Warte umienia, ciekawe zagadnienia

Spis treści

1 Wstęp

Uwaga: nowo zmienione sekcje są podkreślone na czerwono i wymienione tutaj.

1. 20/05/2021: Metoda macierzowa

2 Wzory skróconego mnożenia

Wzory te są prawdziwe dla dowolnych liczb $a, b \in \mathbb{R}$.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{1}$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \tag{2}$$
$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \tag{3}$$

3 Układy równań liniowych

3.1 Terminologia i notacja

Po to, by było do bólu jasne, o czym jest mowa później. (Potencjalnie) nowe pojęcia wprowadzam pogrubione.

- **Równanie liniowe** nad zmiennymi x, y to każde równanie, które można sprowadzić do postaci $ax+by = c$, gdzie a, b, c są znane, np. $3x+2y = -8$. Jest to **postać standardowa**. Analogicznie definiujemy równanie liniowe nad większymi ilościami zmiennych (ważne jest, by każda zmienna była pomnożona tylko przez stałą, tj. coś co nie jest zmienną).

  Liczby a, b, c nazywam **współczynnikami - współczynnik** to po prostu liczba która jest przez coś pomnożona (zwykle przez coś najważniejszego, czyli w równaniu jest to zmienna). Czasami to słowo używam konkretnie do liczby, która jest pomnożona przez zmienną, ale dopiero po sprowadzeniu do postaci standardowej. Na przykład w równaniu $7x = \frac{3x}{2} + 2$, współczynnik otrzymujemy dopiero po uproszczeniu: $\frac{11}{2}x = 2$ (tu oczywiście nastąpiło odjęcie $\frac{3}{2}x$ od obu stron). W ten sposób zmienna x ma tylko jeden współczynnik.

- **Zbiór** to kolekcja elementów (no shit, Sherlock), która nie zawiera dwóch tych samych elementów.
  - Zbiór pusty oznaczamy przez $\emptyset$.
  - Zbiór zawierający pojedynczy element (w tym przypadku liczbę 1) oznaczamy przez $\{1\}$ (więcej elementów można dodać po przecinku, np. $\{1, 2, 3\}$ ale nie będzie to tutaj potrzebne). Jednoelementowy zbiór nazywa się **singleton**.
  - Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych oznaczamy przez $\mathbb{R}$ (odręcznie pisane jako wielka litera R z podwójną nóżką).
- **Układ równań liniowych** to ciąg równań, które jednocześnie uznajemy za prawdziwe. Przykłady:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 4x + 7y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + 2y - z = 5 \\ 23y - 77z = 100 \\ 4x + \frac{7}{4}y + 9z = 3 \end{cases}$$

  Oczywiście, układ równań jest zdefiniowany nad tymi zmiennymi, nad którymi są zdefiniowane jego równania. Ale, *możemy* też sobie powiedzieć, że pewien konkretny układ jest nad innymi zmiennymi. Wtedy powiemy sobie, że każde z jego równań również jest nad tymi zmiennymi.
- Do każdego układu równań liniowych określamy **zbiór rozwiązań dla zmiennej** x. Chodzi o wszystkie możliwe wartości, jakie ta zmienna może przyjmować pod warunkiem, że wszystkie równania są prawdziwe. Są trzy przypadki:

możliwe wartości x	zbiór rozwiązań dla x
tylko jedna wartość (oznaczę ją jako w)	$\{w\}$
x jest dowolne	$\mathbb{R}$
żadna wartość nie jest możliwa	$\emptyset$

- **Rozwiązanie** układu równań liniowych to przypisanie zmiennych, nad którym ten układ jest zdefiniowany do zbiorów rozwiązań dla tych zmiennych. Banalny przykład: Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ jest przypisanie $x \to \{3\}, y \to \{2\}$. *Można zauważyć, że takie przypisanie też jest funkcją.*
- Układ równań określamy jako **oznaczony**, jeśli jego rozwiązanie przypisuje do *każdej* zmiennej singleton. Np. rozwiązanie z poprzedniego podpunktu jest dowodem na to, że ów układ jest oznaczony. Mówimy, że taki układ **ma jedno rozwiązanie**.
- Układ równań określamy jako **sprzeczny**, jeśli jego rozwiązanie przypisuje do *przynajmniej jednej* zmiennej zbiór pusty ($\emptyset$). Mówimy, że taki układ **nie ma rozwiązań**.
- W przeciwnym wypadku, tj. jeśli rozwiązanie przypisuje do *przynajmniej jednej* ze zmiennych $\mathbb{R}$, a do innych (jeśli istnieją) singleton, układ jest **nieoznaczony**.

