \frac{dh}{dx} \rightarrow U_0^c = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{GA_c}. \quad (3.56)$$

Sendo que:

$U^c \rightarrow$ energia de deformação de cisalhamento (efeito cortante);

$U_0^c \rightarrow$ energia de deformação de cisalhamento (efeito cortante) por unidade de comprimento de barra.

Considerando o efeito pontual da tensão cisalhante e da distorção de cisalhamento, a energia de deformação de cisalhamento por unidade de comprimento de barra (versão pontual) é dada por:

$$U_0^c = \int_A \frac{1}{2} \cdot \tau_{xy} \cdot \gamma_{xy} \cdot dA \rightarrow U_0^c = \int_A \frac{1}{2} \cdot \frac{\tau_{xy}^2}{G} \cdot dA \rightarrow U_0^c = \int_{-y_i}^{y_s} \frac{1}{2} \cdot \frac{\tau_{xy}^2}{G} \cdot b(y) \cdot dy. \quad (3.57)$$

Considerando a distribuição de tensões cisalhantes ao longo da altura da seção transversal definida através da Equação 3.49, chega-se a:

$$U_0^c = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{GI^2} \int_{-y_i}^{y_s} \left[\frac{S(y)}{b(y)} \right]^2 \cdot b(y) \cdot dy \rightarrow U_0^c = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{GI^2} \int_{-y_i}^{y_s} \frac{S(y)^2}{b(y)} \cdot dy. \quad (3.58)$$

A expressão para a área efetiva para cisalhamento é obtida igualando-se a versão integral (Equação 3.56) com a versão pontual (Equação 3.58) da energia de deformação de cisalhamento por unidade de comprimento de barra:

$$A_c = I^2 \cdot \left[\int_{-y_i}^{y_s} \frac{S(y)^2}{b(y)} \cdot dy \right]^{-1}. \quad (3.59)$$

Assim, o fator de forma que define a área efetiva para cisalhamento em função da área da seção transversal é dado por:

$$\chi = \frac{A}{A_c} \rightarrow \chi = \frac{A}{I^2} \cdot \int_{-y_i}^{y_s} \frac{S(y)^2}{b(y)} \cdot dy. \quad (3.60)$$

Pode-se verificar que, substituindo $S(y)$ da Equação 3.50 na Equação 3.60 e considerando b constante, $A = bh$ e $I = bh^3/12$, o fator de forma que define a área efetiva para cisalhamento da seção transversal retangular é $\chi = 6/5$, conforme mencionado anteriormente.

3.6.3. Rotação relativa interna provocada por momento fletor

Para o efeito de flexão, usando a Equação 3.44, tem-se a relação entre a rotação relativa de um elemento infinitesimal de barra e o momento fletor (Figura 3.21):

$$d\theta = \frac{M}{EI} dx. \quad (3.61)$$

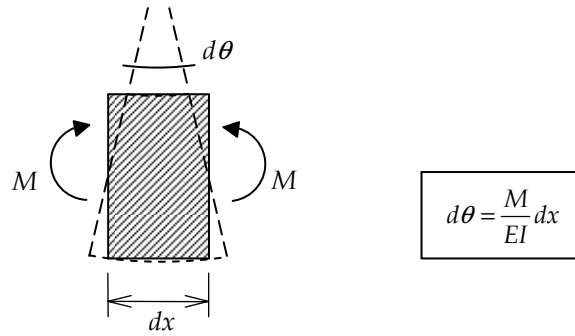


Figura 3.21 – Rotação relativa interna por flexão de um elemento infinitesimal de barra provocada por momento fletor.

Na teoria de vigas de Navier, uma importante relação entre a curvatura da barra e o momento fletor é obtida a partir das Equações 3.13 e 3.61:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}. \quad (3.62)$$

3.6.4. Rotação relativa interna provocada por momento torçor

Para o efeito de torção, no caso de seções transversais circulares ou anelares, a rotação relativa interna provocada por um momento torçor pode ser obtida com base nas Equações 3.52, 3.35 e 3.22:

$$T = \int_A \tau^t \cdot r dA = \int_A G \gamma^t \cdot r dA = \int_A G \frac{d\varphi}{dx} r \cdot r dA \rightarrow T = G J_p \frac{d\varphi}{dx} \rightarrow d\varphi = \frac{T}{G J_p} dx, \quad (3.63)$$

sendo:

$$J_p = \int_A r^2 dA \rightarrow \text{momento polar de inércia da seção transversal circular ou anelar [L}^4\text{]}.$$

Para seções transversais sem simetria radial (caso geral), ocorre um empenamento da seção quando solicitada à torção. Como dito nas Seções 3.2.5 e 3.5.3, é feita uma aproximação de forma a considerar o efeito de torção de forma integral para a seção transversal. Isso resulta em uma propriedade da seção transversal equivalente ao momento polar de inércia, chamada de *momento de inércia à torção*, que depende da forma da seção (Féodosiev 1977). A rotação relativa interna provocada por um momento torçor em um elemento infinitesimal de barra (Figura 3.22), considerando essa propriedade da seção transversal, é:

$$d\varphi = \frac{T}{GJ_t} dx, \quad (3.64)$$

sendo:

$J_t \rightarrow$ momento de inércia à torção da seção transversal $[L^4]$.

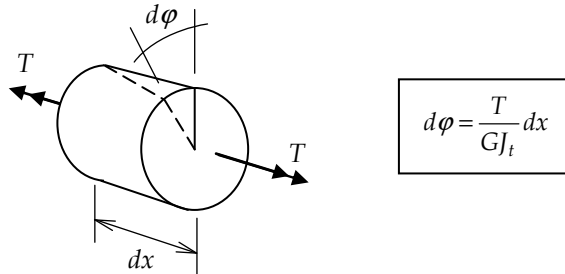


Figura 3.22 – Rotação relativa interna por torção de um elemento infinitesimal de barra provocada por momento torçor.

Livros-texto da área definem expressões ou tabelas para o momento de inércia à torção em função do tipo de seção transversal. Pode-se citar, por exemplo, o livro de Süsskind (1977-2) e o de Féodosiev (1977). Esse último autor faz uma interessante abordagem sobre o momento de inércia à torção baseada na chamada analogia da membrana atribuída a Prandtl.

3.6.5. Deslocamentos relativos internos provocados por variação de temperatura

Variações de temperatura provocam deformações em estruturas que estão associadas à dilatação ou ao encolhimento de seu material. A variação de temperatura pode ser uniforme ou apresentar gradientes térmicos. No caso de estruturas reticuladas, as diversas barras podem ter variações distintas de temperatura. É possível, também, que uma barra tenha variação de temperatura entre a face inferior e a superior. Esta seção define o modelo idealizado usualmente para representar as deformações provocadas por variações de temperatura em barras.

Tal modelo considera o efeito isolado de variações de temperatura em barras, sem considerar deformações provocadas pelos esforços internos causados pelos efeitos térmicos. Portanto, pode-se dizer que o modelo descrito corresponde às deformações livres que uma estrutura isostática sofre pelo efeito térmico, uma vez que variações de temperatura não provocam esforços internos em uma estrutura isostática. Por ter o número exato de vínculos para ser estável, uma estrutura isostática não oferece resistência para acomodar um alongamento ou encurtamento associado a uma variação de temperatura. Isso significa que a variação de temperatura provoca deformações sem que apareçam esforços em uma estrutura isostática. Por outro lado, variações de temperatura em estruturas hiperestáticas provocam deformações e esforços internos.

No caso de barras, as deformações provocadas pelo efeito térmico são caracterizadas pelos deslocamentos relativos internos devidos à variação de temperatura:

$du_0^T \rightarrow$ deslocamento axial relativo interno devido à variação de temperatura $[L]$;

$d\theta^T \rightarrow$ rotação relativa interna por flexão devida à variação de temperatura $[R]$.

Por hipótese, considera-se que o deslocamento transversal relativo interno devido à variação de temperatura é nulo ($dh^T = 0$).

O caso mais geral considerado para variação de temperatura em uma barra é indicado na Figura 3.23. As faces superiores e inferiores da barra sofrem variações diferentes de temperatura e o centro de gravidade se situa em uma posição qualquer ao longo da altura da seção transversal, definida por sua distância \bar{y} em relação à base da seção. Para a definição dos deslocamentos relativos internos devidos a uma variação genérica de temperatura, são adotadas as seguintes hipóteses, além de $dh^T = 0$:

- A temperatura varia linearmente ao longo da altura da seção transversal (da fibra inferior para a superior). A variação de temperatura da fibra inferior é ΔT_i e a da fibra superior é ΔT_s . A consequência desta hipótese é que a seção transversal da barra permanece plana com a deformação provocada pela variação de temperatura (considerando um material homogêneo).

- O deslocamento axial relativo interno devido à variação de temperatura (du_0^T) corresponde ao alongamento ou encurtamento da fibra que passa pelo centro de gravidade da seção transversal. A variação de temperatura nessa fibra (ΔT_{CG}) é obtida por interpolação linear de ΔT_i e ΔT_s .

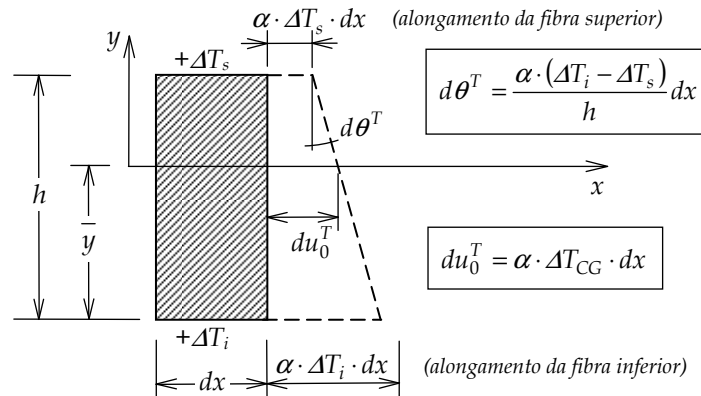


Figura 3.23 – Deformação de um elemento infinitesimal de barra por variação de temperatura.

Com base na Figura 3.23, os deslocamentos relativos internos para uma variação genérica de temperatura são:

$$du_0^T = \alpha \cdot \Delta T_{CG} \cdot dx ; \quad (3.65)$$

$$d\theta^T = \frac{\alpha \cdot (\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} dx . \quad (3.66)$$

O sinal da rotação relativa interna da Equação 3.66 depende dos valores de ΔT_i e ΔT_s . Conforme indicado na Figura 3.23, quando ΔT_i é maior que ΔT_s (no sentido algébrico), $d\theta^T$ tem sentido anti-horário e é convencionalmente positiva. Visto de outra maneira, o sinal de $d\theta^T$ é positivo quando existe alongamento da fibra inferior da barra em relação à fibra superior. O sinal é negativo quando existe encurtamento da fibra inferior em relação à fibra superior. Os parâmetros que aparecem nas Equações 3.65 e 3.66 são:

$\alpha \rightarrow$ coeficiente de dilatação térmica do material [Θ^{-1}];

$h \rightarrow$ altura da seção transversal da barra [L];

$\Delta T_i \rightarrow$ variação de temperatura na fibra inferior da barra [Θ];

$\Delta T_s \rightarrow$ variação de temperatura na fibra superior da barra [Θ];

$\Delta T_{CG} \rightarrow$ variação de temperatura na fibra do centro de gravidade da seção transversal da barra [Θ].

3.7. Rigidez do elemento infinitesimal de barra

A seção anterior definiu os deslocamentos relativos internos que caracterizam as relações diferenciais entre as deformações elementares (axial, transversal, de flexão e de torção) de um elemento infinitesimal de barra e os correspondentes esforços internos (esforço normal, esforço cortante, momento fletor e momentor torçor). Essas relações diferenciais consideram, no nível de um elemento infinitesimal de barra, condições de compatibilidade entre deslocamentos e deformações, condições de equilíbrio e leis constitutivas dos materiais. As expressões dos deslocamentos relativos internos podem ser condensadas em expressões matriciais que caracterizam a rigidez de um elemento infinitesimal de barra. Essas expressões matriciais de rigidez relacionam os esforços internos atuando em um elemento infinitesimal de barra com as deformações integrais do elemento definidas na Seção 3.2.6. Essas expressões podem ser interpretadas como as relações entre tensão e deformação (leis constitutivas do material), definidas em um nível pontual infinitesimal, extrapoladas para o nível de um elemento infinitesimal de barra, que tem dimensão finita na direção transversal y do eixo da barra e dimensão infinitesimal na direção axial x .

As relações matriciais de rigidez de um elemento infinitesimal de barra serão utilizadas no Capítulo 5, juntamente com as funções de interpolação de deslocamentos e rotações ao longo de uma barra (definidas no próximo capítulo), para deduzir as matrizes de rigidez de barra, que nada mais são do que a extrapolação das relações de rigidez do elemento infinitesimal para o nível de barra isolada.

São definidas relações de rigidez do elemento infinitesimal para barras de pórtico plano e para barras de grelhas, considerando o comportamento à flexão da teoria de vigas de Navier e da teoria de vigas de Timoshenko.

As deformações integrais para o elemento infinitesimal de barra de pórtico plano de acordo com a teoria de vigas de Navier são dadas pela Equação 3.24, em que a distorção de cisalhamento é nula. Portanto, nesse caso, a rigidez do elemento infinitesimal considera apenas a componente axial e a componente de flexão, tal como indica a Figura 3.24.

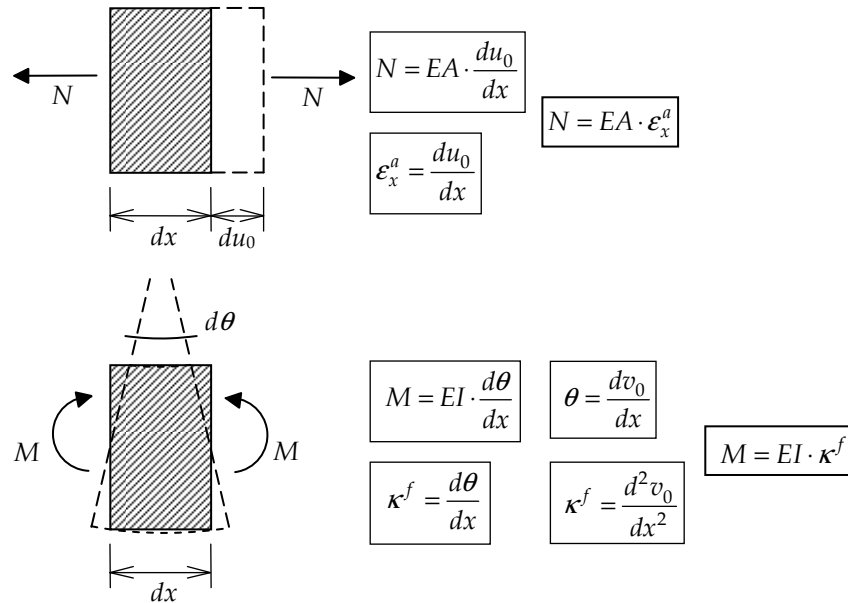


Figura 3.24 – Relações de rigidez entre esforços internos e deformações integrais em um elemento infinitesimal de barra de pórtico plano de acordo com a teoria de vigas de Navier.

Conforme reproduzido na Figura 3.24, utilizando a expressão do deslocamento relativo interno axial, dada pela Equação 3.53, e a expressão da rotação relativa interna por flexão, dada pela Equação 3.61 em conjunto com as Equações 3.11 e 3.12, chega-se na seguinte relação matricial para a rigidez do elemento infinitesimal de barra de pórtico plano de acordo com a teoria de vigas de Navier:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_x^a \\ \kappa^f \end{Bmatrix}, \quad (3.67)$$

em que:

$N \rightarrow$ esforço normal (esforço interno axial ou longitudinal) na direção do eixo local x [F];

$M = M_z \rightarrow$ momento fletor (esforço interno de flexão) na direção de giro em torno do eixo z [F·L];

$\epsilon_x^a = du_0/dx \rightarrow$ deformação normal na direção axial ou longitudinal devida ao efeito axial (onde u_0 é o deslocamento axial na direção do eixo local x) [];

$\kappa^f = d^2v_0/dx^2 \rightarrow$ gradiente da rotação por flexão (onde v_0 é o deslocamento transversal na direção do eixo local y) [R/L];

$EA \rightarrow$ rigidez axial do elemento infinitesimal de barra (produto do módulo de elasticidade do material, E , com a área da seção transversal, A) [F];

$EI \rightarrow$ rigidez à flexão do elemento infinitesimal de barra (produto do módulo de elasticidade do material, E , com o momento de inércia da seção transversal, $I = I_z$) [F·L²].

As deformações integrais para o elemento infinitesimal de barra de pórtico plano de acordo com a teoria de vigas de Timoshenko são dadas pela Equação 3.25, que considera três componentes de deformação: axial, transversal e de flexão, conforme indicado na Figura 3.25.

