Conceptos fundamentales de Estadística Multivariada

Hossein Tavakoli Dinani

22, 24 de agosto 2023

Contenido del clase

- Algebra matricial

- Medidas descriptivas de variables aleatorias multivariadas
  - La media
  - La matriz de covarianzas
  - La matriz de correlaciones

Matrices

- Matriz $A(n \times p)$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix}$$

- Matriz de identidad

$$I = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

- $A^T(p \times n)$: matriz traspuesta de $A(n \times p)$: $(A^T)^T = A$
-

- Suma de matrices: $C = A + B, c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Propiedades:

- $A + B = B + A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$

Producto de matrices

- Producto de matrices $A(n \times p), B(p \times k)$:

$$C = AB,$$
$$c_{ij} = \sum_{m=1}^{p} a_{im} b_{mj}$$

- Propiedades:

  - $A(B + C) = AB + AC$
  - $(AB)^T = B^T A^T$
  - $AI = IA = A$

Producto Kronecker de matrices

- El producto Kronecker de las matrices $A(k \times n)\ y\ B(p \times q)$ se obtiene multiplicando cada elemento de la primera matriz con todos los elementos de la segunda matriz

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1}B & \cdots & a_{kn}B \end{bmatrix}$$

Ejemplo: $I_3 \otimes A = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}$

- Propiedades:
  - Si c es un escalar $c \otimes A = A \otimes c = cA$
  - El producto Kronecker no es conmutativo.
    Sin embargo, si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son vectores: $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}^{\mathrm{T}} = \mathbf{y}^{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{x}$
  - $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$
  - $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$

Rango de una matriz

- Rango de una matriz: el numero máximo de vectores fila o columna linealmente independientes que contiene la matriz
- Propiedades:
  - $rg(A_{n\times p}) \leq \min(n, p)$
  - Si $rg(A_{n\times p}) = \min(n, p)$ se dice A es de rango complete.
  - $rg(A + B) \leq rg(A) + rg(B)$
  - $rg(AB) \leq \min(rg(A), rg(B))$
  - $rg(A^T A) = rg(AA^T) = rg(A)$
  - Si $rg(A_{n\times n}) < n$ se dice la matriz A es singular.
- El rango de una matriz se puede calcular a través de su determinante.

Matrices cuadradas

- Matriz cuadrada: numero de filas y columnas son iguales.
- A es una matriz simétrica si $A^T = A$

➢ Demuestra que para una matriz $B_{n \times p}$ rectangular, $B^T B$ y BB^T son matrices cuadradas simétricas.

- Sobre matrizes cuadradas se puede definir dos medidas escalares:
  - La traza
  - El determinante

Traza

- La traza: $tr(A) = \sum_{i=1}^{p} a_{ii}$
- Propiedades:
  - $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$
  - $tr(\lambda A) = \lambda tr(A)$ donde λ es un escalar.
  - $tr(ABC) = tr(BCA) = tr(CAB)$

Determinante

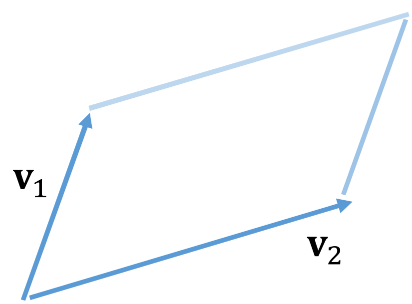
- El determinante de la matriz $A_{n\times n}$: $|A| = \sum(-1)^r a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$

  Donde en cada producto aparezca una vez un elemento de cada fila y uno de cada columna
  r es el numero de cambios entre dos subindices consecutivos para poner $i_1, i_2, \dots, i_n$ en el orden $1,2, \dots, n$. El sumatorio tiene $n!$ terminos.