3.2 Spostrzeżenia przydatne do rozwiązywania zadań

Jak już zauważyliśmy IRL, układy równań z dwiema zmiennymi można rozwiązywać w następujący sposób:

1. Przekształć jedno z równań tak, by po jednej stronie była jedna z zmiennych, np. x. W ten sposób uzyskujemy wzór na x zależny tylko od y.
2. Wstaw tak wyznaczony x do drugiego równania, w ten sposób uzyskując równanie bez x.
3. Z tego równania można łatwo wyznaczyć wartość y.

4. Znając y, wstawiamy tą wartość do wzoru wyznaczonego w punkcie 1 i otrzymujemy wartość x.

Jak nietrudno zauważyć, ten sposób działania zadziała również przy większej liczbie zmiennych niż 2. Jednak szybko się okazuje, że takie liczenie jest powolne i nudne, komu by się chciało w ten sposób rozwiązywać. Spójrzmy zatem na krok 1, czy nie dałoby się go przyspieszyć. Zwróćmy uwagę, że przekształceń na równaniu dokonujemy poprzez wykonywanie działań po obu stronach równania. Np. dodając/odejmując coś do/od obu stron lub mnożąc/dzieląc obie strony przez jakąś liczbę (oczywiście pamiętając, żeby nie dzielić przez 0!). Zauważmy jednak, że przekształcając jedno z równań, mamy pewną wiedzę, którą możemy wykorzystać - resztę równań! W końcu one też są prawdziwe, więc możemy z jednej strony naszego równania dodać (odjąć, nawet pomnożyć i podzielić, choć to jest radziej przydatne) jedną stronę innego równania, a z drugiej drugą. To się nazywa **dodawanie równań stronami** (oraz odejmowanie itd.). Ale po co nam to? Przydatność tego sposobu łatwo zilustrować takim przykładem:

$$\begin{cases} 3x & - & 2y & = & 5 \\ 4x & + & 2y & = & 3 \end{cases}$$

Jeśli do pierwszego równania dodamy drugie po obu stronach, uzyskamy od razu równanie z jedną zmienną (x), co sprawiło że jedną operacją zrobiliśmy 2 kroki z metody wyżej! (żeby pokazać, co się zrobiło, można to odręcznie zapisać z boku jako „|+ drugie równanie") Można jednak powiedzieć „Ok, ale to działa tylko, gdy jeden z współczynników jest taki sam (lub pomnożony przez -1) jak odpowiedni współczynnik z innego równania!". Warto wtedy zauważyć, że przed dodaniem innego równania można je pomnożyć przez jakąś liczbę. Już nawet wspomnieliśmy o przypadku, gdy przed dodaniem mnożymy przez -1, wychodzi nam wtedy odejmowanie! Przykład:

$$\begin{cases} 2x & - & 7y & = & 5 \\ \frac{1}{2}x & + & 5y & = & 3 \end{cases}$$

W powyższym równaniu możemy od pierwszego równania odjąć 4-krotność drugiego, albo od drugiego równania $\frac{1}{4}$ drugiego.

To pokazuje nam również drugą ciekawą rzecz: nawet jeśli akurat nie chcemy skorzystać z tej metody, to możemy mnożyć (a także i dzielić!) wszystkie współczynniki równania tak, by nam się łatwiej liczyło. Na przykład w powyższym układzie możemy pozbyć się ułamka w drugim równaniu poprzez pomnożenie wszystkich współczynników przez 2.

Drugim przykładem jest poniższy układ:

$$\begin{cases} 4x & + & 8y & = & 16 \\ 3x & - & 5y & = & 2 \end{cases}$$

Trzeba przyznać, że to pierwsze równanie aż woła o podzielenie obu stron przez 4! Zademonstruję pełne rozwiązanie tego układu:

$$\begin{cases} 4x & + & 8y & = & 16 & |/4 \text{ ("/" to jest oczywiście znak dzielenia)} \\ 3x & - & 5y & = & 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & + & 2y & = & 4 \\ 3x & - & 5y & = & 2 & |-3\cdot \text{pierwsze równanie} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & + & 2y & = & 4 \\ & - & 11y & = & -10 & |\cdot(-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & + & 2y & = & 4 \\ & & 11y & = & 10 & |/11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & + & 2y & = & 4 & | \text{ wstawiamy } y \text{ z 2 równania} \\ & & y & = & \frac{10}{11} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & + & \frac{20}{11} & = & 4 & |-\frac{20}{11} \\ & & y & = & \frac{10}{11} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & & & = & \frac{35}{11} \\ & & y & = & \frac{10}{11} \end{cases} \quad \text{I gotowe!}$$