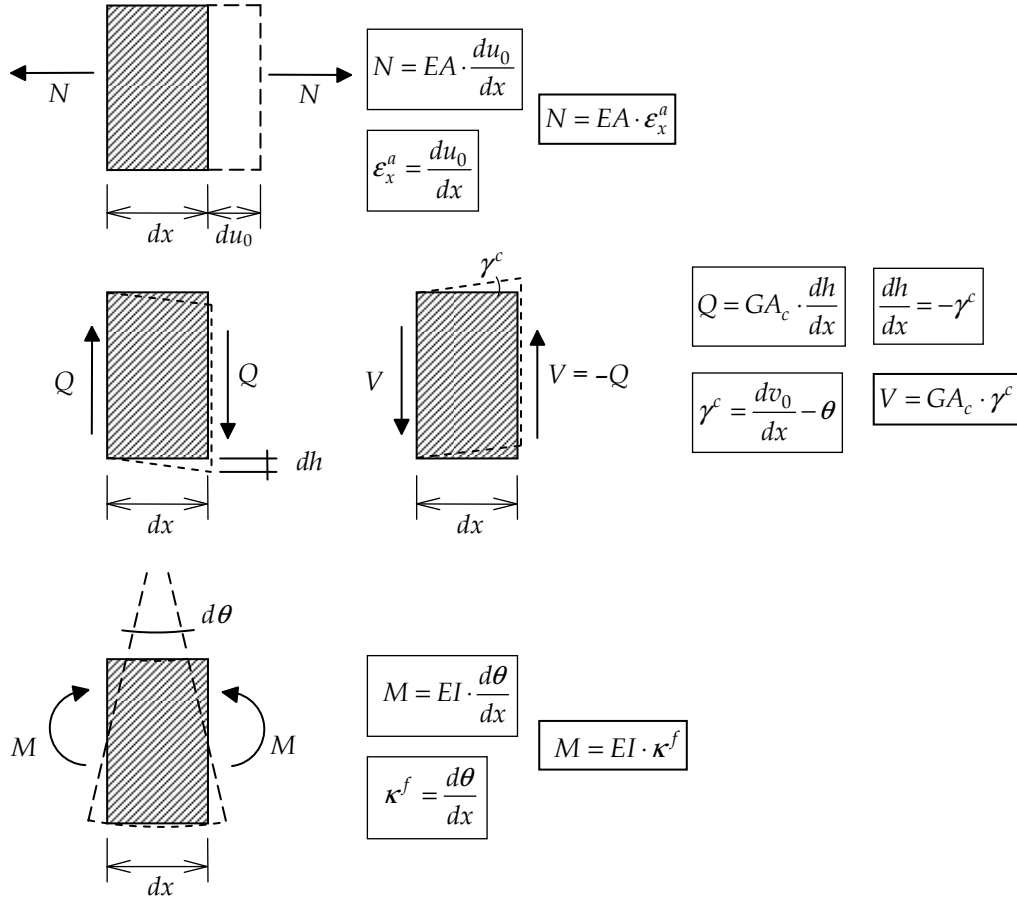


Figura 3.25 – Relações de rigidez entre esforços internos e deformações integrais em um elemento infinitesimal de barra de pórtico plano de acordo com a teoria de vigas de Timoshenko.

Considerando a discrepância de convenções de sinais entre o deslocamento transversal relativo interno dh , dado pela Equação 3.55, e a distorção de cisalhamento por efeito cortante γ^c , é conveniente trabalhar com uma convenção de sinais para esforço cortante contrária à convenção usual (esforço cortante é positivo quando a resultante das forças transversais que atua na face esquerda do elemento infinitesimal tem o sentido do eixo local y e a resultante das forças transversais na face direita tem o sentido contrário ao do eixo y). Dessa maneira, define-se o esforço cortante $V = -Q$, consistente com o sentido positivo da tensão de cisalhamento pontual τ_{xz} , indicada na Figura 3.3, nas faces laterais de um elemento infinitesimal. Trabalhando com o esforço cortante com a mesma convenção de sinais da tensão de cisalhamento, a relação de rigidez entre esforço cortante e distorção de cisalhamento fica com um sinal positivo ($V = GA_c \cdot \gamma^c$).

Para se chegar na relação matricial de rigidez do elemento infinitesimal de barra de pórtico plano de acordo com a teoria de vigas de Timoshenko, ainda é preciso considerar o efeito axial e o efeito de flexão. A rigidez axial é absolutamente igual à do elemento infinitesimal que segue a teoria de vigas de Navier ($N = EA \cdot \epsilon_x^a$). A rigidez por flexão ($M = EI \cdot \kappa^f$), conforme mostrado na Figura 3.25, é obtida pelas Equações 3.61 e 3.11. O resultado é:

$$\begin{Bmatrix} N \\ V \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & GA_c & 0 \\ 0 & 0 & EI \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_x^a \\ \gamma^c \\ \kappa^f \end{Bmatrix}. \quad (3.68)$$

Nesta equação tem-se:

$N \rightarrow$ esforço normal (esforço interno axial ou longitudinal) na direção do eixo local x [F];

$V = V_y = -Q \rightarrow$ esforço cortante (esforço interno transversal) na direção do eixo local y [F];

$M = M_z \rightarrow$ momento fletor (esforço interno de flexão) na direção de giro em torno do eixo z [F·L];

$\varepsilon_x^a = du_0/dx \rightarrow$ deformação normal na direção axial ou longitudinal devida ao efeito axial (onde u_0 é o deslocamento axial na direção do eixo local x) [];

$\gamma^c \rightarrow$ distorção de cisalhamento por efeito cortante na direção do eixo local y (efeito integral na seção transversal) [];

$\kappa^f = d\theta/dx \rightarrow$ gradiente da rotação por flexão (onde $\theta = \theta_z$ é a rotação por flexão em torno do eixo z) [R/L];

$EA \rightarrow$ rigidez axial do elemento infinitesimal de barra (produto do módulo de elasticidade do material, E , com a área da seção transversal, A) [F];

$GA_c \rightarrow$ rigidez transversal ao cisalhamento do elemento infinitesimal de barra (produto do módulo de cisalhamento do material, G , com a área da seção transversal efetiva para cisalhamento, $A_c = (A_c)_y$) [F];

$EI \rightarrow$ rigidez à flexão do elemento infinitesimal de barra (produto do módulo de elasticidade do material, E , com o momento de inércia da seção transversal, $I = I_z$) [F·L²].

No caso de barras de grelha, as deformações integrais do elemento infinitesimal de acordo com a teoria de vigas de Navier são dadas pela Equação 3.26. Nesse caso, não existe distorção por cisalhamento e a rigidez do elemento infinitesimal de barra está associada apenas à flexão em torno do eixo local y e à torção em torno do eixo local x , como indica a Figura 3.26.

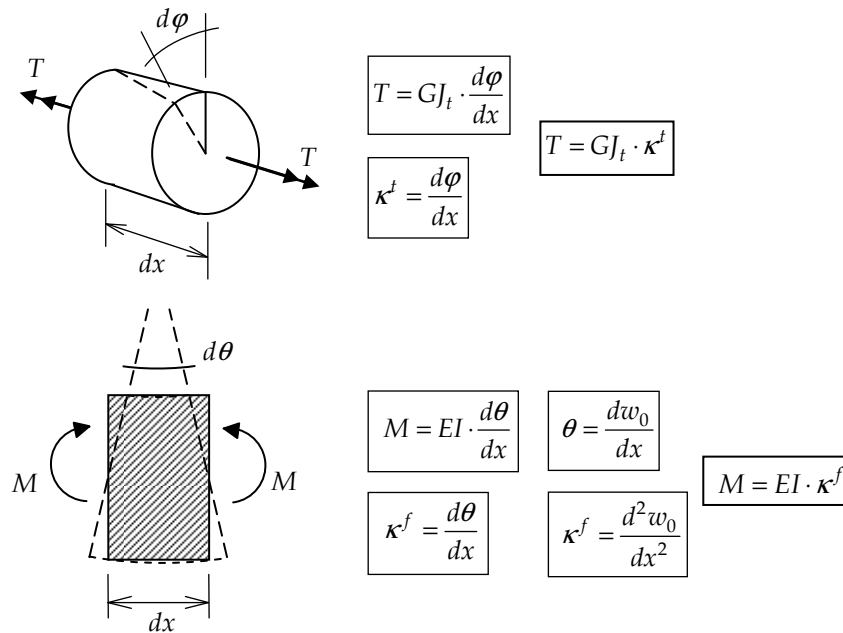


Figura 3.26 – Relações de rigidez entre esforços internos e deformações integrais em um elemento infinitesimal de barra de grelha de acordo com a teoria de vigas de Navier.

Na Figura 3.26, a rigidez à flexão ($M = EI \cdot \kappa^f$) é obtida pela Equação 3.61 em conjunto com as Equações 3.11 e 3.12 (considerando que o deslocamento transversal é w_0 na direção do eixo local z), para um momento fletor ($M = M_y$) e um momento de inércia da seção transversal ($I = I_y$) em torno do eixo local y . A rigidez à torção ($T = GJ_t \cdot \kappa^t$) é obtida pelas Equações 3.64 e 3.23. Disso resulta:

$$\begin{Bmatrix} T \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} GJ_t & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \kappa^t \\ \kappa^f \end{Bmatrix}, \quad (3.69)$$

em que:

$T \rightarrow$ momento torçor (esforço interno de torção) [F·L];

$M = M_y \rightarrow$ momento fletor (esforço interno de flexão) na direção de giro em torno do eixo y [F·L];

$\kappa^t = d\varphi/dx \rightarrow$ gradiente da rotação por torção (onde φ é a rotação por torção em torno do eixo x) [R/L].

$\kappa^f = d^2 w_0 / dx^2 \rightarrow$ gradiente da rotação por flexão (onde w_0 é o deslocamento transversal na direção do eixo local z) [R/L];

$GJ_t \rightarrow$ rigidez à torção do elemento infinitesimal de barra (produto do módulo de cisalhamento do material, G , com o momento de inércia à torção da seção transversal, J_t) [F·L²];

$EI \rightarrow$ rigidez à flexão do elemento infinitesimal de barra (produto do módulo de elasticidade do material, E , com o momento de inércia à flexão da seção transversal, $I = I_y$) [F·L²].

Para a barra de grelha que segue a teoria de vigas de Timoshenko, as deformações integrais do elemento infinitesimal são dadas pela Equação 3.27. Como indica a Figura 3.27, além da rigidez à torção ($T = GJ_t \cdot \kappa^t$) e da rigidez à flexão ($M = EI \cdot \kappa^f$ - obtida pelas Equações 3.61 e 3.11, com rotação por flexão $\theta = \theta_y$ em torno do eixo y), nesse caso existe uma parcela de rigidez associada à distorção por cisalhamento ($V = GA_c \cdot \gamma^c$), onde $V = -Q_z$.

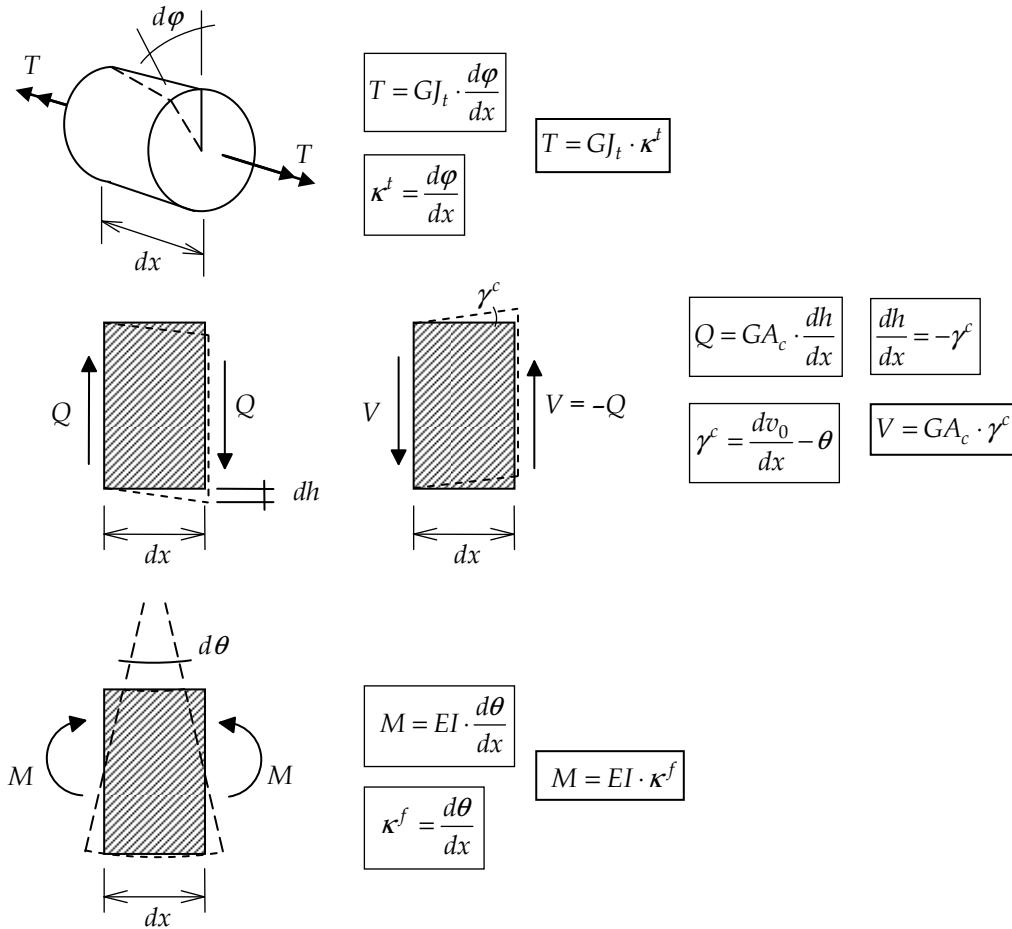


Figura 3.27 – Relações de rigidez entre esforços internos e deformações integrais em um elemento infinitesimal de barra de grelha de acordo com a teoria de vigas de Timoshenko.

Portanto, a relação matricial de rigidez do elemento infinitesimal de barra de grelha para a teoria de vigas de Timoshenko é:

$$\begin{Bmatrix} T \\ V \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} GJ_t & 0 & 0 \\ 0 & GA_c & 0 \\ 0 & 0 & EI \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \kappa^t \\ \gamma^c \\ \kappa^f \end{Bmatrix}, \quad (3.70)$$

em que:

$T \rightarrow$ momento torçor (esforço interno de torção) [F·L];

$V = V_z = -Q \rightarrow$ esforço cortante (esforço interno transversal) na direção do eixo local z [F];

$M = M_y \rightarrow$ momento fletor (esforço interno de flexão) na direção de giro em torno do eixo y [F·L];

$\kappa^t = d\varphi/dx \rightarrow$ gradiente da rotação por torção (onde φ é a rotação por torção em torno do eixo x) [R/L];

$\gamma^c \rightarrow$ distorção de cisalhamento por efeito cortante na direção do eixo local z (efeito integral na seção transversal) [];

$\kappa^f = d\theta/dx \rightarrow$ gradiente da rotação por flexão (onde $\theta = \theta_y$ é a rotação por flexão em torno do eixo y) [R/L];

$GJ_t \rightarrow$ rigidez à torção do elemento infinitesimal de barra (produto do módulo de cisalhamento do material, G , com o momento de inércia à torção da seção transversal, J_t) [F·L²];

$GA_c \rightarrow$ rigidez transversal ao cisalhamento do elemento infinitesimal de barra (produto do módulo de cisalhamento do material, G , com a área da seção transversal efetiva para cisalhamento, $A_c = (A_c)_z$) [F];

$EI \rightarrow$ rigidez à flexão do elemento infinitesimal de barra (produto do módulo de elasticidade do material, E , com o momento de inércia à flexão da seção transversal, $I = I_y$) [F·L²].

Genericamente, as relações matriciais de rigidez do elemento infinitesimal de barra podem ser representadas por:

$$\{m\} = [S] \cdot \{\kappa\}. \quad (3.71)$$

sendo:

$\{m\} \rightarrow$ vetor de esforços internos do elemento infinitesimal;

$\{\kappa\} \rightarrow$ vetor de deformações integrais do elemento infinitesimal;

$[S] \rightarrow$ matriz de rigidez do elemento infinitesimal.

3.8. Equações diferenciais dos modelos analíticos de barras

Foi mencionado na introdução deste capítulo que o seu principal objetivo é determinar as equações diferenciais que definem o comportamento analítico de um elemento infinitesimal de barra para efeitos axiais, de flexão e de torção. Esta seção formula essas equações diferenciais para cada um desses efeitos. As equações diferenciais consideram, no nível de um elemento infinitesimal de barra, as condições de compatibilidade entre deslocamentos e deformações, condições de equilíbrio e leis constitutivas dos materiais que foram mostradas nas seções anteriores.

Para o efeito de flexão considerando efeitos de primeira ordem, são formuladas três equações diferenciais, uma associada à teoria de vigas de Navier (hipótese de Euler-Bernoulli) e as outras à teoria de vigas de Timoshenko.

3.8.1. Equação diferencial para o comportamento axial

O comportamento axial de uma barra pode ser consolidado em uma equação diferencial que leva em conta, para um elemento infinitesimal de barra, as relações de equilíbrio, compatibilidade e lei constitutiva do material. A Equação 3.29 expressa o equilíbrio do elemento infinitesimal de barra, relacionando o gradiente do esforço interno axial $N(x)$ com a taxa de força axial distribuída aplicada $p(x)$. A Equação 3.9 estabelece uma relação de compatibilidade entre a deformação normal axial $\varepsilon_x^a(x)$ e o deslocamento axial $u_0(x)$. E a Equação 3.34, da lei constitutiva do material, relaciona tensão normal $\sigma_x^a(x)$ com deformação normal $\varepsilon_x^a(x)$, ambas na direção longitudinal.

