

ELECTROESTÁTICA EN EL VACÍO

cargas elementales $\begin{cases} \text{protones } \oplus \\ \text{electrones } \ominus \end{cases} \xrightarrow{\text{BALANCE}} \text{Neutro}$

TRIBOELECTRICIDAD \rightarrow sucede al frotar un objeto con otro, se transfieren e^- y quedan cargados \oplus y \ominus respectivamente.

PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE LA CARGA: La carga eléctrica no puede ser ni creada ni destruida, sólo puede ser transportada. \rightarrow un objeto cargado es aquel que intercambia carga con otro.

LEY DE COULOMB

$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 d^2}$
 fuerza que una carga ejerce sobre otra
 \rightarrow atracción $\ominus \oplus$ repulsión $\oplus \oplus$ o $\ominus \ominus$
 \rightarrow distancia que separa a las cargas
 \rightarrow permitividad del vacío $8,85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$

\rightarrow Ley totalmente nueva encontrada experimentalmente, no puede ser reducida a conocimiento previo. Se considera ley básica de la naturaleza (como la ley de atra. gravi. de Newton).

$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \frac{q_j q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|^3}$
 \rightarrow ejercida sobre la carga j causada por N cargas
 \rightarrow $\frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|}$ \rightarrow vector que indica la direcc. de la fuerza
 $\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|^2 = d^2$

UNIDAD DE CARGA (SI) \rightarrow Coulomb (C), nanocoulomb (nC) ($C \times 10^{-9}$)

MÓDULO DE CARGA DEL e^- y e^+ $\rightarrow 1,6 \times 10^{-19} C$ **Calculadora:** shift + const (7) = electrom. (2) = e. (3) (en la calculadora positivo) (carga elemental)

Las fuerzas eléctricas son mucho más intensas que las gravitatorias, aún con un desbalance muy pequeño respecto de la neutralidad.

PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN: en el caso de tener varias cargas presentes, la fuerza total actuante sobre una carga puede calcularse como suma vectorial de fuerzas.

DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE CARGA

Si bien las cargas deben ser una cantidad discreta de cargas elementales (e^+ o e^-), se puede aproximar a considerarla como una magnitud continua, ya que en ejemplos de vida real el número de cargas elementales involucradas es muy grande.

DENSIDAD DE CARGA

- LINEAL** $dq = \lambda dl$
- SUPERFICIAL** $dq = \sigma dS$ \oplus
- VOLUMÉTRICA** $dq = \rho dV$

CANTIDAD TOTAL DE CARGA DISTRIBUIDA (si es finita aún)

$$Q = \int_C \lambda dl \quad \text{o} \quad \int_S \sigma dS \quad \text{o} \quad \int_V \rho dV$$

SECUENCIA PARA CALCULAR LA FUERZA APLICADA SOBRE LA CARGA q_0

1. \vec{r} = punto posición de q_0
2. \vec{r}' = punto genérico de la región cargada en función del parámetro(s) que describe a la región
3. Expresar el diferencial de carga como dice arriba \oplus según corresponda y el dl, dS o dV en función del parámetro(s)
4. Calcular $(\vec{r} - \vec{r}')$, reemplazar e integrar en términos del parámetro(s)

$$\vec{F}_0(\vec{r}) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{Región cargada}} \frac{dq (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

CAMPO ELÉCTRICO

una distribución de carga genera en su entorno un campo eléctrico. Una magnitud vectorial que apunta en dirección en la que actuaría la fuerza eléctrica si pusiéramos una carga q_0 carga de prueba \rightarrow arbitrariamente positiva \rightarrow lo suficientemente pequeña para no alterar la distribución espacial de las otras cargas.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q_0} \quad \text{UNIDADES} = \frac{N}{C}$$

- El campo es tangente a las líneas de campo
- La densidad de líneas dibujadas es proporcional a la intensidad del campo
- Las líneas nacen en cargas \oplus (fuente) y mueren en \ominus (sumideros)
- Las líneas no se deben cruzar jamás (significaría que para el punto que se cruzan la fuerza actuaría no está unívocamente definida)

Figura 13. Líneas de campo para dos cargas positivas iguales

LEY DE GAUSS Flujo del campo eléctrico

flujo:

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \rightarrow \text{producto escalar}$$

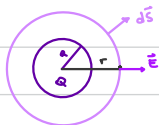
Si S es cerrada, podemos considerar a $d\vec{S}$ con sentido hacia afuera y podemos usar $\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div}(\vec{E}) dV$