Mogłeś zauważyć, że zapisywałem te równania tak, by zawsze wyrażenia z tą samą zmienną były ciurkiem pod sobą (szczególnie to widać w ostatnim układzie). O ile rozwiązując zadanie na kartce *robienie tego jest nadgorliwością, o tyle tutaj jest to przydatną ilustracją. Nie tylko pokazuje jasno co się zmienia z równania na równanie, ale jeszcze zwraca uwagę na to, że równanie bez y to to samo, co równanie z y pomnożonym przez zero. Na razie nie jest to ważne, ale warto trzymać to sobie w głowie, bo przyda się do zrozumienia trzeciego sposobu rozwiązywania układów równań...*

3.3 Zastosowania

Widzieliśmy już zastosowanie układów równań liniowych do kilku rzeczy, przypomnijmy je.

3.3.1 Interpretacja geometryczna

Po pierwsze, równanie liniowe, po przekształceniu do formy $y = ax + b$ tworzy nam **równanie** (linii...) **prostej**. a to **współczynnik kierunkowy**, czyli liczba mówiąca nam jak bardzo nachylona jest prosta. Gdy a jest dodatnie, funkcja jest rosnąca (czyli linia idzie do góry gdy x idzie w prawo). Gdy a jest ujemne, funkcja jest malejąca (nigdy nie zgadniesz, jak wpływa to na linię). *Możesz za to spróbować zgadnąć co się dzieje gdy $a = 0$...* Z kolei b to **wyraz wolny**. Nazwa sugeruje pewien rodzaj swobody - tutaj odnosi się to do tego, że zmiana b na większe lub mniejsze powoduje przesunięcie całej linii odpowiednio do góry lub w dół. Równanie prostej jest równaniem prostej dlatego, że każdy punkt (x, y) na tej prostej musi je spełniać.

Zatem co dostaniemy, gdy mamy układ dwóch równań liniowych? Otóż mamy wtedy po prostu dwie linie. Jednak jak wcześniej zauważyliśmy, w układzie równań chodzi o to, by oba te równania były spełnione *naraz*. Co to nam daje w kwestii punktów? Jak łatwo zauważyć, otrzymamy tylko te punkty, które spełniają oba równania. A więc na obrazku będą to punkty wspólne tych prostych.

Gdy układ jest oznaczony, proste się przecinają w jednym punkcie.

Gdy układ jest nieoznaczony, proste się pokrywają.

Gdy układ jest sprzeczny, proste są równoległe.

Widzimy zatem, że proste mają bardzo głębokie powiązania z równaniami liniowymi. Spójrzmy sobie na kolejne z takich powiązań.

3.3.2 Prosta przechodząca przez dwa punkty

A co jeśli mamy dwa punkty (x, y), i chcemy wyznaczyć równanie prostej, która przez nie przechodzi? Widać, że będzie tylko jedna taka prosta. Będzie więc miała równanie: $y = ax + b$. Żeby wyznaczyć równanie, potrzebujemy poznać a oraz b. Skoro każdy punkt prostej spełnia to równanie, to nasze dwa punkty również je spełniają. Możemy więc wstawić oba punkty do równania i uzyskać układ równań nad dwiema zmiennymi: a, b. Dla przykładu, niech punktami będą $(3, 7)$ oraz $(-2, 8)$. Stwórzmy układ równań:

$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = ax + b \end{cases}$$

W pierwszym równaniu podstawiamy pod (x, y) jeden punkt, a w drugim drugi.

$$\begin{cases} 7 = 3a + b \\ 8 = -2a + b \end{cases}$$

Teraz mamy układ równań, który umiemy już rozwiązać! Dla pełności wyznaczmy równanie, najpierw odejmując stronami drugie równanie od pierwszego:

$$\begin{cases} -1 = 5a & (\text{więc } a = -\frac{1}{5}) \\ 8 = -2a + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{5} \\ 8 = -\frac{2}{5} + b \end{cases}$$

$$b = 8 + \frac{2}{5} = \frac{42}{5}$$

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{5} \\ b = \frac{42}{5} \end{cases}$$

Otrzymujemy równanie prostej $y = -\frac{1}{5}a + \frac{42}{5}$.