- El determinante se puede calcularse $|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} m_{ij}$

- $A_{2\times 2}$: El determinante es el área de paralelogramo formado por vectores de columna

- $A_{3\times 3}$: El determinante se puede interpretarse como el volumen, hipervolumen ($n > 3$)



Determinante

- Propiedades:
  - $|\lambda A| = \lambda^n |A|$
  - $|A^T| = |A|$
  - Si A y B son matrices cuadradas: $|AB| = |A||B|$.
  - Determinante de una matriz diagonal se obtiene multiplicando los elementos en diagonal.
  - Si permutamos dos filas o dos columnas entre sí, el determinante cambia solo su signo.
  - Si una fila (o columna) de una matriz es una combinación lineal de las restantes filas (o columnas), la matriz es singular (su rango es menor que n) y su determinante es cero.

Inversa de una matriz

- La inversa de la matriz $A_{n\times n}$, **no singular**, se define como

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

- Propiedades:
  - $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$para matrices cuadradas no singulares.
  - $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

➢ El determinante de la inversa de A?

➢ Demuestra si la matriz A es simétrica también lo es A^{-1}

Matrices ortogonales

- Una matriz ortogonal C representa un giro en el espacio.

- Si aplicamos C a un vector $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} = C\mathbf{x}$, debemos tener:

$$\mathbf{x}^{\mathbf{T}}\mathbf{x} = \mathbf{y}^{\mathbf{T}}\mathbf{y} = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}C^{T}C\mathbf{x}$$

  Por lo tanto: $C^{T}C = I$

- Y obtenemos la condición de ortogonalidad: $C^{T} = C^{-1}$.

- En una matriz ortogonal filas (columnas) son vectores ortogonales entre si y tienen longitud 1. Por lo tanto forman una base ortonormal en R^{n}.

➢ El determinante de una matriz ortogonal es?

Vectores y valores propios

- Vectores propios: vectores cuya dirección no se modifica al transformarlo mediante la matriz. Suponemos $\mathbf{u} \neq 0$, $||\mathbf{u}|| = 1$

$$A\,\mathbf{u} = \lambda\,\mathbf{u}$$

Valor propio de la matriz

- Se obtiene los vectores y valores propios resolviendo $(A - \lambda I)\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$. Tiene valor no trivial $(\mathbf{u} \neq 0)$ si $|A - \lambda I| = 0$

➢ Si A es una matriz diagonal cual son los valores propios?

- Una matriz de orden n tiene n valores propios.

- Si un valor propio repite r veces se dice tiene multiplicidad r.

- Si $A_{n\times n}$ tiene n valores propios distintos, a cada valor podemos asignar un vector propio bien definido: **El conjunto de n vectores propios es linealmente independiente**.

Vectores y valores propios: Algunas propiedades

- Si λ es un valor propio de A, λ^r es un valor propio de A^r. Si A^{-1} existe, λ^{-1} es un valor propio de A^{-1}.

- $tr(A) = \sum_i \lambda_i$

- $|A| = \prod_i \lambda_i$

- A, A^T y $P^{-1}AP$ tienen los mismos valores propios.

- Para una matriz triangular los valores propios son los elementos diagonales.

- Para matrices **simétricas**:
  - Los valores propios siempre son reales
  - Los vectores propios son ortogonales, linealmente independientes y forman una base ortonormal en R^n.

Diagonalización

- Una matriz cuadrada $A_{n\times n}$ es diagonalizable, si y solo si sus vectores propios son linealmente independientes. Es decir no sea singular (existe su inversa).

- Definimos la matriz $U = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n]$, y la matriz diagonal D formado por valores propios λ_i:

$$A[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n] = [\lambda_1\mathbf{u}_1, \dots, \lambda_n\mathbf{u}_n]$$

$$AU = UD$$

$$U^{-1}AU = D$$

Por lo tanto:

$$A = UDU^{-1}$$

Diagonalización

- Matrices simétricas se pueden convertir a una matriz diagonal a través de una transformación ortogonal (transformación de similitud):

$$D = U^T A\, U$$

  - Demostracion:

Descomposición espectral

- Descomponer una matriz cuadrada simétrica a sus vectores propios y valores propios.