Ley de Gauss de la Electroestática $\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} = \frac{\int_V \rho dV}{\epsilon_0}$ VÁLIDA SIEMPRE

↑ carga encerrada por S
↑ superficie gaussiana, arbitraria

Teorema del flujo $\rightarrow \text{div}(\vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

DISTRIBUCIÓN DE CARGA ESFÉRICA DE RADIO a Y DENSIDAD UNIFORME ρ_0 (+)



$$Q = \rho_0 \frac{4}{3} \pi a^3 \quad (\text{densidad por volumen})$$

\vec{E} y $d\vec{S}$ tienen dirección radial

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S (E \cos 0) \cdot (dS \hat{r}) = \oint_S E dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

El módulo del campo no varía sobre la región de integración (superficie S)

$$\oint_S E dS = E \oint_S dS = E \cdot S = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad S = 4\pi r^2$$

$$E(r) = \frac{Q}{\epsilon_0 4\pi r^2}$$

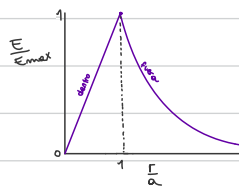
Para $r < a$, la superficie S_2 no encierra toda la carga, sino que encierra una esfera justamente de radio r

Generalizada por S_2

$$\Phi = E S_2 = \frac{\rho_0 \cdot \frac{4}{3} \pi r^3}{\epsilon_0}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho_0 \cdot \frac{4}{3} \pi r^3}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} \quad ; \quad \vec{E}(r) = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} \hat{r} \quad \text{campo dentro de la esfera cargada}$$



DISTRIBUCIÓN LINEAL INFINITA, UNIFORME, POSITIVA, DENSIDAD λ_0



✓ \vec{E} es perpendicular al alambre (por superposición de las repulsiones de cada punto, al ser simétrico)

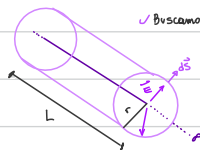
✓ \vec{E} tiene dirección radial con el alambre como eje $\vec{E} = E(r) \hat{r}$

✓ Buscamos una superficie donde el módulo del campo permanece constante: un cilindro concéntrico con el alambre

$$\Phi_{\text{total}} = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{lat}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{f1}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{f2}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{lat}} E dS = E \int_{\text{lat}} dS = E \cdot S = E \cdot 2\pi r L = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda_0 L}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda_0}{\epsilon_0 2\pi r} \quad \rightarrow \quad \vec{E}(r) = \frac{\lambda_0}{2\pi \epsilon_0 r} \hat{r}$$

Las tapas se consideran para que sea una sup. cerrada, pero el flujo a través de ellas es cero ya que las líneas de campo son paralelas a las tapas.



DISTRIBUCIÓN CILINDRICA DE RADIO A UNIFORMEMENTE CARGADA EN VOLUMEN CON DENSIDAD ρ_0 (positiva).

(largo infinito)

✓ nuevamente afirmamos que tiene dirección radial con el eje del cilindro como eje. Podemos usar como superficie de integración al mismo cilindro.

✓ los regiones de interés

- exterior ($r > a$)
- interior ($r < a$)

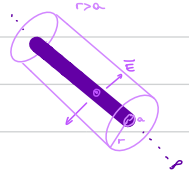
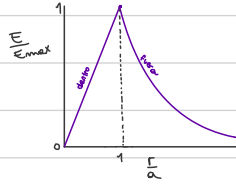
• $r > a$: $\Phi_{\text{lat}} = \int_{\text{lat}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = ES = E 2\pi r L = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} = \frac{\rho_0 \pi a^2 L}{\epsilon_0}$

$E(r) = \frac{\rho_0 a^2}{2\epsilon_0 r}$; $\vec{E}(r) = \frac{\rho_0 a^2}{2\epsilon_0 r} \hat{r}$

• $r < a$: $\Phi_{\text{lat}} = \int_{\text{lat}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = ES = E 2\pi r L = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} = \frac{\rho_0 \pi r^2 L}{\epsilon_0}$

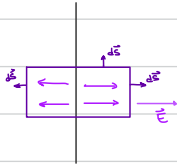
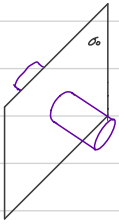
$\vec{E}(r) = \frac{\rho_0 r}{2\epsilon_0} \hat{r}$

Si $\rho_0 = \rho_0(r)$ también podemos resolver



DISTRIBUCIÓN PLANA INFINITA E UNIFORMEMENTE CARGADA CON DENSIDAD SUPERFICIAL σ_0 (positiva)