3.3.3 Kiedy układy nie mają unikalnego rozwiązania?

Stwierdzenie 3.3.3.1. Układ jest nieoznaczony, gdy jedno równanie da się sprowadzić poprzez *elementarne działania* do drugiego.

Elementarne działanie to takie, w którym robimy działanie na obu stronach z użyciem albo liczby, albo innego równania z układu. Chodzi po prostu o to, by nie można było odjąć obu równań stronami od samych siebie i bohatersko stwierdzić, że voilà, oba równania sprowadziliśmy do $0 = 0$. Można też zauważyć, że zawsze, gdy da się sprowadzić elementarnymi działaniami równanie do drugiego, to można też je sprowadzić do równania $0 = 0$ i vice versa (po prostu odejmujemy (lub odpowiednio dodajemy) drugie z równań). Podobny argument pokazuje nam, że można też sprowadzić do dowolnej równości, w której nie ma zmiennych (pod warunkiem że jest prawdziwa!). W poniższym przykładzie wystarczy podzielić drugie równanie przez -3:

$$\begin{cases} 4x - 8y = 15 \\ -12x + 24y = -45 \end{cases}$$

Stwierdzenie 3.3.3.2. Układ jest sprzeczny, gdy takimi właśnie elementarnymi działaniami możemy sprowadzić go do fałszu (sprzeczności), czyli np. równania $0 = 1$.

W praktyce jest to bardzo podobny warunek do poprzedniego, bo oba najłatwiej jest sprawdzić poprzez sprowadzenie obu równań do postaci standardowej, ale w taki sposób, aby przy obu zmiennych były te same współczynniki. Jeśli po drugiej stronie równań wyjdą nam te same liczby, układ jest nieoznaczony. Jeśli wyjdą różne, układ jest sprzeczny.

3.4 Metoda macierzowa

Istotną metodą rozwiązywania układów równań liniowych jest metoda korzystająca z macierzy (czyli tabelek) liczbowych. Polega ona na sprowadzeniu wszystkich równań do postaci standardowej, po czym zmazaniu z niej (prawie) wszystkiego poza współczynnikami. Oto pobudzający wyobraźnię przykład:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 2z = 5 \\ 4x + 7y = 3 \\ x - y + 7z = 9 \end{cases} \Longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -2 & 5 \\ 4 & 7 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 7 & 9 \end{array}\right]$$

Jest to tak naprawdę tylko inna reprezentacja tego samego układu - inny sposób zapisu. Co ważne, w każdym momencie rozwiązywania można zamienić te dwie reprezentacje między sobą - w bardzo naturalny sposób. Wymienione w poprzedniej sekcji operacje elementarne mają bardzo naturalne odpowiedniki w reprezentacji macierzowej. Dodanie do siebie dwóch równań w naturalny sposób odpowiada dodaniu do siebie wierszy, a pomnożenie równania przez stałą odpowiada pomnożenie przez nią całego wiersza. *Dodam, że jest jeszcze jedna operacja elementarna: zamiana kolejności wiersza. Jest ona oczywista przy standardowej reprezentacji.*

Łatwo otrzymujemy zatem warunek na oznaczoność, nieoznaczoność i sprzeczność:

Stwierdzenie 3.4.0.1. Układ równań liniowych w postaci macierzowej jest:

1. sprzeczny, gdy da się go sprowadzić za pomocą elementarnych działań do takiego, w którym istnieje wiersz, w którym jedyny niezerowy wyraz jest w ostatniej kolumnie.
2. oznaczony, gdy za pomocą elementarnych działań da się sprowadzić go do postaci trójkątnej (o tym za chwilę).
3. nieoznaczony, gdy da się go sprowadzić za pomocą elementarnych działań do takiego, w którym liczba niezerowych wierszy jest mniejsza niż liczba zmiennych.

Dodatkowo, każdy z tych warunków wyklucza pozostałe oraz przynajmniej jeden zawsze zachodzi dla dowolnego układu.

Zanim przejdę do postaci trójkątnej, wytłuszczę intuicję, która się pojawiła w ostatnim podpunkcie. Chodzi o sformułowanie liczba niezerowych wierszy jest mniejsza niż liczba zmiennych". Oczywiście w przypadku standardowej reprezentacji odpowiada to sytuacji, gdy mamy mniej równań niż zmiennych.