As relações de compatibilidade e lei constitutiva estão combinadas na Equação 3.53, que reescrita resulta em uma expressão para o esforço normal na seção transversal em função do deslocamento axial:

$$N(x) = EA(x) \cdot \frac{du_0}{dx}, \quad (3.72)$$

sendo E o módulo de elasticidade do material e $A(x)$ a área da seção transversal, que pode variar ao longo do comprimento da barra. Essa equação também considera a relação de equilíbrio $N(x) = \sigma_x^a(x) \cdot A(x)$ entre tensão normal e o esforço interno axial (Equação 3.40).

A substituição da Equação 3.72 na Equação 3.29 (de equilíbrio) resulta na equação diferencial do comportamento axial:

$$\frac{d}{dx} \left[EA(x) \cdot \frac{du_0}{dx} \right] = -p(x). \quad (3.73)$$

Para uma barra prismática (com área de seção transversal que não varia ao longo de seu comprimento), tem-se:

$$\frac{d^2 u_0}{dx^2} = -\frac{p(x)}{EA}. \quad (3.74)$$

Para o caso de uma barra sem carregamento axial (solução homogênea), a Equação 3.74 trivializa em:

$$\frac{d^2 u_0^h}{dx^2} = 0. \quad (3.75)$$

A solução da Equação 3.75 é chamada de *solução homogênea* da Equação 3.74:

$$u_0^h(x) = b_0 + b_1 x, \quad (3.76)$$

sendo b_0 e b_1 coeficientes de um polinômio linear. Observa-se que uma barra com seção transversal constante e sem carregamento axial tem um deslocamento axial que varia linearmente.

A solução completa da Equação 3.74 é dada pela superposição da solução homogênea com uma solução particular $u_0(x) = u_0^h(x) + u_0^p(x)$, sendo que a *solução particular* $u_0^p(x)$ depende da distribuição da carga axial e não introduz nenhum coeficiente adicional a ser determinado. A razão para isso é que a solução particular é determinada considerando valores nulos para condições de contorno (de extremidade). Portanto, os coeficientes b_1 e b_0 podem ser determinados utilizando as condições de contorno reais do problema, que podem ser obtidas, em cada extremidade da barra, com base em um valor conhecido para o deslocamento axial $u_0(x)$ ou para o esforço normal $N(x) = EA \cdot du_0 / dx$.

3.8.2. Equação de Navier para o comportamento à flexão

O comportamento de vigas à flexão foi formalizado originalmente no início do século XIX por Navier adotando a hipótese de Euler-Bernoulli, que considera que, na flexão de uma barra, seções transversais permanecem planas e perpendiculares ao eixo deformado da barra. A teoria de vigas de Navier, conforme mencionado anteriormente, despreza deformações devidas ao efeito cortante e estabelece uma equação diferencial que relaciona os deslocamentos transversais $v_0(x)$ de uma viga com a taxa de carregamento distribuído transversalmente $q(x)$. Para se chegar a essa equação diferencial, primeiro é obtida uma relação entre o momento fletor na seção transversal e a segunda derivada do deslocamento transversal em relação a x . Isso é deduzido utilizando as Equações 3.16 e 3.62, considerando o caso geral de momento de inércia I variável ao longo da barra:

$$M(x) = EI(x) \cdot \frac{d^2 v_0}{dx^2}. \quad (3.77)$$

Pode-se, também, considerar a relação que existe entre o deslocamento transversal e o esforço cortante em uma barra, obtida pelas Equações 3.31 e 3.77, considerando I constante:

$$Q(x) = EI \cdot \frac{d^3 v_0}{dx^3}. \quad (3.78)$$

A Equação 3.77 relaciona o momento fletor em uma seção transversal da viga com a curvatura da viga, que pode ser aproximada por $d^2 v_0 / dx^2$ no caso de pequenas inclinações da elástica $v_0(x)$.

Substituindo a expressão do momento fletor da Equação 3.77 na Equação 3.32 (de equilíbrio), chega-se a:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI(x) \cdot \frac{d^2 v_0}{dx^2} \right] = q(x). \quad (3.79)$$

No caso em que a barra é prismática (momento de inércia I da seção transversal constante ao longo da barra), tem-se:

$$\frac{d^4 v_0}{dx^4} = \frac{q(x)}{EI}. \quad (3.80)$$

A Equação 3.79, ou sua outra versão (Equação 3.80) para inércia constante, é chamada de *equação de Navier*. Essa equação engloba, no nível de um elemento infinitesimal de barra, todas as condições que o modelo estrutural tem de atender. As Equações 3.12 e 3.10 consideram condições de compatibilidade; a Equação 3.34 considera a lei constitutiva do material; a Equação 3.32 considera condições de equilíbrio entre carregamento transversal distribuído, esforço cortante e momento fletor; e a Equação 3.41 considera o equilíbrio entre tensões normais e momento fletor.

Para o caso de uma barra sem carregamento transversal (solução homogênea), a Equação 3.80 trivializa em:

$$\frac{d^4 v_0^h}{dx^4} = 0. \quad (3.81)$$

A solução da Equação 3.81 é a solução homogênea da Equação 3.80:

$$v_0^h(x) = c_0 + c_1 x + c_2 \frac{x^2}{2} + c_3 \frac{x^3}{6}, \quad (3.82)$$

sendo c_0 , c_1 , c_2 e c_3 coeficientes de um polinômio do 3º grau. Observa-se que o deslocamento transversal tem uma variação cúbica ao longo de uma barra com seção transversal constante e sem carregamento transversal.

A solução homogênea para a rotação da seção transversal da teoria de vigas de Navier é obtida pela relação $\theta(x) = dv_0 / dx$ (Equação 3.12) e é expressa por um polinômio do segundo grau:

$$\theta^h(x) = c_1 + c_2 x + c_3 \frac{x^2}{2}. \quad (3.83)$$

A solução completa da Equação 3.80 é dada pela superposição da solução homogênea com uma solução particular $v_0(x) = v_0^h(x) + v_0^p(x)$, sendo que a solução particular $v_0^p(x)$ depende da distribuição da carga transversal e não introduz nenhum coeficiente adicional a ser determinado. Portanto, os coeficientes c_0 , c_1 , c_2 e c_3 podem ser determinados utilizando condições de contorno, em cada uma das extremidades, em função do deslocamento transversal $v_0(x)$, da rotação $\theta(x) = dv_0 / dx$, do momento fletor $M(x) = EI \cdot d^2 v_0 / dx^2$ ou do esforço cortante $Q(x) = EI \cdot d^3 v_0 / dx^3$.

3.8.3. Equações diferenciais para o comportamento à flexão considerando distorção de cisalhamento

Conforme descrito na Seção 3.2.2.2, na teoria de vigas de Timoshenko, a consideração da distorção de cisalhamento faz com que a rotação da seção transversal fique desassociada da tangente da elástica. A consequência disso é que não se consegue estabelecer uma única equação diferencial para o comportamento à flexão, em função de apenas uma variável, como ocorre para a viga de Navier. As equações diferenciais que descrevem o comportamento à flexão da viga de Timoshenko têm duas variáveis: o deslocamento transversal $v_0(x)$ e a rotação da seção transversal $\theta(x)$. A dedução dessas equações diferenciais segue os passos delineados por Reddy (1997) e Pereira (2002).

Para se chegar nessas equações, é preciso expressar o momento fletor e esforço cortante em função do deslocamento transversal e da rotação da seção transversal. A Equação 3.43 relaciona o momento flexão $M(x)$ com a rotação $\theta(x)$: $M(x) = EI(x) \cdot d\theta / dx$. A expressão para o esforço cortante é obtida combinando as Equações 3.54 e 3.8:

$$Q(x) = -G \cdot \gamma^c \cdot A_c(x) = -GA_c(x) \cdot \left(\frac{dv_0}{dx} - \theta \right). \quad (3.84)$$

Substituindo as Equações 3.84 e 3.43 nas Equações 3.30 e 3.31 (de equilíbrio) resulta nas equações diferenciais da teoria de vigas de Timoshenko:

$$\frac{d}{dx} \left[-GA_c(x) \cdot \left(\frac{dv_0}{dx} - \theta \right) \right] = q(x); \quad (3.85)$$

$$\frac{d}{dx} \left[EI(x) \cdot \frac{d\theta}{dx} \right] + GA_c(x) \cdot \left(\frac{dv_0}{dx} - \theta \right) = 0. \quad (3.86)$$

Nessas equações, E é módulo de elasticidade do material, G é o módulo de cisalhamento, $A_c(x)$ é a área da seção transversal efetiva para cisalhamento e $I(x)$ é o momento de inércia da seção transversal.

As soluções das Equações 3.85 e 3.86 têm uma parcela homogênea e outra particular: $v_0(x) = v_0^h(x) + v_0^p(x)$ e $\theta(x) = \theta^h(x) + \theta^p(x)$. As parcelas particulares dependem da carga transversal aplicada $q(x)$. As parcelas homogêneas são obtidas considerando $q(x) = 0$. No caso de barras com seção transversal que não varia ao longo de seu comprimento, as soluções homogêneas são obtidas resolvendo-se as seguintes equações:

$$GA_c \cdot \left(\frac{d^2 v_0^h}{dx^2} - \frac{d\theta^h}{dx} \right) = 0; \quad (3.87)$$

$$EI \cdot \frac{d^2 \theta^h}{dx^2} + GA_c \cdot \left(\frac{dv_0^h}{dx} - \theta^h \right) = 0. \quad (3.88)$$

Derivando a Equação 3.88 uma vez em relação a x e utilizando a Equação 3.87, resulta em:

$$EI \cdot \frac{d^3 \theta^h}{dx^3} = 0. \quad (3.89)$$

Portanto, a solução homogênea para a rotação da seção transversal é expressa por um polinômio do segundo grau, exatamente como para a teoria de vigas de Navier (Equação 3.83):

$$\theta^h(x) = c_1 + c_2 x + c_3 \frac{x^2}{2}. \quad (3.90)$$

Substituindo $\theta^h(x)$ da Equação 3.90 em θ^h da Equação 3.88, resulta em:

$$EI \cdot c_3 + GA_c \cdot \frac{dv_0^h}{dx} - GA_c \cdot \left(c_1 + c_2 x + c_3 \frac{x^2}{2} \right) = 0.$$

Ou melhor:

$$\frac{dv_0^h}{dx} = c_1 + c_2 x + c_3 \frac{x^2}{2} - \frac{EI}{GA_c} c_3. \quad (3.91)$$

Integrando a Equação 3.91 uma vez em relação a x , chega-se a:

$$v_0^h(x) = c_0 + c_1 x + c_2 \frac{x^2}{2} + c_3 \left(\frac{x^3}{6} - \frac{EI}{GA_c} x \right). \quad (3.92)$$

Note que os coeficientes c_0 , c_1 , e c_3 que aparecem na Equação 3.92 são os mesmos da Equação 3.90. É interessante observar também que se o valor da inércia ao cisalhamento GA_c for considerado muito grande em relação ao valor da inércia à flexão EI , o termo da EI/GA_c se anula e a Equação 3.92 fica igual à Equação 3.82 para o deslocamento transversal da teoria de vigas de Navier. Isso faz sentido, pois quanto maior o valor da área efetiva da seção transversal, menor a distorção de cisalhamento.

Os coeficientes c_0 , c_1 , c_2 e c_3 presentes nas Equações 3.90 e 3.92 podem ser determinados utilizando condições de contorno, em cada extremidade da barra, com base em um valor conhecido para o deslocamento trans-

versal $v_0(x)$, para a rotação $\theta(x)$, para o momento fletor $M(x) = EI \cdot d\theta / dx$ ou para o esforço cortante $Q(x) = -GA_c \cdot (dv_0 / dx - \theta)$.

3.8.4. Equação diferencial para o comportamento à torção

De maneira análoga ao que foi feito para o comportamento axial de uma barra na Seção 3.8.1, o comportamento à torção pode ser consolidado em uma equação diferencial que leva em conta, para um elemento infinitesimal de barra, as relações de equilíbrio, compatibilidade e lei constitutiva do material. A Equação 3.33 expressa o equilíbrio do elemento infinitesimal de barra. As relações de compatibilidade e lei constitutiva estão combinadas na Equação 3.64, que reescrita resulta em uma expressão para o momento torçor na seção transversal em função da rotação por torção:

$$T(x) = GJ_t(x) \cdot \frac{d\varphi}{dx}, \quad (3.93)$$

sendo G o módulo de cisalhamento do material e $J_t(x)$ o momento de inércia à torção da seção transversal, que pode variar ao longo do comprimento da barra.

A substituição da Equação 3.93 na Equação 3.33 (de equilíbrio) resulta na equação diferencial do comportamento à torção:

$$\frac{d}{dx} \left[GJ_t(x) \cdot \frac{d\varphi}{dx} \right] = -m(x). \quad (3.94)$$

Para uma barra prismática (com área de seção transversal que não varia ao longo de seu comprimento), tem-se:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{m(x)}{GJ_t}. \quad (3.95)$$

Para o caso de uma barra sem aplicação de momento externo à torção (solução homogênea), a Equação 3.95 simplifica para:

$$\frac{d^2\varphi^h}{dx^2} = 0. \quad (3.96)$$

A solução homogênea da Equação 3.95 é a solução da Equação 3.96:

$$\varphi^h(x) = b_0 + b_1x, \quad (3.97)$$

sendo b_0 e b_1 coeficientes de um polinômio linear. Observa-se que uma barra com seção transversal constante e sem carregamento à torção tem uma rotação por torção que varia linearmente.

A solução completa da Equação 3.97 é dada pela superposição da solução homogênea com uma solução particular $\varphi(x) = \varphi^h(x) + \varphi^p(x)$, sendo que a solução particular $\varphi^p(x)$ depende da distribuição do carregamento à torção e não introduz nenhum coeficiente adicional a ser determinado. Portanto, os coeficientes b_0 e b_1 podem ser determinados utilizando condições de contorno (de extremidade) em função da rotação por torção $\varphi(x)$ ou do momento torçor $T(x) = GJ_t \cdot d\varphi / dx$.

3.9. Identificação da solução particular como solução local de engastamento de barra

Na seção anterior foram deduzidas expressões de soluções homogêneas para deslocamentos e rotações ao longo de uma barra solicitada por efeitos axiais, de flexão e de torção. As soluções homogêneas correspondem a uma situação de barra sem carregamento e dependem, além das propriedades elásticas e geométricas da barra, de condições de contorno. As condições de contorno podem ser dadas em função de valores de deslocamentos, de rotações ou de esforços internos nas extremidades da barra. Esta seção mostra que as soluções particulares, que dependem do carregamento aplicado, podem ser interpretadas como soluções locais de engastamento de barras para as correspondentes solicitações externas. Essa constatação é muito importante porque identifica as soluções homogêneas com a solução global discreta do método da rigidez direta (estágio II definido na Seção 2.1) e as soluções particulares com as soluções locais (estágio I). Isso justifica o

uso de soluções homogêneas como funções de interpolação de deslocamentos e rotações na solução global. Essas funções de interpolação serão deduzidas no próximo capítulo.

Sem perda de generalidade, a identificação de que soluções particulares podem corresponder a situações de engastamento de uma barra será feita para o comportamento à flexão da barra, considerando a hipótese de Euler-Bernoulli (teoria de vigas de Navier). Identificações análogas podem ser feitas para outros comportamentos da barra, ou para o comportamento à flexão considerando deformação por cisalhamento (teoria de vigas de Timoshenko).

Considere, como exemplo, uma barra com rigidez à flexão EI constante solicitada externamente por uma força uniformemente distribuída abrangendo todo o seu vão l , com três conjuntos distintos de condições de contorno, como indica a Figura 3.28. Nessa figura, a escala utilizada para deslocamentos e rotações é exagerada em relação à escala utilizada para o comprimento da barra. Nas três situações, na extremidade esquerda da barra são impostos um deslocamento transversal $v_0(0) = \rho_A$ e uma rotação $\theta(0) = \theta_A$. Diferentes condições de contorno são impostas na extremidade direita da barra. Na Figura 3.28-a, a extremidade direita é engastada, isto é, o deslocamento transversal e a rotação são nulos ($v_0(l) = 0$ e $\theta(l) = 0$). Na Figura 3.28-b, a rotação é liberada, fazendo com que o momento fletor seja nulo ($v_0(l) = 0$ e $M(l) = 0$). Finalmente, na Figura 3.28-c, a rotação é nula e o deslocamento transversal é liberado, resultando em um esforço cortante nulo ($\theta(l) = 0$ e $Q(l) = 0$).

