

1 CRITERIOS DE CONVERGENCIA EN MÉTODOS ITERATIVOS

1.1 Para funciones escalares no lineales

El método de PUNTO FIJO busca un valor $x_S \in R$ tal que se cumple la siguiente ecuación no lineal

$$x_S = g(x_S)$$

La regla de recurrencia que genera la sucesión de valores aproximados es

$$x_{k+1} = g(x_k)$$

Al restar ambas igualdades, miembro a miembro se tiene

$$x_{k+1} - x_S = g(x_k) - g(x_S)$$

En el primer miembro de la igualdad, se tiene “el error en la iteración (k+1)”, que se lo identifica como $\varepsilon_{k+1} = (x_{k+1} - x_S)$, entonces

$$\varepsilon_{k+1} = g(x_k) - g(x_S)$$

En el segundo miembro de la igualdad, se tiene una diferencia de ordenadas, y usando el Teorema de Valor medio, es posible escribir que el incremento de ordenadas es igual al incremento de abscisas por la pendiente evaluada en una abscisa ξ interior al intervalo

$$g(x_k) - g(x_S) = \left. \frac{dg(x)}{dx} \right|_{\xi} (x_k - x_S)$$

Pero $\varepsilon_k = (x_k - x_S)$, es el “el error en la iteración (k)”, por lo que

$$\varepsilon_{k+1} = \left. \frac{dg(x)}{dx} \right|_{\xi} \varepsilon_k$$

Para que el error disminuya entre una iteración y otra, se debe cumplir que

$$\left| \left. \frac{dg(x)}{dx} \right|_{\xi} \right| < 1$$

La sucesión de valores aproximados x_k , generados por la regla de recurrencia del método de punto fijo, convergerá a la solución exacta x_S de la ecuación no lineal, cuando el valor absoluto de la derivada de la función no lineal sea menor a 1, en el entorno al punto solución.

1.2 Para funciones vectoriales. Método de Jacobi

Buscar la solución de un sistema de ecuaciones lineales

$$\mathbf{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

Se lo puede interpretar como buscar el cero de la función vectorial

$$\underline{f}(\underline{x}) = \mathbf{A} \cdot \underline{x} - \underline{b} = \underline{0}$$

Al identificar que

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{B}$$

siendo \mathbf{D} una matriz diagonal, cuyos elementos no nulos son los elementos de la diagonal principal de la matriz \mathbf{A} ; y la matriz \mathbf{B} , es la matriz complementaria obtenida como $\mathbf{B} = \mathbf{A} - \mathbf{D}$.

En el método de JACOBI, se obtiene que el sistema de ecuaciones lineales original que se pretende resolver, se puede expresar en forma equivalente como una igualdad de tipo “punto fijo” en la forma

$$\underline{x} = \mathbf{T} \cdot \underline{x} + \underline{c}$$

siendo la matriz $\mathbf{T} = -\mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{B}$, y el vector $\underline{c} = -\mathbf{D}^{-1} \cdot \underline{b}$

El vector solución \underline{x}_S satisface la igualdad de tipo “punto fijo”

$$\underline{x}_S = \mathbf{T} \cdot \underline{x}_S + \underline{c}$$

A su vez, la dicha igualdad es la regla de recurrencia del método iterativo de JACOBI que genera la sucesión de soluciones aproximadas, que se calculan en la forma

$$\underline{x}_{k+1} = \mathbf{T} \cdot \underline{x}_k + \underline{c}$$

Restando miembro a miembro las dos últimas igualdades, se tiene que

$$(\underline{x}_{k+1} - \underline{x}_S) = \mathbf{T} \cdot (\underline{x}_k - \underline{x}_S)$$

Definiendo en la iteración k-ésima el vector error $\underline{\varepsilon}_k$, como la diferencia $(\underline{x}_k - \underline{x}_S)$ entonces,

$$\underline{\varepsilon}_{k+1} = \mathbf{T} \cdot \underline{\varepsilon}_k$$

Para que el vector error entre una iteración y la siguiente sea cada vez más pequeño, la matriz \mathbf{T} debe cumplir alguna condición especial, y no puede ser una matriz arbitraria.