3.4.1 Postać trójkątna

Macierz kwadratowa jest w postaci trójkątnej, gdy pod przekątną ma same zera. Ale co to dokładnie oznacza? Przekątną macierzy nazywamy tylko przekątną idącą z lewego górnego rogu:

$$\begin{bmatrix} \circ & & & \\ & \circ & & \\ & & \circ & \\ & & & \circ \end{bmatrix}$$

Konkretniej mówiąc, macierz z samymi zerami pod przekątną nazywamy górnotrójkątną, a z samymi zerami nad przekątną dolnotrójkątną, ale to nie ma dla nas znaczenia... Macierz możemy sprowadzić do postaci (*górno*) trójkątnej (nazywamy to schodkowaniem), poprzez następującą procedurę, która zeruje po kolei całe kolumny pod przekątną:

1. Spośród niewyzerowanych kolumn, wybierz tą najbardziej po lewej.
2. Spośród niewyzerowanych wierszy, wybierz ten z największą liczbą w zerowanej kolumnie.
3. Zamień ten wiersz z najwyższym niewyzerowanym.
4. Do wszystkich niższych wierszy dodaj odpowiednio pomnożony wiersz z największą liczbą tak, by liczba w rozpatrywanej kolumnie się wyzerowała.
5. Powtarzaj do skutku.

Kroki 2 i 3 nie są konieczne, jednak w praktyce często ułatwiają obliczenia w kroku 4.

Macierz trójkątna ma tą fajną własność, że jesteśmy w stanie łatwo znaleźć wartość ostatniej zmiennej, a potem każdej poprzedniej na podstawie wartości już policzonych zmiennych.

Sprowadzanie macierzy do postaci trójkątnej nazywamy *eliminacją Gaussa*. Jest to najszybszy sposób na rozwiązywanie *dowolnych* układów równań. Znamy jednak szybszy algorytm, który działa tylko dla macierzy 2x2 oraz 3x3 (odpowiada to układom równań 2 i 3 zmiennych).

3.5 Metoda wyznaczników

Wyznacznik macierzy to liczba, która ma różne ciekawe właściwości.

Jeśli A jest macierzą, jej wyznacznik oznaczamy $\det A$.

Ma on sens tylko dla macierzy kwadratowych, więc nie możemy go bezpośrednio policzyć dla reprezentacji układów równań. Możemy za to go obliczyć dla tej części „po lewej" od znaków = w oryginalnym układzie.

3.5.1 Wyznaczanie wyznacznika

W ogólności bardzo trudno jest wyznaczyć wyznacznik macierzy, jednak znamy łatwy sposób obliczania go dla macierzy 2x2 oraz 3x3: metoda krzyżowa. Dla macierzy 2x2 wygląda ona tak:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\det A = ad - bc$$

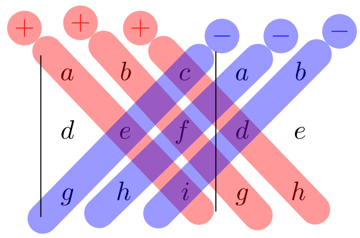
A dla 3x3 tak:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$\det A = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

Wizualnie wygląda to tak:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}\right]$$



3.5.2 Zastosowanie wyznacznika

Stwierdzenie 3.5.2.1. Gdy wyznacznik macierzy układu jest równy 0, układ równań nie może być oznaczony.

Stwierdzenie 3.5.2.2. Gdy wyznacznik macierzy układu nie jest równy 0, łatwo na jego podstawie obliczyć rozwiązanie układu. Zmiennej x przypiszemy liczbę $\frac{\det A_x}{\det A}$, gdzie A jest macierzą „po lewej” od $=$ w macierzy układu, a A_x otrzymujemy poprzez zamianę kolumny odpowiadającej zmiennej x na kolumnę „po prawej” od $=$. Weźmy dla przykładu układ równań:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 11 \\ 7 & 8 & 9 & 12 \end{array}\right]$$

Otrzymujemy następujący wzór na x (x odpowiada pierwszej kolumnie):

$$x = \frac{\det\left(\begin{bmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 11 & 5 & 6 \\ 12 & 8 & 9 \end{bmatrix}\right)}{\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}\right)}$$

Indeks