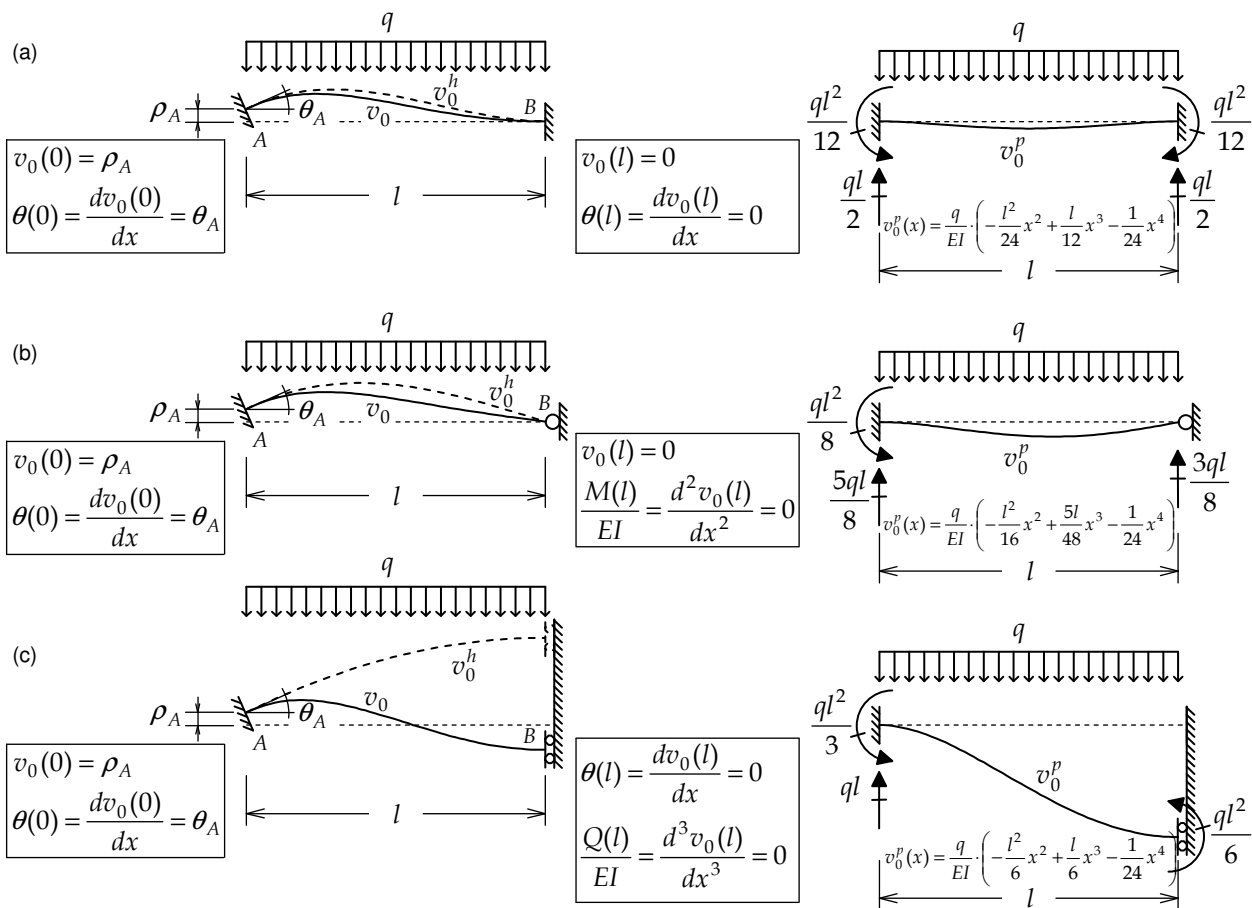


Figura 3.28 – Soluções completas (v_0), homogêneas (v_0^h) e particulares (v_0^p) de barra solicitada por uma força uniformemente distribuída para três conjuntos de condições de contorno.

Observa-se, na Figura 3.28, que as soluções homogêneas (sem carregamento) consideram as condições de contorno não nulas nas extremidades da barra. Como a solução completa é obtida pela soma das soluções homogênea e particular, isto é, $v_0(x) = v_0^h(x) + v_0^p(x)$, a solução particular fica associada a condições de contorno com valores nulos. Portanto, a solução particular corresponde a uma situação de engastamento da barra solicitada pela carga externa, pois para essa solução deslocamentos e rotações nas extremidades da barra têm valores nulos. Deslocamentos e rotações nas extremidades podem ter valores não nulos na solução particular.

Isso ocorre quando a condição de contorno corresponde a momento fletor ou esforço cortante conhecido. Entretanto, qualquer que seja o tipo de condição de contorno, ela tem valor nulo na solução particular.

As soluções particulares indicadas para cada uma das situações da Figura 3.28 são obtidas integrando a Equação 3.80 quatro vezes, considerando $q(x) = -q$ e as correspondentes condições de contorno com valores nulos, inclusive na extremidade esquerda. Portanto, na extremidade esquerda considera-se $v_0^p(0) = 0$ e $\theta^p(0) = 0$, e na extremidade direita considera-se as mesmas condições de contorno indicadas para cada uma das três situações. As reações de apoio das soluções particulares, também indicadas na figura, são obtidas em função do momento fletor $M(x) = EI \cdot d^2 v_0^p / dx^2$ ou do esforço cortante $Q(x) = EI \cdot d^3 v_0^p / dx^3$, avaliados em $x = 0$ ou em $x = l$.

Conforme mencionado anteriormente, a identificação de que uma solução particular analítica para uma barra carregada corresponde a uma situação de engastamento da barra é muito importante porque demonstra que as soluções locais de engastamento (estágio I definido na Seção 2.1) do método da rigidez direta podem ser determinadas analiticamente, pelo menos para o caso de barras com seção transversal constante ao longo de seu comprimento. Correspondentemente, a solução global discreta (estágio II da Seção 2.1) está associada a soluções homogêneas analíticas das barras, que são usadas como funções de interpolação dos deslocamentos e rotações dos nós do modelo discreto (veja próximo capítulo).

Observa-se que os deslocamentos e rotações dos nós são nulos nas soluções locais de engastamento (soluções particulares analíticas). Pode-se concluir que, quando se adota soluções analíticas para o comportamento das barras, a solução para os deslocamentos e rotações nodais do modelo global discreto é exata (sem erros de discretização), independentemente do número de elementos de barra adotado na discretização de um trecho de barra e da natureza de distribuição do carregamento externo. Em outras palavras, a discretização de barras no método da rigidez direta não modifica os resultados de uma análise estrutural, pois o comportamento contínuo de um elemento de barra pode ser representado por parâmetros nodais sem que se introduza nenhuma aproximação adicional além das simplificações já contidas na idealização analítica do comportamento de barras.

Deve-se ressaltar que existem outras maneiras de distribuir as condições de contorno entre as soluções homogênea e particular de um problema genérico. Entretanto, a interpretação de que as soluções homogêneas (sem carregamento) consideram as condições de contorno não nulas nas extremidades das barras e as soluções particulares (com carregamento) consideram valores nulos para as condições de contorno nas extremidades das barras carregadas é compatível com a estratégia de decomposição do carregamento de um modelo estrutural em dois estágios de carregamento (local e global) do método da rigidez direta.

4. INTERPOLAÇÃO DE DESLOCAMENTOS EM BARRAS

A solução discreta da análise estrutural pelo método da rigidez direta para estruturas reticuladas é representada por valores de deslocamentos e rotações nos nós (pontos de encontro dos elementos de barra ou extremidades dos elementos), conforme foi colocado no Capítulo 1 (Figura 1.3). As componentes de deslocamentos e rotações nodais de um modelo estrutural são os graus de liberdade do problema discreto, que são as incógnitas do método. A Figura 1.4 ilustra a superposição de soluções básicas que é utilizada na solução discreta do pórtico da Figura 1.3. Cada solução básica isola um determinado efeito. A primeira corresponde a uma solução de engastamento perfeito que isola a solicitação externa (carregamento, por exemplo). As demais soluções básicas isolam individualmente os efeitos de cada um dos graus de liberdade.

Para que seja possível substituir o comportamento contínuo de um modelo estrutural por um comportamento discreto em função dos graus de liberdade, é necessário interporlar os deslocamentos e rotações nas extremidades de um elemento de barra para obter os deslocamentos e rotações em qualquer ponto ao longo do eixo da barra. Este capítulo define as funções de interpolação dos deslocamentos e rotações nodais de uma barra. Essas funções são conhecidas como *funções de forma*.

De acordo com o que foi observado na Seção 3.9, caso se utilize funções de forma baseadas nas soluções homogêneas analíticas das barras, a solução discreta do modelo global fornece resultados para os deslocamentos e rotações nodais iguais aos da solução analítica do problema. Assim, o modelo global não tem erros de discretização, independentemente do número de elementos de barras utilizados e da natureza dos carregamentos. Portanto, as funções de forma de um elemento de barra definidas nesse capítulo são baseadas em soluções analíticas homogêneas (sem carregamento) da barra.

Infelizmente, no caso de barras com seção transversal variável, não existem expressões analíticas para as soluções homogêneas. Nesse caso, é possível obter numericamente soluções homogêneas (Martha 2010). Entretanto, este capítulo só considera funções de forma baseadas em soluções homogêneas para barras com seção transversal que não varia ao longo do seu comprimento. No caso em que a seção transversal é variável, as funções de forma deduzidas neste capítulo podem ser interpretadas como funções de interpolação aproximadas.

4.1. Funções de forma para interpolação de deslocamentos e rotações em barras

As configurações deformadas elementares de uma barra isolada correspondem às elásticas que resultam da imposição individual de deslocamentos ou rotações em uma de suas extremidades, como mostra a Figura 4.1 para uma barra de pórtico plano. Os deslocamentos são impostos em direções paralelas aos eixos locais de uma barra (Figura 2.14), sendo que o eixo x tem a direção axial da barra e o eixo y tem a direção transversal, e as rotações são impostas no sentido anti-horário. Para uma barra de grelha, configurações deformadas elementares análogas são definidas em função das deslocabilidades locais no sistema local da barra que estão indicadas na Figura 2.18 (veja Figura 2.11).

Uma elástica elementar da barra de pórtico plano isolada é definida no sistema de eixos locais pelo deslocamento axial $u_0(x)$, pelo deslocamento transversal $v_0(x)$ e pela rotação $\theta(x)$, que estão indicados na Figura 4.1. Em todos os modelos matemáticos descritos no Capítulo 3 para o comportamento de barras, o comportamento axial e o comportamento transversal de uma barra são considerados independentes. Dessa forma, o deslocamento axial $u_0(x)$ só depende das deslocabilidades axiais d'_1 e d'_4 , e o deslocamento transversal $v_0(x)$ e a rotação $\theta(x)$ são definidos pelas deslocabilidades d'_2 , d'_3 , d'_5 e d'_6 . As funções de interpolação de deslocamentos e rotações ilustradas na Figura 4.1, chamadas de *funções de forma*, definem as elásticas elementares da barra isolada (McGuire *et al.* 2000).

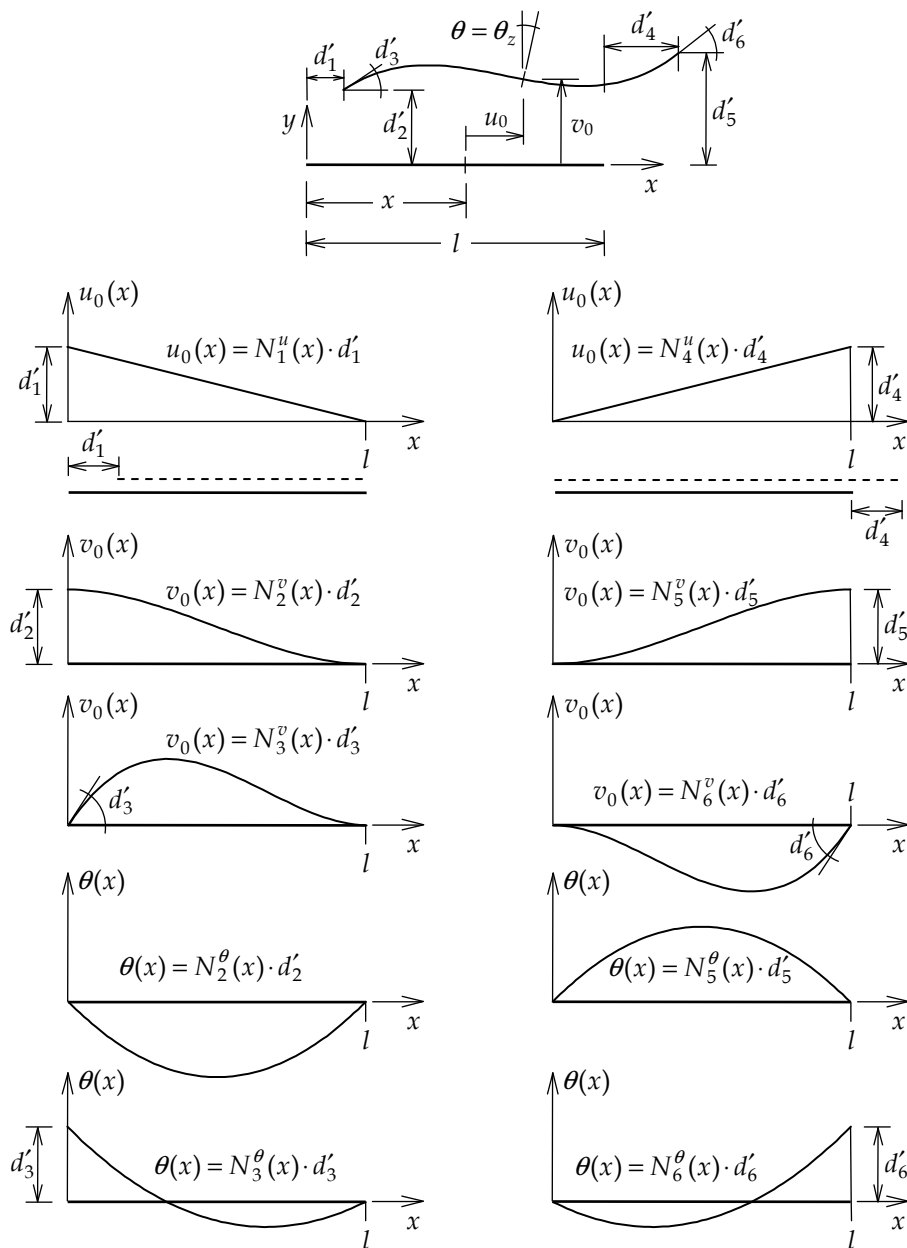


Figura 4.1 – Superposição de configurações deformadas elementares baseadas em funções de forma para compor a elástica final de uma barra de pórtico plano isolada.

Para os deslocamentos na direção axial, considerando que a barra tem uma seção transversal constante e que não existe carregamento na direção axial (solução homogênea), tem-se que o esforço normal na barra é constante. Nessa situação, a partir da Equação 3.76, observa-se que o deslocamento axial $u_0(x)$ varia linearmente ao longo da barra. Essa equação pode ser escrita de uma maneira alternativa em função das deslocabilidades axiais d'_1 e d'_4 :

$$u_0(x) = N_1^u(x) \cdot d'_1 + N_4^u(x) \cdot d'_4. \quad (4.1)$$

Essencialmente as Equações 3.76 e 4.1 são equivalentes. A diferença é que os parâmetros que definem a elástica axial da primeira equação são meros coeficientes de um polinômio linear, enquanto os parâmetros na segunda equação têm um significado físico: são as deslocabilidades axiais. Essas funções de forma serão definidas na Seção 4.2.

Por outro lado, o deslocamento transversal $v_0(x)$ da barra prismática depende da teoria adotada para o comportamento à flexão da barra. No restante deste capítulo, as funções de forma do comportamento transversal serão deduzidas de acordo com cada uma das teorias estudadas neste livro. No caso da barra que segue a teoria de vigas de Navier, que adota a hipótese de Euler-Bernoulli de seção transversal mantendo-se sempre perpendicular ao eixo deformado da barra (deprezando-se distorções de cisalhamento), a solução home-

gênea do deslocamento transversal é dada pela Equação 3.82, e para a rotação $\theta(x) = \theta_z(x)$ da seção transversal a solução homogênea é dada pela Equação 3.83. Para o comportamento à flexão que considera distorções de cisalhamento (teoria de vigas de Timoshenko), as expressões análogas para $v_0(x)$ e $\theta(x)$ são as Equações 3.92 e 3.90.

As soluções homogêneas para o comportamento o comportamento transversal (Equações 3.82, 3.92 e 3.90) descrevem uma elástica genérica de uma barra isolada. Essa elástica pode ser descrita de maneira alternativa em função diretamente das deslocabilidades:

$$v_0(x) = N_2^v(x) \cdot d'_2 + N_3^v(x) \cdot d'_3 + N_5^v(x) \cdot d'_5 + N_6^v(x) \cdot d'_6; \quad (4.2)$$

$$\theta(x) = \theta_z(x) = N_2^\theta(x) \cdot d'_2 + N_3^\theta(x) \cdot d'_3 + N_5^\theta(x) \cdot d'_5 + N_6^\theta(x) \cdot d'_6. \quad (4.3)$$

Para cada tipo de comportamento transversal, as Equações 4.2 e 4.3 são equivalentes às correspondentes Equações 3.82, 3.92 e 3.90. Entretanto, nas Equações 4.2 e 4.3, os parâmetros que definem a variação do deslocamento transversal e da rotação ao longo da barra são deslocabilidades, em vez de coeficientes de polinômios das Equações 3.82, 3.92 e 3.90, que não têm significado físico.

As Equações 4.1, 4.2 e 4.3 podem ser grupadas em uma matriz da seguinte maneira:

$$\begin{Bmatrix} u_0(x) \\ v_0(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^u(x) & 0 & 0 & N_4^u(x) & 0 & 0 \\ 0 & N_2^v(x) & N_3^v(x) & 0 & N_5^v(x) & N_6^v(x) \\ 0 & N_2^\theta(x) & N_3^\theta(x) & 0 & N_5^\theta(x) & N_6^\theta(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d'_1 \\ d'_2 \\ d'_3 \\ d'_4 \\ d'_5 \\ d'_6 \end{Bmatrix}. \quad (4.4)$$

A Equação 4.4 pode ser condensada em uma representação matricial:

$$\begin{Bmatrix} u_0(x) \\ v_0(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = [N] \cdot \{d'\} \rightarrow \{u\} = [N] \cdot \{d'\}, \quad (4.5)$$

sendo,

$[N] \rightarrow$ matriz das funções de forma de uma barra genérica.