✓ campo generado por un plano tiene dirección normal al plano



✓ El flujo por la cara lateral es nulo ($d\vec{S} \perp \vec{E}$)

✓ $\Phi_{\text{TOTAL}} = \Phi_{\text{TAPA 1}} + \Phi_{\text{TAPA 2}} = 2\Phi_{\text{TAPA}}$

límite de integración \rightarrow superficie (tapa) $\rightarrow E$ no varía en esa sup. \rightarrow constante

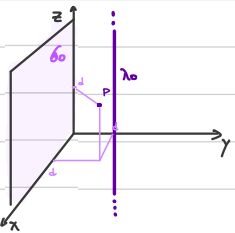
$\Phi = 2 \int_{\text{TAPA}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2 \int_{\text{TAPA}} E \cdot dS \hat{i} = 2ES = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_0 S}{\epsilon_0}$

$E = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}$; $\vec{E} = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \hat{n}$

observaciones

El módulo no varía porque nos alejamos porque el plano es oo

CAMPOS GENERADOS POR SUPERPOSICIÓN DE LOS CUATRO CASOS



- ✓ plano $\sigma_0 \rightarrow \sigma_0 \rightarrow$ coincide con plano xz
- ✓ Alambre $\sigma_0 \rightarrow \lambda_0 \rightarrow$ paralelo al eje z, corta al plano xy en (0,d)
- ¿campo eléctrico en (d,d,d)?

$\vec{E}_{\text{TOTAL}}(P) = \vec{E}_{\text{plano}}(P) + \vec{E}_{\text{alambre}}(P)$

$\vec{E}_{\text{TOTAL}}(P) = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \hat{j} + \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0 d} \hat{i}$

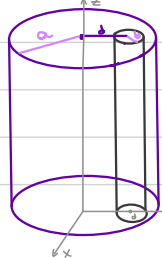
$\vec{E}_{\text{alambre}}(r) = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r}$

$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$

\vec{r} es el vector que nace en el alambre y termina en el punto. ($\vec{r} \perp$ alambre)

$\vec{r} = (d\hat{i} + d\hat{j} + d\hat{k}) - (0\hat{i} + d\hat{j} + d\hat{k}) = d\hat{i}$
 $r = d$

CILINDRO INFINITO PERFORADO



✓ cilindro macizo de radio a y densidad ρ_0

✓ perforación cilíndrica con eje corrido una distancia d del centro y radio b.

✓ Podemos pasar al sistema como cilindro (radio a) macizo y cilindro (radio b) de densidad $-\rho_0$, la suma da una zona sin carga

EVALUAMOS EL CAMPO EN EL PUNTO (0,d,0): $\vec{E}(P) = \frac{\rho_0 d}{2\epsilon_0} \hat{j}$

debido al grande

campo

debido al chico

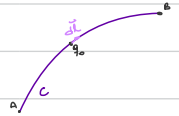
como el radio del cilindro chico es cero en (0,d,0), el campo generado por este es nulo

TRABAJO DE LAS FUERZAS ELÉCTRICAS

Transportamos desde un punto A a un punto B la carga de prueba por un camino C \rightarrow Hay trabajo involucrado
 \rightarrow lo hacemos cuasistáticamente (velocidad virtualmente nula) \rightarrow La fuerza que aplica nuestra mano debe ser de igual módulo y opuesta a la que ejerce el campo E.

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}_{mano} \cdot d\vec{l} = \int_A^B -\vec{F}_{electrica} \cdot d\vec{l} = \int_A^B -q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$d\vec{l}$ es un elemento de camino tangente en todo punto a C



♥ El sentido del recorrido $d\vec{l}$ o $d\vec{r}$ está contemplado en los límites de la integral, no agregarle signo.

♥ El trabajo es un caso particular de la circulación de un vector a lo largo de una curva.


♥ El rotor de un campo conservativo es cero, por teorema de Stokes el trabajo en un camino cerrado es cero.

Teorema de Stokes por el

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$$

♥ El campo eléctrico generado por una distribución estática de cargas (electroestático) es conservativo.

