



Mayo, 2025

Simulación de canal con ruido y efectos de la codificación

Gavernet Joaquin (03286/9)
joaquin_gavernet@gmail.com

Contents

1	Introducción	1
2	Discusión	2
2.1	Hallando matriz generadora y de control de paridad.	2
2.2	Ganancia asintótica	2
2.3	Curvas para código corrector	3
2.4	Curvas para código detector	4
2.5	Algoritmo de Huffman para compresión	5
2.6	Ejemplos de aplicación - Huffman y transmisión por canal	6
3	Conclusión	7

1 Introducción

En este trabajo práctico se aborda la simulación completa de un sistema de comunicación digital sobre un canal AWGN, con énfasis en las etapas de codificación de fuente y canal. El objetivo principal es analizar y validar el desempeño de la codificación frente a errores y evaluar su impacto en la eficiencia del sistema.

Para la codificación de canal se implementa un código de bloque lineal binario (14,10), utilizando una estructura sistemática y detección dura en el receptor. Se propone la construcción de las matrices generadora y de paridad, y se determinan las capacidades de corrección y detección del código, así como su ganancia asintótica. Luego, mediante simulaciones, se relevan las curvas de tasa de error de palabra y de bit, comparándolas con el desempeño teórico y con el sistema sin codificar, permitiendo así una evaluación cuantitativa de la ganancia de codificación obtenida.

El trabajo también incluye una segunda etapa en la cual el mismo código se utiliza exclusivamente como detector de errores, comparando nuevamente los resultados simulados con los esperados teóricamente.

Por otro lado, se implementa el algoritmo de codificación de Huffman para la compresión de una imagen proporcionada. Se estudia el desempeño del algoritmo utilizando fuente extendida de orden 2 y 3, calculando el largo promedio de codificación y la tasa de compresión en cada caso. Se analiza además la mejora obtenida al considerar dependencias entre símbolos, incluso en fuentes con distribución aparentemente uniforme.

Por último, se abordan dos actividades opcionales: la automatización del algoritmo de Huffman para órdenes arbitrarios y la simulación completa de un sistema que transmite el mensaje comprimido por el canal, evaluando su correcta recuperación. Integrando todos los conceptos vistos.

2 Discusión

2.1 Hallando matriz generadora y de control de paridad.

A la hora de requerir un código con determinadas restricciones, es natural pensar en códigos cíclicos de la familia BCH, considerando que los mismos pueden diseñarse con un algoritmo sistemático para t_c arbitrario. El problema surge al recordar que por construcción, los códigos BCH deben cumplir que $n_{\text{BCH}} = 2^p - 1$, lo cual no es el caso.

Alternativamente, probamos armar un código lineal, hallando una matriz generadora donde la misma verifique que $d_{\min} = 3$. Notamos que una buena propuesta es la siguiente:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad H^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Recordando que por teorema, es posible establecer d_{\min} = “mínima cantidad de filas cuya suma binaria resulta en el vector nulo”, a fuerza bruta se verifica que el código propuesto no cuenta con pares de filas cuya suma se anule, y por ejemplo sumando filas $[1, 0, 0, 1] + [1, 1, 1, 0] + [0, 1, 1, 1] = [0, 0, 0, 0]$. Luego el código propuesto tiene las siguientes características:

$$d_{\min} = 3$$

$$t_c = \left\lfloor \frac{d_{\min} - 1}{2} \right\rfloor = 1$$

$$t_d = d_{\min} - 1 = 2$$

2.2 Ganancia asintótica

Para hallar la ganancia de codificación asintótica, planteamos:

$$G_a = G_c \text{ cuando } \rightarrow P_{\text{eb}} \rightarrow 0 \text{ ó } \frac{E_b}{N_0} \rightarrow \infty$$

$$P_{\text{eb}} \cong \text{cte.} \left(e^{-\frac{k}{n} \frac{2E_b}{N_0}} \right) \rightarrow G_a = \frac{k}{n} \left\lfloor \frac{d_{\text{Hmin}} + 1}{2} \right\rfloor \text{ (decisión dura)}$$

$$G_a = \frac{10}{7} \cong 1,4285$$

2.3 Curvas para código corrector

Luego de efectuar la simulación del canal con ruido para un espectro de $\frac{E_b}{N_0} \in [0, 8]$ dB, se obtuvieron los siguientes resultados:

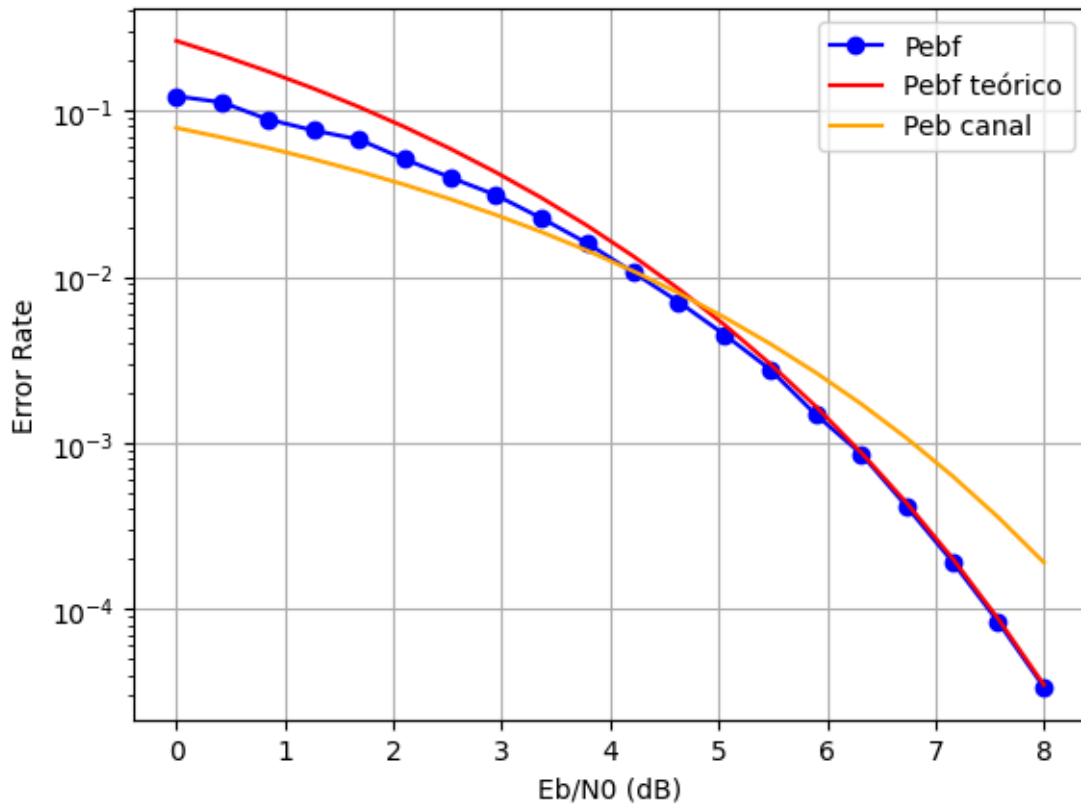


Figure 1: Probabilidades de error de bit con y sin codificación. Código corrector.

Realizando un análisis de las curvas obtenidas por simulación, notamos que cuando $P_{eb} \rightarrow 0$ resulta una ganancia que cumple con el resultado esperado de $G_a \approx 1,4285$, según lo calculado al inicio. Se optó por graficar las curvas de error de bit, ya que de existir ganancia en la corrección, nos interesa referenciar las métricas respecto al error en bit de fuente.

En este caso, para valores de $P_{eb} \approx 9 * 10^{-3}$, la ganancia obtenida es de aproximadamente 1dB, la cual resulta cercana a la referencia previa, recordando la relación entre veces y decibeles:

$$G_c[\text{dB}] = 10 * \log(G_c)$$

$$\text{si } G_c \approx 1,4285 \Rightarrow G_c[\text{dB}] \approx 1,5488 \text{ dB}$$

2.4 Curvas para código detector

Utilizando el código como detector de errores, y solicitando retransmisión, se alcanzaron los siguientes resultados prácticos en el rango de valores $\frac{E_b}{N_0} \in [0, 6]\text{dB}$:

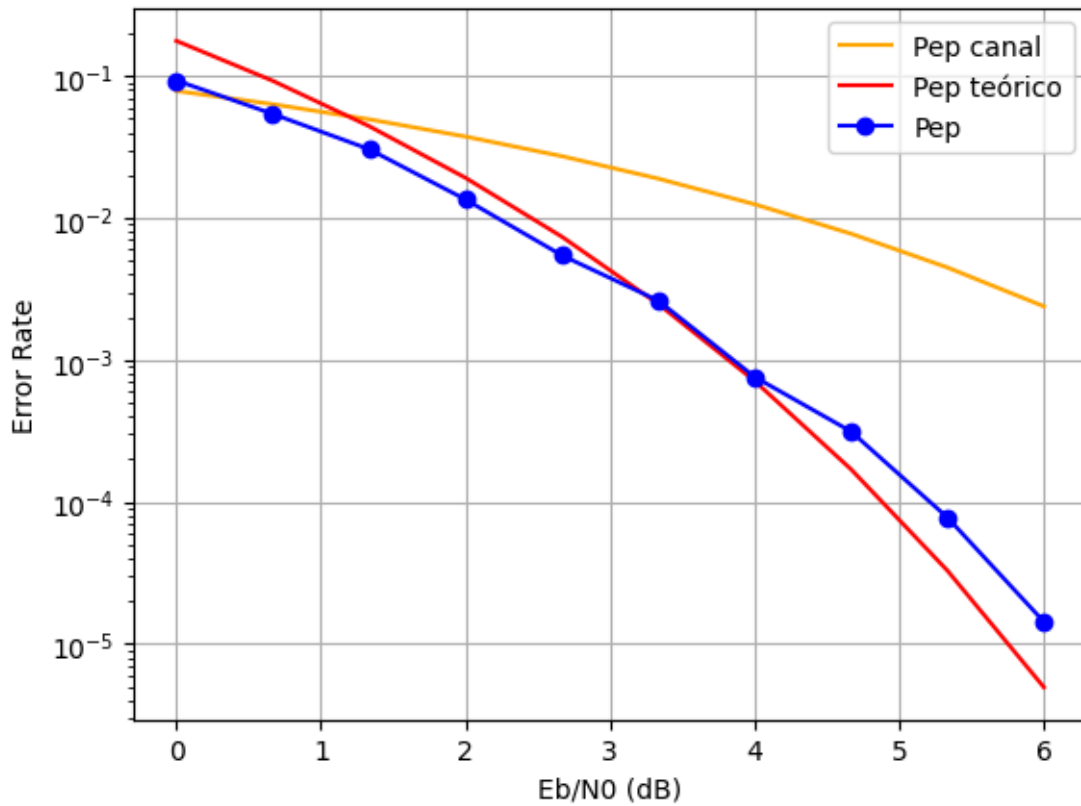


Figure 2: Probabilidades de error de palabra con y sin codificación. Código detector.

Notar que la probabilidad de error de palabra P_{ep} se aproxima a la teórica, mientras que la probabilidad de error de palabra sin codificar P_{ep} canal, queda determinada por la probabilidad de error de bit. En este caso, optamos graficar únicamente las curvas de error de palabra, ya que para códigos detectores no tiene mucho sentido hablar de error de bit. Considerando la retransmisión en caso de detección de error.

2.5 Algoritmo de Huffman para compresión

Para poder realizar codificación con Huffman, debemos conocer a priori las probabilidades de los símbolos de nuestra fuente $S = \{1, 0\}$. Realizando un código modular, podemos dejar todo en función de un parámetro x , el cual nos determina el orden de nuestra fuente extendida según:

x	S^x
1	$\{1, 0\}$
2	$\{11, 10, 00, 01\}$
3	$\{111, 110, 000, 001, 100, 011, 101, 010\}$

En particular, para los casos propuestos se obtiene:

$$x = 2 : \bar{L}_2 \approx 0.7582 \wedge T_c \approx 1.3187$$

$$x = 3 : \bar{L}_3 \approx 0.5327 \wedge T_c \approx 1.8769$$

Como fue visto en la práctica, sabemos que para poder realizar compresión efectiva sobre la fuente propuesta, debemos considerar que, si bien los píxeles en blanco y negro son equiprobables a nivel imagen, al extender la fuente aprovechamos la dependencia entre los mismos, haciendo que el algoritmo de Huffman presente ganancia en compresión.