A Equação 4.5 expressa o vetor do campo de deslocamentos e rotações para uma barra de pórtico plano em função de suas deslocabilidades.

De maneira análoga ao comportamento axial de uma barra, a solução homogênea do problema da torção para barra com seção transversal constante resulta em uma variação linear para a rotação por torção $\varphi(x)$ ao longo da barra (Equação 3.97). Nesse caso, as deslocabilidades associadas à torção nas extremidades da barra são às rotações por torção d'_1 e d'_4 indicadas na Figura 2.18. As outras componentes da elástica de uma barra de grelha são a rotação por flexão $\theta(x) = \theta_y(x)$ e o deslocamento transversal $w_0(x)$ (na direção do eixo local z), definidos na Seção 3.1. Com base nas deslocabilidades locais definidas na Figura 2.18, as expressões para a elástica em uma barra de grelha, utilizando funções de forma, são definidas da seguinte maneira:

$$\varphi(x) = N_1^\varphi(x) \cdot d'_1 + N_4^\varphi(x) \cdot d'_4; \quad (4.6)$$

$$\theta(x) = \theta_y(x) = N_2^\theta(x) \cdot d'_2 + N_3^\theta(x) \cdot d'_3 + N_5^\theta(x) \cdot d'_5 + N_6^\theta(x) \cdot d'_6. \quad (4.7)$$

$$w_0(x) = N_2^w(x) \cdot d'_2 + N_3^w(x) \cdot d'_3 + N_5^w(x) \cdot d'_5 + N_6^w(x) \cdot d'_6; \quad (4.8)$$

O campo de deslocamentos e rotações de uma barra de grelha é representado matricialmente da seguinte maneira (veja Figura 2.18):

$$\begin{Bmatrix} \varphi(x) \\ \theta(x) \\ w_0(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^\varphi(x) & 0 & 0 & N_4^\varphi(x) & 0 & 0 \\ 0 & N_2^\theta(x) & N_3^\theta(x) & 0 & N_5^\theta(x) & N_6^\theta(x) \\ 0 & N_2^w(x) & N_3^w(x) & 0 & N_5^w(x) & N_6^w(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d'_1 \\ d'_2 \\ d'_3 \\ d'_4 \\ d'_5 \\ d'_6 \end{Bmatrix}. \quad (4.9)$$

$$\begin{Bmatrix} \varphi(x) \\ \theta(x) \\ w_0(x) \end{Bmatrix} = [N] \cdot \{d'\} \rightarrow \{u\} = [N] \cdot \{d'\}, \quad (4.10)$$

As próximas seções deduzem expressões analíticas para as funções de forma definidas genericamente nesta seção. A vantagem de especificar o campo de deslocamentos e rotações nas barras a partir das suas deslocabilidades é que isso permite colocar em evidência as incógnitas do método da rigidez direta na formulação das relações de rigidez do problema. Dessa forma, as propriedades de rigidez de uma barra ficam definidas diretamente em função das deslocabilidades. Isso vai ser mostrado no Capítulo 5.

4.2. Funções de forma para comportamento axial

As equações que definem as funções de forma axiais podem ser obtidas a partir da Equação 3.76, que determina os valores das constantes b_0 e b_1 com base em condições de contorno adequadas. A função de forma $N_1^u(x)$ é definida considerando $u_0(0) = 1$ e $u_0(l) = 0$ na Equação 3.76, e a função de forma $N_4^u(x)$ é definida considerando $u_0(0) = 0$ e $u_0(l) = 1$. Isso resulta nas seguintes funções, que também estão mostradas na Figura 4.2:

$$N_1^u(x) = 1 - \frac{x}{l}; \quad (4.11)$$

$$N_4^u(x) = \frac{x}{l}. \quad (4.12)$$

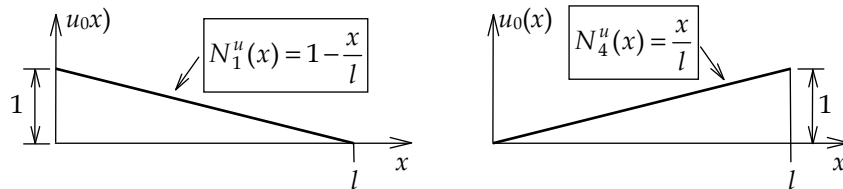


Figura 4.2 – Funções de forma axiais de uma barra isolada.

As Equações 4.11 e 4.12 serão deduzidas de uma maneira alternativa na próxima seção utilizando um procedimento matricial.

4.3. Funções de forma para comportamento à flexão segundo a teoria de Navier

De forma análoga ao que foi feito para as deslocabilidades axiais, as equações que definem as funções de forma para as deslocabilidades transversais do comportamento à flexão de acordo com a teoria de vigas de Navier (hipótese de Euler-Bernoulli) podem ser obtidas a partir da Equação 3.82, determinando os valores das constantes c_0 , c_1 , c_2 e c_3 com base em condições de contorno adequadas. Por exemplo, para o caso de barra sem articulação, a função de forma $N_2^v(x)$ é definida considerando $v_0(0) = 1$, $dv_0(0)/dx = 0$, $v_0(l) = 0$ e $dv_0(l)/dx = 0$; a função de forma $N_3^v(x)$ é definida considerando $v_0(0) = 0$, $dv_0(0)/dx = 1$, $v_0(l) = 0$ e $dv_0(l)/dx = 0$; a função de forma $N_5^v(x)$ é definida considerando $v_0(0) = 0$, $dv_0(0)/dx = 0$, $v_0(l) = 1$ e $dv_0(l)/dx = 0$; e a função de forma $N_6^v(x)$ é definida considerando $v_0(0) = 0$, $dv_0(0)/dx = 0$, $v_0(l) = 0$ e $dv_0(l)/dx = 1$.

Entretanto, um procedimento matricial vai ser utilizado conforme descrito a seguir. Esse procedimento estabelece uma metodologia geral para definir funções de forma em elementos de barra a partir das expressões analíticas das soluções homogêneas de todos os comportamentos matemáticos adotados para barras.

As funções de forma serão definidas para barra sem articulação, barra com articulação na esquerda e barra com articulação na direita.

4.3.1. Funções de forma para barra de pórtico plano sem articulação

Soluções homogêneas da equação diferencial do problema para os deslocamentos axial, transversal e para a rotação:

$$\begin{Bmatrix} u_0(x) \\ v_0(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & x^2/2 & x^3/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & x^2/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} \quad \boxed{\{u\} = [P] \cdot \{c\}}$$

Avaliação da solução homogênea nas extremidades da barra, isto é, obtenção de uma matriz que relaciona as deslocabilidades com os coeficientes da solução homogênea:

$$\begin{Bmatrix} u_0(0) \\ v_0(0) \\ \theta(0) \\ u_0(l) \\ v_0(l) \\ \theta(l) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d'_1 \\ d'_2 \\ d'_3 \\ d'_4 \\ d'_5 \\ d'_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l & l^2/2 & l^3/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & l & l^2/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} \quad \boxed{\{d'\} = [X] \cdot \{c\}}$$

Inversão da matriz, isto é, obtenção de uma matriz que relaciona os coeficientes da solução homogênea com as deslocabilidades:

$$\begin{Bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/l & 0 & 0 & -1/l & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6/l^2 & -4/l & 0 & 6/l^2 & -2/l \\ 0 & 12/l^3 & 6/l^2 & 0 & -12/l^3 & 6/l^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d'_1 \\ d'_2 \\ d'_3 \\ d'_4 \\ d'_5 \\ d'_6 \end{Bmatrix} \quad \boxed{\{c\} = [X]^{-1} \cdot \{d'\}}$$

Isso resulta na matriz das funções de forma indicada na Equação 4.4:

$$\begin{Bmatrix} u_0(x) \\ v_0(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & x^2/2 & x^3/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & x^2/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/l & 0 & 0 & -1/l & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6/l^2 & -4/l & 0 & 6/l^2 & -2/l \\ 0 & 12/l^3 & 6/l^2 & 0 & -12/l^3 & 6/l^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d'_1 \\ d'_2 \\ d'_3 \\ d'_4 \\ d'_5 \\ d'_6 \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\{u\} = [P][X]^{-1} \cdot \{d'\}} \rightarrow \boxed{[N] = [P][X]^{-1}}$$

As funções de forma resultantes, também ilustradas na Figura 4.3, são:

$$N_2^v(x) = 1 - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3}; \quad (4.13)$$

$$N_3^v(x) = x - 2\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}; \quad (4.14)$$

$$N_5^v(x) = 3\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3}; \quad (4.15)$$

$$N_6^v(x) = -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}; \quad (4.16)$$

$$N_2^\theta(x) = -6\frac{x}{l^2} + 6\frac{x^2}{l^3}; \quad (4.17)$$

$$N_3^\theta(x) = 1 - 4\frac{x}{l} + 3\frac{x^2}{l^2}; \quad (4.18)$$

$$N_5^\theta(x) = 6\frac{x}{l^2} - 6\frac{x^2}{l^3}; \quad (4.19)$$

$$N_6^\theta(x) = -2\frac{x}{l} + 3\frac{x^2}{l^2}. \quad (4.20)$$

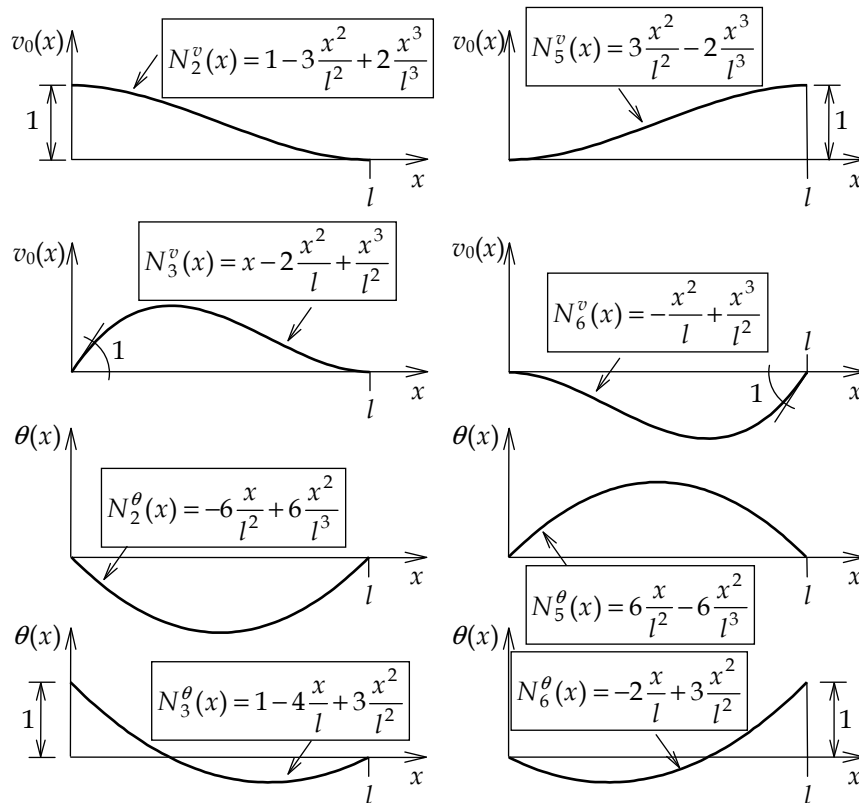


Figura 4.3 – Funções de forma transversais de flexão de uma barra isolada de acordo com a teoria de vigas de Navier.

```

N2v = (2*x^3)/(L^3) - (3*x^2)/(L^2) + 1
N3v = x - (2*x^2)/L + (x^3)/(L^2)
N5v = (3*x^2)/(L^2) - (2*x^3)/(L^3)
N6v = (x^3)/(L^2) - (x^2)/L
N2θ = (6*x^2)/(L^3) - (6*x)/(L^2)
N3θ = (3*x^2)/(L^2) - (4*x)/L + 1
N5θ = (6*x)/(L^2) - (6*x^2)/(L^3)
N6θ = (3*x^2)/(L^2) - (2*x)/L

```

4.3.2. Funções de forma para barra de pórtico plano com articulação na esquerda

Para simplificar o problema, a interpolação de deslocamentos axiais vai ser omitida, pois independe da existência de articulação na barra. Para levar em conta a presença da articulação, além das soluções homogêneas da equação diferencial do problema para o deslocamento transversal e para a rotação, é indicada a solução homogênea para momentos fletores (dividido pela rigidez à flexão EI), pois vai ser considerado que o momento fletor é nulo na seção da articulação na extremidade esquerda da barra:

$$\begin{Bmatrix} v_0(x) \\ \theta(x) \\ M(x)/EI = d\theta(x)/dx \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2/2 & x^3/6 \\ 0 & 1 & x & x^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} v_0(0) \\ M(0)/EI \\ v_0(l) \\ \theta(l) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d'_2 \\ 0 \\ d'_5 \\ d'_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & l & l^2/2 & l^3/6 \\ 0 & 1 & l & l^2/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3/2l & -l/4 & 3/2l & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3/l^3 & -3/2l & -3/l^3 & 3/l^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d'_2 \\ 0 \\ d'_5 \\ d'_6 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} v_0(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2/2 & x^3/6 \\ 0 & 1 & x & x^2/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/2l & 3/2l & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3/l^3 & -3/l^3 & 3/l^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d'_2 \\ d'_5 \\ d'_6 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} v_0(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_2^v(x) & N_5^v(x) & N_6^v(x) \\ N_2^\theta(x) & N_5^\theta(x) & N_6^\theta(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d'_2 \\ d'_5 \\ d'_6 \end{Bmatrix}$$

$$N_2^v(x) = 1 - \frac{3x}{2l} + \frac{x^3}{2l^3}$$

$$N_5^v(x) = \frac{3x}{2l} - \frac{x^3}{2l^3}$$

$$N_6^v(x) = -\frac{x}{2} + \frac{x^3}{2l^2}$$

$$N_2^\theta(x) = -\frac{3}{2l} + \frac{3x^2}{2l^3}$$

$$N_5^\theta(x) = \frac{3}{2l} - \frac{3x^2}{2l^3}$$

$$N_6^\theta(x) = -\frac{1}{2} + \frac{3x^2}{2l^2}$$

```
N2v = (x^3) / (2*L^3) - (3*x) / (2*L) + 1
N3v = 0
N5v = (3*x) / (2*L) - (x^3) / (2*L^3)
N6v = (x^3) / (2*L^2) - x/2
```

$$\begin{aligned}N2\theta &= (3 \cdot x^2) / (2 \cdot L^3) - 3 / (2 \cdot L) \\N3\theta &= 0 \\N5\theta &= 3 / (2 \cdot L) - (3 \cdot x^2) / (2 \cdot L^3) \\N6\theta &= (3 \cdot x^2) / (2 \cdot L^2) - 1 / 2\end{aligned}$$

4.3.3. Funções de forma para barra de pórtico plano com articulação na direita

$$\begin{Bmatrix} v_0(x) \\ \theta(x) \\ M(x)/EI = d\theta(x)/dx \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2/2 & x^3/6 \\ 0 & 1 & x & x^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} v_0(0) \\ \theta(0) \\ v_0(l) \\ M(l)/EI \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d'_2 \\ d'_3 \\ d'_5 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2/2 & l^3/6 \\ 0 & 0 & 1 & l \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3/l^2 & -3/l & 3/l^2 & -1/2 \\ 3/l^3 & 3/l^2 & -3/l^3 & 3/2l \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d'_2 \\ d'_3 \\ d'_5 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} v_0(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2/2 & x^3/6 \\ 0 & 1 & x & x^2/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3/l^2 & -3/l & 3/l^2 \\ 3/l^3 & 3/l^2 & -3/l^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d'_2 \\ d'_3 \\ d'_5 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} v_0(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_2^v(x) & N_3^v(x) & N_5^v(x) \\ N_2^\theta(x) & N_3^\theta(x) & N_5^\theta(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d'_2 \\ d'_3 \\ d'_5 \end{Bmatrix}$$

$$N_2^v(x) = 1 - \frac{3x^2}{2l^2} + \frac{x^3}{2l^3}$$

$$N_3^v(x) = x - \frac{3x^2}{2l} + \frac{x^3}{2l^2}$$

$$N_5^v(x) = \frac{3x^2}{2l^2} - \frac{x^3}{2l^3}$$

$$N_2^\theta(x) = -\frac{3x}{l^2} + \frac{3x^2}{2l^3}$$

$$N_3^\theta(x) = 1 - \frac{3x}{l} + \frac{3x^2}{2l^2}$$

$$N_5^\theta(x) = \frac{3x}{l^2} - \frac{3x^2}{2l^3}$$

$$\begin{aligned}N2v &= (x^3) / (2 \cdot L^3) - (3 \cdot x^2) / (2 \cdot L^2) + 1 \\N3v &= x - (3 \cdot x^2) / (2 \cdot L) + (x^3) / (2 \cdot L^2) \\N5v &= (3 \cdot x^2) / (2 \cdot L^2) - (x^3) / (2 \cdot L^3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N6v &= 0 \\
N2\theta &= (3 \cdot x^2) / (2 \cdot L^3) - (3 \cdot x) / (L^2) \\
N3\theta &= (3 \cdot x^2) / (2 \cdot L^2) - (3 \cdot x) / L + 1 \\
N5\theta &= (3 \cdot x) / (L^2) - (3 \cdot x^2) / (2 \cdot L^3) \\
N6\theta &= 0
\end{aligned}$$