Al menos hay dos formas para analizar que propiedad debe cumplir la matriz \mathbf{T} para que el método iterativo de JACOBI converja a la solución exacta del sistema de ecuaciones lineales original:

Análisis de los autovalores de la matriz \mathbf{T}

Norma infinito de la matriz \mathbf{T} .

Análisis de los autovalores de T

En el método iterativo de JACOBI el vector error entre dos iteraciones consecutivas cumple con la igualdad

$$\underline{\varepsilon}_{k+1} = \mathbf{T} \cdot \underline{\varepsilon}_k$$

De modo que

$$\underline{\varepsilon}_1 = \mathbf{T} \cdot \underline{\varepsilon}_0$$

$$\underline{\varepsilon}_2 = \mathbf{T} \cdot \underline{\varepsilon}_1 = \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} \cdot \underline{\varepsilon}_0 = \mathbf{T}^2 \cdot \underline{\varepsilon}_0$$

$$\underline{\varepsilon}_3 = \mathbf{T} \cdot \underline{\varepsilon}_2 = \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} \cdot \underline{\varepsilon}_0 = \mathbf{T}^3 \cdot \underline{\varepsilon}_0$$

para la iteración k-ésima el error en el método de JACOBI

$$\underline{\varepsilon}_k = \mathbf{T} \cdot \underline{\varepsilon}_{k-1} = \mathbf{T} \cdot \dots \dots \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} \cdot \underline{\varepsilon}_0 = \mathbf{T}^k \cdot \underline{\varepsilon}_0$$

Considerando que la matriz \mathbf{T} , tiene autovectores \underline{v}_j asociados autovalores λ_j , en la forma

$$\mathbf{T} \cdot \underline{v}_j = \underline{v}_j \cdot \lambda_j$$

Es posible agrupar los autovectores \underline{v}_j como columnas de una matriz \mathbf{P} , y los autovalores λ_j , como elementos no nulos de una matriz diagonal $\mathbf{\Lambda}$, y obtener la siguiente igualdad matricial que agrupa todos los autovalores y autovectores de la matriz \mathbf{T}

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{\Lambda}$$

Si todos los autovectores \underline{v}_j son linealmente independientes, entonces la matriz \mathbf{P} tiene inversa, y es posible diagonalizar a la matriz \mathbf{T} en la forma

$$\mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}$$

O alternativamente

$$\mathbf{T} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{P}^{-1}$$

Al considerar esta igualdad en la potencia de la matriz \mathbf{T} , se tiene

$$\mathbf{T}^k = \mathbf{T} \cdot \dots \dots \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{T}$$

$$\mathbf{T}^k = \mathbf{P} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{P}^{-1} \cdot \dots \dots \mathbf{P} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{P}^{-1}$$

$$\mathbf{T}^k = \mathbf{P} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot (\mathbf{P}^{-1} \cdot \dots \dots \mathbf{P}) \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot (\mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{P}) \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot (\mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{P}) \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{P}^{-1}$$

$$\mathbf{T}^k = \mathbf{P} \cdot \mathbf{\Lambda} \dots \dots \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{P}^{-1}$$

que resulta

$$\mathbf{T}^k = \mathbf{P} \cdot \mathbf{\Lambda}^k \cdot \mathbf{P}^{-1}$$

Es oportuno destacar que una matriz diagonal Λ , elevada a la potencia k , resulta en una matriz diagonal Λ^k , cuyos elementos no nulos son las potencias k de los elementos no nulos de la matriz diagonal Λ

Entonces el error en la iteración k -ésima del método de JACOBI es

$$\underline{\varepsilon}_k = \mathbf{T}^k \cdot \underline{\varepsilon}_0$$

$$\underline{\varepsilon}_k = \mathbf{P} \cdot \Lambda^k \cdot \mathbf{P}^{-1} \cdot \underline{\varepsilon}_0$$

y será cada vez más pequeño, si todos los autovalores de la matriz \mathbf{T} , son en valor absoluto inferiores a uno.