Luego de automatizar el algoritmo de Huffman para fuente extendida de orden x , obtenemos las siguientes curvas:

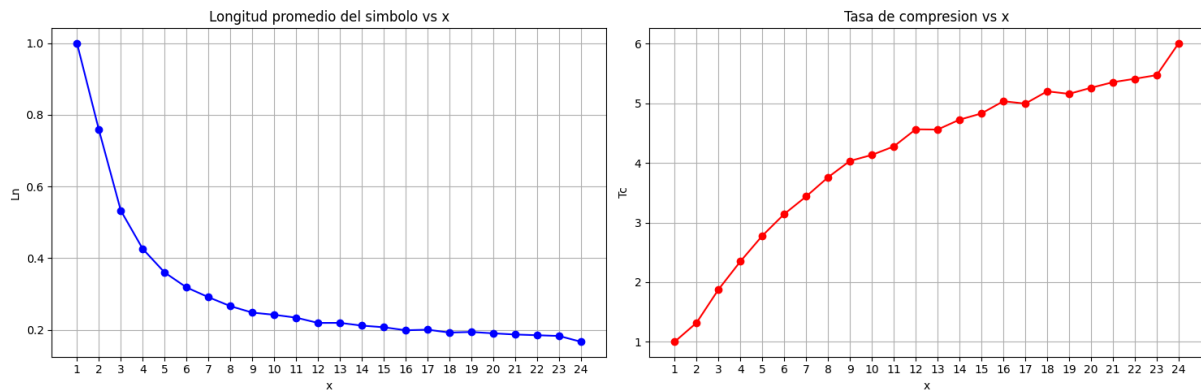


Figure 3: Análisis para fuente extendida de orden x .

De las mismas podemos observar, que al extender la fuente mejora la compresión, alcanzando un límite fundamental según teorema:

Para cualquier código instantáneo se cumple: $\bar{L} \geq H(s) \wedge n \geq \frac{H(s)}{\bar{L}}$

2.6 Ejemplos de aplicación - Huffman y transmisión por canal

A continuación, se presentan ejemplos de aplicación de código de Huffman para transmitir imágenes.

Primeramente se codifica con el código (14, 10) diseñado, luego se utiliza el canal brindado con diferentes relaciones de energía-ruido, implementando un esquema con solicitud de retransmisión frente a detección de error y reconstrucción de la imagen una vez finalizada la comunicación:



Figure 4: Original



Figure 5: $\frac{E_b}{N_0} = 3$



Figure 6: $\frac{E_b}{N_0} = 2$



Figure 7: $\frac{E_b}{N_0} = 1$

Queda claro el patrón de error. Observando que en canales con baja relación $\frac{E_b}{N_0}$, al recibirse un patrón de error indetectable, el mismo se propaga para el resto de los bits a procesar, lo cual puede no ser un comportamiento deseado para ciertas aplicaciones. Observando en detalle la figura 5, por ejemplo, podemos notar como la primer mitad de la imagen fue procesada correctamente, pero en determinado pixel recibimos un error indetectable, el cual se propaga desfasando el resto de la imagen.

En particular, notamos que Huffman presenta buenos resultados de compresión para patrones con dependencia entre bits de fuente.

3 Conclusión

Este trabajo permitió integrar de forma completa los conceptos fundamentales de la teoría de la información y su aplicación práctica en sistemas de comunicación digital. Mediante la construcción y simulación de un canal ruidoso con codificación de fuente y canal, se logró observar de forma cuantitativa y cualitativa el impacto que tienen las distintas estrategias de codificación sobre el desempeño del sistema.

En la primera etapa, se diseñó e implementó un código de bloque lineal (14, 10) con capacidad de corrección de errores $t_c = 1$, validando su funcionamiento tanto analíticamente —vía matrices generadora y de paridad— como experimentalmente a través de simulaciones sobre canal AWGN con decodificación dura. Las curvas obtenidas confirman la ganancia de codificación teórica calculada, mostrando una reducción clara de la tasa de error de bit respecto al sistema sin codificar.

En la segunda etapa, se utilizó el mismo código como detector de errores, evidenciando cómo la retransmisión selectiva permite mejorar la confiabilidad del sistema a costa de latencia, y cómo la métrica de error debe adaptarse a ese contexto (error de palabra en lugar de error de bit).

A nivel de codificación de fuente, se implementó y automatizó el algoritmo de Huffman para fuentes extendidas, mostrando que al considerar dependencias estadísticas entre símbolos (fuente orden 2 y 3), se logra una mejora significativa en la tasa de compresión, acercándose a los límites teóricos dados por la entropía de la fuente.

Finalmente, se integraron todos los módulos en una simulación completa extremo a extremo, desde la compresión hasta la transmisión y reconstrucción del mensaje, verificando el comportamiento del sistema frente a diferentes relaciones $\frac{E_b}{N_0}$. Esto permitió observar fenómenos reales como la propagación de errores indetectables, resaltando la importancia crítica de un diseño robusto y de entender los compromisos entre redundancia, eficiencia y confiabilidad.