4.4. Funções de forma para comportamento à flexão segundo a teoria de Timoshenko

4.4.1. Funções de forma para barra de pórtico plano sem articulação

$$\Omega = \frac{EI}{GA_c} \cdot \frac{1}{l^2}$$

$$\mu = 1 + 12\Omega$$

$$\begin{Bmatrix} v_0(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2/2 & (x^3/6 - \Omega \cdot l^2 \cdot x) \\ 0 & 1 & x & x^2/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} v_0(0) \\ \theta(0) \\ v_0(l) \\ \theta(l) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d'_2 \\ d'_3 \\ d'_5 \\ d'_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2/2 & (1/6 - \Omega) \cdot l^3 \\ 0 & 1 & l & l^2/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -6/l^2\mu & -(4-12\Omega)/l\mu & 6/l^2\mu & -(2+12\Omega)/l\mu \\ 12/l^3\mu & 6/l^2\mu & -12/l^3\mu & 6/l^2\mu \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d'_2 \\ d'_3 \\ d'_5 \\ d'_6 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} v_0(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2/2 & (x^3/6 - \Omega \cdot l^2 \cdot x) \\ 0 & 1 & x & x^2/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -6/l^2\mu & -(4-12\Omega)/l\mu & 6/l^2\mu & -(2+12\Omega)/l\mu \\ 12/l^3\mu & 6/l^2\mu & -12/l^3\mu & 6/l^2\mu \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d'_2 \\ d'_3 \\ d'_5 \\ d'_6 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} v_0(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_2^v(x) & N_3^v(x) & N_5^v(x) & N_6^v(x) \\ N_2^\theta(x) & N_3^\theta(x) & N_5^\theta(x) & N_6^\theta(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d'_2 \\ d'_3 \\ d'_5 \\ d'_6 \end{Bmatrix}$$

$$N_2^v(x) = 1 - 3 \frac{x^2}{l^2\mu} + 2 \frac{x^3 + 6\Omega \cdot l^2 \cdot x}{l^3}$$

$$N_3^v(x) = x - 2 \frac{x^2 \cdot (1 - 3\Omega)}{l\mu} + \frac{x^3 + 6\Omega \cdot l^2 \cdot x}{l^2\mu}$$

$$N_5^v(x) = 3 \frac{x^2}{l^2 \mu} - 2 \frac{x^3 + 6\Omega \cdot l^2 \cdot x}{l^3 \mu}$$

$$N_6^v(x) = -\frac{x^2 \cdot (1 + 6\Omega)}{l \mu} + \frac{x^3 + 6\Omega \cdot l^2 \cdot x}{l^2 \mu}$$

$$N_2^\theta(x) = -6 \frac{x}{l^2 \mu} + 6 \frac{x^2}{l^3 \mu}$$

$$N_3^\theta(x) = 1 - 4 \frac{x \cdot (1 - 3\Omega)}{l \mu} + 3 \frac{x^2}{l^2 \mu}$$

$$N_5^\theta(x) = 6 \frac{x}{l^2 \mu} - 6 \frac{x^2}{l^3 \mu}$$

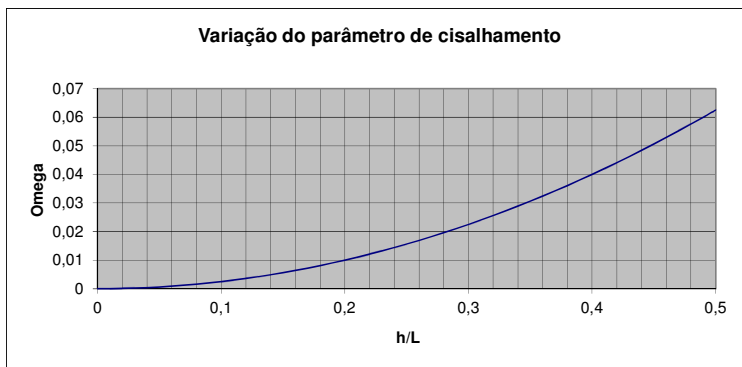
$$N_6^\theta(x) = -2 \frac{x \cdot (1 + 6\Omega)}{l \mu} + 3 \frac{x^2}{l^2 \mu}$$

```

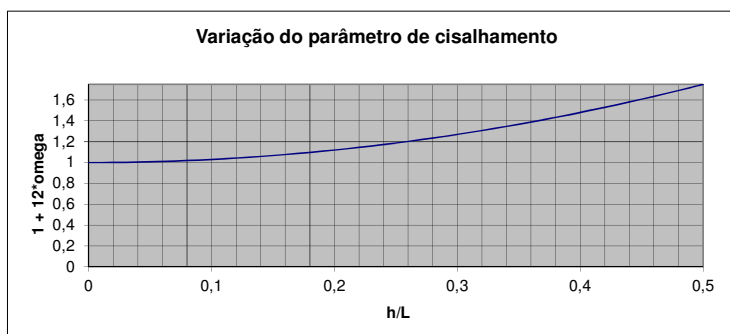
N2v = ((2*x^3)-(12*L^2*Omega*x))/(L^3*mu) - (3*x^2)/(L^2*mu) + 1
N3v = x + ((x^3)-(6*L^2*Omega*x))/(L^2*mu) - (x^2*(12*Omega+4))/(2*L*mu)
N5v = (3*x^2)/(L^2*mu) - ((2*x^3)-(12*L^2*Omega*x))/(L^3*mu)
N6v = ((x^3)-(6*L^2*Omega*x))/(L^2*mu) + (x^2*(12*Omega-2))/(2*L*mu)
N2theta = (6*x^2)/(L^3*mu) - (6*x)/(L^2*mu)
N3theta = (3*x^2)/(L^2*mu) - (x*(12*Omega+4))/(L*mu) + 1
N5theta = (6*x)/(L^2*mu) - (6*x^2)/(L^3*mu)
N6theta = (3*x^2)/(L^2*mu) + (x*(12*Omega-2))/(L*mu)

```

$\Omega = \frac{EI}{GA_c} \cdot \frac{1}{l^2}$ em função da altura normalizada h/l de uma seção transversal retangular:



$\mu = 1 + 12\Omega$ em função da altura normalizada h/l de uma seção transversal retangular:



4.4.2. Funções de forma para barra com articulação na esquerda

$$\Omega = \frac{EI}{GA_c} \cdot \frac{1}{l^2}$$

$$\lambda = 1 + 3\Omega$$

$$\begin{Bmatrix} v_0(x) \\ \theta(x) \\ M(x)/EI = d\theta(x)/dx \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2/2 & (x^3/6 - \Omega \cdot l^2 \cdot x) \\ 0 & 1 & x & x^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} v_0(0) \\ M(0)/EI \\ v_0(l) \\ \theta(l) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d'_2 \\ 0 \\ d'_5 \\ d'_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & l & l^2/2 & (1/6 - \Omega) \cdot l^3 \\ 0 & 1 & l & l^2/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3/2l\lambda & -(l+12l\Omega)/(12l\Omega+4) & 3/2l\lambda & (6\Omega-1)/(6\Omega+2) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3/l^3\lambda & -3/2l\lambda & -3/l^3\lambda & 3/l^2\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d'_2 \\ 0 \\ d'_5 \\ d'_6 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} v_0(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2/2 & (x^3/6 - \Omega \cdot l^2 \cdot x) \\ 0 & 1 & x & x^2/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/2l\lambda & 3/2l\lambda & (6\Omega-1)/(6\Omega+2) \\ 0 & 0 & 0 \\ 3/l^3\lambda & -3/l^3\lambda & 3/l^2\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d'_2 \\ d'_5 \\ d'_6 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} v_0(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_2^v(x) & N_5^v(x) & N_6^v(x) \\ N_2^\theta(x) & N_5^\theta(x) & N_6^\theta(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d'_2 \\ d'_5 \\ d'_6 \end{Bmatrix}$$

```

N2v = ((x^3)/2) - (3*L^2*Omega*x)/(L^3*lambda) - (3*x)/(2*L*lambda) + 1
N3v = 0
N5v = (3*x)/(2*L*lambda) - ((x^3)/2) - (3*L^2*Omega*x)/(L^3*lambda)
N6v = (x*(6*Omega-1))/(6*Omega+2) + ((x^3)/2) - (3*L^2*Omega*x)/(L^2*lambda)
N2theta = (3*x^2)/(2*L^3*lambda) - 3/(2*L*lambda)
N3theta = 0
N5theta = 3/(2*L*lambda) - (3*x^2)/(2*L^3*lambda)
N6theta = (6*Omega-1)/(6*Omega+2) + (3*x^2)/(2*L^2*lambda)

```

4.4.3. Funções de forma para barra com articulação na direita

$$\Omega = \frac{EI}{GA_c} \cdot \frac{1}{l^2}$$

$$\lambda = 1 + 3\Omega$$

$$\begin{Bmatrix} v_0(x) \\ \theta(x) \\ M(x)/EI = d\theta(x)/dx \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2/2 & (x^3/6 - \Omega \cdot l^2 \cdot x) \\ 0 & 1 & x & x^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} v_0(0) \\ \theta(0) \\ v_0(l) \\ M(l)/EI \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d'_2 \\ d'_3 \\ d'_5 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2/2 & (1/6 - \Omega) \cdot l^3 \\ 0 & 0 & 1 & l \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3/l^2\lambda & 3/l\lambda & 3/l^2\lambda & (6\Omega - 1)/(6\Omega + 2) \\ 3/l^3\lambda & 3/l^2\lambda & 3/l^3\lambda & 3/2l\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d'_2 \\ d'_3 \\ d'_5 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} v_0(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2/2 & (x^3/6 - \Omega \cdot l^2 \cdot x) \\ 0 & 1 & x & x^2/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3/l^2\lambda & 3/l\lambda & 3/l^2\lambda \\ 3/l^3\lambda & 3/l^2\lambda & 3/l^3\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d'_2 \\ d'_3 \\ d'_5 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} v_0(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_2^v(x) & N_3^v(x) & N_5^v(x) \\ N_2^\theta(x) & N_3^\theta(x) & N_5^\theta(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d'_2 \\ d'_3 \\ d'_5 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} N2v &= ((x^3)/2) - (3 \cdot L^2 \cdot \Omega \cdot x) / (L^3 \cdot \lambda) - (3 \cdot x^2) / (2 \cdot L^2 \cdot \lambda) + 1 \\ N3v &= x + ((x^3)/2) - (3 \cdot L^2 \cdot \Omega \cdot x) / (L^2 \cdot \lambda) - (3 \cdot x^2) / (2 \cdot L \cdot \lambda) \\ N5v &= (3 \cdot x^2) / (2 \cdot L^2 \cdot \lambda) - ((x^3)/2) - (3 \cdot L^2 \cdot \Omega \cdot x) / (L^3 \cdot \lambda) \\ N6v &= 0 \\ N2\theta &= (3 \cdot x^2) / (2 \cdot L^3 \cdot \lambda) - (3 \cdot x) / (L^2 \cdot \lambda) \\ N3\theta &= (3 \cdot x^2) / (2 \cdot L^2 \cdot \lambda) - (3 \cdot x) / (L \cdot \lambda) + 1 \\ N5\theta &= (3 \cdot x) / (L^2 \cdot \lambda) - (3 \cdot x^2) / (2 \cdot L^3 \cdot \lambda) \\ N6\theta &= 0 \end{aligned}$$

5. MATRIZ DE RIGIDEZ LOCAL

A metodologia de análise pelo método da rigidez direta (formalização matricial do método dos deslocamentos) faz uma *discretização* do comportamento contínuo de uma estrutura que resulta em uma superposição de soluções cinematicamente determinadas, conforme introduzido no Capítulo 1 (Figura 1.3). Essas soluções são configurações deformadas elementares da estrutura que está sendo analisada. Conforme essa metodologia, uma configuração deformada elementar isola um determinado efeito ou parâmetro que representa o comportamento cinemático (deformado) da estrutura. Cada configuração deformada elementar é composta de configurações deformadas elementares das suas barras. As configurações deformadas elementares de barras isoladas são as *soluções fundamentais* para o método da rigidez direta, que formam a base do processo de discretização do método.

Existem dois tipos de soluções fundamentais de barras isoladas. O primeiro é chamado de *coeficientes de rigidez locais*, que correspondem a forças e momentos que devem atuar nas extremidades de uma barra para equilibrá-la quando são impostos, isoladamente, deslocamentos ou rotações unitários nas suas extremidades.

O segundo tipo de solução fundamental são *reações de engastamento perfeito* de uma barra isolada provocadas por solicitações externas, isto é, são as reações de apoio para uma barra com as extremidades engastadas (deslocamentos e rotações restritos nas extremidades) resultantes da aplicação de uma solicitação externa. Os tipos de solicitações externas considerados são forças concentradas, momentos concentrados, forças distribuídas e variação de temperatura.

Este capítulo apresenta os coeficientes de rigidez locais, que são condensados na *matriz de rigidez local*, isto é, de uma barra isolada. As reações de engastamento perfeito de barra isolada são deduzidas no próximo capítulo

Neste capítulo, são deduzidos coeficientes de rigidez locais apenas para barras prismáticas, isto é, para barras com seção transversal que não varia ao longo do seu comprimento. O livro de Martha (2010) mostra como obter coeficientes de rigidez para barras com seção transversal variável (veja Seções 6.7.1, 9.2.3 e 9.2.9 daquele livro).

As propriedades de materiais, de comprimento de barra e geométricas de seção transversal utilizadas pelas soluções fundamentais de rigidez são:

$E \rightarrow$ módulo de elasticidade do material $[F/L^2]$;

$G \rightarrow$ módulo de cisalhamento do material $[F/L^2]$;

$l \rightarrow$ comprimento de uma barra $[L]$.

$A \rightarrow$ área da seção transversal $[L^2]$;

$A_c \rightarrow$ área efetiva da seção transversal para cisalhamento (para pórticos planos $A_c = (A_c)_y$ e para grelhas $A_c = (A_c)_z$) $[L^2]$;

$I \rightarrow$ momento de inércia à flexão da seção transversal (para pórticos planos $I = I_z$ e para grelhas $I = I_y$) $[L^4]$;

$J_t \rightarrow$ momento de inércia à torção da seção transversal $[L^4]$.

5.1. Coeficientes de rigidez locais

Os *coeficientes de rigidez de barra* (ou *locais*) podem ser considerados como as soluções fundamentais de barra isolada mais importantes. No presente contexto, coeficientes de rigidez de barra são forças e momentos que devem atuar nas extremidades da barra isolada, paralelamente aos seus eixos locais, para equilibrá-la quando um deslocamento (ou rotação) unitário é imposto, isoladamente, em uma das suas extremidades. As funções de forma mostradas no capítulo anterior definem elásticas correspondentes a essas soluções fundamentais para uma barra de quadro plano com seção transversal constante. A seguinte notação é utilizada (ver Figura 5.1 para o caso de barra de pórtico plano):

k'_{ij} → *coeficiente de rigidez de barra no sistema local*: força ou momento que deve atuar em uma extremidade de uma barra isolada, na direção da deslocabilidade d'_i , para equilibrá-la quando a deslocabilidade unitária $d'_j = 1$ é imposta, isoladamente, em uma das extremidades.

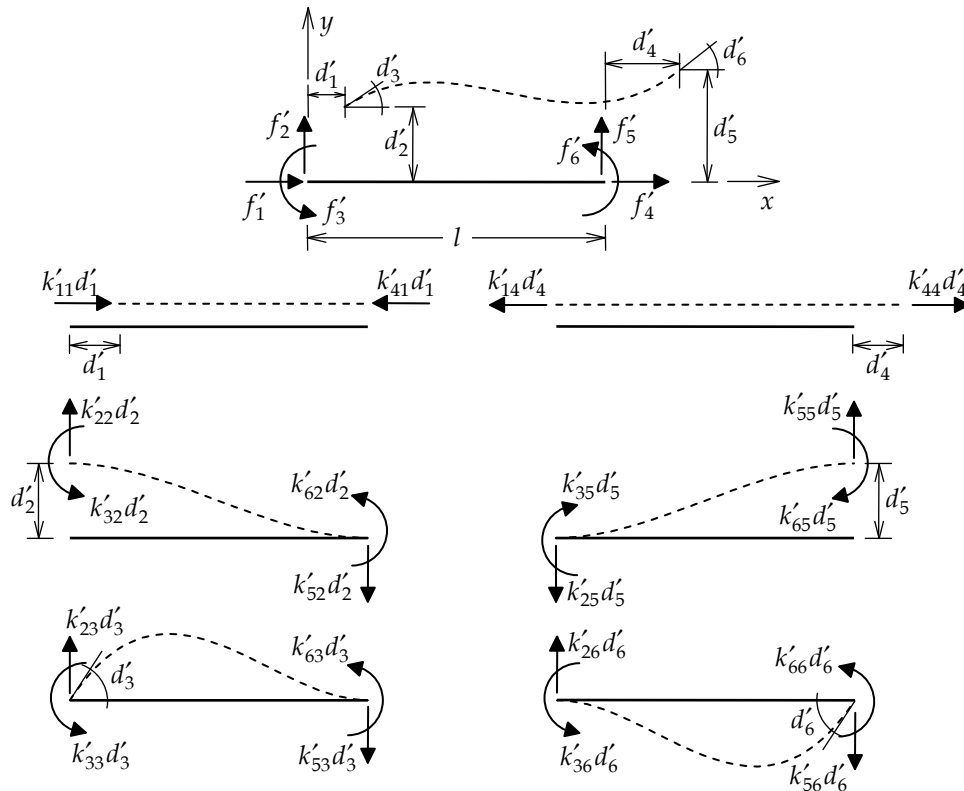


Figura 5.1 – Superposição de configurações deformadas elementares para compor a elástica final de uma barra de pórtico plano isolada.