- Tenemos $A = UDU^T$ que se puede escribirse a

$$A = [\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_n]\begin{bmatrix} \lambda_1 \mathbf{u}_1^T \\ \vdots \\ \lambda_n \mathbf{u}_n^T \end{bmatrix}$$

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{u}_\mathrm{i} \mathbf{u}_i^T$$

- También se puede descomponer una matriz rectangular $A_{n \times p}$

Descomposición en valores singulares

- Una matriz rectangular $A_{m\times n}$ puede descomponerse a

$$A_{m\times n} = U_{m\times m} D_{m\times n} V_{n\times n}^{T}$$

Donde:

- Las columnas de la matriz U son vectores propios de la matriz AA^T.
- Las columnas de la matriz V son vectores propios de la matriz $A^T A$.
- Los elementos en la diagonal principal de D son valores singulares de A (ordenado de mayor a menor) y el resto de sus elementos son ceros.
- Los valores singulares de A son la raíz cuadrada positiva de los autovalores no negativos de matrices AA^T y $A^T A$.

Raíz cuadrada de una matriz

- Una matriz cuadrada y semidefinida positiva puede descomponerse como el producto de una matriz simétrica por si:

$$A = HH$$

  Donde $H = UD^{1/2}U^T$ donde U es una matriz cuyas columnas son autovectores de la matriz A, y la matriz diagonal D está formado por los valores propios.

- Descomposición Cholesky: raíz cuadrada de una matriz cuadrada, simétrica y definida positiva también puede obtenerse como

$$A = TT^T$$

  Donde T es una matriz triangular con términos diagonales positivos.

- Descomposición Cholesky es un método eficiente para calcular el determinante

$$|A| = |T||T^T| = \prod_i t_{ii}^2$$

Matriz idempotente

- Una matriz cuadrada es idempotente si $AA = A$.

- Si $|A| \neq 0$, el inverso de A existe y podemos escribir

$$A^{-1}AA = A = I$$

- Una matriz idempotente que no es la matriz identidad es singular.

- Valores propios de una matriz idempotente son 0 o 1

$$A\mathbf{u} = \lambda\,\mathbf{u} \rightarrow AA\,\mathbf{u} = A\,\mathbf{u} = \lambda A\mathbf{u} = \lambda^2\mathbf{u} \rightarrow \lambda^2 - \lambda = 0$$

- Al diagonalizar una matriz idempotente A, en la diagonal obtendremos un numero de unos igual a su rango y el resto de los elementos 0: $rg(A) = tr(A)$.

Forma cuadrática

- La forma cuadrática se construye usando la matriz simétrica $A_{n\times n}$ y vector $\mathbf{x}$:

$$\mathrm{Q(x)} = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$$

- Se puede escribir: $Q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_ix_j$

- Ejemplos:

$$Q(x) = x_1^2 + x_2^2$$
$$Q(x) = (x_1 - x_2)^2$$

Forma cuadrática

- Matriz A es semidefinida positiva, $A \geq 0$, si forma cuadrática formada con ella es un numero no negativo para cualquier $\mathbf{x} \neq 0$.

- A es definida positiva, $A > 0$, si $Q(x) > 0$.

- Se puede escribir la forma cuadrática usando valores propios de la matriz

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \mathbf{x}^T UDU^T\mathbf{x} = \left(U^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\right)^T D\left(U^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\right)$$
$$= \mathbf{z}^T D\mathbf{z} = \sum_i z_i^2 \lambda_i$$

- $A > 0$ si y solo si $\lambda_i > 0, \forall i$.

- Si $A > 0, A^{-1}$ existe y $|A| > 0$.

Ejercicios

- Demuestra que A^T, A, $P^{-1}AP$ tienen lo mismo valores propios.
- Demuestra que $tr(A) = \sum_i \lambda_i$, $|A| = \prod_i \lambda_i$.
- Demuestra que una matriz idempotente siempre es semidefinida positiva.