✓ el trabajo realizado en el pedazo de circunferencia es cero ya que $d\vec{l} \perp \vec{E}$, solo nos queda el segundo tramo donde el diferencial es radial



$$W_{q_i, r_i} = - \int_{r_i}^{r_f} q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{r_i}^{r_f} q_0 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr \hat{r} = \frac{q_0 Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f} \right) \quad (*)$$

DIFERENCIAL DE POTENCIAL V Trabajo por unidad de carga. $V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i) = \frac{W_{if}}{q_0} = - \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E} \cdot d\vec{l}$ Volt (V)
 $V = \frac{J}{C}$
 como el campo es conservativo, la circulación del mismo entre dos puntos es independiente del camino y puede ser evaluada como diferencia de una función escalar (potencial matemático)

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -(E_x \hat{i} + E_y \hat{j} + E_z \hat{k}) \cdot (dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}) = -(E_x dx + E_y dy + E_z dz) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \right)$$

$$\vec{E} = - \left(\frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k} \right) = -\text{grad}(V) = -\vec{\nabla} V$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

Ecuación de Poisson

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \nabla \cdot [-\nabla(V)] = -\nabla^2(V) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

∇^2 Laplaciano

REFERENCIAS PARA EL POTENCIAL

• Imaginemos la posición inicial \vec{r}_i de q_0 muy alejada (∞) y le asignamos un valor nulo: $V(\infty) = 0$ ARBITRARIO

Luego obtenemos una función potencial definida en cualquier punto $\lim_{r_i \rightarrow \infty} [V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i)] = V(\vec{r}_f) - 0 = V(\vec{r}_f) = \lim_{r_i \rightarrow \infty} \left[\frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right) \right] = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_f}$

viene de dividir () por q_0*

Función cómoda pero NO OLVIDAR que es una elección arbitraria del lugar de referencia y su valor en dicho lugar.

EXPRESIÓN CORRECTA: El potencial del punto r_f es "X" tomando como referencia al infinito y asignándole a este un valor nulo.

• Cuando usamos distribuciones de cargas infinitas, notamos que no podemos usar al infinito como punto de referencia.

EJEMPLO: Plano infinito en xy

$$V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i) = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{z_i}^{z_f} \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \hat{z} \cdot dz \hat{z} = -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} (z_f - z_i)$$

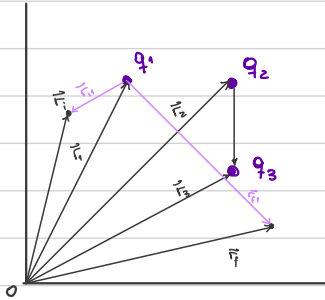
\rightarrow no se puede dividir

EJEMPLO: cable infinito

$$V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i) = - \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{r_i}^{r_f} \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0 r} \cdot dr \hat{r} = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{r_f}{r_i} \right)$$

$\ln(0)$ } no los podemos hacer
 $\ln(\infty)$ }

DIFERENCIA DE POTENCIAL CON VARIAS CARGAS



■ usamos el principio de superposición

$$V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i) = - \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{r_{i1}}^{r_{f1}} \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_{i1}} - \frac{1}{r_{f1}} \right) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\|\vec{r}_i - \vec{r}_1\|} - \frac{1}{\|\vec{r}_f - \vec{r}_1\|} \right)$$

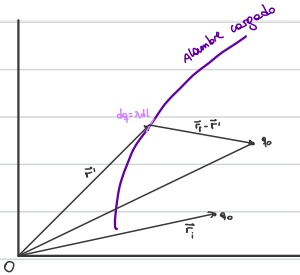
Repetimos para q_2 y q_3 y sumamos

$$[V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i)]_{q_1, q_2, q_3} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\|\vec{r}_i - \vec{r}_1\|} - \frac{1}{\|\vec{r}_f - \vec{r}_1\|} \right) + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\|\vec{r}_i - \vec{r}_2\|} - \frac{1}{\|\vec{r}_f - \vec{r}_2\|} \right) + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\|\vec{r}_i - \vec{r}_3\|} - \frac{1}{\|\vec{r}_f - \vec{r}_3\|} \right)$$

Tomamos como referencia $V(\infty) = 0$

$$V(\vec{r}_f) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{\|\vec{r}_f - \vec{r}_1\|} + \frac{q_2}{\|\vec{r}_f - \vec{r}_2\|} + \frac{q_3}{\|\vec{r}_f - \vec{r}_3\|} \right)$$

DIFERENCIA DE POTENCIAL DEDIDO A UN ALAMBRE CARGADO



$$d[V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i)] = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\|\vec{r}_f - \vec{r}\|} - \frac{1}{\|\vec{r}_i - \vec{r}\|} \right) \quad \text{Principio de superposición} \rightarrow \text{integral sobre todas las } dq$$

\downarrow
 medida geométrica de dq

$$V(\vec{r}_f) -$$