O significado físico dos coeficientes de rigidez de uma barra de pórtico plano no sistema local é mostrado na Figura 5.1, que indica, no seu topo, a configuração deformada de uma barra isolada e o conjunto de forças e momentos que atuam nas extremidades da barra, paralelamente a seus eixos locais, para equilibrá-la nessa configuração. Tais forças e momentos são definidos como:

f'_i → *força generalizada de barra no sistema local*: força ou momento que atua na direção da deslocabilidade d'_i de uma barra para equilibrá-la quando isolada.

Como indica a Figura 5.1, a configuração deformada de uma barra pode ser decomposta em configurações deformadas elementares que, para barras prismáticas, são baseadas nas funções de forma definidas no Capítulo 4. A partir dessa superposição, as forças generalizadas da barra são obtidas pela soma das forças e momentos que equilibram a barra para cada uma das configurações deformadas elementares.

Observa-se ainda na Figura 5.1 o desacoplamento entre os efeitos axiais e transversais de flexão de uma barra. As deformadas elementares axiais provocadas por d'_1 e d'_4 não mobilizam coeficientes de rigidez de flexão (forças na direção transversal ou momentos). Da mesma forma, as deformadas elementares transversais de flexão provocadas por d'_2 , d'_3 , d'_5 e d'_6 não mobilizam coeficientes de rigidez axiais. Devido a esse desacoplamento, alguns coeficientes de rigidez locais são nulos.

A superposição de configurações deformadas elementares mostrada na Figura 5.1 resulta em uma relação entre cada força nodal generalizada f'_i e as deslocabilidades da barra. Por exemplo, a força total f'_1 é obtida pela soma das forças axiais na extremidade inicial da barra, resultando em $f'_1 = k'_{11}d'_1 + k'_{14}d'_4$. Analogamente, a força total f'_2 é obtida pela soma das forças transversais na extremidade inicial da barra, resultando em $f'_2 = k'_{22}d'_2 + k'_{23}d'_3 + k'_{25}d'_5 + k'_{26}d'_6$.

A superposição das configurações deformadas elementares da Figura 5.1 origina a seguinte relação matricial para todas as forças e momentos atuantes nas extremidades da barra:

$$\begin{Bmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ f'_3 \\ f'_4 \\ f'_5 \\ f'_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k'_{11} & 0 & 0 & k'_{14} & 0 & 0 \\ 0 & k'_{22} & k'_{23} & 0 & k'_{25} & k'_{26} \\ 0 & k'_{32} & k'_{33} & 0 & k'_{35} & k'_{36} \\ k'_{41} & 0 & 0 & k'_{44} & 0 & 0 \\ 0 & k'_{52} & k'_{53} & 0 & k'_{55} & k'_{56} \\ 0 & k'_{62} & k'_{63} & 0 & k'_{65} & k'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d'_1 \\ d'_2 \\ d'_3 \\ d'_4 \\ d'_5 \\ d'_6 \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

A Equação 5.1 também pode ser escrita de forma condensada:

$$\{f'\} = [k'] \cdot \{d'\}. \quad (5.2)$$

Sendo:

$\{f'\}$ → *vetor das forças generalizadas de barra no sistema local*: conjunto de forças e momentos que atuam nas extremidades de uma barra (nas direções dos eixos locais) para equilibrá-la quando isolada;

$[k']$ → *matriz de rigidez de uma barra no sistema local*: matriz dos coeficientes de rigidez locais k'_{ij} nas direções dos eixos locais;

$\{d'\}$ → *vetor das deslocabilidades de barra no sistema local*: conjunto de deslocabilidades de uma barra nas direções dos eixos locais.

Duas observações podem ser feitas quanto à matriz de rigidez da barra isolada. A primeira é que, pelo teorema de Maxwell – versão para deslocamento generalizado unitário imposto (Martha 2010, Equação 7.42) –, a matriz é simétrica, isto é:

$$k'_{ji} = k'_{ij}. \quad (5.3)$$

A segunda observação vem da superposição de configurações deformadas elementares mostrada na Figura 5.1. Observa-se que os coeficientes de rigidez correspondentes a uma dada configuração deformada elementar têm o mesmo índice j . Pode-se dizer então:

- A j -ésima coluna da matriz de rigidez $[k']$ de uma barra no seu sistema local corresponde ao conjunto de forças generalizadas que atuam nas extremidades da barra, paralelamente a seus eixos locais, para equilibrá-la quando se impõe uma configuração deformada tal que $d'_j = 1$ (deslocabilidade d'_j com valor unitário e as demais com valor nulo).

É interessante observar que a matriz de rigidez de barra de grelha no sistema local tem o mesmo aspecto da matriz de rigidez de barra de pórtico plano mostrado na Equação 5.1. As deslocabilidades e forças generalizadas de uma barra de grelha no sistema local estão indicadas na Figura 2.18. Nesse caso, as deslocabilidades d'_1 e d'_4 correspondem a rotações por torção, d'_2 e d'_5 correspondem a rotações por flexão (em torno do eixo local y), e d'_3 e d'_6 correspondem a deslocamentos transversais na direção do eixo local z . As forças generalizadas locais têm interpretação análoga.

5.2. Princípio dos deslocamentos virtuais

Os coeficientes de rigidez locais de uma barra podem ser determinados diretamente por imposição de equilíbrio à barra isolada. De acordo com o livro de Martha (2010) – ver Capítulo 7 –, o princípio dos deslocamentos virtuais (PDV) é uma alternativa geral para imposição de condições de equilíbrio. Portanto, o PDV é utilizado neste capítulo para deduzir as expressões de todos os coeficientes de rigidez locais.

O princípio dos deslocamentos virtuais (PDV) é uma das principais ferramentas para impor condições de equilíbrio a um sistema de forças. Basta que se escolha arbitrariamente uma configuração deformada, denominada virtual, da qual se saiba que satisfaz as condições de compatibilidade. A principal utilidade do PDV é a determinação de forças e momentos necessários para garantir o equilíbrio de uma determinada configuração deformada compatível de uma barra ou de um modelo estrutural. Esse princípio diz que:

- Dado um sistema de forças real $(\{F\}, \{\sigma\})$ – ou $(\{F\}, \{m\})$ – e uma configuração deformada $(\overline{\{D\}}, \overline{\{\epsilon\}})$ – ou $(\overline{\{D\}}, \overline{\{\kappa\}})$ – arbitrária (virtual) compatível, a igualdade $\overline{W_E} = \overline{U}$ estabelece uma condição de equilíbrio para o sistema de forças real.

Sendo que:

$\overline{W}_E = \sum \{\overline{D}\}^T \{F\} \rightarrow$ trabalho das forças e momentos externos reais $\{F\}$, aplicados e reações de apoio, com os correspondentes deslocamentos e rotações externos virtuais $\{\overline{D}\}$;

$\overline{U} = \int \{\overline{\varepsilon}\}^T \{\sigma\} dV \rightarrow$ energia de deformação interna virtual armazenada em uma estrutura, combinando as tensões internas reais $\{\sigma\}$ com as correspondentes deformações internas virtuais $\{\overline{\varepsilon}\}$, definida como uma integral de volume da energia de deformação virtual pontual; ou, alternativamente,

$\overline{U} = \int \{\overline{\kappa}\}^T \{m\} dx \rightarrow$ energia de deformação interna virtual armazenada em uma estrutura, combinando os esforços internos reais $\{m\}$ com os correspondentes deslocamentos relativos internos virtuais $\{\overline{\kappa}\}$, definida como uma integral de linha da energia de deformação virtual do elemento infinitesimal de barra.

As próximas seções deduzem as expressões dos coeficientes de rigidez locais para uma barra. Como só estão sendo consideradas barras prismáticas, os campos de deslocamentos virtuais utilizados são baseados nas funções de forma de barras prismáticas deduzidas no Capítulo 4. Essa dedução será feita inicialmente de forma independente para os coeficientes de rigidez do comportamento axial e para os coeficientes de rigidez do comportamento à flexão de uma barra sem articulação, considerando a teoria de vigas de Navier. Em seguida todos os coeficientes de rigidez de barra isolada serão deduzidos, também com base no PDV, utilizando uma formulação matricial. Isso será feito considerando a barra de pórtico plano com e sem articulação e a barra de grelha sem articulação. As matrizes de rigidez serão deduzidas segundo a teoria de vigas de Navier e a teoria de vigas de Timoshenko.

5.3. Coeficientes de rigidez axial de barra prismática

O PDV é utilizado nesta seção para deduzir as expressões de todos os coeficientes de rigidez axiais de uma barra isolada. Considere que se deseja determinar o valor do coeficiente de rigidez k'_{14} , correspondente à força f'_1 que deve atuar na extremidade inicial da barra quando um deslocamento axial $d'_4 = 1$ é imposto isoladamente na extremidade final. O campo de deslocamentos axiais reais desse problema é $u_0(x) = N_4^u(x) \cdot d'_4$, conforme indicado na Figura 5.2. Para calcular k'_{14} , deve-se escolher um campo de deslocamentos axiais virtuais tal que somente a força f'_1 produza trabalho externo virtual. Esse campo é $\overline{u}_0(x) = N_1^u(x) \cdot \overline{d}'_1$, também mostrado na Figura 5.2.

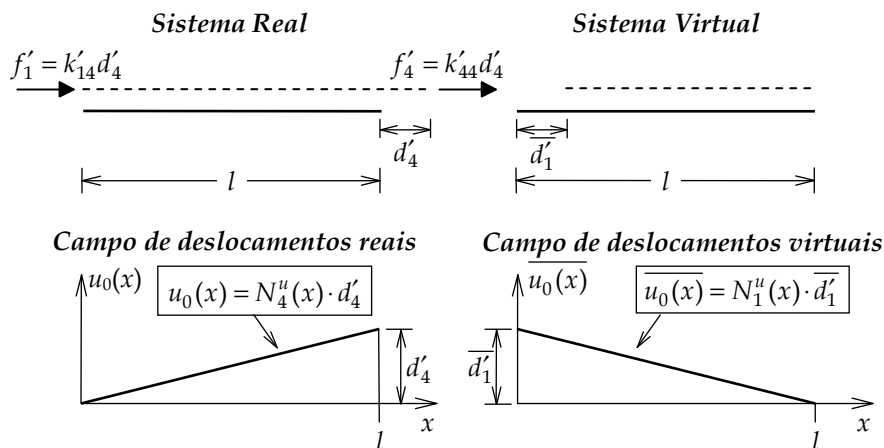


Figura 5.2 – Aplicação do PDV para obtenção de coeficiente de rigidez axial de uma barra isolada.

O PDV prescreve que o trabalho da força externa real que se quer calcular (f'_1) com o correspondente deslocamento externo virtual (\overline{d}'_1) é igual à energia interna de deformação virtual. Essa energia de deformação, considerando somente a parcela axial, pode ser obtida de duas maneiras totalmente equivalentes. A primeira através de uma integração de volume da energia de deformação virtual pontual, a segunda através de uma integração de linha da energia de deformação virtual do elemento infinitesimal de barra:

$$\overline{d}'_1 \cdot f'_1 = \int_{Vol} \overline{\varepsilon}_x^a \cdot \sigma_x^a \cdot dV = \int_0^l \overline{\varepsilon}_x^a \cdot \int_{Area} \sigma_x^a dA \cdot dx = \int_0^l \overline{\varepsilon}_x^a \cdot N \cdot dx,$$

onde:

$\sigma_x^a \rightarrow$ tensão normal na seção transversal da barra devida ao efeito axial [F/L²];

$N \rightarrow$ esforço normal (esforço interno axial) na direção do eixo local x [F];

$\overline{\varepsilon}_x^a = \overline{du}_0 / dx \rightarrow$ deformação normal virtual devida ao efeito axial [].

Considerando a relação entre o esforço normal e a deformação axial $N = EA \cdot \varepsilon_x^a$ (ver Equação 3.67), chega-se a:

$$\overline{d}_1' \cdot f_1' = \int_0^l \overline{\varepsilon}_x^a \cdot EA \cdot \varepsilon_x^a \cdot dx,$$

onde:

$\varepsilon_x^a = du_0 / dx \rightarrow$ deformação normal real devida ao efeito axial [].

Disso resulta:

$$k_{14}' d_4' = \frac{1}{\overline{d}_1'} \left[\int_0^l \frac{d\overline{u}_0}{dx} EA \frac{du_0}{dx} dx \right] = \left[\int_0^l \frac{dN_1^u}{dx} EA \frac{dN_4^u}{dx} dx \right] \cdot d_4'.$$

Nessa expressão, o valor do deslocamento virtual \overline{d}_1' imposto na extremidade inicial é cancelado. Portanto, tem-se:

$$k_{14}' = EA \int_0^l \frac{dN_1^u}{dx} \cdot \frac{dN_4^u}{dx} dx = -\frac{EA}{l}.$$

Observa-se que o PDV determina de forma direta o valor do coeficiente de rigidez k_{14}' sem a necessidade de calcular outro coeficiente. Esse resultado pode ser generalizado para os outros coeficientes: basta escolher os campos de deslocamentos real e virtual apropriados. Tal generalização resulta em:

$$k_{ij}' = EA \int_0^l \frac{dN_i^u}{dx} \cdot \frac{dN_j^u}{dx} dx \quad (i, j = 1, 4) \quad (5.4)$$

Com base na Equação 5.4, pode-se calcular os valores dos coeficientes de rigidez axial para a barra prismática. Os resultados estão mostrados na Figura 5.3.

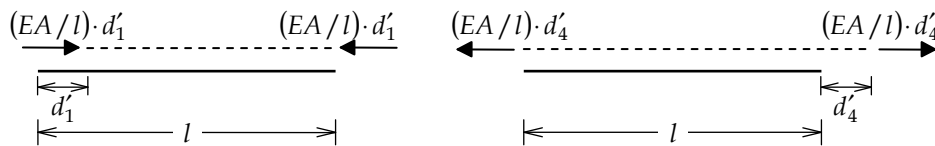


Figura 5.3 – Coeficientes de rigidez axial de uma barra prismática isolada.

5.4. Coeficientes de rigidez à flexão de barra de Navier prismática sem articulação

No caso de barras prismáticas, o PDV pode ser utilizado para determinar os valores dos coeficientes de rigidez à flexão associados às deslocabilidades d_2' , d_3' , d_5' e d_6' . Considere como exemplo a determinação do coeficiente de rigidez k_{23}' , correspondente à força f_2' que deve atuar na extremidade inicial da barra quando uma rotação $d_3' = 1$ é imposta isoladamente na extremidade inicial. O campo de deslocamentos transversais reais é $v_0(x) = N_3^v(x) \cdot d_3'$, conforme indicado na Figura 5.4. Para calcular k_{23}' , deve-se escolher um campo de deslocamentos transversais virtuais tal que somente a força f_2' produza trabalho externo virtual. Esse campo é $\overline{v}_0(x) = N_2^v(x) \cdot \overline{d}_2'$, como mostra a Figura 5.4, superposto ao campo de deslocamentos reais.

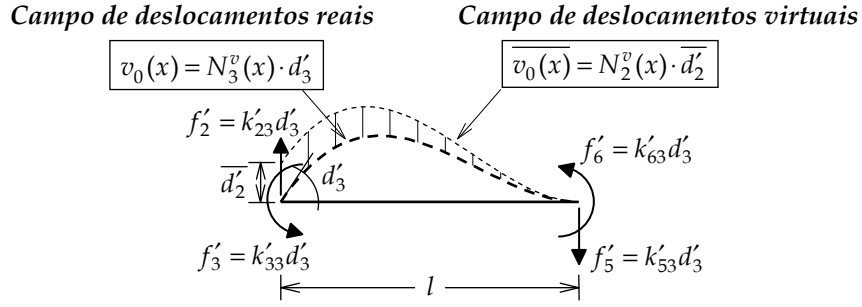


Figura 5.4 – Aplicação do PDV para obtenção de coeficiente de rigidez à flexão de uma barra isolada.

