# Warte umienia, ciekawe zagadnienia

## 1 Wzory skróconego mnożenia

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{1}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \tag{2}$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \tag{3}$$

## 2 Układy równań liniowych

### 2.1 Terminologia i notacja

Po to, by było do bólu jasne, o czym jest mowa później. (Potencjalnie) nowe pojęcia wprowadzam pogrubione.

- **Równaniem liniowym** nad zmiennymi $x, y$ nazywamy każde równanie, które można sprowadzić do postaci $ax + by = c$, gdzie $a, b, c$ są znane, np. $3x + 2y = -8$. Analogicznie definiujemy równanie liniowe nad większymi ilościami zmiennych (ważne jest, by każda zmienna była pomnożona tylko przez stałą, tj. coś co nie jest zmienną).
- **Zbiorem** nazywamy kolekcję elementów (no shit, Sherlock), która nie zawiera dwóch tych samych elementów.
  - Zbiór pusty oznaczamy przez $\emptyset$.
  - Zbiór zawierający pojedynczy element (w tym przypadku liczbę 1) oznaczamy przez $\{1\}$ (więcej elementów można dodać po przecinku, np. $\{1, 2, 3\}$ ale nie będzie to tutaj potrzebne). Jednoelementowy zbiór nazywa się **singleton**.
  - Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych oznaczamy przez $\mathbb{R}$ (odręcznie pisane jako wielka litera R z podwójną nóżką).
- **Układem równań liniowych** nazywamy ciąg równań, które jednocześnie uznajemy za prawdziwe. Przykłady:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 4x + 7y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + 2y - z = 5 \\ 23y - 77z = 100 \\ 4x + \frac{7}{4}y + 9z = 3 \end{cases}$$

  Oczywiście, układ równań jest zdefiniowany nad tymi zmiennymi, nad którymi są zdefiniowane jego równania. Ale, *możemy* też sobie powiedzieć, że pewien konkretny układ jest nad innymi zmiennymi. Wtedy powiemy sobie, że każde z jego równań również jest nad tymi zmiennymi.

- Do każdego układu równań liniowych określamy **zbiór rozwiązań dla zmiennej** $x$. Chodzi o wszystkie możliwe wartości, jakie ta zmienna może przyjmować pod warunkiem, że wszystkie równania są prawdziwe. Są trzy przypadki:

| możliwe wartości $x$ | zbiór rozwiązań dla $x$ |
|---|---|
| tylko jedna wartość (oznaczę ją jako $w$) | $\{w\}$ |
| $x$ jest dowolne | $\mathbb{R}$ |
| żadna wartość nie jest możliwa | $\emptyset$ |

- **Rozwiązaniem** układu równań liniowych nazywamy przypisanie zmiennych, nad którym ten układ jest zdefiniowany do zbiorów rozwiązań dla tych zmiennych. Banalny przykład: Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ jest przypisanie $x \to \{3\}, y \to \{2\}$. *Można zauważyć, że takie przypisanie też jest funkcją.*
- Układ równań określamy jako **oznaczony**, jeśli jego rozwiązanie przypisuje do *każdej* zmiennej singleton. Np. rozwiązanie z poprzedniego podpunktu jest dowodem na to, że ów układ jest oznaczony. Mówimy, że taki układ **ma jedno rozwiązanie**.
- Układ równań określamy jako **sprzeczny**, jeśli jego rozwiązanie przypisuje do *przynajmniej jednej* zmiennej zbiór pusty ($\emptyset$). Mówimy, że taki układ **nie ma rozwiązań**.
- W przeciwnym wypadku, tj. jeśli rozwiązanie przypisuje do *przynajmniej jednej* ze zmiennych $\mathbb{R}$, a do innych (jeśli istnieją) singleton, układ nazywamy **nieoznaczonym**.

## 2.2 Spostrzeżenia przydatne do rozwiązywania zadań

Jak już zauważyliśmy IRL, układy równań z dwiema zmiennymi można rozwiązywać w następujący sposób:

1. Przekształć jedno z równań tak, by po jednej stronie była jedna z zmiennych, np. $x$. W ten sposób uzyskujemy wzór na $x$ zależny tylko od $y$.
2. Wstaw tak wyznaczony $x$ do drugiego równania, w ten sposób uzyskując równanie bez $x$.
3. Z tego równania można łatwo wyznaczyć wartość $y$.
4. Znając $y$, wstawiamy tą wartość do wzoru wyznaczonego w punkcie 1 i otrzymujemy wartość $x$.

Jak nietrudno zauważyć, ten sposób działania zadziała również przy większej liczbie zmiennych niż 2. Jednak szybko się okazuje, że takie liczenie jest powolne i nudne, komu by się chciało w ten sposób rozwiązywać. Spójrzmy zatem na krok 1, czy nie dałoby się go przyspieszyć. Zwróćmy uwagę, że przekształceń na równaniu dokonujemy poprzez wykonywanie działań po obu stronach równania. Np. dodając/odejmując coś do/od obu stron lub mnożąc/dzieląc obie strony przez jakąś liczbę (oczywiście pamiętając, żeby nie dzielić przez 0!). Zauważmy jednak, że przekształcając jedno z równań, mamy pewną wiedzę, którą możemy wykorzystać - resztę równań! W końcu one też są prawdziwe, więc możemy z jednej strony naszego równania dodać (odjąć, nawet pomnożyć i podzielić, choć to jest radziej przydatne) jedną stronę innego równania, a z drugiej drugą. Ale po co nam to? Przydatność tego sposobu łatwo zilustrować takim przykładem:

$$\begin{cases} 3x & - & 2y & = & 5 \\ 4x & + & 2y & = & 3 \end{cases}$$

Jeśli do pierwszego równania dodamy drugie po obu stronach, uzyskamy od razu równanie z jedną zmienną ($x$), co sprawiło że jedną operacją zrobiliśmy 2 kroki z metody wyżej! (żeby pokazać, co się zrobiło, można to odręcznie zapisać z boku jako „|+ drugie równanie") Można jednak powiedzieć „Ok, ale to działa tylko, gdy jeden z współczynników jest taki sam (lub pomnożony przez -1) jak odpowiedni współczynnik z innego równania!". Warto wtedy zauważyć, że przed dodaniem innego równania można je pomnożyć przez jakąś liczbę. Już nawet wspomnieliśmy o przypadku, gdy przed dodaniem mnożymy przez $-1$, wychodzi nam wtedy odejmowanie! Przykład:

$$\begin{cases} 2x & - & 7y & = & 5 \\ \frac{1}{2}x & + & 5y & = & 3 \end{cases}$$

W powyższym równaniu możemy od pierwszego równania odjąć 4-krotność drugiego, albo od drugiego równania $\frac{1}{4}$ drugiego.