En forma equivalente, si el mayor de los valores absolutos de los autovalores de \mathbf{T} es menor a uno, entonces el error en la iteración k -ésima del método de JACOBI será cada vez más pequeño y el método convergerá a la solución exacta.

El mayor de los valores absolutos de los autovalores de una matriz \mathbf{T} es el denominado “radio espectral de la matriz”

Norma infinito de la matriz \mathbf{T} .

Como se trató anteriormente, en el método iterativo de JACOBI el vector error entre dos iteraciones consecutivas cumple con la igualdad

$$\underline{\varepsilon}_{k+1} = \mathbf{T} \cdot \underline{\varepsilon}_k$$

Para asegurar que el vector error sea cada vez más pequeño, se puede considerar alguna *norma del vector error*. Así aplicando alguna norma en ambos miembros de la igualdad anterior, se tiene

$$\|\underline{\varepsilon}_{k+1}\| = \|\mathbf{T} \cdot \underline{\varepsilon}_k\|$$

Pero considerando la propiedad de la norma del producto, se tiene

$$\|\mathbf{T} \cdot \underline{\varepsilon}_k\| \leq \|\mathbf{T}\| \cdot \|\underline{\varepsilon}_k\|$$

con lo que resulta en que la norma del vector error en la iteración $(k+1)$ es menor o igual al producto de la norma de la matriz \mathbf{T} por la norma del vector error en la iteración (k)

$$\|\underline{\varepsilon}_{k+1}\| \leq \|\mathbf{T}\| \cdot \|\underline{\varepsilon}_k\|$$

Para que norma del vector error en la iteración $(k+1)$ sea cada vez más pequeña, y en el límite tienda a cero, y por ello el vector error tienda al vector nulo, se debe cumplir que

$$\|\mathbf{T}\| < 1$$

En particular, es oportuno destacar que la *norma infinito de una matriz* cualquiera **M** es:

$$\|\mathbf{M}\|_{\infty} = \text{Máx para todo } i \left\{ \sum_{j=1}^N |\mathbf{M}(i,j)| \right\}$$

Al considerar la definición de la matriz **T** del método de JACOBI, se tiene

$$\mathbf{T} = -\mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{B}$$

siendo

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{B}$$

Resulta siempre que cualquier elemento de la matriz **T** es:

$$\mathbf{T}(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ \frac{-\mathbf{A}(i,j)}{\mathbf{A}(i,i)} & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$$\|\mathbf{T}\|_{\infty} = \text{Máx para todo } i \left\{ \sum_{j=1; i \neq j}^N \left| \frac{-\mathbf{A}(i,j)}{\mathbf{A}(i,i)} \right| \right\}$$

Si se busca que

$$\|\mathbf{T}\|_{\infty} < 1$$

Entonces

$$\text{Máx para todo } i \left\{ \sum_{j=1; i \neq j}^N \left| \frac{-\mathbf{A}(i,j)}{\mathbf{A}(i,i)} \right| \right\} < 1$$

Considerando que el $|\mathbf{A}(i,i)|$, valor absoluto del cada elemento diagonal de la matriz **A**, es constante para la sumatoria en j , se tiene que

$$\text{Máx para todo } i \left\{ \left| \frac{1}{\mathbf{A}(i,i)} \right| \sum_{j=1; i \neq j}^N |\mathbf{A}(i,j)| \right\} < 1$$

Alternativamente se puede escribir que

$$\text{Para todo } i \left\{ \sum_{j=1; i \neq j}^N |\mathbf{A}(i,j)| \right\} < |\mathbf{A}(i,i)|$$

Para que la norma infinito de la matriz **T** sea menor a uno, y así el vector error tienda al vector nulo, y por lo tanto el método de JACOBI converja a la solución exacta del sistema de ecuaciones lineales, el valor absoluto del elemento diagonal de cada fila, $|\mathbf{A}(i,i)|$, debe ser mayor que la suma de los valores absolutos de los demás elementos de la fila.

*La matriz **A** con dicha propiedad se dice que es estrictamente diagonal dominante.*