Utilizando o PDV, somente com a parcela da energia de deformação por flexão (teoria de vigas de Navier), chega-se a:

$$\overline{d'_2} \cdot f'_2 = \int_{Vol} \overline{\epsilon_x^f} \cdot \sigma_x^f \cdot dV.$$

Com base nas Equações 3.10, 3.11 e 3.41, pode-se transformar a integral de volume energia de deformação virtual em uma integral de linha em função do gradiente de rotação virtual κ^f e o momento fletor real M :

$$\overline{d'_2} \cdot f'_2 = \int_{Vol} \left(-\frac{d\theta}{dx} \cdot y \right) \cdot \sigma_x^f \cdot dV = \int_0^l \overline{\frac{d\theta}{dx}} \cdot \int_{Área} -y \cdot \sigma_x^f dA \cdot dx = \int_0^l \overline{\kappa^f} \cdot M \cdot dx.$$

Considerando a relação entre o momento fletor e o gradiente de rotação (sistema real) $M = EI \cdot \kappa^f$ (ver Equação 3.67), chega-se a:

$$\overline{d'_2} \cdot f'_2 = \int_0^l \overline{\kappa^f} \cdot EI \cdot \kappa^f \cdot dx.$$

Finalmente, considerando a teoria de vigas de Navier, o gradiente de rotação é dado pela Equação 3.18 em função do deslocamento transversal $v_0(x)$, resultando em:

$$k'_{23} d'_3 = \frac{1}{\overline{d'_2}} \left[\int_0^l \frac{d^2 \overline{v_0}}{dx^2} \cdot EI \cdot \frac{d^2 v_0}{dx^2} dx \right] = \left[\int_0^l \frac{d^2 N_2^v}{dx^2} \cdot EI \cdot \frac{d^2 N_3^v}{dx^2} dx \right] \cdot d'_3.$$

Nessa expressão, o valor do deslocamento virtual $\overline{d'_2}$ é cancelado. Portanto, tem-se:

$$k'_{23} = EI \int_0^l \frac{d^2 N_2^v}{dx^2} \cdot \frac{d^2 N_3^v}{dx^2} dx.$$

A generalização desse resultado para os outros coeficientes resulta em:

$$k'_{ij} = EI \int_0^l \frac{d^2 N_i^v}{dx^2} \cdot \frac{d^2 N_j^v}{dx^2} dx \quad (i, j = 2, 3, 5, 6) \quad (5.5)$$

Os valores dos coeficientes de rigidez à flexão são calculados com base na Equação 5.5. Os resultados são mostrados na Figura 5.5.

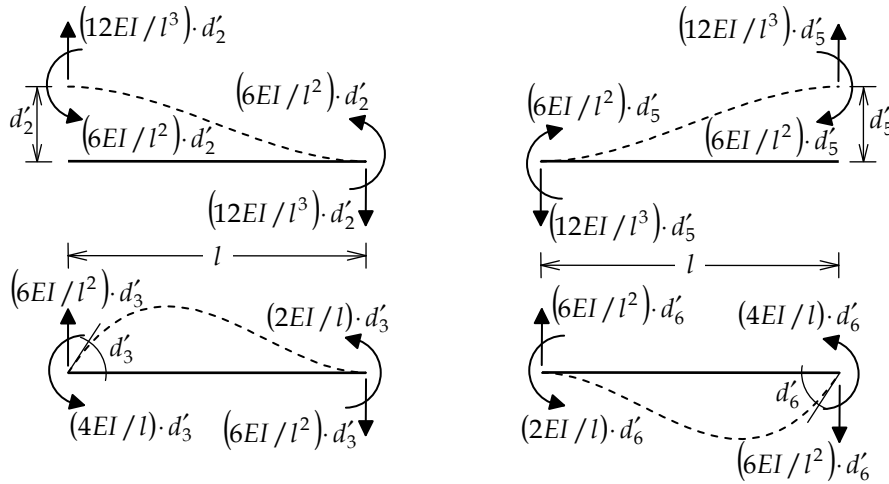


Figura 5.5 – Coeficientes de rigidez à flexão de uma barra prismática de Navier sem articulação.

5.5. Matrizes que relacionam deslocamentos nodais com deformações integrais

Nas duas seções anteriores foram deduzidos coeficientes de rigidez locais de barra considerando de forma independente o comportamento axial e o comportamento à flexão segundo a teoria de vigas de Navier. Na próxima seção essa dedução será generalizada, usando uma formulação matricial, para considerar barras de pórtico plano e barras de grelha, considerando comportamento à flexão segundo a teoria de vigas de Navier e a teoria de vigas de Timoshenko. Para facilitar essa dedução generalizada, é conveniente definir matrizes que relacionam, para uma barra isolada, deslocamentos e rotações dos nós da barra com deformações integrais no interior da barra. Isso é realizado nesta seção.

Inicialmente, consideram-se os operadores diferenciais indicados nas Equações 3.24, 3.25, 3.26 e 3.27, que relacionam as deformações integrais com deslocamentos e rotações ao longo do eixo da barra. Essas equações são genericamente representadas pela Equação 3.28: $\{\kappa\} = [\nabla] \cdot \{u\}$.

Os deslocamentos e rotações ao longo do eixo da barra são interpolados pelos deslocamentos e rotações dos nós nas extremidades da barra utilizando as funções de forma deduzidas no Capítulo 4. Genericamente, essas interporlações são dadas pela Equação 4.5: $\{u\} = [N] \cdot \{d'\}$.

A matrizes que relacionam, para uma barra isolada, deslocamentos e rotações dos nós da barra com deformações integrais no interior da barra são obtidas juntando essas duas equações:

$$\{\kappa\} = [\nabla] \cdot [N] \cdot \{d'\} \rightarrow \{\kappa\} = [B] \cdot \{d'\} \rightarrow [B] = [\nabla] \cdot [N]. \quad (5.6)$$

5.6. Expressão genérica para a matriz de rigidez de barra no sistema de eixos locais

Utilizando o PDV:

$$\overline{\{d'\}}^T \cdot \{f'\} = \int_0^l \overline{\{\kappa\}}^T \cdot \{m\} \cdot dx = \int_0^l \overline{\{\kappa\}}^T \cdot [S] \cdot \{\kappa\} \cdot dx$$

$$\overline{\{d'\}}^T \cdot \{f'\} = \int_0^l \overline{\{d'\}}^T \cdot [B]^T \cdot [S] \cdot [B] \cdot \{d'\} \cdot dx = \overline{\{d'\}}^T \cdot \int_0^l [B]^T \cdot [S] \cdot [B] \cdot dx \cdot \{d'\}$$

Portanto, chega-se a:

$$\{f'\} = \int_0^l [B]^T \cdot [S] \cdot [B] \cdot dx \cdot \{d'\} \rightarrow \{f'\} = [k'] \cdot \{d'\} \rightarrow \{k'\} = \int_0^l [B]^T \cdot [S] \cdot [B] \cdot dx. \quad (5.7)$$

5.7. Matrizes de rigidez de barra prismática de pórtico plano

Esta seção mostra matrizes de rigidez de barra prismática de pórtico plano no sistema de eixos locais para diferentes condições de extremidade. Isso resume os resultados para os coeficientes de rigidez de barra obtidos nas seções anteriores.

Quatro tipos de condições de extremidade são considerados: barra sem articulação (Equação 5.8); barra com articulação na extremidade inicial (Equação 5.9); barra com articulação na extremidade final (Equação 5.10); e barra com articulação nas duas extremidades (Equação 5.11). Os sinais dos coeficientes são positivos quando as forças e momentos correspondentes têm os sentidos positivos das deslocabilidades (indicados na Figura 2.14). De outra forma, os sinais são negativos. Observa-se também a simetria das matrizes de rigidez, o que é compatível com a Equação 5.3.

Os coeficientes de rigidez axial são iguais para os quatro tipos de barra (primeiras e quartas linhas e colunas das matrizes de rigidez). Observa-se o desacoplamento entre o efeito axial e o efeito transversal de flexão pelos coeficientes nulos comuns a todas as matrizes. Nas matrizes, as linhas e colunas correspondentes às rotações das extremidades articuladas também são nulas. No caso da matriz de rigidez para a barra bi-articulada, Equação 5.11, só os coeficientes de rigidez axial são diferentes de zero. Essa equação corresponde à matriz de rigidez de uma barra de treliça plana.

$$[k'] = \begin{bmatrix} +EA/l & 0 & 0 & -EA/l & 0 & 0 \\ 0 & +12EI/l^3 & +6EI/l^2 & 0 & -12EI/l^3 & +6EI/l^2 \\ 0 & +6EI/l^2 & +4EI/l & 0 & -6EI/l^2 & +2EI/l \\ -EA/l & 0 & 0 & +EA/l & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/l^3 & -6EI/l^2 & 0 & +12EI/l^3 & -6EI/l^2 \\ 0 & +6EI/l^2 & +2EI/l & 0 & -6EI/l^2 & +4EI/l \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

$$[k'] = \begin{bmatrix} +EA/l & 0 & 0 & -EA/l & 0 & 0 \\ 0 & +3EI/l^3 & 0 & 0 & -3EI/l^3 & +3EI/l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -EA/l & 0 & 0 & +EA/l & 0 & 0 \\ 0 & -3EI/l^3 & 0 & 0 & +3EI/l^3 & -3EI/l^2 \\ 0 & +3EI/l^2 & 0 & 0 & -3EI/l^2 & +3EI/l \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

$$[k'] = \begin{bmatrix} +EA/l & 0 & 0 & -EA/l & 0 & 0 \\ 0 & +3EI/l^3 & +3EI/l^2 & 0 & -3EI/l^3 & 0 \\ 0 & +3EI/l^2 & +3EI/l & 0 & -3EI/l^2 & 0 \\ -EA/l & 0 & 0 & +EA/l & 0 & 0 \\ 0 & -3EI/l^3 & -3EI/l^2 & 0 & +3EI/l^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

$$[k'] = \begin{bmatrix} +EA/l & 0 & 0 & -EA/l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -EA/l & 0 & 0 & +EA/l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

5.8. Matriz de rigidez local de barra de grelha

$$[k'] = \begin{bmatrix} +GJ_t/l & 0 & 0 & -GJ_t/l & 0 & 0 \\ 0 & +4EI/l & -6EI/l^2 & 0 & +2EI/l & +6EI/l^2 \\ 0 & -6EI/l^2 & +12EI/l^3 & 0 & -6EI/l^2 & -12EI/l^3 \\ -GJ_t/l & 0 & 0 & +GJ_t/l & 0 & 0 \\ 0 & +2EI/l & -6EI/l^2 & 0 & +4EI/l & +6EI/l^2 \\ 0 & +6EI/l^2 & -12EI/l^3 & 0 & +6EI/l^2 & +12EI/l^3 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

5.9. Matriz de rigidez local no sistema global

Conforme comentado na seção anterior, para considerar a influência de uma barra na matriz de rigidez global, é preciso transformar as propriedades mecânicas da barra, que são definidas naturalmente pelos seus coeficientes de rigidez no seu sistema de eixos locais, para o sistema de coordenadas generalizadas globais.

A Seção 5.1 definiu coeficientes de rigidez locais no sistema local da barra. O objetivo desta seção é definir outra versão da matriz de rigidez da barra. Essa versão relaciona forças e momentos que atuam nas extremidades da barra, nas direções das coordenadas generalizadas globais, com deslocamentos e rotações das extremidades nas mesmas direções. Isso é indicado na Figura 2.13 para uma barra com inclinação arbitrária dada pelo ângulo β . Essa versão da matriz é denominada *matriz de rigidez local no sistema global*.

Os coeficientes de rigidez relacionam forças generalizadas com deslocabilidades. No presente contexto, a seguinte notação é utilizada:

$k_{ij} \rightarrow$ *coeficiente de rigidez local (de barra) no sistema global*: força ou momento que deve atuar em uma extremidade de uma barra isolada, na direção da deslocabilidade d_i , para equilibrá-la quando a deslocabilidade unitária $d_j = 1$ é imposta, isoladamente, em uma das suas extremidades.

De maneira inteiramente análoga ao que foi feito na Seção 5.1, pode-se mostrar que a superposição dos efeitos de todas as deslocabilidades com valores arbitrários resulta na seguinte relação matricial:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{Bmatrix}. \quad (5.13)$$

A Equação 5.13 pode ser escrita de forma condensada:

$$\{f\} = [k] \cdot \{d\}, \quad (5.14)$$

sendo:

$\{f\} \rightarrow$ *vetor das forças generalizadas de barra no sistema global*: conjunto de forças e momentos que atuam nas extremidades de uma barra (nas direções dos eixos globais) para equilibrá-la quando isolada;

$[k] \rightarrow$ *matriz de rigidez de uma barra no sistema global*: matriz dos coeficientes de rigidez locais k_{ij} nas direções dos eixos globais;

$\{d\} \rightarrow$ *vetor das deslocabilidades de barra no sistema global*: conjunto de deslocabilidades de uma barra nas direções dos eixos globais.

Assim como para a matriz de rigidez local no sistema local, a matriz no sistema global também é simétrica – ver teorema de Maxwell, versão para deslocamento generalizado unitário imposto (Martha 2010, Equação 7.42) – isto é:

$$k_{ji} = k_{ij} . \quad (5.15)$$

Uma consequência da definição do coeficiente de rigidez local k_{ij} é:

- A j -ésima coluna da matriz de rigidez $[k]$ de uma barra corresponde ao conjunto de forças generalizadas que atuam nas extremidades da barra, paralelamente aos eixos globais, para equilibrá-la quando é imposta uma configuração deformada tal que $d_j = 1$ (deslocabilidade d_j com valor unitário e as demais deslocabilidades com valor nulo).

É possível formular uma transformação da matriz de rigidez no sistema local de uma barra genérica, com qualquer inclinação, para a matriz no sistema global. Para tanto, é preciso relacionar as deslocabilidades locais da barra no sistema local com as deslocabilidades no sistema global. A Figura 2.15 mostra representações das deslocabilidades nos dois sistemas. As representações da deslocabilidades locais no sistema de eixos locais e no sistema de eixos globais estão relacionadas da seguinte maneira: $\{d'\} = [R] \cdot \{d\}$ (Equação 2.1), sendo $[R]$ uma matriz de rotação dada pela Equação 2.2.

De maneira análoga, é possível relacionar forças generalizadas locais no sistema de eixos globais com forças generalizadas locais no sistema de eixos locais: $\{f\} = [R]^T \{f'\}$ (Equação 2.4). Note que existe uma relação de contragradência (vide Seção 2.7) entre esta expressão e $\{d'\} = [R] \cdot \{d\}$.

Para determinar a matriz de rigidez da barra no sistema global, parte-se da Equação 5.2:

$$\{f'\} = [k'] \cdot \{d'\} ,$$

sendo $[k']$ a matriz de rigidez da barra no sistema local. Substituindo $\{d'\}$ por $[R] \cdot \{d\}$ e pré-multiplicando essa equação por $[R]^T$, o resultado é:

$$[R]^T \cdot \{f'\} = [R]^T \cdot [k'] \cdot [R] \cdot \{d\} .$$

Ou seja,

$$\{f\} = [R]^T \cdot [k'] \cdot [R] \cdot \{d\} .$$

Com base na Equação 5.14, chega-se a:

$$[k] = [R]^T \cdot [k'] \cdot [R] . \quad (5.16)$$

É importante salientar que a Equação 5.16 é válida para qualquer tipo de barra, com ou sem articulação, inclusive para barra com seção transversal variável. Essa generalidade é muito importante para a implementação computacional, pois permite que o procedimento para montagem da matriz de rigidez global trate as matrizes de rigidez de todas as barras da mesma maneira, independentemente das suas características.

Em geral, um programa de computador tem uma função que calcula a matriz de rigidez $[k']$ da barra no sistema local. De acordo com a Seção 5.1, a determinação dessa matriz, para o caso de barra prismática, depende do comprimento da barra, do módulo de elasticidade do material, da área e do momento de inércia da seção transversal e da condição de articulação nas extremidades. As Equações 5.8 a 5.11 mostram a matriz para barra prismática sem articulação e com articulações.

A notação matricial utilizada facilita uma generalização dos conceitos para outros tipos de modelos estruturais. Dessa forma, por analogia, pode-se estender a aplicação do método da rigidez direta, por exemplo, para treliças planas e grelhas.

A matriz de rigidez da barra (ou do elemento) de treliça plana no sistema local é semelhante à matriz de rigidez de uma barra de pórtico plano com as duas extremidades articuladas (Equação 5.11). Para obter a matriz de rigidez do elemento de treliça, basta eliminar as linhas e colunas correspondentes aos graus de liberdade de rotação:

$$[k'] = \begin{bmatrix} +EA/l & 0 & -EA/l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -EA/l & 0 & +EA/l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observe, nessa matriz, que os coeficientes de rigidez associados aos graus de liberdade transversais (nas direções das coordenadas locais 2' e 4') são nulos, pois a barra de treliça só tem rigidez na direção axial.

Para obter a matriz de rigidez do elemento de treliça plana no sistema global, basta aplicar a Equação 5.16, considerando uma matriz de transformação por rotação com as linhas e colunas associadas às rotações nodais eliminadas:

$$[R] = \begin{bmatrix} +\cos\beta & +\sin\beta & 0 & 0 \\ -\sin\beta & +\cos\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +\cos\beta & +\sin\beta \\ 0 & 0 & -\sin\beta & +\cos\beta \end{bmatrix}.$$

A matriz de rigidez de uma barra de grelha no sistema local é fornecida pela Equação 5.12. A matriz de rigidez da barra de grelha no sistema global pode ser obtida com base na Equação 5.16. Adotando a estratégia descrita na Figura 2.11 para numeração das coordenadas generalizadas locais nos sistemas global e local, a matriz de rotação é igual à utilizada para uma barra de pórtico plano, indicada na Equação 2.2.

Além disso, conforme comentado ao longo da Seção 1, o método da rigidez direta pode ser generalizado para modelos contínuos, resultando no método dos elementos finitos com formulação em deslocamentos para o problema estrutural. Isso é apenas uma interpretação (bastante simplista) para o método dos elementos finitos, pois este tem uma dedução bem mais geral, baseada em uma formulação variacional e integral. Entretanto, para um estudante ou profissional com formação em engenharia civil ou engenharia mecânica, a interpretação de que o método da rigidez direta é um caso particular do método dos elementos finitos pode facilitar muito o entendimento deste segundo.